

# Cálculo de la Eficiencia

## Hibrida

- Elvira Castillo Fernández
- David Gil Bautista
- José Luis Izquierdo Mañas
- Freddy A. Jaramillo López
- Alejandro Jerónimo Fuentes
- Gregorio Vidoy Fajardo



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

# Algoritmos de ordenación

Inicio 2000

Fin 200000

Incremento 500

\*Burbuja

\*Selección

\*Insercción

\*Mergesort

\*Quicksort

\*Heapsort

- Ejecuciones distintos equipos
- Distintos ajustes
- Comparación por familias

# HARDWARE Y SO EN EL QUE HEMOS EVALUADO LOS ALGORITMOS

Windows 10 Home

© 2016 Microsoft Corporation. Todos los derechos reservados.

## Sistema

Procesador: Intel(R) Core(TM) i7-3630QM CPU @ 2.40GHz 2.40 GHz  
Memoria instalada (RAM): 8,00 GB (7,89 GB utilizable)  
Tipo de sistema: Sistema operativo de 64 bits, procesador x64  
Lápiz y entrada táctil: La entrada táctil o manuscrita no está disponible para esta pantalla

Windows 10 Pro

© 2016 Microsoft Corporation. Todos los derechos reservados.

## Sistema

Procesador: Intel(R) Core(TM) i7-3632QM CPU @ 2.20GHz 2.20 GHz  
Memoria instalada (RAM): 8,00 GB (7,86 GB utilizable)  
Tipo de sistema: Sistema operativo de 64 bits, procesador x64

intel i3 a 2,53 GHz con 4 GB de RAM

Intel i7 a 2,40 GHz con 8 GB de RAM

Intel i7 a 2,20 GHz con 8 GB de RAM

Intel i3 a 2,53 GHz

intel i3 a 2,53 GHz con 4GB de RAM.

AMD Turion

```
*-memory
  description: System memory
  physical id: 0
  size: 3820MiB

*-cpu
  product: Intel(R) Core(TM) i3 CPU
  vendor: Intel Corp.
  physical id: 1
  bus info: cpu@0
  size: 1466MHz
  capacity: 2533MHz
  width: 64 bits
```

```
processor      : 0
vendor_id     : AuthenticAMD
cpu family    : 15
model         : 104
model name    : AMD Turion(tm) 64 X2 Mobile Technology TL-60
stepping      : 2
microcode     : 0x83
cpu MHz       : 800.000
cache size    : 512 KB
```

# Algoritmos de ordenación

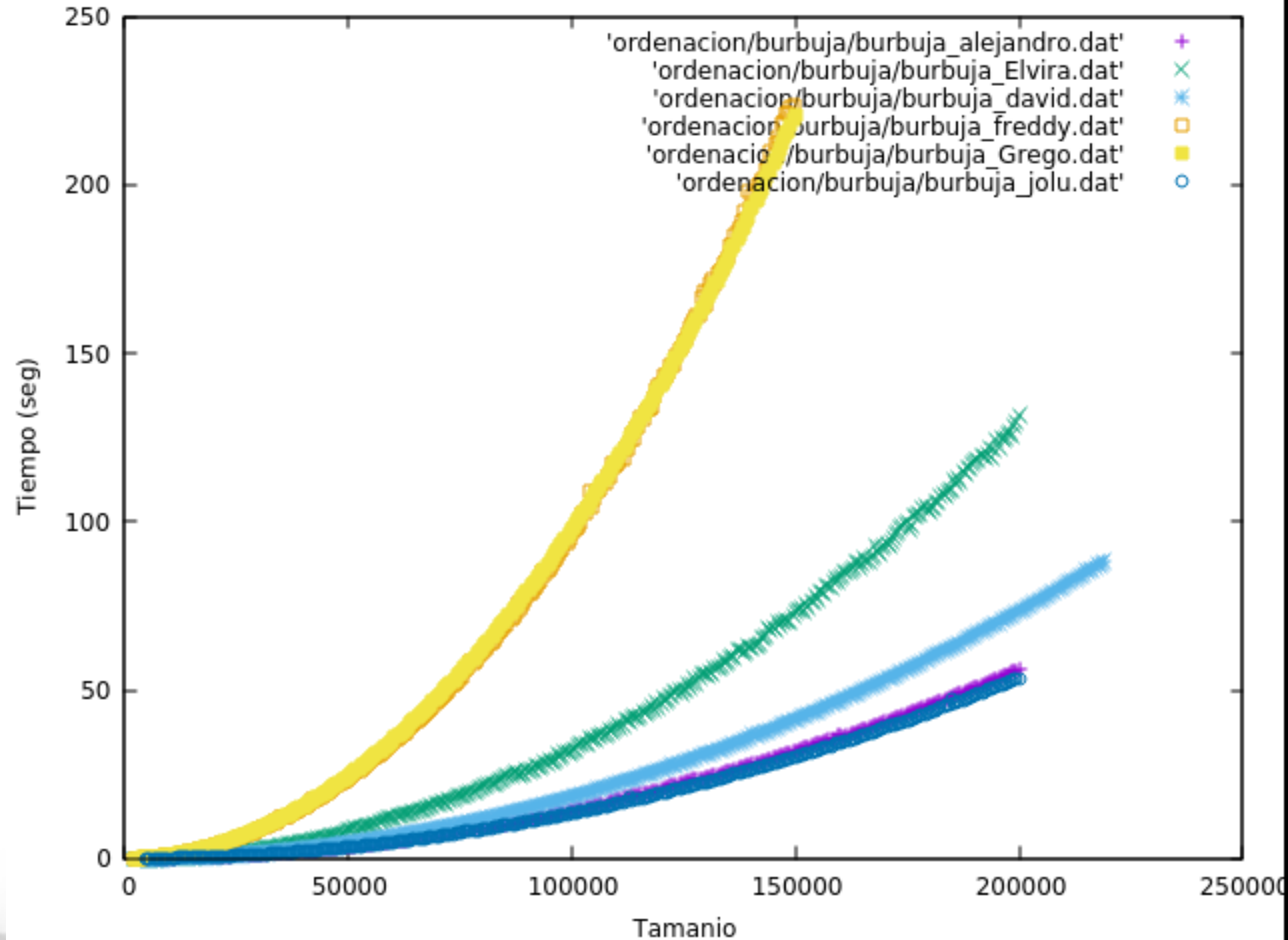
$O(n^2)$

# Eficiencia empírica:

## burbuja

### Familia $O(n^2)$

- Aquí representamos las distintas ejecuciones del algoritmo de ordenación burbuja
- Realizadas en diferente hardware
- Realizadas con optimización en la compilación
- Realizadas sin optimización en la compilación.



- Calculamos los coeficientes para el ajuste a:
- $F(x) = A0 \cdot x^2 + A1 \cdot x + A2$

```
After 13 iterations the fit converged.
final sum of squares of residuals : 170.817
rel. change during last iteration : -5.98409e-12

degrees of freedom      (FIT_NDF)                : 394
rms of residuals        (FIT_STDFIT) = sqrt(WSSR/ndf) : 0.658443
variance of residuals   (reduced chisquare) = WSSR/ndf : 0.433547

Final set of parameters                Asymptotic Standard Error
=====
a0          = 3.21854e-09              +/- 1.125e-11      (0.3496%)
a1          = 3.46647e-06              +/- 2.345e-06      (67.65%)
a2          = -0.0248633               +/- 0.1027         (413%)

correlation matrix of the fit parameters:
          a0      a1      a2
a0      1.000
a1     -0.969    1.000
a2      0.758   -0.874    1.000
```



# Eficiencia híbrida:

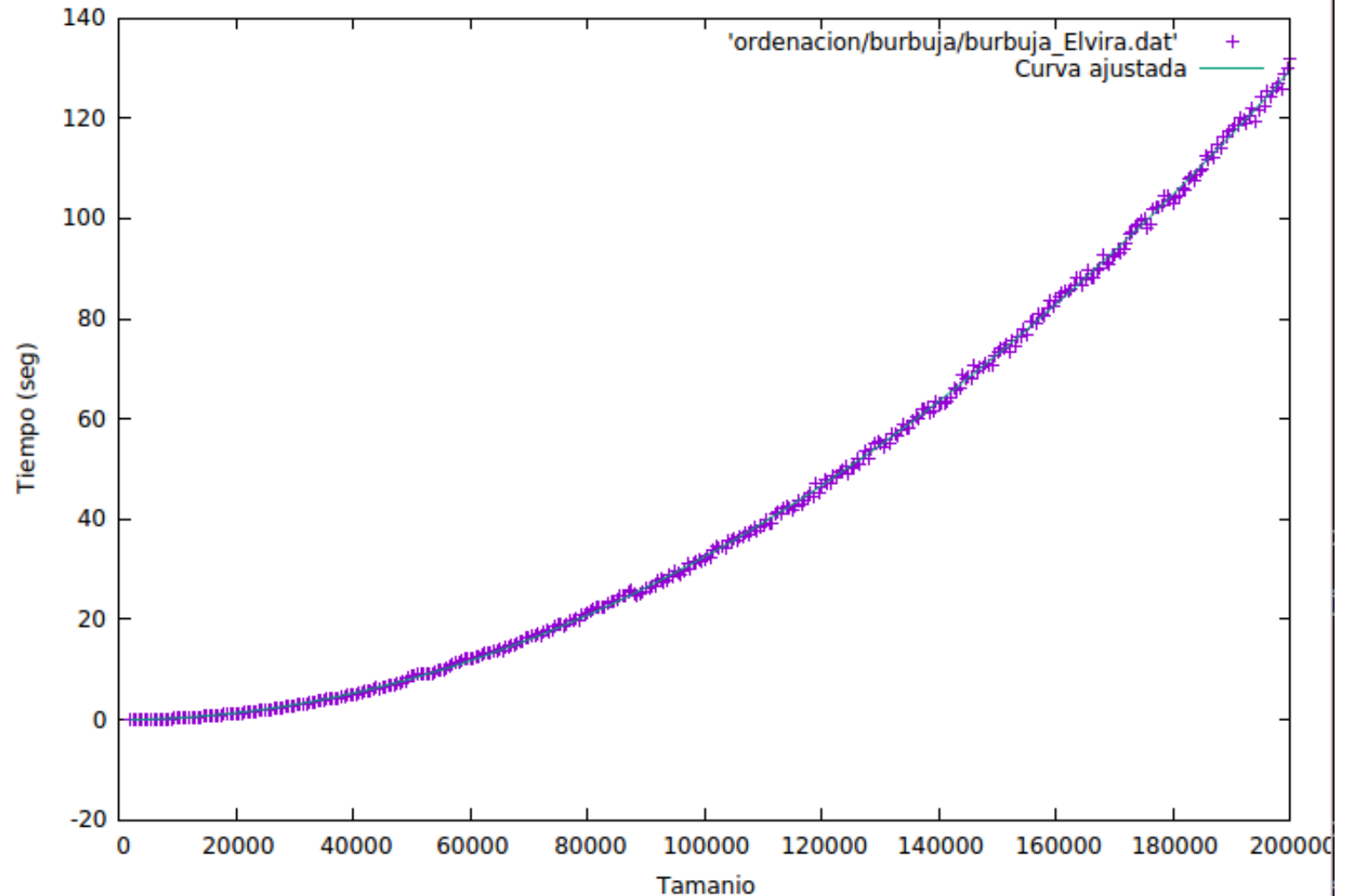
- En esta gráfica mostramos como se ajusta la función
- $F(x) = A0 \cdot x^2 + A1 \cdot x + A2$
- Con los valores de los coeficientes  $A0, A1$  y  $A2$

$a0 = 3.21854e-09$   
 $a1 = 3.46647e-06$   
 $a2 = -0.0248633$

- Se ajusta perfectamente a una eficiencia  $O(n^2)$

## burbuja

## Familia $O(n^2)$



- Calculamos los coeficientes para el ajuste a:
- $F(x) = A0*x^3+A1*x^2+A2*x+A3$

```
After 9 iterations the fit converged.
final sum of squares of residuals : 167.963
rel. change during last iteration : -6.83205e-06

degrees of freedom      (FIT_NDF)                : 393
rms of residuals        (FIT_STDFIT) = sqrt(WSSR/ndf)    : 0.653748
variance of residuals (reduced chisquare) = WSSR/ndf    : 0.427386

Final set of parameters                Asymptotic Standard Error
=====
a0          = 5.73726e-16             +/- 2.22e-16      (38.69%)
a1          = 3.04471e-09             +/- 6.818e-11    (2.239%)
a2          = 1.76333e-05             +/- 5.955e-06    (33.77%)
a3          = -0.273496               +/- 0.1402       (51.25%)

correlation matrix of the fit parameters:
          a0      a1      a2      a3
a0        1.000
a1       -0.986   1.000
a2        0.920  -0.970   1.000
a3       -0.686   0.767  -0.880   1.000
```



