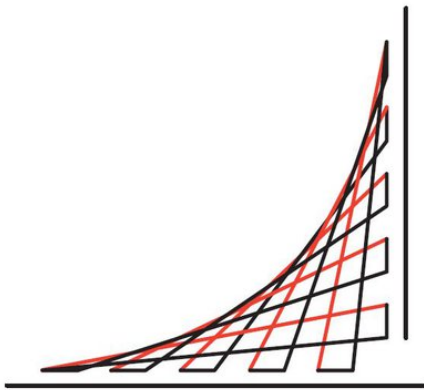


Tarea No.1

David Gómez



ESCUELA
COLOMBIANA
DE INGENIERÍA
JULIO GARAVITO

VIGILADA MINEDUCACIÓN

Matemáticas
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Colombia
19 de agosto de 2022

1. Sección 1.1

■ Punto 1

Proposiciones:

- La lógica estudia las reglas de deducción formales
- la lógica proporciona reglas
- la lógica matemática se ocupa de la posibilidad de axiomatizar las teorías matemáticas

■ Frases (no proposiciones):

- En un nivel elemental
- En un nivel avanzado
- La teoría de la demostración

■ Punto 2

Proposiciones:

- Una especificación formal usa notación matemática para describir de manera precisa las propiedades que un sistema de información debe tener
- Describe lo que el sistema debe hacer sin decir cómo se va a hacer.
- Esta abstracción hace que las especificaciones formales sean útiles en el proceso de desarrollar un sistema

Frases (no proposiciones)

- especular sobre el significado de frases en un impreciso Pseudocódigo.
- como para aquellos que desarrollan los programas para satisfacer esos requerimientos
- promover un entendimiento común entre todos los interesados en el sistema.

■ Punto 3 a) y b) tienen la misma estructura.

2. Sección 1.2

■ Punto 1

- | | | |
|----|--|---|
| b) | $(true \equiv false)$ | Cumple con la definición de $\phi ::= (\phi \equiv \phi)$ |
| d) | $(p \vee (p \equiv (\neg q)))$ | Cumple con la definición de $\phi ::= (\phi \vee \phi)$ |
| f) | $((q \wedge (\neg q)) \leftarrow (\neg(\neg(\neg(p \rightarrow r)))))$ | Cumple con la definición de $\phi ::= (\phi \leftarrow \phi)$ |

■ Punto 2

- | | | |
|----|---------------------|---|
| a) | $(p \vee)$ | No se encuentra en la definición de ϕ (hace falta algún ϕ después de \vee) |
| c) | $\neg p$ | No se encuentra en la definición de ϕ (hace falta cerrar todo con "()") |
| e) | $(p \vee q) \vee r$ | No se encuentra en la definición de ϕ (hace falta cerrar todo con "()") |

■ Punto 3

a)

p : Un número natural es par
 q : Un número natural es impar

$$(p \equiv (\neg q))$$

b)

p : El sol brilla hoy
 q : El sol brilla mañana

$$(p \rightarrow (\neg q))$$

c)

p : Juan está celoso
 q : Juan está de mal genio

$$p \vee q$$

d)

p : Una petición ocurre
 q : Una petición será atendida
 r : El proceso de horarios se bloquea

$$((p \Rightarrow q) \vee r)$$

e)

p : Llueve
 q : Hace sol

$$((p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q)))$$

f)

p : (tener) Zapatos
 q : (tener) Camisa
 r : hay servicio en el restaurante

$$((\neg(p \vee q)) \Rightarrow (\neg r))$$

g)

p_0 : Mi hermana quiere un gato blanco
 q_0 : Mi hermana quiere un gato negro
 p_1 : Mi hermana quiere un gato
 q_1 : El gato es blanco
 r_1 : El gato es negro

$$\Phi \equiv (p_0 \wedge q_0)$$

\vee

$$\Phi \equiv (p_1 \wedge (q_1 \wedge r_1))$$

h)

$$\begin{array}{l}
 p : \text{Mi pareja raja} \\
 q : \text{Mi pareja presta el hacha} \\
 \hline
 ((\neg p) \wedge (\neg q))
 \end{array}$$

- **Punto 4** h : El cuarteto interpretará a Haydn. m : El cuarteto interpretará a Mozart.

a) $(h \vee m)$

El cuarteto interpretará a Haydn o a Mozart.

b) $(h \equiv (\neg m))$

El cuarteto interpreta a Haydn solo si no interpreta a Mozart.

c) $(\neg(h \equiv m))$

El cuarteto interpretará a Haydn o a Mozart, pero no ambos.

d) $(\neg(h \wedge m))$

El cuarteto no interpreta a Haydn o no interpreta a Mozart.

e) $((\neg(h \wedge m)) \wedge (\neg h)) \rightarrow m$

si sucede que, el cuarteto no interpreta a Haydn o no interpreta a Mozart y no interpretan a Haydn, entonces interpretan a Mozart.

