

Computational Engineering

Übungen zu: Gleichungen numerisch lösen

Aufgabe 1:

- a) Schreiben Sie ein Matlab-Programm, welches eine Nullstelle einer gegebenen Funktion $y = f(x)$ mittels der Bisektionsmethode bestimmt. Das Startintervall soll dabei vorgegeben und innerhalb des Skripts auf Vorzeichenwechsel überprüft werden. Der Fehler mit dem die Nullstelle bestimmt wird soll angegeben werden und die Anzahl der Iterationen soll danach bestimmt werden.
- b) Nutzen Sie ihr Programm um die reellen Lösungen von

$$0.25x^4 - 1.4x^3 - x^2 + 3.1x - 3 = 0$$

mit einer Genauigkeit von mindestens 8 Stellen hinter dem Komma zu finden.

Aufgabe 2:

- a) Finden Sie beide reelle Lösungen der Gleichung

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

mittels einer Fixpunktiteration.

- b) Finden Sie die Lösung der Gleichung

$$x^3 = \arctan(x)$$

die sich in der Nähe von $x = 1$ befindet, mittels einer Fixpunktiteration.

Aufgabe 3:

- a) Finden Sie eine reelle Lösung der Gleichung

$$\frac{1 + \ln(x)}{x} = 0$$

mittels der lokalen Newtonmethode. Experimentieren Sie mit verschiedenen Startpunkten.

- a) Finden Sie eine reelle Lösung der Gleichung

$$e^{x-1} - 5x^3 + 5 = 0$$

mittels der lokalen Newtonmethode. Experimentieren Sie mit verschiedenen Startpunkten.

Aufgabe 4: Sei $s = s_0, s_1, s_2, \dots$ eine Folge. Die Folge s heißt **konvergent** mit dem **Grenzwert** \bar{s} , wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \bar{s}$$

Man nennt die Zahl

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \frac{s_{k+1} - s_k}{s_k - s_{k-1}} \right|}{\log \left| \frac{s_k - s_{k-1}}{s_{k-1} - s_{k-2}} \right|}$$

die **Konvergenzgeschwindigkeit**. Diese hat die Bedeutung, dass sich für $q > 1$ die Anzahl der genauen Stellen im Vergleich von s_k und \bar{s} in jedem Iterationsschritt ungefähr ver- q -facht.

Untersuchen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit der verschiedenen Verfahren in diesem Kapitel mittels numerischer Beispiele.

Aufgabe 5: In der Vorlesung wurde als Beispiel die Wärmeenergie-Bilanz eines geheizten Körpers gebracht:

$$f(T) = P_{in} - hA(T - T_u) - \epsilon\sigma(T^4 - T_u^4)$$

Die Nullstelle $T_{eq.}$ dieser Gleichung $f(T_{eq.}) = 0$ entspricht der sich einstellenden Gleichgewichtstemperatur. Schreiben Sie ein Matlab Skript, in dem Sie die Gleichgewichtstemperatur als Funktion der Heizleistung $P_{in} \in [1, 100]W$ berechnen und das Ergebnis darstellen. Verwenden Sie dazu eine Kombination aus einem vorgeschalteten Bisektionsverfahren und einem nachgeschalteten Newtonverfahren.

Sonstige Zahlenwerte:

$$h = 5W/(Km^2)$$

$$A = 0.05m^2$$

$$T_u = 293.15K$$

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} W/(m^2 K^4)$$

$$\epsilon = 0.8$$