Вступление.

$a = \prod\limits_p p^{\alpha_p}$

$V_p(a) := \alpha_p$, где V_p - р-адический показатель a.

$V_p(a) = max\{n \in \mathbb{N} : p^n | a\}$

$V_p(a) = n \Leftrightarrow p^n | a$, но $p^{n+1} \nmid a$

$a = \prod\limits_p p^{\alpha_p},\ b = \prod\limits_p p^{\beta_p}$

$a \vdots b \Leftrightarrow \forall p\ \alpha_p \geq \beta_p$

$a \vdots b \Leftrightarrow V_p(a) \geq V_p(\beta)$

Свойства р-адических показателей:

1. $V_p(ab) = V_p(a) + V_p(b)$
2. $V_p(a+b) \geq min(V_p(a), V_p(b))$

Определение. a, b взаимно просты (обозначение $a \perp b$), если

$\forall d \in \mathbb{Z}$ если $a \vdots d,\ b \vdots d$, то $d = \pm 1$.

$a \perp b \Leftrightarrow \forall p\ V_p(a) = 0$ или $V_p(b) = 0$.

Определение. $a, b \in \mathbb{N}$ $d \in N$ - наибольший общий делитель a и b, если

1. $a \vdots d,\ b \vdots d$.
2. $\forall d'$ если $a \vdots d',\ b \vdots d'$ то $d \vdots d'$.

Обозначение. $d = gcd(a, b)$ ("greatest common divisor").

$$gcd(a, b) = \prod_p p^{min(\alpha_p, \beta_p)}$$

Определение. m - наименьшее общее кратное a, b, если

1. $m \vdots a,\ m \vdots b$.
2. $\forall m' : m' \vdots b$, то $m' \vdots m$.

Обозначение. $lcm(a, b)$ ("least common multiple").

$V_p(lcm(a,b)) = max(V_p(a),\ V_p(b))$

Упражнение. $gcd(a,b) * lcm(a,b) = a * b$

$\prod\limits_p p^{min(\alpha_p,\beta_p)} * \prod\limits_p p^{max(\alpha_p,\beta_p)} = \prod\limits_p p^{min(\alpha_p,\beta_p)+max(\alpha_p,\beta_p)} =$
$\prod\limits_p p^{\alpha_p+\beta_p} = \prod\limits_p p^{\alpha_p} * \prod\limits_p p^{\beta_p} = a * b$

25! - сколькими нулями оканчивается?
$V_{10}(25!) = min(V_2(25!), V_5(25!))$

$a = \prod\limits_p p^{\alpha_p} = \frac{\prod\limits_{p,a_p \geq 0} p^{\alpha_p}}{\prod\limits_{p,a_p<0} p^{-\alpha_p}} = \frac{r}{s}, \quad r, s \in \mathbb{Z}$

Важно: Пусть $d = gcd(a,b)$, тогда $\frac{a}{d} \perp \frac{b}{d}$

Задача. $a \in \mathbb{Z}, a > 0, n \in \mathbb{N}$.

(!) $\sqrt[n]{a}$ либо целый, либо иррациональный.
Предположим, что $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$. Докажем, что $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{Z}$.
$\sqrt[n]{a} = \prod\limits_p p^{\gamma_p},\ \gamma \in \mathbb{Z} \quad (!) \forall p\ \gamma_p \geq 0.$

$\mathbb{Z} \ni a = \left(\prod\limits_p p^{\gamma_p}\right)^n = \prod\limits^p p^{n\gamma_p} \quad \forall p\ n\gamma_p \geq 0.$