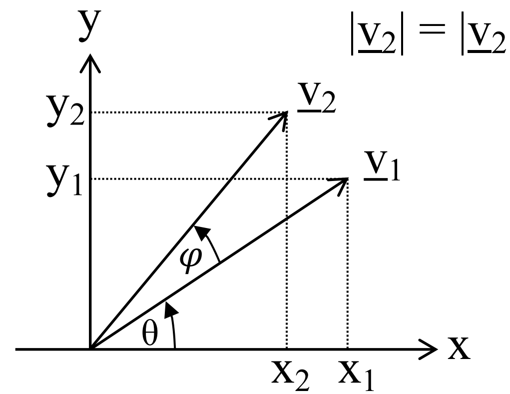
Drehungen in der Ebene

Drehungen von Vektoren oder des Koordinatensystems können in der Ebene durch eine Rotationsmatrix $\underline{R}_{\varphi}$ beschrieben werden



$$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \underline{R}_{\varphi} \cdot \underline{v}_1$$

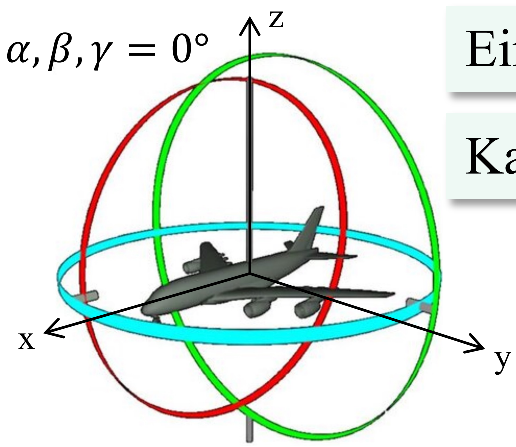
Eine elegante und effiziente Alternative besteht in der Verwendung komplexer Zahlen, mit den Koordinaten als Real- und Imaginärteil

$$v_1 = x_1 + i\, y_1 = |v_1| \cdot e^{i\theta}$$

$$v_2 = x_2 + i\, y_2 = |v_2| \cdot e^{i(\theta+\varphi)} = |v_1| \cdot e^{i\varphi} = |v_1| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

Der Real- und der Imaginärteil komplexer Zahlen entsprechen den Komponenten von Vektoren in der Ebene (zweidimensional)

Drehungen im Raum mit Kardan-Winkeln



Eine 3D-Drehung wird in drei einzelne Drehungen aufgeteilt

Kardanwinkel bezeichnen Drehungen um die x-, y- und z-Achse

α : Drehwinkel um die x-Achse (grün, Rollen, *roll*)
β : Drehwinkel um die y-Achse (rot, Nicken, *pitch*)
γ : Drehwinkel um die z-Achse (blau, Gieren, *yaw*)

Transformation mit Rotationsmatrizen vom lokalen ins globale Koordinatensystem:

$$\underline{R}_{zyx}(\gamma,\beta,\alpha) = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{R}_z(\gamma)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}}_{\underline{R}_y(\beta)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}}_{\underline{R}_x(\alpha)}$$

Ausmultiplizieren ergibt:

$$\underline{R}_{zyx} = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \\ \cos\beta\sin\gamma & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma \\ -\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

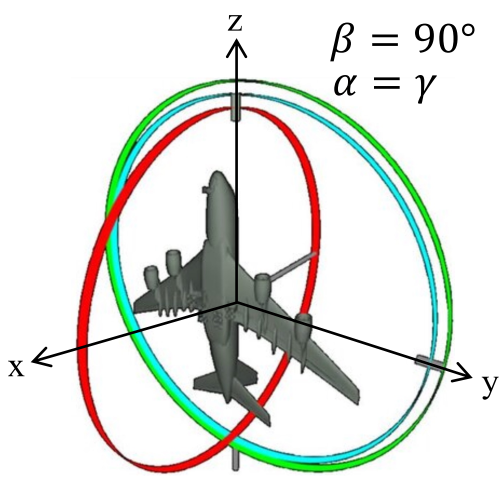
Kardanische Blockade (Gimbal Lock)

