

Computational Engineering

Übungen zu Kapitel 7:
Differenzialgleichungen (2)

Anfangswertproblem 1. Ordnung:

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Numerische Lösung in Matlab auf dem Intervall $t_0 \leq t \leq t_e$ gelingt in vielen Fällen mit dem Befehl `ode45`. Dazu Schritte:

1. Legen Sie der rechten Seite der Differenzialgleichung als `function` an:

```
function    out =XYZ(t, y)
            out = f(t, y);
end
```

2. Verwendung des Integrators

```
[t, y] =ode45(@XYZ, [t0, te], y0)
```

Die Angabe einer Schrittweite ist nicht erforderlich, da `ode45` über eine adaptive Schrittweitensteuerung verfügt. Das hat allerdings zur Folge, das die Anzahl der Elemente in den Lösungsvektoren t und y vorher nicht festgelegt ist!

Aufgabe 7.1:

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = (1 - y(t)) \cdot y(t), \quad y(0) = y_0.$$

Es handelt sich um die sogenannte logistische Gleichung. Diese beschreibt ein sehr einfaches Populationsmodell, in der es nur eine Spezies gibt, deren Zahl durch Vermehrung und Verhungern gegeben ist.

Benutzen Sie den ode45-Integrator um die Lösung der logistischen Gleichung im Zeitintervall $0 \leq t \leq 10$, für verschiedene Anfangsbedingungen im Bereich $y_0 = 0.01, \dots, 1.5$ numerisch zu berechnen. Stellen Sie die Lösungen graphisch dar. Was passiert insbesondere im Bereich $y_0 = 1?$. Wie interpretieren Sie die Lösungen des Modells?

Aufgabe 7.2:

Betrachten Sie das (vereinfachte) Räuber-Beute-Modell:

$$y'_1(t) = \rho \cdot y_1(t) \cdot (1 - y_2(t)),$$

$$y'_2(t) = -\frac{1}{\rho} y_2(t) \cdot (1 - y_1(t)),$$

mit den Anfangsbedingungen $y_1(0) = y_{1,0} = 0.6$ und $y_2(0) = y_{2,0} = 0.4$. Benutzen Sie den ode45-Integrator um die Lösung auf dem Intervall $0 \leq t \leq 30$ für die Parameterwerte $\rho = 0.5, \rho = 1, \rho = 3, \rho = 6, \rho = 10$ numerisch zu berechnen.

Stellen Sie die Lösung sowohl im Koordinatenraum (y_1 über t und y_2 über t), als auch im sogenannten Phasenraum (y_2 über y_1) dar und interpretieren Sie das Verhalten der Lösungskurven für das Modell.

Erweitern Sie Ihren Code dann für die Formulierungen des Räuber-Beute-Modells aus der Vorlesung.

Aufgabe 7.3:

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$x''(t) = \mu(1 - (x(t))^2) \cdot x'(t) - x(t)$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0.5$ und $x'(0) = 0$. Es handelt sich um die Gleichung des van-der-Pol-Oszillators, einem Modell aus der Elektrotechnik.

Lösen Sie die Differenzialgleichung mit dem ode45-Integrator auf dem Intervall $0 \leq t \leq 20\pi$ für die Parameterwerte $\mu = 0$, $\mu = 0.1$, $\mu = 1$, $\mu = 10$ und stellen Sie die Lösung graphisch im Koordinatenraum (x über t) und im Phasenraum (x' über x) dar.

Hierzu müssen Sie die Differenzialgleichung 2. Ordnung zunächst mittels $y_1(t) = x(t)$ und $y_2(t) = x'(t)$ in ein System von 2 Differenzialgleichungen 1. Ordnung umschreiben:

$$\begin{pmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ \mu(1 - (y_1(t))^2) \cdot y_2(t) - y_1(t) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.4:

Die DGL des periodisch angetriebenen van-der-Pol-Oszillators ist ein Beispiel für ein System, in dem Chaos auftreten kann:

$$x''(t) = \mu(1 - (x(t))^2) \cdot x'(t) - x(t) + F \sin(\Omega t)$$

Ob die Lösungen dieser DGL sich chaotisch verhalten, hängt sehr empfindlich von den Werten der Parameter μ , F und Ω ab. Setzen Sie zwei der Parameter auf einen festen Wert. Den dritten Parameter lassen Sie in einem bestimmten Intervall variieren. Lösen Sie dann für viele Werte des dritten Parameters die DGL jeweils für zwei sehr eng beieinander liegende Anfangsbedingungen auf $[t_0, t_e]$. Vergleichen Sie den Abstand der sich ergebenden Trajektorien am Ende des Integrationsintervalls t_e . Identifizieren Sie damit Parameterbereiche in denen Sie chaotisches Verhalten feststellen.