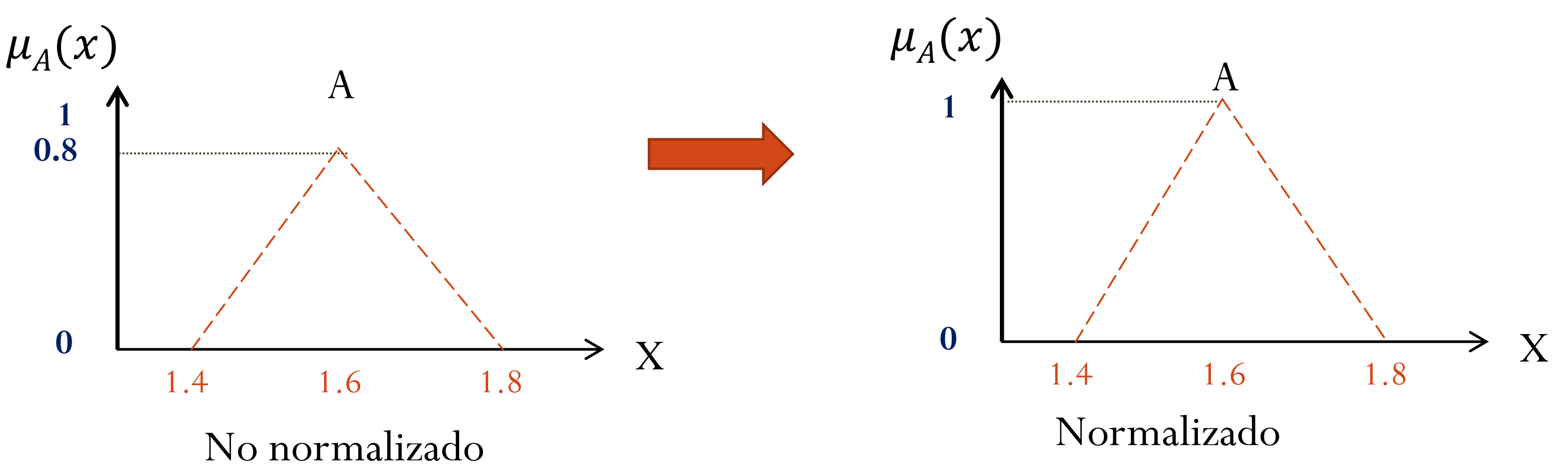
Transformación de Escala y Operadores de Agregación

- **Transformación de Escala**
  - **Normalización**
  - **Contracción**
  - **Dilatación**
  - **Intensificación**
- **Operadores de Agregación:**
  - **Compensatorios**
  - **Media**

1. Transformaciones de escala

1) Normalización : Consiste en transformar un conjunto difuso A No normalizado en un conjunto difuso Normalizado. Se normaliza dividiendo la función de pertenencia del conjunto A, por su respectiva altura:

$$NORM(\mu_A(x)) = \frac{\mu_A(x)}{Alt(A)} \quad , x \in X$$



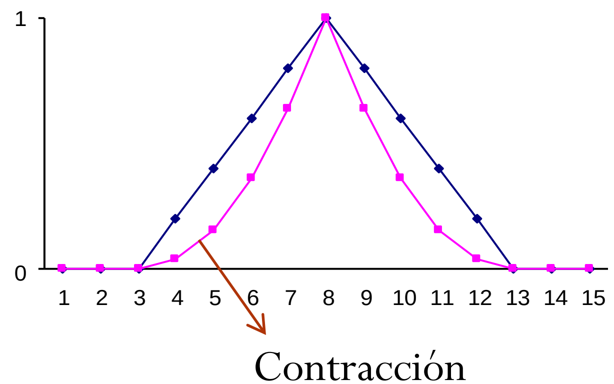
1. Transformaciones de escala

2) Contracción: Consiste en contraer (afinar) la función de pertenencia en torno de sus valores máximos:

$$CONT\big(\mu_A(x)\big) = \mu_A(x)^2, \qquad x \in X$$

O también:

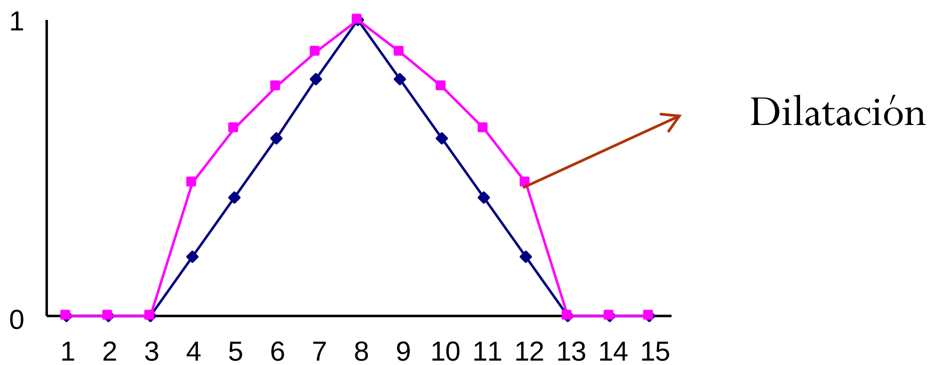
$$CONT\big(\mu_A(x)\big) = \mu_A(x)^p, \qquad p > 1$$



1. Transformaciones de escala

3) Dilatación: Consiste en dilatar(expandir) la función de pertenencia en torno de sus valores máximos:

$$\boxed{DILAT\left(\mu_A(x)\right) = \mu_A(x)^{1/p}, \qquad p > 1}$$



$$DILAT\left(\mu_A(x)\right) = \sqrt{\mu_A(x)}, \qquad x \in X$$

2. Operadores de Agregación

- Operadores de agregación son operadores combinan dos o más conjuntos difusos para obtener un único conjunto difuso.

