Computational Engineering

Übungen zu: Stochastische Modelle, Monte Carlo Methoden

Aufgabe 1:

Erzeugen Sie eine Menge von im Intervall $[0, 1)$ gleichverteilten Pseudozufallszahlen mit dem LCG-Algorithmus aus der Vorlesung.

a) Stellen Sie das Histogramm der Verteilung der Zahlen im Intervall $[0, 1)$ mittels des `hist`-Befehls dar.

b) Führen Sie einen Spektraltest (für 2- und 3-Tupel) durch.

c) Führen Sie den Poker-Test (für 3 und 4 Zahlen) mit den Zahlen durch. Die zu erwartenden Häufigkeiten sind

$$P_{ABC} = 0.72,\ P_{AAB} = 0.27,\ P_{AAA} = 0.01$$

bei drei Zahlen und

$$P_{ABCD} = 0.504,\ P_{AABC} = 0.432,\ P_{AABB} = 0.027,\ P_{AAAB} = 0.036,\ P_{AAAA} = 0.001$$

bei vier Zahlen.

c) Vergleichen Sie die Ergebnisse mit einer gleich großen Menge an gleichverteilten Pseudozufallszahlen, die Sie mit dem `rand`-Befehl erzeugt haben.

Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie mittels der Methode der Monte Carlo Integration einen Näherungswert für die Kreiszahl π. Untersuchen Sie die Verteilung der Ergebnisse nach einer hinreichend großen Anzahl von gewürfelten Punkten. Stellen Sie die Punkte und die Flächen in einer Graphik anschaulich dar.

b) Berechnen Sie mittels der Methode der Monte-Carlo Integration einen Näherungswert des bestimmten Integrals

$$\int\limits_1^2 \left(1 + \cos(e^{x^2})\right) \mathrm{d}x$$

Aufgabe 3:

a) Betrachten Sie einen 1-dimensionalen Random Walk ohne Erinnerung (d.h. die Schritte sind unabhängig voneinander), bei dem ein Schritt nach rechts oder ein Schritt nach links gleich wahrscheinlich sind. Untersuchen Sie die Anzahl von Schritten, nach der der Random Walker eine bestimmte Entfernung vom Ausgangspunkt erreicht.

b) Betrachten Sie einen 2-dimensionalen Random Walk ohne Erinnerung, d.h. die Schritte sind unabhängig voneinander. Bestimmen Sie das Verhalten der durchschnittlichen Entfernung vom Ausgangspunkt nach N Schritten. Experimentieren Sie dabei mit verschiedenen Varianten der Schrittdefinition:
   1. feste Schrittlänge auf einem kartesischen Gitter,
   2. feste Schrittlänge, Richtung gleichverteilt auf $[0, 2\pi)$,
   3. Schrittlänge normalverteilt (wie?), Richtung gleichverteilt auf $[0, 2\pi)$.

Aufgabe 4:

- Betrachten Sie einen 1-dimensionalen Random Walk (diesmal mit Erinnerung) auf einem kartesischen Gitter, d.h. der Walker springt in jedem Iterationsschritt entweder rechts oder links.
- Implementieren Sie den Random Walk so, dass Sie sich merken, auf welchem Feld der Random Walker schon war und in welche Richtung er von diesem Feld aus wie oft gesprungen ist. Sei für das i-te Feld r_i die Anzahl der Sprünge, die von diesem Feld aus nach rechts gemacht wurden und l_i die Anzahl der Sprünge nach links. Zu Anfang sind natürlich alle r_i und alle l_i gleich Null.
- Der Sprung zum nächsten Feld soll dann so modifiziert werden, dass sich die Wahrscheinlichkeit in eine der 2 möglichen Richtungen zu springen nach der Häufigkeit, mit der bereits schonmal auf diesem Feld in diese Richtung gesprungen wurde skaliert. Die Wahrscheinlichkeit vom i-ten Feld nach rechts zu springen soll durch

  $$p_i^R = \frac{r_i + 100}{(r_i + l_i) + 200}$$

  und entsprechend $p_i^L = 1 - p_i^R$ für den Sprung nach links gegeben sein.
- Vergleichen Sie die sich ergebenden Wahrscheinlichkeiten, dass der Walker in N Sprüngen einen bestimmten Abstand vom Ursprung erreicht mit dem erinnerungslosen Walk.