Tarea 13

Hecho por

DAVID GÓMEZ

Estudiante de Matemáticas

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Colombia

11 de noviembre de 2022

Índice

Sección 7.1

Punto 1

$$\mathbf{F} = \{p_0 \mapsto p_1, p_2 \mapsto true, p_3 \mapsto H(x), p_4 \mapsto p_4\}$$

a

$\phi = p_0$

$$\mathbf{F}[p_0] = p_1$$

b

$\phi = H(y) = \forall x H(x) \wedge false$

$$\mathbf{F}[H(y) = \forall x H(x) \wedge false] = H(y) = \forall x H(x) \wedge false$$

c

$\phi = \forall x \forall y (H(f(x,y)) \vee p_3)$

$$\mathbf{F}[\forall x \forall y (H(f(x,y)) \vee p_3)] = \forall x \forall y (H(f(x,y)) \vee H(x))$$

Punto 2

a

Es libre

b

Es libre

c

Es libre

Punto 3

a

Demostración de ϕ

(i) Si no hay cuantificadores que afecten globalmente en ϕ, la definición de demostración es exactamente la misma que en DS.

(ii) Si ϕ es de la forma $\forall x \psi$, entonces una demostración es una secuencia no vacía de proposiciones tales que el último elemento de la secuencia es ψ y los anteriores son axiomas o deducciones de pasos anteriores mediante reglas de inferencia.

(iii) Si ϕ es de la forma $\exists x \psi$, entonces una demostración es una secuencia no vacía de proposiciones tales que el último elemento de la secuencia es ψ y los anteriores son axiomas, deducciones de pasos anteriores mediante reglas de inferencia o suposiciones.

b

Derivación

(i) Si no hay cuantificadores que afecten globalmente en ϕ, la definición de derivación es exactamente la misma que en DS.

(ii) Si ϕ es de la forma $\forall x(\psi \equiv \tau)$, entonces una derivación es una secuencia finita de proposiciones, en la cual cada elemento es obtenido mediante transitividades de $\equiv$ del elemento anterior.

(iii) Si ϕ es de la forma $\exists x(\psi \equiv \tau)$, entonces una derivación es una secuencia finita de proposiciones en la cual cada elemento anterior es obtenido mediante transitividades de $\equiv$ del elemento anterior y además se tienen en cuenta suposiciones dadas antes de iniciar la derivación como verdades "locales".

c

Derivación de debilitamiento

(i) Si no hay cuantificadores que afecten globalmente en ϕ, la definición de derivación de debilitamiento es exactamente la misma que en DS.

(ii) Si ϕ es de la forma $\forall x(\psi \rightarrow \tau)$, entonces una derivación es una secuencia finita de proposiciones, en la cual cada elemento es obtenido mediante transitividades de $\equiv$ y al menos una de $\rightarrow$ del elemento anterior.

(iii) Si ϕ es de la forma $\exists x(\psi \rightarrow \tau)$, entonces una derivación es una secuencia finita de proposiciones en la cual cada elemento anterior es obtenido mediante transitividades de $\equiv$ y al menos una de $\rightarrow$ del elemento anterior y además se tienen en cuenta suposiciones dadas antes de iniciar la derivación como verdades "locales".

d

Derivación de fortalecimiento

(i) Si no hay cuantificadores que afecten globalmente en ϕ, la definición de derivación de fortalecimiento es exactamente la misma que en DS.

(ii) Si ϕ es de la forma $\forall x(\psi \leftarrow \tau)$, entonces una derivación es una secuencia finita de proposiciones, en la cual cada elemento es obtenido mediante transitividades de $\leftarrow$ del elemento anterior.

(iii) Si ϕ es de la forma $\exists x(\psi \leftarrow \tau)$, entonces una derivación es una secuencia finita de proposiciones en la cual cada elemento anterior es obtenido mediante transitividades de $\equiv$ y al menos una de $\leftarrow$ del elemento anterior y además se tienen en cuenta suposiciones dadas antes de iniciar la derivación como verdades "locales".

Punto 4

Si $\vdash_{\text{DS}} \phi$ entonces $\vdash_{\text{DS}(\mathcal{L})} \phi$

Ya que todos los axiomas de DS están contenidos en DS($\mathcal{L}$), usando la definición de demostración, y puesto que no hay cuantificadores en ningún teorema de DS. Se puede demostrar cualquier teorema de DS usando los axiomas de DS($\mathcal{L}$).