  Por ejemplo, un conjunto difuso B puede ser generado por la agregación AGR(.) de N conjuntos difusos $A_1, A_2, \ldots, A_N$, definidos en un universo de discurso X:

$$\mu_B(x) = AGR\left(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \ldots, \mu_{A_N}(x)\right), \qquad x \in X$$

- Las operaciones MAX y MIN son funciones de agregación.

- Los principales operadores de agregación son: operadores de agregación de media y compensatorios.

2. Operadores de Agregación

A. Operadores de agregación de Media:

Son operadores donde los valores de pertenencia resultantes están entre los valores mínimos y máximos de las funciones que constituyen el argumento de AGR(.)

$$MIN\left(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_N}(x)\right) \leq AGR\left(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_N}(x)\right) \leq MAX\left(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_N}(x)\right)$$

Los principales operadores de media se derivan a partir de la siguiente ecuación:

$$AGR\left(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_N}(x)\right) = \sqrt[p]{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu_{A_i}(x)^p\right)},$$

$p \in \Re, p \neq 0$ (factor de compensación)

N = nro. de conjuntos difusos

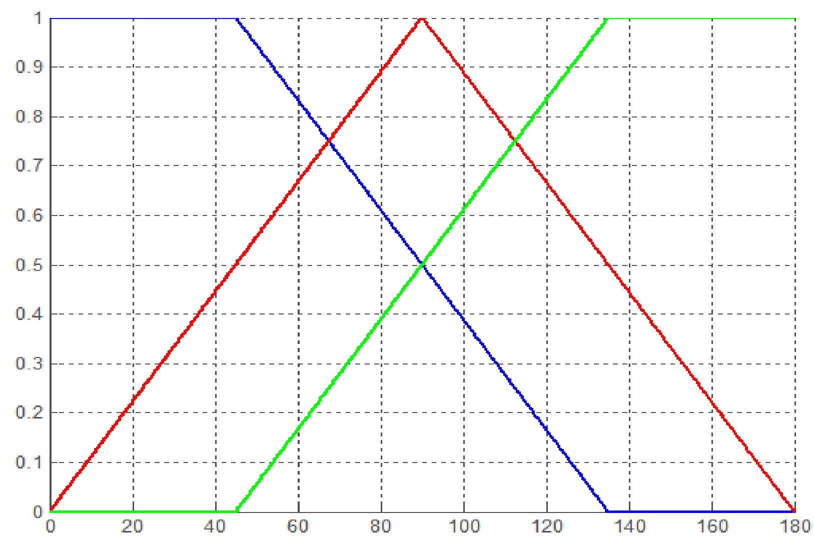
Variando los valores de p se obtiene los siguientes operadores: Máximo, Mínimo, Media Aritmética, Media Geométrica y Media Armónica

2. Operadores de Agregación

Operadores de agregación de Media:

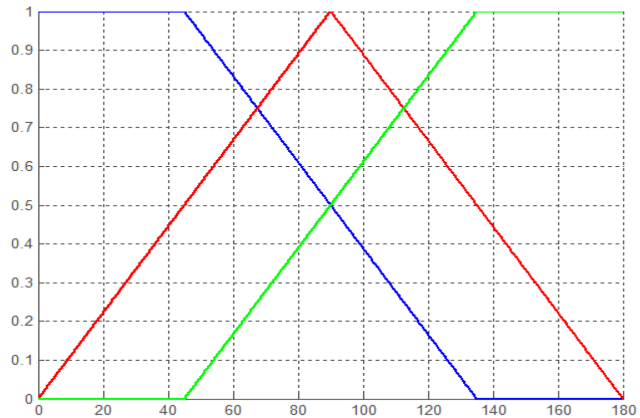
- Ejemplo:

  Considere la función de pertenencia abajo describiendo 3 conjuntos difusos. Obtener los operadores: Máximo, Mínimo, Media Aritmética, Media Geométrica y Media Armónica



2. Operadores de Agregación

Operadores de agregación de Media:



