Lógica difusa

Inteligencia Artificial

Dra. Soledad Espezua Ll.

Temas

- Definiciones y características básicas
- Conjuntos difusos y sus propiedades
- Operaciones lógicas en conjuntos difusos
- Relaciones difusas y reglas de composición difusas
- Funcionamiento de un Sistema Difuso
  - Proceso de inferencia difuso
  - Estimadores lingüísticos
- Sistemas difusos paramétricos
  - Modelos de inferencia de Mamdani y Takagi-Sugeno

https://www.youtube.com/watch?v=J_Q5X0nTmrA&feature=emb_rel_pause

Funcionamiento de un Sistema Difuso

- Proceso de inferencia difuso
  - **Principales operadores de implicación**

Inferencia: Se infiere/deduce; una verdad o proposición que viene de otra que es admitida o supone ser verdadera; luego se obtiene una conclusión/ deducción.

Proceso de inferencia difuso

- El proceso de inferencia difuso, también conocido como razonamiento aproximado, permite mapear el conocimiento de un sistema usando un conjunto finito de reglas difusas del tipo "**Si-Entonces**“, a un conjunto de variables de salida.
- Las reglas difusas poseen la siguiente forma:

  Si <condición> **entonces** <acción>

Ejemplo:

Regla 1: **Si** (*velocidad* es Alta y *aceleración* es media) **entonces** (Frenado es Medio)

:

Regla N: **Si** (*velocidad* No es muy Alta) **entonces** (Frenado es Lento)

Proceso de inferencia difusa

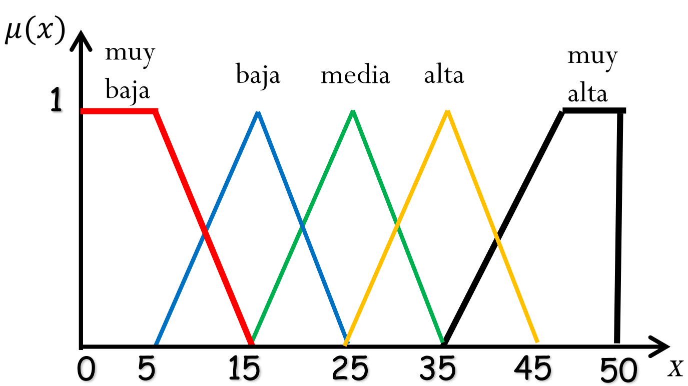
Antecedente   Consecuente

Si <condición> **entonces** <acción>

<proposición difusa>

- <proposición difusa> puede ser simple o compuesta y su **interpretación** se debe a los conectivos lógicos (Y, O, NO).

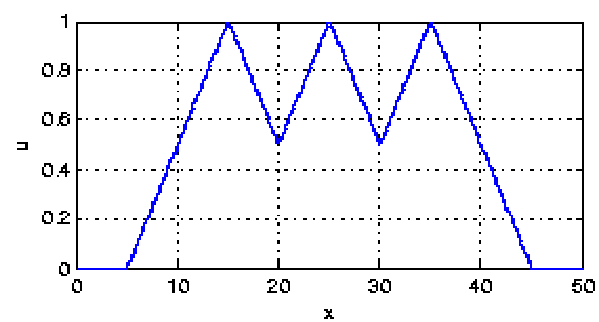
  - Ejemplo:



Temperatura

<proposición difusa compuesta>

Si "Baja" **O** "Media" **O** "Alta"



Proceso de inferencia difusa

Regla *Modus Ponens*

- Normalmente, los procesos de inferencia difusos se basan en la regla de ***Modus Ponens*** generalizado:

Hecho: *x* es A’
Regla: Si *x* es A **entonces** *y* es B
Consecuencia: *y* es B’

Ejemplo:
- Está lloviendo.
- Si llueve entonces te espero dentro del teatro.

Por lo tanto, te espero dentro del teatro.

1. Dado un hecho observado *x es* A’ (por eje. una señal medida) que se asume como verdad.
2. Si A’ es verdad, entonces el antecedente “*x* es A” también es verdad.
3. Si el antecedente “*x* es A” es verdad, entonces implica directamente en el consecuente “*y* es B”.
4. Si el consecuente “y es B” es verdad, entonces también es verdad el resultado final de la implicación (Consecuencia) *y* es B’, donde B’ es el valor de la salida.

Proceso de inferencia difusa

Operadores de implicación($R_{A \to B}$)

La obtención de la **función** de pertenencia relativa a la **implicación** $R_{A \to B}$ puede ser obtenida de muchas formas, entre ellas, las principales son:

1) MAMDANI $\Rightarrow \mu_{R_{A \to B}}(x, y) = min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$

   También conocido como operador "min" de Mamdani.

2) ZADEH $\Rightarrow \mu_{R_{A \to B}}(x, y) = max\{1 - \mu_A(x), min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}\}$

   También conocido como operador "max-min" de Zadeh.

3) LARSEN $\Rightarrow \mu_{R_{A \to B}}(x, y) = \mu_A(x).\mu_B(y)$

   También conocido como operador "producto" de Larsen.

4) ARITMÉTICO $\Rightarrow \mu_{R_{A \to B}}(x, y) = min\{1{,}1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)\}$

5) BOOLEANO $\Rightarrow \mu_{R_{A \to B}}(x, y) = max\{1 - \mu_A(x), \mu_B(y)\}$

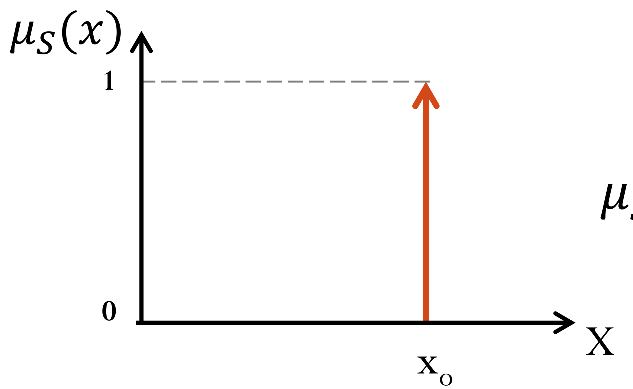
donde

- $\mu_{R_{A \to B}}$: Función de pertenencia relativa a la Función de implicación $R_{A \to B}$
- x, y : variables lingüísticas
- A, B: términos (nombres de los conjuntos asociados a los valores lingüísticos).

