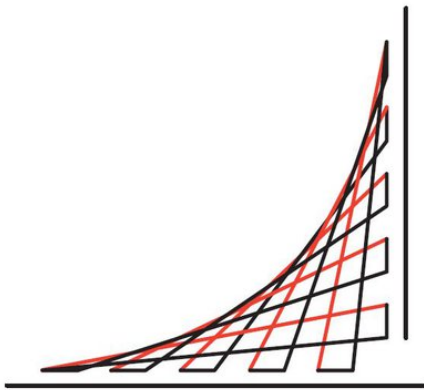


Taller 06

David Gómez



ESCUELA
COLOMBIANA
DE INGENIERÍA
JULIO GARAVITO

VIGILADA MINEDUCACIÓN

Matemáticas
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Colombia
20 de septiembre de 2022

Índice

1. Punto 1	2
2. Punto 2	3
3. Punto 3	3
4. Punto 4	5
5. Punto 5	5
6. Punto 6	5
7. Punto 7	5

1. Punto 1

- $((p \wedge (\neg q)) \rightarrow r)$

$\overline{F_1}[\phi]$	$((p \equiv q) \wedge (\neg(r \rightarrow s)) \rightarrow false)$
------------------------	---

$\overline{F_2}[\phi]$	$((p \equiv q) \wedge (\neg q)) \rightarrow r$
------------------------	--

$\overline{F_3}[\phi]$	$((p \wedge (\neg q)) \rightarrow false)$
------------------------	---

$\overline{F_4}[\phi]$	$((p \equiv q) \wedge (\neg(r \rightarrow s))) \rightarrow r$
------------------------	---

$\overline{F_5}[\phi]$	$((p \wedge (\neg(r \rightarrow s))) \rightarrow false)$
------------------------	--

- $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$

$\overline{F_1}[\phi]$	$((p \equiv q) \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow (p \equiv q)))$
------------------------	---

$\overline{F_2}[\phi]$	$((p \equiv q) \rightarrow (q \rightarrow (p \equiv q)))$
------------------------	---

$\overline{F_3}[\phi]$	$(p \rightarrow (q \rightarrow p))$
------------------------	-------------------------------------

$\overline{F_4}[\phi]$	$((p \equiv q) \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow (p \equiv q)))$
------------------------	---

$\overline{F_5}[\phi]$	$(p \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow p))$
------------------------	---

- $(\neg((r \wedge (r \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg((p \rightarrow q) \vee (r \wedge (\neg r))))))$

$\overline{F_1}[\phi]$	$(\neg((false \wedge (false \leftarrow ((p \equiv q) \vee s))) \equiv (\neg(((p \equiv q) \rightarrow (r \rightarrow s)) \vee (false \wedge (\neg false))))))$
------------------------	--

$\overline{F_2}[\phi]$	$(\neg((r \wedge (r \leftarrow ((p \equiv q) \vee s))) \equiv (\neg(((p \equiv q) \rightarrow q) \vee (r \wedge (\neg r))))))$
------------------------	--

$\overline{F_3}[\phi]$	$(\neg((false \wedge (false \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg((p \rightarrow q) \vee (false \wedge (\neg false))))))$
------------------------	--

$\overline{F_4}[\phi]$	$(\neg((r \wedge (r \leftarrow ((p \equiv q) \vee s))) \equiv (\neg(((p \equiv q) \rightarrow (r \rightarrow s)) \vee (r \wedge (\neg r))))))$
------------------------	--

$\overline{F_5}[\phi]$	$(\neg((false \wedge (false \leftarrow ((p \vee s))) \equiv (\neg((p \rightarrow (r \rightarrow s)) \vee (false \wedge (\neg false))))))$
------------------------	---

2. Punto 2

- $(\overline{\mathbf{F}_1} \circ \overline{\mathbf{F}_2})[((p \wedge (\neg q)) \rightarrow r)]$

punto 2

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{F}_1}[\overline{\mathbf{F}_2}[(p \wedge (\neg q)) \rightarrow r]] &= \overline{\mathbf{F}_1}[(p \equiv q) \wedge (\neg q) \rightarrow r] \\ &= (((p \equiv q) \equiv (r \rightarrow s)) \wedge (\neg(r \rightarrow s)) \rightarrow false)\end{aligned}$$

