

Programación de una calculadora cosmológica

David Balbás Gutiérrez y Pablo Gómez Nicolás

Universidad de Cantabria

9 de febrero de 2018

Resumen—Se ha programado una calculadora cosmológica con el fin de analizar distintos tipos de universo plano, según los constituyentes de los mismos. Esta calculadora es capaz de calcular varios parámetros y conceptos cosmológicos, así como de representar su evolución. Para cada universo se ha hecho un análisis teórico a partir de las ecuaciones de Friedmann y un análisis práctico mediante la calculadora. Entre otros universos, se ha estudiado un modelo realista utilizando los datos realistas proporcionados por la última misión Planck.

ÍNDICE

I.	Introducción	1
II.	Análisis de diferentes Universos	3
II-A.	Universos dominados por materia	4
II-B.	Universos dominados por radiación	5
II-C.	Universos dominados por la constante cosmológica	6
II-D.	Comparación de los universos con un solo fluido	7
II-E.	Universos con radiación y materia	8
II-F.	Universos con constante cosmológica negativa	9
II-G.	Universo de Benchmark (modelo realista)	10
III.	Conclusiones	11
	Manual de uso y explicación del código	13
	Referencias	15

I. INTRODUCCIÓN

El Universo en el que habitamos no es un ente estático. Se pueden encontrar diversas pruebas que apoyan esta tesis: desde la relación lineal observada por Hubble entre el redshift de galaxias y la distancia a la que se encuentran [1], lo cual se puede interpretar intuitivamente como la representación en la Figura 1, hasta el análisis de la radiación del fondo cósmico de microondas. Sin embargo, son muchas las incógnitas que quedan por resolver sobre esta expansión.

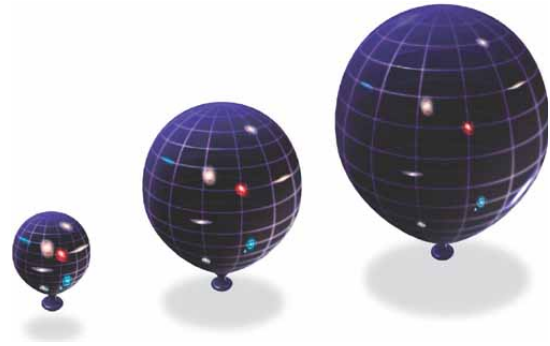


Figura 1. Representación didáctica de la expansión del Universo, utilizando como analogía el inflado de un globo [2].

Para estudiar las propiedades del Universo se utiliza el marco de las variedades diferenciables: se considera que un universo es una variedad cuatridimensional isótropa y con la misma curvatura K en todos sus puntos. En este caso, utilizando coordenadas polares y calculando la curvatura mediante el Teorema Egregio de Gauss, se obtendría una métrica con la siguiente forma (se presenta sólo la parte espacial):

$$ds^2 = \frac{1}{1 - Kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Para tener en cuenta la expansión del universo, se debe incluir una dependencia de la curvatura con el tiempo. Para ello, se escribe $K = k/a^2(t)$, donde

k puede ser $+1$, 0 ó -1 según si se considera que el universo es esférico, plano o hiperbólico respectivamente, y $a^2(t) > 0$. A $a(t)$ se le denomina factor de escala. Si además se hace el cambio a coordenadas radiales comóviles $r(t) = a(t)\sigma$ y se añade la parte temporal a la métrica, se obtiene la métrica de Friedman-Robertson-Walker-Lemaître (FRWL) definida por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{1}{1 - k\sigma^2} d\sigma^2 + \sigma^2 d\Omega \right) \quad (1)$$

donde $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ representa toda la parte angular. Esta métrica es la única posible a tener en cuenta [3]. A partir de ahora, se analiza el caso concreto de un universo plano, es decir, $k = 0$.

La métrica FRWL construida debería ser coherente con las ecuaciones de Einstein, derivadas a partir de la teoría de la Relatividad General:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda \right) - g_{\mu\nu} \Lambda$$

Si se introduce el tensor métrico de la Ec. (1) en este sistema de ecuaciones y se desarrolla, se obtienen unas igualdades conocidas como las ecuaciones de Friedmann (recordemos que se considera $k = 0$):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (3)$$

En estas ecuaciones, la notación con punto se utiliza para señalar derivadas con respecto al tiempo, ρ es la densidad de materia y energía, p la presión y Λ es un parámetro conocido como constante cosmológica. Al término \dot{a}/a se le denomina parámetro de Hubble y se escribe $H(t)$. Normalmente se suele derivar la ecuación de continuidad a partir de las Ecs. (2) y (3). Esta ecuación toma la forma

$$\dot{\rho} = -\frac{3\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \quad (4)$$

Se comienza analizando algún término relacionado con distancias en el universo considerado. Al suponer que el universo tiene una determinada curvatura, las distancias en éste cambiarán según su curvatura y en función de la coordenada comóvil σ . Por tanto, se define el concepto de distancia comóvil $\chi(\sigma)$ como

$$\chi(\sigma) = \int_0^\sigma \frac{d\sigma'}{\sqrt{1 - k\sigma'^2}}$$

En el caso concreto de un universo con curvatura nula, esto parece irrelevante ya que la distancia comóvil coincide con la coordenada comóvil. Sin embargo, para otras curvaturas no ocurre lo mismo. A partir de este concepto, para obtener la distancia radial propia D_P bastaría con multiplicar por el factor de escala: $D_P(t, \sigma) = a(t)\chi(\sigma)$. Si se deriva para obtener la velocidad propia v_P y se manejan un mínimo las ecuaciones, se puede obtener una relación lineal a tiempo actual t_0 conocida como la ley de Hubble:

$$v_P = H_0 D_P \quad (5)$$

En esta ecuación, a la constante $H_0 = H(t_0)$ se la llama constante de Hubble. Según los últimos datos de la misión Planck [4], esta constante toma el valor $H_0 = 67.4 \pm 0.5$ (km/s)/Mpc.

A partir de la Ec. (5) se puede comprobar que hay una distancia a partir de la cual las galaxias se alejan de nosotros con una velocidad propia mayor que la velocidad de la luz. Esta distancia d_H se conoce como radio de Hubble y, para un tiempo t cualquiera, viene dada por

$$d_H(t) = \frac{c}{H(t)} \quad (6)$$

Por otra parte, se debe definir un concepto importante relacionado con los horizontes en cosmología, en concreto el horizonte de partículas. Se define el horizonte de partículas d_P como la máxima distancia que un fotón podría haber recorrido desde el inicio del universo hasta el tiempo considerado. Utilizando la métrica FRWL y considerando únicamente movimiento radial, como el movimiento se produce siguiendo geodésicas entonces

$$d_P(t) = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} \quad (7)$$

donde se ha multiplicado por el factor de escala para que la distancia sea propia.

Se analiza ahora la Ec. (4). Para relacionar la presión con la densidad se utiliza una ecuación de estado lineal:

$$p/c^2 = \omega \rho \quad (8)$$

Se pueden considerar varios tipos de fluido como componentes del universo, tomando cada uno de ellos un valor de ω diferente: para un fluido sin presión, denominado polvo, se toma $\omega = 0$; para un

gas de fotones $\omega = 1/3$; y finalmente, para el vacío se utiliza $\omega = -1$. Si se sustituyen estos valores en la Ec. (8) se obtienen diferentes dependencias entre la densidad y el factor de escala: para el polvo, $\rho \propto a^{-3}$; para la radiación, $\rho \propto a^{-4}$; y para el vacío, ρ es constante.

