Tarea 15

Hecho por

DAVID GÓMEZ

Estudiante de Matemáticas

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Colombia

2 de diciembre de 2022

Sección 7.5

Índice

Punto 1

Reflexividad de "="

$$(\forall x \in \mathbb{R} \mid : \; x = x)$$

Basta demostrar $x = x$ en $\mathbb{R}$ (MT 7.20)

0.	$x = x$	Bx6

Punto 2

Simetría de "="

$$(\forall x, y \in \mathbb{R} \mid x = y : y = x)$$

Basta demostrar $x = y \rightarrow y = x$ en $\mathbb{R}$ Suponga $\Gamma = \{x = y, \neg y = x\}$

0.	$x = y$	Γ
1.	$\neg y = x$	Γ
2.	$\neg y = x \rightarrow (\neg y = x)[x := y]$	Bx4(p0)
3.	$(\neg y = x)[x := y]$	MPP(p2, p1)
4.	$\neg y = y$	(p3)
5.	*false*	$y = y \equiv \mathit{true}$

Punto 3

Transitividad de "="

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R} \mid x = y \wedge y = z :)$$

Basta con demostrar $x = y \wedge y = x \rightarrow x = z$ en $\mathbb{R}$

Punto 4

"Leibniz" con igualdad

0.	$t = u$	Suposición
1.	$u = t$	Reflexividad(=)(p0)
2.	$t = u \rightarrow (\phi \equiv \phi[t := u])$	Bx7(p0)
3.	$\phi \equiv \phi[t := u]$	MPP(p2, p0)
4.	$u = t \rightarrow (\phi \equiv \phi[u := t])$	Bx7(p1)
5.	$\phi \equiv \phi[u := t]$	MPP(p4, p1)
6.	$\phi[t := u] \equiv \phi[x := t][t := u] \equiv \phi[x := u]$	t, u libres para x en ϕ
7.	$\phi[u := t] \equiv \phi[x := u][u := t] \equiv \phi[x := t]$	t, u libres para x en ϕ
8.	$\phi[u := t] \equiv \phi[t := u]$	Transitividad(p3, p5)
9.	$\phi[x := t] \equiv \phi[t := u]$	(p8, p6, p5)

Punto 5

Teo 7.28.2

$$
\begin{aligned}
& (\exists x \mid x = t : \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Azúcar sintáctico } \rangle \\
& \exists x (x = t \wedge \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\forall x)\text{, Dist.}(\neg, \wedge) \rangle \\
& \neg \forall x (\neg x = t \vee \neg \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ (alt.)Def.}(\rightarrow) \rangle \\
& \neg \forall x (x = t \rightarrow \neg \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Regla de un punto } (\forall x) \rangle \\
& \neg\neg \phi[x := t] \\
\equiv \quad & \langle \text{ Doble negación } \rangle \\
& \phi[x := t]
\end{aligned}
$$

Punto 7

a divide a sus múltiplos

$$(\forall a \in \mathbb{N} \mid : \ a \cdot \mid ab)$$

Basta demostrar $a \cdot \mid ab$ en $\mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
& a \cdot \mid ab \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\cdot \mid) \rangle \\
& \exists x (ax = ab) \\
\Leftarrow \quad & \langle \text{ Instanciación con testigo } x = b \rangle \\
& ab = ab \\
\equiv \quad & \langle \text{ Reflexividad}(=) \rangle \\
& \mathit{true}
\end{aligned}
$$

Punto 8

si a y b se dividen entre si, $a = b$ o $a = -b$

$$(\forall a, b \in \mathbb{N} \mid a \cdot\mid b \wedge b \cdot\mid a : a = b \vee a = -b)$$

Basta demostrar $a \cdot\mid b \wedge b \cdot\mid a \to a = b \vee a = -b$ en $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
& a \cdot\mid b \wedge b \cdot\mid a \to a = b \vee a = -b \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\cdot\mid) \rangle \\
& \exists x(ax = b) \wedge \exists y(by = a) \to a = b \vee a = -b \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist.}(\exists x, \wedge) \rangle \\
& \exists x(ax = b \wedge \exists y(by = a)) \to a = b \vee a = -b \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 7.20.2 } \rangle \\
& \forall x(ax = b \wedge \exists y(by = a) \to a = b \vee a = -b)
\end{aligned}$$

$$\{ax = b \wedge \exists y(by = a)\} \vdash_{\text{DS}(\mathcal{L})} a = b \vee a = -b$$

$$\begin{aligned}
& ax = b \wedge \exists y(by = a) \to a = b \vee a = -b \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist.}(\exists x, \wedge) \rangle \\
& \exists y(ax = b \wedge by = a) \to a = b \vee a = -b \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 7.20.2 } \rangle \\
& \forall y(ax = b \wedge by = a \to a = b \vee a = -b) \\
\equiv \quad & \langle \quad \rangle
\end{aligned}$$

$$\{ax = b \wedge by = a\} \vdash_{\text{DS}(\mathcal{L})} a = b \vee a = -b$$

0. $ax = b$	Suposición
1. $by = a$	Suposición
2. $a = \frac{b}{x}$	Álgebra(p0)
3. $by = \frac{b}{x}$	Transitividad(=)(p2, p1)
4. $y = \frac{1}{x}$	Álgebra(p3)
5. $x = y = -1 \vee x = y = 1$	Álgebra(p4), $(x, y \in \mathbb{N})$
6. $-a = b \vee a = b$	Transitividad(=)(p5, p0)

Punto 9

Punto 10