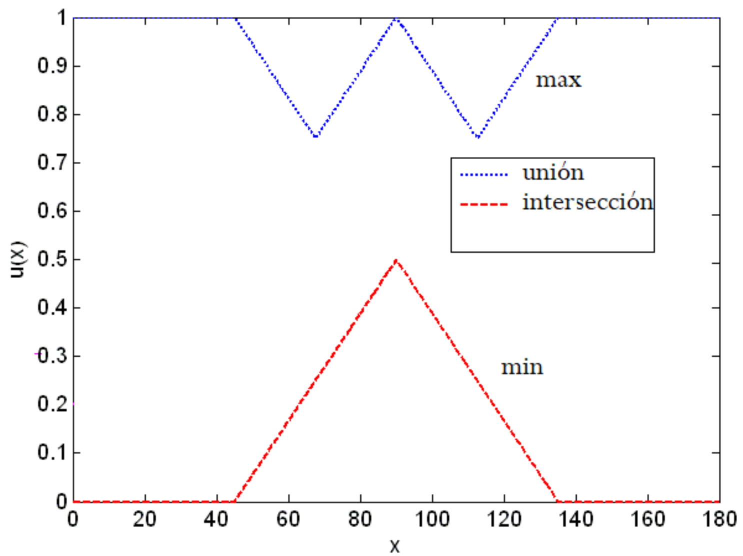
$$AGR(.) = \sqrt[p]{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu_{A_i}(x)^p\right)}$$

- **Máximo** (p →+∞):

$$AGR(.) = MAX\left(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_N}(x)\right)$$

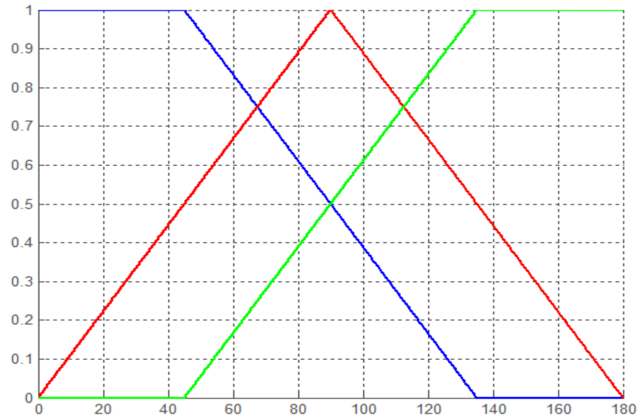
- **Mínimo** (p → –∞):

$$AGR(.) = MIN\left(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_N}(x)\right)$$



2. Operadores de Agregación

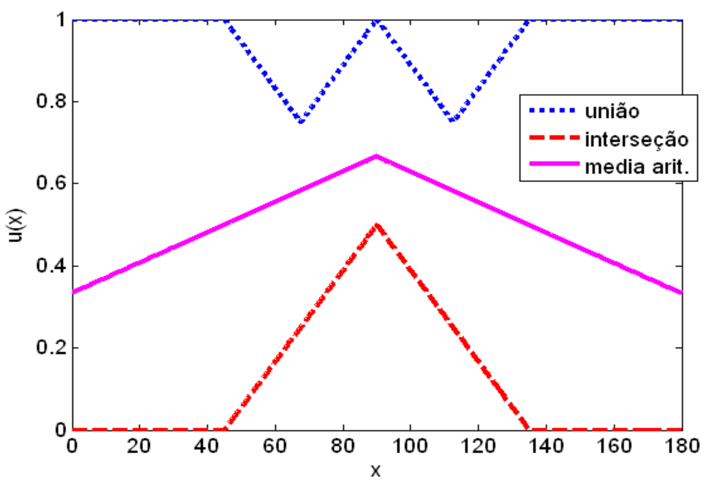
Operadores de agregación de Media:



$$AGR(.) = \sqrt[p]{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu_{A_i}(x)^p\right)}$$

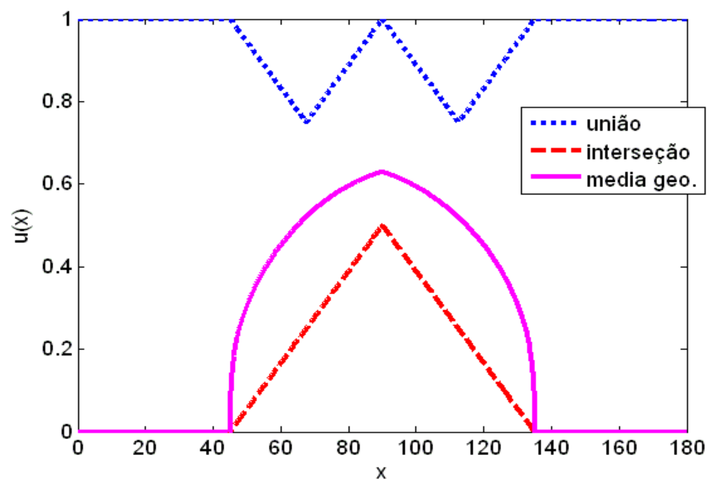
- **Media Aritmética** (p = 1):

$$AGR(.) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu_{A_i}$$



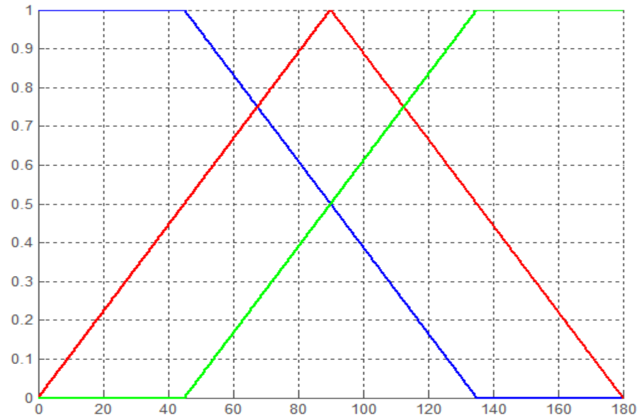
- **Media Geométrica** (p → 0):

$$AGR(.) = \left(\mu_{A_1}(x) * \mu_{A_2}(x) * \cdots * \mu_{A_N}(x)\right)^{1/N}$$



