PL 3

Cadeias de Markov

Nota: Adopte a definição da matriz de transição (de estados) em que o elemento t_{ij} da matriz corresponde à probabilidade de transição do estado j para o estado i.

1. Considere a seguinte situação e responda às alíneas abaixo:

   Um aluno do primeiro ano de um curso de Engenharia tem todas as semanas 2 aulas Teórico-Práticas de uma Unidade Curricular X às 9:00, às quartas e sextas.

   Todos os dias que tem aulas desta UC, o aluno decide se vai à aula ou não da seguinte forma: Se tiver estado presente na aula anterior a probabilidade de ir à aula é 70%; se faltou à anterior, a probabilidade de ir é 80%.

   (a) Se estiver presente na aula de quarta numa determinada semana, qual a probabilidade de estar presente na aula de quarta da semana seguinte?

   Sugestão: Comece por definir a matriz de transição de estados e o vetor estado correspondentes.

   (b) Se não estiver presente na aula de quarta numa determinada semana, qual a probabilidade de estar presente na aula de quarta da semana seguinte?

   (c) Sabendo que esteve presente na primeira aula, qual a probabilidade de estar na última aula, assumindo que o semestre tem exactamente 15 semanas de aulas e não existem feriados?

   (d) Represente num gráfico a probabilidade de faltar a cada uma das 30 aulas, assumindo que a probabilidade de estar presente na primeira aula é de 85%.

2. Considere a seguinte "dança" de grupos: Divide-se uma turma em 3 grupos (A, B e C) no início do semestre e no final de cada aula efectuam-se os seguintes movimentos:

   - $1/3$ do grupo A vai para o grupo B e outro $1/3$ do grupo A vai para o grupo C;
   - $1/4$ do grupo B vai para A e $1/5$ de B vai para C
   - Metade do grupo C vai para o grupo B; a outra mantém-se no grupo C.

   (a) Crie em Matlab a matriz de transição de estados que representa as trocas entre grupos.

   Confirme que se trata de uma matriz estocástica.

   (b) Crie o vector relativo ao estado inicial considerando que no total temos 90 alunos, o grupo A tem o dobro da soma dos outros dois e os grupos B e C têm o mesmo número de alunos.

   (c) Quantos elementos integrarão cada grupo no fim da aula 30 considerando como estado inicial o definido na alínea anterior?

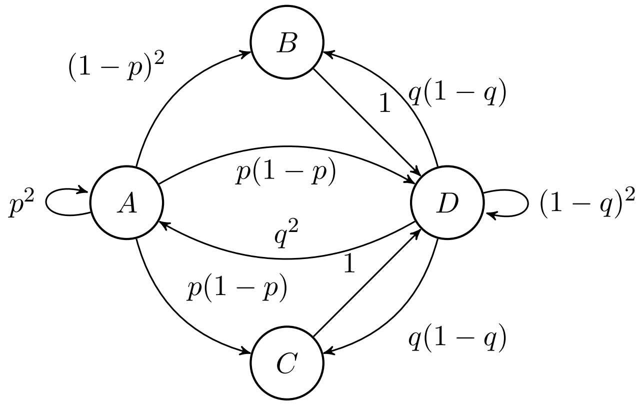
   (d) Quantos elementos integrarão cada grupo no fim da aula 30 considerando que inicialmente se distribuiram os 90 alunos equitativamente pelos 3 grupos?

3. Gere aleatoriamente uma matriz de transição de estados para uma cadeia de 20 estados (identificados de 1 a 20) recorrendo à função do Matlab *rand*. Com base nessa matriz:

(a) Confirme que a matriz de transição de estados é estocástica.

(b) Qual a probabilidade de o sistema, começando no estado 1, estar no estado 20 após 2 transições? E após 5? E após 10? E após 100? Apresente os resultados em percentagem e com 5 casas decimais. O que conclui?

4. Considere o seguinte diagrama representativo de uma Cadeia de Markov:



(a) Defina, em Matlab, a matriz de transição de estados T assumindo $p = 0,4$ e $q = 0,6$.

(b) Assuma que o sistema se encontra inicialmente no estado A. Qual a probabilidade de estar em cada estado ao fim de 5 transições? E de 10 transições? E de 100 transições? E de 200 transições?

(c) Determine as probabilidades limite de cada estado. Compare estes valores com os obtidos na alínea anterior. O que conclui?

5. Considere que o tempo em cada dia é genericamente classificado num de 3 estados – sol, nuvens e chuva – e que o tempo num determinado dia apenas depende do tempo no dia anterior. Assuma que estamos no primeiro dia de janeiro e que as probabilidades de transição de estados são as da tabela seguinte.

dia n \ dia $n+1 \rightarrow$	sol	nuvens	chuva
sol	0,7	0,2	0,1
nuvens	0,2	0,3	0,5
chuva	0,3	0,3	0,4

(a) Defina, em Matlab, a correspondente matriz de transição.

