Tarea 09

David Gomez

Matemáticas
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Colombia
17 de octubre de 2022

Índice

1. Sección 4.6

1.1. Punto 4

Teo 4.24.3

$$
\begin{aligned}
& (\phi \wedge \mathit{true}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\wedge) \rangle \\
& (\phi \equiv (\mathit{true} \equiv (\phi \vee \mathit{true}))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.2, Leibniz}(\phi = (\phi \equiv (\mathit{true} \equiv p))) \rangle \\
& (\phi \equiv (\mathit{true} \equiv \mathit{true})) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.6.2, Leibniz}(\phi = (\phi \equiv p)) \rangle \\
& (\phi \equiv \mathit{true}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Identidad}(\equiv) \rangle \\
& \phi
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\models_{\mathrm{DS}} ((\phi \wedge \mathit{true}) \equiv \phi)$

1.2. Punto 5

Teo 4.24.4

$$
\begin{aligned}
& (\phi \wedge \mathit{false}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\wedge) \rangle \\
& (\phi \equiv (\mathit{false} \equiv (\phi \vee \mathit{false}))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Identidad}(\vee)\text{, Conmutativa}(\equiv)\text{, Leibniz}(\phi = (\phi \equiv (\mathit{false} \equiv p)) \rangle \\
& (\phi \equiv (\mathit{false} \equiv \phi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\neg)\text{, Conmutativa}(\equiv)\text{, Leibniz}(\phi = (\phi \equiv p)) \rangle \\
& (\phi \equiv (\neg \phi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.15.7 } \rangle \\
& \mathit{false}
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\models_{\mathrm{DS}} ((\phi \wedge \mathit{false}) \equiv \mathit{false})$

1.3. Punto 6

Teo 4.24.5

$$
\begin{aligned}
& (\phi \wedge \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\wedge) \rangle \\
& (\phi \equiv (\phi \equiv (\phi \vee \phi))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \rangle \\
& ((\phi \equiv \phi) \equiv (\phi \vee \phi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Idempotencia}(\vee), \text{ Leibniz}(\phi = ((\phi \equiv \phi) \equiv p)) \rangle \\
& ((\phi \equiv \phi) \equiv \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.6.3, Conmutativa}(\equiv) \rangle \\
& (\phi \equiv \mathit{true}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Identidad } \rangle \\
& \phi
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\models_{\mathrm{DS}} ((\phi \wedge \phi) \equiv \phi)$

1.4. Punto 8

Teo 4.25.1

$$
\begin{aligned}
& (\phi \wedge (\neg\phi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\wedge) \rangle \\
& (\phi \equiv ((\neg\phi) \equiv (\phi \vee (\neg\phi)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \rangle \\
& ((\phi \equiv (\neg\phi)) \equiv (\phi \vee (\neg\phi))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.1, Identidad, Leibniz}(\phi = ((\phi \equiv (\neg\phi)) \equiv p)) \rangle \\
& ((\phi \equiv (\neg\phi)) \equiv \mathit{true}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.15.7, Conmutativa}(\equiv), \text{ Leibniz}(\phi = (p \equiv \mathit{true})) \rangle \\
& (\mathit{false} \equiv \mathit{true}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Identidad } \rangle \\
& \mathit{false}
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\models_{\mathrm{DS}} ((\phi \wedge (\neg\phi)) \equiv \mathit{false})$

1.5. Punto 9

Teo 4.25.2

$$
\begin{aligned}
& (\neg(\phi \wedge \psi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\wedge), \text{Leibniz}(\phi = (\neg p)) \ \rangle \\
& (\neg(\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\vee), \text{Leibniz}(\phi = (\neg(\phi \equiv p))) \ \rangle \\
& (\neg(\phi \equiv (\psi \equiv (\psi \vee \phi)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv), \text{Leibniz}(\phi = (\neg(\phi \equiv p))) \ \rangle \\
& (\neg(\phi \equiv ((\psi \vee \phi) \equiv \psi))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.15.6, Leibniz}(\phi = (\neg(\phi \equiv ((\psi \vee p) \equiv \psi)))) \ \rangle \\
& (\neg(\phi \equiv ((\psi \vee (\neg(\neg\phi))) \equiv \psi))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.4, Leibniz}(\phi = (\neg(\phi \equiv p))) \ \rangle \\
& (\neg(\phi \equiv (\psi \vee (\neg\phi)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa 4.15.4 } \rangle \\
& ((\neg\phi) \equiv (\psi \vee (\neg\phi))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\vee), \text{Leibniz}(\phi = ((\neg\phi) \equiv p)) \ \rangle \\
& ((\neg\phi) \equiv ((\neg\phi) \vee \psi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv) \ \rangle \\
& (((\neg\phi) \vee \psi) \equiv (\neg\phi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.15.6, Leibniz}(\phi = (((\neg\phi) \vee p) \equiv (\neg\phi))) \ \rangle \\
& (((\neg\phi) \vee (\neg(\neg\psi))) \equiv (\neg\phi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.4 } \rangle \\
& ((\neg\phi) \vee (\neg\psi))
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\models_{\mathrm{DS}} ((\neg(\phi \wedge \psi)) \equiv ((\neg\phi) \vee (\neg\psi)))$

