Tarea 10

Hecho por

DAVID GÓMEZ

Estudiante de Matemáticas

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Colombia

20 de octubre de 2022

Índice

1. Sección 5.3

1.1. Punto 5

1.1.1. a

$\vdash_{\mathrm{DS}} \phi \to (\psi \to \phi)$

$$
\begin{array}{ll}
 & \phi \\
\Rightarrow & \langle \text{ Debilitamiento}(\vee) \text{ } \rangle \\
 & \phi \vee \neg\psi \\
\equiv & \langle \text{ Conmutativa}(\vee) \text{ } \rangle \\
 & \neg\psi \vee \phi \\
\equiv & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
 & \psi \to \phi
\end{array}
$$

Por MT 5.5.1 se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}} \phi \to (\psi \to \phi)$

1.1.2. b

$\vdash_{\mathrm{DS}} ((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$

$$
\begin{array}{ll}
 & (\phi \to \psi) \to \phi \\
\equiv & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
 & \neg(\phi \to \psi) \vee \phi \\
\equiv & \langle \text{ Dist}(\neg, \to), \text{ Leibniz}(\phi = p \vee \phi) \text{ } \rangle \\
 & (\phi \wedge \neg\psi) \vee \phi \\
\equiv & \langle \text{ Dist}(\vee, \wedge) \text{ } \rangle \\
 & (\phi \vee \phi) \wedge (\phi \vee \neg\psi) \\
\equiv & \langle \text{ Idempotencia}(\vee) \text{ } \rangle \\
 & \phi \wedge (\phi \vee \neg\psi) \\
\Rightarrow & \langle \text{ Debilitamiento}(\wedge) \text{ } \rangle \\
 & \phi
\end{array}
$$

Por MT 5.5.1 se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}} ((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$

1.1.3. c

$\vdash_{\mathrm{DS}} (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \tau) \to (\phi \to \tau))$

$$
\begin{aligned}
& (\psi \to \tau) \to (\phi \to \tau) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& \neg(\psi \to \tau) \vee (\phi \to \tau) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 Leibniz}(\phi = \neg(\psi \to \tau) \vee p) \rangle \\
& \neg(\psi \to \tau) \vee (\neg\phi \vee \tau) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist}(\neg, \to), \text{ Leibniz}(\phi = p \vee (\neg\phi \vee \tau)) \rangle \\
& (\psi \wedge \neg\tau) \vee (\neg\phi \vee \tau) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist}(\vee, \wedge) \rangle \\
& (\neg\phi \vee \tau \vee \psi) \wedge (\neg\phi \vee \tau \vee \neg\tau) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.1, Identidad}(\equiv), \text{ Leibniz}(\phi = (\neg\phi \vee \tau \vee \psi) \wedge (\neg\phi \vee p)) \rangle \\
& (\neg\phi \vee \tau \vee \psi) \wedge (\neg\phi \vee \mathit{true}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.1, Identidad}(\equiv), \text{ Leibniz}(\phi = (\neg\phi \vee \tau \vee \psi) \wedge p) \rangle \\
& (\neg\phi \vee \tau \vee \psi) \wedge \mathit{true} \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.24.3 } \rangle \\
& \neg\phi \vee \tau \vee \psi \\
\Leftarrow \quad & \langle \text{ Debilitamiento}(\vee) \rangle \\
& \neg\phi \vee \psi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& \phi \to \psi
\end{aligned}
$$

Por MT 5.5.2, y Def($\leftarrow$) se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}} (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \tau) \to (\phi \to \tau))$

1.2. Punto 6

1.2.1. a

$\vdash_{\mathrm{DS}} (\phi \to \psi) \to (\phi \vee \tau \to \psi \vee \tau)$

$$
\begin{aligned}
& \phi \to \psi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& \neg\phi \vee \psi \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Debilitamiento}(\vee) \rangle \\
& \neg\phi \vee \psi \vee \tau \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.4 } \rangle \\
& \phi \vee \psi \vee \tau \equiv \psi \vee \tau \\
\equiv \quad & \langle \text{ Idempotencia}(\vee), \text{ Leibniz}(\phi = \phi \vee \psi \vee p \equiv \psi \vee \tau) \rangle \\
& \phi \vee \psi \vee \tau \vee \tau \equiv \psi \vee \tau \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\vee) \rangle \\
& \phi \vee \tau \vee \psi \vee \tau \equiv \psi \vee \tau \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def}(\to) \rangle \\
& \phi \vee \tau \to \psi \vee \tau
\end{aligned}
$$

