Tarea 09

David Gomez

Matemáticas
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Colombia
7 de octubre de 2022

Índice

1. Sección 4.6

1.1. Punto 4

Teo 4.24.3

$$
\begin{array}{ll}
 & (\phi \wedge true) \\
\equiv & \langle \text{ Def.}(\wedge) \rangle \\
 & (\phi \equiv (true \equiv (\phi \vee true))) \\
\equiv & \langle \text{ Teo 4.19.2, Leibniz}(\phi = (\phi \equiv (true \equiv p))) \rangle \\
 & (\phi \equiv (true \equiv true)) \\
\equiv & \langle \text{ Teo 4.6.2, Leibniz}(\phi = (\phi \equiv p)) \rangle \\
 & (\phi \equiv true) \\
\equiv & \langle \text{ Identidad}(\equiv) \rangle \\
 & \phi
\end{array}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\vdash_{\text{DS}} ((\phi \wedge true) \equiv \phi)$

1.2. Punto 5

Teo 4.24.4

$$
\begin{array}{ll}
 & (\phi \wedge false) \\
\equiv & \langle \text{ Def.}(\wedge) \rangle \\
 & (\phi \equiv (false \equiv (\phi \vee false))) \\
\equiv & \langle \text{ Identidad}(\vee)\text{, Conmutativa}(\equiv)\text{, Leibniz}(\phi = (\phi \equiv (false \equiv p)) \rangle \\
 & (\phi \equiv (false \equiv \phi)) \\
\equiv & \langle \text{ Def.}(\neg)\text{, Conmutativa}(\equiv)\text{, Leibniz}(\phi = (\phi \equiv p)) \rangle \\
 & (\phi \equiv (\neg\phi)) \\
\equiv & \langle \text{ Teo 4.15.7 } \rangle \\
 & false
\end{array}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\vdash_{\text{DS}} ((\phi \wedge false) \equiv false)$

1.3. Punto 6

Teo 4.24.5

$$
\begin{aligned}
& (\phi \wedge \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\wedge) \rangle \\
& (\phi \equiv (\phi \equiv (\phi \vee \phi))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \rangle \\
& ((\phi \equiv \phi) \equiv (\phi \vee \phi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Idempotencia}(\vee), \text{ Leibniz}(\phi = ((\phi \equiv \phi) \equiv p)) \rangle \\
& ((\phi \equiv \phi) \equiv \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.6.3, Conmutativa}(\equiv) \rangle \\
& (\phi \equiv \mathit{true}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Identidad } \rangle \\
& \phi
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}} ((\phi \wedge \phi) \equiv \phi)$

1.4. Punto 8

Teo 4.25.1

$$
\begin{aligned}
& (\phi \wedge (\neg\phi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\wedge) \rangle \\
& (\phi \equiv ((\neg\phi) \equiv (\phi \vee (\neg\phi)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \rangle \\
& ((\phi \equiv (\neg\phi)) \equiv (\phi \vee (\neg\phi))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.1, Identidad, Leibniz}(\phi = ((\phi \equiv (\neg\phi)) \equiv p)) \rangle \\
& ((\phi \equiv (\neg\phi)) \equiv \mathit{true}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.15.7, Conmutativa}(\equiv), \text{ Leibniz}(\phi = (p \equiv \mathit{true})) \rangle \\
& (\mathit{false} \equiv \mathit{true}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Identidad } \rangle \\
& \mathit{false}
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}} ((\phi \wedge (\neg\phi)) \equiv \mathit{false})$

