MPEI

Geração de números aleatórios

Motivação (exemplos)

- Gerar strings "aleatórias" em que:
  - comprimento assume valores entre 1 e 10 e tendo cada comprimento a mesma probabilidade
  - o caracter em cada posição é uma das letras minúsculas ou maiúsculas do alfabeto português e tendo todas a mesma probabilidade

- Gerar strings em que quer as letras quer o comprimento assumem distribuições mais próximas da realidade
  - Comprimento seguindo uma distribuição Normal com média e variância estimada de um conjunto de textos
  - As letras seguem a distribuição para o Português
    - Que vimos numa aula anterior

Geradores

- Para situações como as do exemplo, necessitamos de resolver o problema de gerar, ou simular, vectores de números aleatórios tendo uma determinada distribuição

- Nos primeiros tempos da simulação utilizavam-se métodos mecânicos para obter valores aleatórios: Moedas, dados, roletas, cartas
- Mais tarde utilizaram-se propriedades de dispositivos e elementos
  - Exemplos (atuais):
    - www.fourmilab.ch/hotbits (decaimento do Césio-137)
    - www.random.org/integers (ruído atmsoférico)

- Na área da Informática e outras, estes métodos foram substituídos por algoritmos que se podem implementar facilmente em computador , os Geradores de números pseudo-aleatórios
  - Capazes de criar sequências numéricas com propriedades próximas de sequências aleatórias
  - São algoritmos determinísticos, pelo que é usual designar os números gerados por “pseudo-aleatórios”

Abordagens principais

- Gerar directamente

- Gerar número “aleatório” de uma distribuição uniforme (contínua) e transformar …
  - Neste caso, torna-se necessário ser capaz de gerar variáveis aleatórias com a distribuição uniforme
    - Em geral distribuída entre 0 e 1

  - É a abordagem comum

Geração de variáveis aleatórias com distribuição uniforme entre 0 e 1

Algoritmos congruenciais

- Os métodos mais comuns para gerar sequência pseudo-aleatórias usam os chamados *linear congruential generators - LCG* (algoritmo congruencial linear)

- Este geradores geram uma sequência de números através da fórmula recursiva

$$X_{i+1} = (aX_i + c) \quad mod\, m$$

- Com X_0 sendo a "semente" (seed) e *a*, *c*, *m* (todos inteiros positivos) designados de multiplicador, incremento e módulo, respetivamente

- Quando $c = 0$ o algoritmo designa-se por congruencial multiplicativo

Algoritmos congruenciais

- Como X_i pode apenas assumir os valores {0, 1, …, m-1}, os números

$$U_i = \frac{X_i}{m}$$

são designados por número pseudo-aleatórios e constituem uma aproximação a uma sequência de variáveis aleatórias uniformemente distribuídas

Processo de cálculo em detalhe

1. Escolher os valores de *a, c* e *m*
2. Escolher a semente X_0 (tal que 1<= X_0 <=*m*)

3. Calcular o próximo número aleatório usando a expressão $X_1 = (aX_0 + c)\, mod\, m$
4. Substituir X_0 por X_1 e voltar ao ponto anterior

Exemplo

- Fazendo *a*=9, *c*=1, *m*=17 e $X_0 = 7$

n	x_n	y=9x_n+1	y mod 17	x_{n+1}/17
0	X_0=7	9*7+1=64	13	13/17 = 0.7647
1	X_1=13	118	16	16/17 = 0.9412
2	X_2=16	145	9	0.5294
3	X_3=9	82	14	0.8235
4	X_4=14	127	8	0.4706

*números **pseudo-aleatórios** inteiros entre **0 e 16** (=17-1)*

números pseudo-aleatórios inteiros entre 0 e 1

Como escolher os parâmetros ?

- A sequência repete-se no máximo após *m* números
- Será, portanto, periódica com um período que não excede *m*

- Mas pode ser muito pior
  - Exemplo: *a*=*c*= X_0=3 e *m*=5 gera a sequência {3,2,4,0,3 …} com período 4

