Tarea 09

David Gomez

Matemáticas
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Colombia
16 de octubre de 2022

Índice

1. Sección 4.6

1.1. Punto 4

Teo 4.24.3

$$
\begin{array}{ll}
 & (\phi \wedge \mathit{true}) \\
\equiv & \langle \text{ Def.}(\wedge) \rangle \\
 & (\phi \equiv (\mathit{true} \equiv (\phi \vee \mathit{true}))) \\
\equiv & \langle \text{ Teo 4.19.2, Leibniz}(\phi = (\phi \equiv (\mathit{true} \equiv p))) \rangle \\
 & (\phi \equiv (\mathit{true} \equiv \mathit{true})) \\
\equiv & \langle \text{ Teo 4.6.2, Leibniz}(\phi = (\phi \equiv p)) \rangle \\
 & (\phi \equiv \mathit{true}) \\
\equiv & \langle \text{ Identidad}(\equiv) \rangle \\
 & \phi
\end{array}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\models_{\text{DS}} ((\phi \wedge \mathit{true}) \equiv \phi)$

1.2. Punto 5

Teo 4.24.4

$$
\begin{array}{ll}
 & (\phi \wedge \mathit{false}) \\
\equiv & \langle \text{ Def.}(\wedge) \rangle \\
 & (\phi \equiv (\mathit{false} \equiv (\phi \vee \mathit{false}))) \\
\equiv & \langle \text{ Identidad}(\vee)\text{, Conmutativa}(\equiv)\text{, Leibniz}(\phi = (\phi \equiv (\mathit{false} \equiv p)) \rangle \\
 & (\phi \equiv (\mathit{false} \equiv \phi)) \\
\equiv & \langle \text{ Def.}(\neg)\text{, Conmutativa}(\equiv)\text{, Leibniz}(\phi = (\phi \equiv p)) \rangle \\
 & (\phi \equiv (\neg\phi)) \\
\equiv & \langle \text{ Teo 4.15.7 } \rangle \\
 & \mathit{false}
\end{array}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\models_{\text{DS}} ((\phi \wedge \mathit{false}) \equiv \mathit{false})$

1.3. Punto 6

Teo 4.24.5

$$
\begin{aligned}
& (\phi \wedge \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\wedge) \rangle \\
& (\phi \equiv (\phi \equiv (\phi \vee \phi))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \rangle \\
& ((\phi \equiv \phi) \equiv (\phi \vee \phi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Idempotencia}(\vee), \text{ Leibniz}(\phi = ((\phi \equiv \phi) \equiv p)) \rangle \\
& ((\phi \equiv \phi) \equiv \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.6.3, Conmutativa}(\equiv) \rangle \\
& (\phi \equiv \mathit{true}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Identidad } \rangle \\
& \phi
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\models_{\mathrm{DS}} ((\phi \wedge \phi) \equiv \phi)$

1.4. Punto 8

Teo 4.25.1

$$
\begin{aligned}
& (\phi \wedge (\neg\phi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\wedge) \rangle \\
& (\phi \equiv ((\neg\phi) \equiv (\phi \vee (\neg\phi)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \rangle \\
& ((\phi \equiv (\neg\phi)) \equiv (\phi \vee (\neg\phi))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.1, Identidad, Leibniz}(\phi = ((\phi \equiv (\neg\phi)) \equiv p)) \rangle \\
& ((\phi \equiv (\neg\phi)) \equiv \mathit{true}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.15.7, Conmutativa}(\equiv), \text{ Leibniz}(\phi = (p \equiv \mathit{true})) \rangle \\
& (\mathit{false} \equiv \mathit{true}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Identidad } \rangle \\
& \mathit{false}
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\models_{\mathrm{DS}} ((\phi \wedge (\neg\phi)) \equiv \mathit{false})$