1.5. Punto 9

Teo 4.25.2

$$
\begin{aligned}
& (\neg(\phi \wedge \psi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\wedge)\text{, Leibniz}(\phi = (\neg p)) \ \rangle \\
& (\neg(\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\vee)\text{, Leibniz}(\phi = (\neg(\phi \equiv p))) \ \rangle \\
& (\neg(\phi \equiv (\psi \equiv (\psi \vee \phi)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv)\text{, Leibniz}(\phi = (\neg(\phi \equiv p))) \ \rangle \\
& (\neg(\phi \equiv ((\psi \vee \phi) \equiv \psi))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.15.6, Leibniz}(\phi = (\neg(\phi \equiv ((\psi \vee p) \equiv \psi)))) \ \rangle \\
& (\neg(\phi \equiv ((\psi \vee (\neg(\neg\phi))) \equiv \psi))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.4, Leibniz}(\phi = (\neg(\phi \equiv p))) \ \rangle \\
& (\neg(\phi \equiv (\psi \vee (\neg\phi)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa 4.15.4 } \rangle \\
& ((\neg\phi) \equiv (\psi \vee (\neg\phi))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\vee)\text{, Leibniz}(\phi = ((\neg\phi) \equiv p)) \ \rangle \\
& ((\neg\phi) \equiv ((\neg\phi) \vee \psi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv) \ \rangle \\
& (((\neg\phi) \vee \psi) \equiv (\neg\phi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.15.6, Leibniz}(\phi = (((\neg\phi) \vee p) \equiv (\neg\phi))) \ \rangle \\
& (((\neg\phi) \vee (\neg(\neg\psi))) \equiv (\neg\phi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.4 } \rangle \\
& ((\neg\phi) \vee (\neg\psi))
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\vdash_{\text{DS}} ((\neg(\phi \wedge \psi)) \equiv ((\neg\phi) \vee (\neg\psi)))$

1.6. Punto 11

Teo 4.25.4

$$
\begin{aligned}
& (((\phi \wedge \psi)) \equiv ((\phi \wedge \tau)) \equiv \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\wedge) \rangle \\
& (((\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi))) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau)))) \equiv \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv) \rangle \\
& (\phi \equiv ((\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi))) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau))))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv), \text{ Leibniz}(\phi = (\phi \equiv p)) \rangle \\
& (\phi \equiv (\phi \equiv ((\psi \equiv (\phi \vee \psi))) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau))))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \rangle \\
& ((\phi \equiv \phi) \equiv ((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau))))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.6.2, Leibniz}(\phi = (p \equiv ((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau)))))) \rangle \\
& (\textit{true} \equiv ((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau))))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv), \text{ Identidad}(\equiv) \rangle \\
& ((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv), \text{ Leibniz}(\phi = ((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv p)) \rangle \\
& ((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv ((\tau \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv \phi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \rangle \\
& (((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \psi))) \equiv \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv) \rangle \\
& (\phi \equiv ((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \psi)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv), \text{ Leibniz}(\phi = (\phi \equiv (\phi \equiv p))) \rangle \\
& (\phi \equiv (\psi \equiv ((\phi \vee \psi) \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \psi))))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv), \text{ Leibniz}(\phi = (\phi \equiv (\psi \equiv p))) \rangle \\
& (\phi \equiv (\psi \equiv ((\tau \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\phi \vee \psi)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv), \text{ Leibniz}(\phi = (\phi \equiv p)) \rangle \\
& (\phi \equiv ((\phi \equiv \tau) \equiv ((\phi \vee \tau) \equiv (\phi \vee \psi)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Distribución}(\vee, \equiv), \text{ Leibniz}(\phi = (\phi \equiv ((\psi \equiv \tau) \equiv p))) \rangle \\
& (\phi \equiv ((\psi \equiv \tau) \equiv (\phi \vee (\tau \equiv \psi)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\vee), \text{ Leibniz}(\phi = (\phi \equiv ((\psi \equiv \tau) \equiv (\phi \vee p)))) \rangle \\
& (\phi \equiv ((\psi \equiv \tau) \equiv (\phi \vee (\psi \equiv \tau)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\wedge) \rangle \\
& (\phi \wedge (\psi \equiv \tau))
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 y Conmutativa($\equiv$) se demuestra que
$\vdash_{\text{DS}} ((\phi \wedge (\psi \equiv \tau)) \equiv (((\phi \wedge \psi) \equiv (\phi \wedge \psi)) \equiv \phi))$