2. Operadores de Agregación

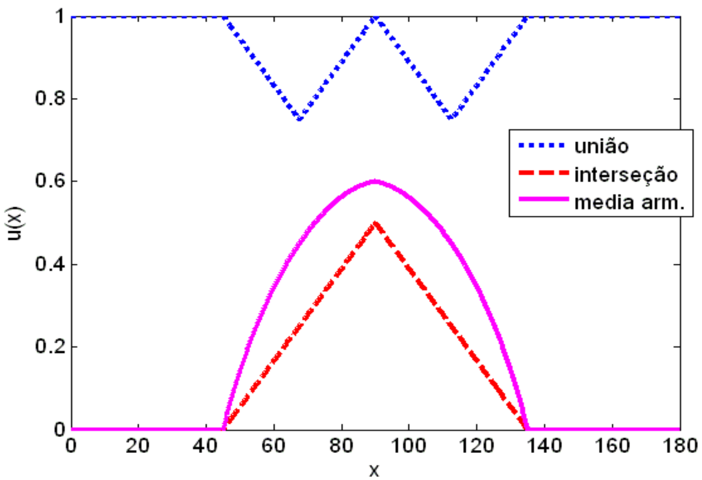
Operadores de agregación de Media:



$$AGR(.) = \sqrt[p]{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu_{A_i}(x)^p\right)}$$

- Media Armónica (p = –1):

$$AGR(.) = \frac{N}{\sum_{i=0}^{N}\left(1/\mu_{A_i}(x)\right)}$$



2. Operadores de Agregación

B. Operadores de agregación Compensatorios

Combinan operadores de Unión e Intersección para producir operadores de agregación. Los principales operadores compensatorios son:

- Operador Gama de Zimmermann:

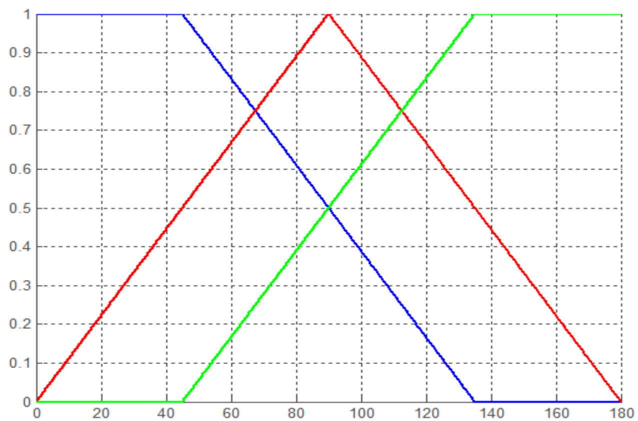
$$A \otimes B = (1\text{-}\gamma)\ (A \cap B) + \gamma\ (A U B)$$

$$AGR\ (.) = (1-\gamma)\ \mathrm{MIN}\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) + \gamma\ \mathrm{MAX}\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big)$$

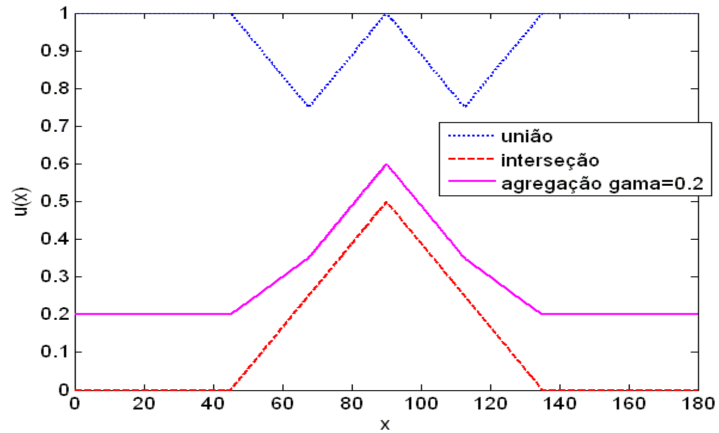
donde $\gamma \epsilon\ [0,1]$ es un factor de compensación. Cuanto mayor es γ más importancia tiene la U respecto a la $\cap$.