1.5. Punto 9

Teo 4.25.2

$$
\begin{aligned}
& (\neg(\phi \wedge \psi)) \\
\equiv & \quad \langle \text{ Def.}(\wedge), \text{ Leibniz}(\phi = (\neg p)) \rangle \\
& (\neg(\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi)))) \\
\equiv & \quad \langle \text{ Conmutativa}(\vee), \text{ Leibniz}(\phi = (\neg(\phi \equiv p))) \rangle \\
& (\neg(\phi \equiv (\psi \equiv (\psi \vee \phi)))) \\
\equiv & \quad \langle \text{ Conmutativa}(\equiv), \text{ Leibniz}(\phi = (\neg(\phi \equiv p))) \rangle \\
& (\neg(\phi \equiv ((\psi \vee \phi) \equiv \psi))) \\
\equiv & \quad \langle \text{ Teo 4.15.6, Leibniz}(\phi = (\neg(\phi \equiv ((\psi \vee p) \equiv \psi)))) \rangle \\
& (\neg(\phi \equiv ((\psi \vee (\neg(\neg\phi))) \equiv \psi))) \\
\equiv & \quad \langle \text{ Teo 4.19.4, Leibniz}(\phi = (\neg(\phi \equiv p))) \rangle \\
& (\neg(\phi \equiv (\psi \vee (\neg\phi)))) \\
\equiv & \quad \langle \text{ Conmutativa 4.15.4 } \rangle \\
& ((\neg\phi) \equiv (\psi \vee (\neg\phi))) \\
\equiv & \quad \langle \text{ Conmutativa}(\vee), \text{ Leibniz}(\phi = ((\neg\phi) \equiv p)) \rangle \\
& ((\neg\phi) \equiv ((\neg\phi) \vee \psi)) \\
\equiv & \quad \langle \text{ Conmutativa}(\equiv) \rangle \\
& (((\neg\phi) \vee \psi) \equiv (\neg\phi)) \\
\equiv & \quad \langle \text{ Teo 4.15.6, Leibniz}(\phi = (((\neg\phi) \vee p) \equiv (\neg\phi))) \rangle \\
& (((\neg\phi) \vee (\neg(\neg\psi))) \equiv (\neg\phi)) \\
\equiv & \quad \langle \text{ Teo 4.19.4 } \rangle \\
& ((\neg\phi) \vee (\neg\psi))
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\models_{\mathrm{DS}} ((\neg(\phi \wedge \psi)) \equiv ((\neg\phi) \vee (\neg\psi)))$

1.6. Punto 11

Teo 4.25.4

$$
\begin{aligned}
& (((\phi \wedge \psi)) \equiv ((\phi \wedge \tau)) \equiv \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\wedge) \rangle \\
& (((\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi))) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau)))) \equiv \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv) \rangle \\
& (\phi \equiv ((\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi))) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau))))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv), \text{Leibniz}(\phi = (\phi \equiv p)) \rangle \\
& (\phi \equiv (\phi \equiv ((\psi \equiv (\phi \vee \psi))) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau))))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \rangle \\
& ((\phi \equiv \phi) \equiv ((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau))))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.6.2, Leibniz}(\phi = (p \equiv ((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau)))))) \rangle \\
& (\mathit{true} \equiv ((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau))))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv), \text{Identidad}(\equiv) \rangle \\
& ((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv), \text{Leibniz}(\phi = ((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv p)) \rangle \\
& ((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv ((\tau \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv \phi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \rangle \\
& (((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \psi))) \equiv \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv) \rangle \\
& (\phi \equiv ((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \psi)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv), \text{Leibniz}(\phi = (\phi \equiv (\phi \equiv p))) \rangle \\
& (\phi \equiv (\psi \equiv ((\phi \vee \psi) \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \psi))))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv), \text{Leibniz}(\phi = (\phi \equiv (\psi \equiv p))) \rangle \\
& (\phi \equiv (\psi \equiv ((\tau \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\phi \vee \psi)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv), \text{Leibniz}(\phi = (\phi \equiv p)) \rangle \\
& (\phi \equiv ((\phi \equiv \tau) \equiv ((\phi \vee \tau) \equiv (\phi \vee \psi)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Distribución}(\vee, \equiv), \text{Leibniz}(\phi = (\phi \equiv ((\psi \equiv \tau) \equiv p))) \rangle \\
& (\phi \equiv ((\psi \equiv \tau) \equiv (\phi \vee (\tau \equiv \psi)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\vee), \text{Leibniz}(\phi = (\phi \equiv ((\psi \equiv \tau) \equiv (\phi \vee p)))) \rangle \\
& (\phi \equiv ((\psi \equiv \tau) \equiv (\phi \vee (\psi \equiv \tau)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\wedge) \rangle \\
& (\phi \wedge (\psi \equiv \tau))
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 y Conmutativa($\equiv$) se demuestra que
$\models_{\text{DS}} ((\phi \wedge (\psi \equiv \tau)) \equiv (((\phi \wedge \psi) \equiv (\phi \wedge \psi)) \equiv \phi))$