Para que en la Ec. (2) $H(t)^2$ sea proporcional a la densidad ρ se considera el sumando $\Lambda c^2/3$ como una aportación a ρ relacionada con el vacío. Esta aportación puede tomar cualquier valor, tanto positivo como negativo, ya que Λ no tiene ninguna restricción. Entonces, si se analiza la ecuación de Friedmann a tiempo actual se puede comprobar que hay un valor crítico para la densidad, a partir del cual el universo debería tener curvatura positiva, y por debajo del cual la curvatura sería negativa. Esta densidad crítica ρ_0 es

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

Si se escribe entonces la aportación de cada fluido (los fluidos posibles son los comentados anteriormente: polvo, radiación y vacío) a la densidad como $\rho_X = \Omega_X \rho_0$ y se utiliza el convenio $a(t_0) = 1$ (este convenio se tomará siempre de ahora en adelante), entonces la Ec. (2) se puede reescribir como

$$H(t)^2 = H_0^2 (\Omega_\Lambda + \Omega_M a^{-3} + \Omega_R a^{-4}) \quad (9)$$

donde el subíndice Λ se refiere a la aportación del vacío, M a la materia (polvo) y R a la radiación (gas de fotones). Evidentemente, la suma de las aportaciones debe ser la densidad crítica, luego $\Omega_\Lambda + \Omega_M + \Omega_R = 1$. Como Λ puede tomar cualquier valor, Ω_Λ puede ser negativo, mientras que Ω_R y Ω_M deben ser mayores o iguales a cero.

La expansión del universo también produce un efecto de corrimiento al rojo o redshift z . Este corrimiento al rojo está relacionada con el factor de escala:

$$1 + z = \frac{1}{a} \quad (10)$$

Por tanto, si se recibe información de una galaxia con un determinado redshift z se puede saber que, en el momento de la emisión de la luz el factor de escala era $a(t) = 1/(1 + z)$. La Ec. (9) se escribe indistintamente utilizando el factor de escala o el redshift. Ocasionalmente, con el fin de aliviar la escritura se utilizará la notación $E(z) = \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M(1 + z)^3 + \Omega_R(1 + z)^4}$.

A partir de las Ecs. (9) y (10) se puede encontrar una relación diferencial entre dt y dz : como $a(t)H(t) = da/dt$ y $da = -dz/(1 + z)^2$, entonces $dt = -dz/H_0(1 + z)E(z)$. Si se escribe en función del factor de escala y se integra, se puede calcular el tiempo $t(z)$ en el que se emitió un fotón con un determinado redshift z , tomando como origen de coordenadas $z = \infty$. Este tiempo es

$$t(z) = \int_0^{\frac{1}{1+z}} \frac{da'}{H_0 a' \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M a'^{-3} + \Omega_R a'^{-4}}} \quad (11)$$

donde si se toma $z = 0$ se obtiene la edad actual del universo t_0 .

Finalmente, se definen los conceptos de distancia de luminosidad y de diámetro angular. La distancia de luminosidad d_L es la distancia propia a la que se encontraría una galaxia de luminosidad conocida L y flujo conocido F en el caso de trabajar con un universo euclideo (es el caso con el que se trabaja) y estático (no es el caso), esto es, $d_L = (L/4\pi F)^{1/2}$. Sin entrar a realizar el desarrollo matemático para deducir su cálculo, la distancia d_L a la que se encuentra una galaxia con redshift conocido z , para un universo plano, es

$$d_L(z) = \frac{c(1 + z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (12)$$

Esta distancia se corresponde con la distancia radial propia multiplicada por un factor $(1 + z)$ para un universo euclideo. La utilidad de esta magnitud es que, si se conoce la luminosidad de un cuerpo estelar y se mide su flujo se puede calcular d_L y, con el redshift observado, se puede calcular la distancia propia ya que el Universo en que habitamos es muy cercano a uno plano. Por último, la distancia angular es un concepto análogo a d_L pero útil cuando se conoce la extensión real l de un objeto celeste y se mide su anchura angular $\delta\theta$: $d_A = l/\delta\theta$. Está íntimamente relacionada con d_L :

$$d_A(z) = d_L(z)(1 + z)^{-2} \quad (13)$$

II. ANÁLISIS DE DIFERENTES UNIVERSOS

En esta sección se van a analizar varios tipos de universos planos. Para ello, se van a dar valores diferentes valores a los parámetros Ω_Λ , Ω_M y Ω_R . Cada caso se estudiará en primer lugar de manera analítica, para después hacer uso de la

calculadora programada para mostrar los resultados y comprobar que son compatibles con la teoría. Salvo que se indique lo contrario, se utilizará el valor de la constante de Hubble obtenida por los últimos resultados de la misión Planck [4], es decir, $H_0 \approx 67 \text{ (km/s)/Mpc}$. Finalmente se recogerán en una tabla varios parámetros de interés calculados para cada universo considerado.

Cabe señalar que para los tres primeros universos estudiados, en los que solo domina un tipo de fluido, se podría estudiar el caso general considerando la ecuación de estado dada en la Ec. (8) y sustituyendo según el valor de ω del fluido de interés. Sin embargo, se ha preferido analizar cada caso por separado ya que nos ha resultado más cómodo estructurar el presente documento de esta forma. El desarrollo general para universos planos en los que domina un fluido se puede consultar en [5] o [6].

Para cada universo, se muestran parte de los resultados obtenidos con la calculadora, en concreto, la evolución del factor de escala y las distancias de luminosidad y de diámetro angular. Se realiza también un pequeño análisis de los mismos, más exhaustivo en el caso del universo realista (a partir de los resultados de [4]).

II-A. Universos dominados por materia

En primer lugar se va a analizar el caso de un universo plano dominado por materia, esto es, $\Omega_M = 1$, $\Omega_R = \Omega_\Lambda = 0$. Este universo también se conoce como Universo de Einstein-de Sitter.

Teoría: En primer lugar, se calcula la edad actual del universo. Para ello, se utiliza la Ec. (11):

$$t(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^{\frac{1}{1+z}} a'^{1/2} da' = \frac{2}{3H_0(1+z)^{3/2}} \quad (14)$$

Tomando el valor $z = 0$ se obtendría la edad actual del universo:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}$$

Se calcula ahora una expresión analítica para el factor de escala $a(t)$. Para ello, se puede utilizar la Ec. (9) teniendo en cuenta que solo se trabaja con materia. De esta manera, uno se encuentra con la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{a}(t) = H_0 a(t)^{-1/2}$$

Esta EDO es muy sencilla de resolver. Teniendo en cuenta las condiciones iniciales $a(t_0) = 1$ y la expresión dada para la edad del universo, el factor de escala es el que sigue:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} = \left(\frac{3H_0}{2}t\right)^{2/3} \quad (15)$$

Conociendo la expresión de $a(t)$ y $\dot{a}(t)$ se deduce la forma del parámetro de Hubble:

$$H(t) = H_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1} = \frac{2}{3t} \quad (16)$$

Por tanto, esta expresión para el parámetro de Hubble indica que, por la Ec. (6), el radio de Hubble debe crecer linealmente con el tiempo, esto es,

$$d_H(t) = \frac{c}{H_0 t_0} t = \frac{3ct}{2} \quad (17)$$

Derivar la expresión del horizonte de partículas también es sencillo: tomando la expresión de la Ec. (15) y sustituyendo en la Ec. (7), se obtiene la expresión

$$d_P(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \int_0^t \frac{cdt'}{(t'/t_0)^{2/3}} = 3ct \quad (18)$$

con lo cual se puede ver que también aumenta linealmente.

