

PL 2

Probabilidades e Variáveis Aleatórias

2.1 Probabilidade condicional, independência

Responda às seguintes questões através de simulações em Matlab e sempre que for pedido compare os resultados obtidos com os valores teóricos:

1. Considere famílias com filhos em que a probabilidade de nascimento de rapazes é igual à de nascimento de raparigas:
 - (a) Obtenha por simulação uma estimativa da probabilidade do acontecimento “ter pelo menos um filho rapaz” em famílias com 2 filhos.
 - (b) Determine o valor teórico do acontecimento da alínea anterior e compare-o com a estimativa obtida por simulação. Os valores são iguais? Porquê?
 - (c) Suponha que para uma família com 2 filhos escolhida ao acaso, sabemos que um dos filhos é rapaz. Qual a probabilidade do outro filho ser também rapaz? Determine o valor teórico desta probabilidade e estime a mesma probabilidade por simulação.
 - (d) Sabendo que o primeiro filho de uma família com 2 filhos é rapaz, determine por simulação a probabilidade do segundo filho ser rapaz. O que se pode concluir do resultado obtido relativamente à independência de acontecimentos?
 - (e) Considere uma família com 5 filhos. Sabendo que pelo menos um dos filhos é rapaz, obtenha por simulação uma estimativa para a probabilidade de um dos outros (e apenas um) ser também rapaz.
 - (f) Repita a alínea (e), mas estimando a probabilidade de pelo menos um dos outros ser também rapaz.
2. Considere o seguinte “jogo”: lançamento com os olhos vendados de n dardos, um de cada vez, para m alvos, garantindo-se que cada dardo atinge sempre um alvo (e apenas 1).
 - (a) Estime por simulação a probabilidade de nenhum alvo ter sido atingido mais do que uma vez quando $n = 20$ dardos e $m = 100$ alvos.
 - (b) Estime por simulação a probabilidade de pelo menos 1 alvo ter sido atingido 2 ou mais vezes quando $n = 20$ dardos e $m = 100$ alvos.
 - (c) Considere os valores de $m = 1000$ e $m = 100000$ alvos. Para cada um destes valores, faça as simulações necessárias para desenhar um gráfico (usando a função *plot* do Matlab) da probabilidade da alínea (b) em função do número de dardos n . Considere n de 10 a 100 com incrementos de 10. Os 2 gráficos devem ser sub-gráficos de uma mesma figura (use a instrução *subplot* do Matlab). Compare os resultados dos 2 casos e retire conclusões.
 - (d) Considere o valor de $n = 100$ dardos. Faça as simulações necessárias para desenhar um gráfico da probabilidade da alínea (b) em função dos valores de $m = 200, 500, 1000, 2000, 5000, 10000, 20000, 50000$ e 100000 alvos. O que conclui dos resultados obtidos?
3. Considere um array de tamanho T que serve de base à implementação de uma memória associativa (por exemplo em Java). Assuma que a função de *hash* devolve um valor entre 0 e $T - 1$ com todos os valores igualmente prováveis.

- (a) Determine por simulação a probabilidade de haver pelo menos uma colisão (pelo menos 2 *keys* mapeadas pela função de *hash* para a mesma posição do array) se forem introduzidas 10 *keys* num array de tamanho $T = 1000$.
- (b) Faça um gráfico da probabilidade da alínea (a) (estimada por simulação) em função do número de *keys* para todos os valores relevantes num array de tamanho $T = 1000$.
- (c) Para um número de *keys* igual a 50, represente graficamente a variação da probabilidade (estimada por simulação) de não haver nenhuma colisão em função do tamanho T do array (assuma os tamanhos T de 100 até 1000 com incrementos de 100).
4. Considere uma festa em que está presente um determinado número n de pessoas.
- (a) Qual deve ser o menor valor de n para o qual a probabilidade de duas ou mais pessoas terem a mesma data de aniversário (mês e dia) é superior a 0,5 (assuma que um ano tem sempre 365 dias)?
- (b) Qual deve ser o valor de n para que a probabilidade da alínea anterior passe a ser superior a 0,9?
5. Considere um dado de seis faces numeradas de 1 a 6 lançado 2 vezes. Assuma que o dado é equilibrado (mesma probabilidade para todas as faces ficarem para cima). Considere os acontecimentos seguintes: “A – a soma dos dois valores é igual a 9”, “B – o segundo valor é par”, “C – pelo menos um dos valores é igual a 5” e “D – nenhum dos valores é igual a 1”.
- (a) Estime por simulação a probabilidade da cada um dos 4 acontecimentos.
- (b) Determine teoricamente se os acontecimentos A e B são independentes.
- (c) Determine teoricamente se os acontecimentos C e D são independentes.
6. Considere uma linguagem com apenas 3 palavras {“um”, “dois”, “três”} e que permite sequências de 2 palavras. Considere que todas as sequências são equiprováveis e que as duas palavras de uma sequência podem ser iguais. As respostas às questões seguintes devem ser baseadas nos valores teóricos.
- (a) Qual a probabilidade da sequência “um dois”?
- (b) Qual a probabilidade de “um” aparecer pelo menos uma vez numa sequência?
- (c) Qual a probabilidade de ocorrer “um” ou “dois” numa sequência?
- (d) Qual o valor de $P[\text{“sequência incluir a palavra um”} \mid \text{“sequência inclui palavra dois”}]$?
7. Considere que uma empresa tem 3 programadores (André, Bruno e Carlos) e que a probabilidade de um programa de cada um deles ter problemas (“bugs”) e o número de programas desenvolvidos assumem os valores apresentados na tabela seguinte.