Bei 90°-Drehungen ist abhängig von der Drehreihenfolge nicht mehr jeder Raumwinkel erreichbar, was als **Kardanische Blockade** bezeichnet wird

$$\underline{R}_{zyx}(\beta = 90°) = \begin{bmatrix} 0 & sin\,\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\,sin\,\gamma & cos\,\alpha\cos\gamma + sin\,\alpha\,sin\,\gamma \\ 0 & sin\,\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & cos\,\alpha\,\sin\gamma - sin\,\alpha\cos\gamma \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \sin(\alpha-\gamma) & \cos(\alpha-\gamma) \\ 0 & \cos(\alpha-\gamma) & -\sin(\alpha-\gamma) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mit Quaternionen kann eine kardanische Blockade verhindert werden, da die Rotationsmatrix nicht durch Drehungen um drei einzelne Achsen entsteht



Stattdessen kann direkt die gewünschte Drehachse und der Drehwinkel um diese vorgegeben werden

Definition von Quaternionen

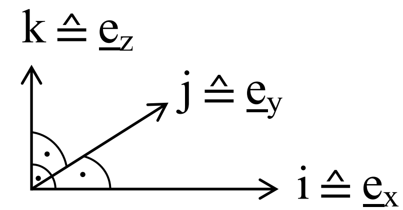
Erweiterung des Imaginärteils komplexer Zahlen (Idee von Hamilton):

$q \in \mathbb{H}$: $q = \underbrace{q_0}_{\text{Realteil bzw. Skalarteil von q}} + \underbrace{i\, q_1 + j\, q_2 + k\, q_3}_{q_1,\, q_2,\, q_3\text{: Imaginärteil bzw. Vektorteil von q}}$ mit $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

Realteil bzw. Skalarteil von q

q_1 , q_2 , q_3: Imaginärteil bzw. Vektorteil von q mit $\underline{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$

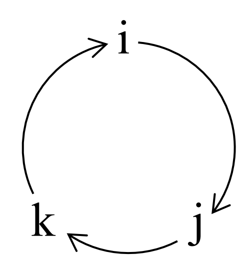
Die Konstanten i, j und k korrespondieren zu den Einheitsvektoren im 3D-Raum:



Daher lässt sich der Imaginärteil von Quaternionen als 3D-Vektor interpretieren

Für Produkte $x \cdot y$ mit $x, y \in \ i, j, k$ folgt aus obiger Definition:

y \ x	i	j	k
i	-1	-k	j
j	k	-1	-i
k	-j	i	-1



Multiplikation von Quaternionen

t, $x \in \mathbb{H}$: $t = t_0 + i\,t_1 + j\,t_2 + k\,t_3$ $x = x_0 + i\,x_1 + j\,x_2 + k\,x_3$

$$\begin{aligned}\Rightarrow w = tx = {} & t_0 x_0 + i t_1 x_0 + j t_2 x_0 + k t_3 x_0 \\ & + i t_0 x_1 + \overset{-1}{\cancel{i^2}} t_1 x_1 + \overset{-k}{\cancel{ji}} t_2 x_1 + \overset{j}{\cancel{ki}} t_3 x_1 \\ & + j t_0 x_2 + \overset{k}{\cancel{ij}} t_1 x_2 + \overset{-1}{\cancel{j^2}} t_2 x_2 + \overset{-i}{\cancel{kj}} t_3 x_2 \\ & + k t_0 x_3 + \overset{-j}{\cancel{ik}} t_1 x_3 + \overset{i}{\cancel{jk}} t_2 x_3 + \overset{-1}{\cancel{k^2}} t_3 x_3\end{aligned}$$

$$w = w_0 + i\,w_1 + j\,w_2 + k\,w_3$$

Alternativ auch als Vektor darstellbar:

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Sortieren nach den imaginären Konstanten

$$\begin{aligned} w = {} & t_0 x_0 - t_1 x_1 - t_2 x_2 - t_3 x_3 \\ & + i(t_1 x_0 + t_0 x_1 - t_3 x_2 + t_2 x_3) \\ & + j(t_2 x_0 + t_3 x_1 + t_0 x_2 - t_1 x_3) \\ & + k(t_3 x_0 - t_2 x_1 + t_1 x_2 + t_0 x_3) \end{aligned} \Leftrightarrow \underline{w} = \begin{bmatrix} t_0 & -t_1 & -t_2 & -t_3 \\ t_1 & t_0 & -t_3 & t_2 \\ t_2 & t_3 & t_0 & -t_1 \\ t_3 & -t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underline{T} \cdot \underline{x}$$