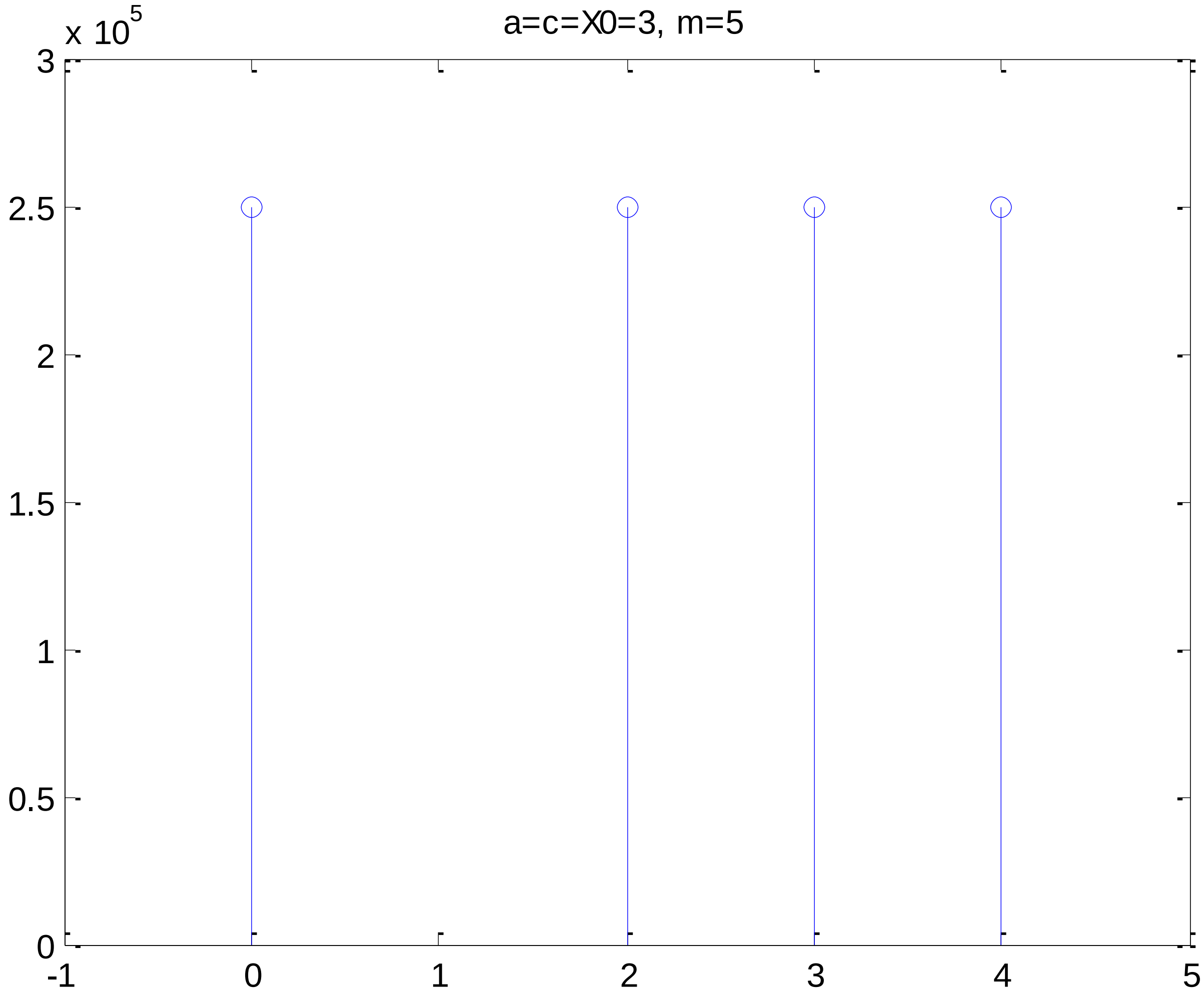
- Apenas algumas combinações de parâmetros produzem resultados satisfatórios
  - Exemplo: Usar $m = 2^{31} - 1$ e $a = 7^5$ em computadores de 32 bits

Demo Matlab

- Exemplo: a=c= X_0=3 e m=5   gera a sequência {3,2,4,0,3 ...}

```
function U=lcg(X0,a,c,m, N)
U=zeros(1,N);
U(1)=X0;
for i=2:N
   U(i) =   rem(a*U(i-1)+c, m);
end
```

Resultados - histograma



Outros algoritmos congruenciais

- Uma generalização que se pode fazer do algoritmo congruencial multiplicativo é basear o cálculo do novo valor numa combinação linear das *k* amostras anteriores
- Um exemplo deste tipo baseia-se na sequência de **Fibonacci**

$$x_i = x_{i-1} + x_{i-2},\ x_1 = 1, x_0 = 0$$

- Como a utilização directa não dá bons resultados, usa-se

$$x_i = (x_{i-j} + x_{i-k}) \bmod m$$

- Para j=31, k=63, m=2^{64} temos período de 2^{124}

Outros algoritmos congruenciais

- Outra estratégia: combinar os resultados obtidos com dois geradores congruenciais que, com a escolha conveniente dos parâmetros, vai permitir maiores períodos
  - Conhecida por Combined Multiple Recursive Generator
- Na implementação em Matlab consiste em:

$$x_{1,n} = (14033580x_{1,n-2} - 810728x_{1,n-3}) \bmod m_1$$
$$x_{2,n} = (527612x_{2,n-1} - 1370589x_{2,n-3}) \bmod m_2$$

- Sendo a saída

$$z_n \equiv (x_{1,n} - x_{2,n}) \bmod m_1$$
$$u_n = \begin{cases} z_n/(m_1+1) & , z_n < 0 \\ m_1/(m_1+1) & , z_n = 0 \end{cases}$$

Outros geradores

- **FSR** – Feedback Shift Register
  - Relacionados com os geradores recursivos anteriores
  - A formula recursiva é aplicada a bits
    - Conjuntos de *k* bits representam inteiros
  - A formula de recursão é realizada recorrendo a um Shift Register
    - Vetor de bits que pode ser deslocado para a esquerda um bit de cada vez
    - Feita num computador recorrendo aos registos internos e programação em linguagem máquina
- Mersenne Twister
  - Desenvolvido para resolver problemas de uniformidade do FSR
  - Apresenta um período extraordinário de $2^{19937} - 1$
  - Informação em:
    - http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/MT/emt.html

Outros geradores

- Para além destes geradores, outras classes foram propostas por forma a obter períodos mais longos e melhor aproximação à distribuição uniforme

- A biblioteca NAG, por exemplo, inclui vários:

Pseudorandom Numbers . . . .

2.1.1 NAG Basic Generator . . . .
2.1.2 Wichmann–Hill I Generator . . . .
2.1.3 Wichmann–Hill II Generator . . . .
2.1.4 Mersenne Twister Generator . . . .
2.1.5 ACORN Generator . . . .
2.1.6 L'Ecuyer MRG32k3a Combined Recursive Generator . .

Outros geradores - Exemplo

- Wichman-Hill I
- Usa uma combinação de 4 LCGs

This series of Wichmann–Hill base generators (see Maclaren (1989)) use a combination of four linear congruential generators and has the form:

$$\begin{aligned} w_i &= a_1 w_{i-1} \bmod m_1 \\ x_i &= a_2 x_{i-1} \bmod m_2 \\ y_i &= a_3 y_{i-1} \bmod m_3 \\ z_i &= a_4 z_{i-1} \bmod m_4 \\ u_i &= \left(\frac{w_i}{m_1} + \frac{x_i}{m_2} + \frac{y_i}{m_3} + \frac{z_i}{m_4}\right) \bmod 1, \end{aligned} \tag{1}$$

where the u_i, for $i = 1, 2, \ldots$, form the required sequence. The NAG Library implementation includes 273 sets of parameters, a_j, m_j, for $j = 1, 2, 3, 4$, to choose from.

