Tarea 14

Hecho por

DAVID GÓMEZ

ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO

VIGILADA MINEDUCACIÓN

UNIVERSIDAD

Estudiante de Matemáticas
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Colombia
18 de noviembre de 2022

Sección 7.3 (Lemas al final)

Índice

Punto 1

a

Si hay alguien que pague impuestos...

$$I(x) := \text{“}x \text{ paga impuestos”}$$
$$P(x) := \text{“}x \text{ es político”}$$
$$F(x) := \text{“}x \text{ es filántropo”}$$

0. $(\exists x \mid : I(x) \to (\forall y \mid P(y) : I(y)))$	Suposición
1. $(\exists x \mid : F(x) \to (\forall y \mid I(y) : F(y)))$	Suposición
2. $\exists x I(x) \to \forall y (P(y) \to I(y))$	Azúcar sintáctico(p0)
3. $\exists x F(x) \to \forall y (I(y) \to F(y))$	Azúcar sintáctico(p1)
4. $\exists x I(x) \wedge \exists x F(x) \to \forall y (P(y) \to I(y))$	Lema 7.3.1(p3, p2)
5. $\exists x (\exists x I(x) \wedge F(x)) \to \forall y (P(y) \to I(y))$	Dist.($\exists x$, $\wedge$)

b

Si hay alguien que pague impuestos...

0. $(\exists x \mid : I(x) \to (\forall y \mid P(y) : I(y)))$	Suposición
1. $(\exists x \mid : F(x) \to (\forall y \mid I(y) : F(y)))$	Suposición
2. $\exists x I(x) \to \forall y (P(y) \to I(y))$	Azúcar sintáctico(p0)
3. $\exists x F(x) \to \forall y (I(y) \to F(y))$	Azúcar sintáctico(p1)
4. $\exists x I(x) \wedge \exists x F(x) \to \forall y (P(y) \to I(y)) \wedge \forall y (I(y) \to F(y))$	Lema 7.3.2(p3, p2)
5. $\exists x (\exists x I(x) \wedge F(x)) \to \forall x ((P(y) \to I(y)) \wedge (I(y) \to F(y)))$	Dist($\exists x$, $\wedge$), Dist($\forall x$, $\wedge$) (p4)
6. $\exists x (\exists x I(x) \wedge F(x)) \to \forall x (P(y) \to F(y))$	Transitividad($\to$)

Punto 2

$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \exists x \mathit{true} \equiv \mathit{true}$

$$\begin{aligned}
& \exists x \mathit{true} \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\exists x \phi) \ \rangle \\
& \neg \forall x \neg \mathit{true} \\
\equiv \quad & \langle \ \neg \mathit{true} \equiv \mathit{false} \ \rangle \\
& \neg \forall x \mathit{false} \\
\equiv \quad & \langle \ \forall x \mathit{false} \equiv \mathit{false} \ \rangle \\
& \neg \mathit{false} \\
\equiv \quad & \langle \ \neg \mathit{false} \equiv \mathit{true} \ \rangle \\
& \mathit{true}
\end{aligned}$$

Por metateorema de derivación se demuestra que $\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \exists x \mathit{true} \equiv \mathit{true}$

Punto 3

$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \exists x false \equiv false$

$$\begin{aligned}
& \exists x \mathit{false} \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\exists x\phi) \rangle \\
& \neg\forall x \neg \mathit{false} \\
\equiv \quad & \langle\ \neg \mathit{false} \equiv \mathit{true}\ \rangle \\
& \neg\forall x \mathit{true} \\
\equiv \quad & \langle\ \forall x \mathit{true} \equiv \mathit{true}\ \rangle \\
& \neg \mathit{true} \\
\equiv \quad & \langle\ \neg \mathit{true} \equiv \mathit{false}\ \rangle \\
& \mathit{false}
\end{aligned}$$

Por metateorema de derivación se demuestra que $\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \exists x \mathit{false} \equiv \mathit{false}$

Punto 4

$\exists x \exists x \phi \equiv \exists x \phi$

$$\begin{aligned}
& \exists x \exists x \phi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\exists x\phi) \rangle \\
& \neg\forall x \exists x \phi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Generalización, } x \text{ no libre en } \exists x\phi \rangle \\
& \neg\neg\exists x \phi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Doble negación } \rangle \\
& \exists x \phi
\end{aligned}$$