# Eficiencia híbrida:

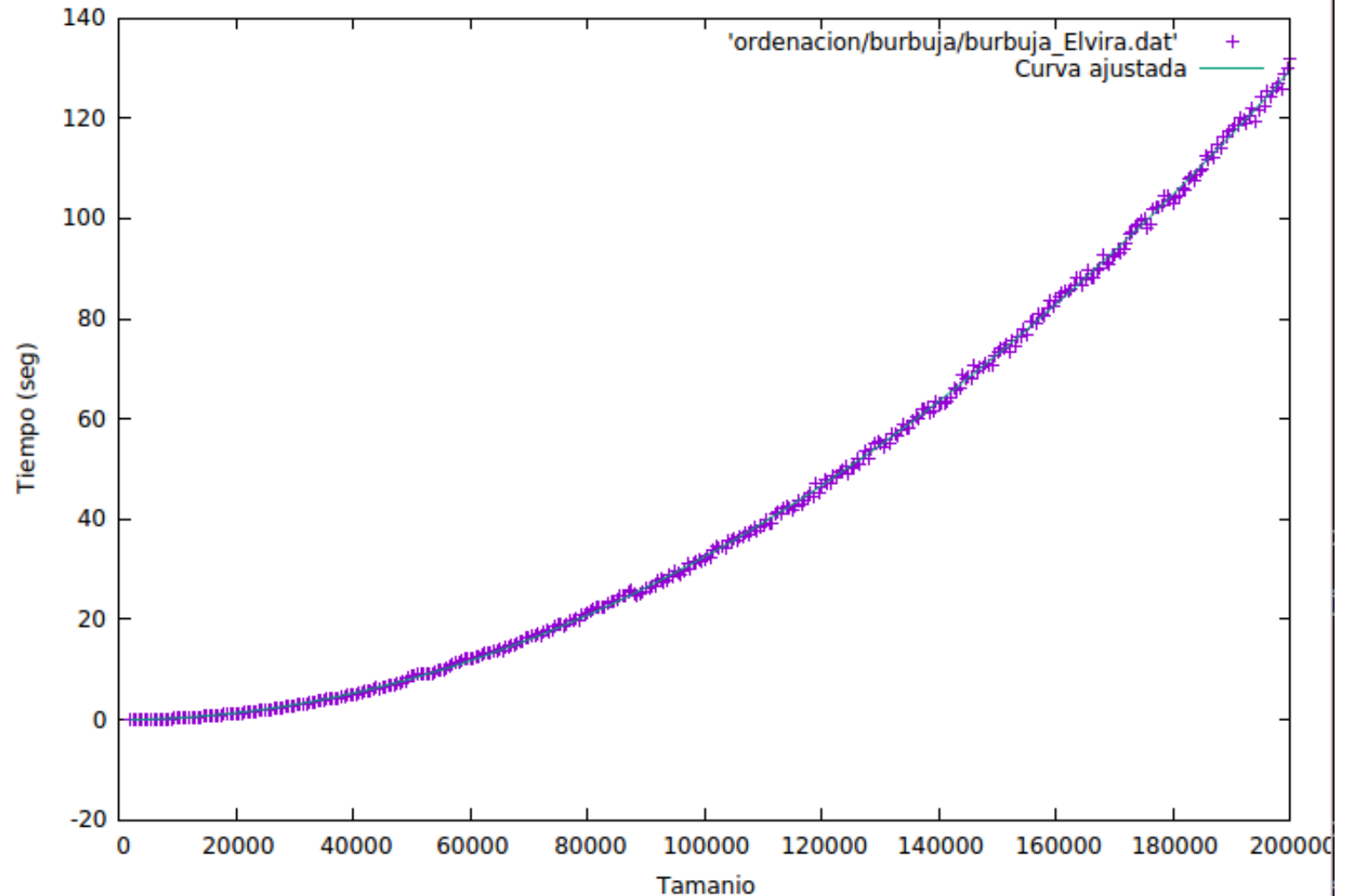
- En esta gráfica mostramos como se ajusta la función
- $F(x) = A0 \cdot x^3 + A1 \cdot x^2 + A2 \cdot x + A3$
- Con los valores de los coeficientes  $A0, A1, A2$  y  $A3$

$a0 = 5.73726e-16$   
 $a1 = 3.04471e-09$   
 $a2 = 1.76333e-05$   
 $a3 = -0.273496$

- Se ajusta perfectamente a una eficiencia  $O(n^3)$

## burbuja

## Familia $O(n^3)$



# Eficiencia hibrida:

## burbuja

## Familia $O(n\log(n))$

- Calculamos los coeficientes para el ajuste a:
- $F(x) = a * x * (\log_{10}(b * x) / \log_{10}(2)) + c$

iter	chisq	delta/lim	lambda	a	b	c
0	2.2639325488e+03	0.00e+00	4.46e+01		3.449998e-04	1.545649e-05
1	2.2639325488e+03	0.00e+00	4.46e+00		3.449998e-04	1.545649e-05
iter	chisq	delta/lim	lambda	a	b	c

After 1 iterations the fit converged.

final sum of squares of residuals : 2263.93

rel. change during last iteration : 0

degrees of freedom (FIT\_NDF) : 394

rms of residuals (FIT\_STDFIT) = sqrt(WSSR/ndf) : 2.39709

variance of residuals (reduced chisquare) = WSSR/ndf : 5.74602

Final set of parameters

Asymptotic Standard Error

=====

=====

a = 0.000345

+/- 4.527e-06 (1.312%)

b = 1.54565e-05

+/- 2.743e-07 (1.775%)

c = 12.0451

+/- 0.5122 (4.253%)

correlation matrix of the fit parameters:

	a	b	c
a	1.000		
b	-0.971	1.000	
c	0.879	-0.953	1.000

# Eficiencia híbrida:

- En esta gráfica mostramos como se ajusta la función
- $F(x) = a * x * (\log_{10}(b * x) / \log_{10}(2)) + c$
- Con los valores de los coeficientes a, b y c

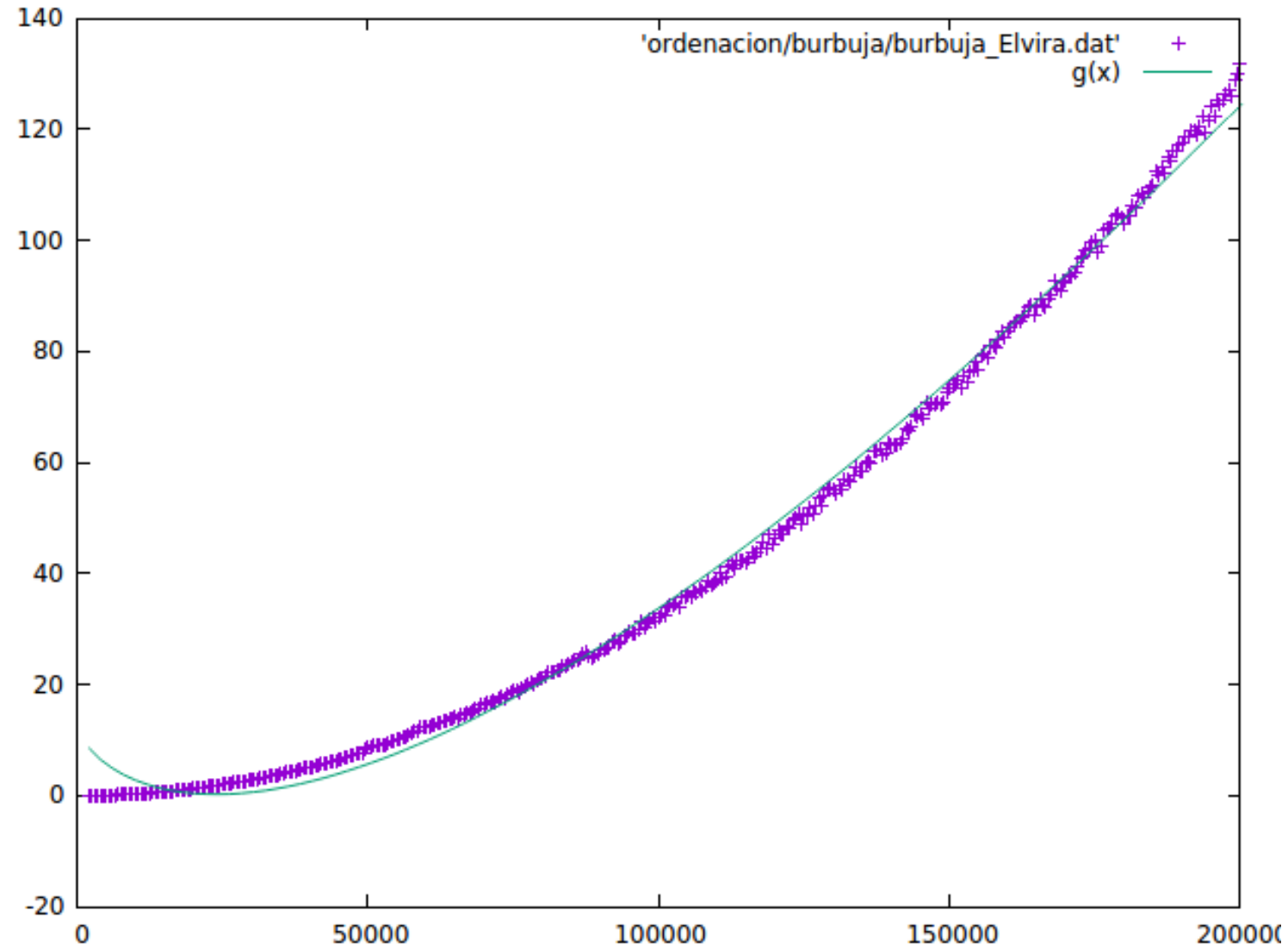
a = 0.000345

b = 1.54565e-05

c = 12.0451

burbuja

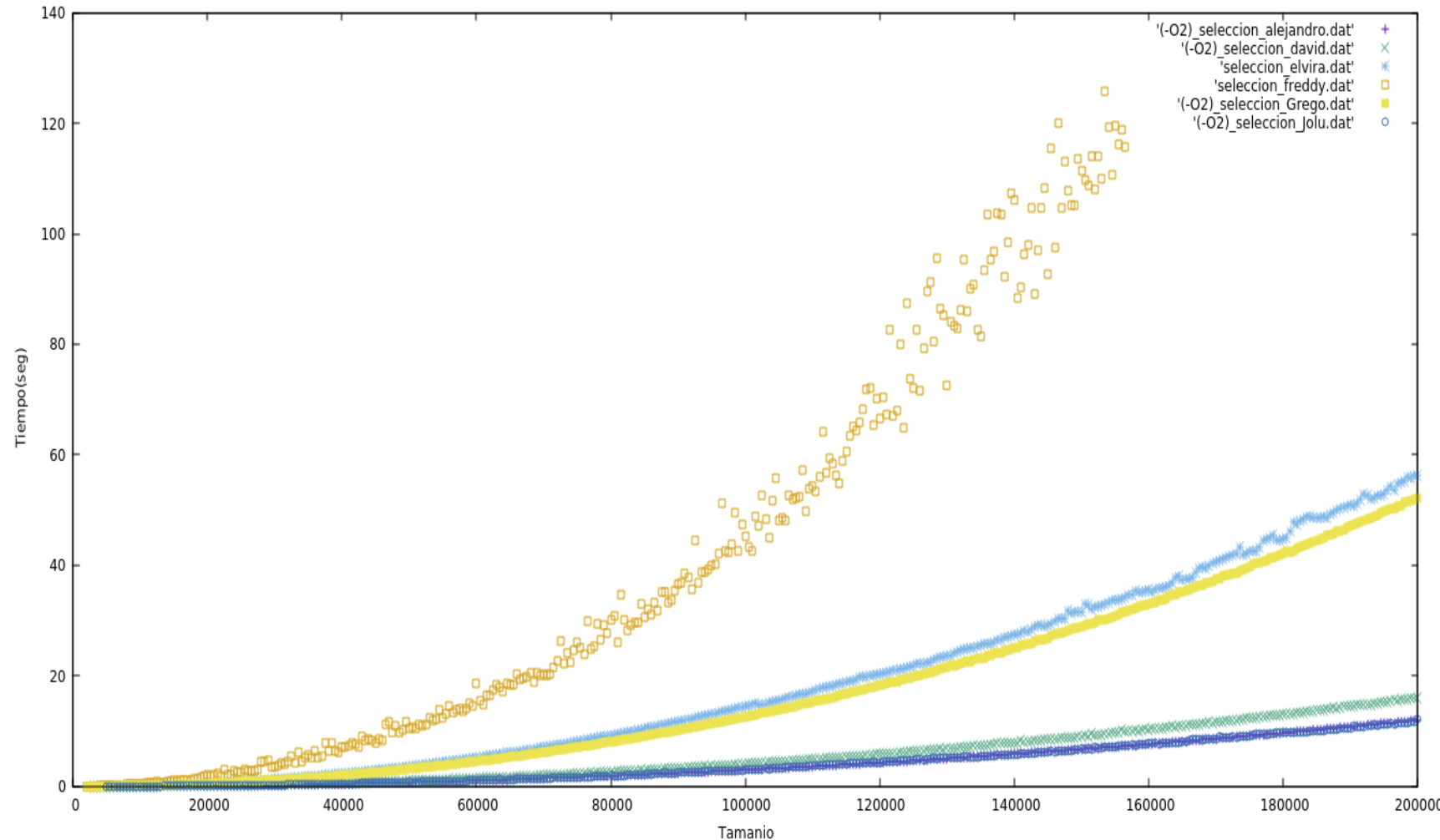
Familia  $O(n \log(n))$



# Eficiencia empírica:

## seleccion

- Aquí representamos las distintas ejecuciones del algoritmo de ordenación de seleccion
- Realizadas en diferente hardware
- Realizadas con optimización en la compilación
- Realizadas sin optimización en la compilación.



