$A$ - множество

$\Lambda \subseteq 2^A$, если

1. $\Lambda_i \neq \varnothing \ \forall i \in I$
2. $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \varnothing \ \forall i \neq j, i, j \in I$
3. $\bigcup\limits_{i \in I} \Lambda_i = A$

$K, \Lambda$ - разбиения $A \quad K = \{K_i\}_{i \in I}, \ \Lambda = \{\Lambda_i\}_{i \in I}$

$K$ измельчает $\Lambda$, если $\forall j \in J \ \exists i \in I \ K_j \subseteq \Lambda_i$

Произведение разбиений $K$ и $\Lambda$ - разбиение $\Pi = \{\Pi_s\}_{s \in S}$, которое измельчает одновременно и $K$, и $\Lambda$, и при этом является самым крупным из таких разбиений (любое другое, измельчающее $K$ и $\Lambda$, измельчает и $\Pi$).

**Доказательство.**

$\Pi_{ij} = \Lambda_i \cap K_j, \ i \in I, \ j \in J$

$\Pi = \{\Pi_{ij} : \Pi_{ij} \neq \varnothing\}$

1. Проверим, что $\Pi$ - разбиение

а) $\neq \varnothing$ : по построению

б) $\Pi_{ij}, \Pi_{pq} \neq \varnothing$

(!)$\Pi_{ij} \cap \Pi_{pq} = \varnothing$

**1 случай.** $i \neq p, a \in \Pi_{ij} \Rightarrow a \in \Lambda_i \cap K_j \Rightarrow a \in \Lambda_i \Rightarrow a \in \Lambda_p \Rightarrow a \notin \Pi_{pq}$
аналогично, $\forall a \in \Pi_{pq}, \ a \notin \Pi_{ij}$

**2 случай.** $i = p, j \neq q, b \in \Pi_{pq} \Rightarrow b \in K_q \Rightarrow b \in K_j \Rightarrow b \notin \Pi_{ij}$
аналогично, $\forall b \in \Pi_{ij}, \ b \notin \Pi_{pq}$

в) $\cup \Pi = A$ по построению : $a \in A \Rightarrow \exists i \in I, j \in J$
$a \in \Lambda_i, a \in K_j \Rightarrow a \in \Lambda_i \cap K_j \Rightarrow \Lambda_i \cap K_j \neq \varnothing \Rightarrow \Pi_{ij} \in \Pi$

2. Измельчает $\Lambda$ и $K$
$\forall \Pi_{ij} \in \Pi \ \Pi_{ij} = \Lambda_i \cap K_j \Rightarrow \Pi_{ij} \subseteq \Lambda_i$ и $\Pi_{ij} \subseteq K_j$

3. Самое крупное
$\Sigma$ - измельчение $K$ и $\Lambda$
$\Sigma = \{\Sigma_t\}_{t \in T}$
$\Sigma_t \neq \varnothing$
$\exists i, j \ \Sigma_t \subseteq \Lambda_i, \Sigma_t \subseteq K_j$
$\Sigma_t \subseteq \Lambda_i \cap K_j \Rightarrow \Pi_{ij} \neq \varnothing$ и $\Sigma_t \subseteq \Pi_{ij}$

**Утверждение.** $A$ - конечное множество.

$|2^A| = 2^{|A|}$

**Доказательство:** Индукция по $|A|$

$n = 0 \quad a = \varnothing \quad 2^A = \{\varnothing\}$

рассмотрим множество $A, |A| = n+1, n \geq 0$
$\exists a \in A$
$|A \backslash \{a\}| = n$
$2^A = 2^{A \backslash \{a\}} \cup \{a \cup 2^{A \backslash \{a\}}\}$
$|2^A| = 2|2^{A \backslash \{a\}}| = 2 * 2^n = 2^{n+1}$

# 1 Бинарные отношения

Упорядочная пара $(a, b)$, $a$ - первая компонента, $b$ - вторая компонента.
$(a, b) = (\alpha, \beta) \Rightarrow a = \alpha,\ b = \beta$

$A, B \quad A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$ - прямое произведение $A$ и $B$.

Бинарное отношение $R$ на $A, B$ - подмножество их прямого произведения.