Por metateorema de derivación se demuestra que $\exists x \exists x \phi \equiv \exists x \phi$

Punto 5

$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \phi[x := t] \equiv \exists x\phi$, t libre para x en ϕ

$$\begin{aligned}
& \phi[x := t] \\
\equiv \quad & \langle \text{ Generalización, x no aparece libre en } \phi[x := t] \rangle \\
& \forall x \phi[x := t] \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Lema 7.3.3 } \rangle \\
& \exists x \phi[x := t]
\end{aligned}$$

ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO UNIVERSIDAD

Punto 6

$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \exists x\phi \vee \exists x\psi \equiv \exists x(\phi \vee \psi)$

$$
\begin{aligned}
& \exists x\phi \vee \exists x\psi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\exists x\phi) \rangle \\
& \neg\forall x\neg\phi \vee \neg\forall x\neg\psi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist.}(\neg, \wedge) \rangle \\
& \neg(\forall x\neg\phi \wedge \forall x\neg\psi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist.}(\forall x, \wedge) \rangle \\
& \neg\forall x(\neg\phi \wedge \neg\psi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\exists x\phi) \rangle \\
& \exists x\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist.}(\neg, \wedge) \rangle \\
& \exists x(\phi \vee \psi)
\end{aligned}
$$

Punto 7

$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \psi \vee \exists x\phi \equiv \exists x(\psi \vee \phi)$, x no libre en ψ

$$
\begin{aligned}
& \exists x(\psi \vee \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\exists x\phi) \rangle \\
& \neg\forall x\neg(\psi \vee \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist.}(\neg, \vee) \rangle \\
& \neg\forall x(\neg\psi \wedge \neg\phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist.}(\forall x, \wedge) \rangle \\
& \neg(\forall x\neg\psi \wedge \forall x\neg\phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Generalización, } x \text{ no libre en } \psi \rangle \\
& \neg(\neg\psi \wedge \forall x\neg\phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist.}(\neg, \wedge) \rangle \\
& \psi \vee \neg\forall x\neg\phi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\exists x\phi) \rangle \\
& \psi \vee \exists x\phi
\end{aligned}
$$

Por Conmutativa($\equiv$) y metateorema de derivación se demuestra que $\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \psi \vee \exists x\phi \equiv \exists x(\psi \vee \phi)$, x no libre en ψ

Punto 8

$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \psi \wedge \exists x\phi \equiv \exists x(\psi \wedge \phi)$, x no libre en ψ

$$
\begin{array}{ll}
& \exists x(\psi \wedge \phi) \\
\equiv & \langle \text{ Def.}(\exists x\phi) \rangle \\
& \neg\forall x\neg(\psi \wedge \phi) \\
\equiv & \langle \text{ Dist.}(\neg, \wedge) \rangle \\
& \neg\forall x(\neg\psi \vee \neg\phi) \\
\equiv & \langle \text{ Dist.}(\forall x, \vee), x \text{ no libre en } \psi \rangle \\
& \neg(\neg\psi \vee \forall x\neg\phi) \\
\equiv & \langle \text{ Dist.}(\neg, \vee) \rangle \\
& \psi \wedge \neg\forall x\neg\phi \\
\equiv & \langle \text{ Def.}(\exists x\phi) \rangle \\
& \psi \wedge \exists x\phi
\end{array}
$$

Por Conmutativa($\equiv$) y metateorema de derivación se demuestra que $\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \psi \wedge \exists x\phi \equiv \exists x(\psi \wedge \phi)$, x no libre en ψ

Punto 9

$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \psi \to \exists x\phi \equiv \exists x(\psi \to \phi)$, x no libre en ψ

$$
\begin{array}{ll}
& \exists x(\psi \to \phi) \\
\equiv & \langle \text{ (alt.)Def.}(\to) \rangle \\
& \exists x(\neg\psi \vee \phi) \\
\equiv & \langle \text{ Dist.}(\vee, \exists x), x \text{ no libre en } \psi \rangle \\
& \neg\psi \vee \exists x\phi \\
\equiv & \langle \text{ (alt.)Def.}(\to) \rangle \\
& \psi \to \exists x\phi
\end{array}
$$