Finalmente, se desarrolla la expresión correspondiente a las distancias de luminosidad y angular. Para la distancia de luminosidad, utilizando la Ec. (12) y teniendo en cuenta que $E(z') = (1+z')^{3/2}$, se tiene que ésta será

$$\begin{aligned} d_L(z) &= \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')^{3/2}} \\ &= \frac{2c(1+z)}{H_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right) \end{aligned} \quad (19)$$

Por otra parte, para calcular la distancia angular se utiliza la relación dada en la Ec. (13). Por tanto, sin más que hacer este cociente, se obtiene

$$d_A(z) = \frac{2c}{H_0(1+z)} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right) \quad (20)$$

Práctica: Los resultados obtenidos son los siguientes.

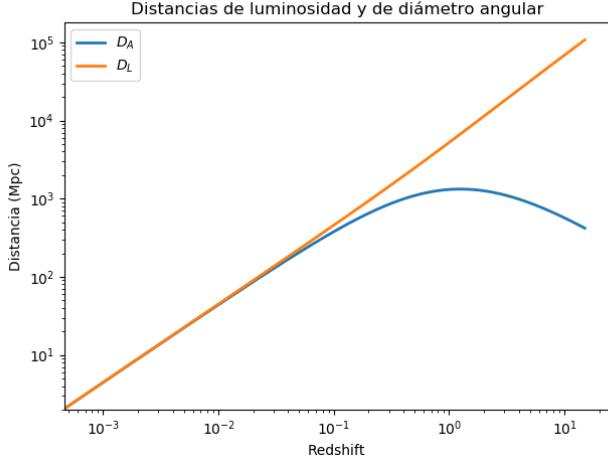


Figura 2. Distancias de luminosidad y de diámetro angular en función del redshift para un universo dominado por materia

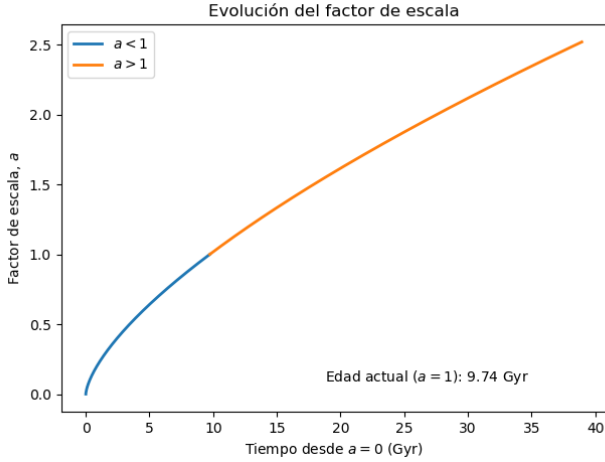


Figura 3. Evolución temporal del factor de escala para un universo dominado por materia

Como se observa, las distancias de luminosidad y de diámetro angular divergen a medida que z aumenta, tal y como predice la teoría. Este caso es común a todos los universos que se estudian en esta sección, y gracias a la escala logarítmica utilizada, se puede apreciar el orden de magnitud de la separación entre ambas (aproximadamente $2 \log_{10}(z + 1)$ órdenes de magnitud de diferencia). En cuanto al factor de escala, se observa un crecimiento continuo pero con aceleración negativa como era esperable.

Tanto la gráfica del radio de Hubble como la del horizonte de partículas con respecto al tiempo muestran sendas rectas, y la edad del universo teórica,

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} = \frac{2 \cdot 3.086 \times 10^{19}}{3 \cdot 67 \cdot 3.154 \times 10^{16}} = 9,74 \text{ Gyr}$$

Coincide con la que predice la calculadora.

II-B. Universos dominados por radiación

En segundo lugar, se considera el caso de un universo plano dominado por radiación: $\Omega_R = 1$, $\Omega_M = \Omega_\Lambda = 0$.

Teoría: Se calcula en primer lugar la edad del universo mediante la Ec. (11):

$$t(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^{\frac{1}{1+z}} a' da' = \frac{1}{2H_0(1+z)^2} \quad (21)$$

Para el valor $z = 0$ se obtiene la edad actual del universo:

$$t_0 = \frac{1}{2H_0}$$

Para calcular una expresión explícita para el factor de escala $a(t)$ se plantea la ecuación de Friedmann correspondiente, obteniendo así una ecuación diferencial:

$$\dot{a}(t) = H_0 a(t)^{-1}$$

Igual que antes, esta EDO se puede resolver separando variables. Teniendo en cuenta las condiciones iniciales del factor de escala y la expresión de la edad actual del universo, el factor de escala es

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2} = (2H_0 t)^{1/2} \quad (22)$$

Dividiendo $\dot{a}(t)$ y $a(t)$ se calcula el parámetro de Hubble:

$$H(t) = H_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-1} = \frac{2}{t} \quad (23)$$

Como ocurría anteriormente, esta expresión implica que el radio de Hubble crece linealmente con el tiempo, esto es,

$$d_H(t) = \frac{c}{H_0 t_0} t = \frac{ct}{2} \quad (24)$$

Se calcula ahora el único concepto de horizontes que se maneja en esta práctica. Tomando la Ec. (15)

y sustituyendo en la Ec. (7), se calcula la expresión correspondiente al horizonte de partículas:

$$d_P(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} \int_0^t \frac{cdt'}{(t'/t_0)^{1/2}} = 2ct \quad (25)$$

Por último se calculan las distancias de luminosidad y angular para este universo. Utilizando la Ec. (12), y teniendo en cuenta que $E(z') = (1 + z')^2$, la expresión de la distancia de luminosidad toma la forma

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')^2} = \frac{cz}{H_0} \quad (26)$$

y la distancia angular, utilizando la relación dada en la Ec. (13), será

$$d_A(z) = \frac{cz}{H_0(1+z)^2} \quad (27)$$

Práctica: Los resultados aparecen a continuación.

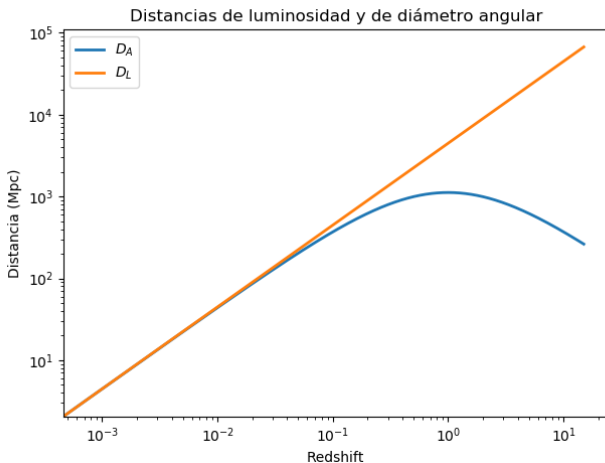


Figura 4. Distancias de luminosidad y de diámetro angular en función del redshift para un universo dominado por radiación

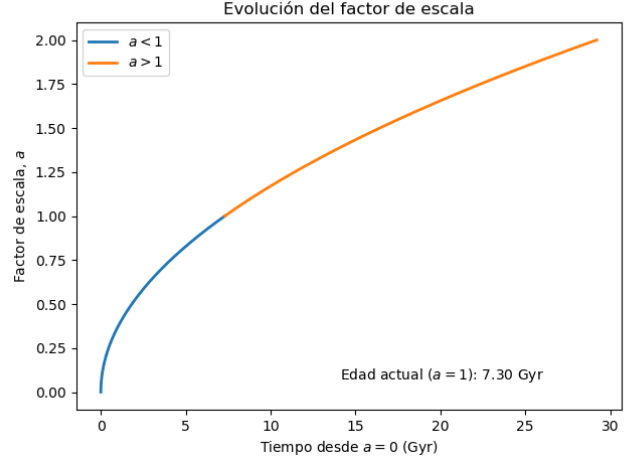


Figura 5. Evolución temporal del factor de escala para un universo dominado por radiación