Umstellen in Zeilen 2 bis 4 ergibt:

$$\begin{aligned} w = {} & t_0 x_0 - t_1 x_1 - t_2 x_2 - t_3 x_3 \\ & + i(t_0 x_1 + t_1 x_0 + t_2 x_3 - t_3 x_2) \\ & + j(t_0 x_2 - t_1 x_3 + t_2 x_0 + t_3 x_1) \\ & + k(t_0 x_3 + t_1 x_2 - t_2 x_1 + t_3 x_0) \end{aligned} \Leftrightarrow \underline{w} = \begin{bmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_0 & x_3 & -x_2 \\ x_2 & -x_3 & x_0 & x_1 \\ x_3 & x_2 & -x_1 & x_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \underline{\tilde{X}} \cdot \underline{t}$$

Eigenschaften von Quaternionen

Konjugierte Quaternion: $q^* = q_0 - i\,q_1 - j\,q_2 - k\,q_3$

Betrag einer Quaternion: $|q| = \sqrt{q\,q^*}$

$$\Rightarrow \quad |q| = \sqrt{(q_0 + i\,q_1 + j\,q_2 + k\,q_3)\cdot(q_0 - i\,q_1 - j\,q_2 - k\,q_3)}$$

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

$$|q|^2 = q\,q^* \quad \Rightarrow \quad q \cdot \frac{q^*}{|q|^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$$

Eine Quaternion mit $|q| = 1$ wird **Einheitsquaternion** genannt

Für Einheitsquaternionen gilt damit: $q^{-1} = q^*$

Rechenregeln für Quaternionen

Quaternionen bilden mathematisch einen sogenannten **Schiefkörper** mit folgenden Eigenschaften ($p, q, r, \in \mathbb{H}$):

Kommutativgesetz der Addition: $p + q = q + p$

Assoziativgesetz der Addition: $p + (q + r) = (p + q) + r$

Assoziativgesetz der Multiplikation: $p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$

Multiplikation mit reeller Konstante: $p \cdot (a \cdot q) = a \cdot (p \cdot q)$ $a \in \mathbb{R}$

Links-Distributivgesetz: $p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r$

Rechts-Distributivgesetz: $(q + r) \cdot p = q \cdot p + r \cdot p$

Die Multiplikation von Quaternionen ist nicht kommutativ! $p \cdot q \neq q \cdot p$

Python Code zur Rechnung mit Quaternionen

```
add = lambda Q,R: [q+r for q,r in zip(Q,R)]
norm = lambda Q: sqrt(sum(q*q for q in Q))
smult = lambda s,Q: [s*q for q in Q]
normalize = lambda Q: smult(1/norm(Q),Q)
def mult(Q,R):
    P = [0,0,0,0]
    for i in range(4):
        for j in range(4):
            P[abs(i-j) if i*j==0 or i==j else 6-i-j] \
              += Q[i]*R[j]*(1 if i*j==0 or i%3+1==j else -1)
    return P

mult([1,3,-2,2],[2,5,-6,3]) ⇝ [-31,17,-9,-1]
```

Quellcode: Weitz / HAW Hamburg

Rein imaginäre Quaternionen

$u, v \in \mathbb{H}$: $u = i\,u_1 + j\,u_2 + k\,u_3$ und $v = i\,v_1 + j\,v_2 + k\,v_3$

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (i\,u_1 + j\,u_2 + k\,u_3) \cdot (i\,v_1 + j\,v_2 + k\,v_3) \\ &= -(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) \\ &\quad + i\,(u_2 v_3 - u_3 v_2) + j\,(u_3 v_1 - u_1 v_3) + k\,(u_1 v_2 - u_2 v_1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad u \cdot v = -\,\underline{u}^T \underline{v} \; + \; i\,[\underline{u} \times \underline{v}]_x + j\,[\underline{u} \times \underline{v}]_y + k\,[\underline{u} \times \underline{v}]_z$$

mit: $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ und $\underline{u} \times \underline{v} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$

Spezialfälle:

falls: $\underline{u} \perp \underline{v}$

$\Rightarrow \quad u \cdot v = i\,(u_2 v_3 - u_3 v_2) + j\,(u_3 v_1 - u_1 v_3) + k\,(u_1 v_2 - u_2 v_1)$

