

Tarea 13

Hecho por

DAVID GÓMEZ



VIGILADA MINEDUCACIÓN

UNIVERSIDAD

Estudiante de Matemáticas

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Colombia

11 de noviembre de 2022

Tarea 13

Índice

Sección 7.1	3
Punto 1	3
a	3
b	3
c	3
Punto 2	3
a	3
b	3
c	3
Punto 3	3
a	3
b	4
c	4
d	4
Punto 4	4
Punto 5	5
Punto 6	5
a	5
b	5
c	6
Punto 7	6
Sección 7.2	6
Punto 2	6
Punto 3	7
Punto 4	7
Punto 5	7
Punto 7	7
Punto 9	7
Punto 10	7
Punto 12	7
Punto 14	7
Punto 16	7

David Gómez

Sección 7.1

Punto 1

$$\mathbf{F} = \{p_0 \mapsto p_1, p_2 \mapsto \text{true}, p_3 \mapsto H(x), p_4 \mapsto p_4\}$$

a

$$\phi = p_0$$

$$\mathbf{F}[p_0] = p_1$$

b

$$\phi = H(y) = \forall x H(x) \wedge \text{false}$$

$$\mathbf{F}[H(y) = \forall x H(x) \wedge \text{false}] = H(y) = \forall x H(x) \wedge \text{false}$$

c

$$\phi = \forall x \forall y (H(f(x, y)) \vee p_3)$$

$$\mathbf{F}[\forall x \forall y (H(f(x, y)) \vee p_3)] = \forall x \forall y (H(f(x, y)) \vee H(x))$$

Punto 2

a

Es libre

b

Es libre

c

Es libre

Punto 3

a

Demostración de ϕ

- (i) Si no hay cuantificadores que afecten globalmente en ϕ , la definición de demostración es exactamente la misma que en DS.
- (ii) Si ϕ es de la forma $\forall x \psi$, entonces una demostración es una secuencia no vacía de proposiciones tales que el último elemento de la secuencia es ψ y los anteriores son axiomas o deducciones de pasos anteriores mediante reglas de inferencia.
- (iii) Si ϕ es de la forma $\exists x \psi$, entonces una demostración es una secuencia no vacía de proposiciones tales que el último elemento de la secuencia es ψ y los anteriores son axiomas, deducciones de pasos anteriores mediante reglas de inferencia o suposiciones.

Tarea 13

b

Derivación

- (i) Si no hay cuantificadores que afecten globalmente en ϕ , la definición de derivación es exactamente la misma que en DS.
- (ii) Si ϕ es de la forma $\forall x(\psi \equiv \tau)$, entonces una derivación es una secuencia finita de proposiciones, en la cual cada elemento es obtenido mediante transitividades de \equiv del elemento anterior.
- (iii) Si ϕ es de la forma $\exists x(\psi \equiv \tau)$, entonces una derivación es una secuencia finita de proposiciones en la cual cada elemento anterior es obtenido mediante transitividades de \equiv del elemento anterior y además se tienen en cuenta suposiciones dadas antes de iniciar la derivación como verdades “locales”.

c

Derivación de debilitamiento

- (i) Si no hay cuantificadores que afecten globalmente en ϕ , la definición de derivación de debilitamiento es exactamente la misma que en DS.
- (ii) Si ϕ es de la forma $\forall x(\psi \rightarrow \tau)$, entonces una derivación es una secuencia finita de proposiciones, en la cual cada elemento es obtenido mediante transitividades de \equiv y al menos una de \rightarrow del elemento anterior.
- (iii) Si ϕ es de la forma $\exists x(\psi \rightarrow \tau)$, entonces una derivación es una secuencia finita de proposiciones en la cual cada elemento anterior es obtenido mediante transitividades de \equiv y al menos una de \rightarrow del elemento anterior y además se tienen en cuenta suposiciones dadas antes de iniciar la derivación como verdades “locales”.

d

Derivación de fortalecimiento

- (i) Si no hay cuantificadores que afecten globalmente en ϕ , la definición de derivación de fortalecimiento es exactamente la misma que en DS.
- (ii) Si ϕ es de la forma $\forall x(\psi \leftarrow \tau)$, entonces una derivación es una secuencia finita de proposiciones, en la cual cada elemento es obtenido mediante transitividades de \leftarrow del elemento anterior.
- (iii) Si ϕ es de la forma $\exists x(\psi \leftarrow \tau)$, entonces una derivación es una secuencia finita de proposiciones en la cual cada elemento anterior es obtenido mediante transitividades de \equiv y al menos una de \leftarrow del elemento anterior y además se tienen en cuenta suposiciones dadas antes de iniciar la derivación como verdades “locales”.

Punto 4

Si $\vdash_{DS} \phi$ entonces $\vdash_{DS(\mathcal{L})} \phi$

Ya que todos los axiomas de DS están contenidos en $DS(\mathcal{L})$, usando la definición de demostración, y puesto que no hay cuantificadores en ningún teorema de DS. Se puede demostrar cualquier teorema de DS usando los axiomas de $DS(\mathcal{L})$.

Punto 5

Modus Ponens

0. ϕ	Hipótesis MPP
1. $\phi \rightarrow \psi$	Hipótesis MPP
2. $\neg\phi \rightarrow \psi$	(alt)Def. (\rightarrow), Ecuanimidad(p1)
3. $\phi \equiv true$	Identidad(\equiv)(p0)
4. $\neg\phi \vee \psi \equiv \neg true \vee \psi$	Lbz. ($\phi = \neg p \vee \psi$)(p3)
5. $\neg true \vee \psi$	Ecuanimidad(p4, p2)
6. $false \vee \psi$	$\neg false \equiv true$, Lbz. ($\phi = p \vee \psi$), Ecuanimidad(p5)
7. ψ	Identidad(\vee)

Punto 6

a

Todos los hombres son mortales...