Proceso de inferencia difusa

Conjunto difuso "Singleton" S (conjunto unitario)

- Es un caso particular de conjunto difuso normalizado, cuyo soporte es un único punto x_0, perteneciente a X, con $\mu(x_0) = 1$. Puede ser representado por:



$$\mu_S(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } & x = x_0 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

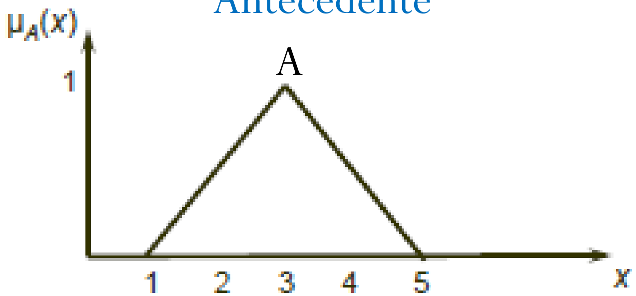
- Se utiliza para <u>mapear señales de entrada del sistema difuso</u> (valores generalmente provenientes de un medio externo: sensores o bases de datos) que son representados por valores puntuales.
    - Ejemplos: valores de temperatura, velocidad, corriente eléctrica, presión, etc.

Ejemplo de inferencia difusa

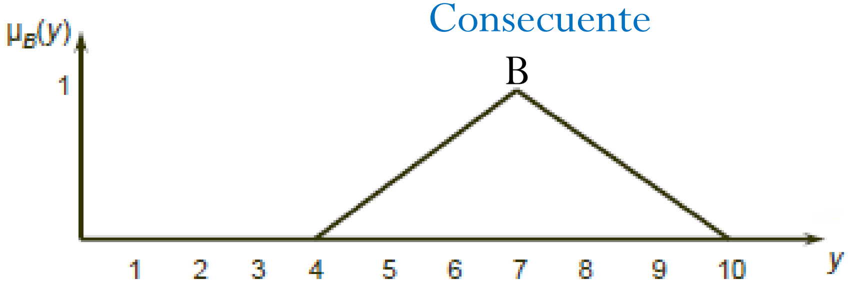
Definición de variables

- Sean los conjuntos A y B, representados por los gráficos a seguir:

Antecedente



Consecuente



Hecho: *x* es A’
Regla: Si *x* es A entonces *y* es B

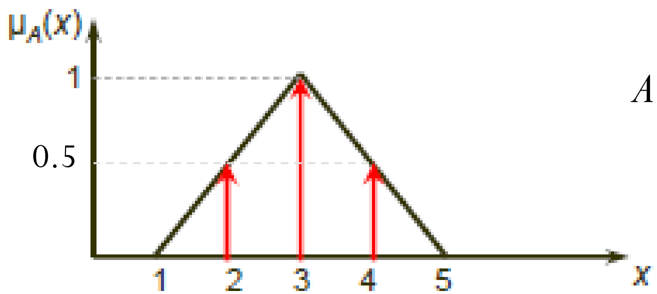
Consecuencia: *y* es B’

- Utilizando el operador de implicación **Mamdani**, así como la regla de composición **Max-Min**, calcular el valor del conjunto difuso de salida B’ inferido a partir de una señal A’= 4.

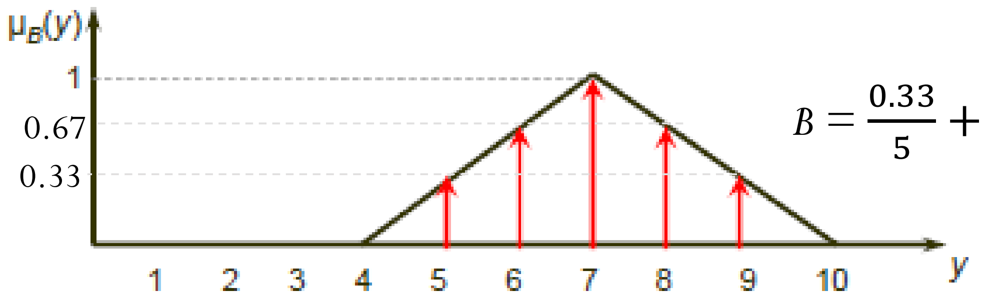
Ejemplo de inferencia difusa

Discretización de variables

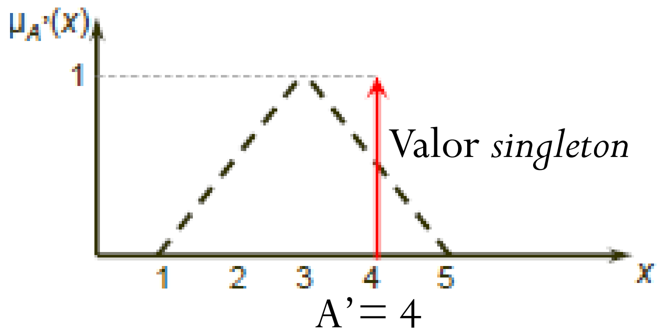
- Utilizando la representación discreta para todas las variables, se tiene:



$$A = \frac{0.5}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0.5}{4}$$



$$B = \frac{0.33}{5} + \frac{0.67}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0.67}{8} + \frac{0.33}{9}$$



Los valores de entrada (A') son valores puntuales y deben ser convertidas a un conjunto unitario.

$$A' = \frac{0}{2} + \frac{0}{3} + \frac{1}{4}$$

Ejemplo de inferencia difusa

$$A = \frac{0.5}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0.5}{4} \qquad B = \frac{0.33}{5} + \frac{0.67}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0.67}{8} + \frac{0.33}{9} \qquad A' = \frac{0}{2} + \frac{0}{3} + \frac{1}{4}$$

1. Obtención de los valores de la implicación Mamdani:

$$\mu_{R_{A\to B}}(x,y) = min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\} = \frac{0.33}{(2,5)} + \frac{0.5}{(2,6)} + \frac{0.5}{(2,7)} + \frac{0.5}{(2,8)} + \frac{0.33}{(2,9)} + \frac{0.33}{(3,5)} + \frac{0.67}{(3,6)} + \frac{1}{(3,7)} + \frac{0.67}{(3,8)} + \frac{0.33}{(3,9)} + \frac{0.33}{(4,5)} + \frac{0.5}{(4,6)} + \frac{0.5}{(4,7)} + \frac{0.5}{(4,8)} + \frac{0.33}{(4,9)}$$