$u \cdot v = -v \cdot u$ (wegen Symmetrie des Vektorproduktes)

$u^2 = -\underline{u}^T \underline{u} = -(u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3) = -|u|^2$

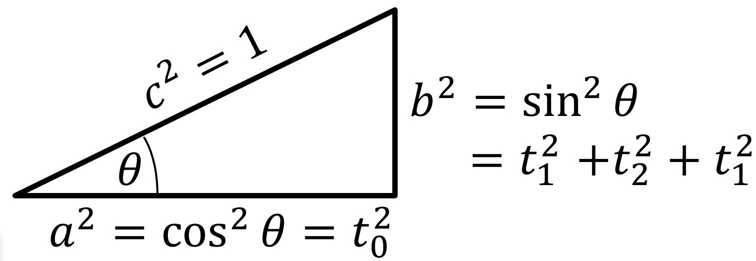
falls: $|u| = 1 \quad \Rightarrow \quad u^2 = -1$ (rein imaginäre Einheitsquaternion)

Einheitsquaternionen

$$t \in \mathbb{H}: \quad t = t_0 + i\,t_1 + j\,t_2 + k\,t_3 \quad \text{mit} \quad |t| = 1$$

$$\Rightarrow \quad |t|^2 = \underbrace{1}_{} = \underbrace{t_0^2}_{} + \underbrace{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}_{}$$

Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$



$$\Rightarrow \quad t_0 = \cos\theta \quad \text{und} \quad \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_1^2} = \sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad t = t_0 + \underbrace{\frac{i\,t_1 + j\,t_2 + k\,t_3}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_1^2}}}_{u} \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_1^2} \qquad \Rightarrow \quad t = \cos\theta + u \cdot \sin\theta$$

Eigenschaften von u

- Die Quaternion u ist wegen $u_0 = 0$ rein imaginär mit $|u| = 1$
- Die Quaternion u hat dieselbe Richtung wie der Vektorteil von t

Konjugierte Einheitsquaternion: $t^* = t_0 - i\,t_1 - j\,t_2 - k\,t_3 \quad \text{mit} \quad |t^*| = 1$

Drehungen von Vektoren mit Einheitsquaternionen

Betrachte die folgende Abbildung einer Quaternion x: $\boxed{y = t \cdot x \cdot t^*}$

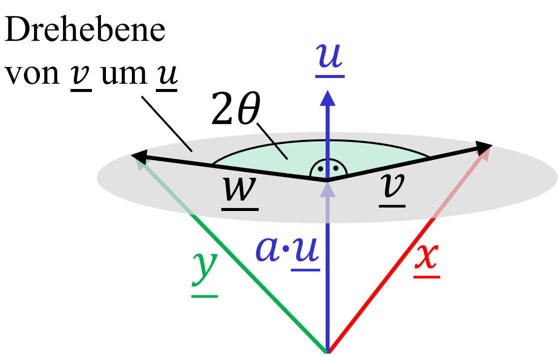
mit: $\boxed{t = \cos\theta + u \cdot \sin\theta} = \cos\theta + \underbrace{(i\,u_1 + j\,u_2 + k\,u_3)}_{u \text{ mit } |u| = 1} \cdot \sin\theta$

$\boxed{x = i\,x_1 + j\,x_2 + k\,x_3}$ (rein imaginär)

Zugehörige Vektoren: $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$

<u>Behauptung</u>:

Die Abbildung bewirkt eine 2θ-Drehung des Vektors $\underline{x}$ um den Vektor $\underline{u}$



$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$

Zum Nachweis Zerlegung des Vektors $\underline{x}$:

$\underline{x} = \mathrm{a} \cdot \underline{u} + \underline{v}$ mit $\mathrm{a} \in \mathbb{R}$ und $\underline{v} \perp \underline{u}$

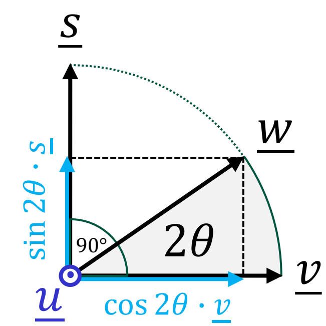
$$\Rightarrow \; t \cdot x \cdot t^* = t \cdot (a \cdot u + v) \cdot t^*$$
$$= a \cdot t \cdot u \cdot t^* + t \cdot v \cdot t^*$$

