# Tarea 10


Hecho por

**DAVID GÓMEZ**



Estudiante de Matemáticas

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Colombia


21 de octubre de 2022

# Índice

**1. Sección 5.3** **3**
1.1. Punto 5 . . . 3
1.1.1. a . . . 3
1.1.2. b . . . 3
1.1.3. c . . . 4
1.2. Punto 6 . . . 4
1.2.1. a . . . 4
1.2.2. b . . . 5

**2. Sección 5.4** **5**
2.1. Punto 8 . . . 5
2.1.1. a . . . 5
2.1.2. b . . . 5
2.1.3. c . . . 6
2.2. Punto 10 . . . 6
2.3. Punto 11 . . . 7
2.3.1. a . . . 7
2.3.2. b . . . 8

**3. Sección 5.5** **8**
3.1. Punto 19 . . . 8
3.2. Punto 26 . . . 9
3.3. Punto 27 . . . 10

# 1. Sección 5.3

## 1.1. Punto 5

### 1.1.1. a

$\vdash_{\mathrm{DS}} \phi \to (\psi \to \phi)$

$$\begin{aligned}
& \phi \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Debilitamiento}(\vee) \rangle \\
& \phi \vee \neg\psi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\vee) \rangle \\
& \neg\psi \vee \phi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& \psi \to \phi
\end{aligned}$$

Por MT 5.5.1 se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}} \phi \to (\psi \to \phi)$

### 1.1.2. b

$\vdash_{\mathrm{DS}} ((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$

$$\begin{aligned}
& (\phi \to \psi) \to \phi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& \neg(\phi \to \psi) \vee \phi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist}(\neg, \to), \text{Leibniz}(\phi = p \vee \phi) \rangle \\
& (\phi \wedge \neg\psi) \vee \phi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist}(\vee, \wedge) \rangle \\
& (\phi \vee \phi) \wedge (\phi \vee \neg\psi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Idempotencia}(\vee) \rangle \\
& \phi \wedge (\phi \vee \neg\psi) \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Debilitamiento}(\wedge) \rangle \\
& \phi
\end{aligned}$$

Por MT 5.5.1 se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}} ((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$

### 1.1.3. c

$\vdash_{\text{DS}} (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \tau) \to (\phi \to \tau))$

$$
\begin{aligned}
& (\psi \to \tau) \to (\phi \to \tau) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& \neg(\psi \to \tau) \vee (\phi \to \tau) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 Leibniz}(\phi = \neg(\psi \to \tau) \vee p) \rangle \\
& \neg(\psi \to \tau) \vee (\neg\phi \vee \tau) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist}(\neg, \to), \text{Leibniz}(\phi = p \vee (\neg\phi \vee \tau)) \rangle \\
& (\psi \wedge \neg\tau) \vee (\neg\phi \vee \tau) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist}(\vee, \wedge) \rangle \\
& (\neg\phi \vee \tau \vee \psi) \wedge (\neg\phi \vee \tau \vee \neg\tau) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.1, Identidad}(\equiv), \text{Leibniz}(\phi = (\neg\phi \vee \tau \vee \psi) \wedge (\neg\phi \vee p)) \rangle \\
& (\neg\phi \vee \tau \vee \psi) \wedge (\neg\phi \vee \mathit{true}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.1, Identidad}(\equiv), \text{Leibniz}(\phi = (\neg\phi \vee \tau \vee \psi) \wedge p) \rangle \\
& (\neg\phi \vee \tau \vee \psi) \wedge \mathit{true} \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.24.3 } \rangle \\
& \neg\phi \vee \tau \vee \psi \\
\Leftarrow \quad & \langle \text{ Debilitamiento}(\vee) \rangle \\
& \neg\phi \vee \psi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& \phi \to \psi
\end{aligned}
$$

Por MT 5.5.2, y Def($\leftarrow$) se demuestra que
$\vdash_{\text{DS}} (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \tau) \to (\phi \to \tau))$