# Eficiencia hibrida:

# selección

Familia  $O(n^2)$

- Calculamos los coeficientes para el ajuste a:
- $F(x) = A0 \cdot x^2 + A1 \cdot x + A2$

After 13 iterations the fit converged.

final sum of squares of residuals : 5.00446

rel. change during last iteration :  $-1.10321e-10$

degrees of freedom (FIT\_NDF) : 394

rms of residuals (FIT\_STDFIT) =  $\sqrt{WSSR/ndf}$  : 0.112702

variance of residuals (reduced chisquare) =  $WSSR/ndf$  : 0.0127017

Final set of parameters

=====

a0 =  $1.35684e-09$

a1 =  $-1.17774e-05$

a2 = 0.246564

Asymptotic Standard Error

=====

+/-  $1.926e-12$  (0.1419%)

+/-  $4.014e-07$  (3.408%)

+/- 0.01758 (7.128%)

correlation matrix of the fit parameters:

	a0	a1	a2
a0	1.000		
a1	-0.969	1.000	
a2	0.758	-0.874	1.000

# Eficiencia híbrida:

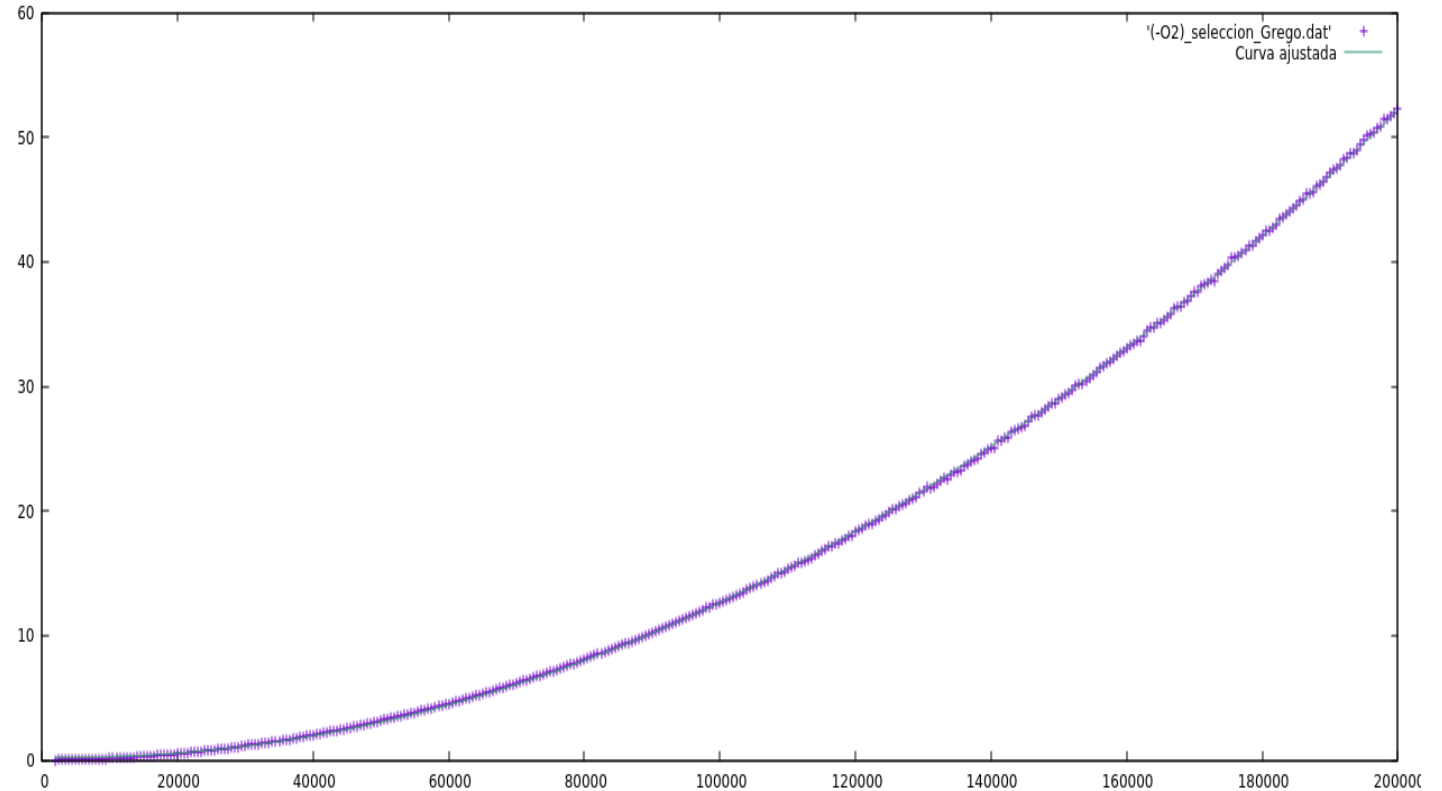
# selección

## Familia $O(n^2)$

- En esta gráfica mostramos como se ajusta la función
- $F(x) = A0 \cdot x^2 + A1 \cdot x + A2$
- Con los valores de los coeficientes  $A0, A1$  y  $A2$

$a0 = 1.35684e-09$   
 $a1 = -1.17774e-05$   
 $a2 = 0.246564$

- Se ajusta perfectamente a una eficiencia  $O(n^2)$





# Eficiencia hibrida:

# selección

Familia  $O(n^3)$

- Calculamos los coeficientes para el ajuste a:
- $F(x) = A0 \cdot x^3 + A1 \cdot x^2 + A2 \cdot x + A3$

After 18 iterations the fit converged.

final sum of squares of residuals : 2.05134

rel. change during last iteration :  $-9.49837e-08$

degrees of freedom (FIT\_NDF) : 393

rms of residuals (FIT\_STDFIT) =  $\sqrt{WSSR/ndf}$  : 0.0722474

variance of residuals (reduced chisquare) =  $WSSR/ndf$  : 0.00521969

Final set of parameters

=====

a0 =  $5.83529e-16$

a1 =  $1.18003e-09$

a2 =  $2.63151e-06$

a3 =  $-0.00631751$

Asymptotic Standard Error

=====

+/-  $2.453e-17$  (4.204%)

+/-  $7.535e-12$  (0.6386%)

+/-  $6.582e-07$  (25.01%)

+/- 0.01549 (245.2%)

correlation matrix of the fit parameters:

	a0	a1	a2	a3
a0	1.000			
a1	-0.986	1.000		
a2	0.920	-0.970	1.000	
a3	-0.686	0.767	-0.880	1.000

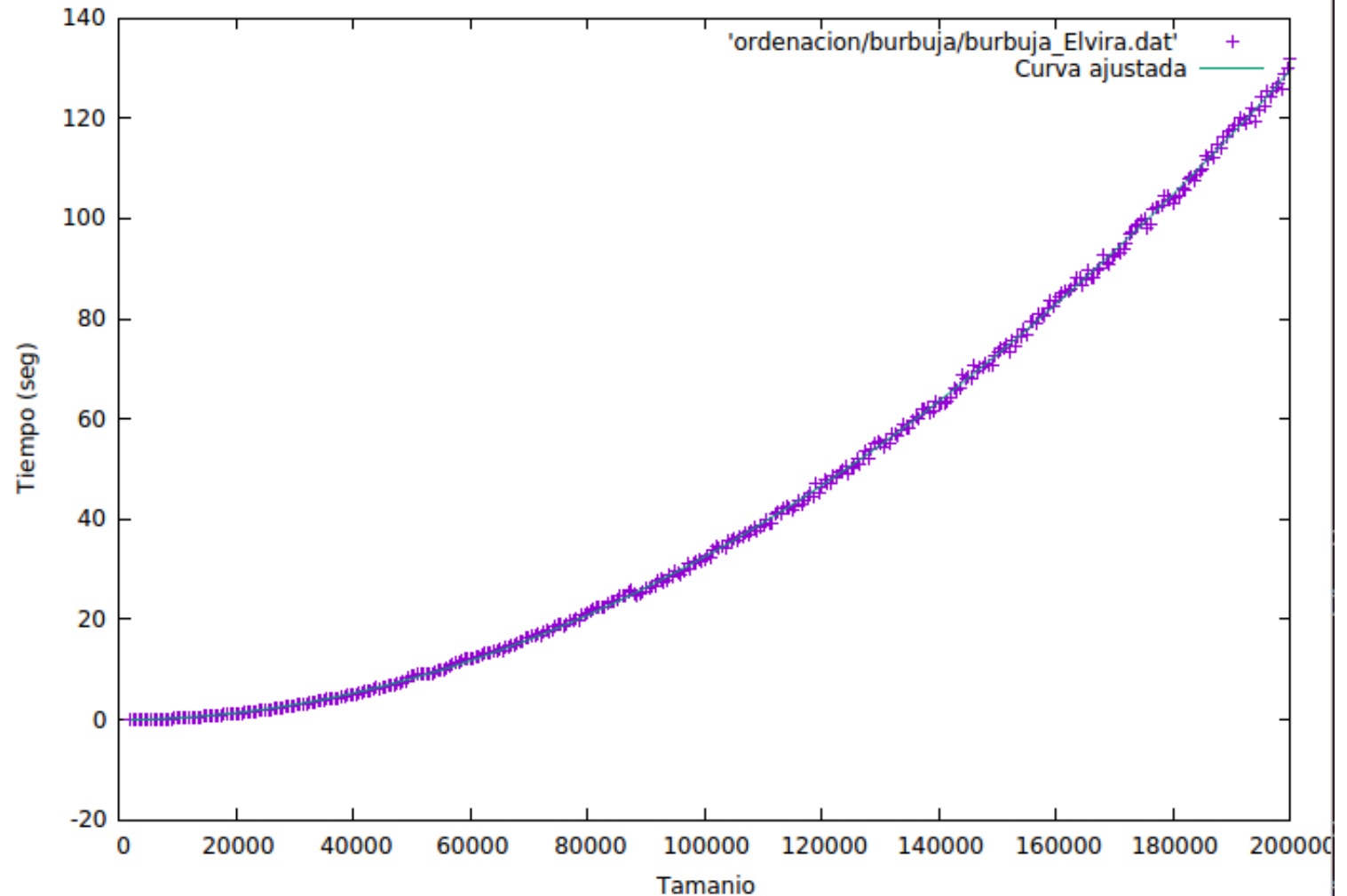
# Eficiencia hibrida:

## seleccion

- En esta gráfica mostramos como se ajusta la función
- $F(x) = A0 \cdot x^3 + A1 \cdot x^2 + A2 \cdot x + A3$
- Con los valores de los coeficientes A0, A1, A2 y A3

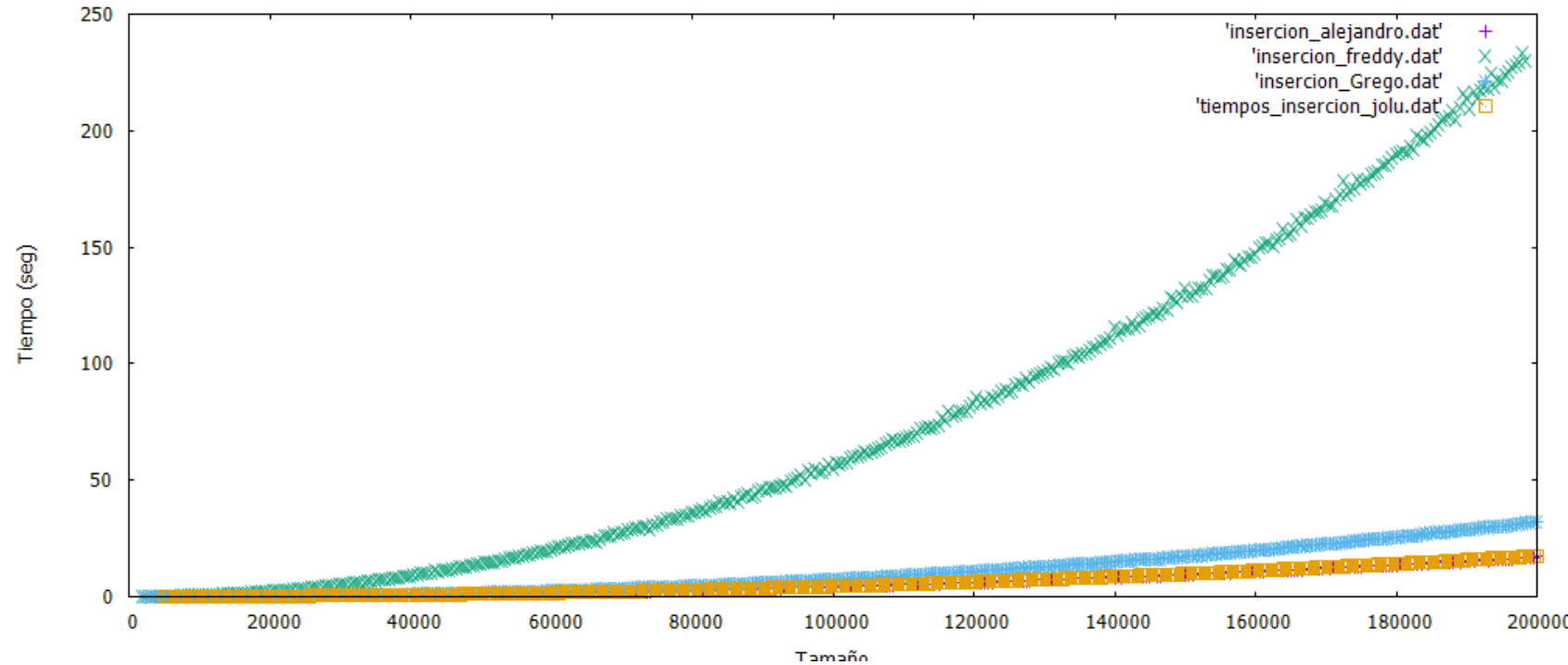
```
a0 = 5.83529e-16  
a1 = 1.18003e-09  
a2 = 2.63151e-06  
a3 = -0.00631751
```

- No se ajusta perfectamente a una eficiencia  $O(n^3)$



## Familia $O(n^2)$

- Aquí representamos las distintas ejecuciones del algoritmo de ordenación burbuja
- Realizadas en diferente hardware
- Realizadas con optimización en la compilación
- Realizadas sin optimización en la compilación.