2. Obtención del valor de $B'(y)$ usando Composición Max-Min:

$$B'(y) \Longrightarrow B'(y) = A'(x) \circ R_{A\to B}(x,y) = \underset{y\in Y}{\mathrm{MAX}}\{MIN\{\mu_A(x); \mu_{R_{A\to B}}(x,y)\}\}$$

$$B'(y) = \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{array}{c|ccccc} & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 2 & 0.33 & 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.33 \\ 3 & 0.33 & 0.67 & 1.00 & 0.67 & 0.33 \\ 4 & 0.33 & 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.33 \end{array}$$

$$\mu_{B'}(5) = \max\{\min(0,0.33); \min(0,0.33); \min(1,0.33)\} = 0.33$$
$$\mu_{B'}(6) = \max\{\min(0,0.50); \min(0,0.67); \min(1,0.50)\} = 0.50$$
$$\mu_{B'}(7) = \max\{\min(0,0.50); \min(0,1.00); \min(1,0.50)\} = 0.50$$
$$\mu_{B'}(8) = \max\{\min(0,0.50); \min(0,0.67); \min(1,0.50)\} = 0.50$$
$$\mu_{B'}(9) = \max\{\min(0,0.33); \min(0,0.33); \min(1,0.33)\} = 0.33$$

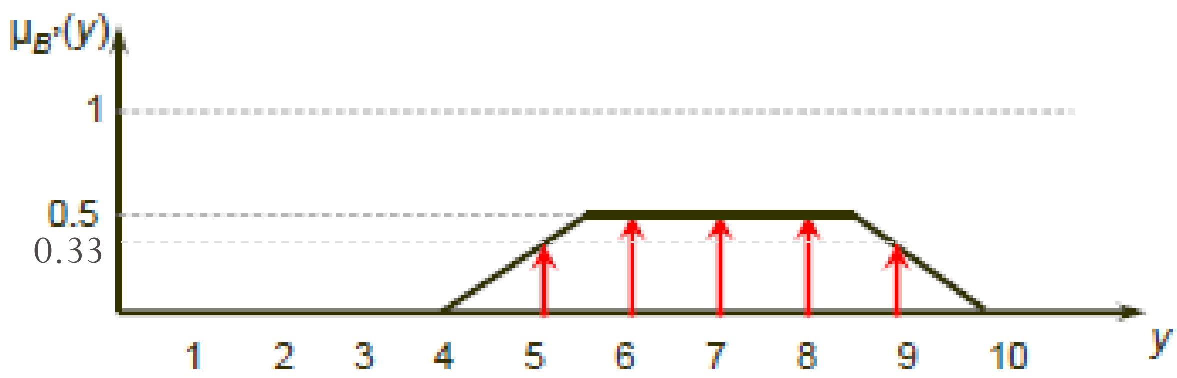
$$B'(y) = \begin{array}{ccccc} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \end{array} [0.33 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.33]$$

Ejemplo de inferencia difusa

Representación gráfica del resultado de la inferencia

- A partir de los valores obtenidos para B’, se obtiene la representación grafica de la salida:

$\mu_{B'}(5) = 0.33$
$\mu_{B'}(6) = 0.50$
$\mu_{B'}(7) = 0.50$
$\mu_{B'}(8) = 0.50$
$\mu_{B'}(9) = 0.33$

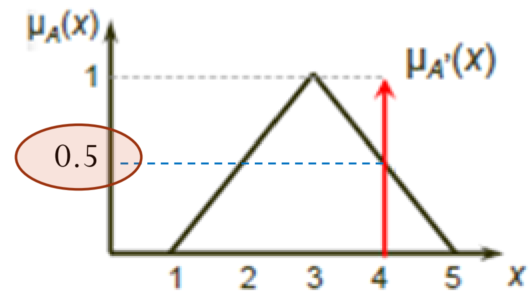


Ejemplo de inferencia difusa

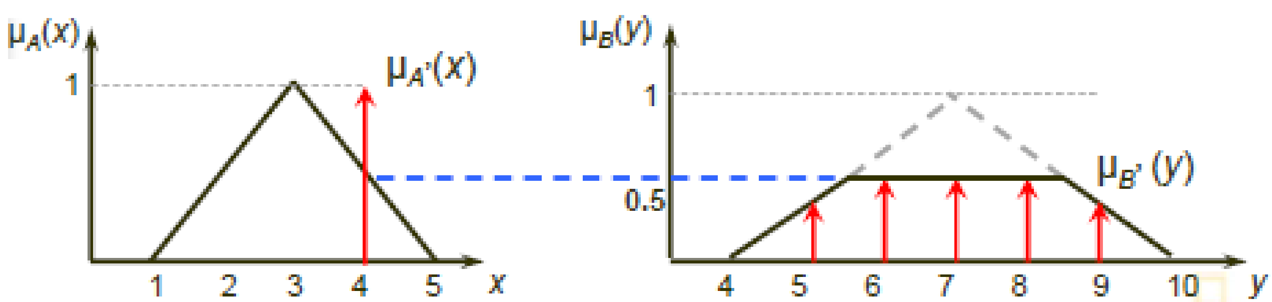
Interpretación Geométrica

- Cuando se utilizan muchos puntos de discretización en el proceso de inferencia, se realiza un elevado esfuerzo computacional para obtener la salida. Entonces para minimizar el esfuerzo computacional, el resultado de la implicación de Mamdani puede conseguirse a partir de su interpretación geométrica.
- Pasos para obtener B'(y):

1. Obtener el grado de pertenencia activado por A' en el conjunto A



2. La salida B'(y) será la región difusa obtenida por el corte en el conjunto B del valor de pertenencia activado por A'.



Proceso de inferencia difusa: Consideraciones

Base de Reglas
Si Entonces

Valor de entrada

Inferencia difusa:
1. Implicación
2. Agregación
3. Composición

Valor de salida

- Un proceso de inferencia difusa es un proceso que mapea valores de un vector de entrada a una salida, mediante la interpretación de un conjunto de reglas. Involucra operadores de implicación, agregación y composición sobre reglas difusas.