1.6. Punto 11

Teo 4.25.4

$$
\begin{aligned}
& (((\phi \wedge \psi)) \equiv ((\phi \wedge \tau)) \equiv \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\wedge) \rangle \\
& (((\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi))) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau)))) \equiv \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv) \rangle \\
& (\phi \equiv ((\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi))) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau))))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv), \text{ Leibniz}(\phi = (\phi \equiv p)) \rangle \\
& (\phi \equiv (\phi \equiv ((\psi \equiv (\phi \vee \psi))) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau))))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \rangle \\
& ((\phi \equiv \phi) \equiv ((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau))))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.6.2, Leibniz}(\phi = (p \equiv ((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau)))))) \rangle \\
& (\mathit{true} \equiv ((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau))))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv), \text{ Identidad}(\equiv) \rangle \\
& ((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv), \text{ Leibniz}(\phi = ((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv p)) \rangle \\
& ((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv ((\tau \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv \phi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \rangle \\
& (((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \psi))) \equiv \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv) \rangle \\
& (\phi \equiv ((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \psi)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv), \text{ Leibniz}(\phi = (\phi \equiv (\phi \equiv p))) \rangle \\
& (\phi \equiv (\psi \equiv ((\phi \vee \psi) \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \psi))))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv), \text{ Leibniz}(\phi = (\phi \equiv (\psi \equiv p))) \rangle \\
& (\phi \equiv (\psi \equiv ((\tau \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\phi \vee \psi)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv), \text{ Leibniz}(\phi = (\phi \equiv p)) \rangle \\
& (\phi \equiv ((\phi \equiv \tau) \equiv ((\phi \vee \tau) \equiv (\phi \vee \psi)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Distribución}(\vee, \equiv), \text{ Leibniz}(\phi = (\phi \equiv ((\psi \equiv \tau) \equiv p))) \rangle \\
& (\phi \equiv ((\psi \equiv \tau) \equiv (\phi \vee (\tau \equiv \psi)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\vee), \text{ Leibniz}(\phi = (\phi \equiv ((\psi \equiv \tau) \equiv (\phi \vee p)))) \rangle \\
& (\phi \equiv ((\psi \equiv \tau) \equiv (\phi \vee (\psi \equiv \tau)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\wedge) \rangle \\
& (\phi \wedge (\psi \equiv \tau))
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 y Conmutativa($\equiv$) se demuestra que
$\models_{\text{DS}} ((\phi \wedge (\psi \equiv \tau)) \equiv (((\phi \wedge \psi) \equiv (\phi \wedge \psi)) \equiv \phi))$