Por Conmutativa($\equiv$) y metateorema de derivación se demuestra que $\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \psi \to \exists x\phi \equiv \exists x(\psi \to \phi)$, x no libre en ψ

Punto 10

$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} (\exists x \mid \mathit{false} : \phi) \equiv \mathit{false}$

$$
\begin{aligned}
& (\exists x \mid \mathit{false} : \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Azúcar sintáctico } \rangle \\
& \exists x(\mathit{false} \wedge \mathit{false}) \\
\equiv \quad & \langle\ \mathit{false} \wedge \phi \equiv \mathit{false}\ \rangle \\
& \exists x \mathit{false} \\
\equiv \quad & \langle\ \exists x \mathit{false} \equiv \mathit{false}\ \rangle \\
& \mathit{false}
\end{aligned}
$$

Por metateorema de derivación se demuestra que $\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} (\exists x \mid \mathit{false} : \phi) \equiv \mathit{false}$

Punto 12

$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} (\exists x \mid \psi \vee \tau : \phi) \equiv (\exists x \mid \psi : \phi) \vee (\exists x \mid \tau : \phi)$

$$
\begin{aligned}
& (\exists x \mid \psi \vee \tau : \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Azúcar sintáctico } \rangle \\
& \exists x((\psi \vee \tau) \wedge \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist.}(\wedge, \vee) \rangle \\
& \exists x((\psi \wedge \phi) \vee (\tau \wedge \phi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist.}(\exists x, \vee) \rangle \\
& \exists x(\psi \wedge \phi) \vee \exists x(\tau \wedge \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Azúcar sintáctico } \rangle \\
& (\exists x \mid \psi : \phi) \vee (\exists x \mid \tau : \phi)
\end{aligned}
$$

Por metateorema de derivación se demuestra que $\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} (\exists x \mid \psi \vee \tau : \phi) \equiv (\exists x \mid \psi : \phi) \vee (\exists x \mid \tau : \phi)$

Punto 13

$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \exists x \phi \equiv \exists y(\phi[x := y])$, y no libre en ϕ

$$
\begin{aligned}
& \exists x \phi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\exists x \phi) \rangle \\
& \neg \forall x \neg \phi \\
\equiv \quad & \langle\ \forall x \phi \equiv \forall y(\phi[x := y]),\ y \text{ no libre en } \phi\ \rangle \\
& \neg \forall y \neg(\phi[x := y]) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\exists x \phi) \rangle \\
& \exists y(\phi[x := y])
\end{aligned}
$$

Por metateorema de derivación se demuestra que $\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \exists x \phi \equiv \exists y(\phi[x := y])$, y no libre en ϕ

Punto 16

$\vdash_{\text{DS}(\mathcal{L})} \exists x\psi \to \phi \equiv \forall x(\psi \to \phi)$, x no libre en ϕ

$$
\begin{aligned}
& \exists x\psi \to \phi \\
\equiv \quad & \langle \text{(alt.)Def.}(\to) \rangle \\
& \neg\exists x\psi \vee \phi \\
\equiv \quad & \langle \neg\exists x\phi \equiv \forall x\neg\phi \rangle \\
& \forall x\neg\psi \vee \phi \\
\equiv \quad & \langle \text{Dist.}(\forall x, \vee), x \text{ no libre en } \phi \rangle \\
& \forall x(\neg\psi \vee \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{(alt.)Def.}(\to) \rangle \\
& \forall x(\psi \to \phi)
\end{aligned}
$$

Por metateorema de derivación se demuestra que $\vdash_{\text{DS}(\mathcal{L})} \exists x\psi \to \phi \equiv \forall x(\psi \to \phi)$, x no libre en ϕ

