Titulo

Hecho por

DAVID GÓMEZ

Estudiante de Matemáticas

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Colombia

25 de noviembre de 2022

Sección 7.4

Índice

Punto 1

a

Demostración con suposición en DS($\mathcal{L}$)

(i) Si no hay cuantificadores que afecten globalmente a la conclusión entonces se puede definir de la misma forma que en DS

(ii) En caso de un cuantificador afectando la conclusión (o que sea referente a un objeto específico) hace falta ver las suposiciones y lograr llevarlas a un nivel del subconjunto al que se hace referencia (ej: tomar suposiciones de los pares para llegar a una conclusión sobre estos, sería lo mismo que reducir el conjunto a los pares y aplicar la definición para DS)

b

Derivaciones son suposiciones

(i) Si no hay cuantificadores que afecten la conclusión globalmente entonces funciona tal como en DS

(ii) Se toma todo $\psi \in \Gamma$ como verdadero y aplicando lo que aporta DS($\mathcal{L}$) a lo que ya se tenía en DS más las suposiciones

c

igual a (b) pero con pasos en los que se justifique con $\Rightarrow$

d

igual a (b) pero con pasos en los que se justifique con $\Leftarrow$

Punto 2

Refutar $\forall x \phi \equiv \phi$

Al añadir un cuantificador, ya sea implícita o explícitamente, se está trabajando sobre los elementos de un conjunto, digamos A
Si x es libre en ϕ, $\forall x \phi$, hace referencia a una propiedad que cumplen todos los elementos A
En caso de que ϕ no tenga cuantificador ni mención de la variable x entonces decir $\forall x \phi$ no es algo que realmente tenga mucho significado, pues nos dice que una proposición la cual en sí misma es verdad, se cumple para todos los elementos.
En el caso de que x sea libre en ϕ, decir $\forall x \phi \equiv \phi$ nos dice que la propiedad ϕ que se cumple para todos los elementos de A se cumple también para todos los elementos de todos los conjuntos, cosa que no es cierta.
ej:

0. $\forall x(\sqrt{x^2} = x)$	Aquí el conjunto es $\mathbb{R}^+$
1. $\forall x(\sqrt{x^2} = x) \equiv \sqrt{x^2} = x$	Proposición a refutar(p0)
2. $\sqrt{x^2} = x$	Ecuanimidad(p1, p0)
3. $\forall y(\sqrt{x^2} = x)$	Aquí el conjunto es $\mathbb{R}$, Generalización(p2)
4. $\forall y(\sqrt{x^2} = x) \rightarrow \sqrt{(-1)^2} = (-1)$	x no libre en (-1)
5. $\sqrt{(-1)^2} = (-1)$	MPP(p4, p3)
6. $\sqrt{(-1)^2} = 1$	Álgebra
7. $-1 = 1$	*false*

Punto 6

Tomando procedimiento 7.4.1

$f(n) = \frac{1}{n}, n > 0$

0. $f(n) > f(n+1)$	Demostración 1
1. $\{\epsilon > 0, n > 100\} \vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \lvert f(n) - 0 \rvert < \epsilon$	Demostración 2
2. $\mathit{limit}(f, 0) = \mathit{true}$	

Demostración 1

$$
\begin{aligned}
& \mathit{true} \\
\equiv \quad & \langle \text{ Aritmética } \rangle \\
& 1 > 0 \\
\equiv \quad & \langle \text{ Aritmética } \rangle \\
& n + 1 > n \\
\equiv \quad & \langle \text{ Aritmética } \rangle \\
& \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(f) \rangle \\
& f(n) > f(n+1)
\end{aligned}
$$

Demostración 2

$$
\begin{aligned}
& |f(n) - 0| < \epsilon \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(f) \rangle \\
& \frac{1}{n} < \epsilon \\
\equiv \quad & \langle\ n > 100,\ \text{transitividad}(<),\ \text{Aritmética} \ \rangle \\
& 0 < \frac{1}{100} < \frac{1}{n} < \epsilon \\
\equiv \quad & \langle \text{ transitividad}(>),\ \epsilon > 0 \ \rangle \\
& \mathit{true}
\end{aligned}
$$

Punto 7

Tomando procedimiento 7.4.1

$f(n) = \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}$

0. $f(n) > f(n+1)$	Demostración 1
1. $\{\epsilon > 0, n > 100\} \vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \|f(n) - 0\| < \epsilon$	Demostración 2
2. $\mathit{limit}(f, 0) = \mathit{true}$	

Demostración 1

$$
\begin{aligned}
& \mathit{true} \\
\equiv \quad & \langle \text{ Aritmética } \rangle \\
& 1 > 0 \\
\equiv \quad & \langle \text{ Aritmética } \rangle \\
& n + 2 > n + 1 \\
\equiv \quad & \langle \text{ Aritmética } \rangle \\
& \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def}(f) \rangle \\
& f(n) > f(n+1)
\end{aligned}
$$

Demostración 2

$$
\begin{aligned}
& |f(n) - 0| < \epsilon \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(f) \text{ } \rangle \\
& \frac{1}{n+1} < \epsilon \\
\equiv \quad & \langle \text{ } n > 100, \text{ transitividad}(<), \text{ Aritmética } \rangle \\
& 0 < \frac{1}{101} < \frac{1}{n+1} < \epsilon \\
\equiv \quad & \langle \text{ transitividad}(<), \epsilon > 0 \text{ } \rangle \\
& \mathit{true}
\end{aligned}
$$

Procedimientos

7.4.1

$$limit(f, 0) \equiv (\forall \epsilon \in \mathbb{R} \mid \epsilon > 0 : (\exists m \in \mathbb{R} \mid m \geq 0 : (\forall n \in \mathbb{N} \mid n > m : |f(n) - 0| < \epsilon)))$$

Por metateorema 7.22, demostrar

$$\{\epsilon > 0\} \vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} (\exists m \in \mathbb{R} \mid m \geq 0 : (\forall n \in \mathbb{N} \mid n > m|f(n) - 0| < \epsilon))$$

$$
\begin{aligned}
& (\exists m \in \mathbb{R} \mid m \geq 0 : (\forall n \in \mathbb{N} \mid n > m : |f(n) - 0| < \epsilon)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Azúcar sintáctico } \rangle \\
& \exists m \in \mathbb{R}(m \geq 0 \wedge (\forall n \in \mathbb{N} \mid n > m : |f(n) - 0| < \epsilon)) \\
\Leftarrow \quad & \langle \text{ instanciación con testigo } a \text{ } \rangle \\
& a \geq 0 \wedge (\forall n \in \mathbb{N} \mid n > a|f(n) - 0| < \epsilon) \\
\equiv \quad & \langle \text{ } a \geq 0 \equiv \mathit{true}, \text{ Identidad}(\wedge) \text{ } \rangle \\
& (\forall n \in \mathbb{N} \mid n > a|f(n) - 0| < \epsilon)
\end{aligned}
$$

Por metateorema 7.22, demostrar

$$\{\epsilon > 0, n > a\} \vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} |f(n) - 0| < \epsilon$$