Tarea 03

David Gómez

Matemáticas
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Colombia
26 de agosto de 2022

Índice

1. Sección 2.1

1.1. Punto 1: Nombre todas las funciones booleanas unarias

- $H_{\neg}$
- H_{false}
- H_{true}

1.2. Punto 3: Demuestre que $H_{\not\equiv} = (H_{\neg} \circ H_{\equiv})$

ϕ	ψ	$(\phi \not\equiv \psi)$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ϕ	ψ	$(\phi \equiv \psi)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ϕ	ψ	$(\phi \equiv \psi)$	$(\neg(\phi \equiv \psi))$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	T	T

$H_{\not\equiv}$ —— $H_{\neg} \circ H_{\equiv}$

1.3. Punto 4: Tabla de verdad

1.3.1. a) $(\boldsymbol{true} \not\equiv \boldsymbol{false})$

$true$	$false$	$(true \not\equiv false)$
T	F	T

1.3.2. d) $(p \wedge (\neg q))$

p	q	$(\neg q)$	$(p \wedge (\neg q))$
T	F	T	T
T	T	F	F
F	F	T	F
F	T	F	F

1.3.3. j) $((p \wedge q) \rightarrow p)$

p	q	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \rightarrow p)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	T

1.3.4. k) $(p \rightarrow (p \wedge q))$

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \rightarrow (p \wedge q))$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	F	T

1.3.5. m) $((p \equiv (q \equiv r)) \equiv ((p \equiv q) \equiv r))$

p	q	r	$(q \equiv r)$	$(p \equiv q)$	$(p \equiv (q \equiv r))$	$((p \equiv q) \equiv r)$	$((p \equiv (q \equiv r)) \equiv ((p \equiv q) \equiv r))$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	T	T	F	F	F	T
F	T	F	F	F	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	F	F	T

1.4. Punto 5: Comparar $(p \wedge q)$ y $((p \vee q) \equiv (p \equiv q))$

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \equiv q)$	$((p \vee q) \equiv (p \equiv q))$	$((p \wedge q) \equiv ((p \vee q) \equiv (p \equiv q)))$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	F	F	T	F	T

1.5. Punto 8: Una no tautología

$$(((p \vee q) \rightarrow r) \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)))$$

p	q	r	$(p \vee q)$	$((p \vee q) \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow r)$	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r))$	$(((p \vee q) \rightarrow r) \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)))$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	F	F	T
T	F	T	T	T	F	T	F	F
T	F	F	T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T	T

1.6. Punto 9

1.6.1. a) Definir las relaciones

- $R_{\equiv}$
$$R_{\equiv} := \{(x, y) \in \mathbb{B}^2 \mid H_{\equiv}(x, y) = \texttt{T}\}$$
- $R_{\not\equiv}$
$$R_{\not\equiv} := \{(x, y) \in \mathbb{B}^2 \mid H_{\not\equiv}(x, y) = \texttt{T}\}$$
- $R_{\vee}$
$$R_{\vee} := \{(x, y) \in \mathbb{B}^2 \mid H_{\vee}(x, y) = \texttt{T}\}$$
- $R_{\wedge}$
$$R_{\wedge} := \{(x, y) \in \mathbb{B}^2 \mid H_{\wedge}(x, y) = \texttt{T}\}$$
- $R_{\rightarrow}$
$$R_{\rightarrow} := \{(x, y) \in \mathbb{B}^2 \mid H_{\rightarrow}(x, y) = \texttt{T}\}$$
- $R_{\leftarrow}$
$$R_{\leftarrow} := \{(x, y) \in \mathbb{B}^2 \mid H_{\leftarrow}(x, y) = \texttt{T}\}$$

1.6.2. b) Investigar cuando una relación binaria es...

Supóngase $\mathbb{A}$ un conjunto no vacío y se define la relación $R_{\sim}(x,y) := \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \,|\, x \sim y\}$

- Asociativa: $(\forall x, y, z \in \mathbb{A} : (x \sim y) \sim z = x \sim (y \sim z))$
- Conmutativa: $(\forall x, y \in \mathbb{A} : x \sim y = y \sim x)$
- Reflexiva: $(\forall x \in \mathbb{A} : x \sim x)$
- Irreflexiva: $(\forall x \in \mathbb{A} : (x,x) \notin R_{\sim})$
- Asimétrica: $(\forall x, y \in \mathbb{A} : ((x,y) \in R_{\sim}) \Rightarrow ((y,x) \notin R_{\sim}))$
- Antisimétrica: $(\forall x, y \in \mathbb{A} : (x \sim y) \Rightarrow x = y)$
- Idempotente: $(\forall x \in \mathbb{A} : x \sim x = x)$
- Transitiva: $(\forall x, y, z \in \mathbb{A} : ((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \Rightarrow (x \sim z))$

