1 Отношения

Определение. Отношением ω множеств X и Y называется любое подмножество их декартова произведения.

Если $X = Y$ отношения на X
Либо $(x, y) \in \omega, x \in X, y \in Y$
Либо $x\omega y$

Примеры:
1. $X = Y = \mathbb{R} \quad \omega = < \quad = \{(x, y) : x < y\} \subset X \times Y$
2. $x\omega y \Leftrightarrow \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\} \subset X \times Y$
3. $f : X \to Y \quad (x, y) \in \omega \Leftrightarrow y = f(x)$
   т.е. $\omega = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$
4. $X \times Y$ - отношение $\subset X \times Y$

Определение. $\omega \subset X \times Y$

Областью определения $\omega\{x \in X : \exists y \in Y \ (x, y) \in \omega\}$
Множество значений $\omega\{y \in Y : \exists x \in X \ (x, y) \in \omega\}$
Обратное отношение ω^{-1} $\{(y, x) : (x, y) \in \omega\} \subset Y \times X$

Определение. Отношение ω на X $(X \times X)$ называется
- Рефлексивным, если $\forall x \in X \quad (x, x) \in \omega$
- Антирефлексивным, если $(x, y) \in \omega \Rightarrow x \neq y$
- Симметричным, если $(x, y) \in \omega \Rightarrow (y, x) \in \omega$
- Антисимметричным, если $(x, y) \in \omega, (y, x) \in \omega \Rightarrow x = y$
- Транзитивным, если $(x, y) \in \omega, (y, z) \in \omega \Rightarrow (x, z) \in \omega$

Определение. Отношение w на X называется **эквивалентностью**, если оно:
1. Рефлективно.
2. Симметрично.
3. Транзитивно.

$$w = \sim$$

Определение. Классом эквивалентности называется
$[a] = \overline{a} = \{x \in X : x \sim a\}$

Определение. Разбиением множества X называется система подмножеств
$\pi(x) = \{X_i, i \in I\}$:
1. $X_i \cup X_j = \varnothing, i \neq j$

2. $\underset{i \in I}{X_i} = X$

Теорема. X - множество

1. $\forall$ разбиение X задает некоторую эквивалентность.
2. Верно обратное: эквивалентность задает разбиение X.

Доказательство.
1. $X = \underset{i \in I}{\cup} X_i, X_i \cap X_j = \varnothing$, если $i \neq j$.
$x \sim y \Leftrightarrow x, y \in X_i$
а) Рефлексивно $x \sim x$ - истина
б) Симметрично $x \sim (x, y \in X_i) \Rightarrow y \sim x$, т.к. $y, x \in X_i$
в) Транизитивно $x, y \in X_i, y, z \in X_i \Rightarrow x, z \in X_i$
2. $X_i = [x]$; если $x \sim y$, то $x, y \in X_i$
Проверим, что $\pi(x)$ - разбиение
а) $?X_i \cap X_j = \varnothing, i \neq j$
если $\exists x \in X_i \cap X_j \Rightarrow$
$x \in X_i \ \& \ x \in X_j \Rightarrow x \sim a \ X_i = [a], x \sim b \ X_j = [b] \Rightarrow a \sim b \Rightarrow X_i = X_j$
б) $\underset{i \in I}{\cup} X_i$ следует из построения

Следствие. Разбиение X взаимно-однозначно соответствует с $\sim$ на X

2 Фактормножество

Определение. На X задано $\sim$ Множество, состоящее из классов эквивалентности, называется фактормножество.

$X/\sim \quad (X/\sim) = \{[x] : x \in X\}$

Определение. $p : X \to X/\sim$ называется проекцией $p(x) = [x]$

Определение. $f : X \to Y$ отобр. $\overline{f} : X/\omega_f \to Y$ называется **индуцированным** $\overline{f}([x]) = f(x)$

3 Отношения порядка

Определение. Отношением ω на X называется отношением порядка, если:

1. Рефлексивно.
2. Антисимметрично.
3. Транзитивно.

X - частично упорядоченное множество.
Если $\forall x, y \in X \quad (x, y) \in \omega$, то X линейно упорядоченно или цепь.