1.7. punto 12

Teo 4.25.5

$$
\begin{aligned}
& ((\phi \wedge \psi) \not\equiv (\phi \wedge \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\wedge) \text{ } \rangle \\
& ((\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi))) \not\equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\not\equiv) \text{ } \rangle \\
& ((\neg(\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi)))) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.15.4 } \rangle \\
& (\neg((\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi))) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau))))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv) \text{ } \rangle \\
& (\neg(((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv \phi) \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau))))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \text{ } \rangle \\
& (\neg((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\phi \equiv (\phi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau)))))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \text{ } \rangle \\
& (\neg((\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv ((\phi \equiv \phi) \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau))))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv) \text{ } \rangle \\
& (\neg(((\phi \vee \psi) \equiv \psi) \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \text{ } \rangle \\
& (\neg((\phi \vee \psi) \equiv (\psi \equiv (\tau \equiv (\phi \vee \tau))))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \text{ } \rangle \\
& (\neg((\phi \vee \psi) \equiv ((\psi \equiv \tau) \equiv (\phi \vee \tau)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv) \text{ } \rangle \\
& (\neg((\phi \vee \psi) \equiv ((\phi \vee \tau) \equiv (\psi \equiv \tau)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\equiv) \text{ } \rangle \\
& (\neg(((\phi \vee \psi) \equiv (\phi \vee \tau)) \equiv (\psi \equiv \tau))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist.}(\vee, \equiv) \text{ } \rangle \\
& (\neg((\phi \vee (\psi \equiv \tau)) \equiv (\psi \equiv \tau))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.4 } \rangle \\
& (\neg(((\neg\phi) \vee (\psi \equiv \tau)))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist.}(\neg, \vee) \text{ } \rangle \\
& (\phi \wedge (\neg(\psi \equiv \tau))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.15.4, Def.}(\not\equiv) \text{ } \rangle \\
& (\phi \wedge (\psi \not\equiv \tau))
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 y Conmutativa($\equiv$) se demuestra que
$\models_{\text{DS}} ((\phi \wedge (\psi \not\equiv \psi)) \equiv ((\phi \wedge \psi) \not\equiv (\phi \wedge \tau)))$

1.8. Punto 16

Debilitamiento

0. $(\phi \wedge \psi)$	Hipótesis (Debilitamiento)
1. $(\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi)))$	Def.($\equiv$), Ecuanimidad(p0)
2. $((\phi \vee \phi) \equiv (\phi \vee (\psi \equiv (\phi \vee \psi))))$	Leibniz($\phi = (p \vee \phi)$)
3. $((\phi \vee (\psi \equiv (\phi \vee \psi))) \equiv ((\phi \vee \psi) \equiv (\phi \vee (\phi \vee \psi))))$	Dist.($\vee$, $\equiv$)
4. $(((\phi \vee \psi) \equiv (\phi \vee (\phi \vee \psi))) \equiv ((\phi \vee \psi) \equiv ((\phi \vee \phi) \vee \psi)))$	Asociativa($\vee$), Leibniz($\phi = ((\phi \vee \psi) \equiv p)$)
5. $(((\phi \vee \psi) \equiv ((\phi \vee \phi) \vee \psi)) \equiv ((\phi \vee \psi) \equiv (\phi \vee \psi)))$	Idempotencia($\vee$), Leibniz($\phi = ((\phi \vee \psi) \equiv p)$)
6. $(((\phi \vee \psi) \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv \mathit{true})$	Teo 4.6.2
7. $((\phi \vee \phi) \equiv \mathit{true})$	Transitividad(p6, p5, p4, p3, p2)
8. $(\phi \vee \phi)$	Identidad($\equiv$)(p7)
9. ϕ	Idempotencia($\vee$)(p8)

Debilitamiento permite quitar información de una conjunción. Puesto que esta es verdad únicamente cuando sus dos partes son verdaderas, se puede concluir cualquiera de ellas.

1.9. Punto 17

Unión

0. ϕ	Hipótesis(Unión)
1. ψ	Hipótesis(Unión)
2. $(\phi \equiv \mathit{true})$	Identidad($\equiv$)(p0)
3. $(\phi \vee (\phi \equiv \psi))$	Debilitamiento($\vee$)(p0)
4. $((\phi \vee (\phi \equiv \psi)) \equiv ((\phi \vee \phi) \equiv (\phi \vee \psi)))$	Dist.($\vee$, $\equiv$)
5. $(((\phi \vee \phi) \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\phi \equiv (\phi \vee \psi)))$	Idempotencia($\vee$), Leibniz($\phi = (\phi \vee p)$)
6. $((\phi \vee (\phi \equiv \psi)) \equiv (\phi \equiv (\phi \vee \psi)))$	Transitividad(p5, p4, p3)
7. $(\phi \equiv (\phi \vee \psi))$	Ecuanimidad(p6, p3)
8. $(\psi \equiv \mathit{true})$	Identidad($\equiv$)(p1)
9. $((\phi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv \mathit{true})$	Identidad($\equiv$)(p7)
10. $((\phi \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv \psi)$	Transitividad(p9, p8)
11. $(\psi \equiv (\phi \equiv (\phi \vee \psi)))$	Conmutativa($\equiv$), Ecuanimidad(p10)
12. $(\phi \wedge \psi)$	Def.($\wedge$), Conmutativa($\vee$), Conmutativa($\wedge$), Ecuanimidad(p11)

Unión permite juntar varias proposiciones las cuales se tienen como verdaderas. Puesto que la conjunción es verdadera cuando sus dos partes son verdaderas, es posible conectar dos proposiciones verdaderas mediante una conjunción.

