

Energía de Simetría y Estrellas de Neutrones

David García Allo

Facultad de Física, Universidad de Santiago de Compostela

Resumen

En este trabajo vamos a estudiar la energía de simetría, su descripción física, observables experimentales y modelos teóricos. Nos interesa, en particular, las restricciones que aplican los experimentos en laboratorios y observaciones astrofísicas a los parámetros que tenemos que incluir en las ecuaciones de estado para describir la materia a elevadas densidades. Realizamos un cálculo para obtener las relaciones entre la masa y radio de las estrellas de neutrones resolviendo las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkov para distintas ecuaciones de estado que cubren un amplio rango de densidades, obteniendo así cotas sobre su masa máxima en función de la descripción de la materia utilizada.

Palabras clave: Estrellas de Neutrones, Energía de Simetría, Neutrones, Ecuaciones TOV, Ecuación de Estado.

1. Introducción

La energía de simetría describe la diferencia entre las energías de la materia nuclear simétrica y la materia rica en neutrones o protones, es decir, describe la relación de energía entre la materia nuclear con exceso de neutrones o protones que tiende a alcanzar la simetría de isospín con $N \sim Z$. Un buen entendimiento de la energía de simetría es fundamental para una descripción precisa de los sistemas que presentan estas asimetrías en la materia nuclear como sucede en las estrellas de neutrones.

Estas estrellas de neutrones se producen tras el colapso de estrellas ordinarias, de entre 10 y 30 masas solares, y se forma una remanente con un núcleo de hierro con presiones y energías suficientes para disociar núcleos atómicos. Los protones disociados interactúan con los electrones presentes en el núcleo produciendo neutrones, estos neutrones producen una presión de degeneración que, junto a reacciones nucleares de repulsión, son capaces de contrarrestar el colapso gravitacional de la estrella formando así estos cuerpos que conocemos como estrellas de neutrones. Si bien es cierto que hay una gran cantidad de neutrones en el interior de la estrella, también contienen protones, electrones, piones, hiperones y neutrinos electrónicos.

El estudio de las estrellas de neutrones es de gran interés para la física nuclear por las restricciones que se pueden imponer a la ecuación de estado estudiando la evolución de estos cuerpos y sus cotas de masa y radio máximos. Sin embargo, estudios teóricos parecen indicar que la dependencia de la densidad con la energía de simetría es la parte con más incertidumbre en la ecuación de estado asimétrica de isospín. Para una correcta caracterización de esta energía de simetría es necesario estudiar las propiedades y reacciones de núcleos ricos en neutrones, como pueden ser la piel de neutrones, movimientos resonantes, abundancias relativas de protones y neutrones emitidos y polarizabilidad dipolar.

2. Descripción y experimentos.

Describimos la energía de simetría en función de la densidad de materia $S(\rho)$ mediante la expansión de Taylor en torno a la densidad normal ρ_0 :

$$S(\rho) = S_0 + L \left(\frac{\rho - \rho_0}{3\rho_0} \right) + \frac{K_{sym}}{2} \left(\frac{\rho - \rho_0}{3\rho_0} \right)^2 + \frac{Q_{sym}}{6} \left(\frac{\rho - \rho_0}{3\rho_0} \right)^3 + \dots \quad (1)$$

Con $S_0 = S(\rho_0)$ la energía de simetría a densidad normal, $L = 3\rho_0 \frac{\partial S(\rho)}{\partial \rho} \big|_{\rho_0}$ la pendiente de la energía de simetría respecto a la densidad, K_{sym} el parámetro de curvatura de $S(\rho)$ y Q_{sym} el parámetro de asimetría de $S(\rho)$.

Sin embargo, esta expansión de Taylor no es capaz de reproducir correctamente la energía de simetría en todo el rango de densidades, con esto surgen varios modelos teóricos que proponen nuevos modelos de Ecuación de Estado (EOS) y con ello nuevas dependencias de la energía de simetría con la densidad. Combinando estos modelos teóricos con restricciones experimentales en la energía de simetría gracias a estudios de piel de neutrones, estudios astrofísicos de estrellas de neutrones, colisiones pesadas de iones y polarización dipolar que es lo que se muestra en la Figura 1.