$H(x) := "x \text{ es hombre}"$
 $M(x) := "x \text{ es mortal}"$ $s := "Sócrates"$

0. $(\forall x H(x) : M(x))$	Suposición
1. $H(s)$	Suposición
2. $(\forall x H(x) : M(x)) \rightarrow (H(s) \rightarrow M(s))$	Bx4
3. $H(s) \rightarrow M(s)$	MPP (p3, p1)
4. $M(s)$	MPP(p4, p2)

b

No todos los estudiantes...

$E(x) := "x \text{ es estudiante}"$
 $A(x, y) := "x \text{ asiste a } y"$
 $C(x) := "x \text{ es una clase}"$

0. $(\exists x, y | E(x) \wedge C(y) : \neg A(x, y))$ Suposición
1. $(\forall x, y | E(x) \wedge C(y) : \neg A(x, y))$

La conclusión (p1) no es coherente con la suposición dada, pues en esta se dice que hay algún/os estudiantes que no asisten a clase, pero esto no es equivalente a afirmar que ningún estudiante asiste a clase.

Tarea 13

c

La relación R es reflexiva...

$$R := x \sim y$$

0. $(\forall x \mid : x \sim x)$ Suposición
1. $(\forall x, y, z \mid x \sim y \wedge y \sim z : x \sim z)$ Suposición
2. $(\forall x, y \mid x \sim y : x = y)$

Un ejemplo puede ser $=$ pues cumple ser reflexiva ($x \leq x$), transitiva ($a \leq b \wedge b \leq c \rightarrow a \leq c$) pero no es antisimétrica (ej: $2 \leq 3 \rightarrow 2 = 3 \equiv \text{true} \rightarrow \text{false} \equiv \text{false}$)

Punto 7

Demostrar MTT 5.13 para $DS(\mathcal{L})$

- (i) En caso de que no hayan cuantificadores que afecten globalmente en $\phi \equiv \psi$, el metateorema funciona exactamente igual que en DS , con la extensión a los axiomas de $DS(\mathcal{L})$
- (ii) En caso de que hayan cuantificadores que afecten globalmente en $\phi \equiv \psi$ basta con aplicar el metateorema a la fórmula afectada por los cuantificadores, teniendo en cuenta suposiciones para \exists . Esto debido a que el funcionamiento de las proposiciones seguirá teniendo el mismo significado localmente en el cuantificador que si estuvieran sin este, la diferencia está en lo que quieren representar, mas no en su significado a nivel de lógica.

Sección 7.2

Punto 2

$\vdash_{DS(\mathcal{L})} \forall x \forall x \phi \equiv \forall x \phi$

$$\begin{aligned} & \forall x \forall x \phi \\ \equiv & \langle \text{Bx1}(\text{x no es libre en } \forall x \phi) \rangle \\ & \forall x \phi \end{aligned}$$

Por metateorema de derivación se demuestra que
 $\vdash_{DS(\mathcal{L})} \forall x \forall x \phi \equiv \forall x \phi$

David Gómez

Punto 3

$$\vdash_{DS(\mathcal{L})} (\forall x \mid \psi \wedge \tau : \phi) \equiv (\forall x \mid : \psi \wedge \tau \rightarrow \phi)$$

$$\begin{aligned} & (\forall x \mid \psi \wedge \tau : \phi) \\ \equiv & \langle \text{Azúcar sintáctico} \rangle \\ & \forall x(\psi \wedge \tau \rightarrow \phi) \\ \equiv & \langle \text{Tomando los pasos siguientes bajo } \forall x \rangle \\ & \psi \wedge \tau \rightarrow \phi \\ \equiv & \langle \text{Identidad}(\vee) \rangle \\ & (\psi \wedge \tau \rightarrow \phi) \vee \text{false} \\ \equiv & \langle \text{Conmutativa}(\vee), (\text{alt})\text{Def.}(\rightarrow) \rangle \\ & \text{true} \rightarrow (\psi \wedge \tau \rightarrow \phi) \\ \equiv & \langle \text{Regresando } \forall x \rangle \\ & \forall x(\text{true} \rightarrow (\psi \wedge \tau \rightarrow \phi)) \\ \equiv & \langle \text{Azúcar sintáctico} \rangle \\ & (\forall x \mid : \psi \wedge \tau \rightarrow \phi) \end{aligned}$$

Por metateorema de derivación se demuestra que

$$\vdash_{DS(\mathcal{L})} (\forall x \mid \psi \wedge \tau : \phi) \equiv (\forall x \mid : \psi \wedge \tau \rightarrow \phi)$$

Punto 4

$$\vdash_{DS(\mathcal{L})} \forall x \forall y \phi \equiv \forall y \forall x \phi$$

$$\begin{aligned} & \forall x \forall y \phi \\ \equiv & \langle \text{Bx1 } (y \text{ no aparece libre en } \forall x \forall y \phi) \rangle \\ & \forall y \forall x \forall y \phi \\ \equiv & \langle \text{Bx1 } (x \text{ no aparece libre en } \forall x \forall y \phi) \rangle \\ & \forall y \forall x \forall y \phi \\ \equiv & \langle \rangle \end{aligned}$$

Punto 5

Punto 7

Punto 9

Punto 10

Punto 12

Punto 14

Punto 16