Computational Engineering

Übungen zu Kapitel 6:
Differenzialgleichungen (1)

Aufgabe 6.1:

a) Gegeben ist die folgende Differenzialgleichungen 1. Ordnung

$$\dot{y}(t) = t - y(t), \quad y(0) = 1$$

Lösen Sie die Gleichung mit dem Euler-Algorithmus für Schrittweiten $h = 0.2,\ 0.1,\ 0.05$ im Bereich $t \in [0, 2]$. Stellen Sie das Ergebnis graphisch dar und vergleichen Sie mit der analytisch exakten Lösung

$$y_{\text{exakt}}(t) = t - 1 + 2e^{-t}.$$

b) Ein Maß für den Fehler des Verfahrens ist die Differenz zwischen der exakten Lösung und der numerischen Lösung an einer bestimmten vorgegebenen Stelle im Berechnungsintervall $\tilde{x} \in [a, b]$. Zweckmäßigerweise nimmt man das Intervallende b:

$$\delta(h) = |y(b) - y_{\text{exakt}}(b)|.$$

Analysieren Sie das Verhalten dies Fehlers des Euler-Verfahrens als Funktion von h und stellen Sie δ im Bereich $h \in [10^{-1}, 10^{-4}]$ graphisch dar.

Aufgabe 6.2:

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \frac{2x}{y^2}, \quad y(0) = 1.$$

a) Berechnen Sie die Lösung auf dem Intervall $t \in [0, 3]$ mit den Verfahren von Euler, Heun und Runge Kutta, jeweils mit der gleichen Schrittweite $h = 0.1$. Vergleichen Sie das Ergebnis durch graphische Darstellung der numerischen Lösungen und der exakten Lösung

$$y(t) = \sqrt[3]{3x^2 + 1}$$

im (t, y)-Diagramm.

b) Analysieren Sie das Verhalten der Fehler der einzelnen Verfahren als Funktion der Schrittweite wie in Aufgabe 8.1 b).