2.1. Observables físicos

La energía de simetría cambia la distribución de nucleones en los núcleos que modifica sus características, como la energía y las frecuencias de las oscilaciones del núcleo, y podemos estudiar las implicaciones que esto tiene en los observables físicos. Los principales parámetros u observables experimentales que utilizan algunos modelos teóricos para describir la EOS y la energía de simetría son ρ_0 , E_0 , K_0 , S_0 , L , m_s^* y m_v^* .

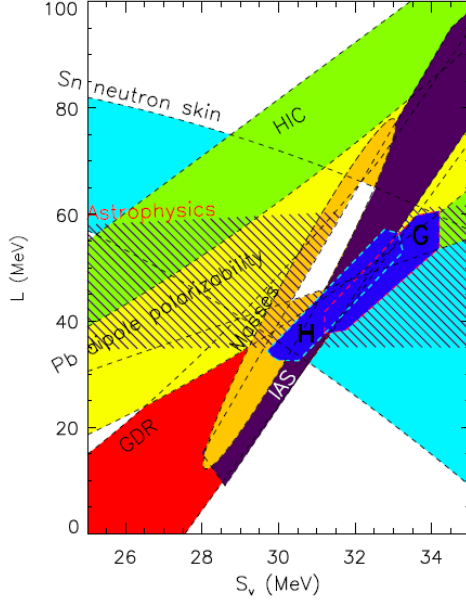


Figura 1: Representación gráfica de las restricciones en la derivada de la energía de simetría $L \propto \frac{\partial S(\rho)}{\partial \rho}$ con respecto a la densidad frente a la energía de simetría de volumen S_v , que es equivalente a la energía de simetría a segundo orden cuando tenemos la densidad de saturación nuclear usual. Observamos las diferentes restricciones experimentales y estudios en materia nuclear de Gandolfi et al. [7] (G.) y Hebeler et al. [8] (H.). Figura extraída de [1].

- $\rho_0 = 0,16 \text{ fm}^{-3}$ la densidad normal de la materia nuclear.
- $E_0 = E(\rho_0)$ la energía.
- $K_0 = 9\rho_0 \frac{\partial^2 \epsilon/\rho}{\partial \rho^2} \big|_{\rho_0}$ es la incompresibilidad de la materia nuclear simétrica.
- $L = 3\rho_0 \frac{\partial S(\rho)}{\partial \rho} \big|_{\rho_0}$ la pendiente de la energía de simetría respecto a la densidad que ya hemos mencionado.
- $m_s^* = m(1 + \frac{2m}{\hbar^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{E}{A}) \big|_{\rho_0}$ es la masa efectiva isoescalar.
- $m_v^* = \frac{1}{1+\kappa}$ masa efectiva de isovector con κ el factor de la regla de la suma de Thomas-Reich-Kuhn.

También suelen utilizarse dos coeficientes adicionales (g_{sur} y $g_{sur,iso}$) relacionados con los gradientes de densidad. Estos parámetros pueden estimarse a partir de los datos de difusión de isospín, la piel de neutrones del ^{208}Pb , la masa máxima de las estrellas de neutrones y de la deformación de estrellas de neutrones binarias.

2.2. Modelos teóricos

Existen varios estudios teóricos que demuestran que los observables anteriores están todos relacionados a la energía de simetría, por ejemplo, tenemos la aproximación Skyrme-Hartree-Fock de la dependencia de la energía de simetría

con la densidad que observamos en la Ec. 1:

$$S(\rho) = \frac{1}{3} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2}{2} \rho \right)^{2/3} + A_{sym} \frac{\rho}{\rho_0} + B_{sym} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\eta + C_{sym}(m_s^*, m_v^*) \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{5/3} \quad (2)$$

El primer término de la ecuación 2 es la contribución cinética, el segundo y tercer término dan cuenta de las interacciones a dos y tres cuerpos y el cuarto término la dependencia de la interacción con el momento mediante su relación con $m_s^* m_v^*$.