## 1.2. Punto 6

### 1.2.1. a

$\vdash_{\text{DS}} (\phi \to \psi) \to (\phi \vee \tau \to \psi \vee \tau)$

$$
\begin{aligned}
& \phi \to \psi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& \neg\phi \vee \psi \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Debilitamiento}(\vee) \rangle \\
& \neg\phi \vee \psi \vee \tau \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.4 } \rangle \\
& \phi \vee \psi \vee \tau \equiv \psi \vee \tau \\
\equiv \quad & \langle \text{ Idempotencia}(\vee), \text{Leibniz}(\phi = \phi \vee \psi \vee p \equiv \psi \vee \tau) \rangle \\
& \phi \vee \psi \vee \tau \vee \tau \equiv \psi \vee \tau \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\vee) \rangle \\
& \phi \vee \tau \vee \psi \vee \tau \equiv \psi \vee \tau \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def}(\to) \rangle \\
& \phi \vee \tau \to \psi \vee \tau
\end{aligned}
$$

Por MT 5.5.1 se demuestra que
$\vdash_{\text{DS}} (\phi \to \psi) \to (\phi \vee \tau \to \psi \vee \tau)$

#### 1.2.2. b

$\vdash_{\text{DS}} (\phi \to \psi) \to (\phi \land \tau \to \psi \land \tau)$

$$
\begin{aligned}
& (\phi \land \tau) \to (\psi \land \tau) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& \neg(\phi \land \tau) \lor (\psi \land \tau) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist}(\neg, \land), \text{Leibniz}(\phi = p \lor (\psi \land \tau)) \rangle \\
& \neg\phi \lor \neg\tau \lor (\psi \land \tau) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist}(\lor, \land), \text{Leibniz}(\phi = \neg\phi \lor p) \rangle \\
& \neg\phi \lor ((\neg\tau \lor \psi) \land (\neg\tau \lor \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.1, Identidad}(\equiv), \text{Leibniz}(\phi = \neg\phi \lor ((\neg\tau \lor \psi) \land p)) \rangle \\
& \neg\phi \lor ((\neg\tau \lor \psi) \land \mathit{true}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.24.3, Leibniz}(\phi = \neg\phi \lor p) \rangle \\
& \neg\phi \lor \neg\tau \lor \psi \\
\Leftarrow \quad & \langle \text{ Debilitamiento}(\lor) \rangle \\
& \neg\phi \lor \psi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& \phi \to \psi
\end{aligned}
$$

Por MT 5.5.2, Def($\leftarrow$) se demuestra que
$\vdash_{\text{DS}} (\phi \to \psi) \to (\phi \land \tau \to \psi \land \tau)$

# 2. Sección 5.4

## 2.1. Punto 8

#### 2.1.1. a

Si $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi$ , entonces $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi \lor \psi$

| | | |
|---|---|---|
| 0. | $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi$ | Suposición |
| 1. | $\phi \to (\phi \lor \psi)$ | Def(Debilitamiento($\lor$)) |
| 2. | $\phi \lor \psi$ | Modus Ponens(p1, p0) |

El uso de Modus Ponens requiere que $\phi$ se tenga, pero se sabe que $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi$, Por lo que, usando Transitividad($\to$) $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi \lor \psi$

#### 2.1.2. b

Si $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi \land \psi$ , entonces $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi$

| | | |
|---|---|---|
| 0. | $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi \land \psi$ | Suposición |
| 1. | $(\phi \land \psi) \to \phi$ | Def(Debilitamiento($\land$)) |
| 2. | $\phi$ | Modus Ponens(p1, p0) |

El uso de Modus Ponens requiere que $\phi \land \psi$ se tenga, pero se sabe que $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi \land \psi$, Por lo que, usando Transitividad($\to$) $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi$