Hay tres tipos principales de sistemas de inferencia difusa:

- Mamdani
- Takagi-Sugeno
- Tsukamoto

Funcionamiento de un Sistema Difuso

- Proceso de inferencia difuso
  - **Principales operadores de implicación**
- Estimadores difusos lingüísticos

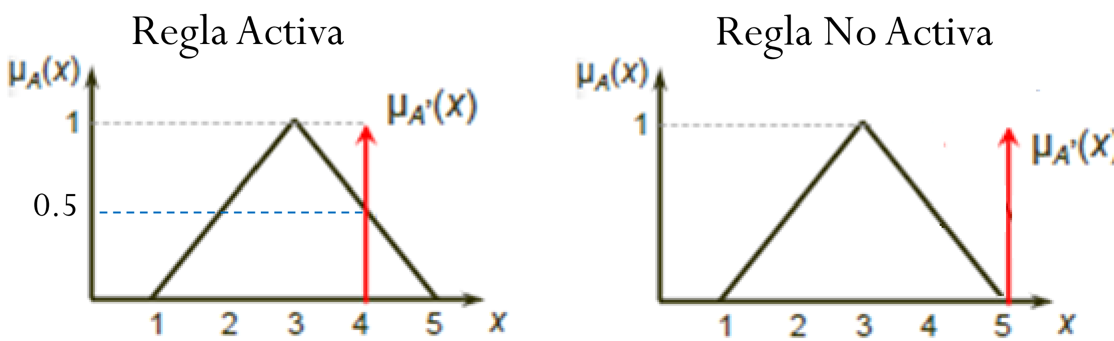
1. Introducción a los Estimadores difusos

Aspectos conceptuales

- El antecedente de una regla difusa siempre estará relacionado con su respectivo consecuente.

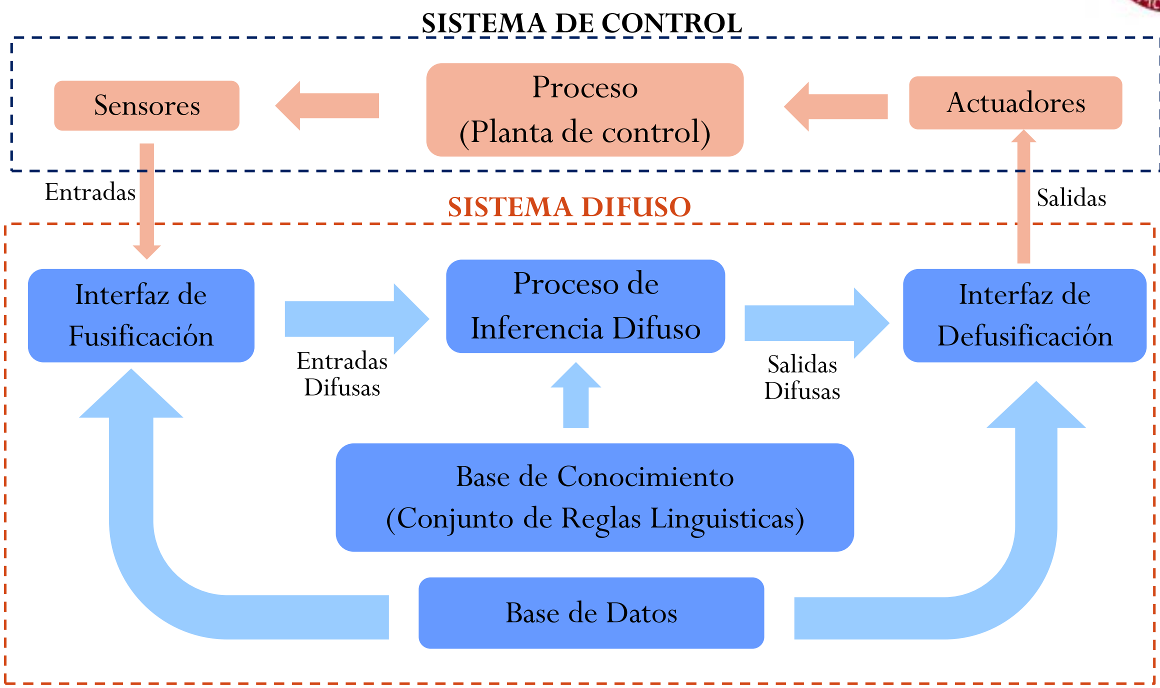
Función de implicación $R_{A \to B}$

- Una regla difusa se activa cuando el grado de pertenencia relacionado con la función de pertenencia del antecedente es diferente de cero, es decir, $\mu(x) > 0$.



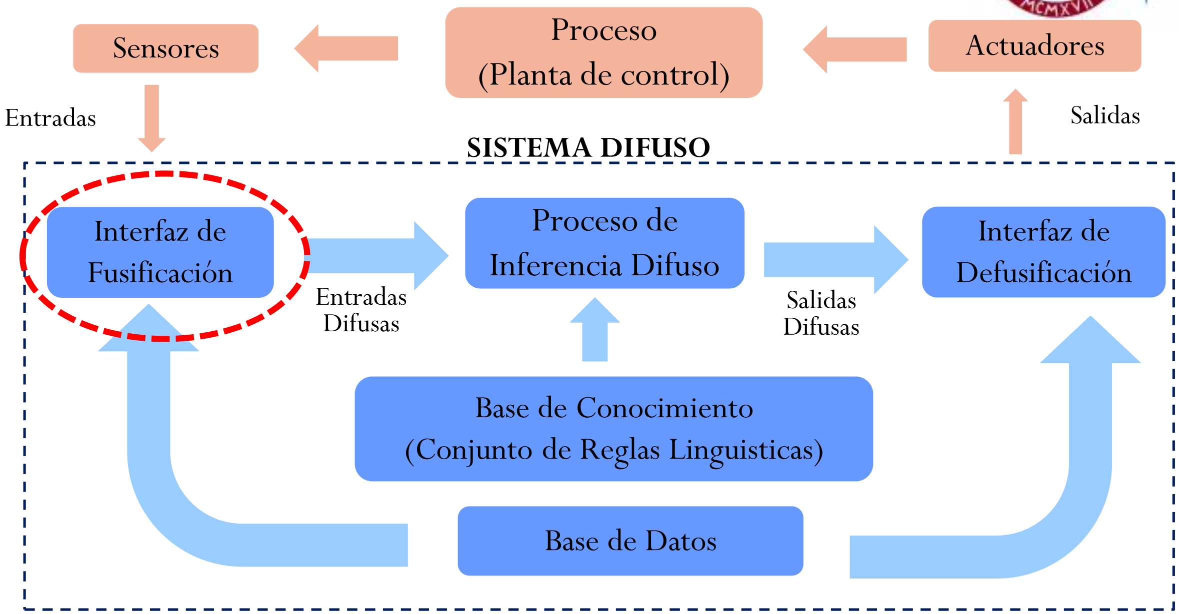
- Los estimadores/controladores difusos permiten el tratamiento de diversas reglas difusas que se activan en determinado momento, frente a sus señales de entrada (señales puntuales o "crisp").