Podemos simular colisiones de iones pesados mediante modelos de transporte utilizando los parámetros comentados en el apartado anterior como entradas, y variar sus valores para ver como afectan a la física de las reacciones. Uno de estos modelos es el ImQMD-Sky ('Improved Quantum Molecular Dynamic - Skyrme Model') que incorpora las interacciones efectivas de Skyrme y permite obtener la densidad de energía potencial nuclear. Modificando los parámetros físicos relacionados con la energía de simetría podemos observar los valores que permiten a la simulación obtener los resultados más similares a los datos experimentales de la reacción estudiada. Por ejemplo, en [9] podemos ver este procedimiento para simular reacciones entre ^{124}Sn y ^{112}Sn y estudiar los parámetros y las variaciones de estos que reproducen las mediciones experimentales.

Podemos utilizar también métodos variacionales de densidad donde se aplican funcionales de densidad (como el de Skyrme) que se utilizan para estudiar estados fundamentales de energía, distribuciones de densidad de protones y neutrones, y por tanto, el grosor de la piel de neutrones en los núcleos. Podemos expresar la energía de ligadura de un núcleo como la integral del funcional densidad de energía:

$$E = \int \mathcal{H} dr = \int \mathcal{H}_k + \mathcal{H}_{sky} \quad (3)$$

Aplicando la descripción de cada modelo para las energías cinéticas podemos llegar a determinar los radios de distribuciones de densidad de protones y neutrones en el núcleo. Por ejemplo, utilizando el método RDV ('Restricted Density Variational method') y considerando la distribución de densidad como una función de Fermi simétrica esférica, llegamos a la expresión:

$$\rho_i = \rho_{0i} \left[1 + \exp \left(\frac{r - R_{0i}}{a_i} \right) \right], \quad i = n, p \quad (4)$$

Con ρ_i las densidades en el núcleo, ρ_{0i} las densidades normales en la materia nuclear, R_{0i} los radios de las distribuciones de densidad y a_i la difusividad para el nucleón correspondiente. Minimizando entonces la energía total del sistema (método variacional) podemos obtener finalmente el grosor de la piel de neutrones.

La estructura de las estrellas de neutrones se puede obtener resolviendo las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkov

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{GM\epsilon (1 + P/\epsilon)(1 + 4\pi r^3 P/M)}{r^2 (1 - 2GM/r)}, \quad (5)$$

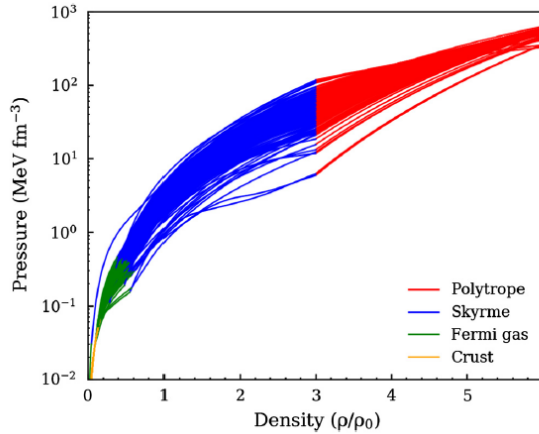


Figura 2: Ecuaciones de estado que podemos utilizar en los rangos de densidad de la estrella de neutrones. Figura obtenida de Tsang et al. [11].

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\epsilon r^2, \quad (6)$$

con G la constante de gravitación, $M = M(r)$, $P = P(r)$ y $\epsilon = \epsilon(r)$ la masa, presión y densidad de energía dentro del radio r . Además podemos agregar la ecuación de la deformación de marea debido al tirón gravitacional si está en un sistema binario.

$$\Lambda = \frac{2k_2}{3} \left(\frac{R}{GM} \right)^5, \quad (7)$$

con k_2 el segundo número de Love.

La densidad de energía de la materia nuclear la podemos obtener en función de los parámetros de Skyrme y los observables comentados anteriormente. Para la densidad total de la energía también tenemos que tener en cuenta la densidad de energía para electrones y muones que podemos calcular con la ecuación

$$\epsilon_{e,\mu} = \int_0^{\nu_{e,\mu}} \frac{p^2}{\pi^2} \sqrt{p^2 + m_{e,\mu}^2} dp, \quad (8)$$

con $\nu_{e,\mu}$ el momento de Fermi de los leptones. Una vez conocemos la densidad de energía con los valores de los parámetros, podemos obtener la presión:

$$P = \sum_i \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_i} \rho_i - \epsilon \quad (9)$$

La ecuación de estado de la materia en las estrellas de neutrones, es decir, con rangos de densidad entre $0,5\rho_0$ y $3\rho_0$ tiene que cumplir dos condiciones fundamentales:

- Condición de estabilidad β , $\mu_n + \mu_p = \mu_e = \mu_\mu$ con $\mu_i = \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_i}$ los potenciales químicos de neutrones, protones, electrones y muones.
- Condición de neutralidad de carga local, $\rho_e + \rho_\mu = \rho_p$.