- $(\overline{\mathbf{F}_3} \circ \overline{\mathbf{F}_4})[(p \rightarrow (q \rightarrow p))]$

Punto 2

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{F}_3}[\overline{\mathbf{F}_4}[(p \rightarrow (q \rightarrow p))]] &= \overline{\mathbf{F}_3}[(p \equiv q) \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow (p \equiv q))] \\ &= ((p \equiv q) \rightarrow (false \rightarrow s) \rightarrow (p \equiv q))\end{aligned}$$

- $(\overline{\mathbf{F}_5} \circ \overline{\mathbf{F}_1})[(\neg((r \wedge (r \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg((p \rightarrow q) \vee (r \wedge (\neg r)))))))]$

punto 2

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{F}_5}[\overline{\mathbf{F}_1}[(\neg((r \wedge (r \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg((p \rightarrow q) \vee (r \wedge (\neg r)))))))] \\ &= \overline{\mathbf{F}_5}[(\neg((false \wedge (false \leftarrow ((p \equiv q) \vee s))) \equiv (\neg((p \equiv q) \rightarrow (r \rightarrow s)) \vee (false \wedge (\neg false))))))] \\ &= (\neg((false \wedge (false \leftarrow ((p \equiv q) \vee s))) \equiv (\neg((p \equiv q) \rightarrow (r \rightarrow s)) \vee (false \wedge (\neg false))))))\end{aligned}$$

- $(\overline{\mathbf{F}_2} \circ \overline{\mathbf{F}_3})[(p \wedge (\neg q)) \rightarrow r]$

Punto 2

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{F}_2}[\overline{\mathbf{F}_3}[(p \wedge (\neg q)) \rightarrow r]] &= \overline{\mathbf{F}_2}[(p \wedge (\neg q)) \rightarrow false] \\ &= (((p \equiv q) \wedge (\neg q)) \rightarrow false)\end{aligned}$$

- $(\overline{\mathbf{F}_4} \circ \overline{\mathbf{F}_5})[(p \rightarrow (q \rightarrow p))]$

Punto 2

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{F}_4}[\overline{\mathbf{F}_5}[(p \rightarrow (q \rightarrow p))]] &= \overline{\mathbf{F}_4}[(p \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow p))] \\ &= ((p \equiv q) \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow (p \equiv q)))\end{aligned}$$

- $(\overline{\mathbf{F}_1} \circ \overline{\mathbf{F}_3})[(\neg((r \wedge (r \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg((p \rightarrow q) \vee (r \wedge (\neg r)))))))]$

Punto 2

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{F}_1}[\overline{\mathbf{F}_3}[(\neg((r \wedge (r \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg((p \rightarrow q) \vee (r \wedge (\neg r)))))))] \\ &= \overline{\mathbf{F}_1}[(\neg((false \wedge (false \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg((p \rightarrow q) \vee (false \wedge (\neg false))))))] \\ &= (\neg(false \wedge (false \leftarrow ((p \equiv q) \vee s))) \equiv (\neg((p \equiv q) \rightarrow (r \rightarrow s)) \vee (false \wedge (\neg false))))\end{aligned}$$

3. Punto 3

- $(\overline{\mathbf{F}_1} \circ \overline{\mathbf{F}_2} \circ \overline{\mathbf{F}_3})[(p \wedge (\neg q)) \rightarrow r]$

punto 3

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{F}_1}[\overline{\mathbf{F}_2}[\overline{\mathbf{F}_3}[(p \wedge (\neg q)) \rightarrow r]]] &= \overline{\mathbf{F}_1}[\overline{\mathbf{F}_2}[(p \wedge (\neg q)) \rightarrow \text{false}]] \\ &= \overline{\mathbf{F}_1}[\overline{((p \equiv q) \wedge (\neg q)) \rightarrow \text{false}}] \\ &= (((p \equiv q) \equiv (r \rightarrow s)) \wedge (\neg(r \rightarrow s)) \rightarrow \text{false})\end{aligned}$$