2. Sección 4.7

2.1. Punto 3

Teo 4.28.2

$$
\begin{aligned}
& ((\phi \wedge \psi) \equiv \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\wedge)\text{, Leibniz}(\phi = (p \equiv \phi)) \rangle \\
& ((\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi))) \equiv \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv)\text{, Asociativa}(\equiv)\text{, Identidad}(\equiv) \rangle \\
& (\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv)\text{, Def.}(\rightarrow) \rangle \\
& (\phi \rightarrow \psi)
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 y Conmutativa($\equiv$) se demuestra que
$\vdash_{\text{DS}} ((\phi \rightarrow \psi) \equiv ((\phi \wedge \psi) \equiv \phi))$

2.2. punto 7

Teo 4.29.4

$$
\begin{aligned}
& (\phi \rightarrow \mathit{false}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& ((\neg\phi) \vee \mathit{false}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Identidad}(\vee) \rangle \\
& (\neg\phi)
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\vdash_{\text{DS}} ((\phi \rightarrow \mathit{false}) \equiv (\neg\phi))$

2.3. punto 10

Teo 4.30.3

$$
\begin{aligned}
& (\phi \rightarrow (\psi \wedge \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& ((\neg\phi) \vee (\psi \wedge \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist.}(\vee, \wedge) \rangle \\
& (((\neg\phi) \vee \psi) \wedge ((\neg\phi) \vee \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\rightarrow) \rangle \\
& ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \tau))
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\vdash_{\text{DS}} ((\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \tau)) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \tau)))$

2.4. Punto 17

Teo 4.31.5

$$
\begin{aligned}
& (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.18.1 } \rangle \\
& ((\neg\phi) \vee (\psi \rightarrow \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1, Leibniz}(\phi = ((\neg\phi) \vee p)) \rangle \\
& ((\neg\phi) \vee ((\neg\psi) \vee \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\vee) \rangle \\
& (((\neg\phi) \vee (\neg\psi)) \vee \tau) \\
\equiv \quad & \langle \text{ De Morgan, Leibniz}(\phi = (p \vee \tau)) \rangle \\
& ((\neg(\phi \wedge \psi)) \vee \tau) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \tau)
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}} ((\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \tau)) \equiv ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \tau))$

2.5. Punto 18

Teo 4.31.6

$$
\begin{aligned}
& (\phi \vee (\phi \rightarrow \psi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1, Leibniz}(\phi = (\phi \vee p)) \rangle \\
& (\phi \vee ((\neg\phi) \vee \psi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\vee) \rangle \\
& ((\phi \vee (\neg\phi)) \vee \psi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.1, Identidad}(\equiv) \rangle \\
& (\mathit{true} \vee \psi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.2 } \rangle \\
& \mathit{true}
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 e Identidad($\equiv$) se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}} (\phi \vee (\phi \rightarrow \psi))$

2.6. Punto 23

Teo 4.33.2

0.	$((\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \tau))$	Suposición del antecedente
1.	$(\phi \to \psi)$	Debilitamiento(p0)
2.	$(\psi \to \tau)$	Debilitamiento(p0)
3.	$((\neg\phi) \vee \psi)$	Teo 4.28.1, Ecuanimidad(p1)
4.	$((\neg\psi) \vee \tau)$	Teo 4.28.1, Ecuanimidad(p2)
5.	$(\psi \vee (\neg\phi))$	Conmutativa($\vee$)
6.	$((\neg\phi) \vee \tau)$	Corte(p5, p4)
7.	$(\phi \to \tau)$	Teo 4.28.1, Ecuanimidad(p6)

Así, tomando (p7, p0), se demuestra que $(((\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \tau)) \to (\phi \to \tau))$

2.7. Punto 24

2.8. Punto 35

Teo 4.35.5

$$
\begin{aligned}
& ((\phi \to \tau) \wedge (\psi \to \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& (((\neg\phi) \vee \tau) \wedge ((\neg\psi) \vee \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\vee)\text{, Distribución}(\vee, \wedge) \rangle \\
& (\tau \vee ((\neg\phi) \wedge (\neg\psi))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\vee) \rangle \\
& (((\neg\phi) \wedge (\neg\psi)) \vee \tau) \\
\equiv \quad & \langle \text{ De Morgan } \rangle \\
& ((\neg(\phi \vee \psi)) \vee \tau) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& ((\phi \vee \psi) \to \tau)
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 y Conmutativa($\equiv$) se demuestra que
$\vdash_{\text{DS}} (((\phi \vee \psi) \to \tau) \equiv ((\phi \to \tau) \wedge (\psi \to \tau)))$