- **Punto 5**

a) Si Pedro entiende matemáticas, entonces puede entender lógica. Pedro no entiende lógica. Consecuentemente, Pedro no entiende matemáticas.

$$\begin{array}{l}
 p : \text{Pedro entiende matemáticas.} \\
 q : \text{Pedro puede entender lógica.} \\
 \hline
 \begin{array}{ll}
 0. (p \rightarrow q) & \text{axioma/ enunciado} \\
 1. (\neg q) & \text{axioma/ enunciado} \\
 2. (\neg p) & \text{MTT, (0,1)}
 \end{array}
 \end{array}$$

b) Si llueve o cae nieve, entonces no hay electricidad. Llueve. Entonces, no habrá electricidad.

$$\begin{array}{l}
 p : \text{Llueve} \\
 q : \text{Cae nieve} \\
 r : \text{Hay electricidad}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \hline
 0. ((p \vee q) \rightarrow (\neg r)) & \text{axioma/ enunciado} \\
 1. (q) & \text{axioma/ enunciado} \\
 2. (\neg r) & \text{MPP, (0,1)}
 \end{array}$$

c) Si llueve o cae nieve, entonces no hay electricidad. Hay electricidad. Entonces no nevó.

$$\begin{array}{l}
 p : \text{Llueve} \\
 q : \text{Cae nieve} \\
 r : \text{Hay electricidad}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \hline
 0. ((p \vee q) \rightarrow (\neg r)) & \text{axioma/ enunciado} \\
 1. (r) & \text{axioma/ enunciado} \\
 2. (\neg(p \vee q)) & \text{MTT, (0, 1)} \\
 3. ((\neg p) \wedge (\neg q)) & \text{DM, (2)} \\
 4. (\neg q) & \text{Simplificación, (3)}
 \end{array}$$

d) Si $\sin x$ es diferenciable, entonces $\sin x$ es continua. Si $\sin x$ es continua, entonces $\sin x$ es diferenciable. La función $\sin x$ es diferenciable. Consecuentemente, la función $\sin x$ es integrable.

p : $\sin x$ es diferenciable.
 q : $\sin x$ es continua
 r : $\sin x$ es integrable

0. $(p \rightarrow q)$	axioma/ enunciado
1. $(q \rightarrow p)$	axioma/ enunciado
2. p	axioma/ enunciado
3. $(p \equiv q)$	def. equivalencia, (0, 1)
4. q	
5. r	Teorema fundamental del cálculo

e) Si Gödel fuera presidente, entonces el Congreso presentaría leyes razonables. Gödel no es presidente. Por lo tanto, el Congreso no presenta leyes razonables.

p : Gödel es presidente
 q : El congreso presenta leyes razonables

0. $(p \rightarrow q)$	
1. $(\neg p)$	
2. $(\neg q)$	(falacia: negación del antecedente)

f) Si llueve, entonces no hay picnic. Si cae nieve, entonces no hay picnic. Llueve o cae nieve. Por lo tanto, no hay picnic.

p : Llueve.
 q : Hay picnic.
 r : Cae nieve.

0. $(p \rightarrow (\neg q))$	axioma/ enunciado
1. $(r \rightarrow (\neg q))$	axioma/ enunciado
2. $(p \vee r)$	axioma/ enunciado
3. $((p \vee r) \rightarrow (\neg q))$	equivalencia, (0, 1)
4. $(\neg q)$	MPP, (3, 2)

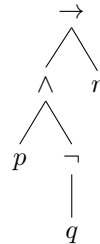
3. Sección 1.3

■ Punto 1

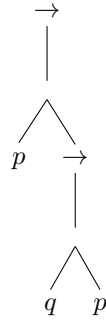
b) *true*

true

d) $((p \wedge (\neg q)) \rightarrow r)$



f) $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$



■ Punto 2

a) p

p

c) $((p \wedge (\neg q)) \rightarrow r)$

$p, q, r, (\neg q), (p \wedge (\neg q)), ((p \wedge (\neg q)) \rightarrow r)$

e) $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$

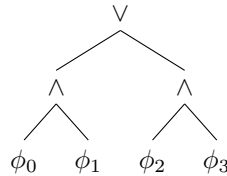
$p, q, (q \rightarrow p), (p \rightarrow (q \rightarrow p))$

■ Punto 3

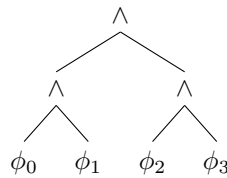
a) Una proposición que es una negación de una equivalencia.