Na prática…

- A maioria das linguagens de computador disponibilizam geradores de números pseudo-aleatórios
  - Em geral o utilizador apenas fornece o valor da “semente”

- Java
    - Classe Random
    - Random rnd = new Random()
    - rnd.nextDouble()

Matlab

- A geração de números (pseudo-)aleatórios no Matlab baseia-se na geração de números uniformemente distribuídos no intervalo (0, 1) por um algoritmo similares aos anteriormente descritos, usando o comando rand()

- Por defeito rand() utiliza o algoritmo Mersenne twister
  - Mas permite que se altere, usando rng()

rng

- s=rng
- s =

struct with fields:

Type: 'twister'   %% algoritmo por defeito
Seed: 0
State: [625×1 uint32]

rng

- rng(type)

`Type` define o tipo de algoritmo usado e pode ser:

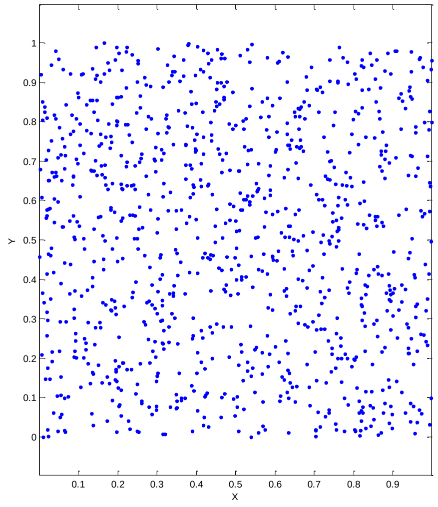
nome	descrição	state
'twister'	Mersenne Twister	625x1 uint32
'combRecursive'	Alg. multiplo recursivo	12x1 uint32
'multFibonacci'	Alg. Fibonacci multplicativo com atraso	130x1 uint64
'v5uniform'	Gerador uniforme do MATLAB® 5.0	35x1 double
'v5normal'	Gerador normal do MATLAB 5.0	2x1 double
'v4'	Gerador do MATLAB 4.0	1 uint=seed

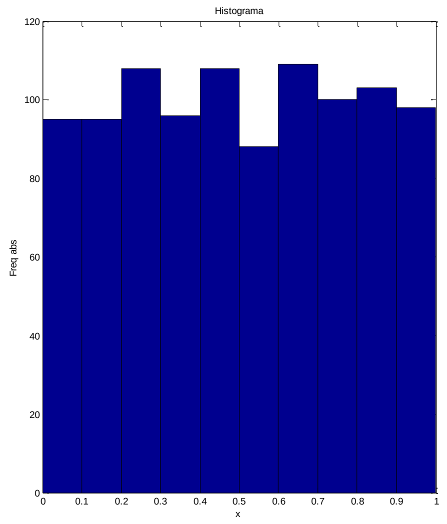
rand

```
>> rand                     % generate a uniform random number
    0.0196
>> rand                     % generate another uniform random number
    0.823
>> rand(1,4)                % generate a uniform random vector
    0.5252  0.2026  0.6721  0.8381
rand('state',1234)          % set the seed to 1234
>> rand                     % generate a uniform random number
    0.6104
rand('state',1234)          % reset the seed to 1234
>> rand
    0.6104                  % the previous outcome is repeated
```

Demonstração do uso de rand()

```
N=1000
X = rand(1, N);    Y= rand(1,N);
subplot(121), plot(X,Y,'.')
axis equal
xlabel('X')
ylabel('Y')

subplot(122), hist(X)
title('Histograma');
xlabel(‘X')
ylabel('Freq abs');
```





Transformações

Transformações simples

- Aplicando a de **transformação linear** Y=a U + b é simples obter variáveis com distribuição uniforme num intervalo

  ex: Y=2 U + 1 permite intervalo [1, 3]

- A aplicação da transformação linear seguida da conversão para inteiros permite obter, por exemplo, uma simulação de lançamentos de um dado (uma gama de números inteiros)
  - Em versões mais recentes do Matlab existe mesmo a função randi()

Exemplos em Matlab

```
% geração de n resultados do lançamento de uma moeda
function Y=moeda(n)
if nargin ==0
        n=1;
end
z=round(rand(1,n));

Y(1:n)='C';           %  CARA
Y(find(z==0))='R';   %  COROA


%  usando
moeda(10)
```

Exemplos em Matlab

```
% n resultados do lançamento de um dado
function Y=dado(n)

if nargin==0
   n=1;
end

Y=floor(rand(1,n)*6)+1;        %%  ou randi(6,1,n)
```

dado → 5

dado(10) → 3 1 4 5 6 3 4 3 2 4

Métodos Genéricos para gerar variáveis aleatórias com distribuições não uniformes

Métodos

- Números aleatórios com outras distribuições podem ser obtidos das sequências com distribuição uniforme através de:
  - Métodos de transformação
  - Métodos de rejeição
  - Procura em tabelas

Método da Transformação (Inversa)

- Para uma v.a. contínua, se a função de distribuição acumulada é $F(x)$ então para uma variável U com distribuição uniforme em (0,1)

  $\mathrm{X} = F^{-1}(U)$ tem por função distrib. acum. $F(x)$

- Este método é apenas eficiente num conjunto pequeno de casos (ex: distribuição exponencial)
- Também não é possível ou é difícil determinar a inversa de muitas distribuições

Demonstração

- $X = F^{-1}(U)$ tem por função de distribuição acumulada $F(x)$??