2. Diagrama esquemático de un estimador difuso



- Las variables de entrada se obtienen de sensores del proceso, cuyos valores no difusos son fusificados mediante la "Interfaz de Fusificación".
- En el bloque "Proceso de Inferencia Difuso", se procesan las entradas difusas a través de un conjunto de reglas lingüísticas definidas en la "Base de Conocimiento", y generan la salidas difusas.
- En la "Interfaz de Defusificación" se transforman las salidas difusas, a salidas puntuales (valores escalares) hacia los actuadores, los cuales luego convertirán la señal de salida en una acción dentro del Proceso.

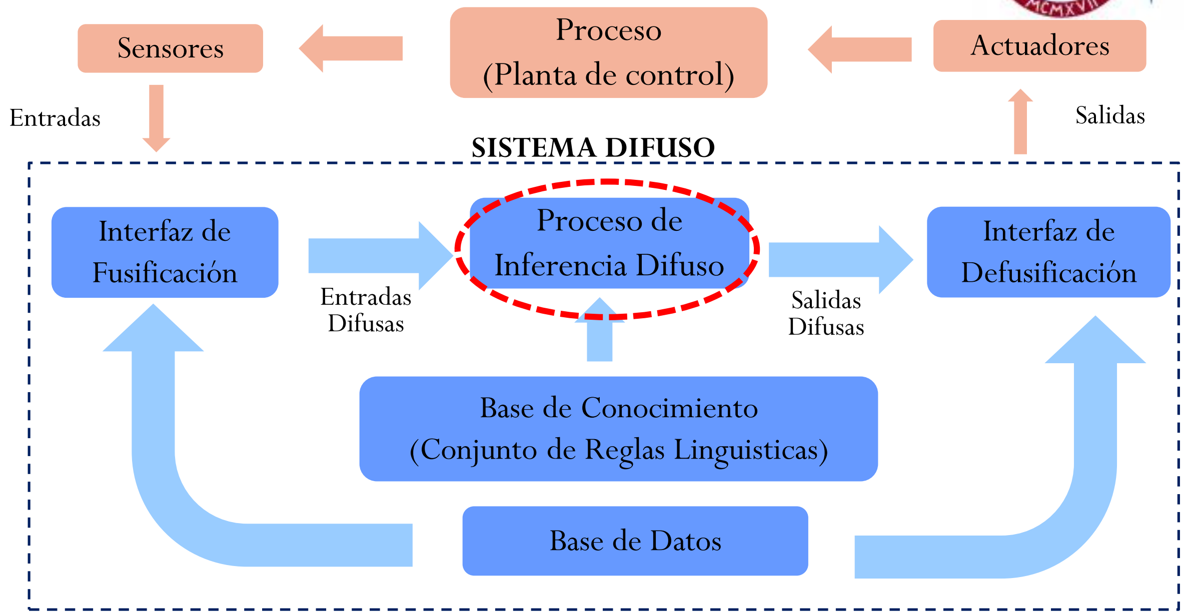
2. Diagrama esquemático



Interfaz de Fusificación:

- Es el primer paso de un sistema difuso y consiste en la identificación de variables lingüísticas a las que corresponden las entradas (mediciones u observaciones de señales provenientes sensores) y sus respectivos grados de pertinencia. Es esta interfaz donde también ocurre la activación de las reglas asociadas a las variables lingüísticas activadas.

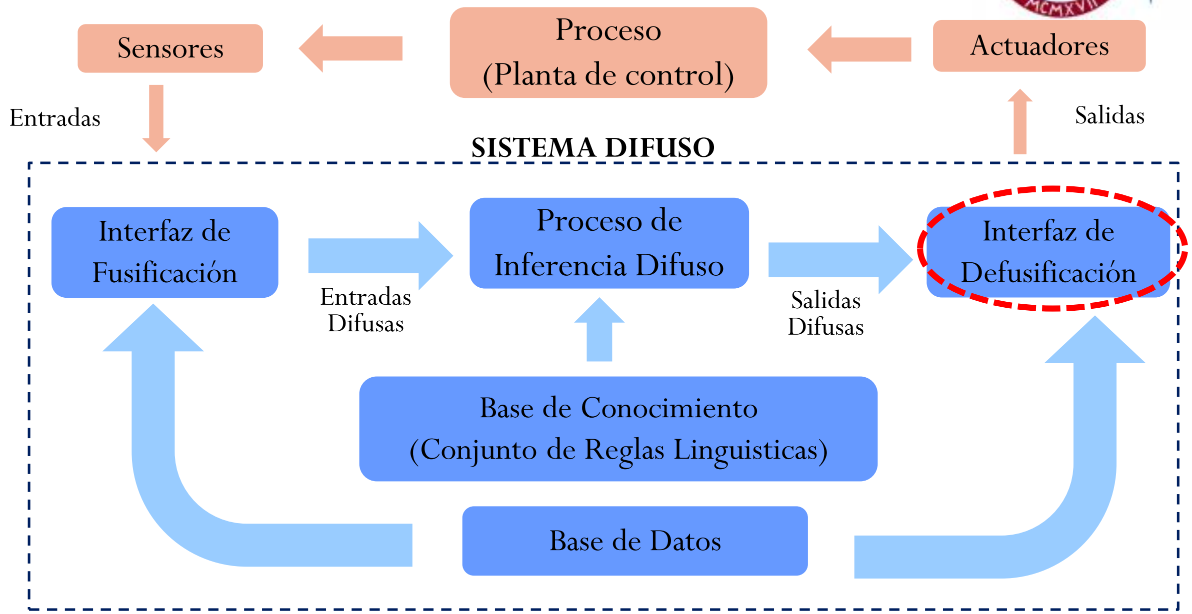
2. Diagrama esquemático



Proceso de Inferencia Difuso:

- A partir de los conjuntos y de las reglas lingüísticas definidas en la base de conocimiento, se realiza la etapa de inferencia difusa. En esta etapa se realiza el proceso de implicación en las reglas lingüísticas activadas a fin de producir un conjunto difuso que será resultante de la contribución de todas esas reglas.