1.7. punto 12

Teo 4.25.5

$$
\begin{aligned}
& ((\phi \wedge \psi) \not\equiv (\phi \wedge \tau)) \\
\equiv\ & \langle \text{ Def.}(\wedge) \rangle \\
& ((\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi))) \not\equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau)))) \\
\equiv\ & \langle \text{ Def.}(\not\equiv) \rangle \\
& ((\neg(\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi)))) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau)))) \\
\equiv\ & \langle \text{ Teo 4.15.4 } \rangle \\
& (\neg((\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi))) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau))))) \\
\equiv\ & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv) \rangle \\
& (\neg(((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv \phi) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau))))) \\
\equiv\ & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \rangle \\
& (\neg((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\phi \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau)))))) \\
\equiv\ & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \rangle \\
& (\neg((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv ((\phi \equiv \phi) \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau))))) \\
\equiv\ & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv) \rangle \\
& (\neg(((\phi \vee \psi) \equiv \psi) \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau)))) \\
\equiv\ & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \rangle \\
& (\neg((\phi \vee \psi) \equiv (\psi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau))))) \\
\equiv\ & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \rangle \\
& (\neg((\phi \vee \psi) \equiv ((\psi \equiv \tau) \equiv (\phi \vee \tau)))) \\
\equiv\ & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv) \rangle \\
& (\neg((\phi \vee \psi) \equiv ((\phi \vee \tau) \equiv (\psi \equiv \tau)))) \\
\equiv\ & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \rangle \\
& (\neg(((\phi \vee \psi) \equiv (\phi \vee \tau)) \equiv (\psi \equiv \tau))) \\
\equiv\ & \langle \text{ Dist.}(\vee, \equiv) \rangle \\
& (\neg((\phi \vee (\psi \equiv \tau)) \equiv (\psi \equiv \tau))) \\
\equiv\ & \langle \text{ Teo 4.19.4 } \rangle \\
& (\neg(((\neg\phi) \vee (\psi \equiv \tau)))) \\
\equiv\ & \langle \text{ Dist.}(\neg, \vee) \rangle \\
& (\phi \wedge (\neg(\psi \equiv \tau))) \\
\equiv\ & \langle \text{ Teo 4.15.4, Def.}(\not\equiv) \rangle \\
& (\phi \wedge (\psi \not\equiv \tau))
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 y Conmutativa($\equiv$) se demuestra que
$\models_{\text{DS}} ((\phi \wedge (\psi \not\equiv \psi)) \equiv ((\phi \wedge \psi) \not\equiv (\phi \wedge \tau)))$

1.8. Punto 16

Debilitamiento

0. $(\phi \wedge \psi)$	Hipótesis (Debilitamiento)
1. $(\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi)))$	Def.($\equiv$), Ecuanimidad(p0)
2. $((\phi \vee \phi) \equiv (\phi \vee (\psi \equiv (\phi \vee \psi))))$	Leibniz($\phi = (p \vee \phi)$)
3. $((\phi \vee (\psi \equiv (\phi \vee \psi))) \equiv ((\phi \vee \psi) \equiv (\phi \vee (\phi \vee \psi))))$	Dist.($\vee$, $\equiv$)
4. $(((\phi \vee \psi) \equiv (\phi \vee (\phi \vee \psi))) \equiv ((\phi \vee \psi) \equiv ((\phi \vee \phi) \vee \psi)))$	Asociativa($\vee$), Leibniz($\phi = ((\phi \vee \psi) \equiv p)$)
5. $(((\phi \vee \psi) \equiv ((\phi \vee \phi) \vee \psi)) \equiv ((\phi \vee \psi) \equiv (\phi \vee \psi)))$	Idempotencia($\vee$), Leibniz($\phi = ((\phi \vee \psi) \equiv p)$)
6. $(((\phi \vee \psi) \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv \mathit{true})$	Teo 4.6.2
7. $((\phi \vee \phi) \equiv \mathit{true})$	Transitividad(p6, p5, p4, p3, p2)
8. $(\phi \vee \phi)$	Identidad($\equiv$)(p7)
9. ϕ	Idempotencia($\vee$)(p8)

Debilitamiento permite quitar información de una conjunción. Puesto que esta es verdad únicamente cuando sus dos partes son verdaderas, se puede concluir cualquiera de ellas.