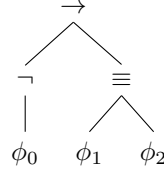
b) Una proposición que es una disyunción cuyos disyuntos ambos son conjunciones.



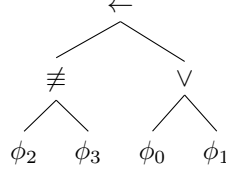
c) Una proposición que es una conjunción de conjunciones.



d) Una proposición que es una implicación cuyo antecedente es una negación y consecuente es una equivalencia.



e) Una proposición que es una consecuencia cuyo antecedente es una disyunción y consecuente una discrepancia.



- **Punto 4** $((p \vee q) \equiv (r \rightarrow p)) \leftarrow (q \neq (\neg q))$

4. Sección 1.4

- **Punto 2**

Con $(\neg\psi)$

$$\begin{aligned} L[(\neg\psi)] &= 1 + L[\psi] \\ &= 1 + R[\psi] \\ &= R[(\neg\psi)] \end{aligned}$$

Hipótesis de inducción

□

Con $(\psi \neq \tau)$

$$\begin{aligned} L[(\psi \neq \tau)] &= 1 + L[\psi] + L[\tau] \\ &= 1 + R[\psi] + R[\tau] \\ &= R[(\psi \neq \tau)] \end{aligned}$$

Hipótesis de inducción

□

Con $(\psi \vee \tau)$

$$\begin{aligned} L[(\psi \vee \tau)] &= 1 + L[\psi] + L[\tau] \\ &= 1 + R[\psi] + R[\tau] \\ &= R[(\psi \vee \tau)] \end{aligned}$$

Hipótesis de inducción

□

Con $(\psi \wedge \tau)$

$$\begin{aligned} L[(\psi \wedge \tau)] &= 1 + L[\psi] + L[\tau] \\ &= 1 + R[\psi] + R[\tau] \\ &= R[(\psi \wedge \tau)] \end{aligned}$$

Hipótesis de inducción

□

Con $(\psi \rightarrow \tau)$

$$\begin{aligned} L[(\psi \rightarrow \tau)] &= 1 + L[\psi] + L[\tau] \\ &= 1 + R[\psi] + R[\tau] \\ &= R[(\psi \rightarrow \tau)] \end{aligned}$$

Hipótesis de inducción

□

Con $(\psi \leftarrow \tau)$

$$\begin{aligned} L[(\psi \leftarrow \tau)] &= 1 + L[\psi] + L[\tau] \\ &= 1 + R[\psi] + R[\tau] \\ &= R[(\psi \leftarrow \tau)] \end{aligned}$$

Hipótesis de inducción

□

■ **Punto 3**

$$L[(x)] := \begin{cases} L[x] + 1 \\ L[] = 1 \end{cases}$$

$$R[(x)] := \begin{cases} R[x] + 1 \\ R[] = 1 \end{cases}$$

■ **Punto 7**

funciones auxiliares:

$$EQ[x \equiv y] := \begin{cases} EQ[x] + EQ[y] + 1 \\ EQ[\equiv] = 1 \end{cases}$$

$$T[x \text{ true } y] := \begin{cases} T[x] + T[y] + 1 \\ T[\text{true}] = 1 \end{cases}$$

$$F[x \text{ false } y] := \begin{cases} F[x] + F[y] + 1 \\ F[\text{false}] = 1 \end{cases}$$

Conectores : $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftarrow, \neq\}$

con \in Conectores

otro \notin Conectores

$$S[x \text{ con } y] := \begin{cases} S[x] + S[y] + 1 \\ S[\text{con}] = 1 \\ S[\text{otro}] = 0 \end{cases}$$

Propiedad

$$M(\phi) : \begin{cases} (\forall \phi : ((EQ[\phi] \geq 1) \wedge (F[\phi] = 0) \wedge (T[\phi] = 0))) \\ M(\phi) \Rightarrow (\exists u \mid u \in \phi \wedge S[u] = 0) \end{cases}$$

Caso base: $\phi = (p_0 \equiv p_1)$

$$EQ[\phi] = 1$$

✓

$$F[\phi] = 0$$

✓

$$T[\phi] = 0$$

✓

$$M(\phi) \Rightarrow (\exists u \mid u \in \phi \wedge S[u] = 0)$$

true

Casos inductivos: $(\neg\psi), (\psi \equiv \tau), (\psi \neq \tau), (\psi \vee \tau), (\psi \wedge \tau), (\psi \rightarrow \tau), (\psi \leftarrow \tau)$