El universo dominado por radiación es muy similar al dominado por materia en cuanto a las distancias, la evolución del factor de escala, y el radio de Hubble y el horizonte de partículas. La principal diferencia es que la velocidad de expansión es menor, al ser $a \propto t^{1/2}$. La edad del universo teórica coincide de nuevo con la que predice la calculadora,

$$t_0 = \frac{1}{2H_0} = \frac{3.086 \times 10^{19}}{2 \cdot 67 \cdot 3.154 \times 10^{16}} = 7,30 \text{ Gyr}$$

II-C. Universos dominados por la constante cosmológica

Para finalizar el bloque de universos dominados por un único fluido, se analiza el caso en que $\Omega_\Lambda = 1$ y $\Omega_M = \Omega_R = 0$. Esto equivale a que la constante cosmológica Λ toma, por primera vez hasta ahora, un valor no nulo. En este caso, $\Lambda > 0$. A este universo también se le llama Universo de de Sitter.

Teoría: Para este universo hay varias magnitudes que se calcularán cuyos resultados pueden parecer extraños a priori (el significado de estos resultados se discutirá en la parte relacionada con la práctica). Tal es el caso de la edad del universo. Si se toma la Ec. (11) y se computa la integral, se obtendrá un resultado bastante distinto al de los dos anteriores universos:

$$t(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^{\frac{1}{1+z}} \frac{da'}{a'} = \infty \quad (28)$$

En cuanto al factor de escala, al sustituir las proporciones en la ecuación de Friedmann se llega a la siguiente EDO:

$$\dot{a}(t) = H_0 a(t)$$

Esta ecuación diferencial es característica de una función exponencial. Aplicando las condiciones iniciales a tiempo actual t_0 (este tiempo, debido al resultado de la Ec. (28), es desconocido), se llega a la siguiente solución:

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)} \quad (29)$$

Dividiendo $\dot{a}(t)$ y $a(t)$ se observa que el parámetro de Hubble permanece constante:

$$H(t) \equiv H_0 \quad (30)$$

Que el parámetro de Hubble sea constante implica que el radio de Hubble también lo será:

$$d_H(t) \equiv \frac{c}{H_0} \quad (31)$$

En el caso del horizonte de partículas, antes de hacer ningún cálculo, se debe analizar la definición del concepto. Por la Ec. (28) se ha visto que no se puede tomar ningún origen de tiempos, por lo que calcular el horizonte de partículas mediante la Ec. (7) sería erróneo, ya que no tiene sentido integrar desde $t = 0$ si no existe $t = 0$. Por tanto, el horizonte de partículas para este universo será

$$d_P(t) = \infty \quad (32)$$

Finalmente se calculan el resto de conceptos sobre distancias. Se comienza con la distancia de luminosidad. Para ello, se aplica la Ec. (12):

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z dz' = \frac{cz(1+z)}{H_0} \quad (33)$$

y la distancia angular, utilizando la relación dada en la Ec. (13), será

$$d_A(z) = \frac{cz}{H_0(1+z)} \quad (34)$$

Práctica: Los resultados de nuestra calculadora cosmológica para este universo no son precisos debida a la divergencia del factor de escala en el modelo. A pesar de ello, se pueden observar algunas propiedades a partir de lo obtenido.

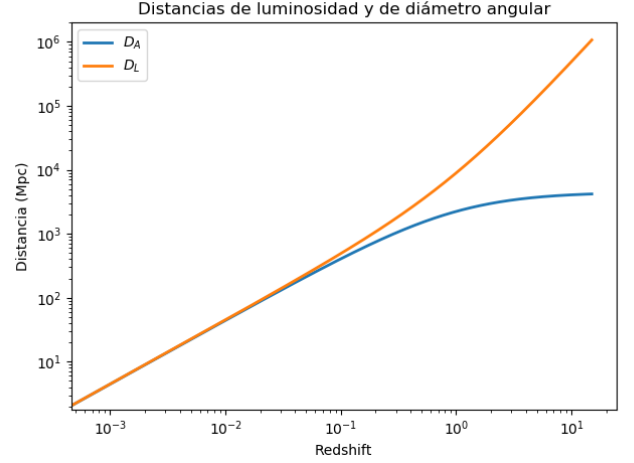


Figura 6. Distancias de luminosidad y de diámetro angular en función del redshift para un universo dominado por energía oscura

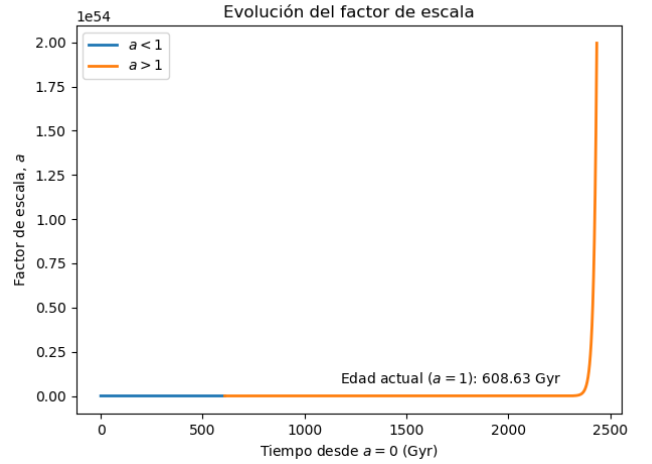


Figura 7. Evolución temporal del factor de escala para un universo dominado por energía oscura

Se puede observar una diferencia importante en la evolución de las distancias (la separación se mantiene, pero no así su perfil), y la divergencia característica del factor de escala (nótese que la escala del eje de ordenadas conlleva un factor 10^{54}). La edad del universo que aparece es muy grande pero no infinita, fruto de errores a la hora de resolver numéricamente las ecuaciones.

II-D. Comparación de los universos con un solo fluido

Se va a comparar ahora los tres tipos de universo plano. Para ello se ha confeccionado la Tabla I, en

Ω_M	Ω_R	Ω_Λ	t_0	$a(t)$	$H(t)$	$d_H(t)$	$d_P(t)$
1	0	0	$2/3H_0$	$(t/t_0)^{2/3}$	$2/3t$	$3ct/2$	$3ct$
0	1	0	$1/2H_0$	$(t/t_0)^{1/2}$	$2/t$	$ct/2$	$2ct$
0	0	1	∞	$e^{H_0(t-t_0)}$	H_0	c/H_0	∞

Cuadro I

COMPARACIÓN DE LOS DIFERENTES CONCEPTOS ANALIZADOS PARA CADA UNO DE LOS UNIVERSOS EN LOS QUE DOMINA UN SOLO FLUIDO.

la que aparecen varios parámetros de interés cuyos valores se discutirán ahora.

En primer lugar, se analiza la fila relativa a $\Omega_\Lambda = 1$. Parece que para este universo ocurren cosas extrañas: el Universo tiene una edad infinita, y el horizonte de partículas también diverge. Si se analiza la expresión para el factor de escala, se puede ver que este es exponencial (no hay ningún t en el que el factor de escala se anule), mientras que la constante de Hubble permanece constante. Estas características indican que, en realidad, este universo está en estado estacionario. Un universo en estado estacionario es un tipo de universo en el que no hay ningún punto del espacio privilegiado ni ningún tiempo. En este tipo de universos, la densidad permanece constante, al igual que la constante de Hubble. Este principio cosmológico perfecto es el que provoca que el universo sea infinitamente antiguo y el horizonte de partículas infinitamente grande.