1.9. Punto 17

Unión

0. ϕ	Hipótesis(Unión)
1. ψ	Hipótesis(Unión)
2. $(\phi \equiv \mathit{true})$	Identidad($\equiv$)(p0)
3. $(\phi \vee (\phi \equiv \psi))$	Debilitamiento($\vee$)(p0)
4. $((\phi \vee (\phi \equiv \psi)) \equiv ((\phi \vee \phi) \equiv (\phi \vee \psi)))$	Dist.($\vee$, $\equiv$)
5. $(((\phi \vee \phi) \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\phi \equiv (\phi \vee \psi)))$	Idempotencia($\vee$), Leibniz($\phi = (\phi \vee p)$)
6. $((\phi \vee (\phi \equiv \psi)) \equiv (\phi \equiv (\phi \vee \psi)))$	Transitividad(p5, p4, p3)
7. $(\phi \equiv (\phi \vee \psi))$	Ecuanimidad(p6, p3)
8. $(\psi \equiv \mathit{true})$	Identidad($\equiv$)(p1)
9. $((\phi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv \mathit{true})$	Identidad($\equiv$)(p7)
10. $((\phi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv \psi)$	Transitividad(p9, p8)
11. $(\psi \equiv (\phi \equiv (\phi \vee \psi)))$	Conmutativa($\equiv$), Ecuanimidad(p10)
12. $(\phi \wedge \psi)$	Def.($\wedge$), Conmutativa($\vee$), Conmutativa($\wedge$), Ecuanimidad(p11)

Unión permite juntar varias proposiciones las cuales se tienen como verdaderas. Puesto que la conjunción es verdadera cuando sus dos partes son verdaderas, es posible conectar dos proposiciones verdaderas mediante una conjunción.

2. Sección 4.7

2.1. Punto 3

Teo 4.28.2

$$
\begin{aligned}
& ((\phi \wedge \psi) \equiv \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\wedge)\text{, Leibniz}(\phi = (p \equiv \phi)) \rangle \\
& ((\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi))) \equiv \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv)\text{, Asociativa}(\equiv)\text{, Identidad}(\equiv) \rangle \\
& (\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv)\text{, Def.}(\rightarrow) \rangle \\
& (\phi \rightarrow \psi)
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 y Conmutativa($\equiv$) se demuestra que
$\models_{\text{DS}} ((\phi \rightarrow \psi) \equiv ((\phi \wedge \psi) \equiv \phi))$

2.2. punto 7

Teo 4.29.4

$$
\begin{aligned}
& (\phi \rightarrow \mathit{false}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& ((\neg\phi) \vee \mathit{false}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Identidad}(\vee) \rangle \\
& (\neg\phi)
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\models_{\text{DS}} ((\phi \rightarrow \mathit{false}) \equiv (\neg\phi))$

2.3. punto 10

Teo 4.30.3

$$
\begin{aligned}
& (\phi \rightarrow (\psi \wedge \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& ((\neg\phi) \vee (\psi \wedge \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist.}(\vee, \wedge) \rangle \\
& (((\neg\phi) \vee \psi) \wedge ((\neg\phi) \vee \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\rightarrow) \rangle \\
& ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \tau))
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\models_{\text{DS}} ((\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \tau)) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \tau)))$

2.4. Punto 17

Teo 4.31.5

$$
\begin{aligned}
& (\phi \to (\psi \to \tau)) \\
\equiv\ & \langle \text{ Teo 4.18.1 } \rangle \\
& ((\neg\phi) \vee (\psi \to \tau)) \\
\equiv\ & \langle \text{ Teo 4.28.1, Leibniz}(\phi = ((\neg\phi) \vee p)) \rangle \\
& ((\neg\phi) \vee ((\neg\psi) \vee \tau)) \\
\equiv\ & \langle \text{ Asociativa}(\vee) \rangle \\
& (((\neg\phi) \vee (\neg\psi)) \vee \tau) \\
\equiv\ & \langle \text{ De Morgan, Leibniz}(\phi = (p \vee \tau)) \rangle \\
& ((\neg(\phi \wedge \psi)) \vee \tau) \\
\equiv\ & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& ((\phi \wedge \psi) \to \tau)
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\models_{\mathrm{DS}} ((\phi \to (\psi \to \tau)) \equiv ((\phi \wedge \psi) \to \tau))$