Punto 17

$\vdash_{\text{DS}(\mathcal{L})} \exists x(\phi \to \psi) \equiv \forall x\phi \to \exists x\psi$, x no libre en ϕ

$$
\begin{aligned}
& \exists x(\phi \to \psi) \\
\equiv \quad & \langle \text{Def.}(\exists x\phi) \rangle \\
& \neg\forall x\neg(\phi \to \psi) \\
\equiv \quad & \langle \text{Dist.}(\neg, \to) \rangle \\
& \neg\forall x(\phi \wedge \neg\psi) \\
\equiv \quad & \langle \text{Dist.}(\forall, \wedge) \rangle \\
& \neg(\forall x\phi \wedge \forall x\neg\psi) \\
\equiv \quad & \langle \text{Dist.}(\neg, \wedge) \rangle \\
& \neg\forall x\phi \vee \neg\forall x\neg\psi \\
\equiv \quad & \langle \text{Def.}(\exists x\phi) \rangle \\
& \neg\forall x\phi \vee \exists x\psi \\
\equiv \quad & \langle \text{(alt.)Def.}(\to) \rangle \\
& \forall x\phi \to \exists x\psi
\end{aligned}
$$

Por metateorema de derivación se demuestra que $\vdash_{\text{DS}(\mathcal{L})} \exists x(\phi \to \psi) \equiv \forall x\phi \to \exists x\psi$, x no libre en ϕ

Lemas

Lema 7.3.1

$(\phi \to \psi) \land (\tau \to \xi) \to (\phi \land \tau \to \psi)$

$$\Gamma = \{\phi \to \psi, \tau \to \xi\}$$

0.	$\phi \to \psi$	Γ
1.	$\tau \to \xi$	Γ
2.	$\neg(\phi \land \tau \to \psi)$	Intento por reducción al absurdo
3.	$\phi \land \tau \land \psi$	Dist.($\neg$, $\to$)(p2)
4.	ϕ	Debilitamiento(p3)
5.	$\neg\psi$	Debilitamiento(p3)
6.	ψ	MPP(p4, p0)
7.	$\neg\psi \land \psi$	Unión(p6, p5)
8.	*false*	(p7)

Dado que $\Gamma = \{\phi \to \psi, \tau \to \xi\} \cup \{\neg(\phi \land \tau \to \psi)\} \models$ *false* se demuestra que

$$(\phi \to \psi) \land (\tau \to \xi) \to (\phi \land \tau \to \psi)$$

Lema 7.3.2

$(\phi \to \psi) \land (\tau \to \xi) \to (\phi \land \tau \to \psi \land \xi)$

$$\Gamma = \{\phi \to \psi, \tau \to \xi\}$$

0.	$\phi \to \psi$	Γ
1.	$\tau \to \xi$	Γ
2.	$\neg(\phi \land \tau \to \psi \land \xi)$	Intento por reducción al absurdo
3.	$\phi \land \tau \land \neg(\psi \land \xi)$	Dist.($\neg$, $\to$)
4.	ϕ	Debilitamiento(p3)
5.	τ	Debilitamiento(p3)
6.	ψ	MPP(p4, p0)
7.	ξ	MPP(p5, p1)
8.	$\psi \land \xi$	Unión(p7, p6)
9.	$\psi \land \xi \land \neg(\psi \land \xi)$	Unión(p8, Debilitamiento(p3))
10.	*false*	(p9)

Dado que $\Gamma = \{\phi \to \psi, \tau \to \xi\} \cup \{\neg(\phi \land \tau \to \psi \land \xi)\} \models$ *false* se demuestra que

$$(\phi \to \psi) \land (\tau \to \xi) \to (\phi \land \tau \to \psi \land \xi)$$

Lema 7.3.3

$\forall x\phi \to \exists x\phi$

$$
\begin{aligned}
& \forall x\phi \to \exists x\phi \\
\equiv \quad & \langle \text{ (alt.)Def.}(\to) \rangle \\
& \neg\forall x\phi \vee \exists x\phi \\
\equiv \quad & \langle\, \neg\forall x\phi \equiv \exists x\neg\phi \,\rangle \\
& \exists x\neg\phi \vee \exists x\phi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist.}(\exists x,\ \vee) \rangle \\
& \exists x(\neg\phi \vee \phi) \\
\equiv \quad & \langle\, \neg\phi \vee \phi \equiv \mathit{true} \,\rangle \\
& \exists x \mathit{true} \\
\equiv \quad & \langle\, \exists x \mathit{true} \equiv \mathit{true} \,\rangle \\
& \mathit{true}
\end{aligned}
$$

Por Identidad($\equiv$) y metateorema de derivación se demuestra que $\forall x\phi \to \exists x\phi$