2. Operadores de Agregación

Ejemplo de Operador compensatorio Gama: $A \otimes B = (1-\gamma)\,(A \cap B) + \gamma\,(A \cup B)$



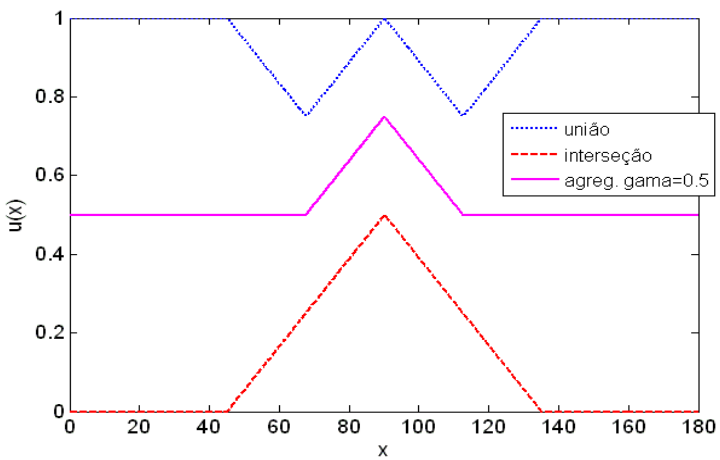
$\gamma = 0.2$



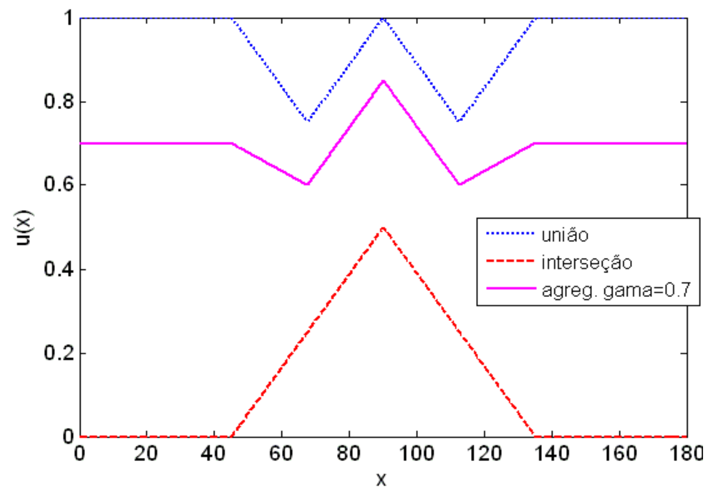
Agregación gama $\gamma = 0.2$

$\gamma = 0.5$

$\gamma = 0.7$



Agregación gama $\gamma = 0.5$



Agregación gama $\gamma = 0.7$

2. Operadores de Agregación: Ejemplos

- Sean A y B dos conjuntos difusos, definidos en el universo de discurso X={1,2,3,4,5,6,7,8}, con grados de pertenencia dados por:

A = {0.1/1+ 0.2/2+ 0.5/3+ 1/4+ 0.4/5+ 0.2/6 }

B = { 0.1/3+ 0.2/4+ 0.5/5+ 1/6+ 0.4/7+ 0.2/8}

Calcule las siguientes operaciones de agregación Media :

- Aritmética: $AGR(.) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mu_{A_i}$

$AGR(.) =$ {0.05/1+ 0.1/2+ 0.3/3+ 0.6/4+ 0.45/5+ 0.6/6+ 0.2/7+ 0.1/8}

- Geométrica: $AGR(.) = \left(\mu_{A_1}(x) * \mu_{A_2}(x) * \cdots * \mu_{A_N}(x)\right)^{1/N}$

$AGR(.) =$ {0.22/3+ 0.45/4+ 0.45/5+ 0.45/6}

2. Operadores de Agregación: Ejemplos

$A = \{0.1/1 + 0.2/2 + 0.5/3 + 1/4 + 0.4/5 + 0.2/6 \}$

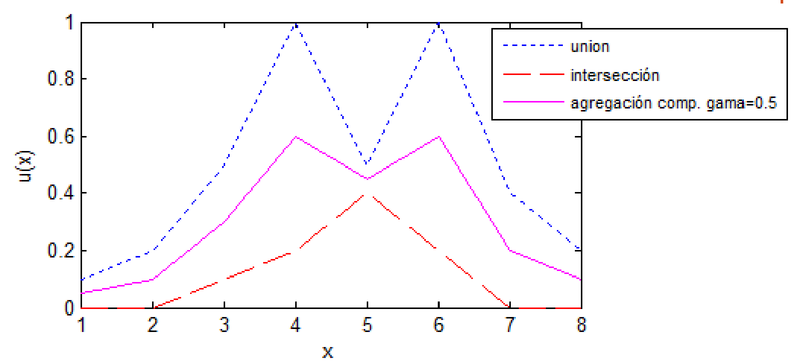
$B = \{ 0.1/3 + 0.2/4 + 0.5/5 + 1/6 + 0.4/7 + 0.2/8\}$

- Operador Compensatorio de *Zimmermann*:

$$AGR(.) = (1-\gamma)\,\mathrm{MIN}\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) + \gamma\,\mathrm{MAX}\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big)$$