Con $\phi = (\neg\psi)$

$$EQ[(\neg\psi)] \geq 1$$

✓

$$F[(\neg\psi)] = 0$$

✓

$$T[(\neg\psi)] = 0$$

✓

$$M((\neg\psi)) \Rightarrow (\exists u \mid u \in \phi \wedge S[u] = 0)$$

true

Con $\phi = (\psi \equiv \tau)$

$$EQ[(\psi \equiv \tau)] = 1 + EQ[\psi] + EQ[\tau]$$

$$EQ[(\psi \equiv \tau)] \geq 1$$

✓

$$F[(\psi \equiv \tau)] = 0$$

✓

$$T[(\psi \equiv \tau)] = 0$$

✓

$$M((\psi \equiv \tau)) \Rightarrow (\exists u \mid u \in \phi \wedge S[u] = 0)$$

true

Con $\phi = (\psi \not\equiv \tau)$

$$\begin{aligned}
EQ[(\psi \not\equiv \tau)] &= EQ[\psi] + EQ[\tau] \\
EQ[(\psi \not\equiv \tau)] &\geq 1 && \checkmark \\
F[(\psi \not\equiv \tau)] &= 0 && \checkmark \\
T[(\psi \not\equiv \tau)] &= 0 && \checkmark \\
M((\psi \not\equiv \tau)) &\Rightarrow (\exists u \mid u \in \phi \wedge S[u] = 0) && true
\end{aligned}$$

Con $\phi = (\psi \vee \tau)$

$$\begin{aligned}
EQ[(\psi \vee \tau)] &= EQ[\psi] + EQ[\tau] \\
EQ[(\psi \vee \tau)] &\geq 1 && \checkmark \\
F[(\psi \vee \tau)] &= 0 && \checkmark \\
T[(\psi \vee \tau)] &= 0 && \checkmark \\
M((\psi \vee \tau)) &\Rightarrow (\exists u \mid u \in \phi \wedge S[u] = 0) && true
\end{aligned}$$

Con $\phi = (\psi \wedge \tau)$

$$\begin{aligned}
EQ[(\psi \wedge \tau)] &= EQ[\psi] + EQ[\tau] \\
EQ[(\psi \wedge \tau)] &\geq 1 && \checkmark \\
F[(\psi \wedge \tau)] &= 0 && \checkmark \\
T[(\psi \wedge \tau)] &= 0 && \checkmark \\
M((\psi \wedge \tau)) &\Rightarrow (\exists u \mid u \in \phi \wedge S[u] = 0) && true
\end{aligned}$$

Con $\phi = (\psi \rightarrow \tau)$

$$\begin{aligned}
EQ[(\psi \rightarrow \tau)] &= EQ[\psi] + EQ[\tau] \\
EQ[(\psi \rightarrow \tau)] &\geq 1 && \checkmark \\
F[(\psi \rightarrow \tau)] &= 0 && \checkmark \\
T[(\psi \rightarrow \tau)] &= 0 && \checkmark \\
M((\psi \rightarrow \tau)) &\Rightarrow (\exists u \mid u \in \phi \wedge S[u] = 0) && true
\end{aligned}$$

Con $\phi = (\psi \leftarrow \tau)$

$$\begin{aligned}
EQ[(\psi \leftarrow \tau)] &= EQ[\psi] + EQ[\tau] \\
EQ[(\psi \leftarrow \tau)] &\geq 1 && \checkmark \\
F[(\psi \leftarrow \tau)] &= 0 && \checkmark \\
T[(\psi \leftarrow \tau)] &= 0 && \checkmark \\
M((\psi \leftarrow \tau)) &\Rightarrow (\exists u \mid u \in \phi \wedge S[u] = 0) && true
\end{aligned}$$

Con $\phi = (\psi \leftarrow \tau)$

$$\begin{aligned}
EQ[(\psi \leftarrow \tau)] &= EQ[\psi] + EQ[\tau] \\
EQ[(\psi \leftarrow \tau)] &\geq 1 && \checkmark \\
F[(\psi \leftarrow \tau)] &= 0 && \checkmark \\
T[(\psi \leftarrow \tau)] &= 0 && \checkmark \\
M((\psi \leftarrow \tau)) &\Rightarrow (\exists u \mid u \in \phi \wedge S[u] = 0) && true
\end{aligned}$$