Beweis für die Drehformel

$$
\begin{aligned}
t \cdot u \cdot t^* &= (\cos\theta + u \cdot \sin\theta) \cdot u \cdot (\cos\theta - u \cdot \sin\theta) \\
&= u \cdot \cos^2\theta + \cancel{u^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta} - \cancel{u^2 \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta} - u^3 \cdot \sin^2\theta \\
&= u \cdot (\cos^2\theta - u^2 \cdot \sin^2\theta) \\
&= u \cdot (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = u
\end{aligned}
$$

mit: $u^2 = -1$

(Siehe Folie 9)



$\underline{v} \perp \underline{u} \;\Rightarrow\; \underline{u} \times \underline{v} = \underline{s}$ mit $|\underline{s}| = |\underline{v}|$, $uv = s$ und $vu = -s$

$$
\begin{aligned}
t \cdot v \cdot t^* &= (\cos\theta + u \cdot \sin\theta) \cdot v \cdot (\cos\theta - u \cdot \sin\theta) \\
&= v \cdot \cos^2\theta + uv \cdot \sin\theta\cos\theta - vu \cdot \cos\theta\sin\theta - uvu \cdot \sin^2\theta \\
&= v \cdot \cos^2\theta + uv \cdot \sin\theta\cos\theta + uv \cdot \cos\theta\sin\theta - v \cdot \sin^2\theta \\
&= v \cdot \underbrace{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}_{1 - 2\sin^2\theta = \cos 2\theta} + \underbrace{uv}_{s} \cdot \underbrace{2\sin\theta\cos\theta}_{\sin 2\theta} = w
\end{aligned}
$$

Vektorielle Darstellung: $\underline{w} = \underline{v} \cdot \cos 2\theta + \underline{s} \cdot \sin 2\theta$

Insgesamt gilt damit: $y = a \cdot u + w$ bzw. $\underline{y} = a \cdot \underline{u} + \underline{w}$

Python Code zur Vektordrehung mit Quaternionen

```
conj = lambda q: [q[0]]+[-q[i] for i in range(1,4)]
def rotate(P,u,theta):
    Q = [cos(theta/2)]+smult(sin(theta/2),normalize(u))
    return mult(mult(Q,[0]+P),conj(Q))[1:]
```

Test: Drehung des Vektors $[4\ 2\ 0]^T$ um die negative z-Achse um $-\pi/2$

```
rotate([4,2,0],[0,0,-1],-pi/2) ⇝ [-2,4,0]
```

Quellcode: Weitz / HAW Hamburg

Verknüpfung von Drehungen mit Quaternionen

Jede Quaternion $t = \cos\frac{\theta}{2} + u \cdot \sin\frac{\theta}{2}$ mit $|t| = 1$ repräsentiert eine Drehung um den Vektor $\underline{u} = [\mathrm{u}_1\ \mathrm{u}_2\ \mathrm{u}_3]^T$ um den Winkel θ

Diese Drehung kann auf einen beliebigen Vektor $\underline{\mathrm{x}} = [\mathrm{x}_1\ \mathrm{x}_2\ \mathrm{x}_3]^T$ angewandt werden, wozu die Quaternion $\mathrm{x} = i\mathrm{x}_1 + j\mathrm{x}_2 + k\mathrm{x}_3$ gebildet und die gedrehte Quaternion $\mathrm{y} = t \cdot \mathrm{x} \cdot t^*$ berechnet werden muss

Die Quaternion y kann erneut gedreht werden, indem mit einer weiteren Quaternion z bzw. z^* von links und rechts multipliziert wird, wobei natürlich ebenfalls $|z| = 1$ gelten muss

$$\mathrm{w} = \mathrm{z} \cdot \mathrm{y} \cdot z^* = \mathrm{z} \cdot (t \cdot \mathrm{x} \cdot t^*) \cdot z^* = (\mathrm{z} \cdot t) \cdot \mathrm{x} \cdot (t \cdot z)^*$$

Dasselbe Ergebnis wird erzielt, wenn zunächst eine Multiplikation der Quaternionen z und t, und dann mit dem Ergebnis die Drehung erfolgt