(b) Qual a probabilidade de estar sol no segundo dia e no terceiro dia de janeiro quando o primeiro dia é de sol?

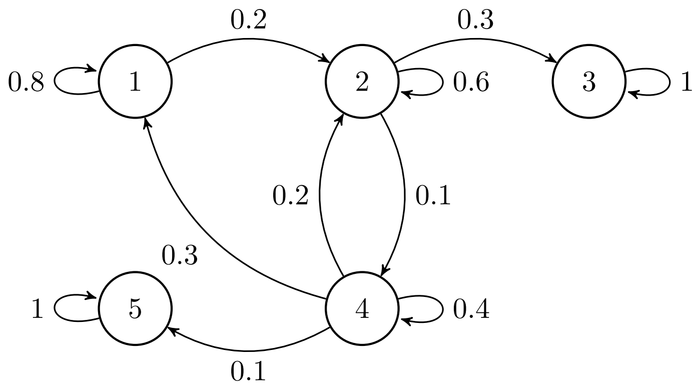
(c) Qual a probabilidade de não chover nem no segundo dia nem no terceiro dia de janeiro quando o primeiro dia é de sol?

(d) Assumindo que o primeiro dia é de sol, determine o número médio de dias de sol, de nuvens e de chuva que se espera ter em todo o mês de janeiro.

(e) Assumindo que o primeiro dia é de chuva, determine o número médio de dias de sol, de nuvens e de chuva que se espera ter em todo o mês de janeiro. Compare estes resultados com os da alínea anterior. O que conclui?

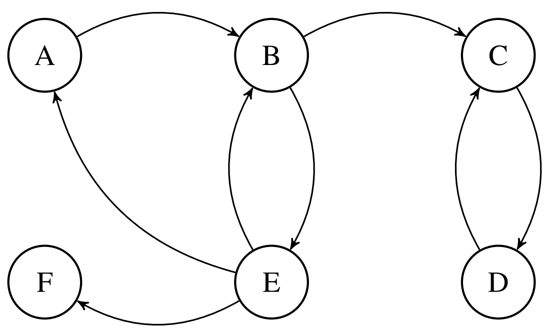
(f) Considere uma pessoa com reumatismo crónico que tem dores reumáticas com probabilidades de 10%, 30% e 50% quando os dias são de sol, de nuvens ou de chuva, respetivamente. Qual o número esperado de dias que a pessoa vai sofrer de dores reumáticas em janeiro quando o primeiro dia é de sol? E quando o primeiro dia é de chuva?

6. Considere a cadeia de Markov com o diagrama de transição de estados seguinte:



   (a) Defina em Matlab a matriz de transição de estados T, com T_{ij} sendo a probabilidade de ir do estado j para o estado i num único passo.
   (b) Faça um gráfico com a probabilidade de, começando no estado 1, estar no estado 2 ao fim de n passos, com n a variar de 1 até 100. Justifique o que observa.
   (c) Faça um gráfico com a probabilidade de, começando no estado 1, estar no estado 3 ao fim de n passos. Na mesma figura, faça um segundo gráfico com a probabilidade de, começando no estado 1, estar no estado 5 ao fim de n passos. Em ambos os casos, considere n a variar de 1 até 100. Justifique o que observa.
   (d) Determine a matriz Q.
   (e) Determine a matriz fundamental F.
   (f) Qual a média (valor esperado) do número de passos até à absorção começando no estado 1? E começando no estado 2? E se começando no estado 4?
   (g) Começando no estado 1, qual é a probabilidade de absorção do estado 3? E do estado 5? Verifique a coerência destes valores com o que observou na alínea 6c).

7. Considere o conjunto de páginas Web e respetivas hyperligações entre si dado pelo diagrama seguinte:



   (a) Usando a matriz H das hyperligações, obtenha a estimativa do pagerank de cada página ao fim de 10 iterações. Relembre que deve considerar (i) a mesma probabilidade de transição de cada página para todas as páginas seguintes possíveis e (ii) a probabilidade da página inicial deve ser igual para todas as páginas. Qual/quais a(s) página(s) com maior pagerank e qual o seu valor?̃
   (b) Identifique a "spider trap"e o "dead-end"contidos neste conjunto de páginas.
   (c) Altere a matriz H para resolver apenas o problema do "dead-end"e recalcule o pagerank de cada página novamente em 10 iterações.
   (d) Resolva agora ambos os problemas e recalcule o pagerank de cada página novamente em 10 iterações (assuma $\beta = 0,8$).
   (e) Calcule agora o pagerank de cada página considerando um número mínimo de iterações que garanta que nenhum valor muda mais do que 10^{-4} em 2 iterações consecutivas. Quantos iterações são necessárias? Compare os valores de pagerank obtidos com os da alínea anterior. O que conclui?