$\forall$ - квантор всеобщности.
$\exists$ - квантор единственности.
! - существует единственный.

1 Введение

Множество - совокупность объектов, называемых элементами множества.

$A \subset B \qquad \forall x \in A \ \to \ x \in B.$

Определение. Если $A \subset B, A \neq \varnothing, A \neq B$, то А - собственное подмножество.

Действия с множествами:

1. Объединение:
$A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$

2. Пересечение:
$A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$

3. Разность:
$A \setminus B = \{x : x \in A, x \in B\}$

4. Дополнение:
X - универсальное множество.
$\overline{X} = X \setminus A$ - дополнение А в множестве X.

5. Симметрическая разность:
$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Теорема. Закон де Моргана.

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Доказательство:
$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \in X \setminus (A \cup B) \Leftrightarrow x \in \overline{A}, x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

Определение. Если множество X конечно, то его мощностью |X| называют количество элементов.

$$|X| = m$$

Отображения.

X, Y - множества.

Если задано правило, сопоставляющее $\forall x \in X$ некоторый элемент $y = f(x)$, то говорят, что задано отображение $f : X \to Y$.

X - область определенного отображения f.
$Imf = \{y \in Y \ \exists x \in X : f(x) = y\}$ - образ f (множество значений).

$Imf \subsetneq Y$
Пример: $x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$Imx^2 = [0; +\infty)$

Определение. прообраз элемента y $f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$
$f = x^2 \quad f^{-1}(4) = \{\pm 2\}$

Определение. $f : X \to Y$ называется:

1. Сюръективным (сюръекция, отображение на), если

$$Imf = Y$$

"Y полностью покрыто".

2. Инъективным (инъекция), если

$$x_1 \neq x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

3. Биективным (биекция, взаимно-однозначным), если оно сюръективно и инъективно.

Примеры:

1. $\sin x \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $Im \sin x = [-1, 1] \neq \mathbb{R}$ - не сюръективно.
$\sin 0 = \sin \pi, 0 \neq \pi$ - не инъективно.

2. $\sin x \quad \mathbb{R} \to [-1; 1]$ - сюръективно, не инъективно.
$\forall y = [-1; 1] \exists x : \sin x = y$.

3. $\sin x [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$ - биективно.

Определение.
$f : X_1 \to Y_1$
$g : X_2 \to Y_2$

Отображения f и g равны, если

1. $X_1 = X_2$
2. $Y_1 = Y_2$
3. $f(x) = g(x)\ \forall x \in X_1 = X_2$

Определение. Правым обратным отображением к отображению $f : X \to Y$ называется отображение $g : Y \to X : g \circ f = id_x$.

Композиция. (сложная функция)
$f : X \to Y$
$g : Y \to Z$
Композицией $g \circ f$ называется отображение $g \circ f : X \to Z$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Теорема. Ассоциативность композиции.
$f : X \to Y$
$g : Y \to Z$
$h : Z \to W$

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Доказательство:
$(h \circ g) \circ f(x), x \in X = h(g(f(x)))$
$h \circ (g \circ f)(x) = h \circ g(f(x)) = h(g(f(x)))$

Определение.
1. Тождественным отображением id_x называется такое отображение

$$id_x(x) = x, \forall x \in X$$

2. Сужение $f : X \to Y, X_1 \subset X, f_1 : X_1 \to Y f_1(x) = f(x)\ \forall x \in X_1$.
Тогда отображение f_1 называется сужением f.
Пример: $f = \sin x \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f_1 = \sin x [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ - сужение.

3. Вложение $f : X \to Y, X \subset Y$
f - вложение X в Y.

Определение.
$g \circ f = id_x \quad f : X \to Y,\ g : Y \to X$
g - правое обратное.

Определение.

$f \circ g = id_y \quad f : X \to Y,\ g : Y \to X$
g - левое обратное.

Определение. Если $f : X \to Y$ имеет правое и левое обратное, то оно имеет (двусторонее) обратное f^{-1}.

Лемма. Если существует обратное отображение f^{-1} к $f : X \to Y$, то оно единственно.

Доказательство. От противного.
f_1, f_2 - обратные отображения $Y \to X$.

$$f_2 = id_x \circ f_2 = f_1 \circ f \circ f_2 = f_1 \circ id_y = f_1$$

Лемма.
$f : X \to Y$
$g : Y \to X$
если $g \circ f = id_x$, то $\Rightarrow f$ - инъективно, g - сюръективно.

Доказательство.
1. f - инъективно?
предположим,
$x_1 \neq x_2 : f(x_1) = f(x_2)$, тогда
$x_1 = id_x(x_1) = g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) = id_x(x_2) = x_2$
f - инъективно.

2. g - сюръективно?
$\forall x \in X \quad \exists y \in Y \quad g(y) = x$
$x = id_x(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y)$

Теорема.
$f : X \to Y$ имеет обратное $\Leftrightarrow f$ - биекция.
Доказательство.
1. $\Rightarrow$
$\exists f^{-1} \Rightarrow f$ - биекция.
$f \circ f^{-1} = id_y \Rightarrow f$ - сюръективно.
$f^{-1} \circ f = id_x \Rightarrow f$ - инъективно.

$$\Rightarrow f - \text{биекция.}$$

2.$\Leftarrow$
$f - \text{биекция} \Rightarrow \ \exists f^{-1}$
$\forall x \in X \ \exists\, y \in Y : f(x) = y$
$\forall y \in Y \ \exists\, x \in X : f(x) = y$
$g(y) = x : f(x) = y$
$g : Y \to X$
$f \circ g(y) = f(x) = y$

$g \circ f(x) = g(y) = x$

Следствие. $f : X \to Y$ - биекция.
1. Обратное отображение тоже биективно.
2. $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$

Доказательство.
1. Следует из построения.
2. Следует из единственности обратного.
$f^{-1} \circ f = id_x$
$f \circ f^{-1} = id_y$

Определение.
Два множества X и Y называются эквивалентными, если
$\exists f : X \to Y$ - биекция.
Замечание. $|X| = |Y| = n \Rightarrow X$и Y - эквивалентны и наоборот.

Определение.
Множество X называется счетным, если оно эквивалентно $\mathbb{N}$, иначе - несчетным (если X - бесконечно).

Определение.
Декартовым (прямым) произведением множеств X и Y называется множество упорядоченных пар.

$$\{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}$$