1.6.3. c) Clasificar las relaciones lógicas

- $R_{\equiv}$
  - Asociativa
  - Conmutativa
  - Reflexiva
  - Transitiva
- $R_{\not\equiv}$
  - Conmutativa
  - Irreflexiva
- $R_{\vee}$
  - Asociativa
  - Conmutativa
  - Reflexiva
  - Idempotente
  - Transitiva
- $R_{\wedge}$
  - Asociativa
  - Conmutativa
  - Reflexiva
  - Idempotente
  - Transitiva
- $R_{\rightarrow}$
  - Reflexiva
  - Transitiva
- $R_{\leftarrow}$
  - Reflexiva
  - Transitiva

1.7. Punto 13: Considere 4 cartas...

Si suponemos el conjunto letras en las cartas $\mathbb{L} = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots, \mathrm{Z}\}$, el conjunto de las vocales $\mathbb{V} = \{\mathrm{A}, \mathrm{E}, \mathrm{I}, \mathrm{O}, \mathrm{U}\}$, el conjunto de números en las cartas (naturales) $\mathbb{N}$, la sucesión de los pares $\{S_n\}$, $S_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión de los impares $\{U_n\}$, $U_n = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ entonces el enunciado dice que:

$$(\forall x, y \in \mathbb{L} \times \mathbb{N} : (x \in \mathbb{V}) \rightarrow (y \in \{S_n\}))$$

Por contradicción se tendría entonces

$$\begin{array}{l}
(\neg(\forall x, y \in \mathbb{L} \times \mathbb{N} : (x \in \mathbb{V}) \rightarrow (y \in \{S_n\}))) \\
\quad (\exists x, y \in \mathbb{L} \times \mathbb{N} : (\neg((x \in \mathbb{V}) \rightarrow (y \in \{S_n\})))) \\
\quad (\exists x, y \in \mathbb{L} \times \mathbb{N} : (x \in \mathbb{V}) \wedge (y \notin \{S_n\})) \\
\quad (\exists x, y \in \mathbb{L} \times \mathbb{N} : (x \in \mathbb{V}) \wedge (y \in \{U_n\}))
\end{array}$$

Ya que también se tiene que $((p \rightarrow q) \wedge p) \therefore q$, Entonces hay que voltear la carta de la cual se puede ver la "A" y la carta de la cual se puede ver el 3. La primera debido a que se debe comprobar que el antecedente con valor verdadero equivalga al consecuente con valor verdadero. La segunda debido a que se debe comprobar que la negación a la proposición tenga un valor falso, y a su vez cumpla con $((p \rightarrow q) \wedge (\neg q)) \therefore (\neg p)$

1.8. Punto 14: Juana quiere ir de compras...

$$\begin{array}{ll}
p & : \text{podar el césped} \\
l & : \text{lavar y secar los platos} \\
t & : \text{doblar las toallas de la cocina} \\
d & : \text{limpiar el polvo} \\
f & : \text{fregar los pisos} \\
h & : \text{hacer mercado} \\
r & : \text{recoger la ropa de la lavandería} \\
q & : \text{ir de compras}
\end{array}$$

1.8.1. a) Especificar las opciones

$((p \vee (l \wedge t) \vee d \vee f \vee (h \wedge r)) \equiv q)$

1.8.2. b) Suponiendo que...

Se tiene entonces:

$((p \vee (l \wedge t) \vee d \vee f \vee (h \wedge r)) \equiv q)$	Hipótesis
$(\neg d)$	Hipótesis
$(\neg f)$	Hipótesis
$(\neg p)$	Hipótesis
$(\neg l)$	Hipótesis
t	Hipótesis
(h)	Hipótesis
$(\neg r)$	Hipótesis
$(((\mathit{false} \vee (\mathit{false} \wedge \mathit{true}) \vee \mathit{false} \vee \mathit{false} \vee (\mathit{true} \wedge \mathit{false}))) \equiv q)$	Aplicación del valor de verdad de las hipótesis
$((\mathit{false} \vee \mathit{false} \vee \mathit{false} \vee \mathit{false} \vee \mathit{false}) \equiv q)$	Aplicación de tabla de verdad
$(\mathit{false} \equiv q)$	Aplicación de tabla de verdad
$(\neg q)$	definición de equivalencia