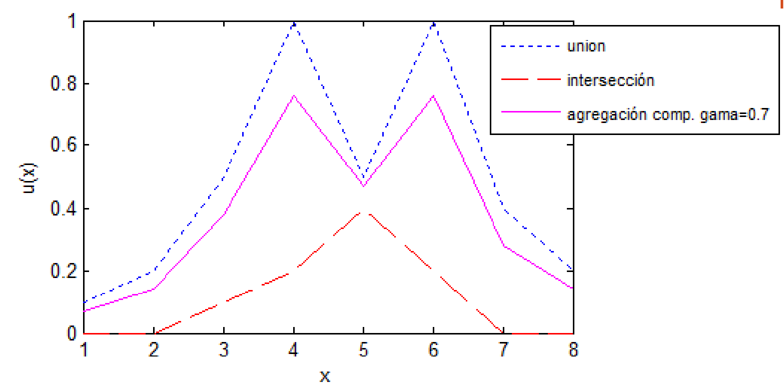
- Con $\gamma = 0.5$:

$$AGR(.) = \{0.05/1 + 0.1/2 + 0.3/3 + \\ + 0.6/4 + 0.45/5 + 0.6/6 + 0.2/7 + 0.1/8\}$$



- Con $\gamma = 0.7$:

$$AGR(.) = \{0.07/1 + 0.14/2 + 0.38/3 + \\ + 0.76/4 + 0.47/5 + 0.76/6 + 0.28/7 + 0.14/8\}$$



Relaciones difusas

- Relaciones difusas
  - Conceptos
  - Propiedades
  - Operaciones
- Combinación
  - Composición Max-Min
  - Composición Max-Prod
  - Composición Max-Media

3. Relaciones difusas

- Una **Relación Difusa**, se define en el sub-espacio constituido por el producto cartesiano entre elementos de dos universos de discurso X y Y. Los valores de la relación entre $\mu_R(x,y)$ siempre están en el intervalo [0,1]:

$$\mathrm{R} = \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \rightarrow [0,1]$$

Una relación difusa se representa por:

$$\mathrm{R(X,Y)} = \sum_{(x,y)\in X\times Y} \mu_R(x,y)|(x,y)$$

➢ Ejemplo: Sea la relación difusa definida por la regla "**x** es aprox. igual a **y**", donde $x \in X$ y $y \in Y$, cuyos universos de discurso discretos se especifican por $\mathrm{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\mathrm{Y} = \{y_1, y_2, y_3\}$. Esbozar la forma de representación matricial de esta relación.

$$\begin{aligned} R(x,y) = {} & 0.8/(x_1,y_1) + 0.3/(x_1,y_2) + 0.7/(x_1,y_3) + \\ & 0.4/(x_2,y_1) + 0.9/(x_2,y_2) + 0.6/(x_2,y_3) + \\ & 0.1/(x_3,y_1) + 1.0/(x_3,y_2) + 0.4/(x_3,y_3) \end{aligned}$$

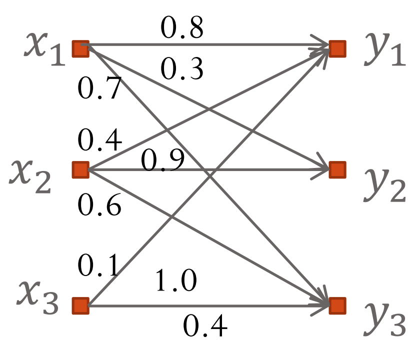
3. Relaciones difusas: Representación

$$
\begin{aligned}
R(x,y) = {} & 0.8/(x_1,y_1) + 0.3/(x_1,y_2) + 0.7/(x_1,y_3) + \\
& 0.4/(x_2,y_1) + 0.9/(x_2,y_2) + 0.6/(x_2,y_3) + \\
& 0.1/(x_3,y_1) + 1.0/(x_3,y_2) + 0.4/(x_3,y_3)
\end{aligned}
$$

- Representación vía Matriz relacional:

$$
R(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.7 \\ 0.4 & 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 1.0 & 0.4 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

- Representación vía Grafo Direccionado:



3. Relaciones difusas: Propiedades

A. Dominio de R(x,y): está formado por los valores máximos $\mu_{R(x,y)} \in$ X, relativos a cada elemento $y \in Y$. Formalmente, se tiene:

$$\mathrm{Dom}\big(\mathrm{R(x,y)}\big) = \max_{y \in Y}\{\mu_R(x,y)\}, \quad \text{donde } x \in \mathrm{X}$$

B. Contradominio de R(x,y): está formado por los valores máximos $\mu_{R(x,y)} \in$ Y, relativos a cada elemento $x \in Y$. Formalmente, se tiene:

$$\mathrm{C\text{-}Dom}\big(\mathrm{R(x,y)}\big) = \max_{x \in X}\{\mu_R(x,y)\}, \quad \text{donde } y \in \mathrm{Y}$$

- Ejemplo: Determine el Dominio y Contradominio de la siguiente relación difusa R(x,y), representada por la siguiente expresión.

$$\mathrm{R(x,y)} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 & 0.9 & 1.0 \\ 0.7 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.9 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \mathrm{Dom(R(x,y))} = \{1.0;0.7;0.9\}$$

