Задача. Докажите, что для $m \neq 3 \quad 2^m + 1$ не является n-й степенью натурального числа ни для какого n.

Доказательство.

Рассмотрим задачу иначе. Найдем все такие m, при которых существует решение.

$2^m + 1 = a^n$

$2^m = a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + ... + a + 1) \Rightarrow$

$2^m \vdots (a-1) \Rightarrow a = 2^k + 1, k \leq m$

$$a = 2^k + 1$$

$a^n - 1 = 2^m$

$(2^k + 1)^n - 1 = 2^m$

$2^k((2^k + 1)^{n-1} + ... + (2^k + 1) + 1) = 2^m$

$(2^k + 1)^{n-1} + ... + (2^k + 1) + 1 = 2^{m-k}$

Заметим, что 2^k+1 в любой степени всегда нечётно, тогда в сумме слева находятся только нечётные числа, и их сумма может быть четной, только если количество нечётных слагаемых чётно, а такое может быть только в том случае, если n - чётно.

$$n = 2x$$

$2^m + 1 = a^n$

$2^m + 1 = (2^k + 1)^{2x}$

$2^m + 1 = (2^{2k} + 2^{k+1} + 1)^x$

$2^m + 1 = (2^k(a+1) + 1)^x$

$2^m = (2^k(a+1) + 1)^x - 1$

$2^m = (2^k(a+1))((2^k(a+1) + 1)^{x-1} + ... + (2^k(a+1) + 1) + 1)$

$2^{m-k} = (a+1)((2^k(a+1) + 1)^{x-1} + ... + (2^k(a+1) + 1) + 1)$

$2^{m-k} \vdots (a+1) \Leftrightarrow 2^{m-k-1} \vdots (2^{k-1} + 1)$

Заметим, что 2^{m-k-1} - чётное, а $2^{k-1} + 1$ - чётное только при $k = 1$.

$$k = 1 \Rightarrow a = 3$$

$2^m + 1 = 3^n$

$2^m + 1 = 3^{2x}$

$2^m = 3^{2x} - 1$

$2^m = (3^x - 1)(3^x + 1)$

$$\begin{cases} 3^x + 1 = 2^{x_1} \\ 3^x - 1 = 2^{x_2} \\ x_1 + x_2 = m \end{cases}$$

$$2^{x_2}+2=2^{x_1}$$
$$2^{x_2}(2^{x_1-x_2}-1)=2$$
$$2^{x_2}(2^{x_1-x_2}-1)=1*2$$
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{x_2}=1\\2^{x_1-x_2}=2\end{cases}\\\begin{cases}2^{x_2}=2\\2^{x_1-x_2}=1\end{cases}\end{array}\right.$$
$$x_1=2\quad x_2=1$$
$$\begin{cases}3^x+1=4\\3^x-1=2\end{cases}$$
$$x=1$$

$2^m=8$
$m=3$

Только при $m=3$ может быть такое, что $2^m+1=a^n$, а значит, что для любого $m\neq 3\quad 2^m+1\neq a^n$, значит, решения не существует.