# Eficiencia híbrida

# inserción

- Calculamos los coeficientes para el ajuste a
- $F(x) = a_0 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_2$

After 13 iterations the fit converged.

final sum of squares of residuals : 2.00195

rel. change during last iteration : -8.51101e-010

degrees of freedom (FIT\_NDF) : 388

rms of residuals (FIT\_STDFIT) = sqrt(WSSR/ndf) : 0.0718307

variance of residuals (reduced chisquare) = WSSR/ndf : 0.00515965

Final set of parameters

Asymptotic Standard Error

=====

=====

a0	= 4.2113e-010	+/- 1.275e-012	(0.3028%)
a1	= 3.79563e-007	+/- 2.692e-007	(70.93%)
a2	= -0.00874869	+/- 0.012	(137.1%)

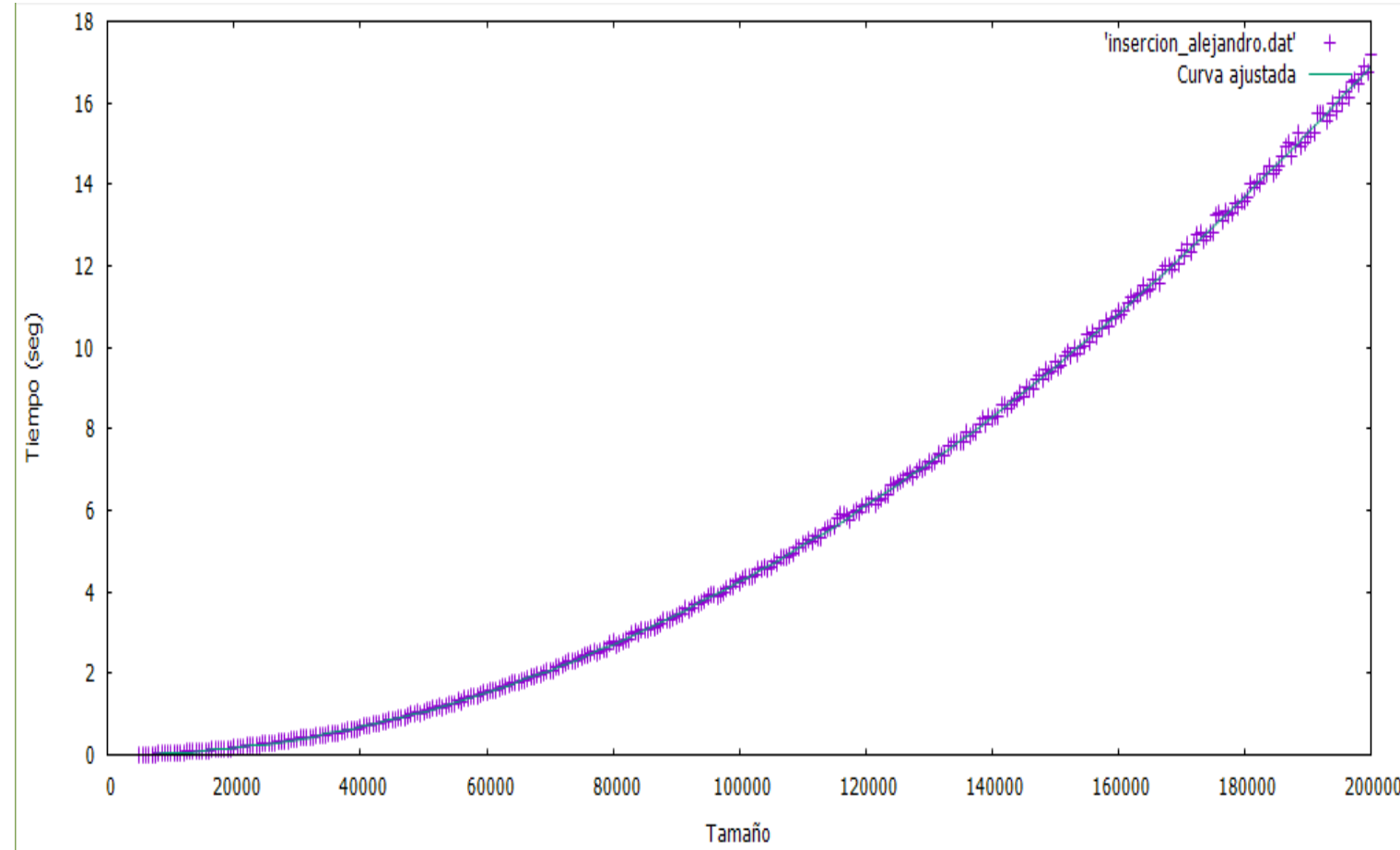
# Eficiencia híbrida:

- En esta gráfica mostramos como se ajusta la función
- $F(x) = A0 \cdot x^2 + A1 \cdot x + A2$
- Con los valores de los coeficientes  $A0, A1$  y  $A2$

$a0 = 4.2113e-010$   
 $a1 = 3.79563e-007$   
 $a2 = -0.00874869$

- Se ajusta perfectamente a una eficiencia  $O(n^2)$

## inserción Familia $O(n^2)$



# Eficiencia empírica

- Ajustamos la función  
$$T(n) = a_0 * x * x + a_1 * x + a_2$$
- Obtenemos los coeficientes

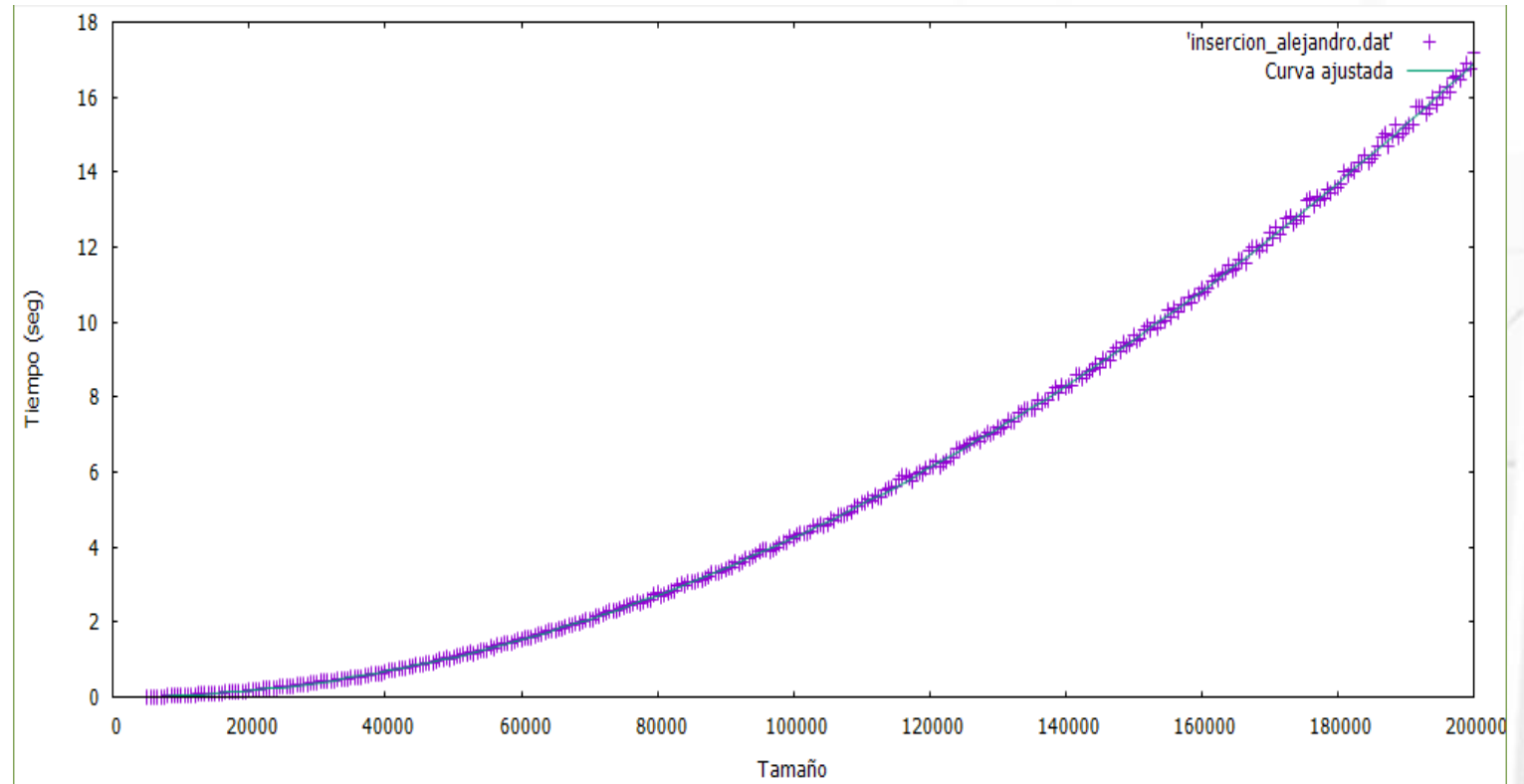
$$A_0 = 4.2113e-010$$

$$A_1 = 3.79563e-007$$

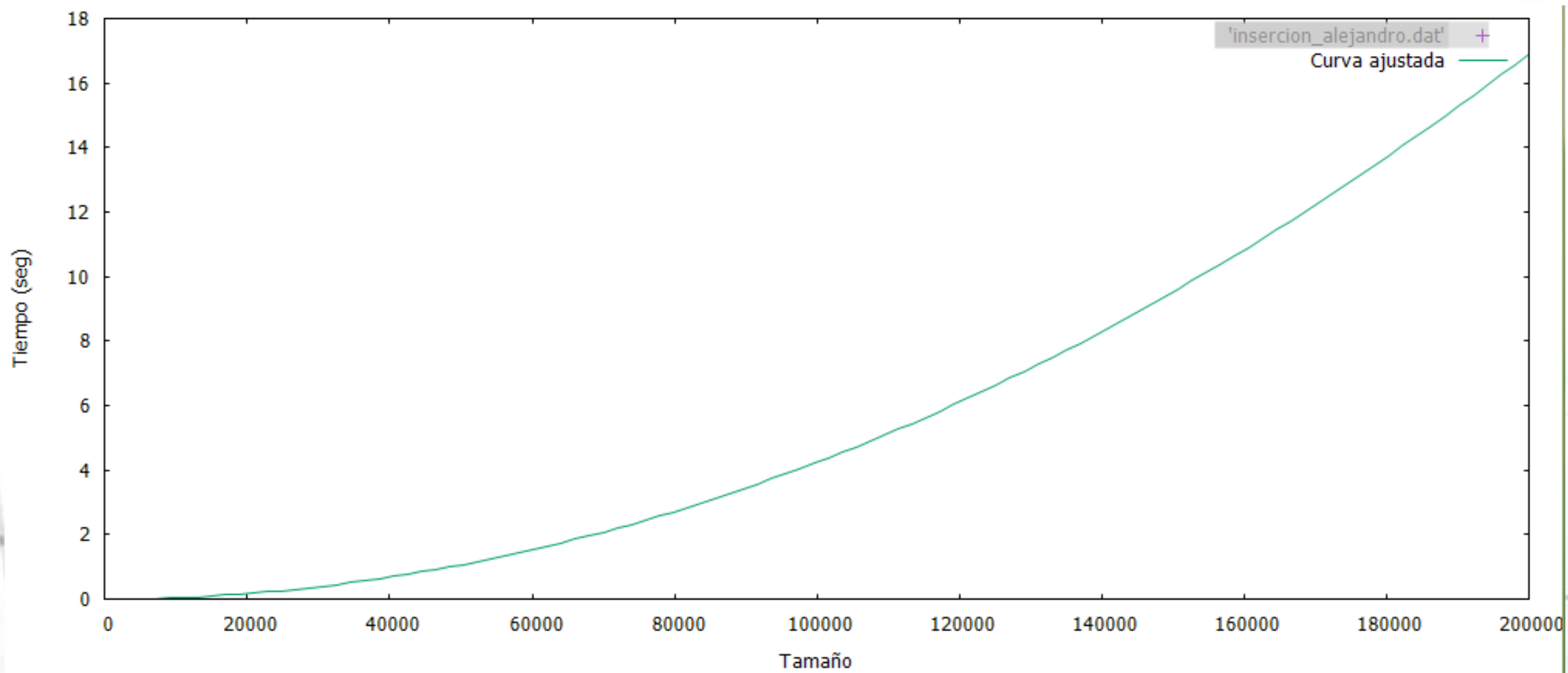
$$A_2 = -0.00874869$$

- Se ajusta a la perfección

## Inserción







# Eficiencia híbrida

# inserción

- Calculamos los coeficientes para el ajuste a
- $F(x) = a_0 \cdot x + a_1$

```
After 5 iterations the fit converged.
final sum of squares of residuals : 564.745
rel. change during last iteration : -2.52439e-013

degrees of freedom      (FIT_NDF)                : 389
rms of residuals        (FIT_STDFIT) = sqrt(WSSR/ndf)    : 1.2049
variance of residuals (reduced chisquare) = WSSR/ndf    : 1.45179

Final set of parameters          Asymptotic Standard Error
=====
a0          = 8.67113e-005      +/- 1.08e-006      (1.245%)
a1          = -3.09195         +/- 0.1263         (4.086%)

correlation matrix of the fit parameters:
          a0      a1
a0          1.000
a1         -0.876  1.000
```