2. Diagrama esquemático



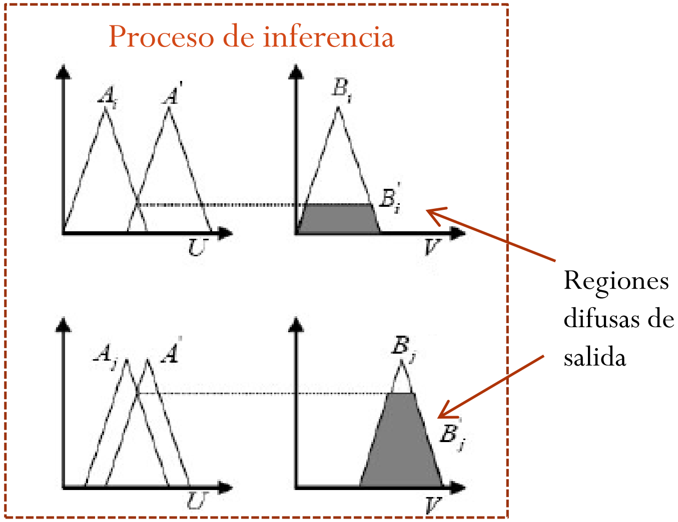
Interfaz de Defusificación:

- Una vez obtenido el conjunto difuso de salida a través del proceso de inferencia, en la defusificación se hace la interpretación de esa información para salidas precisas (valores puntuales).
- Esto es necesario, ya que en aplicaciones prácticas se requieren valores precisos, en lugar de cuantificaciones difusas.
- Existen diversas técnicas de defusificación, siendo el método del centro de área y media de los máximos son los más utilizados.

3. Procedimiento de inferencia difusa

Aspectos introductorios

- El resultado del proceso de inferencia es una región difusa de salida.



- Los pasos para el alcance de esta región difusa de salida son los siguientes:
  1. Encontrar todas las reglas que estén activadas.
  2. Determinar la contribución de cada una de las reglas activadas a la región difusa de salida.
  3. Combinar todas las contribuciones difusas producidas a partir de cada regla activada para generar la región difusa de salida.

Aspectos introductorios

- Por ejemplo, considerando un sistema compuesto de dos entradas y una salida. Las variables lingüísticas de entrada (***x*** y ***y***) se componen respectivamente por los conjuntos de términos difusos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ y $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$. La variable de salida ***z*** se define por los conjuntos de términos $\{C_1, C_2, \ldots, C_p\}$. Entonces, se tendrían las siguientes reglas:

Hecho 1: x es A'
Hecho 2: y es B'
Regla 1: **Si** (x es A_1) **Y** (y es B_1) **entonces** z es C_1
Regla 2: **Si** (x es A_1) **Y** (y es B_2) **entonces** z es C_2
(...)
Regla (.): **Si** (x es A_n) **Y** (y es B_m) **entonces** z es C_p
- -
Consecuencia: z es C'

3. Procedimiento de inferencia difusa

Aplicación de la implicación difusa

- Entonces, sean las siguientes reglas:

Hecho 1: x es A'
Hecho 2: y es B'
Regla 1: **Si** (x es A_1) **Y** (y es B_1) **entonces** z es C_1
Regla 2: **Si** (x es A_1) **Y** (y es B_2) **entonces** z es C_2
(...)
Regla (.): **Si** (x es A_n) **Y** (y es B_m) **entonces** z es C_p

Consecuencia: z es C'

Entradas

Salida

- Para obtener la relación de implicación $R_{A\text{ y B}\rightarrow C}$, se aplica el conectivo lógico **Y** en todas las reglas que estén activadas. En términos de grados de pertinencia, se tendría:

$$\mu_{R_{A\text{ y }B\rightarrow C}} \Leftrightarrow \mu_{R_{AB\rightarrow C}}$$

donde: $AB \rightarrow \mu_A(x)\boldsymbol{T}\mu_B(y) = min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$

T-norma

- Luego, se deben encontrar todas las reglas activadas y sus respectivas regiones difusas de salida. Usando una operación de composición (por ejm: Max-Min), se obtiene para cada regla activada ***k*** la siguiente relación:

$$C_k'(z) = AB'(x,y)\,\text{o}\, R_{AB\rightarrow C}(x,y,z)$$

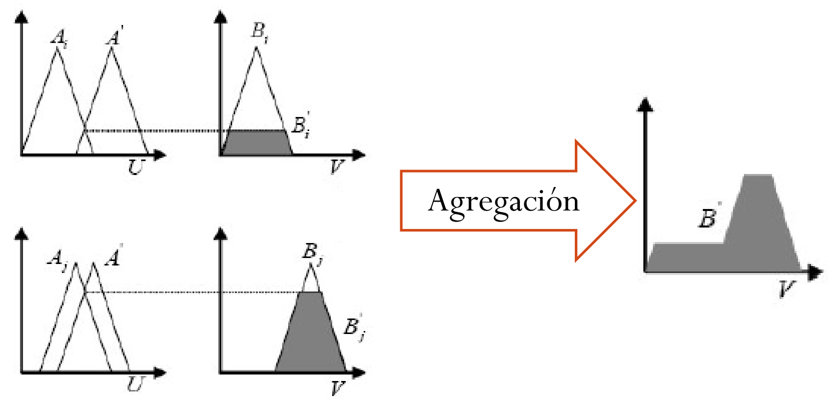
Aplicación del operador de Agregación

- Cada regla activada producirá una contribución C'_k para la salida final del procedimiento de inferencia difusa.

$$C'_k(z) = AB'(x,y) \circ R_{AB\rightarrow C}(x,y,z)$$

- Finalmente, basta con combinar todas las regiones difusas de salida $C'_k(z)$ buscando la generación de una única región difusa $\{C'(z)\}$ que represente la <u>Agregación</u> de todas las contribuciones $C'_k(z)$:

$$C'(z) = Agr(C'_1(z), C'_2(z), \dots, C'_k(z), \dots)$$



- Los principales operadores de agregación son:

