ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA
LÓGICA CALCULATORIA
Taller
Herramientas Proposicionales

Considere las sustituciones:

$$\begin{array}{lcl} F_1 & = & \{p \mapsto (p \equiv q), q \mapsto (r \to s), r \mapsto false\} \\ F_2 & = & \{p \mapsto (p \equiv q)\} \\ F_3 & = & \{r \mapsto false\} \\ F_4 & = & \{p \mapsto (p \equiv q), q \mapsto (r \to s)\} \\ F_5 & = & \{q \mapsto (r \to s), r \mapsto false\} \end{array}$$

1. Calcular $\overline{F_1}(\phi)$, $\overline{F_2}(\phi)$, $\overline{F_3}(\phi)$, $\overline{F_4}(\phi)$ y $\overline{F_5}(\phi)$ para cada una de las siguientes proposiciones ϕ:
   - $\phi = ((p \wedge (\neg q)) \to r)$
   - $\phi = (p \to (q \to p))$
   - $\phi = (\neg((r \wedge (r \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg((p \to q) \vee (r \wedge (\neg r))))))$
2. Calcular:
   - $(\overline{F_1} \circ \overline{F_2})((p \wedge (\neg q)) \to r)$
   - $(\overline{F_3} \circ \overline{F_4})(p \to (q \to p))$
   - $(\overline{F_5} \circ \overline{F_1})(\neg((r \wedge (r \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg((p \to q) \vee (r \wedge (\neg r))))))$
   - $(\overline{F_2} \circ \overline{F_3})((p \wedge (\neg q)) \to r)$
   - $(\overline{F_4} \circ \overline{F_5})(p \to (q \to p))$
   - $(\overline{F_1} \circ \overline{F_3})(\neg((r \wedge (r \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg((p \to q) \vee (r \wedge (\neg r))))))$
3. Calcular:
   - $(\overline{F_1} \circ \overline{F_2} \circ \overline{F_3})((p \wedge (\neg q)) \to r)$
   - $(\overline{F_4} \circ \overline{F_5} \circ \overline{F_1})(p \to (q \to p))$
   - $(\overline{F_2} \circ \overline{F_3} \circ \overline{F_4})(\neg((r \wedge (r \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg((p \to q) \vee (r \wedge (\neg r))))))$
   - $(\overline{F_5} \circ \overline{F_1} \circ \overline{F_2})((p \wedge (\neg q)) \to r)$
   - $(\overline{F_3} \circ \overline{F_4} \circ \overline{F_5})(p \to (q \to p))$
   - $(\overline{F_5} \circ \overline{F_3} \circ \overline{F_1})(\neg((r \wedge (r \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg((p \to q) \vee (r \wedge (\neg r))))))$
4. Considere la sustitución $F = \{p \mapsto (p \equiv q), q \mapsto (r \to s), r \mapsto false\}$. Determine la proposición correspondiente a la sustitución textual de F en cada una de las siguientes proposiciones:
   - $((p \wedge (\neg q)) \to r)$
   - $(p \to (q \to p))$
   - $(\neg((r \wedge (r \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg((p \to q) \vee (r \wedge (\neg r))))))$
5. Para cada una de las siguientes proposiciones encuentre una sustitución F tal que la proposición resultante de la sustitución textual bajo F sea una tautología:
   - $(p \equiv r)$
   - $((p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q)))$
   - $((p \vee r) \leftarrow (p \wedge q))$
6. Sean p, q, r variables proposicionales distintas y ϕ, ψ, τ proposiciones tales que r no aparece en ϕ ni en ψ. Demuestre que si $\gamma = \psi$ [q := r] , entonces: $\phi\ [\ p, q := \psi, \tau\ ] = \phi\ [\ p := \gamma\ ][\ q := \tau\ ][\ r := q\ ]$.

7. Considere la siguiente afirmación: Tome dos variables proposicionales p y q tales que: q sea distinta a p y esta no aparezca ni en ϕ ni en ψ. Con base en esta afirmación:

   - Explique por qué es posible encontrar variables proposicionales p y q bajo las condiciones dadas.
   - Suponga que p y q son tales que satisfacen las condiciones en la afirmación anterior, excepto que q puede aparecer en ϕ o en ψ. Explique por qué, en cualquiera de estos casos, la siguiente igualdad puede fallar: $((\phi \to \psi) \equiv ((\neg\phi) \vee \psi)) = ((p \to q) \equiv ((\neg p) \vee q))[p := \phi][q := \psi]$.