Punto 5

Modus Ponens

0. ϕ	Hipótesis MPP
1. $\phi \rightarrow \psi$	Hipótesis MPP
2. $\neg\phi \rightarrow \psi$	(alt)Def.($\rightarrow$), Ecuanimidad(p1)
3. $\phi \equiv true$	Identidad($\equiv$)(p0)
4. $\neg\phi \vee \psi \equiv \neg true \vee \psi$	Lbz.($\phi = \neg p \vee \psi$)(p3)
5. $\neg true \vee \psi$	Ecuanimidad(p4, p2)
6. $false \vee \psi$	$\neg false \equiv true$, Lbz.($\phi = p \vee \psi$), Ecuanimidad(p5)
7. ψ	Identidad($\vee$)

Punto 6

a

Todos los hombres son mortales...

$$H(x) := \text{“}x \text{ es hombre”}$$
$$M(x) := \text{“}x \text{ es mortal”} s := \text{“Sócrates”}$$

0. $(\forall x \mid H(x) : M(x))$	Suposición
1. $H(s)$	Suposición
2. $(\forall x \mid H(x) : M(x)) \rightarrow (H(s) \rightarrow M(s))$	Bx4
3. $H(s) \rightarrow M(s)$	MPP (p3, p1)
4. $M(s)$	MPP(p4, p2)

b

No todos los estudiantes...

$$E(x) := \text{“}x \text{ es estudiante”}$$
$$A(x, y) := \text{“}x \text{ asiste a } y\text{”}$$
$$C(x) := \text{“}x \text{ es una clase”}$$

0. $(\exists x, y \mid E(x) \wedge C(y) : \neg A(x, y))$	Suposición
1. $(\forall x, y \mid E(x) \wedge C(y) : \neg A(x, y))$	

La conclusión (p1) no es coherente con la suposición dada, pues en esta se dice que hay algún/os estudiantes que no asisten a clase, pero esto no es equivalente a afirmar que ningún estudiante asiste a clase.

c

La relación R es reflexiva…

$$R := x \sim y$$

0. $(\forall x \mid : \ x \sim x)$ Suposición
1. $(\forall x, y, z \mid x \sim y \wedge y \sim z : x \sim z)$ Suposición
2. $(\forall x, y \mid x \sim y : x = y)$

Un ejemplo puede ser $=$ pues cumple ser reflexiva $(x \leq x)$, transitiva $(a \leq b \wedge b \leq c \rightarrow a \leq c)$ pero no es antisimétrica (ej: $2 \leq 3 \rightarrow 2 = 3 \equiv \mathit{true} \rightarrow \mathit{false} \equiv \mathit{false}$)

Punto 7

Demostrar MTT 5.13 para DS($\mathcal{L}$)

(i) En caso de que no hayan cuantificadores que afecten globalmente en $\phi \equiv \psi$, el metateorema funciona exactamente igual que en DS, con la extensión a los axiomas de DS($\mathcal{L}$)

(ii) En caso de que hayan cuantificadores que afecten globalmente en $\phi \equiv \psi$ basta con aplicar el metateorema a la fórmula afectada por los cuantificadores, teniendo en cuenta suposiciones para $\exists$. Esto debido a que el funcionamiento de las proposiciones seguirá teniendo el mismo significado localmente en el cuantificador que si estuvieran sin este, la diferencia está en lo que quieren representar, mas no en su significado a nivel de lógica.

Sección 7.2

Punto 2

$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \forall x \forall x \phi \equiv \forall x \phi$

$$\begin{aligned} & \forall x \forall x \phi \\ \equiv \quad & \langle \text{ Bx1(x no es libre en } \forall x \phi) \rangle \\ & \forall x \phi \end{aligned}$$

Por metateorema de derivación se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \forall x \forall x \phi \equiv \forall x \phi$

Punto 3

$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} (\forall x \mid \psi \wedge \tau : \phi) \equiv (\forall x \mid : \psi \wedge \tau \to \phi)$

$$
\begin{aligned}
& (\forall x \mid \psi \wedge \tau : \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Azúcar sintáctico } \rangle \\
& \forall x(\psi \wedge \tau \to \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Tomando los pasos siguientes bajo } \forall x \rangle \\
& \psi \wedge \tau \to \phi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Identidad}(\vee) \rangle \\
& (\psi \wedge \tau \to \phi) \vee \mathit{false} \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\vee), \text{(alt)Def.}(\to) \rangle \\
& \mathit{true} \to (\psi \wedge \tau \to \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Regresando } \forall x \rangle \\
& \forall x(\mathit{true} \to (\psi \wedge \tau \to \phi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Azúcar sintáctico } \rangle \\
& (\forall x \mid : \psi \wedge \tau \to \phi)
\end{aligned}
$$