2.5. Punto 18

Teo 4.31.6

$$
\begin{aligned}
& (\phi \vee (\phi \to \psi)) \\
\equiv\ & \langle \text{ Teo 4.28.1, Leibniz}(\phi = (\phi \vee p)) \rangle \\
& (\phi \vee ((\neg\phi) \vee \psi)) \\
\equiv\ & \langle \text{ Asociativa}(\vee) \rangle \\
& ((\phi \vee (\neg\phi)) \vee \psi) \\
\equiv\ & \langle \text{ Teo 4.19.1, Identidad}(\equiv) \rangle \\
& (\mathit{true} \vee \psi) \\
\equiv\ & \langle \text{ Teo 4.19.2 } \rangle \\
& \mathit{true}
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 e Identidad($\equiv$) se demuestra que
$\models_{\mathrm{DS}} (\phi \vee (\phi \to \psi))$

2.6. Punto 23

Teo 4.33.2

0. $((\phi \to \psi) \land (\psi \to \tau))$ Suposición del antecedente
1. $(\phi \to \psi)$ Debilitamiento(p0)
2. $(\psi \to \tau)$ Debilitamiento(p0)
3. $((\neg\phi) \lor \psi)$ Teo 4.28.1, Ecuanimidad(p1)
4. $((\neg\psi) \lor \tau)$ Teo 4.28.1, Ecuanimidad(p2)
5. $(\psi \lor (\neg\phi))$ Conmutativa($\lor$)
6. $((\neg\phi) \lor \tau)$ Corte(p5, p4)
7. $(\phi \to \tau)$ Teo 4.28.1, Ecuanimidad(p6)

Así, tomando (p7, p0), se demuestra que $\models_{\text{DS}} (((\phi \to \psi) \land (\psi \to \tau)) \to (\phi \to \tau))$

2.7. Punto 24

Teo 4.33.3

0. $((\phi \to \psi) \land (\psi \to \phi))$ Suposición del antecedente
1. $(\phi \to \psi)$ Debilitamiento($\land$)(p0)
2. $(\psi \to \phi)$ Debilitamiento($\land$)(p0)
3. $((\phi \lor \psi) \equiv \psi)$ Def.($\to$), Ecuanimidad(p1)
4. $((\psi \land \phi) \equiv \psi)$ Teo 4.28.2, Ecuanimidad(p2)
5. $((\phi \lor \psi) \equiv (\phi \land \psi))$ Transitividad(p4, p3), Conmutativa($\land$)
6. $((\phi \lor \psi) \equiv (\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \lor \psi))))$ Def.($\land$), Leibniz($\phi = ((\phi \lor \psi) \equiv p)$), Ecuanimidad(p5)
7. $((\phi \lor \psi) \equiv ((\phi \equiv \psi) \equiv (\phi \lor \psi)))$ Asociativa($\equiv$), Leibniz($\phi = ((\phi \lor \psi) \equiv p)$), Ecuanimidad(p6)
8. $((\phi \lor \psi) \equiv ((\phi \lor \psi) \equiv (\phi \equiv \psi)))$ Conmutativa($\equiv$), Leibniz($\phi = ((\phi \lor \psi) \equiv p)$), Ecuanimidad(p7)
9. $(((\phi \lor \psi) \equiv (\phi \lor \psi)) \equiv (\phi \equiv \psi))$ Asociativa($\equiv$)
10. $(\mathit{true} \equiv (\phi \equiv \psi))$ Teo 4.6.2, Leibniz($\phi = (p \equiv (\phi \equiv \psi))$), Ecuanimidad(p9)
11. $(\phi \equiv \psi)$ Identidad($\equiv$), Conmutativa($\equiv$)(p10)

Así, tomando (p0, p11), se demuestra que $\models_{\text{DS}} (((\phi \to \psi) \land (\psi \to \phi)) \to (\phi \equiv \psi))$