2. Sección 4.7

2.1. Punto 3

Teo 4.28.2

$$
\begin{aligned}
& ((\phi \wedge \psi) \equiv \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\wedge), \text{ Leibniz}(\phi = (p \equiv \phi)) \rangle \\
& ((\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi))) \equiv \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv), \text{ Asociativa}(\equiv), \text{ Identidad}(\equiv) \rangle \\
& (\psi \equiv (\phi \vee \psi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\equiv), \text{ Def.}(\rightarrow) \rangle \\
& (\phi \rightarrow \psi)
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 y Conmutativa($\equiv$) se demuestra que
$\models_{\mathrm{DS}} ((\phi \rightarrow \psi) \equiv ((\phi \wedge \psi) \equiv \phi))$

2.2. punto 7

Teo 4.29.4

$$
\begin{aligned}
& (\phi \rightarrow \mathit{false}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& ((\neg\phi) \vee \mathit{false}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Identidad}(\vee) \rangle \\
& (\neg\phi)
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\models_{\mathrm{DS}} ((\phi \rightarrow \mathit{false}) \equiv (\neg\phi))$

2.3. punto 10

Teo 4.30.3

$$
\begin{aligned}
& (\phi \rightarrow (\psi \wedge \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& ((\neg\phi) \vee (\psi \wedge \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Dist.}(\vee, \wedge) \rangle \\
& (((\neg\phi) \vee \psi) \wedge ((\neg\phi) \vee \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\rightarrow) \rangle \\
& ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \tau))
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\models_{\mathrm{DS}} ((\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \tau)) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \tau)))$

2.4. Punto 17

Teo 4.31.5

$$
\begin{array}{ll}
 & (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \tau)) \\
\equiv & \langle \text{ Teo 4.18.1 } \rangle \\
 & ((\neg\phi) \vee (\psi \rightarrow \tau)) \\
\equiv & \langle \text{ Teo 4.28.1, Leibniz}(\phi = ((\neg\phi) \vee p)) \rangle \\
 & ((\neg\phi) \vee ((\neg\psi) \vee \tau)) \\
\equiv & \langle \text{ Asociativa}(\vee) \rangle \\
 & (((\neg\phi) \vee (\neg\psi)) \vee \tau) \\
\equiv & \langle \text{ De Morgan, Leibniz}(\phi = (p \vee \tau)) \rangle \\
 & ((\neg(\phi \wedge \psi)) \vee \tau) \\
\equiv & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
 & ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \tau)
\end{array}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\models_{\text{DS}} ((\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \tau)) \equiv ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \tau))$

2.5. Punto 18

Teo 4.31.6

$$
\begin{array}{ll}
 & (\phi \vee (\phi \rightarrow \psi)) \\
\equiv & \langle \text{ Teo 4.28.1, Leibniz}(\phi = (\phi \vee p)) \rangle \\
 & (\phi \vee ((\neg\phi) \vee \psi)) \\
\equiv & \langle \text{ Asociativa}(\vee) \rangle \\
 & ((\phi \vee (\neg\phi)) \vee \psi) \\
\equiv & \langle \text{ Teo 4.19.1, Identidad}(\equiv) \rangle \\
 & (\mathit{true} \vee \psi) \\
\equiv & \langle \text{ Teo 4.19.2 } \rangle \\
 & \mathit{true}
\end{array}
$$

Por MT 4.21 e Identidad($\equiv$) se demuestra que
$\models_{\text{DS}} (\phi \vee (\phi \rightarrow \psi))$

2.6. Punto 23

Teo 4.33.2

0. $((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \tau))$	Suposición del antecedente
1. $(\phi \to \psi)$	Debilitamiento(p0)
2. $(\psi \to \tau)$	Debilitamiento(p0)
3. $((\neg\phi) \vee \psi)$	Teo 4.28.1, Ecuanimidad(p1)
4. $((\neg\psi) \vee \tau)$	Teo 4.28.1, Ecuanimidad(p2)
5. $(\psi \vee (\neg\phi))$	Conmutativa($\vee$)
6. $((\neg\phi) \vee \tau)$	Corte(p5, p4)
7. $(\phi \to \tau)$	Teo 4.28.1, Ecuanimidad(p6)