C-Dom(R(x,y))={0.7;0.9;0.9;1.0}

3. Relaciones difusas: Propiedades

C. Inversa $R^{-1}(x,y)$, se especifica por medio de valores de pertenencia transpuestos de la matriz de relación:

$$\mu_{R^{-1}(x,y)} = \mu_{R(y,x)}; \text{ donde } (x,y) \in X, Y$$

- Ejemplo

Calcule la inversa de la siguiente relación difusa R(x,y), donde $x \in X$ y $y \in Y$, representada por la siguiente matriz:

$$R(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 & 0.9 & 1.0 \\ 0.7 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.9 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow R^{-1}(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 & 0.9 \\ 0.9 & 0.3 & 0.5 \\ 1.0 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. Relaciones difusas: Operaciones

- Sean dos relaciones difusas R(x,y) y S(x,y) donde $x \in X$ y $y \in Y$, las principales operaciones básicas son:

1) Operación de Unión

$$\mu_{R(x,y) \cup S(x,y)} = \underset{(x,y) \in X \times Y}{\mathrm{MAX}} \{\mu_{R(x,y)}, \mu_{S(x,y)}\}$$

2) Operación de Intersección

$$\mu_{R(x,y) \cap S(x,y)} = \underset{(x,y) \in X \times Y}{\mathrm{MIN}} \{\mu_{R(x,y)}, \mu_{S(x,y)}\}$$

3) Operación de Complemento

$$\mu_{\bar{R}(x,y)} = 1 - \mu_{R(x,y)}$$

❖ **Nota**: En estas operaciones, los operadores max y min se pueden sustituir (sin pérdida de generalidad) por cualquier operador S-norma y T-norma.

3. Relaciones difusas: Ejemplos

- Sean las relaciones difusas R(x,y) y S(x,y) donde $x \in X$ y $y \in Y$, representadas por las siguiente matrices:

$$R(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 & 0.6 \\ 1.0 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array} \; ; \; S(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.9 & 0.7 & 0.1 \\ 1.0 & 0.9 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Operación de Unión

$$R \cup S = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.9 & 0.6 \\ 1.0 & 0.7 & 0.2 \\ 1.0 & 0.9 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Operación de Intersección

$$R \cap S = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.9 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

4. Composición de relaciones difusas

- La combinación de dos o más relaciones difusas, definidas en espacios distintos (productos cartesianos diferentes), puede ser hecha por medio de operadores que permiten la **composición** de las respectivas relaciones.
- La composición tiene un papel fundamental en los procedimientos que involucran computación basada en reglas difusas y, principalmente, en los procesos de implementación de estimadores y controladores difusos.

Composición

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, bend left, no head, "f"] \arrow[rr, bend right, no head, "R \circ S \ \textit{difusa}"'] & S \arrow[r, bend left, no head, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

- Las técnicas de composición más importantes son: composición “Max-Min”, “Max-Prod” y “Max-Media”.

4. Composición de relaciones difusas

A. Composición Max-Min

Sean dos relaciones difusas $R(x,y)$ y $S(y,z)$, definidas respectivamente en los productos cartesianos discretos $X \times Y$ y $Y \times Z$. La composición tipo Max-Min entre las matrices R y S, se define en el producto cartesiano $X \times Z$.

$$R \circ S(x,z) = \underset{y \in Y}{\mathrm{MAX}}\{MIN\{\mu_R(x,y);\mu_S(y,z)\}\}$$

- Ejemplo:

Sean las relaciones difusas $R(x,y)$ y $S(y,z)$, definidas respectivamente en $X \times Y$ y $Y \times Z$, representadas por las siguientes matrices:

$$R(x,y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 & 0.9 \\ 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.3 \\ 0.5 & 0.7 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad S(y,z) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.6 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 1.0 & 0.0 & 0.7 \\ 0.9 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

4. Composición de relaciones difusas

$$R(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 & 0.9 \\ 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.3 \\ 0.5 & 0.7 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$S(y,z) = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.6 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 1.0 & 0.0 & 0.7 \\ 0.9 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Aplicando la regla de composición Max-Min, se obtiene los elementos de la matriz $R \circ S(y,z)$:

$$\mu_{RoS}(x_1,z_1) = \max\{\min(0.1,0.2); \min(0,6,0.4); \min(0.4,1.0); \min(0.9,0.9)\} = 0.9$$
$$\mu_{RoS}(x_1,z_2) = \max\{\min(0.1,0.8); \min(0,6,0.3); \min(0.4,0.0); \min(0.9,0.7)\} = 0.7$$
$$\mu_{RoS}(x_1,z_3) = \max\{\min(0.1,0.6); \min(0,6,0.1); \min(0.4,0.7); \min(0.9,0.2)\} = 0.4$$

- De manera similar, se obtienen los demás elementos dados por:

$$\mu_{RoS}(x_2,z_1) = 0.8\ ;\ \mu_{RoS}(x_2,z_2) = 0.8\ ;\ \mu_{RoS}(x_2,z_3) = 0.7$$
$$\mu_{RoS}(x_3,z_1) = 0.4\ ;\ \mu_{RoS}(x_3,z_2) = 0.5\ ;\ \mu_{RoS}(x_3,z_3) = 0.5$$

$$R \circ S(y,z) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.9 & 0.7 & 0.4 \\ 0.8 & 0.8 & 0.7 \\ 0.4 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. Composición de relaciones difusas