Por metateorema de derivación se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} (\forall x \mid \psi \wedge \tau : \phi) \equiv (\forall x \mid : \psi \wedge \tau \to \phi)$

Punto 4

$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} (\forall x \mid \psi \wedge \tau : \phi) \equiv (\forall x \mid \psi : \tau \to \phi)$

$$
\begin{aligned}
& (\forall x \mid \psi \wedge \tau : \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Azúcar sintáctico } \rangle \\
& \forall x(\psi \wedge \tau \to \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.31.5 } \rangle \\
& \forall x(\psi \to (\tau \to \phi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Azúcar sintáctico } \rangle \\
& (\forall x \mid \psi : \tau \to \phi)
\end{aligned}
$$

Por metateorema de derivación se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} (\forall x \mid \psi \wedge \tau : \phi) \equiv (\forall x \mid \psi : \tau \to \phi)$

Punto 5

a

$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} (\forall x \mid \psi : \phi) \equiv (\forall x \mid :\ \psi \vee \phi \equiv \phi)$

$$
\begin{aligned}
& (\forall x \mid \psi : \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Azúcar sintáctico } \rangle \\
& \forall x(\psi \to \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\to) \rangle \\
& \forall x(\psi \vee \phi \equiv \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Identidad}(\vee), \text{ Conmutativa}(\vee) \rangle \\
& \forall x(\mathit{false} \vee (\psi \vee \phi \equiv \phi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ (alt)Def.}(\to) \rangle \\
& \forall x(\mathit{true} \to (\psi \vee \phi \equiv \phi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Azúcar sintáctico } \rangle \\
& (\forall x \mid :\ \psi \vee \phi \equiv \phi)
\end{aligned}
$$

Por metateorema de derivación se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} (\forall x \mid \psi : \phi) \equiv (\forall x \mid :\ \psi \vee \phi \equiv \phi)$

b

$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} (\forall x \mid :\ \phi \wedge \psi \to \tau) \equiv (\forall x \mid \phi : (\psi \to \tau))$

$$
\begin{aligned}
& (\forall x \mid :\ \phi \wedge \psi \to \tau) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Azúcar sintáctico } \rangle \\
& \forall x(\mathit{true} \to (\phi \wedge \psi \to \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Identidad}(\to) \rangle \\
& \forall x(\phi\ \wedge \psi \to \tau) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.31.5 } \rangle \\
& \forall x(\phi \to (\psi \to \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Azúcar sintáctico } \rangle \\
& (\forall x \mid \phi : (\psi \to \tau))
\end{aligned}
$$

Punto 7

$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \forall x(\phi \equiv \psi) \equiv (\forall x\psi \equiv \forall x\psi)$

$$
\begin{aligned}
& \forall x(\psi \equiv \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Caracterización}(\equiv) \rangle \\
& \forall x((\psi \to \phi) \land (\phi \to \psi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist.}(\forall x, \land) \rangle \\
& \forall x(\psi \to \phi) \land \forall x(\phi \to \psi) \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Teo 7.10.1 } \rangle \\
& (\forall x\psi \to \forall x\phi) \land (\forall x\phi \to \forall x\psi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Caracterización}(\equiv) \rangle \\
& \forall x\psi \equiv \forall x\phi
\end{aligned}
$$

Por metateorema de derivación relajada se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \forall x(\phi \equiv \psi) \equiv (\forall x\psi \equiv \forall x\psi)$

Punto 9

$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} (\forall x \,|\, \tau : \psi \equiv \phi) \to ((\forall x \,|\, \tau : \psi) \equiv (\forall x \,|\, \tau : \phi))$

$$
\begin{aligned}
& (\forall x \,|\, \tau : \psi \equiv \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Azúcar sintáctico } \rangle \\
& \forall x(\tau \to (\psi \equiv \phi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist.}(\to, \equiv) \rangle \\
& \forall x(\tau \to \psi \equiv \tau \to \phi) \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Dist.}(\forall x, \equiv) \rangle \\
& \forall x(\tau \to \psi) \equiv \forall x(\tau \to \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Azúcar sintáctico } \rangle \\
& (\forall x \,|\, \tau : \psi) \equiv (\forall x \,|\, \tau : \phi)
\end{aligned}
$$