En cuanto a los universos en los que domina radiación, se puede comprobar que su comportamiento es bastante similar salvando algunas diferencias en la expresión correspondiente al factor de escala $a(t)$. Para ambos universos, hay un tiempo en el que $a(t) = 0$ ($t = 0$). Esto quiere decir que estos universos tienen Big Bang, es decir, que había un tiempo en el que la comprensión del espacio era máxima y a partir del cual se comenzó a expandir.

Si se comparan las expresiones del factor de escala para los tres universos, se puede ver que para los dos primeros \dot{a} cada vez toma valores más pequeños (esto también se comprueba en la expresión de $H(t)$, la cual es una hipérbola), mientras que en el universo dominado por Λ la aceleración es exponencial. A pesar de esto, en los dos primeros universos la expansión nunca llega a frenarse del todo, esto es, \dot{a} nunca se anula.

II-E. Universos con radiación y materia

Se puede suponer ahora el caso en el que hay más de un fluido en la ecuación; en concreto, se va a considerar que los componentes del universo son materia y radiación, dejando $\Omega_\Lambda = 0$.

Teoría: En este caso, solo se va a trabajar de manera teórica con la ecuación relativa al factor de escala, ya que el resto de conceptos son más complicados de calcular. Si se llama P a la proporción radiación-materia (esto es, $P = \Omega_R/\Omega_M$), la ecuación de Friedmann correspondiente al universo planteado tendría la forma

$$H_0 = \frac{a\dot{a}}{\Omega_R^{1/2}} \left(1 + \frac{a}{P}\right)$$

La solución de esta ecuación diferencial es (ver [5]), escribiendo el tiempo t en función del factor de escala a ,

$$t(a) = \frac{4P^2}{3H_0\Omega_R^{1/2}} \left[1 - \left(1 - \frac{a}{2P}\right) \left(1 + \frac{a}{P}\right)^{1/2}\right] \quad (35)$$

Se estudia ahora el comportamiento de esta ecuación en función de cómo se relacionan P y a . Cuando $a \ll P$, si se resuelve directamente la ecuación diferencial se puede comprobar que a se aproxima a

$$a(t) \approx (2\sqrt{\Omega_R}H_0t)^{1/2}$$

Para el otro extremo en que $a \gg P$, la expresión de a en función de t será

$$a(t) \approx \left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_\Lambda}H_0t\right)$$

Práctica: Los resultados obtenidos son los esperables, intermedios entre los universos dominados por radiación y por materia, y también concuerdan con la teoría. Los parámetros utilizados han sido los siguientes: $\Omega_R = \Omega_M = 0.5$.

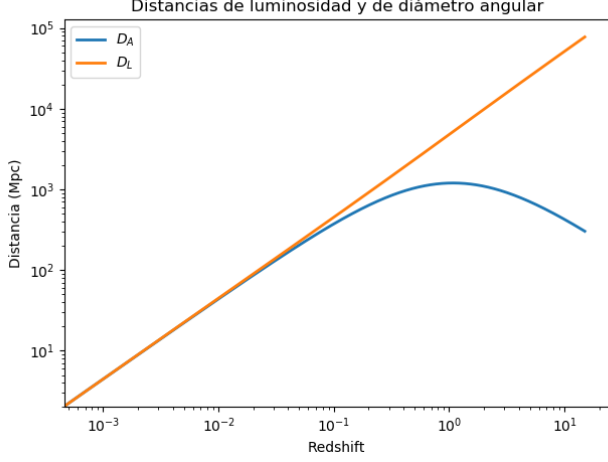


Figura 8. Distancias de luminosidad y de diámetro angular en función del redshift para un universo en igualdad de materia y energía

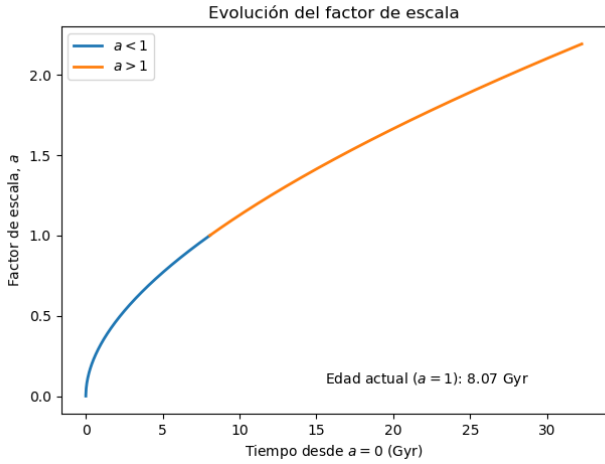


Figura 9. Evolución temporal del factor de escala para un universo en igualdad de materia y energía

Como puede verse, la edad actual del universo se encuentra entre las dos obtenidas con los universos anteriores, y las distancias de luminosidad y de diámetro angular siguen el mismo comportamiento.

II-F. Universos con constante cosmológica negativa

Se analiza ahora un caso bastante diferente a los anteriores: se va a considerar un universo con constante cosmológica negativa. En concreto, se va a utilizar $\Omega_M = 1.1$, $\Omega_R = 0$ y $\Omega_\Lambda = -0.1$. El hecho de que Ω_Λ tome valores negativos tendrá

consecuencias bastante interesantes en la evolución del universo.

Este universo se va analizar fundamentalmente desde un punto de vista teórico, ya que la calculadora programada ha dado algún error a la hora de representar el factor de escala (esto se comentará más adelante). Aun así, se ilustrará con gráficas extraídas de otras fuentes.

Si se escribe $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M$, la ecuación de Friedmann para este Universo es

$$\dot{a} = H_0 a \sqrt{\Omega_M a^{-3} + (1 - \Omega_M)} \quad (36)$$

Igualando la derivada a cero, se puede encontrar un extremo relativo para el factor de escala. Este extremo es un máximo, y el factor de escala tomará en este punto el valor

$$a_{max} = \left(\frac{\Omega_M}{\Omega_M - 1} \right)^{1/3}$$

Tras llegar a este máximo, el factor de escala $a(t)$ comienza a decrecer, llegando hasta $a(t) = 0$ donde se produce el colapso del universo. En la figura II-F se ha representado gráficamente la evolución del factor de escala para un universo que tiene constante cosmológica negativa.

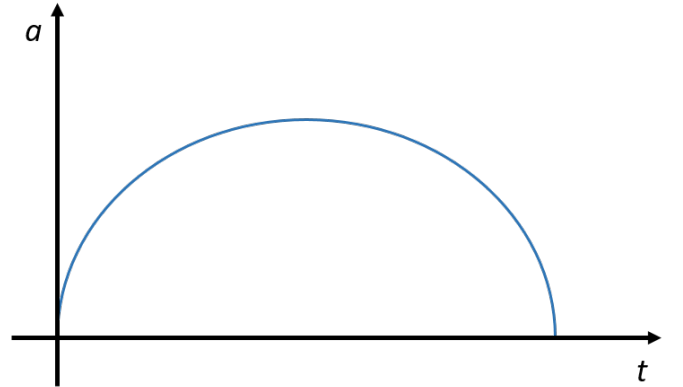


Figura 10. Diagrama relativo a la evolución del factor de escala para un universo plano con $\Lambda < 0$.