Programador	Prob(“erro num programa”)	programas
André	0.01	20
Bruno	0.05	30
Carlos	0.001	50

O Diretor da empresa seleciona de forma aleatória um dos 100 programas produzidos pelos seus 3 programadores e descobre que este contém um erro sério.

- (a) Qual é a probabilidade de o programa ser do Carlos?
- (b) De quem é mais provável ser o programa?

2.2 Variáveis e distribuições aleatórias

1. Considere a variável aleatória X correspondente à face que fica para cima no lançamento de 1 dado. Usando os valores teóricos:

- (a) produza um gráfico, em Matlab, que represente a função massa de probabilidade¹ de X ;
- (b) num segundo gráfico da mesma figura, desenhe o gráfico da função de distribuição acumulada (use a função `stairs` do Matlab).

2. Considere uma caixa contendo 90 notas de 5 Euros, 9 notas de 50 e 1 de 100.



- (a) Descreva o espaço de amostragem da experiência aleatória, retirar uma nota da caixa, e as probabilidades dos acontecimentos elementares.
- (b) Considere agora a variável aleatória X como sendo o valor de uma nota retirada à sorte da caixa acima descrita. Descreva o espaço de amostragem e a função massa de probabilidade de X .
- (c) Determine a função distribuição acumulada de X e efectue a sua representação gráfica em Matlab.

3. Considere 4 lançamentos de uma moeda equilibrada. Seja X a variável aleatória representativa do número de coroas observados nos 4 lançamentos.

- (a) Estime por simulação a função massa de probabilidade $p_X(x)$ da variável aleatória X .
- (b) Estime o valor esperado, a variância e o desvio padrão de X com base em $p_X(x)$.
- (c) Identifique o tipo da distribuição da variável aleatória X e escreva a expressão teórica da respectiva função de probabilidade.
- (d) Calcule os valores teóricos da função massa de probabilidade de X e compare-os com os valores estimados por simulação obtidos em (a).
- (e) Calcule os valores teóricos de $E[x]$ e de $Var(X)$ e compare-os com os valores obtidos em (b).
- (f) Com base nos valores teóricos da função massa de probabilidade desta distribuição, calcule:
 - i. a probabilidade de obter pelo menos 2 coroas;
 - ii. a probabilidade de obter até 1 coroa;
 - iii. a probabilidade de obter entre 1 e 3 coroas.

4. Sabendo que um processo de fabrico produz 30% de peças defeituosas e considerando a variável aleatória X , representativa do número de peças defeituosas numa amostra de 5 peças tomadas aleatoriamente, obtenha:

- (a) Por simulação:
 - i. estimativa para a função massa de probabilidade de X ;
 - ii. o gráfico representativo da função distribuição acumulada de probabilidades de X ;
 - iii. estimativa para probabilidade de, no máximo, 2 das peças de uma amostra serem defeituosas.
- (b) Analiticamente:
 - i. a função distribuição acumulada de X ;
 - ii. a probabilidade de, no máximo, 2 das peças de uma amostra serem defeituosas.

5. Suponha que o(s) motor(es) de um avião pode(m) falhar com probabilidade p e que as falhas são independentes entre motores. Suponha ainda que o avião se despenha se mais de metade dos motores falharem. Nestas condições, prefere voar num avião com 2 ou 4 motores? Utilize a distribuição que considerar mais adequada.

¹A função massa de probabilidade é muitas vezes designada simplesmente por função de probabilidade

Sugestão: Tem pelo menos 2 alternativas: (1) obter expressões para a probabilidade de cada tipo de avião se despenhar em função de p e usar o quociente entre ambas para responder à questão, (2) efectuar os cálculos para um conjunto de valores concretos² de p (ex: `p = logspace(-3, log10(1/2), 100)`) e usar um gráfico mostrando simultaneamente as probabilidades de cada tipo de avião se despenhar.

6. A distribuição de Poisson é uma forma limite da distribuição binomial (quando $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ e np permanece constante) e portanto pode ser usada para aproximar e simplificar os cálculos envolvidos com a binomial em situações em que as condições anteriores se verifiquem.

Num processo industrial de fabrico de chips, alguns aparecem defeituosos tornando-os inapropriados para comercialização. É sabido que em média por cada 1000 chips há um defeituoso.

- (a) Usando a distribuição binomial, determine a probabilidade de numa amostra de 8000 chips aparecerem 7 defeituosos.
- (b) Determine a mesma probabilidade usando a aproximação de Poisson e compare o resultado com o da alínea anterior.

Lei de Poisson: $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

7. Suponha que o número de mensagens que chega a um servidor de *email* segue uma lei de Poisson com média de 15 (mensagens por segundo). Calcule a probabilidade de num intervalo de um segundo:

- (a) o servidor não receber nenhuma mensagem;
- (b) o servidor receber mais de 10 mensagens.

8. Assumindo que o número de erros tipográficos numa página de um livro tem uma distribuição de Poisson com $\lambda = 0.02$, calcule a probabilidade de que exista no máximo 1 erro num livro de 100 páginas. Considere que o número de erros em cada página é independente do número de erros nas outras páginas.

9. Considerando a variável aleatória X , representativa das classificações dos alunos de um determinado curso, contínua³ e com distribuição normal⁴ (média 14 e desvio padrão 2), obtenha através de simulação uma estimativa para as probabilidades de:

- (a) um aluno do curso ter uma classificação entre 12 e 16;
- (b) os alunos terem classificações entre 10 e 18;
- (c) um aluno passar (ter classificação maior ou igual a 10);
- (d) verifique a correção dos resultados anteriores usando a função Matlab `normcdf()`.

²Correr `help logspace` no Matlab para perceber os argumentos do `logspace` usados no exemplo.

³Equivale a considerar que as classificações são números reais.

⁴Utilize a função Matlab `randn()`.