2.8. Punto 35

Teo 4.35.5

$$
\begin{aligned}
& ((\phi \to \tau) \wedge (\psi \to \tau)) \\
\equiv & \quad \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& (((\neg\phi) \vee \tau) \wedge ((\neg\psi) \vee \tau)) \\
\equiv & \quad \langle \text{ Conmutativa}(\vee)\text{, Distribución}(\vee, \wedge) \rangle \\
& (\tau \vee ((\neg\phi) \wedge (\neg\psi))) \\
\equiv & \quad \langle \text{ Conmutativa}(\vee) \rangle \\
& (((\neg\phi) \wedge (\neg\psi)) \vee \tau) \\
\equiv & \quad \langle \text{ De Morgan } \rangle \\
& ((\neg(\phi \vee \psi)) \vee \tau) \\
\equiv & \quad \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& ((\phi \vee \psi) \to \tau)
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 y Conmutativa($\equiv$) se demuestra que
$\models_{\text{DS}} (((\phi \vee \psi) \to \tau) \equiv ((\phi \to \tau) \wedge (\psi \to \tau)))$

2.9. Punto 38

Teo 4.36.3

0.	$((\phi \to \psi) \wedge (\psi \equiv \tau))$	Suposición del antecedente
1.	$(\phi \to \psi)$	Debilitamiento(p0)
2.	$(\psi \equiv \tau)$	Debilitamiento(p0)
3.	$((\phi \to \psi) \equiv (\phi \to \tau))$	Leibniz($\phi = (\phi \to p)$)(p2)
4.	$(\phi \to \tau)$	Ecuanimidad(p3,p1)

Así, tomando (p4,p0), se demuestra que $(((\phi \to \psi) \wedge (\psi \equiv \tau)) \to (\phi \to \tau))$

2.10. Punto 40

2.10.1. a

2.10.2. c

$\models_{\text{DS}} ((\phi \to \psi) \to ((\phi \vee \tau) \to (\psi \vee \tau)))$

$$
\begin{array}{ll}
 & (\phi \to \psi) \\
\equiv & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
 & ((\neg\phi) \vee \psi) \\
\Rightarrow & \langle \text{ Debilitamiento}(\vee) \rangle \\
 & (((\neg\phi) \vee \psi) \vee \tau) \\
\equiv & \langle \text{ Asociativa}(\vee) \rangle \\
 & ((\neg\phi) \vee (\psi \vee \tau)) \\
\equiv & \langle \text{ Teo 4.19.4 } \rangle \\
 & ((\phi \vee (\psi \vee \tau)) \equiv (\psi \vee \tau)) \\
\equiv & \langle \text{ Asociativa}(\vee), \text{ Leibniz}(\phi = (p \equiv (\psi \vee \tau))) \rangle \\
 & (((\phi \vee \psi) \vee \tau) \equiv (\phi \vee \tau)) \\
\equiv & \langle \text{ Idempotencia}(\vee), \text{ Leibniz}(\phi = (((\phi \vee \psi) \vee p) \equiv (\phi \vee \tau))) \rangle \\
 & (((\phi \vee \psi) \vee (\tau \vee \tau)) \equiv (\phi \vee \tau)) \\
\equiv & \langle \text{ Asociativa}(\vee), \text{ Conmutativa}(\vee), \text{ Asociativa}(\vee) \rangle \\
 & (((\phi \vee \tau) \vee (\psi \vee \tau)) \equiv (\psi \vee \tau)) \\
\equiv & \langle \text{ Def.}(\to) \rangle \\
 & ((\phi \vee \tau) \to (\psi \to \tau))
\end{array}
$$

Por MT 5.5.1 se demuestra que
$\models_{\text{DS}} ((\phi \to \psi) \to ((\phi \vee \tau) \to (\psi \vee \tau)))$

2.11. Punto 43

Modus Tollens

0.	$(\phi \to \psi)$	Hipótesis MTT
1.	$(\neg\psi)$	Hipótesis MTT
2.	$((\neg\phi) \vee \psi)$	Teo 4.28.1, Ecuanimidad(p0)
3.	$(\psi \equiv \mathit{false})$	Def.($\neg$), Ecuanimidad(p1)
4.	$((\neg\phi) \vee \mathit{false})$	Leibniz($\phi = ((\neg\phi) \vee p)$)(p3)
5.	$(\neg\phi)$	Identidad($\vee$)

En términos de causas y consecuencias, al tener que a sucede a causa de b, y que es cierto que a no sucede, entonces se puede decir que no ha ocurrido b. Análogamente, decir que en una fila de 2 fichas de dominó, si se sabe en que sentido se van a tirar, y la segunda no ha caído, se puede concluir que no se ha tirado la primera ficha.