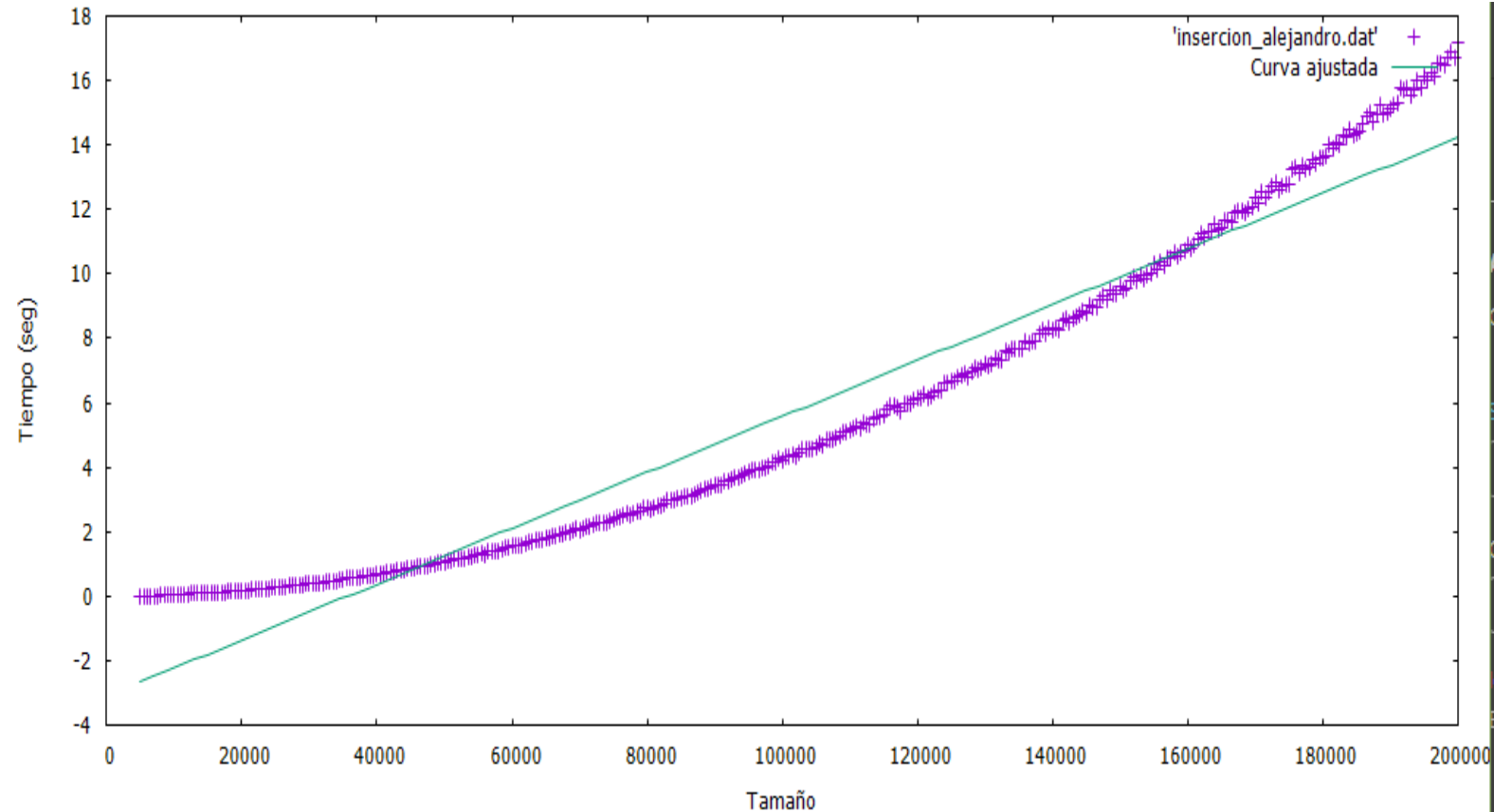
# Eficiencia híbrida:

- En esta gráfica mostramos como se ajusta la función
- $F(x) = A0 \cdot x + A1$
- Con los valores de los coeficientes  $A0, A1$  y  $A2$

$a0 = 8.67113e-005$   
 $a1 = -3.09195$

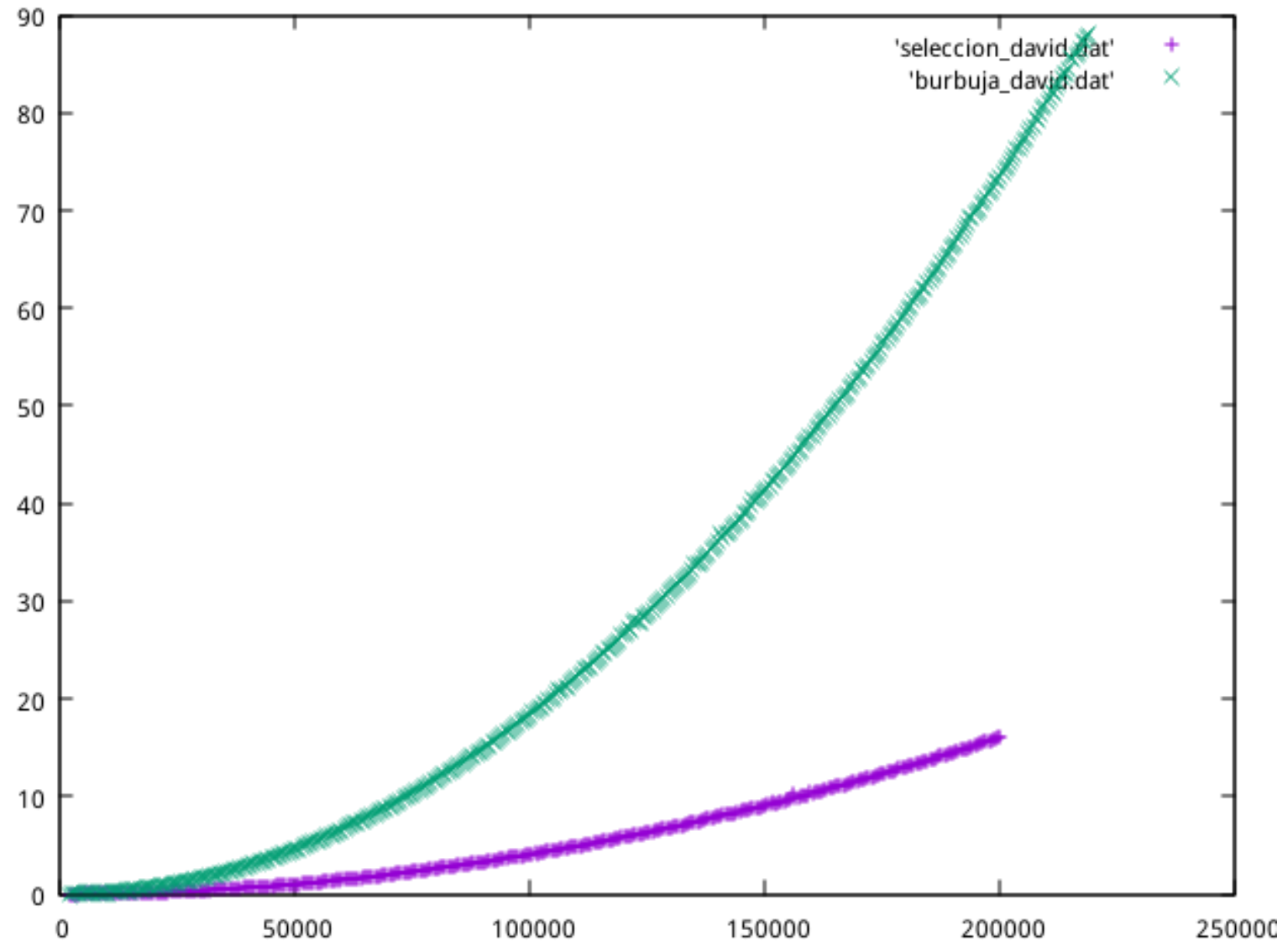
- Se ajusta perfectamente a una eficiencia  $O(n^2)$

## inserción Familia $O(n^2)$



# Eficiencia por familias: Cuadrática

- Eficiencia de los algoritmos en una máquina intel i3 a 2,53 GHz con 4GB de RAM.



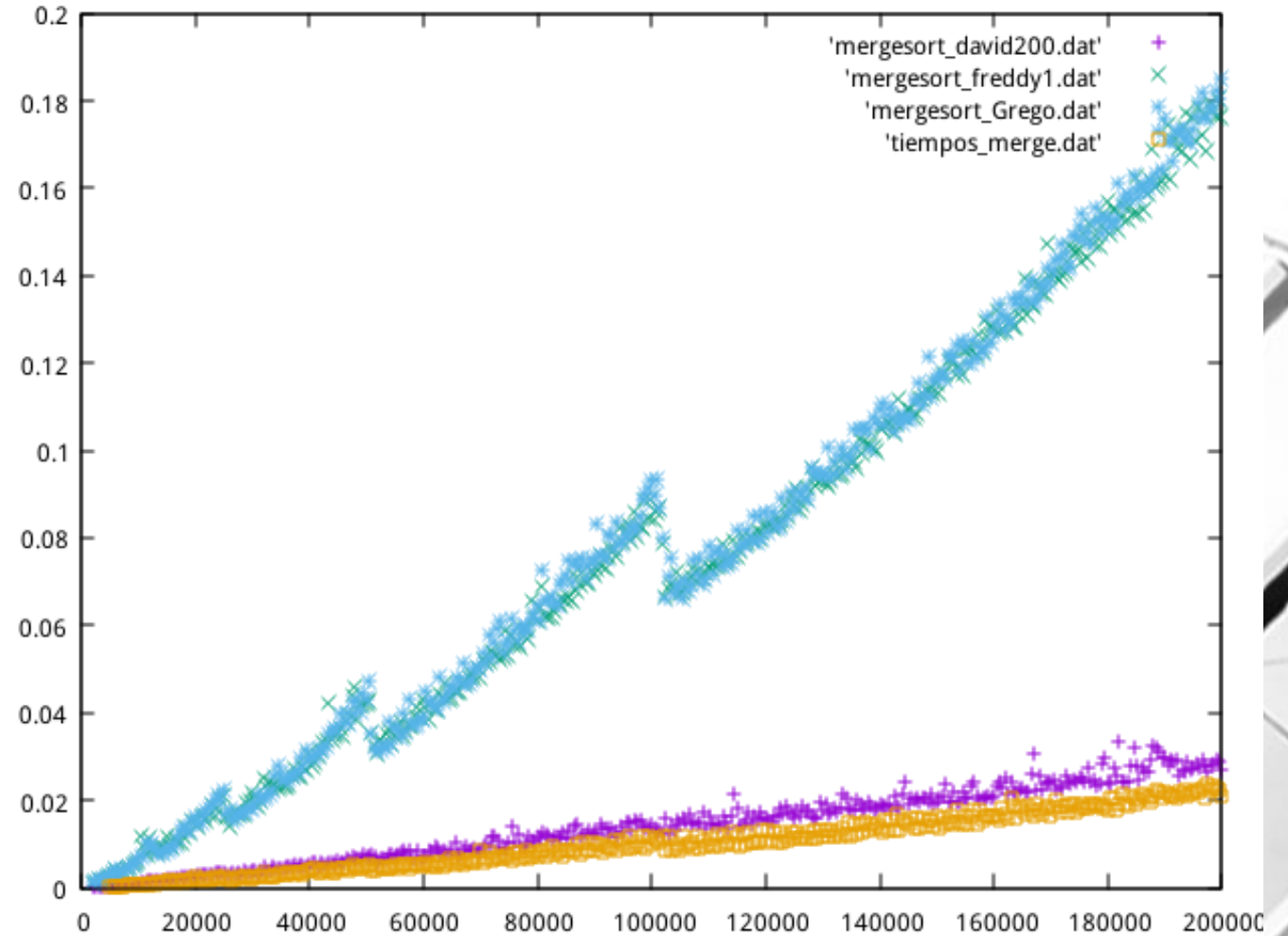
# Algoritmos de ordenación

$O(n\log(n))$

## Eficiencia empírica:

- Aquí se representan las distintas ejecuciones para el algoritmo de ordenación mergesort
- Las hemos realizado con distinto hardware
- Con distinta optimización

## Mergesort





# Eficiencia híbrida: Mergesort

---

Final set of parameters

=====

a = 7.63663e-09

b = 0.92304

Asymptotic Standard Error

=====

+/- 5.514e-10 (7.221%)