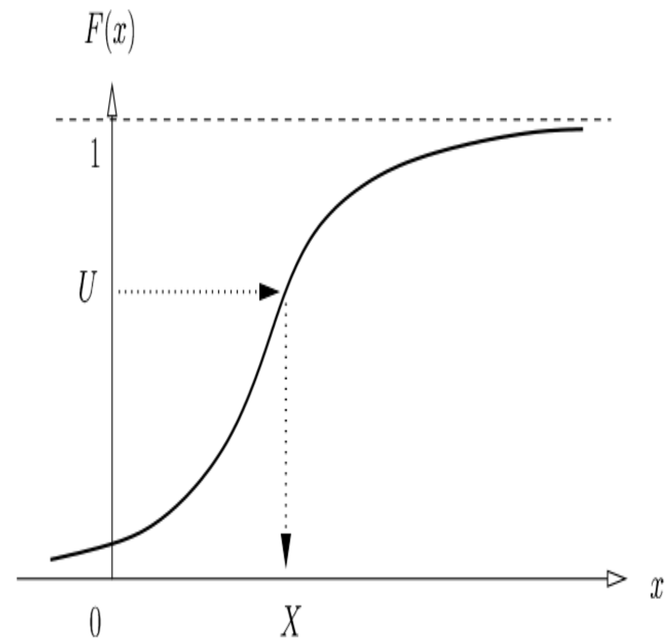
- Por definição $F(x) = P(X \leq x)$

- $P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x)$
- $= P(U \leq F(x))$
- $= F(x)$ porque $P(U \leq a) = a$

Algoritmo

1. Gerar U com distribuição U(0,1)

2. Devolver $\mathrm{X} = F^{-1}(U)$



Exemplo de aplicação – Simulação de uma variável aleatória **exponencial**

- Sendo $F(x) = 1 - e^{-x}$ (exponencial de média 1)
- $F^{-1}(u)$ será o valor de x que verifique

$$1 - e^{-x} = u$$

- ou seja $x = -\log(1-u)$

- Portanto:

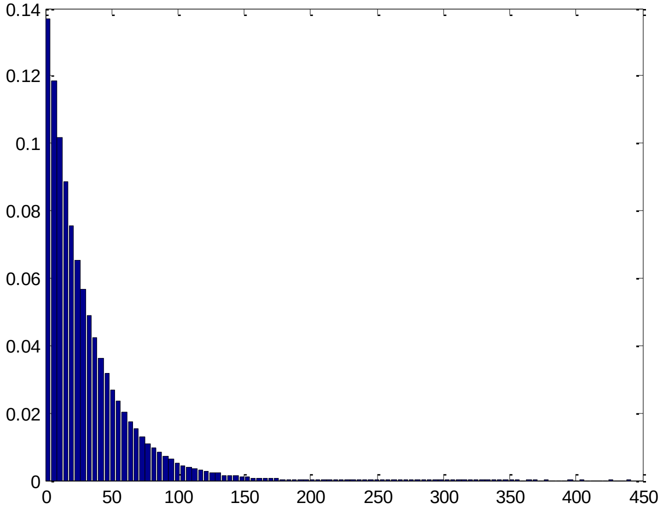
$$F^{-1}(u) = -\log(1-u)$$

É exponencialmente distribuída com média 1

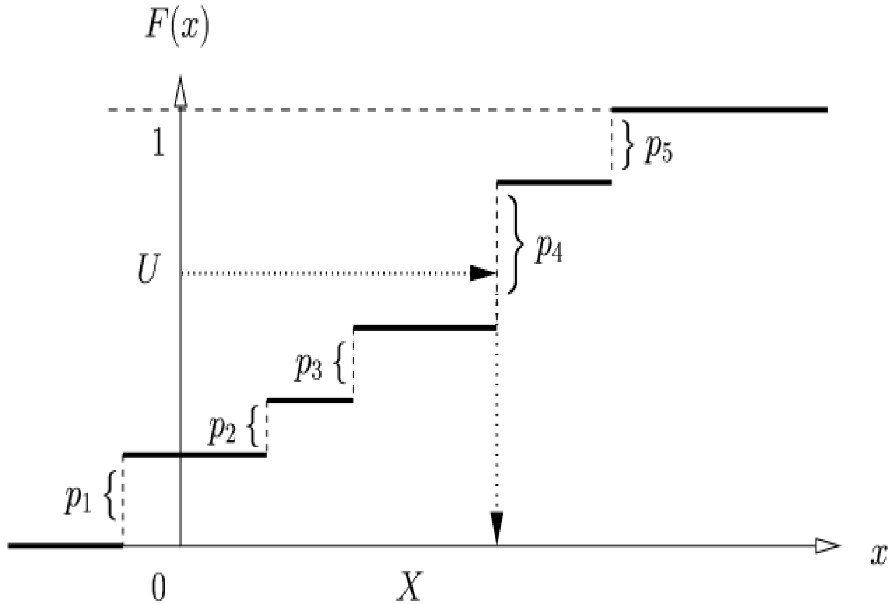
- 1-U é também uniforme em (0,1)
- Como $c\,X$ é exponencial com média c para obter uma exponencial de média c basta usar $-c\log(U)$

Exemplo em Matlab

```
function X=exponencial(m,N)
U=rand(1,N);
X=-m*log(U)

%
N=1e6
X=exponencial(10,N);
[n,xout] = hist(X,100);
bar(xout,n/N)
```



Algoritmo para caso discreto



1. Gerar U com distribuição U(0,1) exemplo U=0,7
2. Ir aumentando x e determinar o primeiro para o qual $F(x) \geq U$
3. Devolver esse valor de x

A procura pode ser tornada mais rápida usando técnicas de procura eficientes

Método de procura numa tabela

- Se a função cumulativa for guardada numa tabela, então este algoritmo pode ser visto como uma simples procura numa tabela de

$$i \text{ tal que } F_{i-1} < u \leq F_i$$

- Ou seja:

$$X = \begin{cases} x_1, & \text{if } U < P_1 \\ x_2, & \text{if } P_1 < U < P_1 + P_2 \\ \vdots & \\ x_j, & \text{if } \sum_{1}^{j-1} P_i < U < \sum_{i}^{j} P_i \\ \vdots & \end{cases}$$