Así, tomando (p7, p0), se demuestra que $\models_{\text{DS}} (((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \tau)) \to (\phi \to \tau))$

2.7. Punto 24

Teo 4.33.3

0. $((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi))$	Suposición del antecedente
1. $(\phi \to \psi)$	Debilitamiento($\wedge$)(p0)
2. $(\psi \to \phi)$	Debilitamiento($\wedge$)(p0)
3. $((\phi \vee \psi) \equiv \psi)$	Def.($\to$), Ecuanimidad(p1)
4. $((\psi \wedge \phi) \equiv \psi)$	Teo 4.28.2, Ecuanimidad(p2)
5. $((\phi \vee \psi) \equiv (\phi \wedge \psi))$	Transitividad(p4, p3), Conmutativa($\wedge$)
6. $((\phi \vee \psi) \equiv (\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi))))$	Def.($\wedge$), Leibniz($\phi = ((\phi \vee \psi) \equiv p)$), Ecuanimidad(p5)
7. $((\phi \vee \psi) \equiv ((\phi \equiv \psi) \equiv (\phi \vee \psi)))$	Asociativa($\equiv$), Leibniz($\phi = ((\phi \vee \psi) \equiv p)$), Ecuanimidad(p6)
8. $((\phi \vee \psi) \equiv ((\phi \vee \psi) \equiv (\phi \equiv \psi)))$	Conmutativa($\equiv$), Leibniz($\phi = ((\phi \vee \psi) \equiv p)$), Ecuanimidad(p7)
9. $(((\phi \vee \psi) \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv (\phi \equiv \psi))$	Asociativa($\equiv$)
10. $(\mathit{true} \equiv (\phi \equiv \psi))$	Teo 4.6.2, Leibniz($\phi = (p \equiv (\phi \equiv \psi))$), Ecuanimidad(p9)
11. $(\phi \equiv \psi)$	Identidad($\equiv$), Conmutativa($\equiv$)(p10)

Así, tomando (p0, p11), se demuestra que $\models_{\text{DS}} (((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)) \to (\phi \equiv \psi))$

2.8. Punto 35

Teo 4.35.5

$$
\begin{aligned}
& ((\phi \to \tau) \wedge (\psi \to \tau)) \\
\equiv & \quad \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& (((\neg\phi) \vee \tau) \wedge ((\neg\psi) \vee \tau)) \\
\equiv & \quad \langle \text{ Conmutativa}(\vee)\text{, Distribución}(\vee, \wedge) \rangle \\
& (\tau \vee ((\neg\phi) \wedge (\neg\psi))) \\
\equiv & \quad \langle \text{ Conmutativa}(\vee) \rangle \\
& (((\neg\phi) \wedge (\neg\psi)) \vee \tau) \\
\equiv & \quad \langle \text{ De Morgan } \rangle \\
& ((\neg(\phi \vee \psi)) \vee \tau) \\
\equiv & \quad \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& ((\phi \vee \psi) \to \tau)
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 y Conmutativa($\equiv$) se demuestra que
$\models_{\text{DS}} (((\phi \vee \psi) \to \tau) \equiv ((\phi \to \tau) \wedge (\psi \to \tau)))$

2.9. Punto 38

Teo 4.36.3

0.	$((\phi \to \psi) \wedge (\psi \equiv \tau))$	Suposición del antecedente
1.	$(\phi \to \psi)$	Debilitamiento(p0)
2.	$(\psi \equiv \tau)$	Debilitamiento(p0)
3.	$((\phi \to \psi) \equiv (\phi \to \tau))$	Leibniz($\phi = (\phi \to p)$)(p2)
4.	$(\phi \to \tau)$	Ecuanimidad(p3,p1)

Así, tomando (p4,p0), se demuestra que $(((\phi \to \psi) \wedge (\psi \equiv \tau)) \to (\phi \to \tau))$

2.10. Punto 40

2.10.1. a

$((\phi \to \psi) \to ((\phi \equiv \tau) \to (\psi \equiv \tau)))$

No es teorema, por un solo caso $\mathbf{F} = \{\phi \mapsto \mathit{false}, \psi \mapsto \mathit{true}, \tau \mapsto \mathit{false}\}$