Además de universos con constante cosmológica negativa, se pueden producir colapsos en universos con curvatura positiva, es decir, en universos cerrados. Sin embargo, este documento se centra en el análisis de universos euclídeos por lo que no se va a estudiar este caso. Los resultados de nuestra calculadora (se muestra únicamente la evolución temporal del factor de escala) son los siguientes:

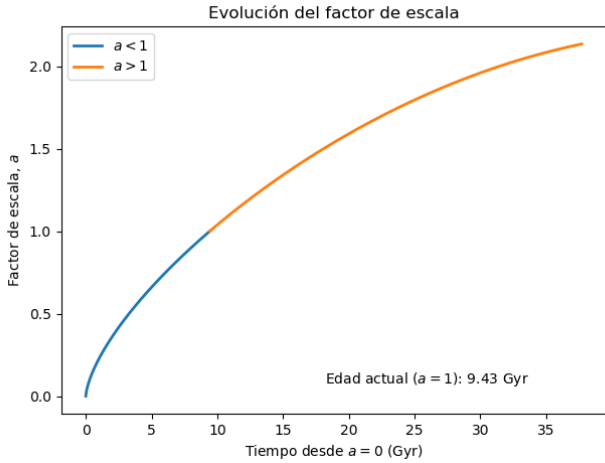


Figura 11. Evolución temporal del factor de escala para un universo con parámetros $\Omega_M = 1.1$, $\Omega_\Lambda = -0.1$.

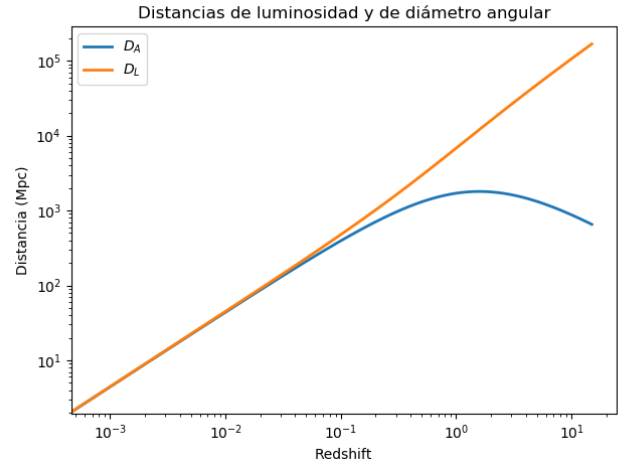


Figura 12. Distancias de luminosidad y de diámetro angular en función del redshift para un universo realista

Para este universo en particular, la calculadora sí muestra el resultado correcto. Puede apreciarse la tendencia del factor de escala a frenarse, que eventualmente dará lugar a una reducción y posterior colapso. Si la constante cosmológica se hace muy negativa, la calculadora no es capaz de procesar lo que sucede posteriormente al punto en el que $H = 0$. (Nota: hemos trabajado durante varias horas en este aspecto, y la única forma en la que hemos conseguido que se analice este caso correctamente es 'trucar' la gráfica con una simetría respecto de una línea horizontal a partir del punto en el que $H = 0$. Esto nos parecía hacer trampa, así que hemos optado por mantener el funcionamiento original, a pesar de que da lugar a un resultado erróneo cuando la constante cosmológica es muy negativa).

II-G. Universo de Benchmark (modelo realista)

Por último, se estudia el caso del universo realista, es decir, el conjunto de parámetros cosmológicos que mejor describen nuestro universo de acuerdo con los últimos datos de la misión Planck [4]. Los valores utilizados son los siguientes: $\Omega_R = 0$, $\Omega_M = 0.315$, $\Omega_\Lambda = 0.685$, $H_0 = 67.4$ (km/s)/Mpc.

Los resultados obtenidos con nuestra calculadora son los siguientes.

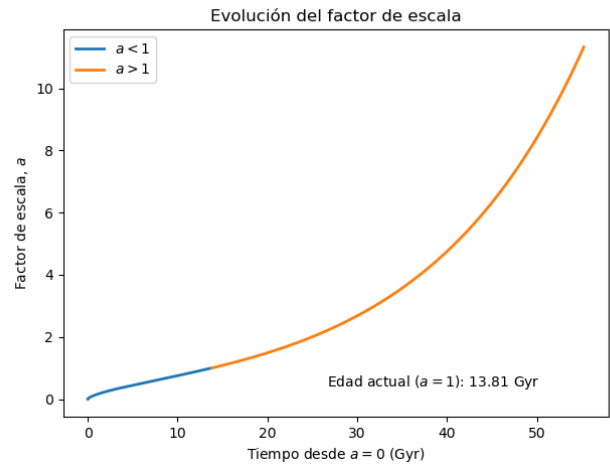


Figura 13. Evolución temporal del factor de escala para un universo realista

Como se ve, en el universo realista, compuesto fundamentalmente por materia y por una constante cosmológica, la expansión es acelerada. La velocidad relativa de la expansión se estabiliza a partir de los 30-40 Gyr, tomando la constante de Hubble un valor cercano a los $H = 56$ (km/s)/Mpc. En consecuencia, el universo que conocemos no dejará de expandirse en un futuro, y lo hará de forma exponencial, de una forma más similar a la del universo dominado por energía oscura que a la de los universos dominados por materia y radiación.

El valor obtenido de la edad del universo, $t_0 = 13.81$ Gyr, es perfectamente coherente con el propuesto por el artículo de la colaboración Planck, y en particular, por el valor basado en

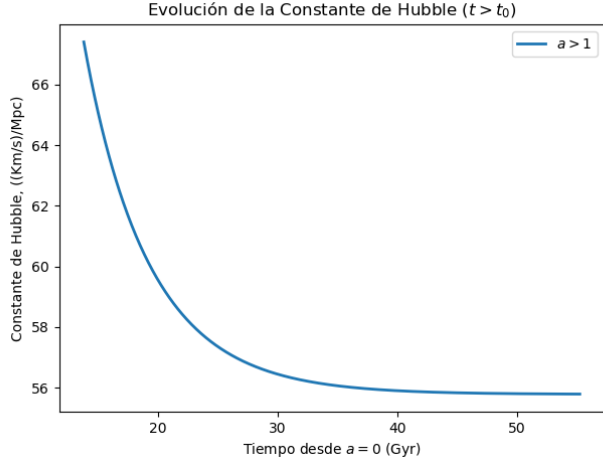


Figura 14. Evolución temporal de la constante de Hubble en el futuro ($t < t_0$) para un universo realista

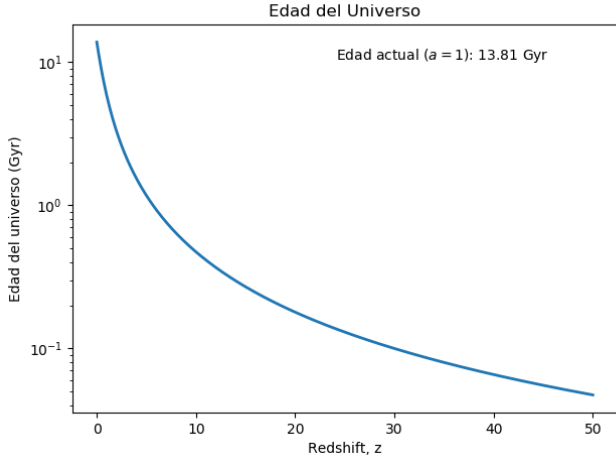


Figura 15. Edad del universo en función del redshift para un universo realista

TT,TE,EE+lowE+lensing, $t_0 = 13.797 \pm 0.023$ Gyr. Los valores actuales del horizonte de partículas y del radio de Hubble que se obtienen con nuestra calculadora para $t = t_0$ son respectivamente los siguientes: $h_P = 15.67$ Gpc, $r_H = 4.35$ Gpc. El primero de ellos tiende a crecer a medida que la edad del universo aumenta, mientras que el radio de Hubble se estabiliza en torno a los 5.3 Gpc.