Umwandlung von Drehwinkeln in Quaternionen

Eine Drehung um die drei Koordinatenachsen jeweils um γ, β und α wird äquivalent als Produkt von drei Einheitsquarternionen dargestellt

$$\mathrm{q} = \underbrace{\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \mathrm{k}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\right)}_{\text{Drehung um z-Achse}} \underbrace{\left(\cos\frac{\beta}{2} + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\right)}_{\text{Drehung um y-Achse}} \underbrace{\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)}_{\text{Drehung um x-Achse}}$$

Ausmultiplizieren ergibt:

$$\begin{aligned} q = \; & \cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} \\ & + i\left(\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right) \\ & + j\left(\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right) \\ & + k\left(\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right) \\ = \; & \mathrm{q}_0 + \mathrm{i}\,\mathrm{q}_1 + \mathrm{j}\,\mathrm{q}_2 + \mathrm{k}\,\mathrm{q}_3 \end{aligned}$$

Falls bei der Drehung *Gimbal Lock* auftritt, kann auch keine eindeutige Quaternion gebildet werden

Umrechnung von Quaternionen in Rotationsmatrizen

Das Quaternionenprodukt $y = t \cdot x \cdot t^*$ kann auch vektoriell berechnet werden

$$\tilde{y} = x \cdot t^* \Leftrightarrow \underline{\tilde{y}} = \underline{\tilde{T}}^* \cdot \underline{x} \qquad y = t \cdot \tilde{y} \Leftrightarrow \underline{y} = \underline{T} \cdot \underline{\tilde{y}} = \underline{T} \cdot \underline{\tilde{T}}^* \cdot \underline{x} = \underline{R}_4 \cdot \underline{x}$$

(siehe Folie 5)

Für die Rotationsmatrix $\underline{R}_4$ folgt daraus mit $t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1$:

$$\underline{R}_4 = \begin{bmatrix} t_0 & -t_1 & -t_2 & -t_3 \\ t_1 & t_0 & -t_3 & t_2 \\ t_2 & t_3 & t_0 & -t_1 \\ t_3 & -t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & t_3 \\ -t_1 & t_0 & -t_3 & t_2 \\ -t_2 & t_3 & t_0 & -t_1 \\ -t_3 & -t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \underline{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2(t_2^2 + t_3^2) & 2(t_1 t_2 - t_0 t_3) & 2(t_1 t_3 + t_0 t_2) \\ 0 & 2(t_1 t_2 + t_0 t_3) & 1 - 2(t_1^2 + t_3^2) & 2(t_2 t_3 - t_0 t_1) \\ 0 & 2(t_1 t_3 - t_0 t_2) & 2(t_2 t_3 + t_0 t_1) & 1 - 2(t_1^2 + t_2^2) \end{bmatrix} \qquad = \underline{R}_{zyx}(\gamma, \beta, \alpha)$$

(siehe Folie 2)

Koeffizientenvergleich ergibt

$$-\sin\beta = 2(t_1 t_3 - t_0 t_2)$$

$$\Rightarrow \beta = \arcsin\big(2(t_0 t_2 - t_1 t_3)\big)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha \cos\beta &= 2(t_2 t_3 + t_0 t_1) \\ \cos\alpha \cos\beta &= 1 - 2(t_1^2 + t_2^2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{2(t_2 t_3 + t_0 t_1)}{1 - 2(t_1^2 + t_2^2)}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta \sin\gamma &= 2(t_1 t_2 + t_0 t_3) \\ \cos\beta \cos\gamma &= 1 - 2(t_2^2 + t_3^2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \gamma = \arctan\left(\frac{2(t_1 t_2 + t_0 t_3)}{1 - 2(t_2^2 + t_3^2)}\right)$$

Zusammenfassung Quaternionen

Quaternionen ermöglichen eine elegante, kompakte und effiziente Beschreibung von Drehungen im dreidimensionalen Raum

Jede Quaternion definiert eine eindeutige Drehachse im Raum und einen Drehwinkel, um die ein beliebiger Vektor gedreht werden kann

Bei ihrer Anwendung sind keine Drehungen um einzelne Raumachsen erforderlich, so dass *Gimbal Lock* nicht auftreten kann

Jede Quaternion repräsentiert eine Rotationsmatrix, und hieraus lassen sich die Drehwinkel um Koordinatenachsen eindeutig ermitteln

Im Unterschied zu Rotationsmatrizen können Quaternionen durch sphärische lineare Interpolation (SLERP) einfach interpoliert werden