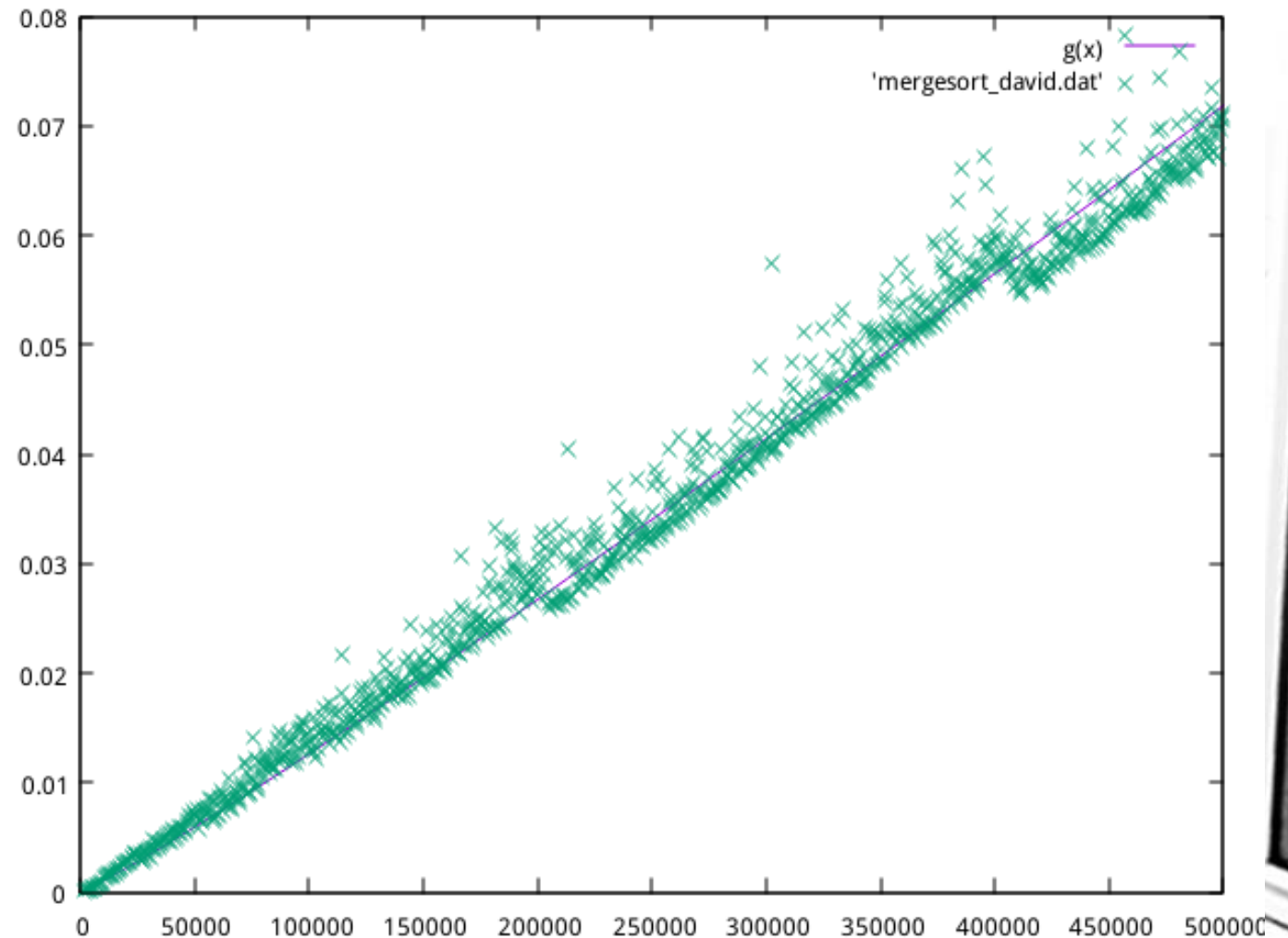
+/- 0.8478 (91.85%)

$f(x) = a \cdot x^{\log_{10}(b \cdot x) / \log_{10}(2)}$

## Eficiencia híbrida:

- Datos ajustados para la función del tipo  $n \log n$
- $F(x) = a \cdot x \cdot (\log_{10}(x) / \log_{10}(2)) + c$
- Vemos que se ajusta perfectamente

## Mergesort



## Eficiencia híbrida:

## Mergesort

Final set of parameters

=====

a	=	-4.90714e-15
b	=	1.43255e-07
c	=	-0.000433595

$f(x) = a*x*x+b*x+c$

Asymptotic Standard Error

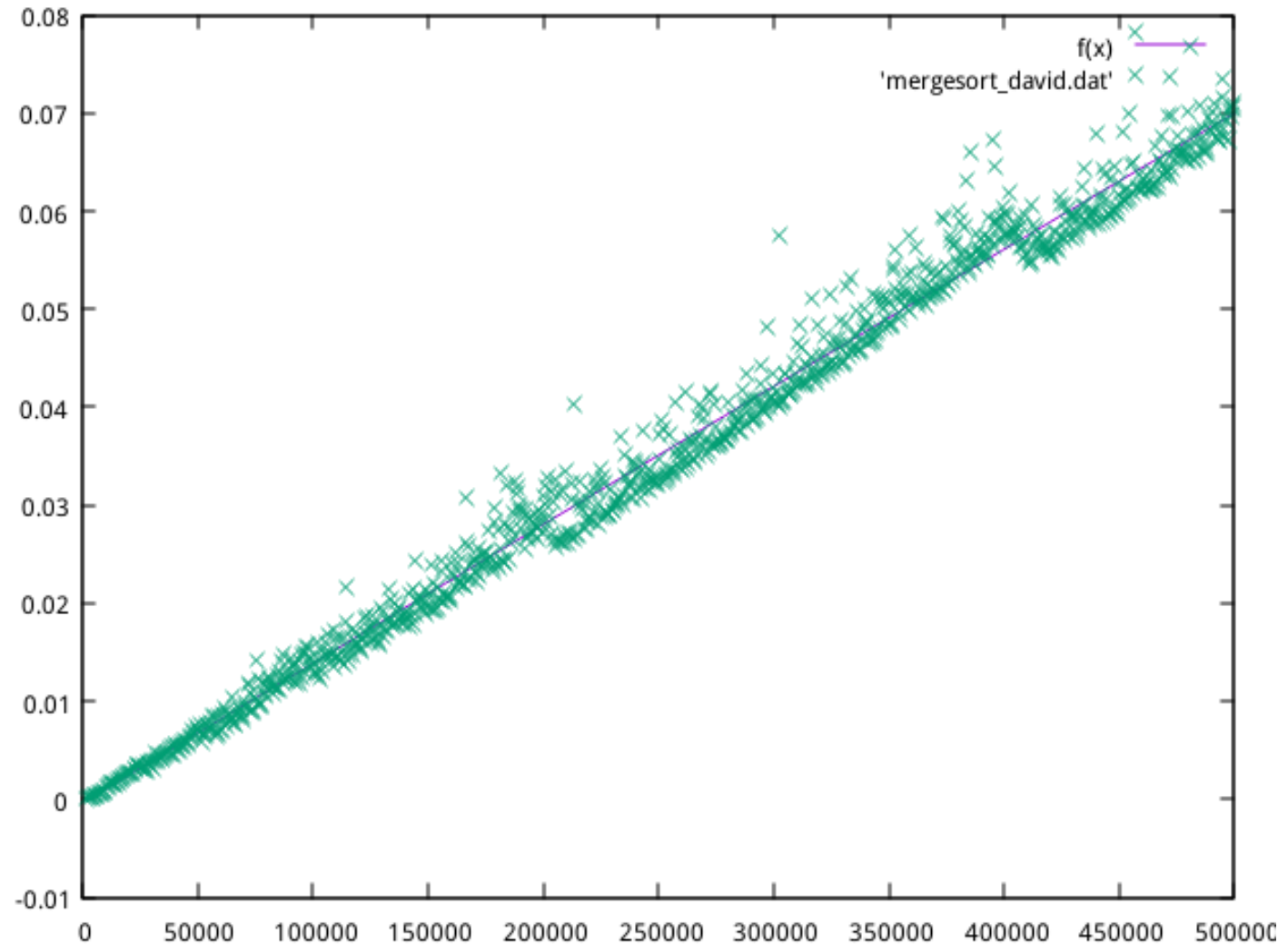
=====

+/-	3.774e-15	(76.9%)
+/-	1.956e-09	(1.365%)
+/-	0.0002126	(49.04%)

# Eficiencia híbrida:

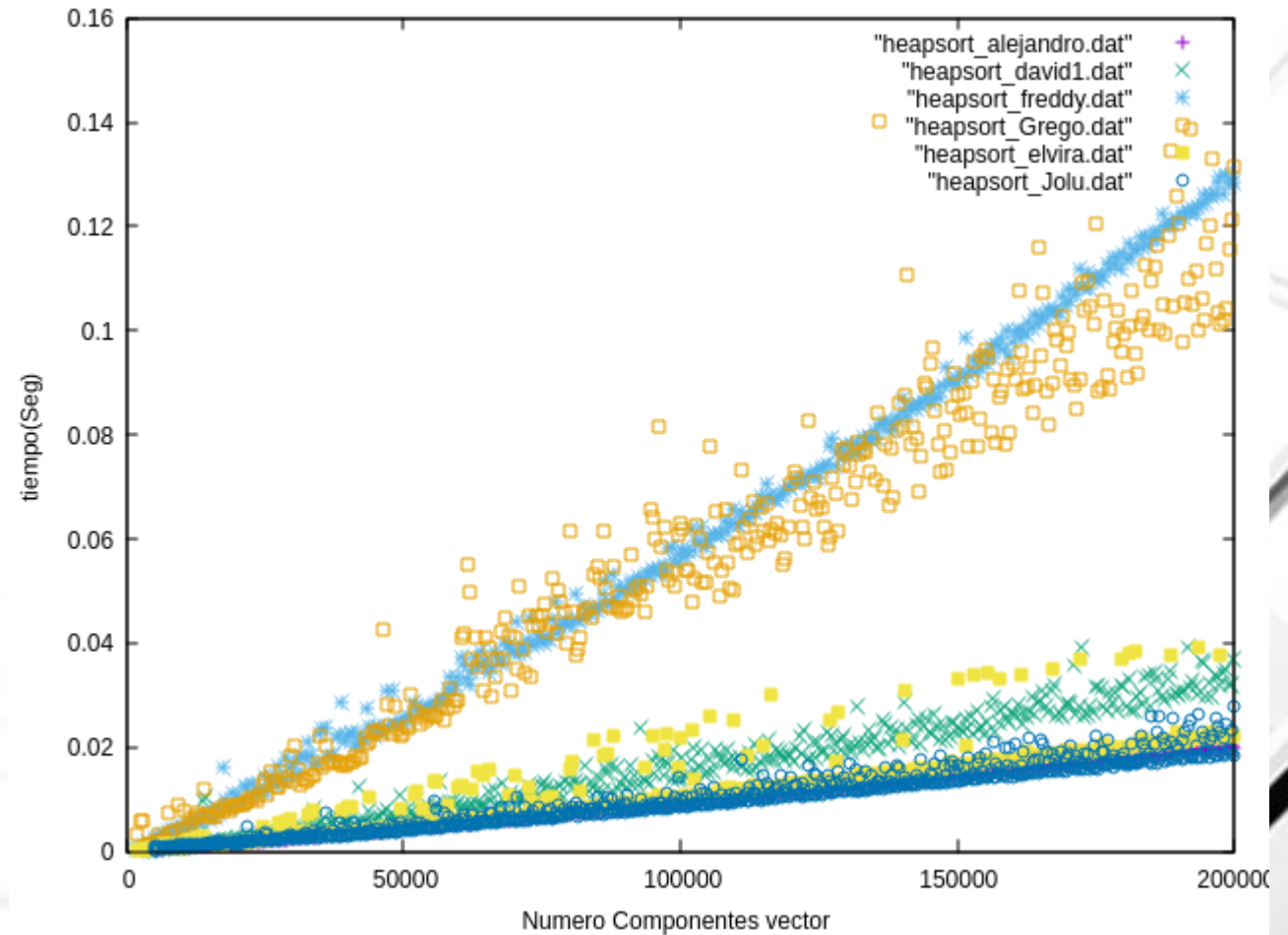
## Mergesort

- Ajuste del algoritmo para la función de tipo cuadrático
- $F(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
- Se ajusta bien aunque el porcentaje de error es elevado



# Eficiencia Empírica: Heapsort

- Aquí se representan las distintas ejecuciones para el algoritmo de ordenación Heapsort
- Las hemos realizado con distinto hardware
- Con distinta optimización



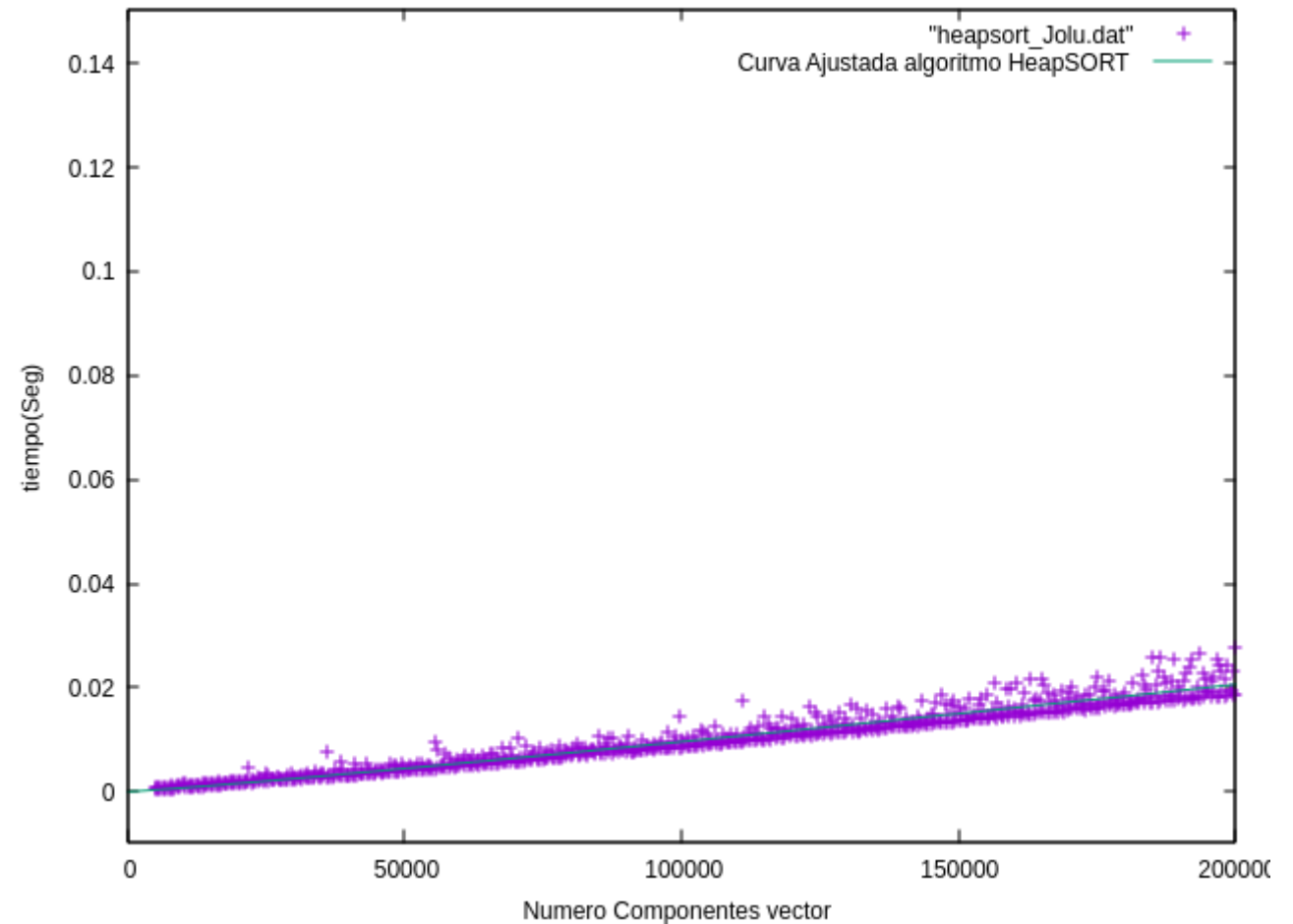
# Eficiencia híbrida: Heapsort

Final set of parameters		Asymptotic Standard Error	
=====		=====	
a	= 1.60998e-08	+/- 2.098e-09	(13.03%)
b	= 0.477379	+/- 1.351e+10	(2.831e+12%)
c	= -1.26718e-08	+/- 285.4	(2.252e+12%)