Exemplo de aplicação

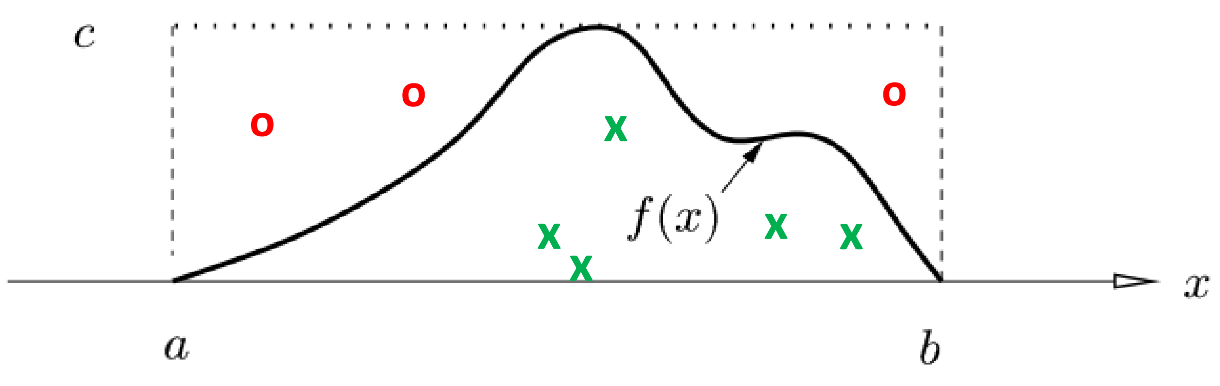
- Gerar pseudo-palavras com as letras assumindo a probabilidade das letras em Português
  - Que já vimos anteriormente

Em Matlab

```
letters='abcde';
% p=[0.0828    0.0084    0.0201    0.0342    0.0792];  % PT real
p=[0.800    0.01    0.01    0.01    0.17];                    % fake
p=p/sum(p);  % só existem para nós 5 letras

X= zeros(1,60);
for j=1:60
            U=rand();
            i = 1 + sum( U > cumsum(p) );
            % out sera valor entre 1 e 5
           %  de acordo com as probabilidades p
            X(j)= letters(i);
end
char(X)
```

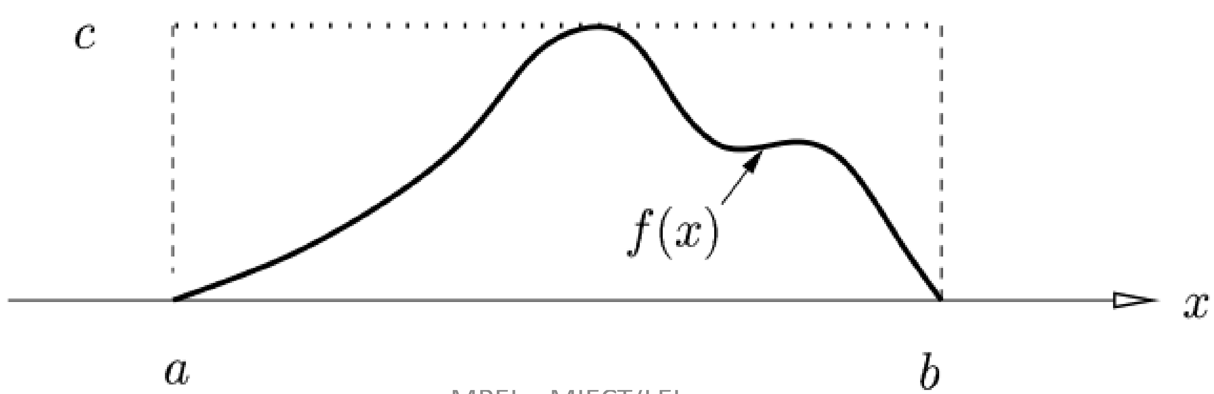
Métodos baseados em Rejeição

- Na sua forma mais simples:
  - define-se uma zona que contém todos os valores da função densidade de probabilidade no intervalo em que está definida
  - Geram-se números com distribuição uniforme nessa zona e rejeitam-se os que ficam acima de f(X)



Algoritmo

1. Gerar X com distribuição $U(a, b)$
2. Gerar Y com distribuição $U(0, c)$ independente de X
3. Se $Y \leq f(X)$ devolver $Z = X$; Caso contrário ir para o passo 1

