Computational Engineering

Übungen zu Kapitel 1: Newtonsche Abkühlung

Aufgabe 1.1:

Schreiben Sie ein Matlab-Skript, welches die Temperaturen nach dem diskreten Newtonschen Abkühlungsmodell

$$T_{i+1} - T_i = k \cdot \Delta t \cdot (T_U - T_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots n$$

für die Parameter $k = 0.015$, $T_0 = T_A = 200$, $T_U = 70$, $n = 300$ im Zeitintervall $t \in [0, 300]$ berechnet. Stellen Sie die Lösung in einem $(t_i, T(t_i))$-Diagramm dar.

Aufgabe 1.2:

(1) Vergleichen Sie die diskrete Folge(n) aus Aufgabe 1 für verschiedene Werte von $n = 300, 200, 100, 50, 25, 10$ mit der kontinuierlichen Lösung aus der Vorlesung:

$$T(t) = (T_A - T_U) \cdot e^{-kt} + T_U.$$

Überlegen Sie sich ein sinnvolles Maß für die Abweichungen der diskreten von der kontinuierlichen Lösung.

(2) Vergleichen Sie die iterative diskrete Modell aus Aufgabe (1) mit den Werten der mathematisch äquivalenten Berechnungsvorschrift

$$T_i = a^i T_0 + b\frac{a^i - 1}{a - 1}$$

mit $a = 1 - k\Delta t$ und $b = k\Delta t T_u$, welches wir in der Vorlesung hergeleitet haben.

Aufgabe 1.3:

Benutzen Sie das Skript aus Aufgabe 1 um die Temperaturen nach dem diskreten Newtonschen Abkühlungsmodell

$$T_{i+1} - T_i = k \cdot \Delta t \cdot (T_U - T_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots n$$

für die Parameter $k = 0.15$, $T_0 = T_A = 200$, $T_U = 70$, im Zeitintervall $t \in [0, 300]$ und die Werte $n = 100, 50, 40, 30, 20, 10$ zu berechnen. Stellen Sie die Lösung in einem $(t_i, T(t_i))$-Diagramm dar. Was beobachten Sie? Welche Erklärung gibt es?

Aufgabe 1.4:

Das numerische rechnen mit Folgen kommt an sehr vielen stellen in Mathematik und Naturwissenschaften vor.

Ein berühmtes Beispiel sind die Fibonacci-Zahlen. Diese sind durch folgende Vorschrift definiert.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ (n \geq 3).$$

Schreiben Sie eine Funktion, welche die n-te Fibonacci-Zahl

(a) iterativ,

(b) rekursiv, sowie

(c) unter Verwendung von

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^{n-2} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

berechnet.