Computational Engineering

Übung zu: Fourierreihen

Gegeben ist eine T-periodische Funktion $f(t)$, d.h. $f(t+T) = f(t)$, dann lässt sich f durch eine **Fourierreihe** approximieren:

$$f(t) \approx f_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right],$$

mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und den Fourierkoeffizienten

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t, \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t.$$

Es gilt: Ist die Funktion

- gerade, d.h. $f(-x) = f(x)$, dann $b_k = 0$ für alle k,
- ungerade, d.h. $f(-x) = -f(x)$, dann $a_k = 0$ für alle k.

Aufgabe 1:

Schreiben Sie ein Matlab-Skript, welches die Fourierreihe

$$f_N(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin[(2k-1)t]}{2k-1}$$

der Rechteck-Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < \pi \\ -1 & \text{für} \pi \leq t < 2\pi. \end{cases}$$

für verschiedene Werte von N mit der Funktion vergleicht. Was beobachten Sie?

Eine sehr einfache Möglichkeit in Matlab ein bestimmtes Integral numerisch auszuwerten ist die Funktion `trapz`. Dabei gilt

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \mathtt{trapz}(X, Y)$$

mit

$$X = \mathtt{linspace}(a, b, nn) \quad \text{und} \quad Y = f(X).$$

Dabei muss die Anzahl der Teilintervalle nn, in die das Integrationsgebiet $[a, b]$ abfgeteilt wird, groß genug sein um die Struktur der Funktion f richtig erfassen zu können.
Die Funktion `trapz` eignet sich nur für hinreichend unkomlizierte Funktionen und sollte im allgemeinen nicht für komplexe Rechnungen, bei denen es auf eine hohge Genauigkeit ankommt benutzt werden. Für die nachfolgenden Beispiele ist sie ausreichend.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion

$$f(t) = t^2 \quad \text{für} \quad 0 \leq t < 2\pi \quad \text{und} \quad f(t + 2\pi) = f(t).$$

Berechnen Sie in Matlab die Fourierreihendarstellung von f(t) für $N = 2, 5, 10, 25$, in dem Sie die Fourierkoeffizienten mittels der `trapz`-Funktion numerisch berechnen. Verwenden Sie dabei $nn \geq 100$.

Aufgabe 3:

Laden Sie das Beispielsignal `BeispielsignalFourier.mat` ein. In der Datei ist einmal ein glattes Signal und das gleiche Signal, auf welches noch ein zufälliges Rauschen hinzu addiert wurde enthalten.Die t-Achse ist ebenfalls enthalten.

Stellen Sie das Signal in einen Plot gegen die Zeit dar. Berechnen Sie numerisch (wieder unter Verwendung der `trapz`-Funktion) die Fourierreihe dieses Signals für $N = 25$ und stellen Sie dann die Fourierkoeffizienten a_k und b_k gegen k in einem Histogram dar.

Mit dieser Darstellung haben Sie das Signal in seine Frequenzen zerlegt, bzw. haben analysiert aus welchen Grundfrequenzen dieses Signal aufgebaut ist. Lassen Sie dann aus dem verrauschten Signal gezielt Frequenzen mit kleiner Amplitude weg, um das Signal zu glätten. Vergleichen Sie mit dem ursprünglichen unverrauschten Signal.

Aufgabe 4 (die ist etwas schwerer):

Schreiben Sie Ihre eigene Version der `trapz`-Funktion, in der Sie eine adaptive Schrittweitensteuerung realisieren. Dabei wird lokal (also in Abhängigkeit von x) die Schrittweite so lange verfeinert, bis das Ergebnis zweier aufeinanderfolgender Verfeinerungen, sich weniger als eine vorher festgelegte Toleranzgrenze unterscheidet.