PVI: Métodos de Euler, Heun, Punto medio y Métodos de la serie de Taylor.

1. Resuelva el siguiente problema de valor inicial en el intervalo de $t = 0$ a 2, donde $y(0) = 1$. Muestre todos sus resultados en la misma gráfica.
$$\frac{dy}{dt} = yt^3 - 1.1y$$
   a) Analíticamente.
   b) Método de Euler con $h = 0.5$ y 0.25.
   c) Método de punto medio con $h = 0.5$.
   d) Método de la serie de Taylor de orden 3.

2. Resuelva el siguiente problema en el intervalo de $x = 0$ a 1, usando un tamaño de paso de 0.25, donde $y(0) = 1$. Muestre todos sus resultados en la misma gráfica.
$$\frac{dy}{dx} = (1 + 4x)\sqrt{y}$$
   a) Analíticamente.
   b) Método de Euler.
   c) Método de Heun.
   d) Método de la serie de Taylor de orden 4.

3. Resuelva de $t = 0$ a 3, con $h = 0.1$, con los métodos de a) Heun y b) Punto medio:
$$\frac{dy}{dt} = y \sin^3 t \ , \ \ y(0) = 1.$$

4. Resuelva de $t = 0$ a 3, con $h = 0.5$, con los métodos discutidos en clase:
$$\frac{dy}{dt} = -2y + t^2 \ , \ \ y(0) = 1.$$

5. Si se drena el agua desde un tanque cilíndrico vertical por medio de abrir una válvula en la base, el líquido fluirá rápido cuando el tanque esté lleno y despacio conforme se drene. Como resultado, la tasa a la que el nivel del agua disminuye es:
$$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y} \ ,$$
donde k es una constante que depende de la forma del agujero y del área de la sección transversal del tanque y agujero de drenaje. La profundidad del agua y se mide en metros y el tiempo t en minutos. Si $k = 0.06$, determine cuánto tiempo se requiere para vaciar el tanque si el nivel del fluido se encuentra en un inicio a $3\ m$. Escriba un programa computacional para implementar los métodos vistos en clase.

6. Si se supone que el arrastre es proporcional al cuadrado de la velocidad, se puede modelar la velocidad de un objeto que cae, como un paracaidista, por medio de la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2 ,$$

donde u es la velocidad (m/s), $t =$ tiempo (s), g es la aceleración debida a la gravedad $(9.81\, m/s^2)$, c_d = coeficiente de arrastre de segundo orden (kg/m) y m = masa (kg). Resuelva para la velocidad y distancia que recorre un objeto de $90\, kg$ con coeficiente de arrastre de $0.225\, kg/m$. Si la altura inicial es de $1\, km$, determine en qué momento choca con el suelo.

7. Para simular una población se utiliza el modelo logístico:

$$\frac{dp}{dt} = k_{gm}\left(1 - \frac{p}{p_{máx}}\right)p ,$$

donde p = población, k_{gm} = tasa máxima de crecimiento en condiciones ilimitadas y $p_{máx}$ es la capacidad de carga. Simule la población mundial entre 1950 y 2000. Para la simulación, utilice las siguientes condiciones iniciales y valores de parámetros: p_0 (en 1950) $=$ 2555 millones de personas, $k_{gm} = 0.026/$año y $p_{máx} = 12000$ millones de personas. Haga que la función genere salidas que correspondan a las fechas de los datos siguientes de población. Desarrolle una gráfica de la simulación junto con los datos.

t	1950	1960	1970	1980	1990	2000
p	2555	3040	3708	4454	5276	6079