$\therefore$ Juana no puede ir de compras

2. Sección 2.2

2.1. Punto 1: Considere la proposición ϕ ...

$$\phi = ((((\neg p) \vee q) \equiv (r \rightarrow p)) \leftarrow (q \vee (\neg(q \wedge q))))$$

2.1.1. a) proponga una valuación v tal que $\mathbf{v}(\phi) = \mathtt{T}$

$$(\mathbf{v}[(((\neg p) \vee q) \equiv (r \rightarrow p))] = \mathtt{T}) \vee (\mathbf{v}[(q \vee (\neg(q \wedge q)))] = \mathtt{F}) \qquad \text{negación de Metateorema 2.23}$$
$$(\mathbf{v}[((\neg p) \vee q)] = \mathbf{v}[(r \rightarrow p)]) \vee (\mathbf{v}[q] = \mathbf{v}[(\neg(q \wedge q))] = \mathtt{F})$$

El antecedente siempre será verdad, por lo que hay que llegar a que la consecuencia también lo sea...

$$(\mathbf{v}[(\neg p)] = \mathtt{T} \vee \mathbf{v}(q) = \mathtt{T}) \wedge (\mathbf{v}[r] = \mathtt{F} \vee \mathbf{v}[p] = \mathtt{T})$$

Tomando $p \mapsto \mathtt{T}$ una posible valuación sería:

$$\bar{\mathbf{v}}[\phi] = \{p \mapsto \mathtt{T}, q \mapsto \mathtt{T}, r \mapsto \mathtt{T}\}$$

2.1.2. b) proponga una valuación w tal que $\mathbf{w}(\phi) = \mathtt{F}$

Tomando lo obtenido en el punto anterior, entonces:

$$\bar{\mathbf{w}}[\phi] = \{p \mapsto \mathtt{T}, q \mapsto \mathtt{F}, r \mapsto \mathtt{T}\}$$

2.2. Punto 6: Demostrar

$$\begin{array}{rl} \mathbf{v}[(\phi \equiv \phi)] = \mathtt{T} & \text{Enunciado/ proposición a probar} \\ \underline{\mathbf{v}[\phi] = \mathbf{v}[\phi]} & \text{Metateorema 2.23} \\ \therefore \mathbf{v}[(\phi \equiv \phi)] = \mathtt{T} & \end{array}$$

2.3. Punto 7: Demostrar

$$\begin{array}{rl} \mathbf{v}[(\phi \equiv (\neg\phi))] = \mathtt{F} & \text{Enunciado/ proposición a probar} \\ \underline{\mathbf{v}[\phi] \neq \mathbf{v}[(\neg\phi)]} & \text{negación de Metateorema 2.23} \\ \therefore \mathbf{v}[(\phi \equiv (\neg\phi))] = \mathtt{F} & \end{array}$$

2.4. Punto 8: Demostrar

$$\mathbf{v}[(\phi \vee (\neg\phi))] = \mathtt{T} \qquad \text{Enunciado/ proposición a probar}$$
$$(\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{T}) \vee (\mathbf{v}[\neg\phi] = \mathtt{T}) \qquad \text{negación de Metateorema 2.23}$$

Tomando $\phi \mapsto \mathtt{T}$

$$\mathbf{v}[\neg\phi] = \mathtt{F}$$
$$H_\vee(\mathtt{T}, \mathtt{F}) = \mathtt{T}$$

Tomando $\phi \mapsto \mathtt{F}$

$$\mathbf{v}[\neg\phi] = \mathtt{T}$$
$$H_\vee(\mathtt{F}, \mathtt{T}) = \mathtt{T}$$
$$\therefore \mathbf{v}[(\phi \vee (\neg\phi))] = \mathtt{T}$$

2.5. Punto 9: Demostrar

$$\mathbf{v}[(\phi \wedge (\neg\phi))] = \mathtt{T} \qquad \text{Enunciado/ proposición a probar}$$
$$(\mathbf{v}[\phi] = \mathtt{F}) \vee (\mathbf{v}[\neg\phi] = \mathtt{F}) \qquad \text{negación de Metateorema 2.23}$$

Tomando $\phi \mapsto \mathtt{T}$

$$\mathbf{v}[\neg\phi] = \mathtt{F}$$
$$H_\wedge(\mathtt{T}, \mathtt{F}) = \mathtt{F}$$

Tomando $\phi \mapsto \mathtt{F}$

$$\mathbf{v}[\neg\phi] = \mathtt{T}$$
$$H_\wedge(\mathtt{F}, \mathtt{T}) = \mathtt{F}$$
$$\therefore \mathbf{v}[(\phi \vee (\neg\phi))] = \mathtt{F}$$