2.10.2. c

$\models_{DS} ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \vee \tau) \rightarrow (\psi \vee \tau)))$

$$
\begin{aligned}
& (\phi \rightarrow \psi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& ((\neg\phi) \vee \psi) \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Debilitamiento}(\vee) \rangle \\
& (((\neg\phi) \vee \psi) \vee \tau) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\vee) \rangle \\
& ((\neg\phi) \vee (\psi \vee \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.4 } \rangle \\
& ((\phi \vee (\psi \vee \tau)) \equiv (\psi \vee \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\vee), \text{Leibniz}(\phi = (p \equiv (\psi \vee \tau))) \rangle \\
& (((\phi \vee \psi) \vee \tau) \equiv (\phi \vee \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Idempotencia}(\vee), \text{Leibniz}(\phi = (((\phi \vee \psi) \vee p) \equiv (\phi \vee \tau))) \rangle \\
& (((\phi \vee \psi) \vee (\tau \vee \tau)) \equiv (\phi \vee \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\vee), \text{Conmutativa}(\vee), \text{Asociativa}(\vee) \rangle \\
& (((\phi \vee \tau) \vee (\psi \vee \tau)) \equiv (\psi \vee \tau)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\rightarrow) \rangle \\
& ((\phi \vee \tau) \rightarrow (\psi \rightarrow \tau))
\end{aligned}
$$

Por MT 5.5.1 se demuestra que
$\models_{DS} ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \vee \tau) \rightarrow (\psi \vee \tau)))$

2.11. Punto 43

Modus Tollens

0.	$(\phi \rightarrow \psi)$	Hipótesis MTT
1.	$(\neg\psi)$	Hipótesis MTT
2.	$((\neg\phi) \vee \psi)$	Teo 4.28.1, Ecuanimidad(p0)
3.	$(\psi \equiv \mathit{false})$	Def.($\neg$), Ecuanimidad(p1)
4.	$((\neg\phi) \vee \mathit{false})$	Leibniz($\phi = ((\neg\phi) \vee p)$)(p3)
5.	$(\neg\phi)$	Identidad($\vee$)

En términos de causas y consecuencias, al tener que a sucede a causa de b, y que es cierto que a no sucede, entonces se puede decir que no ha ocurrido b. Análogamente, decir que en una fila de 2 fichas de dominó, si se sabe en que sentido se van a tirar, y la segunda no ha caído, se puede concluir que no se ha tirado la primera ficha.

2.12. Punto 44

Transitividad - Silogísmo disyuntivo

La regla de transitividad, hablando en términos de causas y consecuencias, dice:
Si a sucede debido a b, y b sucede debido a c, entonces a sucede debido a c
Es decir, conecta el principio de una cadena de causa-consecuencia con su final. La demostración y su relación con Corte se puede hallar en el punto 23

2.13. Punto 45

2.13.1. a

PM1 es tautología

0. $(\exists \mathbf{v} \mid \mathbf{v}[((\phi \vee \phi) \rightarrow \phi)] = \mathtt{F})$	Intento por contradicción
1. $\mathbf{v}[((\phi \vee \phi) \rightarrow \phi)] = \mathtt{F}$	Def.(p0)
2. $\mathbf{v}[(\phi \vee \phi)] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{F}$	MT 2.23($\rightarrow$)(p1)
3. $\mathbf{v}[(\phi \vee \phi)] = \mathtt{F}$	MT 2.23($\vee$)(p2)
4. $\mathbf{v}[(\phi \vee \phi)] = \mathtt{F}$ y $\mathbf{v}[(\phi \vee \phi)] = \mathtt{F}$	Contradicción (p3, p2)

Por lo que $\models ((\phi \vee \phi) \rightarrow \phi)$

PM2 es tautología

0. $(\exists \mathbf{v} \mid \mathbf{v}[(\phi \rightarrow (\phi \vee \psi))] = \mathtt{F})$	Intento por contradicción
1. $\mathbf{v}[(\phi \rightarrow (\phi \vee \psi))] = \mathtt{F}$	Def.(p0)
2. $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{v}[(\phi \vee \psi)] = \mathtt{F}$	MT 2.23($\rightarrow$)(p1)
3. $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{F}$ y $\mathbf{v}[\psi] = \mathtt{F}$	MT 2.23($\vee$)(p2)
4. $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{F}$ y $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{T}$	Contradicción (p3, p2)

