$A_1, A_2, ..., A_j$ не более чем счётно (т.е. либо A_j - конечно и $\exists \tilde{f}_j : A_j \to \{1, 2, ..., n_j\}$ - счётно, т.е. $\exists f_j : A_j \to \mathbb{N}$ - инъективно.

$f : \{1, 2, ...n_j\} \to N$

$K \to K$

Докажем, что $A = \cup A_j$ не более чем счётно (дост. доказать, что $\exists f : A \to \mathbb{N}$ - инъективно).

$f : A \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$a \in A \quad f(u) = (j, f_j(a))$, где $j = min\{k : a \in A_k\}$

Проверим, что f - инъективно. Пусть $f(a_1) = f(a_2) = (j, n)$

$\Rightarrow a_1, a_2 \in A_j \quad f_j(a_1) = f_j(a_2) \to$

$a_1 = a_2$, т.к. f_j - инъективно.

$\Rightarrow \exists$ инъективное отображение A в счётное множество $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to A$ не более, чем счётно.

Определение.

$Q = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \text{НОД}(p, q) = 1\} =$

$\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} =$

$\bigcup\limits_{m \in \mathbb{Z}} \{\frac{m}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ - счётно.

Теорема 4. Множество рациональных чисел счётно.

Доказательство. $Q = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{Z}} E_m, E_m = \{\frac{m}{n} : n \in \mathbb{N}\}, E_m$ - счётно.

$E_m \sim \mathbb{N} \frac{m}{n} \to n$

Теорема 5. [0, 1] несчётен.

Доказательство. Пусть $[0, 1] \sim \mathbb{N}$, т.е. $[0, 1] = \{x_1, x_2, ...\} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

Разделим отрезок на 3 части и выберем одну из частей, в которой не лежит x_1, обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$. Делим $[a_1, b_1]$ на три части и берём отрезок $[a_2, b_2]$, так, что $x_2 \notin [a_2, b_2]$ и. т. д.

Получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, т.ч. $\{x_1, ..., x_n\} \notin [a_n, b_n]$

$[a_n, b_n] \in [a_{n-1}, b_{n-1}] \Rightarrow$ по аксиоме Кантора $\exists c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, при этом $\forall k \in \mathbb{N}\ x_k \notin \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \Rightarrow c \notin [0, 1]$?!!

Определение. Множество A континуально (или имеет мощность континуум), если $A \sim [0, 1]$.

Примеры: $[0, 1] \sim \mathbb{R} \sim (0, 1) \sim \mathbb{R}^2 \sim \{f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}\} \sim \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$

$\sim \{A : A \subset \mathbb{N}\}$

Замечание 1. A - бесконечно $\Rightarrow \{B : B \subset A\} \nsim A$

Замечание 2. $\{f : f : [0, 1] \to \mathbb{R}\} \nsim [0, 1]$

Теорема 6 (Кантора - Бернштейна).

$f - A \to B$ - инъективно.

$g - B \to A$ - инъективно.
$\Rightarrow A \sim B$

Доказательство.

$C_0 = B \backslash f(A)$
$C_{n+1} = f(g(C_n))$
$C = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} C_n$

$$f : B \to A \quad f(b) = \begin{cases} x = f^{-1}(b) : b \in B \backslash C, f(x) = b \\ g(b) : b \in C \end{cases}$$

Докажем, что f - биективно.

Пусть $\varphi(b_1) = \varphi(b_2)$
1. Если $b_1, b_2 \in C \Rightarrow g(b_1) = g(b_2) \Rightarrow b_1 = b_2$
2. Если $b_1, b_2 \in B \backslash C \Rightarrow f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2) \Rightarrow b_1 = b_2$?!!
3. $b_1 \in C, b_2 \in B \backslash C \quad \varphi(b_1) = \varphi(b_2) \Rightarrow f(\varphi(b_1)) = f(\varphi(b_2)) = f(f^{-1}(b_2)) = b_2$. С другой стороны $f(\varphi(b_1)) = f(g(b_1)) \in C$?!!