### 2.1.3. c

Si $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi$ y $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \psi$ , entonces $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi \wedge \psi$

| | |
|---|---|
| 0. $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi$ y $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \psi$ | Suposición |
| 1. $\Gamma \vDash \phi$ y $\Gamma \vDash \psi$ | Coherencia(p0) |
| 2. $(\exists \mathbf{v} \mid \forall x \in \Gamma : \mathbf{v}[x] = \mathtt{T})$ | Suposición($\Gamma$ es satisfacible) |
| 3. $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{v}[\psi] = \mathtt{T}$ | Def(p2)(p1) |
| 4. $\mathbf{v}[\phi \wedge \psi] = \mathtt{T}$ | MT 2.23($\wedge$)(p3) |
| 5. $\Gamma \vDash \phi \wedge \psi$ | (p4, p3) |
| 6. $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi \wedge \psi$ | Completitud(p5) |

## 2.2. Punto 10

$\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi$ sii $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfacible

| | |
|---|---|
| 0. $\Gamma$ es satisfacible | Suposición |
| 1. Demostración 1 | |
| 2. Demostración 2 | |
| 3. $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi$ sii $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfacible | |

Demostración 1

Si $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi$ , entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfacible

| | |
|---|---|
| 0. $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi$ | Suposición |
| 1. $\Gamma \vDash \phi$ | Coherencia(p0) |
| 2. $(\exists \mathbf{v} \mid \forall x \in \Gamma : \mathbf{v}[x] = \mathtt{T})$ | Def(p1) |
| 3. $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{T}$ | (p2, p1) |
| 4. $\mathbf{v}[\neg\phi] = \mathtt{F}$ | MT 2.23($\neg$) |
| 5. Demostración 1.1 | |
| 6. $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfacible | (p5) |

Demostración 1.1

| | |
|---|---|
| 0. $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es satisfacible | Suposición |
| 1. $\Gamma$ es satisfacible y $\{\neg\phi\}$ es satisfacible | (p0) |
| 2. $(\exists \mathbf{w} \mid \forall x \in \Gamma : \mathbf{w}[x] = \mathtt{T})$ | Def(p1) |
| 3. $(\exists \mathbf{w} \mid \forall x \in \{\neg\phi\} : \mathbf{w}[x] = \mathtt{T})$ | Def(p1) |
| 4. $\mathbf{w}[\phi] = \mathtt{T}$ | (p1 Demostración 1) |
| 5. $\mathbf{w}[\neg\phi] = \mathtt{T}$ | (p3) |
| 6. $\mathbf{w}[\phi] = \mathtt{F}$ | MT 2.23($\neg$)(p5) |
| 7. $\mathbf{w}[\phi] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{w}[\phi] = \mathtt{F}$ | Absurdo(p6, p4) |

Demostración 2

Si $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfacible entonces $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi$

| | | |
|---|---|---|
| 0. | $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfacible | Suposición |
| 1. | $(\forall \mathbf{v} : (\exists x \in \Gamma \mid \mathbf{v}[x] = \mathtt{F}))$ | Def(p0) |
| 2. | $\Gamma$ es satisfacible | (p0 punto10) |
| 3. | $\{\neg\phi\}$es insatisfacible | (p2 ,p0) |
| 4. | $\mathbf{v}[\neg\phi] = \mathtt{F}$ | (p3) |
| 5. | $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{T}$ | MT 2.23($\neg$)(p4) |
| 6. | $\Gamma \vDash \phi$ | (p5, p2) |
| 7. | $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi$ | Completitud(p6) |

## 2.3. Punto 11

### 2.3.1. a

Si $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi \vee \psi$ , entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ o $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ es satisfacible

| | | |
|---|---|---|
| 0. | $\Gamma$ es satisfacible | Suposición |
| 1. | $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi \vee \psi$ | Suposición |
| 2. | $(\exists \mathbf{v} \mid \forall x \in \Gamma : \mathbf{v}[x] = \mathtt{T})$ | Def.(p0) |
| 3. | $\Gamma \vDash \phi \vee \psi$ | Coherencia(p1) |
| 4. | $\mathbf{v}[\phi \vee \psi] = \mathtt{T}$ | (p3, p2) |
| 5. | $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{T}$ o $\mathbf{v}[\psi] = \mathtt{T}$ | |
| 6. | Suposición 1 | |
| 7. | Suposición 2 | |
| 8. | Suposición 3 | |
| 9. | $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ o $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ es insatisfacible | |