Por lo que $\models (\phi \rightarrow (\phi \vee \psi))$

PM3 es tautología

0. $(\exists \mathbf{v} \mid \mathbf{v}[((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\tau \vee \phi) \rightarrow (\tau \vee \psi)))] = \mathtt{F})$	Intento por contradicción
1. $\mathbf{v}[((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\tau \vee \phi) \rightarrow (\tau \vee \psi)))] = \mathtt{F}$	Def.(p0)
2. $\mathbf{v}[(\phi \rightarrow \psi)] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{v}[((\tau \vee \phi) \rightarrow (\tau \vee \psi))] = \mathtt{F}$	MT 2.23($\rightarrow$)(p0)
3. $\mathbf{v}[(\tau \vee \phi)] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{v}[(\tau \vee \psi)] = \mathtt{F}$	MT 2.23($\rightarrow$)(p2)
4. $\mathbf{v}[\tau] = \mathtt{F} \wedge \mathbf{v}[\psi] = \mathtt{F}$	MT 2.23($\vee$)(p3)
5. $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{T}$	MT 2.23($\vee$)(p4, p3)
6. $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{F}$	MT 2.23($\rightarrow$)(p4, p2)
7. $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{F}$ y $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{T}$	Contradicción(p6, p5)

Por lo que $\models ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\tau \vee \phi) \rightarrow (\tau \vee \psi)))$

PM4 es tautología

0. $(\exists \mathbf{v} \mid \mathbf{v}[((\phi \vee \psi) \to (\psi \vee \phi))] = \mathtt{F})$ — Intento por contradicción
1. $\mathbf{v}[((\phi \vee \psi) \to (\psi \vee \phi))] = \mathtt{F}$ — Def.(p0)
2. $\mathbf{v}[(\phi \vee \psi)] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{v}[(\psi \vee \phi)] = \mathtt{F}$ — MT 2.23($\to$)(p1)
3. $\mathbf{v}[\psi] = \mathtt{F}$ y $\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{F}$ — MT 2.23($\vee$)(p2)
4. $\mathbf{v}[(\phi \vee \psi)] = \mathtt{F}$ — MT 2.23($\vee$)(p3)
5. $\mathbf{v}[(\phi \vee \psi)] = \mathtt{T}$ y $\mathbf{v}[(\phi \vee \psi)] = \mathtt{F}$ — Contradicción (p4, p2)

2.13.2. b

PM1 es teorema en DS

$$
\begin{aligned}
& ((\phi \vee \phi) \to \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Idempotencia}(\vee) \rangle \\
& (\phi \vee \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& ((\neg \phi) \vee \phi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.1, Identidad}(\equiv) \rangle \\
& \textit{true}
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}} ((\phi \vee \phi) \to \phi)$

PM2 es teorema en DS

$$
\begin{aligned}
& (\phi \to (\phi \vee \psi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.28.1 } \rangle \\
& ((\neg \phi) \vee (\phi \vee \psi)) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Asociativa}(\vee) \rangle \\
& (((\neg \phi) \vee \phi) \vee \psi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.1, Identidad}(\equiv) \rangle \\
& (\textit{true} \vee \psi) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Teo 4.19.1 } \rangle \\
& \textit{true}
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\vdash_{\mathrm{DS}} (\phi \to (\phi \vee \psi))$

PM3 es teorema en DS

Punto 40.(b)

$$
\begin{aligned}
& ((\phi \to \psi) \to ((\phi \vee \tau) \to (\psi \vee \tau))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\vee), \text{Leibniz}(\phi = ((\phi \to \psi) \to (p \to (\psi \vee \tau)))) \ \rangle \\
& ((\phi \to \psi) \to ((\tau \vee \phi) \to (\psi \vee \tau))) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conmutativa}(\vee), \text{Leibniz}(\phi = ((\phi \to \psi) \to ((\tau \vee \phi) \to p))) \ \rangle \\
& ((\phi \to \psi) \to ((\tau \vee \phi) \to (\tau \vee \psi)))
\end{aligned}
$$

Por MT 4.21 se demuestra que
$\vdash_{\text{DS}} ((\phi \to \psi) \to ((\tau \vee \phi) \to (\tau \vee \psi)))$

PM4 es teorema en DS

0.	$((\phi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \phi))$	Conmutativa($\vee$)
1.	$(((\phi \vee \psi) \to (\psi \vee \phi)) \wedge ((\psi \vee \phi) \equiv (\phi \vee \psi)))$	Teo 4.33.3, Ecuanimidad(p0)
2.	$((\phi \vee \psi) \to (\psi \vee \phi))$	Debilitamiento(p1)

2.13.3. c

Si $\vdash_{\text{PM}} \phi$ entonces $\vdash_{\text{DS}}$

Puesto que los axiomas de PM son teoremas en DS, significa que se puede comenzar una demostración en DS a partir de estos axiomas. Y ya que la regla de inferencia Modus Ponens aplica en DS, significa que cualquier teorema obtenido mediante las herramientas de PM puede ser obtenido en DS usando la misma estrategia.