B. Composición Max-Prod

La composición Max-Prod de dos relaciones difusas $R(x,y)$ y $S(y,z)$, definidas respectivamente por los productos cartesianos discretos $X \times Y$ y $Y \times Z$ se define en el producto cartesiano $X \times Z$:

$$R \cdot S(x,z) = \underset{y \in Y}{\mathrm{MAX}}\{\mu_R(x,y) * \mu_S(y,z)\}$$

- Ejemplo:

Sean las relaciones difusas $R(x,y)$ y $S(y,z)$, definidas respectivamente en $X \times Y$ y $Y \times Z$, representadas por las siguientes matrices:

$$R(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 & 0.9 \\ 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.3 \\ 0.5 & 0.7 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad S(y,z) = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.6 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 1.0 & 0.0 & 0.7 \\ 0.9 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

4. Composición de relaciones difusas

$$R(x,y) = \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0.1 & 0.6 & 0.4 & 0.9 \\ x_2 & 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.3 \\ x_3 & 0.5 & 0.7 & 0.2 & 0.0 \end{array} \qquad S(y,z) = \begin{array}{c|ccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline y_1 & 0.2 & 0.8 & 0.6 \\ y_2 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ y_3 & 1.0 & 0.0 & 0.7 \\ y_4 & 0.9 & 0.7 & 0.2 \end{array}$$

- Aplicando la regla de composición Max-Prod, se obtiene los elementos de la matriz $R \cdot S(y,z)$:

$$\mu_{R\bullet S}(x_1,z_1) = \max\{\,(0.1*0.2); (0.6*0.4); (0.4*1.0); (0.9*0.9)\} = 0.81$$
$$\mu_{R\bullet S}(x_1,z_2) = \max\{\,(0.1*0.8); (0.6*0.3); (0.4*0.0); (0.9*0.7)\} = 0.63$$
$$\mu_{R\bullet S}(x_1,z_3) = \max\{\,(0.1*0.6); (0.6*0.1); (0.4*0.7); (0.9*0.2)\} = 0.28$$

- De manera similar, se obtienen los demás elementos dados por:

$$\mu_{R\bullet S}(x_2,z_1) = 0.80\ ;\ \mu_{R\bullet S}(x_2,z_2) = 0.64\ ;\ \mu_{R\bullet S}(x_2,z_3) = 0.56$$
$$\mu_{R\bullet S}(x_3,z_1) = 0.28\ ;\ \mu_{R\bullet S}(x_3,z_2) = 0.40\ ;\ \mu_{R\bullet S}(x_3,z_3)) = 0.30$$

$$R \cdot S(x,z) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.81 & 0.63 & 0.28 \\ 0.80 & 0.64 & 0.56 \\ 0.28 & 0.40 & 0.30 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. Composición de relaciones difusas

c. Composición Max-Media

La composición Max-Media entre dos relaciones difusas $R(x,y)$ y $S(y,z)$, definidas respectivamente en los productos cartesianos discretos $X \times Y$ y $Y \times Z$, se define en el producto cartesiano $X \times Z$:

$$R \oplus S(x,z) = \underset{y \in Y}{\mathrm{MAX}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\mu_R(x,y) + \mu_S(y,z) \right) \right\}$$

➢Ejemplo:

Sean las relaciones difusas $R(x,y)$ y $S(y,z)$, definidas respectivamente en $X \times Y$ y $Y \times Z$, representadas por las siguientes matrices:

$$R(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 & 0.9 \\ 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.3 \\ 0.5 & 0.7 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad S(y,z) = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.6 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 1.0 & 0.0 & 0.7 \\ 0.9 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

4. Composición de relaciones difusas

$$R(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 & 0.9 \\ 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.3 \\ 0.5 & 0.7 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad S(y,z) = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.6 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 1.0 & 0.0 & 0.7 \\ 0.9 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Aplicando la regla de composición Max-Media, se obtiene los elementos de la matriz $R \oplus S(y,z)$:

$$\mu_{R\oplus S}(x_1,z_1) = \max\{½(0.1+0.2); ½(0.6+0.4); ½(0.4+1.0); ½(0.9+0.9)\} = 0.90$$
$$\mu_{R\oplus S}(x_1,z_2) = \max\{½(0.1+0.8); ½(0.6+0.3); ½(0.4+0.0); ½(0.9+0.7)\} = 0.80$$
$$\mu_{R\oplus S}(x_1,z_3) = \max\{½(0.1+0.6); ½(0.6+0.1); ½(0.4+0.7); ½(0.9+0.2)\} = 0.55$$

- De manera similar, se obtienen los demás elementos:

$$\mu_{R\oplus S}(x_2,z_1) = 0.90 \;;\; \mu_{R\oplus S}(x_2,z_2) = 0.80 \;;\; \mu_{R\oplus S}(x_2,z_3) = 0.75$$
$$\mu_{R\oplus S}(x_3,z_1) = 0.60 \;;\; \mu_{R\oplus S}(x_3,z_2) = 0.65 \;;\; \mu_{R\oplus S}(x_3,z_3) = 0.55$$

$$R \oplus S(x,z) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.90 & 0.80 & 0.55 \\ 0.90 & 0.80 & 0.75 \\ 0.60 & 0.65 & 0.55 \end{pmatrix} \end{array}$$