Cambio en la constante H_0 : Para este modelo realista, hemos analizado el caso en el que la constante de Hubble en el tiempo actual es pequeña. Los resultados son idénticos a los anteriores en cuanto al comportamiento asintótico de los parámetros, pero se experimenta una variación relativa muy grande

entre los mismos. Con un parámetro de Hubble $H_0 = 15$ (km/s)/Mpc, la edad del universo en $t = t_0$ aumenta hasta los 62 Gyr.

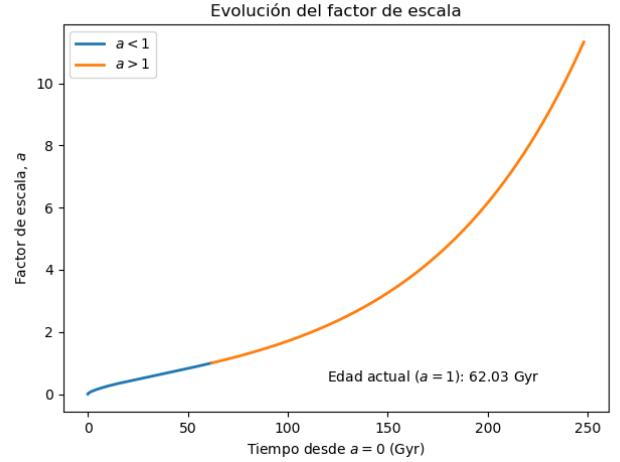


Figura 16. Evolución del factor de escala para un universo realista, con una constante de Hubble $H_0 = 15$ (km/s)/Mpc.

III. CONCLUSIONES

Se ha programado una calculadora cosmológica capaz de, dado un universo plano con unas ciertas densidades de materia y radiación, constante cosmológica y constante de Hubble, analizar la evolución de distintos parámetros cosmológicos a lo largo del tiempo, tanto anterior como posterior al tiempo actual. Al mismo tiempo, se han desarrollado de forma teórica las ecuaciones necesarias para poder estudiar la dinámica de los universos, particularizando con detalle los casos en los que los universos están dominados por una única componente, y se ha realizado una comparación y un análisis de los resultados teóricos y los obtenidos con la calculadora.

A la luz de los resultados, podemos afirmar que la calculadora funciona correctamente para todos los modelos que se han probado, ya que la comparación con la teoría y los resultados experimentales (en el caso del universo Benchmark) es positiva. A excepción de los universos con constante cosmológica negativa, la calculadora se comporta correctamente y realiza predicciones fiables en todas las pruebas que se le han realizado. Concluimos que esta calculadora puede tener un potencial didáctico elevado, ya que de forma muy sencilla y fiable permite visualizar a grandes rasgos las características de

distintos tipos de universos planos. Extender esta calculadora a universos con curvatura no nula no debería ser una tarea complicada, a raíz de las pocas modificaciones que se encuentran en las ecuaciones de Friedmann. Por otro lado, la salida de resultados en ficheros de texto permite realizar un análisis más profundo de los datos si se requiere, sin necesidad de reprogramar la calculadora.

Las principales conclusiones que podemos extraer en cuanto al trabajo realizado se agrupan en dos partes. La primera es la necesidad de considerar el universo como un fluido perfecto, y la validez de esta afirmación de cara al cálculo de parámetros cosmológicos. Si este modelo no fuese válido, la tarea de estudiar la evolución del universo sería mucho más compleja, y probablemente impracticable al nivel de Grado.

La segunda es el impacto que cada parámetro cosmológico tiene en los distintos tipos de universo. A raíz de lo expuesto en este informe, junto con un estudio de la teoría y muchas otras pruebas que no se incluyen, se ha podido observar cómo varía la evolución de los universos en cada caso. La densidad de materia Ω_M y la densidad de radiación Ω_R , son las principales responsables de que los universos gocen de una cierta estabilidad. Valores grandes de estas constantes implican crecimientos controlados, en los que la constante de Hubble tiende a disminuir, pero en los que el universo no diverge rápidamente. Por el contrario, la constante cosmológica Ω_Λ es la mayor responsable del comportamiento asintótico del universo, cuando el tiempo se hace grande. En caso de tener una constante cosmológica grande, el crecimiento del universo es exponencial (véase el universo dominado por la constante cosmológica, o en menor medida, el modelo realista). Cuando ésta es negativa, sin embargo, el universo evoluciona hacia un *big crunch*, donde llegado un punto se comienza a contraer hasta volver a una situación como la del Big Bang. En cuanto a la constante de Hubble, no tiene un impacto fuerte en el comportamiento asintótico del universo (siempre que se mantenga positiva), pero sí en el valor de los parámetros. Este hecho es especialmente notable en la edad del universo actual, el horizonte de partículas y el radio de Hubble.

A pesar de que los universos planos tienen un comportamiento muy estándar, que depende funda-

mentalmente de la constante cosmológica, los universos con curvatura pueden dar lugar a escenarios distintos. Por ejemplo, un universo con curvatura positiva dominado por materia puede colapsar de forma similar a como lo haría un universo con constante cosmológica negativa.

APÉNDICE: MANUAL DE USO Y EXPLICACIÓN DEL CÓDIGO

Manual de uso

Nuestra calculadora cosmológica se compone simplemente de dos archivos de código Python 3. El primero de ellos, `main.py`, es un script ejecutable, mientras que el segundo, `calcosmo.py`, es un módulo que contiene todas las funciones necesarias para ejecutar el programa. Ambos archivos deben estar en la misma carpeta para su correcto funcionamiento. El código está documentado y hay algunos comentarios internos, que (creemos que) son suficientes para su comprensión.

La forma de ejecutar el programa es, por ejemplo, desde un terminal de Linux con Python 3 instalado, o desde cualquier entorno de desarrollo de Python (Spyder, Canopy o similar). Desde la consola de Linux, es necesario entrar en la carpeta que contiene a los archivos y escribir simplemente:

```
$ python3 main.py
```

A partir de ese punto, el programa guiará al usuario, que deberá introducir las constantes cosmológicas (no es necesario que estén normalizadas, el programa las renormalizará automáticamente), la constante de Hubble, en (km/s)/Mpc, y deberá seleccionar el tipo de resultado que desea obtener. Existen 4 opciones, que se corresponden con los puntos especificados en el guión. Cada opción solicitará al usuario un nombre de archivo para los ficheros de salida: en caso de dejarlo en blanco, no se creará ninguno. Cada opción hace lo siguiente:

Opción 1: Distancias: El programa calcula la distancia de luminosidad d_L y la distancia de diámetro angular d_A en función del redshift, z . El resultado en pantalla es una gráfica con ambas distancias, en escala logarítmica. Los ficheros de salida, si se han seleccionado, son dos: la imagen que se muestra en pantalla en formato .png, y un fichero .txt con los datos, por columnas y separados por un espacio, del redshift y las dos distancias en Mpc. La primera fila es un encabezamiento que indica la variable representada en cada columna y sus unidades. El formato de los datos es similar en todos los casos.

