1 Отображения

Определение. Отображение f множества X в множество Y - это правило (или способ) сопоставления каждому элементу множества x множества X некоторого элемента y множества Y, при этом пишем $y = f(x)$, y - значение отображения f.

Обозначения. $f : X \to Y, X \xrightarrow{f} Y,\ y = f(x)$ в точке x.
$\{f_x\},\ x \in X$ - задано семейство.

Отображение - тройка (X, Y, f), где
X - область (множество) определения,
Y - множество прибытия,
f - правило сопоставления.

Определение. Отображения $f : X \to Y$и $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ совпадают $\Leftrightarrow X = \tilde{X},\ Y = \tilde{Y}$ и $f = \tilde{f}\ \forall x \in X\ f(x) = \tilde{f}(x)$

Пример.
$f : (-\infty; +\infty) \to (-\infty; +\infty)\ f(x) = x^2$
$f_1 : (-\infty; +\infty) \to [0; +\infty)\ f(x) = x^2$

$$f \neq f_1$$

Определение. Графиком отображения $f : X \to Y$ называется множество

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in X\ \&\ y \in Y\ \&\ y = f(x)\} =$$
$$\{(x, f(x)) : x \in X\}$$
$$\Gamma_f \subset X \times Y$$

Свойства.
1. $f_1, f_2 : X \to Y$, то
$f_1 = f_2 \Rightarrow \Gamma_{f_1} = \Gamma_{f_2}$

Утверждение. Пусть $\Gamma \subset X \times Y \Rightarrow$ след. свойства эквивалентны.

1. Γ - график некоторого отображения f.
2.
$$\begin{cases} \forall x \in X\ \exists y \in Y\ \ : (x, y) \in \Gamma \\ (x_1, y_1) \in \Gamma\ \&\ (x_1, y_2) \in \Gamma \Rightarrow y_1 = y2 \end{cases} \tag{1}$$

Доказательство.

1 $\Rightarrow$ 2. Пусть $\Gamma = \Gamma_f$ - график $f : X \to Y_1$

тогда $\forall x \in X$ определен $f(x) = y$ и $(x_1, f(x)) \in \Gamma$ то есть $\forall x \in X\ \exists y = f(x)$, такие что $(x, y) \in \Gamma$.

$(x, y_1) \in \Gamma_f$ и $(x, y_2) \in \Gamma_f$. Тогда $y1 = f(x)$ и $y_2 = f(x) \Rightarrow y_1 = y_2$.

2 $\Rightarrow$ 1. Пусть Γ удовлетворяет свойству 2 $\Rightarrow \forall x \in X$ найдется $y \in Y$, такой, что $(x, y) \in \Gamma$. Определим $f(x) = y$. Поскольку точка с первой координатой единственна, то правило соответствия задано корректно (значение f в точке x задано единственным образом).

Примеры:

1. $Y = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, f : X \to Y$ - функция.
2. $X = \mathbb{N}, f : X \to Y$ - последовательность.

$$f_n = f(n) \quad \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

3. $X = \{1, 2, \dots, \},\ f : X \to Y$ - конечная последовательность.
4. $X = \mathbb{Z},\ f : X \to Y$ - двустороняя последовательность.
5. $X = Y$ и $\forall x\ f(x) = x$ - тождественное отображение.

$$f = id_x = id$$

6. $\exists c \in Y : \forall x\ f(x) = c \Rightarrow f$ - постоянное отображение.

$$f \equiv c,\ f - const$$

Определение. $f : X \to Y, A \subset X, B \subset Y$

Образом множества A при отображении f называется множество

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

Прообразом множества B при отображении f называется множество

$$f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$$

Свойства:

1. $f(\varnothing) = \varnothing,\ f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.
2. $f(A) \subset Y,\ f^{-1}(B) \subset X$.
3. $A \neq \varnothing \Rightarrow f(A) \neq \varnothing$.
4. $B \neq \varnothing \not\Rightarrow f^{-1}(B) \neq \varnothing$.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$$

$$f^{-1}(\{-1\}) = \varnothing$$

5. $B \cap f(x) \neq \varnothing \Rightarrow f^{-1}(B) \neq \varnothing$.

Определение. $f : X \to Y$

1. f - инъективно, если

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \ (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

2. f - сюръективно(отображение на), если

$$f(X) = Y, \text{ то есть, } \forall y \in Y \ \exists x \in X : f(x) = y$$

3. f - биективно, если оно инъективно и сюръективно.

Замечания.

1. Отображение $f : X \to f(x)$ - сюръективно.
2. $f : X \to Y \Rightarrow f = x^2 \quad f(1) = f(-1) = 1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - не инъективно,
но $f : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ - инъективно (даже биективно)
$\Rightarrow \ \exists \tilde{X} \subset X$, такое, что $\tilde{f} : \tilde{X} \to Y$ - инъективно.
$\tilde{f}(\tilde{X}) = f(X), \ \tilde{f}(x) = f(x) \ \forall x \in \tilde{X}$.

Определение. $f : X \to Y, \tilde{X} \subset X$.
Отображение $\tilde{f} L \tilde{X} \to Y$ называется сужением
отображения f на $\tilde{X}$, если $\forall x \in \tilde{X} \ \tilde{f}(x) = f(x)$.
Обозначается: $\tilde{f} = f|_{\tilde{x}}$