Por MT 5.5.1 se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}} (\phi \to \psi) \to (\phi \vee \tau \to \psi \vee \tau)$

1.2.2. b

$\vdash_{\mathrm{DS}} (\phi \to \psi) \to (\phi \wedge \tau \to \psi \wedge \tau)$

$$
\begin{array}{ll}
& (\phi \wedge \tau) \to (\psi \wedge \tau) \\
\equiv & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& \neg(\phi \wedge \tau) \vee (\psi \wedge \tau) \\
\equiv & \langle \text{ Dist}(\neg, \wedge), \text{ Leibniz}(\phi = p \vee (\psi \wedge \tau)) \rangle \\
& \neg\phi \vee \neg\tau \vee (\psi \wedge \tau) \\
\equiv & \langle \text{ Dist}(\vee, \wedge), \text{ Leibniz}(\phi = \neg\phi \vee p) \rangle \\
& \neg\phi \vee ((\neg\tau \vee \psi) \wedge (\neg\tau \vee \tau)) \\
\equiv & \langle \text{ Teo 4.19.1, Identidad}(\equiv), \text{ Leibniz}(\phi = \neg\phi \vee ((\neg\tau \vee \psi) \wedge p)) \rangle \\
& \neg\phi \vee ((\neg\tau \vee \psi) \wedge \mathit{true}) \\
\equiv & \langle \text{ Teo 4.24.3, Leibniz}(\phi = \neg\phi \vee p) \rangle \\
& \neg\phi \vee \neg\tau \vee \psi \\
\Leftarrow & \langle \text{ Debilitamiento}(\vee) \rangle \\
& \neg\phi \vee \psi \\
\equiv & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& \phi \to \psi
\end{array}
$$

Por MT 5.5.2, Def($\leftarrow$) se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}} (\phi \to \psi) \to (\phi \wedge \tau \to \psi \wedge \tau)$

2. Sección 5.4

2.1. Punto 8

2.1.1. a

Si $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi \vee \psi$

0.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi$	Suposición
1.	$\phi \to (\phi \vee \psi)$	Def(Debilitamiento($\vee$))
2.	$\phi \vee \psi$	Modus Ponens(p1, p0)

El uso de Modus Ponens requiere que ϕ se tenga, pero se sabe que $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi$, Por lo que, usando Transitividad($\to$) $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi \vee \psi$

2.1.2. b

Si $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi \wedge \psi$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi$

0.	$\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi \wedge \psi$	Suposición
1.	$(\phi \wedge \psi) \to \phi$	Def(Debilitamiento($\wedge$))
2.	ϕ	Modus Ponens(p1, p0)

El uso de Modus Ponens requiere que $\phi \wedge \psi$ se tenga, pero se sabe que $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi \wedge \psi$, Por lo que, usando Transitividad($\to$) $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi$

2.1.3. c

Si $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi$ y $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \psi$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi \wedge \psi$

0. $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi$ y $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \psi$ — Suposición
1. $\Gamma \vDash \phi$ y $\Gamma \vDash \psi$ — Coherencia(p0)
2. $(\exists \mathbf{v} \mid \forall x \in \Gamma : \mathbf{v}[x] = \mathtt{T})$ — Suposición(Γ es satisfacible)
3. $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{v}[\psi] = \mathtt{T}$ — Def(p2)(p1)
4. $\mathbf{v}[\phi \wedge \psi] = \mathtt{T}$ — MT 2.23($\wedge$)(p3)
5. $\Gamma \vDash \phi \wedge \psi$ — (p4, p3)
6. $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi \wedge \psi$ — Completitud(p5)

2.2. Punto 10

$\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi$ sii $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfacible

0. Γ es satisfacible — Suposición
1. Demostración 1
2. Demostración 2
3. $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi sii \Gamma \cup \{\neg\phi\} esinsatisfacible$

Demostración 1

Si $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfacible

0. $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \phi$ — Suposición
1. $\Gamma \vDash \phi$ — Coherencia(p0)
2. $(\exists \mathbf{v} \mid \forall x \in \Gamma : \mathbf{v}[x] = \mathtt{T})$ — Def(p1)
3. $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{T}$ — (p2, p1)
4. $\mathbf{v}[\neg\phi] = \mathtt{F}$ — MT 2.23($\neg$)
5. Demostración 1.1
6. $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfacible — (p5)