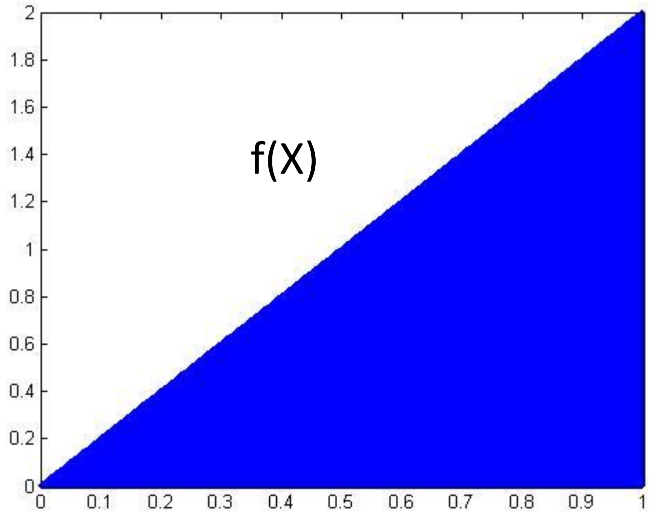


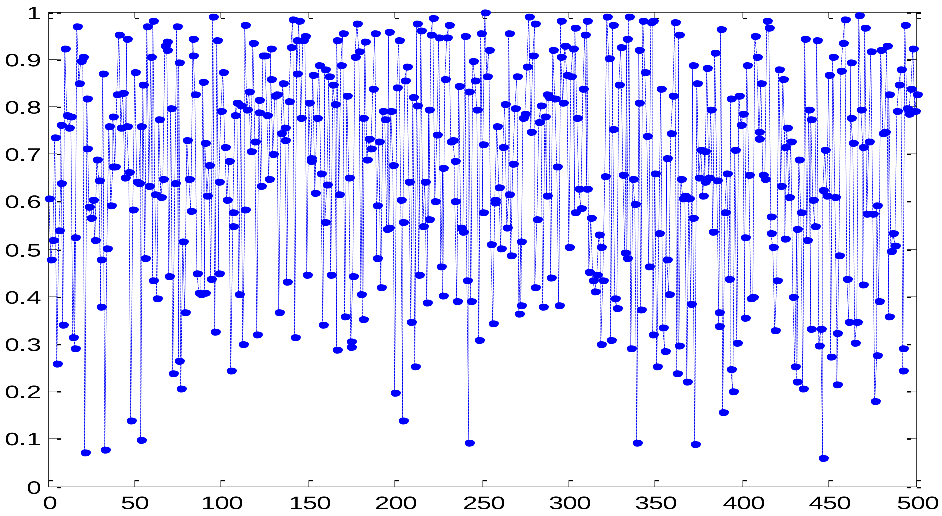
Exemplo

- $f(x) = \begin{cases} 2\,x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & outros\ valores \end{cases}$

- Temos de usar c=2 , a=0 e b=1

```
%
N=1e6;
X=rand(1,N);
Y=rand(1,N)*2;

Z=X(Y<=2*X);

% grafico
Y2= Y(Y<=2*X);
plot(Z,Y2,'.')
```

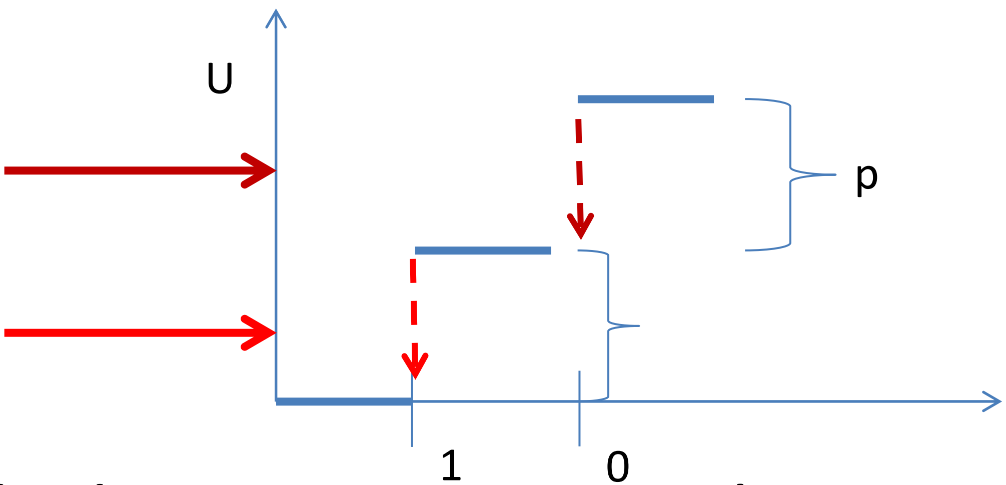




Algoritmos específicos para distribuição mais comuns (discretas)

Bernoulli

- Aplicando o método da transformação inversa para o caso discreto tem-se

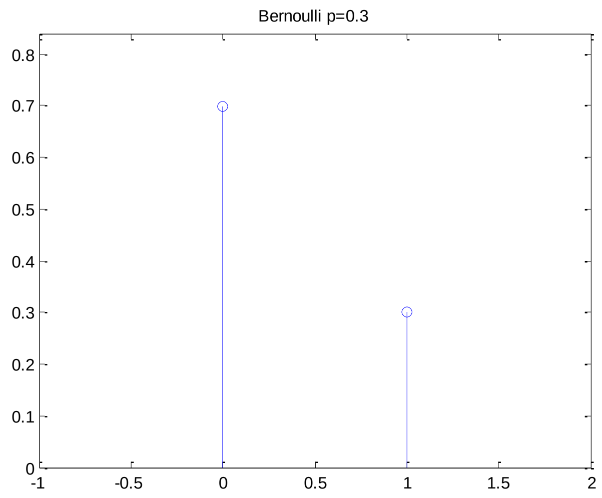


- De onde decorre o seguinte algoritmo:
  1 – Gerar U com distribuição U(0,1)
  2 – Se U<= p X=1; caso contrário X=0

Exemplo Matlab

```
function X=Bernoulli (p,N)
X=rand(1,N)<=p

% usando
N=1e6
X=Bernoulli(0.3, N);

myhist(X,'Bernoulli p=0.3')
p=sum(X==1) /N
```

→ 0.2999



Técnicas especiais - Obter Binomial

- Pode obter-se uma variável aleatória Binomial usando o facto de que esta pode ser expressa como a soma de n variáveis de Bernoulli independentes

- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma v.a. Binomial com parâmetros n e p quando X_i é de Bernoulli com parâmetro p

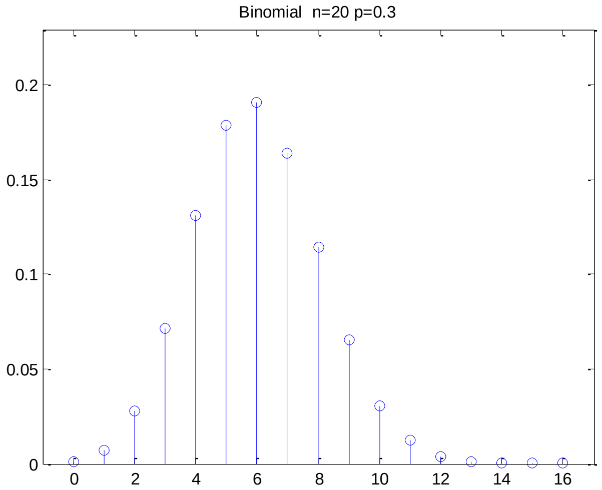
Obter Binomial - Algoritmo

- Gerar variáveis independentes e identicamente distribuídas (iid) $X_1, \dots, X_n$ usando distribuição de Bernoulli com parâmetro *p*