$\Rightarrow f$ - инъективно.

Сюръективно. Пусть $a \in A$, если $a \in f^{-1}(B \backslash C) \Rightarrow$ всё доказано.
Пусть $a \notin f^{-1}(B \backslash C) \Rightarrow f(A) \notin B \backslash C \Rightarrow f(a) \in C$
$\Rightarrow$ либо $f(a) \in C_0 = B \backslash f(A)$, что невозможно, либо $f(a) \in C_{n+1} = f(g(C_n)) \Rightarrow \exists b : g(b) = a$

Следствие - упражнение.
1. Пусть A - бесконечно $\Rightarrow A \times A \sim A$
2. $A \subset B \subset C$ и $A \sim C \Rightarrow A \sim B$

$[0, 1]$ несчётен, ввели определение континуума.

Гипотеза континуума

Любое бесконечное подмножество $\mathbb{R}$ либо счётно, либо имеет мощность континуум.

1 Комплексные числа

Полем комплексных чисел будем называть множество $\mathbb{C}$ упорядоченных пар $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ с операциями сложения и умножения, определённые следующим образом

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$

Упражнение. Проверить, что $\mathbb{C}$ - поле.

$0 = (0, 0)$ - ноль.

$1 = (1, 0)$ - единица.

$i = (0, 1)$ - мнимая единица.

$i^2 = i * i = (-1, 0) = -1$

Отождествляем $x \in \mathbb{R}$ и $(x, 0) \in \mathbb{C}$

$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x * (1, 0) + y * (0, 1) = x + iy$ - алгебраическая запись комплексного числа.

$z = x + iy \in \mathbb{C}$

$x = Rez$ - вещественная часть z.

$y = Imz$ - мнимая часть z.

$\overline{z} = x - iy$ - число, сопряжённое к z.

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$

Свойства.

1. $Rez = \frac{z+\overline{z}}{2}, Imz = \frac{z-\overline{z}}{2i}$
2. $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} = i\frac{y}{x^2+y^2}$
3. $|z|z \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0, |-z| = |z|, |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

   $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

   $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Тригонометрическая запись комплексного числа.

$z = iy \quad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \exists \varphi \in [0, 2\pi)$, т.ч.

$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi$

$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varphi$

$\varphi = argz$ - главный аргумент числа z.

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$

$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi$ для $\varphi \in \mathbb{R}$

Определение. $z \in \mathbb{C} \quad z = x + iy$, определим

$e^z = exp(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$

Упражнение.

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$
2. $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2e^{i\varphi_2} \Rightarrow z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Формула Муавра.

1. $z = re^{i\varphi} \Rightarrow z^n = r^ne^{in\varphi}$
2. $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$

Определение.

Если $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, то y - аргумент числа $z = x + iy$,

множество всех аргументов обозначается $Arg(z) = \{\varphi : \varphi = arg + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$

2 Предел последовательности (в $\mathbb{R}$)

Определение. Последовательность - это отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,
$x_n = f(n) \quad \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

Определение.
1. Пределом последовательности называют такое $a \in \mathbb{R}$, что $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$

Обозначение. $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim x_n$

2. Последовательность называется сходящейся, если у неё есть предел.

Примеры:

1. $X_n = \frac{1}{n}$
   Докажем, что $0 = \lim \frac{1}{n}$
   фиксируем $\epsilon > 0 \quad |\frac{1}{n}| < \epsilon$
   $n > \frac{1}{\epsilon} \quad$ при $n > N = [\frac{1}{\epsilon}]$
   $\forall \epsilon > 0 \ \exists N = [\frac{1}{\epsilon}] : \quad n > N \Rightarrow |X_n - 0| = \frac{1}{n} < \epsilon$