■ $(\overline{\mathbf{F}_4} \circ \overline{\mathbf{F}_5} \circ \overline{\mathbf{F}_1})[(p \rightarrow (q \rightarrow p))]$

punto 3

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{F}_4}[\overline{\mathbf{F}_5}[\overline{\mathbf{F}_1}[(p \rightarrow (q \rightarrow p))]]] &= \overline{\mathbf{F}_4}[\overline{\mathbf{F}_5}[(p \equiv q) \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow (p \equiv q))]] \\ &= \overline{\mathbf{F}_4}[\overline{((p \equiv (r \rightarrow s)) \rightarrow ((\text{false} \rightarrow s) \rightarrow (p \equiv (r \rightarrow s))))}] \\ &= (((p \equiv q) \equiv (\text{false} \rightarrow s)) \rightarrow ((\text{false} \rightarrow s) \rightarrow (p \equiv (\text{false} \rightarrow s))))\end{aligned}$$

■ $(\overline{\mathbf{F}_2} \circ \overline{\mathbf{F}_3} \circ \overline{\mathbf{F}_4})[(\neg((r \wedge (r \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg((p \rightarrow q) \vee (r \wedge (\neg r))))))]$

punto 3

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{F}_2}[\overline{\mathbf{F}_3}[\overline{\mathbf{F}_4}[(\neg((r \wedge (r \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg((p \rightarrow q) \vee (r \wedge (\neg r))))))]]] \\ &= \overline{\mathbf{F}_2}[\overline{\mathbf{F}_3}[(\neg((r \wedge (r \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg(((p \equiv q) \rightarrow (r \rightarrow s)) \vee (r \wedge (\neg r))))))]] \\ &= \overline{\mathbf{F}_2}[(\neg((\text{false} \wedge (\text{false} \leftarrow ((p \equiv q) \vee s))) \equiv (\neg(((p \equiv q) \rightarrow (\text{false} \rightarrow s)) \vee (\text{false} \wedge (\neg \text{false}))))))] \\ &= (\neg((\text{false} \wedge (\text{false} \leftarrow ((p \equiv q) \equiv q) \vee s))) \equiv (\neg(((p \equiv q) \equiv q) \rightarrow (\text{false} \rightarrow s)) \vee (\text{false} \wedge (\neg \text{false}))))\end{aligned}$$

■ $(\overline{\mathbf{F}_5} \circ \overline{\mathbf{F}_1} \circ \overline{\mathbf{F}_2})[(p \wedge (\neg q)) \rightarrow r]$

punto 3

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{F}_5}[\overline{\mathbf{F}_1}[\overline{\mathbf{F}_2}[(p \wedge (\neg q)) \rightarrow r]]] &= \overline{\mathbf{F}_5}[\overline{\mathbf{F}_1}[\overline{(((p \equiv q) \wedge (\neg q)) \rightarrow r)}]] \\ &= \overline{\mathbf{F}_5}[\overline{(((p \equiv q) \equiv (r \rightarrow s)) \wedge (\neg(r \rightarrow s))) \rightarrow \text{false}}] \\ &= (((p \equiv (r \rightarrow s)) \equiv (\text{false} \rightarrow s)) \wedge (\neg(\text{false} \rightarrow s))) \rightarrow \text{false}\end{aligned}$$

■ $(\overline{\mathbf{F}_3} \circ \overline{\mathbf{F}_4} \circ \overline{\mathbf{F}_5})[(p \rightarrow (q \rightarrow p))]$

punto 3

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{F}_3}[\overline{\mathbf{F}_4}[\overline{\mathbf{F}_5}[(p \rightarrow (q \rightarrow p))]]] &= \overline{\mathbf{F}_3}[\overline{\mathbf{F}_4}[(p \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow p))]] \\ &= \overline{\mathbf{F}_3}[\overline{((p \equiv q) \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow (p \equiv q)))}] \\ &= ((p \equiv q) \rightarrow ((\text{false} \rightarrow s) \rightarrow (p \equiv q)))\end{aligned}$$