2.14. d

Si $\vdash_{\text{DS}} \phi$ entonces $\vdash_{\text{PM}} \phi$

Si se toma la regla de Ecuanimidad de DS, por la definición de equivalencia usando implicaciones y la regla Debilitamiento($\wedge$), Es posible usar Ecuanimidad de la misma forma que Modus Ponens.
La regla de Leibniz de DS, por la definición de equivalencia usando implicaciones y la regla de Debilitamiento($\wedge$), Es posible usar Leibniz de la siguiente forma:

$$
\frac{(\psi \to \tau) \qquad\qquad (\tau \to \psi)}{\begin{array}{c}(\phi[p := \psi] \to \phi[p := \tau]) \\ (\phi[p := \tau] \to \phi[p := \tau])\end{array}} \_
$$

El único conector en DS que no se ve de forma clara como expresarse usando únicamente $\vee$ y $\to$ es $\neg$. Pero se sabe que la negación es dar un valor de falsedad a una proposición. Y se sabe que una falsedad sería la negación de cualquier teorema o axioma, por lo que la negación usando su definición $((\neg\phi) \equiv (\phi \equiv \mathit{false}))$ y tomando lo dicho para el uso de Ecuanimidad. se tiene entonces que la "traducción" de la negación a PM sería $(\phi \to \mathit{false})$ (como ya se mencionó la idea en PM es que *false* sea la negación de cualquier axioma o teorema).
Una vez "traducido" el sistema formal DS en términos de PM se puede afirmar que los teoremas de DS pueden ser obtenidos usando las herramientas de PM.

3. Sección 5.1

3.1. Punto 1

3.1.1. a

a

$\phi \vee \psi \vee \tau \equiv \phi \vee \psi \vee \tau$

3.1.2. f

f

$\neg\phi \equiv \phi \equiv false$

3.1.3. m

m

$\phi \equiv \neg\phi \equiv false$

3.1.4. t

t

$\phi \rightarrow \psi \equiv \phi \vee \psi \equiv \psi$

3.1.5. w

w

$\phi \rightarrow \psi \vee \tau \equiv (\phi \rightarrow \psi) \vee (\phi \rightarrow \tau)$

3.1.6. x

x

$\phi \rightarrow \psi \wedge \tau \equiv (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \tau)$

3.1.7. z

z

$\phi \vee \psi \rightarrow \phi \wedge \psi \equiv \phi \equiv \psi$

3.2. Punto 2

3.2.1. a

Es ambigüa

$$p \vee (q \wedge r)$$
$$(p \vee q) \wedge r$$

3.2.2. b

Es ambigüa

$$p \wedge (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \vee r$$

3.2.3. c

Es ambigüa

$$p \rightarrow (q \rightarrow r)$$
$$(p \rightarrow q) \rightarrow r$$

3.2.4. d

Es ambigüa

$$p \rightarrow (q \leftarrow r)$$
$$(p \rightarrow q) \leftarrow r$$

3.2.5. e

Es ambigüa

$$p \leftarrow (q \rightarrow r)$$
$$(p \leftarrow q) \rightarrow r$$

3.3. Punto 5

3.3.1. a

$true \vee p \wedge q$

$$true \vee (p \wedge q)$$

3.3.2. b

$p \equiv p \vee q$

$$(p \equiv p) \vee q$$

3.3.3. c

$p \rightarrow q \equiv r \equiv p \wedge q \equiv p \wedge r$

$$p \rightarrow (q \equiv R \equiv P \wedge q \equiv p \wedge r)$$

3.4. d

$p \equiv q \not\equiv r \leftarrow \mathit{false} \wedge p$

$$(p \equiv q \not\equiv r) \leftarrow \mathit{false} \wedge p$$

3.5. e

$\neg p \wedge p \equiv p \rightarrow r$

$$\neg(p \wedge p \equiv p) \rightarrow r$$

$$\frac{(\psi \rightarrow \tau) \qquad (\tau \rightarrow \psi)}{\begin{array}{l}(\phi[p := \psi] \rightarrow \phi[p := \tau]) \\ (\phi[p := \tau] \rightarrow \phi[p := \tau])\end{array}}$$