2. $X_n = C$ - постоянная последовательность $C = \lim X_n$

3. $X_n = (-1)^{n+1}$
   Докажем, что у $\{X_n\}$ нет предела,
   Допустим обратное, $c = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$
   $\Rightarrow$ для $\epsilon = \frac{1}{2} \quad \exists N \in \mathbb{N}$ т. ч. при $n > N \quad |(-1)^{n+1} - c| < \frac{1}{2}$
   при $n = 2N > N \quad |-1-c| < \frac{1}{2} \Rightarrow c < -\frac{1}{2}$
   при $n = 2N+1 > N \quad |-1-c| < \frac{1}{2} \Rightarrow c > \frac{1}{2}$

Определение. Последовательность называется расходящейся, если у неё нет предела.

4. Пусть $Q = \{x_1, x_2, ...,\} \Rightarrow$ у последовательности $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ нет предела.

$a = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$, если $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |X_n - a| < \epsilon$

Замечание 1:
1. Можно $N \in \mathbb{N}$ заменить на $N \in \mathbb{R}$
2. $n > N$ заменить на $n \geq N$
3. $|X_n - a| < \epsilon$ на $|X_n - a| \leq \epsilon$
4. $\epsilon > 0$ заменить нельзя!

Замечание 2:
$|X_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow a - \epsilon < X_n < a + \epsilon \Leftrightarrow X_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$
Обозначение. $V_\epsilon(a) = (a - \epsilon, a + \epsilon)$ - ϵ - окрестность точки $a \in \mathbb{R}$

$a = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$, если $\forall V$ - окрестности точки a $\exists N \in \mathbb{N}$ т.ч. $n > N$ $X_n \in V$

Теорема (о единственности предела.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ - пределы последовательности $\{X_n\}_{n+1}^{\infty} \Rightarrow a = b$

Доказательство. $]a \neq b \quad \epsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0 \Rightarrow$ по определению.

$]N_1 \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N_1 \quad |X_n - a| < \epsilon$

и $]N_2 \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N_2 \quad |X_n - b| < \epsilon$

$\Rightarrow$ при $n > max(N_1, N_2)$

$|a - b| \leq |a - X_n| + |X_n - b| < 2\epsilon = |a - b|$?!!

Теорема. Если $\{X_n\}$ - сходится $\Rightarrow$ $\{X_n\}_{n+1}^{\infty}$ - ограничена, т.е. $\exists M > 0$: $|X_n| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Доказательство.

Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} X_n \Rightarrow$ при $\epsilon = 1$ $\exists N \in \mathbb{N} : n < N$

$|X_n - a| < 1$

$a - 1 < X_n < a + 1 \Rightarrow |X_n| < max(|a - 1|, |a + 1|), n > N$

$\Rightarrow |X_n| < M = 1 + max(|a - 1|, |a + 1|, |X_1|, |X_2|, ..., |X_N|)$

Пример.

$X_n = -\frac{1}{n} \quad \lim X_n = 0$, но $\nexists$ $max\{X_n\}$

Замечание.

1. X_n не ограничен $\Rightarrow$ X_n нет предела.
2. $X_n = (-1)^{n+1}$ - ограничена, но у неё нет предела.

Теорема (о предельном переходе в неравенстве).

$X_n <= Y_n$ и $a = \lim X_n, b = \lim Y_n \Rightarrow a \leq b$

Доказательство.

Пусть $a > b$, получается $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0 \Rightarrow$

$\exists N_1 \in \mathbb{N} : n > N_1 \quad a - \epsilon < X_n < a + \epsilon$

$\exists N_2 \in \mathbb{N} : n > N_2 \quad b - \epsilon < Y_n < b + \epsilon$

$\Rightarrow n < max(N_1, N_2)$

$Y_n < b + \epsilon = \frac{a+b}{2} = a - \epsilon < X_n \Rightarrow$

при $n > max(N_1, N_2) \quad Y_n < X_n$?!! $\quad (X_n \leq Y_n!)$