2.12. Punto 44

Transitividad - Silogísmo disyuntivo

La regla de transitividad, hablando en términos de causas y consecuencias, dice:
Si a sucede debido a b, y b sucede debido a c, entonces a sucede debido a c
Es decir, conecta el principio de una cadena de causa-consecuencia con su final. La demostración y su relación con Corte se puede hallar en el punto 23

2.13. Punto 45

2.13.1. a

PM1 es tautología

0.	$(\exists \mathbf{v} \mid \mathbf{v}[((\phi \vee \phi) \to \phi)] = \mathtt{F})$	Intento por contradicción
1.	$\mathbf{v}[((\phi \vee \phi) \to \phi)] = \mathtt{F}$	Def.(p0)
2.	$\mathbf{v}[(\phi \vee \phi)] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{F}$	MT 2.23($\to$)(p1)
3.	$\mathbf{v}[(\phi \vee \phi)] = \mathtt{F}$	MT 2.23($\vee$)(p2)
4.	$\mathbf{v}[(\phi \vee \phi)] = \mathtt{F}$ y $\mathbf{v}[(\phi \vee \phi)] = \mathtt{F}$	Contradicción (p3, p2)

Por lo que $\models ((\phi \vee \phi) \to \phi)$

PM2 es tautología

0.	$(\exists \mathbf{v} \mid \mathbf{v}[(\phi \to (\phi \vee \psi))] = \mathtt{F})$	Intento por contradicción
1.	$\mathbf{v}[(\phi \to (\phi \vee \psi))] = \mathtt{F}$	Def.(p0)
2.	$\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{v}[(\phi \vee \psi)] = \mathtt{F}$	MT 2.23($\to$)(p1)
3.	$\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{F}$ y $\mathbf{v}[\psi] = \mathtt{F}$	MT 2.23($\vee$)(p2)
4.	$\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{F}$ y $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{T}$	Contradicción (p3, p2)

Por lo que $\models (\phi \to (\phi \vee \psi))$

PM3 es tautología

0.	$(\exists \mathbf{v} \mid \mathbf{v}[((\phi \to \psi) \to ((\tau \vee \phi) \to (\tau \vee \psi)))] = \mathtt{F})$	Intento por contradicción
1.	$\mathbf{v}[((\phi \to \psi) \to ((\tau \vee \phi) \to (\tau \vee \psi)))] = \mathtt{F}$	Def.(p0)
2.	$\mathbf{v}[(\phi \to \psi)] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{v}[((\tau \vee \phi) \to (\tau \vee \psi))] = \mathtt{F}$	MT 2.23($\to$)(p0)
3.	$\mathbf{v}[(\tau \vee \phi)] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{v}[(\tau \vee \psi)] = \mathtt{F}$	MT 2.23($\to$)(p2)
4.	$\mathbf{v}[\tau] = \mathtt{F} \wedge \mathbf{v}[\psi] = \mathtt{F}$	MT 2.23($\vee$)(p3)
5.	$\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{T}$	MT 2.23($\vee$)(p4, p3)
6.	$\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{F}$	MT 2.23($\to$)(p4, p2)
7.	$\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{F}$ y $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{T}$	Contradicción(p6, p5)

Por lo que $\models ((\phi \to \psi) \to ((\tau \vee \phi) \to (\tau \vee \psi)))$

PM4 es tautología

0.	$(\exists \mathbf{v} \mid \mathbf{v}[((\phi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \phi))] = \mathtt{F})$	Intento por contradicción
1.	$\mathbf{v}[((\phi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \phi))] = \mathtt{F}$	Def.(p0)
2.	$\mathbf{v}[(\phi \vee \psi)] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{v}[(\psi \vee \phi)] = \mathtt{F}$	MT 2.23($\rightarrow$)(p1)
3.	$\mathbf{v}[\psi] = \mathtt{F}$ y $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{F}$	MT 2.23($\vee$)(p2)
4.	$\mathbf{v}[(\phi \vee \psi)] = \mathtt{F}$	MT 2.23($\vee$)(p3)
5.	$\mathbf{v}[(\phi \vee \psi)] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{v}[(\phi \vee \psi)] = \mathtt{F}$	Contradicción (p4, p2)