Podemos utilizar distintas ecuaciones de estado que cumplan estas condiciones y describan el comportamiento de la materia nuclear en los rangos de densidad comentados. Podemos observar en la Figura 2 donde se utilizan diferentes

ecuaciones de estado para describir la presión en cada rango de densidad de la estrella, desde las capas más exteriores hasta las zonas de mayor densidad del interior de la estrella.

En la Figura 3 podemos ver más de una veintena de experimentos que obtuvieron un valor de $L(\rho_0)$. Estos experimentos conforman un rango amplio de técnicas y mediciones; en observaciones astrofísicas tenemos, principalmente, valores obtenidos a partir de la relación radio-masa de estrellas de neutrones y del análisis de la inestabilidad de procesos- r ; en experimentos en laboratorios el rango es aún más amplio, tenemos mediciones de la piel de neutrones, masas nucleares, energías de decaimiento α y β , difusión de isospín, potenciales ópticos, secciones eficaces nucleón-núcleo y energías de excitación de estados análogos isobáricos. Entre todos estos resultados y teniendo en cuenta las incertidumbres podemos sacar el valor de confianza de $L = 58,9$ MeV que vemos en la imagen.

3. Cálculo

En esta sección vamos a resolver nosotros las ecuaciones de TOV utilizando dos ecuaciones de estado diferentes, una para el caso de bajas densidades que describa correctamente las capas más exteriores de la estrella de neutrones, y otra para situaciones de densidades elevadas para describir las capas más internas de la estrella. Creamos entonces nuestro script de python '*TOV_Solutions.py*' donde se realizan todos los cálculos, hemos utilizado [11] como referencia.

Para densidades inferiores a $\sim 0,01 \text{ fm}^{-3}$ utilizamos la ecuación de estado BPS. Para altas densidades vamos a utilizar dos ecuaciones de estado diferentes, ambas tienen en cuenta la presencia de hiperones en el interior de la estrella. La principal diferencia es que una tiene en cuenta materia nuclear simétrica (SNM) [12] y la otra materia nuclear asimétrica (ANM) [13].

Primero, combinamos los valores de ambas ecuaciones de estado para obtener una ecuación de estado en el rango completo de densidades, para así luego poder obtener la presión y densidad de energía a partir de los valores de densidad. Después utilizamos el método de Runge Kutta de orden 4 para integrar las ecuaciones a partir de los valores centrales. Sabemos que $m(r=0) = 0$ y vamos variando la densidad en $r=0$. Sin embargo, no podemos tomar el valor $r=0$ ya que en las ecuaciones tenemos factores del tipo r^{-2} que nos introducen divergencias que nuestro método no puede resolver, entonces tenemos que sortear este problema tomando valores de radio muy cercanos a 0 y calculando las pequeñas desviaciones que esto produce en la masa y la presión antes de comenzar el cálculo. Todo esto está correctamente indicado en la definición de las funciones utilizadas en el script. Realizamos todo el cálculo tomando valores de densidad central comprendidos entre $0,12$ y $1,3 \text{ fm}^{-3}$, es decir, presiones centrales incluso superiores a la densidad de la materia nuclear $n_0 = 0,16 \text{ fm}^{-3}$.

Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 4 de relación entre radio y masa de la estrella de neutrones, donde

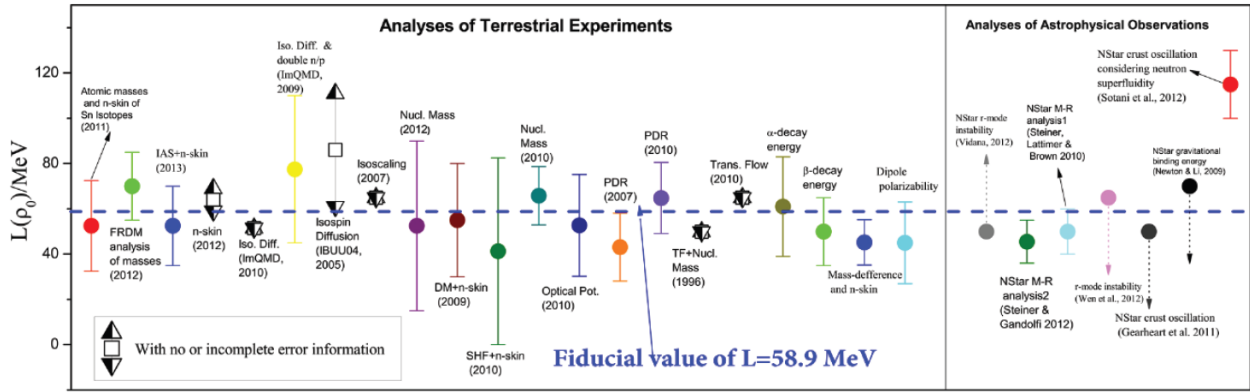


Figura 3: Valores centrales de $L(\rho_0)$ obtenidos en distintos experimentos en laboratorio y observaciones astrofísicas. Figura extraída de Ref. [3].

el punto rojo es la situación de mayor masa y su correspondiente radio.

$$\text{SNM: } M = 1,7974 M_{\odot}; R = 11,7990 \text{ km} \quad (10)$$

$$\text{ANM: } M = 1,5538 M_{\odot}; R = 10,8680 \text{ km} \quad (11)$$

Podemos ver que al introducir materia nuclear asimétrica conseguimos alcanzar estrellas en equilibrio con masas máximas superiores. Confirmamos que el cálculo está bien realizado comparando nuestras dependencias con los resultados de otros experimentos publicados y viendo dependencias similares masa-radio. En la Figura 5 podemos observar la dependencia de la masa de la estrella con el radio utilizando diferentes ecuaciones de estado.

Como vemos, diferentes ecuaciones de estado implican diferencias en esta relación y en el valor máximo de la masa con su correspondiente radio. De esta forma puede obtenerse información de la ecuación de estado, y por tanto de la energía de simetría, mediante el estudio de estrellas de neutrones y sus mediciones de masas y radios.

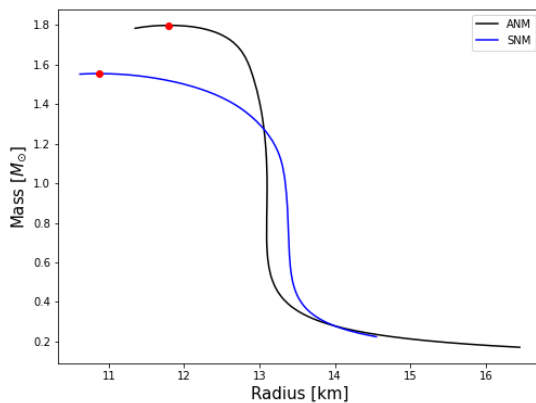


Figura 4: Relación masa radio de las estrellas de neutrones variando la densidad en el centro para dos ecuaciones de estado diferentes, con sus correspondientes situaciones de masa máxima (puntos rojos).

4. Conclusiones

Hemos realizado una descripción de la energía de simetría, los principales observables físicos que nos permiten caracterizarla y estudiar y su acoplamiento con diferentes modelos teóricos. Hemos hecho también un breve repaso de los experimentos que han logrado proporcionar un valor de la dependencia de la energía de simetría con la densidad, que es uno de los parámetros más importantes de la ecuación de estado y que aun tienen una incertidumbre considerable.

