Tarea 13

Hecho por

DAVID GÓMEZ

Estudiante de Matemáticas

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Colombia

9 de noviembre de 2022

Índice

Sección 7.1

Punto 1

$$\mathbf{F} = \{p_0 \mapsto p_1, p_2 \mapsto \mathit{true}, p_3 \mapsto H(x), p_4 \mapsto p_4\}$$

a

$\phi = p_0$

$$\mathbf{F}[p_0] = p_1$$

b

$\phi = H(y) = \forall x H(x) \wedge \mathit{false}$

$$\mathbf{F}[H(y) = \forall x H(x) \wedge \mathit{false}] = H(y) = \forall x H(x) \wedge \mathit{false}$$

c

$\phi = \forall x \forall y (H(f(x,y)) \vee p_3)$

$$\mathbf{F}[\forall x \forall y (H(f(x,y)) \vee p_3)] = \forall x \forall y (H(f(x,y)) \vee H(x))$$

Punto 2

a

Es libre

b

Es libre

c

Es libre

Punto 3

a

Demostración de ϕ

(i) Si no hay cuantificadores que afecten globalmente en ϕ, la definición de demostración es exactamente la misma que en DS.

(ii) Si ϕ es de la forma $\forall x \psi$, entonces una demostración es una secuencia no vacía de proposiciones tales que el último elemento de la secuencia es ψ y los anteriores son axiomas o deducciones de pasos anteriores mediante reglas de inferencia.

(iii) Si ϕ es de la forma $\exists x \psi$, entonces una demostración es una secuencia no vacía de proposiciones tales que el último elemento de la secuencia es ψ y los anteriores son axiomas, deducciones de pasos anteriores mediante reglas de inferencia o suposiciones.

b

Derivación

(i) Si no hay cuantificadores que afecten globalmente en ϕ, la definición de derivación es exactamente la misma que en DS.

(ii) Si ϕ es de la forma $\forall x(\psi \equiv \tau)$, entonces una derivación es una secuencia finita de proposiciones, en la cual cada elemento es obtenido mediante transitividades de $\equiv$ del elemento anterior.

(iii) Si ϕ es de la forma $\exists x(\psi \equiv \tau)$, entonces una derivación es una secuencia finita de proposiciones en la cual cada elemento anterior es obtenido mediante transitividades de $\equiv$ del elemento anterior y además se tienen en cuenta suposiciones dadas antes de iniciar la derivación como verdades "locales".

c

Derivación de debilitamiento

(i) Si no hay cuantificadores que afecten globalmente en ϕ, la definición de derivación de debilitamiento es exactamente la misma que en DS.

(ii) Si ϕ es de la forma $\forall x(\psi \rightarrow \tau)$, entonces una derivación es una secuencia finita de proposiciones, en la cual cada elemento es obtenido mediante transitividades de $\equiv$ y al menos una de $\rightarrow$ del elemento anterior.

(iii) Si ϕ es de la forma $\exists x(\psi \rightarrow \tau)$, entonces una derivación es una secuencia finita de proposiciones en la cual cada elemento anterior es obtenido mediante transitividades de $\equiv$ y al menos una de $\rightarrow$ del elemento anterior y además se tienen en cuenta suposiciones dadas antes de iniciar la derivación como verdades "locales".

d

Derivación de fortalecimiento

(i) Si no hay cuantificadores que afecten globalmente en ϕ, la definición de derivación de fortalecimiento es exactamente la misma que en DS.

(ii) Si ϕ es de la forma $\forall x(\psi \leftarrow \tau)$, entonces una derivación es una secuencia finita de proposiciones, en la cual cada elemento es obtenido mediante transitividades de $\leftarrow$ del elemento anterior.

(iii) Si ϕ es de la forma $\exists x(\psi \leftarrow \tau)$, entonces una derivación es una secuencia finita de proposiciones en la cual cada elemento anterior es obtenido mediante transitividades de $\equiv$ y al menos una de $\leftarrow$ del elemento anterior y además se tienen en cuenta suposiciones dadas antes de iniciar la derivación como verdades "locales".

Punto 4

Si $\vdash_{\text{DS}} \phi$ entonces $\vdash_{\text{DS}(\mathcal{L})} \phi$

Ya que todos los axiomas de DS están contenidos en DS($\mathcal{L}$), usando la definición de demostración, y puesto que no hay cuantificadores en ningún teorema de DS. Se puede demostrar cualquier teorema de DS usando los axiomas de DS($\mathcal{L}$).

Sección 7.2