Suposición 1

| | | |
|---|---|---|
| 0. | $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{v}[\psi] = \mathtt{T}$ | |
| 1. | $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfacible | (p0, p3 Punto 11) |
| 2. | $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ es insatisfacible | (p0, p3 Punto 11) |

Suposición 2

| | | |
|---|---|---|
| 0. | $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{v}[\psi] = \mathtt{F}$ | |
| 1. | $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfacible | (p0, p3 Punto 11) |
| 2. | $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ es satisfacible | (p0, p3 Punto 11) |

Suposición 3

| | | |
|---|---|---|
| 0. | $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{F}$ y $\mathbf{v}[\psi] = \mathtt{T}$ | |
| 1. | $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es satisfacible | (p0, p3 Punto 11) |
| 2. | $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ es insatisfacible | (p0, p3 Punto 11) |

ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO UNIVERSIDAD

#### 2.3.2. b

Si $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \neg(\phi \lor \psi)$ , entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi, \neg\psi\}$ es satisfacible

| | |
|---|---|
| 0. $\Gamma$ es satisfacible | Suposición |
| 1. $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \neg(\phi \lor \psi)$ | Suposición |
| 2. $\Gamma \vDash \neg(\phi \lor \psi)$ | Coherencia(p1) |
| 3. $(\exists \mathbf{v} \mid \forall x \in \Gamma : \mathbf{v}[x] = \mathtt{T})$ | Def(p0) |
| 4. $\mathbf{v}[\neg(\phi \lor \psi)] = \mathtt{T}$ | (p3, p2) |
| 5. $\mathbf{v}[\neg\phi \land \neg\psi] = \mathtt{T}$ | Dist($\neg$, $\lor$)(p4) |
| 6. $\mathbf{v}[\neg\phi] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{v}[\neg\psi] = \mathtt{T}$ | MT 2.23($\land$)(p5) |
| 7. $\Gamma \cup \{\neg\phi, \neg\psi\}$ es satisfacible | (p4, p0) |

## 3. Sección 5.5

### 3.1. Punto 19

$\Gamma \vdash_{\text{DS}} \psi \to \phi$ sii $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \psi \land \neg\phi \to \neg\psi$

| | |
|---|---|
| 0. $\Gamma$ es satisfacible | Suposición |
| 1. Demostración 1 | |
| 2. Demostración 2 | |
| 3. $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \psi \to \phi$ sii $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \psi \land \neg\phi \to \neg\psi$ | |

Si $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \psi \to \phi$ , entonces $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \psi \land \neg\phi \to \neg\psi$

| | |
|---|---|
| 0. $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \psi \to \phi$ | Suposición |
| 1. $\Gamma \vDash \psi \to \phi$ | Coherencia(p0) |
| 2. $(\exists \mathbf{v} \mid \forall x \in \Gamma : \mathbf{v}[x] = \mathtt{T})$ | Def(p0 Punto 19) |
| 3. $\mathbf{v}[\psi \to \phi] = \mathtt{T}$ | (p2, p1) |
| 4. $\mathbf{v}[\psi \land \neg\phi \to \neg\psi] = \mathtt{T}$ | Lema 19.1.2(p3) |
| 5. $\Gamma \vDash \psi \land \neg\phi \to \neg\psi (p4, p0)$ | |
| 6. $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \psi \land \neg\phi \to \neg\psi$ | Completitud(p5) |