Por último, consideramos distintas ecuaciones de estado para bajas densidades y altas densidades y resolvemos las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkov, mediante un script en python, que nos proporciona la relación entre masa y radio de la estrella, así como su cota de masa máxima. Podemos observar entonces la dependencia de estos valores con las distintas ecuaciones de estado, en particular, como influye la energía de simetría en estas relaciones. Llegamos a la conclusión de que utilizando ecuaciones de estado para

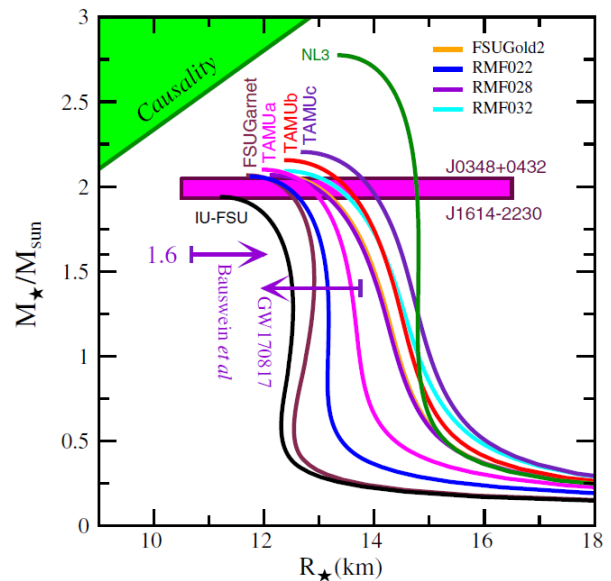


Figura 5: Relación masa radio de las estrellas de para diferentes ecuaciones de estado. Figura obtenida de [4].

materia nuclear asimétrica, la cota de masa máxima de la estrella aumenta considerablemente. Esto pone de manifiesto el importante papel de la energía de simetría en las estrellas de neutrones para describir correctamente su relación masa-radio dentro de las predicciones de nuestros modelos.

Mediante el estudio de estrellas de neutrones y energías de simetría podemos descartar o dar confianza a ecuaciones de estado que describen el comportamiento de la materia a densidades muy elevadas, superiores a la densidad de la materia nuclear, que es un conocimiento imprescindible para la descripción física del universo.

Referencias

- [1] Lattimer, J. M. (2014). Symmetry energy in nuclei and neutron stars. *Nuclear Physics A* (Vol. 928, pp. 276-295).
- [2] Zhang, Y., Liu, M., Xia, C.-J., Li, Z., & Biswal, S. K. (2020). Constraints on the symmetry energy and its associated parameters from nuclei to neutron stars. *Physical Review C* (Vol. 101, Issue 3).
- [3] Li, B.-A. (2017). Nuclear Symmetry Energy Extracted from Laboratory Experiments. *Nuclear Physics News* (Vol. 27, Issue 4, pp. 7-11).
- [4] Fattoyev, F. J., Piekarewicz, J., & Horowitz, C. J. (2018). Neutron Skins and Neutron Stars in the Multimessenger Era. *Physical Review Letters* (Vol. 120, Issue 17).
- [5] Li, B., Chen, L., & Ko, C. (2008). Recent progress and new challenges in isospin physics with heavy-ion reactions. *Physics Reports* (Vol. 464, Issues 4–6, pp. 113–281).
- [6] Alex Brown, B. (2000). Neutron Radii in Nuclei and the Neutron Equation of State. *Physical Review Letters* (Vol. 85, Issue 25, pp. 5296–5299).
- [7] Gandolfi, S., Carlson, J., & Reddy, S. (2012). Maximum mass and radius of neutron stars, and the nuclear symmetry energy. *Physical Review C* (Vol. 85, Issue 3).
- [8] Hebeler, K., Lattimer, J. M., Pethick, C. J., & Schwenk, A. (2010). Constraints on Neutron Star Radii Based on Chiral Effective Field Theory Interactions. *Physical Review Letters* (Vol. 105, Issue 16).
- [9] Zhang, Y., Tsang, M. B., & Li, Z. (2015). Covariance analysis of symmetry energy observables from heavy ion collision. *Physics Letters B* (Vol. 749, pp. 262-266).
- [10] Negele, J. W., & Vautherin, D. (1973). Neutron star matter at sub-nuclear densities. *Nuclear Physics A* (Vol. 207, Issue 2, pp. 298-320).
- [11] D. L. Whittenbury. [PYTOV: Python Tolman-Oppenheimer-Volkoff equation solver](#)
- [12] Glendenning, N. K. (1997). *Compact Stars*.
- [13] Whittenbury, D. L., Carroll, J. D., Thomas, A. W., Tsushima, K., & Stone, J. R. (2014). Quark-meson coupling model, nuclear matter constraints, and neutron star properties. *Physical Review C* (Vol. 89, Issue 6).