■ $(\overline{\mathbf{F}_5} \circ \overline{\mathbf{F}_3} \circ \overline{\mathbf{F}_1})[(\neg((r \wedge (r \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg((p \rightarrow q) \vee (r \wedge (\neg r))))))]$

punto 3

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{F}_5}[\overline{\mathbf{F}_3}[\overline{\mathbf{F}_1}[(\neg((r \wedge (r \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg((p \rightarrow q) \vee (r \wedge (\neg r))))))]]] \\ &= \overline{\mathbf{F}_5}[\overline{\mathbf{F}_3}[(\neg((\text{false} \wedge (\text{false} \leftarrow ((p \equiv q) \rightarrow (r \rightarrow s)) \vee (\text{false} \wedge (\neg \text{false}))))))] \\ &= \overline{\mathbf{F}_5}[(\neg((\text{false} \wedge (\text{false} \leftarrow ((p \equiv q) \vee s))) \equiv (\neg(((p \equiv q) \rightarrow (r \rightarrow s)) \vee (\text{false} \wedge (\neg \text{false}))))))] \\ &= (\neg((\text{false} \wedge (\text{false} \leftarrow ((p \equiv (r \rightarrow s)) \vee s))) \equiv (\neg(((p \equiv (r \rightarrow s)) \rightarrow (\text{false} \rightarrow s)) \vee (\text{false} \wedge (\neg \text{false}))))))\end{aligned}$$

4. Punto 4

$$\overline{\mathbf{F}} = \{p \mapsto (p \equiv q), q \mapsto (r \rightarrow s), r \mapsto \text{false}\}$$

- $\overline{\mathbf{F}}[(p \wedge (\neg q)) \rightarrow r] = (((p \equiv q) \wedge (\neg(r \rightarrow s))) \rightarrow \text{false})$
- $\overline{\mathbf{F}}[(p \rightarrow (q \rightarrow p))] = ((p \equiv q) \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow (p \equiv q)))$
- $\overline{\mathbf{F}}[(\neg((r \wedge (r \leftarrow (p \vee s)))) \equiv (\neg((p \rightarrow q) \vee (r \wedge (\neg r)))))] = (\neg((\text{false} \wedge (\text{false} \leftarrow ((p \vee s)))) \equiv (\neg((p \rightarrow (r \rightarrow s)) \vee (\text{false} \wedge (\neg \text{false}))))))$

5. Punto 5

punto 5

- $(p \equiv r)[p, r := t, t] = (p \equiv p), \models (t \equiv t)$
- $((p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q)))[p, q := t, t] = ((t \wedge t) \vee ((\neg t) \wedge (\neg t))), \models ((t \wedge t) \vee ((\neg t) \wedge (\neg t)))$
- $((p \vee r) \leftarrow (p \wedge q))[p, q, r := t, t, t] = ((t \vee t) \leftarrow (t \wedge t)), \models ((t \vee t) \leftarrow (t \wedge t))$

6. Punto 6

punto 6

- | | |
|--|------------|
| 0. $\gamma = \psi[q := r]$ | suposición |
| 1. p, q, r son variables proposicionales distintas | Enunciado |
| 2. r no aparece en ϕ ni en ψ | Enunciado |
| 3. $\phi[p := \gamma] = \phi[p := \psi][q := r]$ | (p0, p2) |
| 4. $\phi[p := \psi][q := r][q := \tau][r := q] = \phi[p, q := \psi, \tau]$ | (p2, p3) |

7. Punto 7

punto 7

- | | |
|--|-----------|
| 0. p, q variables distintas | Enunciado |
| 1. ϕ, ψ proposiciones | Enunciado |
| 2. q puede aparecer en ϕ, ψ | Enunciado |
| 3. es posible que $((\phi \rightarrow \psi) \equiv ((\neg \phi) \vee \psi)) \neq ((p \rightarrow q) \equiv ((\neg p) \vee q))[p := \phi][q := \psi]$ | |

Este último paso se debe a que, en la parte derecha de la igualdad, la sustitución se hace en dos momentos. En el primer momento, se sustituye p por ϕ , y luego se sustituye q por ψ . El problema se da con el paso 2, en el cual se menciona que q puede aparecer en ϕ o en ψ . Es decir, al realizar la segunda sustitución, existe la posibilidad de cambiar lo que era ϕ .