# Computational Engineering

## Für Studierende des Master-Studiengangs Embedded Systems

Prof. Dr. Marc Kirch

BEUTH HOCHSCHULE FÜR TECHNIK BERLIN
University of Applied Sciences

WS 2021/22

# Computational Engineering

## Übung 1: Matlab-Grundlagen, Rechnerarithmetik

**Aufgabe 0.1**:

(1) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion

$$y = f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

für $x \in [0, 10]$. Geben Sie auch Achsenbezeichnungen und einen Titel an.

(2) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion, die einen Kreis in ein $(x, y)$-Koordinatensystem zeichnet. Eingabeparameter sind dabei die Lage des Mittelpunktes $(x_M, y_M)$ und der Radius $r$. Geben Sie einen Titel und Achsenbeschriftungen an.

(3) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion, die die Summe der Diagonalelemente (die sogenannte "Spur") einer quadratischen Matrix berechnet.

Hinweis: Ihre Matlab-Funktionen sollten i.A. gegen zu erwartende Fehleingaben geschützt sein!

**Aufgabe 0.2**:

(1) Legen Sie in Matlab eine Vektor $\vec{x}$ an, mit $x_j = j$ für $j = 1, \ldots, 10000$. Testen Sie die Laufzeit mittels des `tic-toc`-Befehls. Arbeiten Sie einmal mit und einmal ohne Speicherallokation und vergleichen Sie.

(2) Legen Sie in Matlab zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ der Dimension $10^7$, mit gleichverteilten zufälligen Einträgen an. Bilden Sie dann den Vektor $\vec{c}$ mit $c_j = a_j \cdot b_j$, in dem Sie

- mit einer `for`-Schleife arbeiten, oder
- die eingebaute Vektorrechnungsfähigkeit von Matlab nutzen.

Vergleichen Sie die Laufzeiten mittels des `tic-toc`-Befehls.

(2) Legen Sie in Matlab einen Vektor $\vec{a}$ der Dimension $10^5$, mit gleichverteilten zufälligen Einträgen an. Bilden Sie dann die Summe aller Vektorkomponenten, in dem Sie

- mit einer `for`-Schleife arbeiten, oder
- den `sum`-Befehl von Matlab nutzen.

Vergleichen Sie die Laufzeiten mittels des `tic-toc`-Befehls.

**Aufgabe 0.3**: Wie genau rechnen Numerikprogramme? Rechnen Numerikprogramme alles prinzipiell mit beliebiger Genauigkeit?

Berechnen Sie in MATLAB die Differenzen:

$$
\begin{aligned}
1,0000000001 - 1 \\
1,00000000001 - 1 \\
1,000000000001 - 1 \\
\vdots
\end{aligned}
$$

und beobachten Sie was passiert. Erklären Sie Ihre Beobachtung.

**Aufgabe 0.4**: Gilt beim numerischen Rechnen etwas scheinbar so selbstverständliches wie das Kommutativgesetz der Addition?

(1) Stellen Sie sich einen Rechner vor, der jede Zahl nur auf 4 Stellen genau darstellen kann. Ab der 5. Stelle wird auf die 4. Stelle gerundet. Berechnen Sie (auf dem Papier) welche Ergebnisse dieser Rechner ausgeben würde für

$$23400 + 3 + 4 = ? \tag{1}$$

$$3 + 4 + 23400 = ? \tag{2}$$

(2) Berechnen Sie für

$$a = 5.5555555555555555 \cdot 10^{15}$$

$$b = 0,4$$

$$c = 0,3$$

(16 5-en nach dem Dezimappunkt)in Matlab folgende Ausdrücke

$$d = a + b + c \tag{3}$$

$$e = d - a \tag{4}$$

$$d = b + c + a \tag{5}$$

$$e = d - a \tag{6}$$

**Aufgabe 0.5**: Sind exakte Formeln immer besser als Näherungsformeln?

(1) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

und berechnen Sie in MATLAB die Funktionswerte für

$$x = 10,\ 1.0,\ 0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ \ldots,\ 10^{-10}.$$

Erklären Sie Ihre Beobachtung.

(2) Entwickeln Sie die $e$-Funktion in der Formel (8) in eine Taylorreihe (auf dem Papier) und setzen Sie diese in $f(x)$ ein. Was ändert das?

**Aufgabe 0.6**: Führen algebraisch äquivalente Formeln auch immer zu äquivalenten Ergebnissen?

(1) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

und berechnen Sie in MATLAB die Funktionswerte für

$$x = 0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ \ldots,\ 10^{-10}.$$

Erklären Sie Ihre Beobachtung.

(2) Nutzen Sie die Identität

$$1 - \cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

und beobachten Sie ob sich am Ergebnis etwas ändert. Erklären Sie den Unterschied.

**Aufgabe 0.7**: Haben die implementierten Standardfunktionen keine Fehler?

Betrachten Sie das Polynom

$$p(x) = (x-1)^7 = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1.$$

(1) Welche Nullstellen hat dieses Polynom?

(2) Berechnen Sie die Nullstellen des Polynoms numerisch mittels der in MATLAB implementierten Routine `roots`. Was beobachten Sie?

(3) Plotten Sie den Funktionsgraph des Polynoms für $x \in [0.99, 1.01]$, einmal die faktorisierte Form und einmal die ausmultiplizierte Form. Diese sind mathematisch exakt gleich, aber die Plots sollten unterschiedlich aussehen. Woher kommt das?

**Aufgabe 0.8**: Welche Fehler sind bei der Diskretisierung von Formeln aus der kontinuierlichen Mathematik zu erwarten?

Die sogenannte **finite Differenz erster Ordnung**

$$D_1(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$$

ist für einen **endlichen Wert von** $h$ eine **Näherung** für den Wert der ersten Ableitung einer Funktion $f$ an der Stelle $x$. Rein theoretisch sollte die finite Differenz umso genauer sein, je kleiner der Wert von $h$ ist. Untersuchen Sie dies, in dem Sie den Fehler

$$R(x,h) = |D_1(x,h) - f'(x)|$$

der Differenzenformel für die Funktion $f(x) = \sin(x)$ mit der exakt bekannten Ableitung $f'(x) = \cos(x)$ an der Stelle $x = 1$ für verschiedene Werte von

$$h = 10^{-1}, \ldots, 10^{-15}$$

berechnen und geeignet darstellen. Was beobachten Sie?