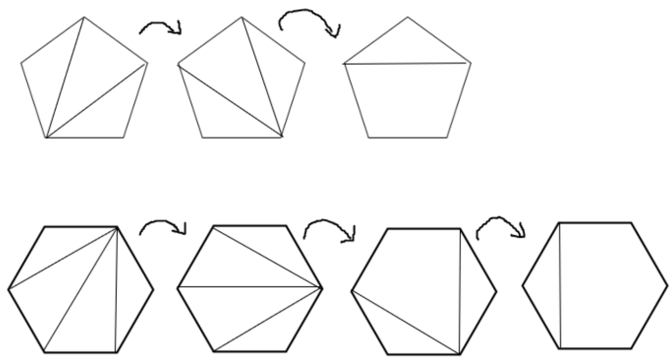
Taller No.1

David Gómez

Matemáticas
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Colombia
3 de septiembre de 2022

1. Punto 1



La idea de este proceso es ver cómo se generan las diagonales de un polígono. Por lo que observé, en los primeros dos pasos de cualquier polígono de lados mayores que o iguales a 4, la cantidad de diagonales es $(l-3)$, de ahí en adelante, el número de diagonales va disminuyendo hasta llegar a 1. La cantidad de pasos es $(l-2)$.

Si se realiza el paso a paso con una figura de más lados (en mi caso usé un dodecaedro), y se escribe el número de diagonales obtenidas en cada paso se puede ver que la operación a realizar es la siguiente:

$$\begin{aligned}(l-3)+\sum_{i=1}^{l-3} i &= (l-3)+\frac{(l-3)(l-2)}{2}\\ &= \frac{l^2-2l-3l+6+2l-6}{2}\\ &= \frac{l(l-3)}{2}\end{aligned}$$

Por otro lado, si se intuye una función recursiva a partir de procesos como el ilustrado en la imágen, se llega a que la función D, la cual tiene de entrada el número de lados, y salida el número de diagonales, se puede definir como:

$$D(l) := \begin{cases} D(l-1)+l-2 \\ D(4)=2 \end{cases}$$

En base a esto, procedo a afirmar que:

$$D(l) = (l-3)+\sum_{i=1}^{l-3} i \ , \ \forall l \mid l \in \mathbb{N} \wedge l \geq 5$$

Caso base, $n=5$

$$\begin{aligned}D(5) &= (5-3)+\sum_{i=1}^{5-3} i\\ D(4)+3 &= (2)+\sum_{i=1}^{2} i\\ 2+3 &= 2+1+2\\ 5 &= 5 \qquad \textit{true}\end{aligned}$$

Caso inductivo, $n = k + 1$

$$\begin{aligned}
D(k+1) &= D(k) + (k-1) \\
&= \frac{k(k-3)}{2} + (k-1) \\
&= \frac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2} \\
&= \frac{k^2 - k - 2}{2} \\
&= \frac{k^2 + k - 2k - 2}{2} \\
&= \frac{k(k+1) - 2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k-2)}{2}
\end{aligned} \qquad \square$$

2. Punto 2

$$v(n) := \begin{cases} v(n-1)\ \left[1 - \frac{K}{100}\right] \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
v(0) &= v_0 \\
v(1) &= v_0 \left(1 - \frac{K}{100}\right) \\
v(2) &= v_0 \left(1 - \frac{K}{100}\right) \left(1 - \frac{K}{100}\right) \\
&\vdots \\
v(n) &= v_0 \left(1 - \frac{K}{100}\right)^n \ , \ \forall n \,|\, n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1
\end{aligned}$$

Caso base, $n = 1$

$$\begin{aligned}
v(1) &= v_0 \left(1 - \frac{K}{100}\right) \\
v_0 \left(1 - \frac{K}{100}\right) &= v_0 \left(1 - \frac{K}{100}\right)
\end{aligned}$$

Caso inductivo, $n = c + 1$

$$\begin{aligned}
v(c+1) &= v(c)\ \left[1 - \frac{K}{100}\right] \\
&= v_0 \left(1 - \frac{K}{100}\right)^c \left(1 - \frac{K}{100}\right) \\
&= v_0 \left(1 - \frac{K}{100}\right)^{c+1}
\end{aligned} \qquad \square$$

3. Punto 3

$$v(n) := \begin{cases} v(n-1)\ \left[1 - \frac{K}{100}\right] - C \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
v(0) &= v_0 \\
v(1) &= v_0\ \left(1 - \frac{K}{100}\right) - C \\
v(2) &= v_0\ \left(1 - \frac{k}{100}\right)^2 - C\ \left(1 - \frac{k}{100}\right) - C \\
&\vdots \\
v(n) &= v_0\ \left(1 - \frac{K}{100}\right)^n - C\sum_{i=0}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{100}\right)^i\ ,\ \forall n \mid n \in \mathbb{N} \land n \geq 1
\end{aligned}$$

Caso base, $n = 1$

$$\begin{aligned}
v(1) &= v_0\ \left(1 - \frac{K}{100}\right) - C \\
v_0\ \left(1 - \frac{K}{100}\right) - C &= v_0\ \left(1 - \frac{K}{100}\right) - C
\end{aligned}$$

Caso inductivo, $n = u + 1$

$$\begin{aligned}
v(u+1) &= v(u)\ \left[1 - \frac{K}{100}\right] - C \\
&= \left(v_0\left(1 - \frac{K}{100}\right)^u - C\sum_{i=0}^{u-1}\left(1 - \frac{k}{100}\right)^i\right)\left(1 - \frac{K}{100}\right) - C \\
&= v_0\ \left(1 - \frac{K}{100}\right)^{u+1} - C\sum_{i=0}^{u-1}\left(1 - \frac{k}{100}\right)^{i+1} - C \\
&= v_0\ \left(1 - \frac{K}{100}\right)^{u+1} - C\sum_{i=0}^{u}\left(1 - \frac{k}{100}\right)^{i} \qquad \square
\end{aligned}$$

4. Punto 4

$$C(\psi I) := \begin{cases} C(\psi) + 1 \\ C(I) = 1 \end{cases}$$

$$P(x\phi y) : C(y) = 2(C(x)) - 1$$

En axiomas

$$\begin{aligned}
&IDI && \text{Axioma} \\
C(I) &= 2C(I) - 1 \\
1 &= 2 - 1 \\
1 &= 1 && \mathit{true}
\end{aligned}$$

En R1

$$xIDyIIC(yII) = 2C(xI) - 1 \qquad \text{Definición de R1}$$
$$C(y) + 2 = 2C(x) + 2 - 1$$
$$C(y) = 2C(x) - 1 \qquad \textit{true} \text{ (por hipótesis de inducción)}$$