Opción 2: Factor de escala: Se calcula la evolución del factor de escala $a(t)$ y del parámetro de Hubble, $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$, en función de la edad

del Universo. Esta evolución comienza en $t = 0$, definido como el tiempo tal que $a(0) = 0$. El resultado en pantalla son tres figuras: una primera con la evolución del factor de escala, y dos con la evolución del parámetro de Hubble, una para $a < 1$ (a escala logarítmica) y otra para $a > 1$. Se divide en dos por las fuertes diferencias que existen en ambas regiones. Si se seleccionan los ficheros de salida, se obtienen las tres figuras en formato .png, y un .txt con los datos.

Opción 3: Horizontes: Se obtiene el valor del radio de Hubble, d_H , y del horizonte de partículas d_P , en función del tiempo, y en unidades de distancia propia. El resultado son dos figuras, con la evolución temporal de cada variable y los valores para $t = t_0$ (o $a = 1$). Los ficheros opcionales de salida son ambas figuras y de nuevo los datos en un .txt.

Opción 4: Edad del Universo: El programa calcula la edad del Universo en función del redshift, z . El resultado en pantalla es una única gráfica donde se representa la edad del Universo en Gyr frente al redshift, que varía entre 0 y 50. Los ficheros de salida son de nuevo esta figura y los datos en .txt.

Al terminar de calcular y mostrar los datos, el programa preguntará al usuario si desea realizar más operaciones con las mismas constantes cosmológicas. Esto se ha hecho así para no tener que introducirlas en repetidas ocasiones. Si se desea cambiar de parámetros, se debe volver a iniciar el programa de cero.

Explicación del código

Nuestro código se compone fundamentalmente de cuatro métodos en el módulo `calcosmo` y un script principal, `main`, que los ejecuta. Vamos a explicar cada parte por separado. Los cuatro métodos del módulo `calcosmo` requieren los mismos parámetros de entrada: las constantes cosmológicas y el nombre del fichero de salida.

Todas las gráficas de esta calculadora se representan utilizando la librería `matplotlib.pyplot` y algunas de sus funciones básicas. El procesamiento de datos se realiza utilizando métodos y arrays de la clase `numpy`, y estructuras de datos de Python 3, fundamentalmente listas.

Script principal: Este script no tiene nada en especial al margen de los bucles de entrada de datos, renormalización de constantes, salida en pantalla, y algún pequeño tratamiento de las excepciones más previsibles. Lo que sí incluye es una explicación de lo que realiza el código en forma de comentarios de documentación. Los métodos del módulo `calcosmo` pueden ejecutarse sin necesidad de llamar a este script, aunque se incluye por comodidad y facilidad de uso.

Método `modeloDistancia`: Este método calcula la distancia de luminosidad mediante una integral numérica, cuya variable independiente es el redshift, z . La integral numérica se calcula progresivamente mediante la regla trapezoidal, que se ha implementado manualmente. En concreto, se aproxima

$$I(z + dz) = \int_0^{z+dz} \frac{dz'}{E(z')} = I(z) + \int_z^{z+dz} \frac{dz'}{E(z')} \\ \approx I(z) + \frac{dz}{2} \left(\frac{1}{E(z)} + \frac{1}{E(z + dz)} \right)$$

donde $E(z) = \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_R(1+z)^4}$. Posteriormente, calcula la distancia de diámetro angular aplicando, sencillamente,

$$d_A(z) = d_L(z)(1+z)^{-2}$$

El último paso es guardar los datos y representar las imágenes.

Método `modeloEscala`: Este método permite calcular la evolución del factor de escala $a(t)$ y del parámetro de Hubble $H(t)$ a lo largo del tiempo. Para comenzar, se calcula la edad del Universo,

$$t_0 = \int_0^1 \frac{da}{H_0 a \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M a^{-3} + \Omega_R a^{-4}}}$$

Esto se realiza mediante el método `quad()`, de la clase `scipy.integrate`. Este módulo de integración numérica utiliza reglas de cuadratura para integrar, y que provienen de librerías heredadas de FORTRAN.

Para encontrar la evolución del factor de escala en el tiempo, se resuelve la ecuación diferencial ordinaria siguiente de forma numérica:

$$\dot{a}(t) = H_0 a \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M a^{-3} + \Omega_R a^{-4}}$$

Esta EDO se resuelve utilizando el método `solve_ivp` de la clase `scipy.integrate`, que

utiliza un esquema Runge-Kutta acoplado de grados 4-5. Resolvemos la EDO en dos fases: Para $t > t_0$, llegando hasta $t = 4t_0$, y para $t < t_0$, alcanzando el punto 0 correspondiente al Big Bang. La condición inicial en ambos casos es que $a(t_0) = 1$, y es fundamental que, para que el tiempo resultante esté en Gyr, se le aplique el factor de conversión siguiente a H_0 :

$$H_0(\text{Gyr}^{-1}) = \frac{3.154 \cdot 10^{16} \text{ Mpc} \cdot \text{s}}{3.086 \cdot 10^{19} \text{ km} \cdot \text{Gyr}} H_0(\text{km/s})/\text{Mpc}$$

Finalmente, se puede calcular $H(t)$ directamente a través de $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$, ya que hemos resuelto la ecuación para encontrar $a(t)$. Los resultados se guardan y se representan numéricamente.

Método `modeloRadios`: Calcula el radio de Hubble d_H y el horizonte de partículas d_P en unidades de distancia propia, en función del tiempo. El primer paso es análogo al del modelo anterior; se calcula el factor de escala resolviendo la ecuación diferencial, y se obtiene un vector de tiempos y de sus factores de escala correspondientes. Para encontrar el valor del horizonte de partículas en un tiempo t_h , se realiza una integral numérica simple, únicamente sumando los valores de la función siguiente en cada tiempo $t < t_h$:

$$d_P(t_h) = a(t_h) \int_0^{t_h} \frac{cdt}{a(t)} \approx a(t_h)c \sum_{t_i=0}^{t_i=t_h} \frac{t_{i+1} - t_i}{a(t_i)}$$

El radio de Hubble se obtiene sencillamente dividiendo la velocidad de la luz, c , entre el parámetro de Hubble $H(t)$ calculado también como en el método anterior. Finalmente, se guardan y muestran los resultados.

Método `modeloEdad`: Este método es, en esencia, el más sencillo. Para hallar la edad del Universo en función del redshift, se realiza de forma idéntica a los métodos anteriores (mediante una integral numérica resuelta con `scipy.integrate.quad()`), utilizando la expresión del redshift en función del factor de escala,

$$t(z) = \int_0^{\frac{1}{1+z}} \frac{da'}{H_0 a' \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M a'^{-3} + \Omega_R a'^{-4}}}$$

con el caso concreto para $z = 0$ de la edad actual del Universo, y la relación entre el redshift y el factor de escala, que se aplica antes de integrar:

$$1 + z = \frac{1}{a(t)}$$

La integral se realiza individualmente para cada tiempo en el vector de tiempos, y finalmente, se representan los resultados y se guardan.

REFERENCIAS

- [1] E. Hubble, "A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 15, no. 3, pp. 168–173, 1929.
- [2] C. H. Lineweaver and T. M. Davis, "Misconceptions about the big bang," *Scientific American*, vol. 292, no. 3, pp. 36–45, 2005.
- [3] S. Weinberg, *Cosmology*. Oxford: Oxford University Press, 2008.
- [4] Planck Collaboration, "Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters," *Astronomy & Astrophysics*, 2018. arXiv:1807.06209 [astro-ph.CO].
- [5] B. Ryden, *Introduction to Cosmology*. San Francisco: Pearson Education, 2003.
- [6] J. Cepa, *Cosmología Física*. Madrid: Akal, 2007.