2.9. Punto 38

Teo 4.36.3

0.	$((\phi \to \psi) \wedge (\psi \equiv \tau))$	Suposición del antecedente
1.	$(\phi \to \psi)$	Debilitamiento(p0)
2.	$(\psi \equiv \tau)$	Debilitamiento(p0)
3.	$((\phi \to \psi) \equiv (\phi \to \tau))$	Leibniz($\phi = (\phi \to p)$)(p2)
4.	$(\phi \to \tau)$	Ecuanimidad(p3,p1)

Así, tomando (p4,p0), se demuestra que $(((\phi \to \psi) \wedge (\psi \equiv \tau)) \to (\phi \to \tau))$

2.10. Punto 40

2.11. Punto 43

Modus Tollens

0.	$(\phi \to \psi)$	Hipótesis MTT
1.	$(\neg\psi)$	Hipótesis MTT
2.	$((\neg\phi) \vee \psi)$	Teo 4.28.1, Ecuanimidad(p0)
3.	$(\psi \equiv \mathit{false})$	Def.($\neg$), Ecuanimidad(p1)
4.	$((\neg\phi) \vee \mathit{false})$	Leibniz($\phi = ((\neg\phi) \vee p)$)(p3)
5.	$(\neg\phi)$	Identidad($\vee$)

En términos de causas y consecuencias, al tener que a sucede a causa de b, y que es cierto que a no sucede, entonces se puede decir que no ha ocurrido b. Análogamente, decir que en una fila de 2 fichas de dominó, si se sabe en que sentido se van a tirar, y la segunda no ha caído, se puede concluir que no se ha tirado la primera ficha.

2.12. Punto 44

Transitividad - Silogísmo disyuntivo

La regla de transitividad, hablando en términos de causas y consecuencias, dice:
Si a sucede debido a b, y b sucede debido a c, entonces a sucede debido a c
Es decir, conecta el principio de una cadena de causa-consecuencia con su final. La demostración y su relación con Corte se puede hallar en el punto 23

3. Sección 5.1

3.1. Punto 1

3.1.1. a

a

$\phi \vee \psi \vee \tau \equiv \phi \vee \psi \vee \tau$

3.1.2. f

f

$\neg\phi \equiv \phi \equiv \mathit{false}$

3.1.3. m

m

$\phi \equiv \neg\phi \equiv \mathit{false}$

3.1.4. t

t

$\phi \to \psi \equiv \phi \vee \psi \equiv \psi$

3.1.5. w

w

$\phi \to \psi \lor \tau \equiv (\phi \to \psi) \lor (\phi \to \tau)$

3.1.6. x

x

$\phi \to \psi \land \tau \equiv (\phi \to \psi) \land (\phi \to \tau)$

3.1.7. z

z

$\phi \lor \psi \to \phi \land \psi \equiv \phi \equiv \psi$

3.2. Punto 2

3.2.1. a

Es ambigüa

$$p \lor (q \land r)$$
$$(p \lor q) \land r$$

3.2.2. b

Es ambigüa

$$p \land (q \lor r)$$
$$(p \land q) \lor r$$

3.2.3. c

Es ambigüa

$$p \to (q \to r)$$
$$(p \to q) \to r$$

3.2.4. d

Es ambigüa

$$p \to (q \leftarrow r)$$
$$(p \to q) \leftarrow r$$

3.2.5. e

Es ambigüa

$$p \leftarrow (q \rightarrow r)$$
$$(p \leftarrow q) \rightarrow r$$

3.3. Punto 3

No hay ambigüedad entre $\equiv$ y $\not\equiv$

Debido a la definición de la discrepancia y teoremas del posicionamiento de una negación en una equivalencia