2.13.2. b

PM1 es teorema en DS

$$
\begin{aligned}
& ((\phi \vee \phi) \rightarrow \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Idempotencia}(\vee) \rangle \\
& (\phi \vee \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& ((\neg \phi) \vee \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.1, Identidad}(\equiv) \rangle \\
& \mathit{true}
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}} ((\phi \vee \phi) \rightarrow \phi)$

PM2 es teorema en DS

$$
\begin{aligned}
& (\phi \rightarrow (\phi \vee \psi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& ((\neg \phi) \vee (\phi \vee \psi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\vee) \rangle \\
& (((\neg \phi) \vee \phi) \vee \psi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.1, Identidad}(\equiv) \rangle \\
& (\mathit{true} \vee \psi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.1 } \rangle \\
& \mathit{true}
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}} (\phi \rightarrow (\phi \vee \psi))$

PM3 es teorema en DS

Punto 40.(b)

$$
\begin{aligned}
& ((\phi \to \psi) \to ((\phi \vee \tau) \to (\psi \vee \tau))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\vee), \text{Leibniz}(\phi = ((\phi \to \psi) \to (p \to (\psi \vee \tau)))) \ \rangle \\
& ((\phi \to \psi) \to ((\tau \vee \phi) \to (\psi \vee \tau))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\vee), \text{Leibniz}(\phi = ((\phi \to \psi) \to ((\tau \vee \phi) \to p))) \ \rangle \\
& ((\phi \to \psi) \to ((\tau \vee \phi) \to (\tau \vee \psi)))
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}} ((\phi \to \psi) \to ((\tau \vee \phi) \to (\tau \vee \psi)))$

PM4 es teorema en DS

0.	$((\phi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \phi))$	Conmutativa($\vee$)
1.	$(((\phi \vee \psi) \to (\psi \vee \phi)) \wedge ((\psi \vee \phi) \equiv (\phi \vee \psi)))$	Teo 4.33.3, Ecuanimidad(p0)
2.	$((\phi \vee \psi) \to (\psi \vee \phi))$	Debilitamiento(p1)

3. Sección 5.1

3.1. Punto 1

3.1.1. a

a

$\phi \vee \psi \vee \tau \equiv \phi \vee \psi \vee \tau$

3.1.2. f

f

$\neg\phi \equiv \phi \equiv \mathit{false}$

3.1.3. m

m

$\phi \equiv \neg\phi \equiv \mathit{false}$

3.1.4. t

t

$\phi \to \psi \equiv \phi \vee \psi \equiv \psi$

3.1.5. w

w

$\phi \to \psi \vee \tau \equiv (\phi \to \psi) \vee (\phi \to \tau)$

3.1.6. x

x

$\phi \to \psi \wedge \tau \equiv (\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \tau)$

3.1.7. z

z

$\phi \vee \psi \to \phi \wedge \psi \equiv \phi \equiv \psi$

3.2. Punto 2

3.2.1. a

Es ambigüa

$$p \vee (q \wedge r)$$
$$(p \vee q) \wedge r$$

3.2.2. b

Es ambigüa

$$p \wedge (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \vee r$$

3.2.3. c

Es ambigüa

$$p \to (q \to r)$$
$$(p \to q) \to r$$

3.2.4. d

Es ambigüa

$$p \to (q \leftarrow r)$$
$$(p \to q) \leftarrow r$$

3.2.5. e

Es ambigüa

$$p \leftarrow (q \rightarrow r)$$
$$(p \leftarrow q) \rightarrow r$$

3.3. Punto 5

3.3.1. a

$true \vee p \wedge q$

$$true \vee (p \wedge q)$$

3.3.2. b

$p \equiv p \vee q$

$$(p \equiv p) \vee q$$

3.3.3. c

$p \rightarrow q \equiv r \equiv p \wedge q \equiv p \wedge r$

$$p \rightarrow (q \equiv R \equiv P \wedge q \equiv p \wedge r)$$

3.4. d

$p \equiv q \not\equiv r \leftarrow false \wedge p$

$$(p \equiv q \not\equiv r) \leftarrow false \wedge p$$

3.5. e

$\neg p \wedge p \equiv p \rightarrow r$

$$\neg(p \wedge p \equiv p) \rightarrow r$$