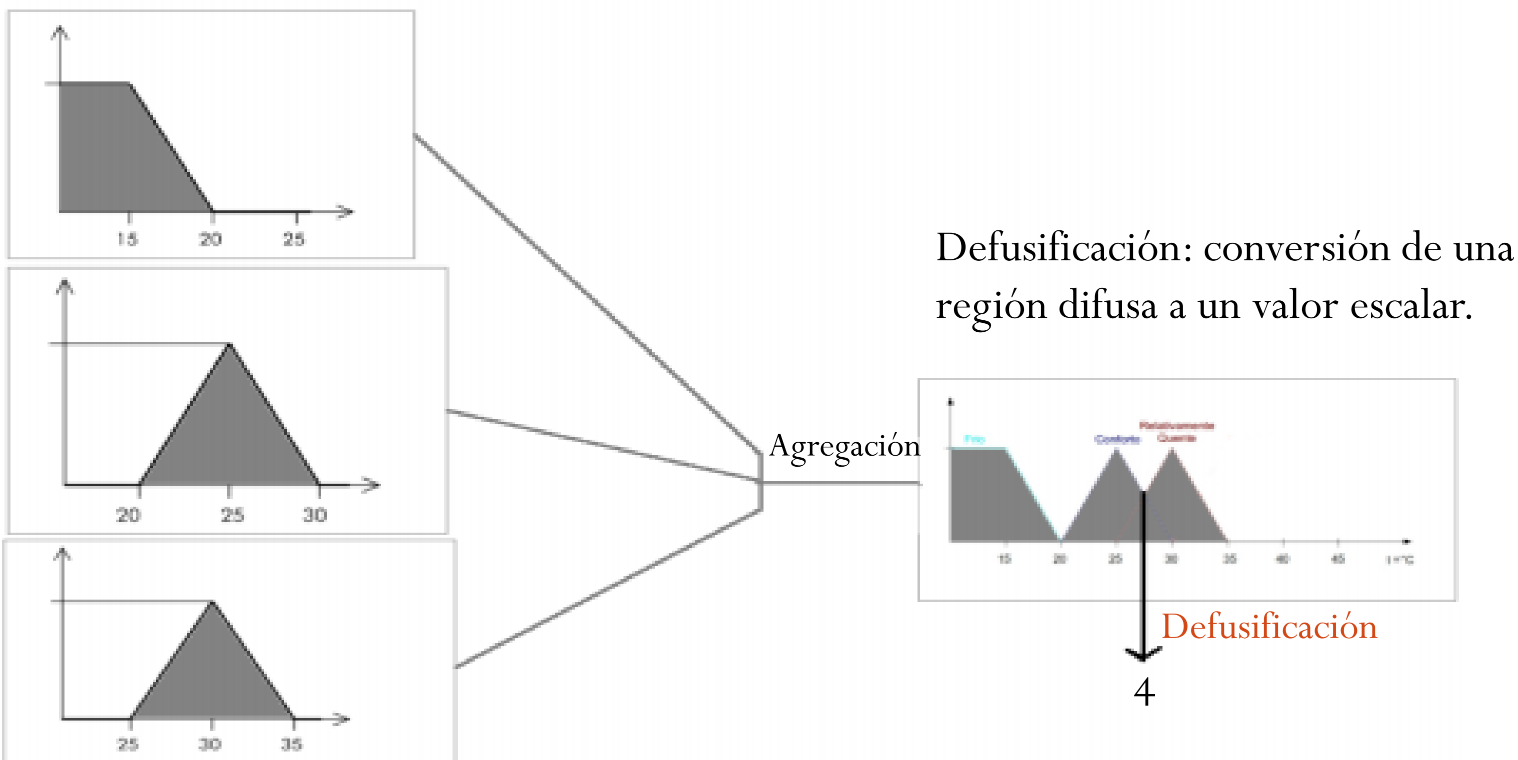
$$Máximo \rightarrow Agr\ (.) = \max\{C'_1(z), C'_2(z), \dots, C'_k(z), \dots\}$$

$$Mínimo \rightarrow Agr\ (.) = \min\{C'_1(z), C'_2(z), \dots, C'_k(z), \dots\}$$

4. Métodos de Defusificación

Proceso de defusificación

- La operación de agregación de las salidas resulta en una región difusa de salida que toma en cuenta la contribución de todas las reglas que se han activado.
- Luego, los operadores de defusificación permiten obtener una <u>señal de salida puntual</u> (crisp) de la región difusa producida por la agregación de todas las reglas que estaban activadas.



4. Métodos de Defusificación

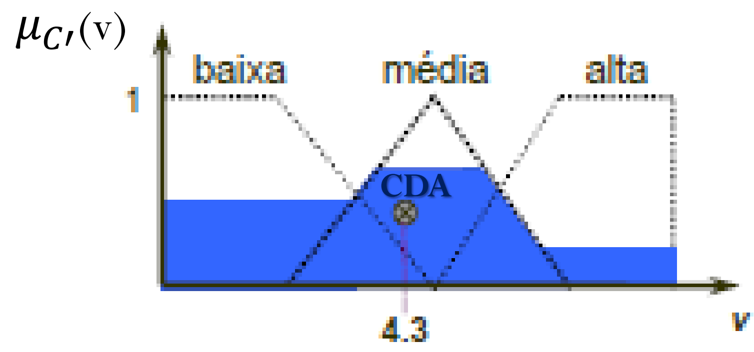
Principales métodos de defusificación

- **Centro de área (CDA)**

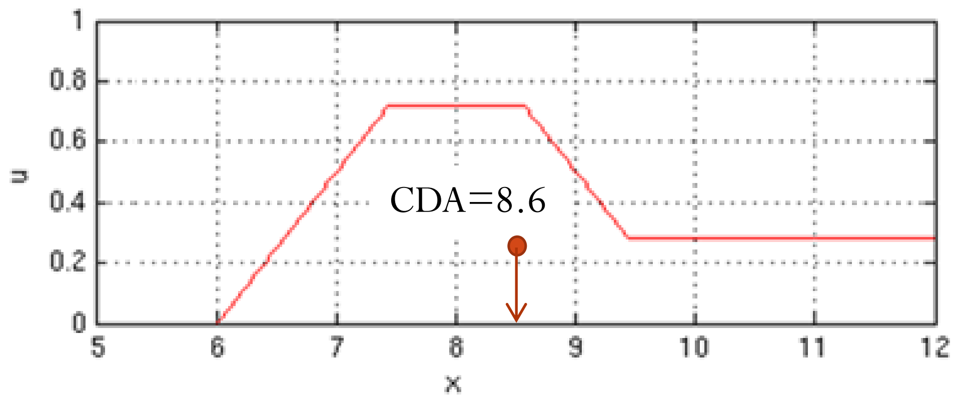
Este método consiste en hallar el centroide del área.

$$CDA = \frac{\sum_{k=1}^{N} \mu_{C'}(v_k).\, v_k}{\sum_{k=1}^{N} \mu_{C'}(v_k)}$$

donde N es el nro. de puntos de discretización del universo de discurso.