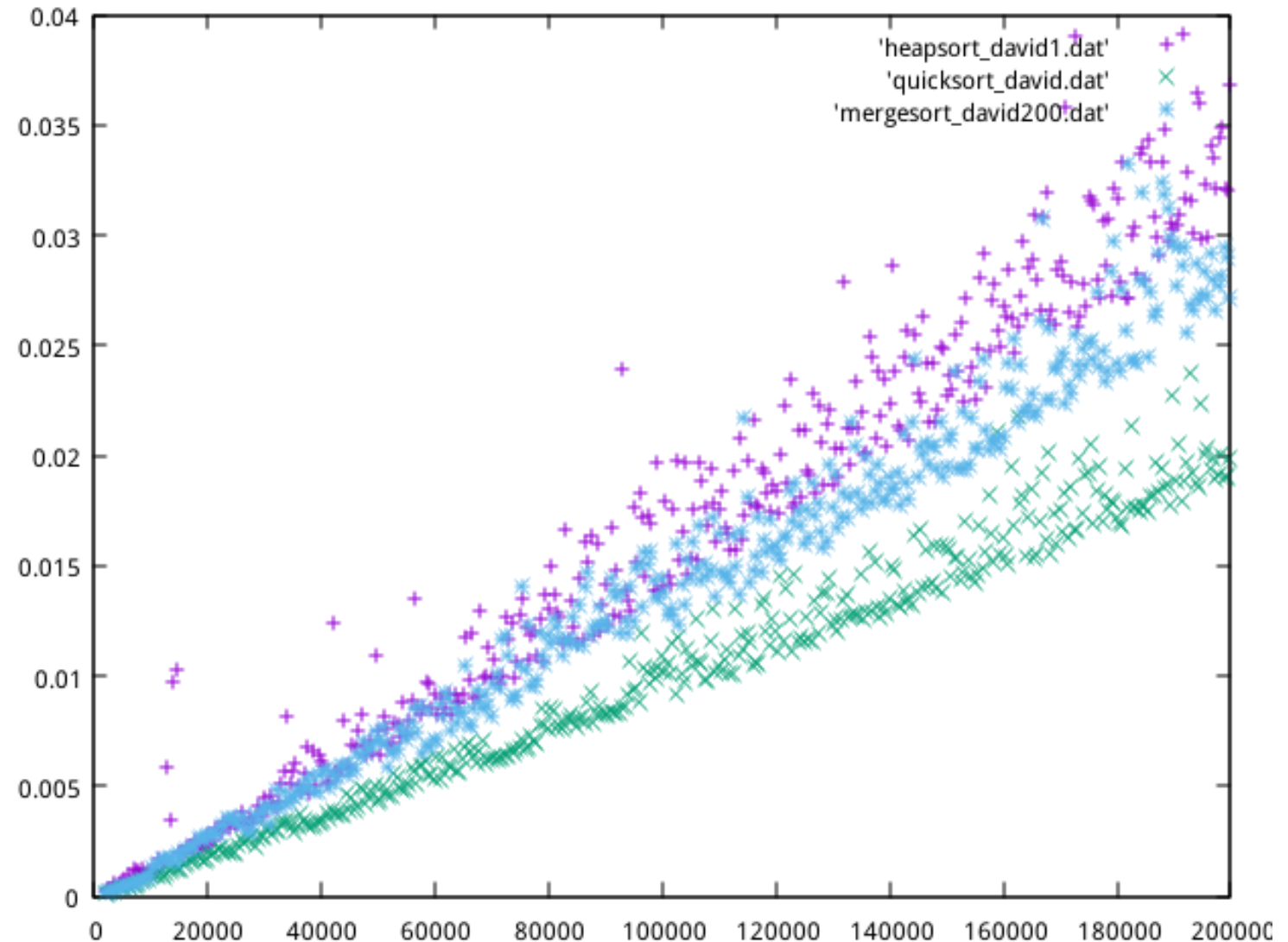
# Eficiencia híbrida: Heapsort

- Ajuste del algoritmo para la función de tipo  $n \cdot \log(n)$
- $F(x) = a \cdot x \cdot (\log_{10}(x) / \log_{10}(2)) + c$
- Se ajusta estupendamente.



# Eficiencia por familias: Logarítmica

- Eficiencia para los algoritmos logarítmicos en una máquina intel i3 a 2,53 GHz con 4 GB de RAM



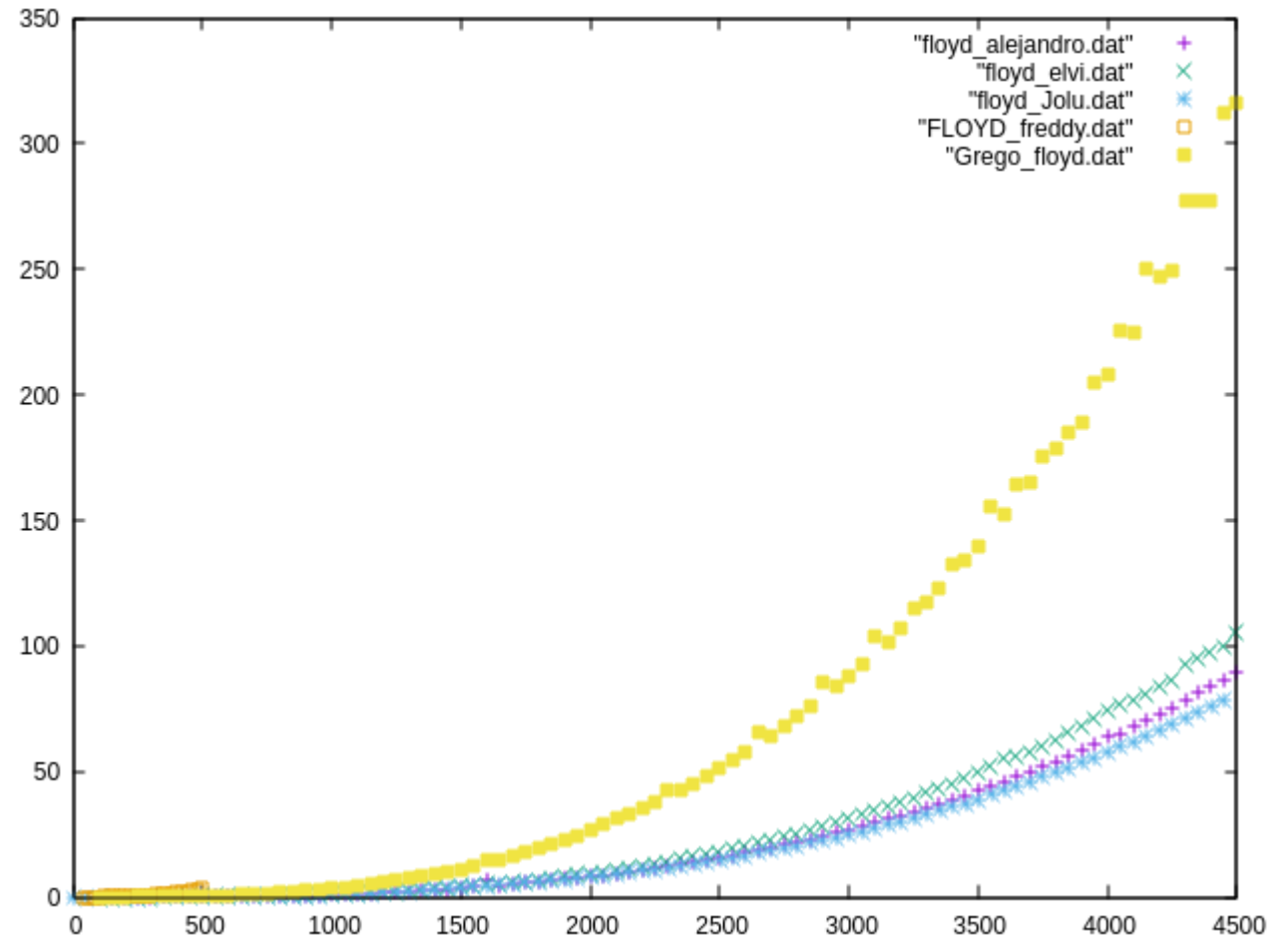
# Algoritmo de Floyd

$O(n^3)$

# Eficiencia empírica:

## Floyd

- Ejecución del algoritmo de Floyd en distintos hardwares
- Floyd pertenece a la familia de las cúbicas.



# Eficiencia Híbrida: Floyd

Final set of parameters		Asymptotic Standard Error	
=====		=====	
a	= 8.10171e-10	+/- 4.15e-12	(0.5122%)
b	= 3.60105e-07	+/- 1.764e-08	(4.898%)
c	= -2.30639e-05	+/- 0.03494	(1.515e+05%)

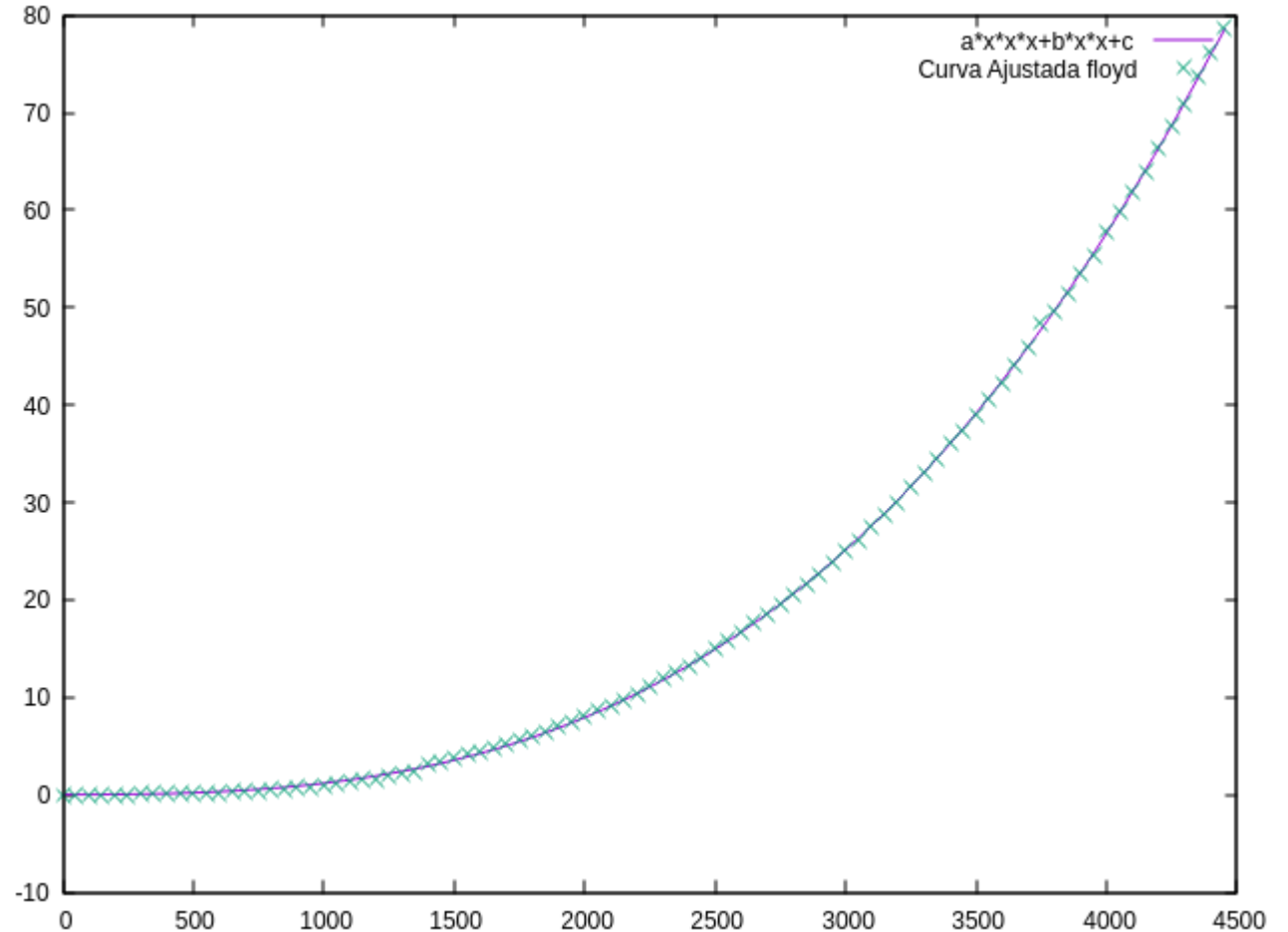
# Eficiencia Híbrida:

## Floyd

- Ajuste de la nube de puntos obtenida tras la ejecución de Floyd segun la función:

$$F(x) = a*x^3+b*x^2+c*x$$

- Observamos que el ajuste es bastante notable.