Si $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \psi \land \neg\phi \to \neg\psi$ , entonces $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \psi \to \phi$

| | |
|---|---|
| 0. $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \psi \land \neg\phi \to \neg\psi$ | Suposición |
| 1. $\Gamma \vDash \psi \land \neg\phi \to \neg\psi$ | Coherencia(p0) |
| 2. $(\exists \mathbf{v} \mid \forall x \in \Gamma : \mathbf{v}[x] = \mathtt{T})$ | Def(p0 Punto 19) |
| 3. $\mathbf{v}[\psi \land \neg\phi \to \neg\psi] = \mathtt{T}$ | (p2, p1) |
| 4. $\mathbf{v}[\psi \to \phi] = \mathtt{T}$ | Lema 19.1.1 (p3) |
| 5. $\Gamma \vDash \psi \to \phi$ | (p4, p0) |
| 6. $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \psi \to \phi$ | Completitud(p5) |

Lema 19.1

$$
\begin{aligned}
& \psi \wedge \neg\phi \to \neg\psi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist}(\neg, \to) \rangle \\
& \neg(\psi \to \phi) \to \neg\psi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Contrapositiva } \rangle \\
& \psi \to (\psi \to \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.31.5 } \rangle \\
& (\psi \wedge \psi) \to \phi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.24.5, Leibniz}(\phi = p \to \phi) \rangle \\
& \psi \to \phi
\end{aligned}
$$

.1 Por MT 4.21 se demuestra que $(\psi \wedge \neg\phi \to \neg\psi) \equiv (\psi \to \phi)$

.2 Por Conmutativa($\equiv$) se demuestra que $(\psi \to \phi) \equiv (\psi \wedge \neg\phi \to \neg\psi)$

## 3.2. Punto 26

26

"Si $a, b \in \mathbb{Z}$ son tales que $par(ab)$, entonces al menos uno de $a$ y $b$ es par"
Sea $S_n$ el termino general de la sucesión que describe a los pares, se define el conjunto de los pares como:

$$\{S_n\} = \{2n, n \in \mathbb{Z}\}$$

Sea $U_n$ el termino general de la sucesión que describe a los impares, se define el conjunto de los impares como:

$$\{U_n\} = \{2n+1, n \in \mathbb{Z}\}$$

| | |
|---|---|
| 0. $a, b \in \mathbb{Z} \wedge ab \in \{S_n\}$ | Suposición |
| 1. $a, b \in \{U_n\}$ | Suposición |
| 2. $ab \in \{S_n\}$ | Debilitamiento($\wedge$)(p0) |
| 3. $a, b \in \mathbb{Z}$ | Debilitamiento($\wedge$)(p0) |
| 4. $ab = 2n(paraalgúnnentero)$ | (p2, p1) |
| 5. $a = 2c_0 + 1$ | (p1) |
| 6. $b = 2c_1 + 1$ | (p1) |
| 7. $ab = (2c_0+1)(2c_1+1) = 2(2c_0c_1 + c_0 + c_1) + 1 = 2c_2 + 1$ | (p6, p5) |
| 8. $ab \in \{U_n\}$ | (p7) |
| 9. $ab \in \{U_n\} \wedge ab \in \{S_n\}$ | Contradicción (p8, p2) |

Por lo que se concluye $\neg(a, b \in \{U_n\})$, es decir
$a \in \{S_n\} \vee b \in \{S_n\}$

## 3.3. Punto 27

27

"Si $a, b \in \mathbb{Z}$ son tales que $par(ab)$, entonces $a$ y $b$ son impares"
Sea $U_n$ el termino general de la sucesión que describe a los impares, se define el conjunto de los impares como:

$$\{U_n\} = \{2n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$$

| | |
|---|---|
| 0. $a, b \in \mathbb{Z} \wedge ab \in \{U_n\}$ | Suposición |
| 1. $a, b \in \{U_n\}$ | Debilitamiento($\wedge$) |
| 2. $a = 2k_0 + 1$ | (p1) |
| 3. $b = 2k_1 + 1$ | (p1) |
| 4. $ab = (2k_0 + 1)(2k_1 + 1) = 2(2k_0k_1 + k_0 + k_1) + 1 = 2k_2 + 1$ | (p3, p1) |
| 5. $ab \in \{U_n\}$ | |