- Devolver $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

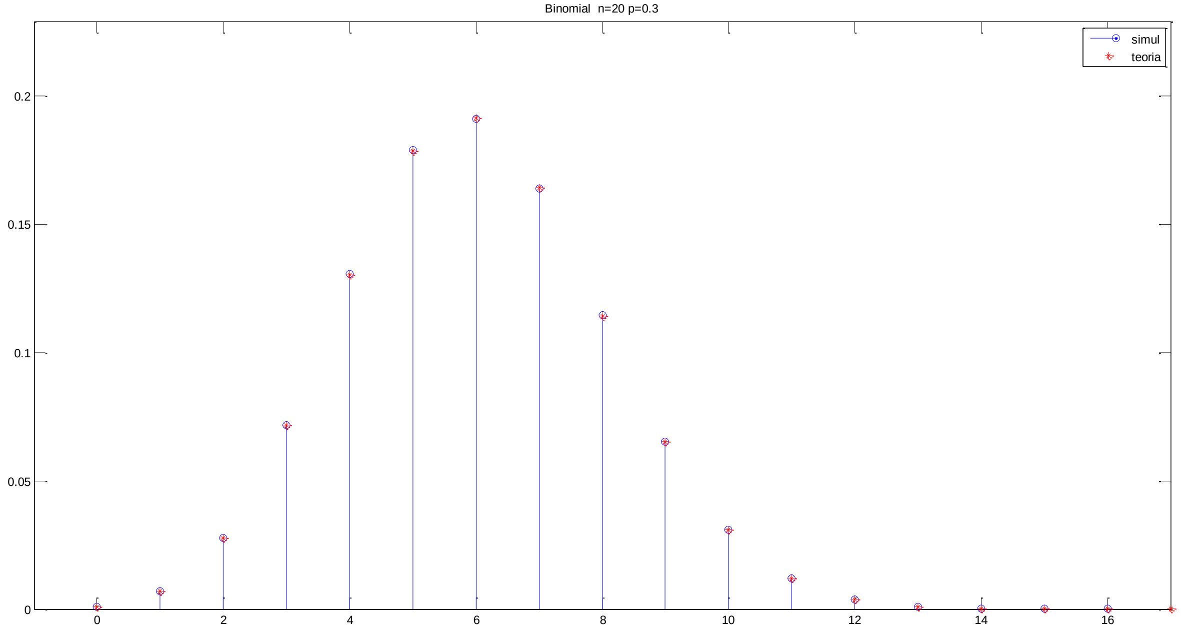
Demo obtenção binomial

```
function X=binomial(n,p, N)
Bern=rand(n,N)<=p;    % n Bernoulli(p)
X=sum(Bern);


% usando
N=1e6;  n=20; p=0.3;
X=binomial(n,p, N);
myhist(X,'Binomial  n=20 p=0.3')
```



Simulação versus teoria

- N=1e6



Algoritmos específicos para distribuição mais comuns (contínuas)

Distrib. Normal – Alg. Box Müller

- Algoritmo de Box e Müller:

  1 – Gerar 2 variáveis independentes U_1 e U_2 uniformes em (0,1)

  2 – Obter 2 variáveis com distribuição Normal, X e Y, através de:

$$X = (-2 \ln U_1)^{1/2} \cos(2\pi U_2) \; ,$$
$$Y = (-2 \ln U_1)^{1/2} \sin(2\pi U_2) \; .$$

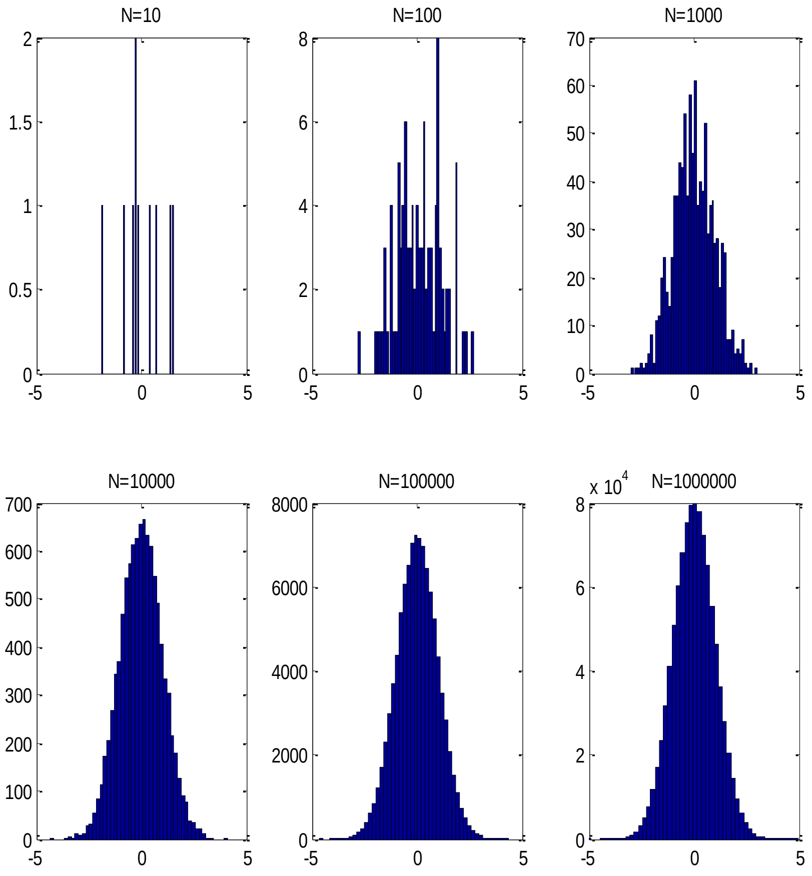
Box Müller em Matlab

```
function[X,Y]=BoxMuller(N)

U1=rand(1,N);    % gerar uma v.a. uniforme
U2=rand(1,N);    % gerar outra v.a. uniforme

X=(-2*log(U1)).^(1/2).* cos(2*pi*U2);
Y=(-2*log(U1)).^(1/2).* sin(2*pi*U2);
```