Demostración 1.1

0. $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es satisfacible — Suposición
1. Γ es satisfacible y $\{\neg\phi\}$ es satisfacible — (p0)
2. $(\exists \mathbf{w} \mid \forall x \in \Gamma : \mathbf{w}[x] = \mathtt{T})$ — Def(p1)
3. $(\exists \mathbf{w} \mid \forall x \in \{\neg\phi\} : \mathbf{w}[x] = \mathtt{T})$ — Def(p1)
4. $\mathbf{w}[\phi] = \mathtt{T}$ — (p1 Demostración 1)
5. $\mathbf{w}[\neg\phi] = \mathtt{T}$ — (p3)
6. $\mathbf{w}[\phi] = \mathtt{F}$ — MT 2.23($\neg$)(p5)
7. $\mathbf{w}[\phi] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{w}[\phi] = \mathtt{F}$ — Absurdo(p6, p4)

Demostración 2

Si $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfacible entonces $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi$

0.	$\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfacible	Suposición
1.	$(\forall \mathbf{v} : (\exists x \in \Gamma \mid \mathbf{v}[x] = \mathtt{F}))$	Def(p0)
2.	Γ es satisfacible	(p0 punto10)
3.	$\{\neg\phi\}$es insatisfacible	(p2 ,p0)
4.	$\mathbf{v}[\neg\phi] = \mathtt{F}$	(p3)
5.	$\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{T}$	MT 2.23(¬)(p4)
6.	$\Gamma \vDash \phi$	(p5, p2)
7.	$\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi$	Completitud(p6)

2.3. Punto 11

2.3.1. a

Si $\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi \vee \psi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ o $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ es satisfacible

0.	Γ es satisfacible	Suposición
1.	$\Gamma \vdash_{\text{DS}} \phi \vee \psi$	Suposición
2.	$(\exists \mathbf{v} \mid \forall x \in \Gamma : \mathbf{v}[x] = \mathtt{T})$	Def.(p0)
3.	$\Gamma \vDash \phi \vee \psi$	Coherencia(p1)
4.	$\mathbf{v}[\phi \vee \psi] = \mathtt{T}$	(p3, p2)
5.	$\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{T}$ o $\mathbf{v}[\psi] = \mathtt{T}$	
6.	Suposición 1	
7.	Suposición 2	
8.	Suposición 3	
9.	$\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ o $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ es insatisfacible	

Suposición 1

0.	$\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{v}[\psi] = \mathtt{T}$	
1.	$\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfacible	(p0, p3 Punto 11)
2.	$\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ es insatisfacible	(p0, p3 Punto 11)

Suposición 2

0.	$\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{v}[\psi] = \mathtt{F}$	
1.	$\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfacible	(p0, p3 Punto 11)
2.	$\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ es satisfacible	(p0, p3 Punto 11)

Suposición 3

0.	$\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{F}$ y $\mathbf{v}[\psi] = \mathtt{T}$	
1.	$\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es satisfacible	(p0, p3 Punto 11)
2.	$\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ es insatisfacible	(p0, p3 Punto 11)

2.3.2. b

Si $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \neg(\phi \vee \psi)$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi, \neg\psi\}$ es satisfacible

0. Γ es satisfacible	Suposición
1. $\Gamma \vdash_{\mathrm{DS}} \neg(\phi \vee \psi)$	Suposición
2. $\Gamma \vDash \neg(\phi \vee \psi)$	Coherencia(p1)
3. $(\exists \mathbf{v} \mid \forall x \in \Gamma : \mathbf{v}[x] = \mathtt{T})$	Def(p0)
4. $\mathbf{v}[\neg(\phi \vee \psi)] = \mathtt{T}$	(p3, p2)
5. $\mathbf{v}[\neg\phi \wedge \neg\psi] = \mathtt{T}$	Dist($\neg$, $\vee$)(p4)
6. $\mathbf{v}[\neg\phi] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{v}[\neg\psi] = \mathtt{T}$	MT 2.23($\wedge$)(p5)
7. $\Gamma \cup \{\neg\phi, \neg\psi\}$ es satisfacible	(p4, p0)