

Drehungen mit Quaternionen

In dieser Aufgabe soll untersucht werden, wie sich dreidimensionale Drehungen von Vektoren bzw. Koordinatensystemen mit Quaternionen beschreiben lassen, wozu mittels Matlab zunächst die wesentlichen Verknüpfungen dieser mathematischen Objekte auf Basis der Ergebnisse der Vorlesung als Funktionen zu implementieren sind.

- a) Schreiben Sie in einem m-File Matlab-Funktionen für die folgenden Berechnungen mit einer bzw. zwei Quaternionen x und y : Addition mit $qadd(x, y)$, Betragsbildung mit $qnorm(x)$, skalare Multiplikation mit $qsmult(a, x)$ für $a \in \mathbb{R}$, Normalisierung auf den Betrag eins mit $qnormalize(x)$ sowie Bildung der konjugierten Quaternion mit $qconj(x)$. Testen Sie die Funktionen mit den folgenden Zahlenwerten: $x = 1 + 2i - 4j + 5k$, $y = -5 - i + 3j + 2k$ und $a = 5$.
- b) Ergänzen Sie das m-File mit einer Funktion $qmult(x, y)$ zur Multiplikation von zwei Quaternionen, wozu Sie die in der Vorlesung gezeigte Python-Funktion nach Matlab übertragen; implementieren Sie anschließend eine alternative Quaternionenmultiplikation $qmult1(x, y)$ auf Basis von Matrizenmultiplikation. Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass beide Varianten dasselbe Ergebnis liefern. Welche Quaternion ist das neutrale Element bezüglich der Quaternionenmultiplikation?
- c) Schreiben Sie eine weitere Matlab-Funktion $qrotate(v, u, \varphi)$, mit der ein beliebiger Vektor $\underline{v} = [v_1, v_2, v_3]^T$ um den Winkel φ um einen ebenfalls beliebigen Vektor $\underline{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$ gedreht werden kann. Welche Ergebnisse erhalten Sie, wenn $\underline{v} = \underline{u}$ oder $\varphi = 0$ gilt? Erklären Sie die Ergebnisse.
- d) Drehen Sie mit $qrotate()$ den Vektor $\underline{v} = [1, 0, 0]^T$ um den Winkel $\varphi = 180^\circ$ um den Vektor $\underline{u} = [2, 2, 0]^T$ und erklären Sie das Ergebnis. Durch welche Kardan-Winkel α, β und γ lässt sich diese Drehung alternativ mit einer Rotationsmatrix beschreiben? Geben Sie die Winkel zunächst anschaulich an, und zeigen Sie dann, dass die Umrechnungsformeln aus der Vorlesung dasselbe Ergebnis liefern.