➢ **Ejemplo:**



$\mu_{C'}(v_k)$=[0.1, 0.5, 0.75, 0.75, 0.75, 0.5, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3]

v_k = [6 ,7, 7.5, 8, 8.5, 9, 9.5, 10, 11, 12]

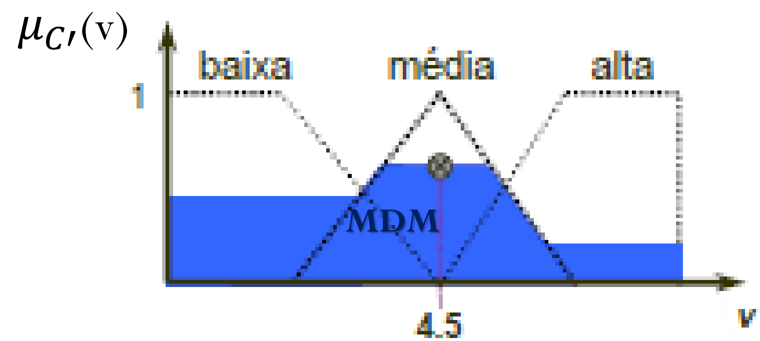
$$CDA = \frac{6*0.1+7*0.5+7.5*0.75+8*0.75+8.5*0.75+9*0.5+9.5*0.3+10*0.3+11*0.3+12*0.3}{0.1+0.5+0.75+0.75+0.75+0.5+0.3+0.3+0.3+0.3} = 8.6$$

4. Métodos de Defusificación

Principales métodos de defusificación

- **Media de los Máximos (MDM)**

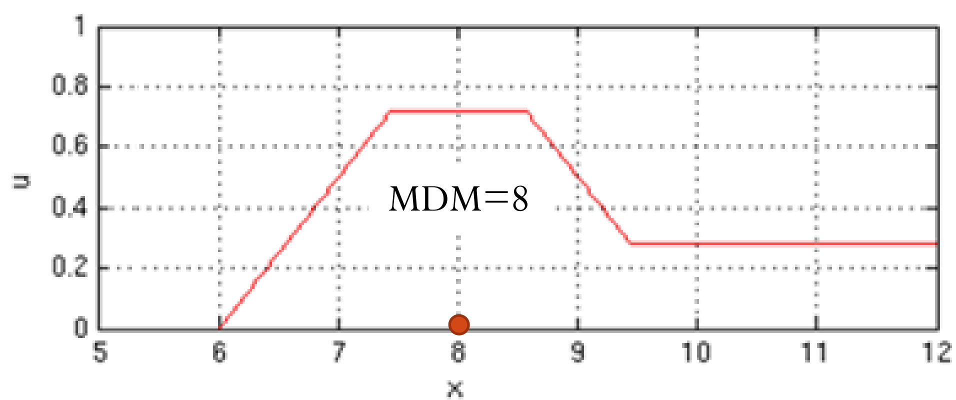
En este método se usan los valores máximos de las funciones de pertenencia, mientras que el área es ignorada.



$$\text{MDM} = \sum_{k=1}^{M} \frac{v_k}{M}$$

v_k son los valores que contienen grados de pertenencia máximos y M es la cantidad de esos elementos.

➢ **Ejemplo:**

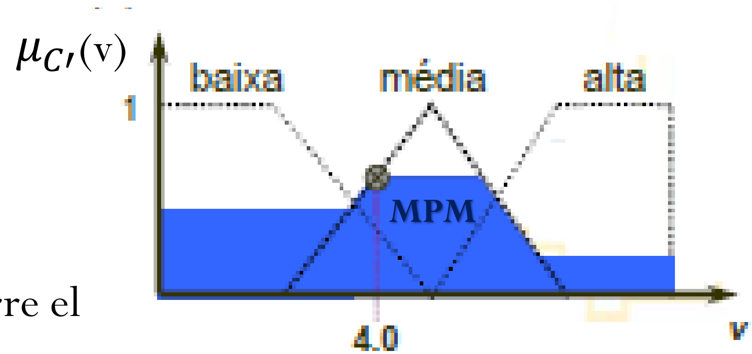


$$y = \frac{7.5+8+8.5}{3} = 8$$

Principales métodos de defusificación

- **Método Primer máximo (MPM)**

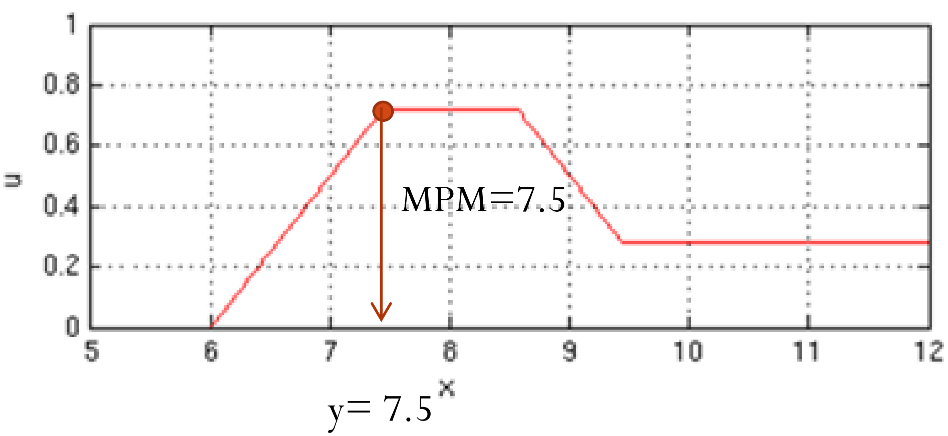
En este método la salida se obtiene tomando el valor que corresponde al primer máximo valor de la función de pertinencia del conjunto difuso de salida.



$$\text{MPM}= \min_{v}\{max\{\mu(x)\}\}$$

MPM es el valor en el universo de discurso donde ocurre el primer mayor máximo.

➢ **Ejemplo:**



Principales fases

En resumen, un proyecto de sistemas de inferencia difuso se constituye de 5 fases:

1. Fusificación de las entradas.
2. Aplicación de operadores difuso (conectivos).
3. Aplicación de implicación de la inferencia.
4. Agregación de las contribuciones de las reglas activadas.
5. Defusificación de la región difusa de salida.