Por metateorema de derivación relajada se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} (\forall x \,|\, \tau : \psi \equiv \phi) \to ((\forall x \,|\, \tau : \psi) \equiv (\forall x \,|\, \tau : \phi))$

Punto 10

Demuestre o refute…

Esto se puede decir, mediante Def.($\leftarrow$) como:

$$\forall x\phi \to \psi \equiv \forall x(\phi \to \psi)$$

Pero se puede ver que la equivalencia solo se cumple cuando x no es libre en ψ, pues de otra forma, se aplica el cuantificador a una fórmula que no lo tiene, siendo de una forma contradictorio con el axioma de generalización.

Punto 12

$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \psi \to \forall x\phi \equiv \forall x(\psi \to \phi)$ si x no aparece libre en ψ

$$\begin{array}{ll} & \psi \to \forall x\phi \\ \equiv & \langle \text{(alt.)Def.}(\to) \rangle \\ & \neg\psi \vee \forall x\phi \\ \equiv & \langle \text{Bx2, } x \text{ no aparece libre en } \psi \rangle \\ & \forall x(\neg\psi \vee \phi) \\ \equiv & \langle \text{(alt.)Def.}(\to) \rangle \\ & \forall x(\psi \to \phi) \end{array}$$

Por metateorema de derivación se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \psi \to \forall x\phi \equiv \forall x(\psi \to \phi)$ si x no aparece libre en ψ

Punto 14

$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} (\forall x \mid \psi \vee \tau : \phi) \equiv (\forall x \mid \psi : \phi) \wedge (\forall x \mid \tau : \phi)$

$$\begin{array}{ll} & (\forall x \mid \psi \vee \tau : \phi) \\ \equiv & \langle \text{Azúcar sintáctico} \rangle \\ & \forall x(\psi \vee \tau \to \phi) \\ \equiv & \langle \text{(alt.)Def.}(\to), \text{Dist}(\neg, \to) \rangle \\ & \forall x((\neg\psi \wedge \neg\tau) \vee \phi) \\ \equiv & \langle \text{Dist.}(\vee, \wedge) \rangle \\ & \forall x((\neg\psi \vee \phi) \wedge (\neg\tau \vee \phi)) \\ \equiv & \langle \text{(alt.)Def.}(\to) \rangle \\ & \forall x((\psi \to \phi) \wedge (\tau \to \phi)) \\ \equiv & \langle \text{Dist.}(\forall x, \wedge) \rangle \\ & \forall x(\psi \to \phi) \wedge \forall x(\tau \to \phi) \\ \equiv & \langle \text{Azúcar sintáctico} \rangle \\ & (\forall x \mid \psi : \phi) \wedge (\forall x \mid \tau : \phi) \end{array}$$

Punto 16

$\vdash_{\mathrm{DS}(\mathcal{L})} \forall x\forall y\phi \equiv \forall y\forall x\phi$

0. $\forall x\forall y\phi \to \forall y\forall x\phi$
1. $\forall y\forall x\phi \to \forall x\forall y\phi$
2. $\forall x\forall y\phi \equiv \forall y\forall x\phi$ (p1, p0)

* Nota: no me convence esta forma de demostrarlo, si hay otra manera, agradecería que me la hiciera saber. Gracias*

$\forall x \forall y \phi \rightarrow \forall y \forall x \phi$

$$
\begin{aligned}
& \forall x \forall y \phi \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Generalización, } y \text{ no aparece libre en } \phi \ \rangle \\
& \forall x \phi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Generalización, } y \text{ no aparece libre en } \phi \ \rangle \\
& \forall y \forall x \phi
\end{aligned}
$$

Por metateorema de derivación relajada se demuestra que
$\forall x \forall y \phi \rightarrow \forall y \forall x \phi$

$\forall y \forall x \phi \rightarrow \forall x \forall y$

$$
\begin{aligned}
& \forall y \forall x \phi \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Generalización, } x \text{ no aparece libre en } \phi \ \rangle \\
& \forall y \phi \\
\equiv \quad & \langle \text{ Generalización, } x \text{ no aparece libre en } \phi \ \rangle \\
& \forall x \forall y \phi
\end{aligned}
$$

Por metateorema de derivación relajada se demuestra que
$\forall y \forall x \phi \rightarrow \forall x \forall y \phi$