# Algoritmo de Hanoi

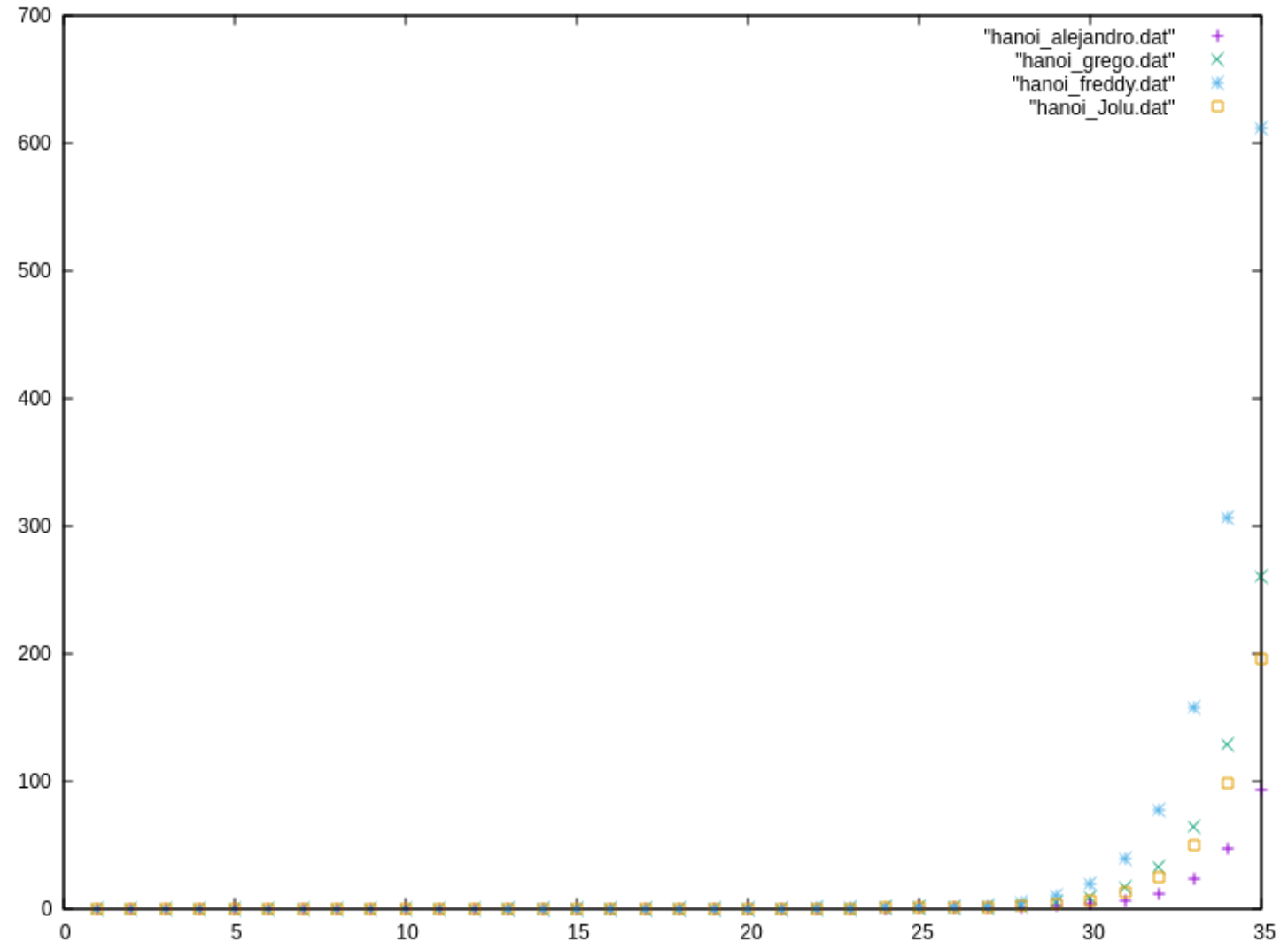
$O(2^n)$



# Eficiencia empírica:

- Ejecución del algoritmo de Hanoi en distintas máquinas
- Vemos que su comportamiento es puramente exponencial, se mantiene estable hasta ciertos valores y luego se dispara de una forma desmesurada.

## Hanoi



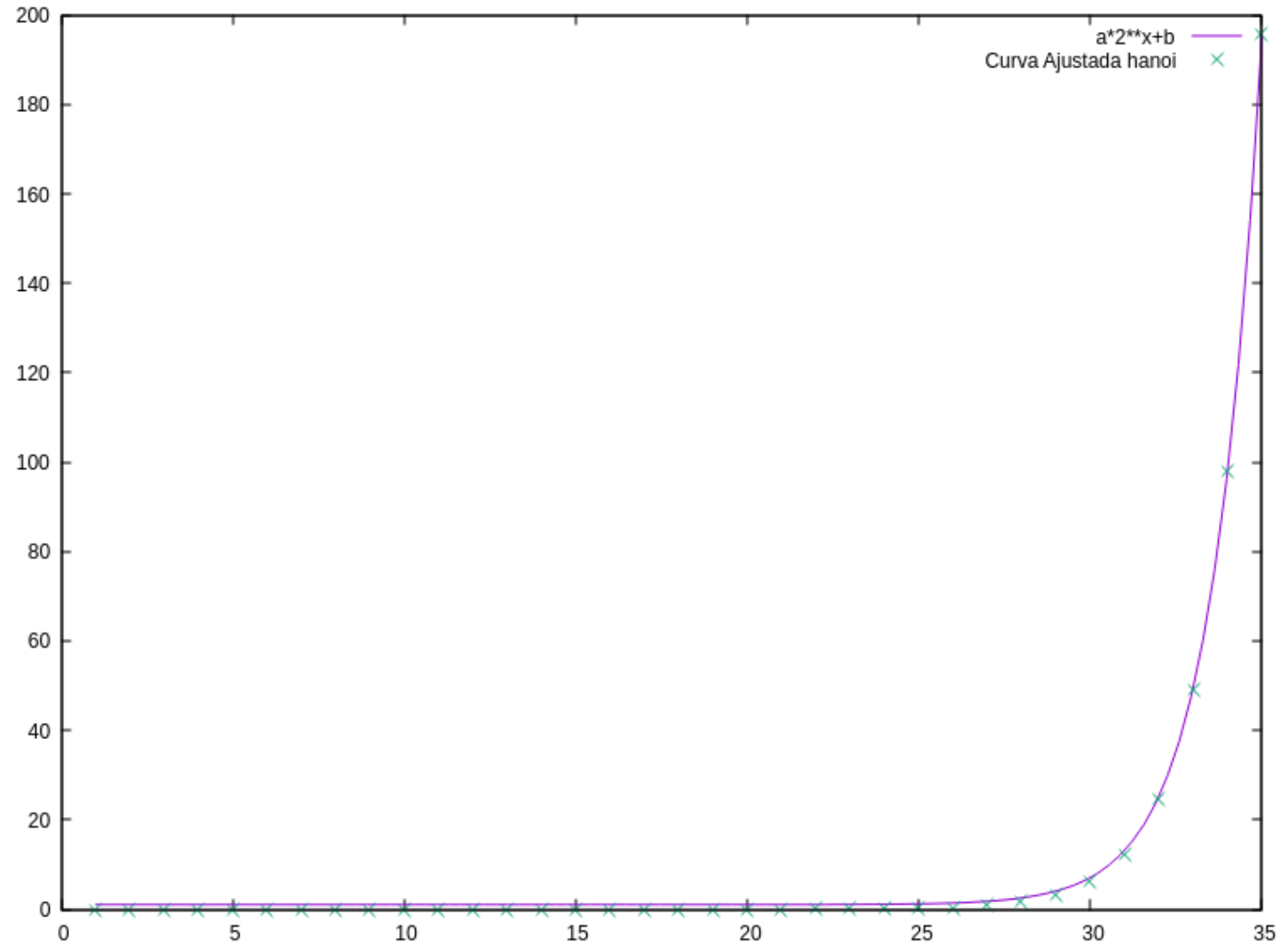
# Eficiencia Híbrida: Hanoi

Final set of parameters		Asymptotic Standard Error	
=====		=====	
a	= 5.65808e-09	+/- 2.573e-11	(0.4547%)
b	= 1	+/- 0.1725	(17.25%)

# Eficiencia Híbrida:

## Hanoi

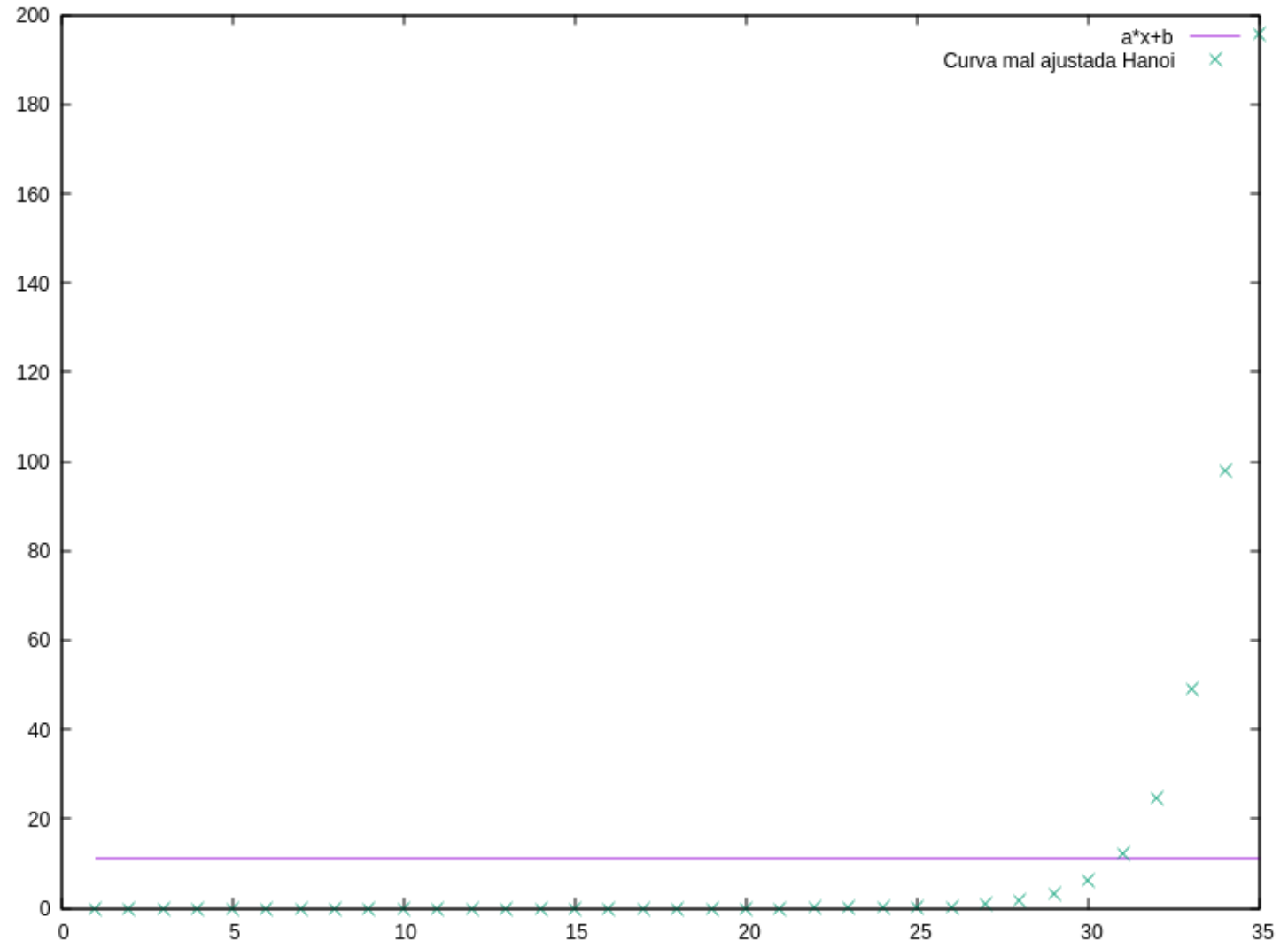
- Ajuste de la nube de puntos obtenida en la ejecución del algoritmo Hanoi usando como función de ajuste:  
$$F(x) = a \cdot 2^x + b$$
- Se ajusta muy bien.



# Eficiencia Híbrida:

- Ajuste de la nube de puntos obtenida en la ejecución del algoritmo Hanoi usando como función de ajuste:  $F(x) = a \cdot x + b$
- Demostramos una vez más que el algoritmo no depende de la máquina en la que se ejecuta .

## Hanoi Mal ajustada



**FIN**

**Gracias por su atención**