- Atenção ao uso de .^   e .*

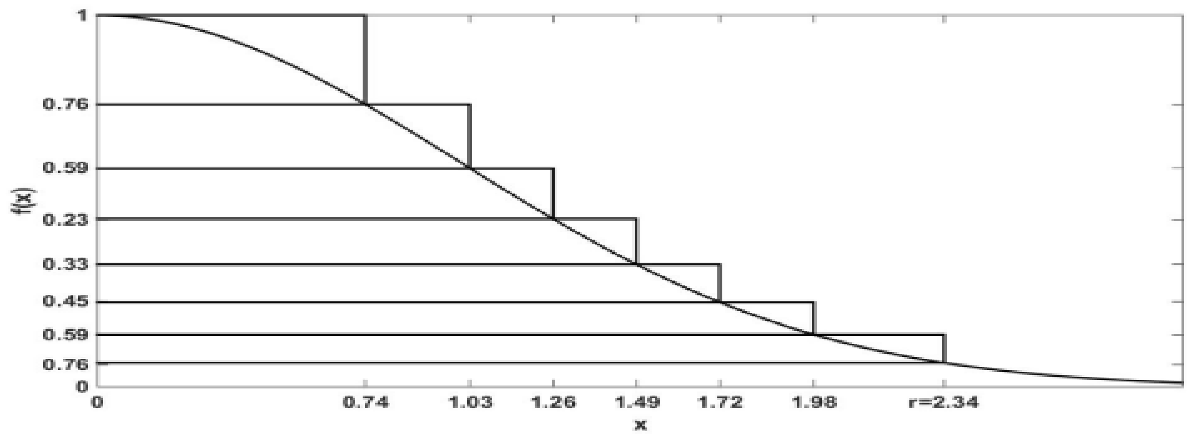
Demonstração em Matlab

```
for i=1:6
    subplot(2,3,i)
    N=10^i;
    [X,Y]=BoxMuller(N);
    hist(X,50)
    title(['N=' num2str(N)]);
    ax=axis;
    ax(1)=-5; ax(2)=5;
    axis(ax)
end
```



Distribuição Normal – Algoritmo Ziggurat

- Desenvolvido por Marsaglia em 2000
- É um método de rejeição
- Utiliza a curva $y = f(x) = \ e^{-x^2/2}$ para $x > 0$
  - Devido a simetria
- Utiliza um conjunto de tiras com a mesma área e geração de números com distrib. Uniforme



  - Figura faz lembra um Zigurate (antiga Mesopotâmia)

Em Java

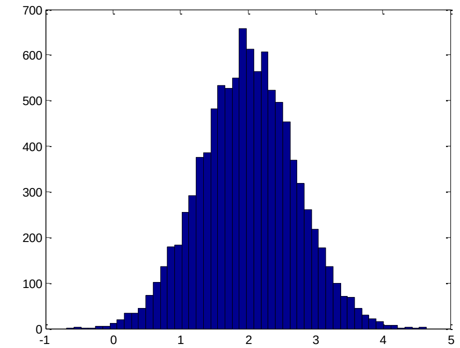
- É similar a gerar números de uma distribuição uniforme
- O exemplo seguinte mostra como gerar um número aleatório de uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância 1

```
import java.util.*;
Random r = new Random();
g = r.nextGaussian();
```

- De cada vez que se invoca r.nextGaussian() obtém-se um novo número

Distribuição normal no Matlab

- Em Matlab está disponível a função **randn()**
  - **Gera números aleatórios com uma distribuição Normal de média 0 e variância 1**



- Para obter outras médias e variâncias basta aplicar uma transformação
- O comando randn() utliza o algoritmo Ziggurat

randn() Matlab

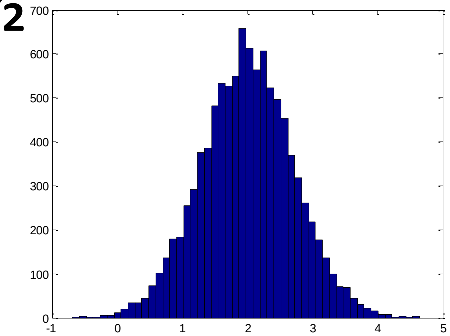
- Utilizando as já referidas propriedades
  $E(X+c) = E(X) + c$
  e $Var(cX) = c^2\, Var(X)$

 podem gerar-se valores de distribuições com média e variância arbitrárias

- Exemplo: média 2 e variância ½

  Y=sqrt(1/2) * randn(1, 1e4)+2;

  hist(Y,50)



Outras distribuições em Matlab

- Exemplos de distribuições **discretas**

Distribution	Random Number Generation Function
Binomial	binornd, random, randtool
Geometric	geornd, random, randtool
Negative binomial	nbinrnd, random, randtool
Poisson	poissrnd, random, randtool
Uniform (discrete)	unidrnd, random, randtool

- Fonte: https://www.mathworks.com/help/stats/random-number-generation.html

Outras distribuições em Matlab

- Exemplos de distribuições **contínuas**

Distribution	**Random Number Generation Function**
Chi-square	chi2rnd, random, randtool
Exponential	exprnd, random, randtool
Gamma	gamrnd, randg, random, randtool
Normal (Gaussian)	normrnd, randn, random, randtool
Rayleigh	raylrnd, random, randtool
Student's t	trnd, random, randtool
Uniform (continuous)	unifrnd, rand, random

- Fonte: https://www.mathworks.com/help/stats/random-number-generation.html

Para aprender mais

- Online
  - Capítulo “RANDOM NUMBERS, RANDOM VARIABLES AND STOCHASTIC PROCESS GENERATION” http://moodle.technion.ac.il/pluginfile.php/220739/mod_resource/content/0/slava_fall_2010/Random_number_2_.pdf
- Cap. 1 e Apêndice B do livro “Probabilidades e Processos Estocásticos”, F. Vaz, Universidade de Aveiro