Computational Engineering

Übungen zu Kapitel 4: Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 4.1:

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 11 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 12 \end{aligned}$$

1. Berechnen Sie in Matlab die Inverse der Koeffizientenmatrix mit dem `inv`-Befehl. Berechnen Sie die Lösung des LGS mittels der Cramerschen Regel $\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b}$
2. Berechnen Sie die Lösung mit dem $\backslash$-Operator.
3. Berechnen Sie die Lösung mittels der Jacobi-Iteration. Zeigen Sie, dass die Iteration für einige zufällig ausgewählte Startwerte gegen die Lösung $\vec{x}^t = (1, 2, 3)$ konvergiert.
4. Berechnen Sie die Lösung mittels der Gauß-Seidel-Iteration. Zeigen Sie, dass die Iteration für einige zufällig ausgewählte Startwerte gegen die Lösung $\vec{x}^t = (1, 2, 3)$ konvergiert. Vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit zu der Lösung mittels der Jacobi-Iteration.

Aufgabe 4.2:

Gegeben sei ein quadratisches LGS mit n-Gleichungen für n Unbekannte: $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

- Sei $n = 10, 100, 1000$
- Legen Sie in Matlab eine $(n \times n)$-Matrix $\mathbf{A}$ und einen $(n \times 1)$-Vektor $\vec{b}$ an, die Sie jeweils mit ganzzahligen Zufallszahlen aus $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ auffüllen.
- Lösen Sie das LGS einmal mittels der Inversen $\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b}$ und einmal mit dem Backslash-Operator $\vec{x} = \mathbf{A} \setminus \vec{b}$ und vergleichen Sie die Rechenzeiten.

Aufgabe 4.3:

Betrachten Sie das Model der eindimensionalen Wärmeleitung im statischen Gleichgewichtszustand

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \vec{T}^j = \left(\frac{\Delta t}{\rho c} \right) \vec{Q}^j$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (1-2\alpha) & \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & (1-2\alpha) & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & (1-2\alpha) & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & \alpha & (1-2\alpha) \end{pmatrix}$$

worin $\alpha = \frac{K}{\rho c} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ und $T^j_{i=0} = T^j_{i=n} = 0$.

Aufgabe 4.3 (Fortsetzung):

Bestimmen Sie die Temperaturverteilung im Gleichgewicht für

1. $Q_i^j = 1$ für alle Zeiten und Orte, d.h. eine konstante gleichmäßige Aufheizung.
2. $L = 1$ (Länge des Stabes)
3. $n = 10, 100, 1000$ (Anzahl der räumlichen Gitterpunkte)
4. $\Delta t = 1$
5. $\rho = 1$, $c = 2$, $K = 0.01$

und stellen Sie die Verteilung graphisch dar.

Aufgabe 4.4:

Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

für eine gegebene Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ und rechte Seite $\vec{b}$ durch Minimierung des Ausdrucks

$$f(\vec{x}) = \|\mathbf{A} \cdot \vec{x} - \vec{b}\|^2$$

mittels des Befehls `fminsearch`.