Sistemas de ecuaciones lineales.

Resuelva todos los ejercicios planteados en este taller utilizando las funciones y submódulos incluidos en los módulos *numpy* y *scipy* (en particular el submódulo *linalg*). Una forma ágil de ingresar la matriz al código es leerla de un archivo plano utilizando el comando *loadtxt* disponible en el módulo *numpy*. Resuelva algún ejercicio de cada numeral a mano.

1. Evalúe el determinante y clasifique las siguientes matrices como singulares, mal condicionadas o bien condicionadas.

$$\text{(a)}\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.11 & -0.80 & 1.72 \\ -1.84 & 3.03 & 1.29 \\ -1.57 & 5.25 & 4.30 \end{bmatrix}$$

$$\text{(c)}\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(d)}\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & -2 & 3 \\ 5 & -18 & 13 \end{bmatrix}$$

2. Dada la descomposición LU de A, determine A y $|A|$.

$$\text{(a)}\quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5/3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(b)}\quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Utilice los resultados de la descomposición LU

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 11/13 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 13/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 32/13 \end{bmatrix}$$

   a) para solucionar el sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$, donde $\vec{b}^T = [1 \quad -1 \quad 2]$.
   b) para calcular A^{-1} .

4. Utilice la siguiente descomposición LU de A para: *a)* calcular el determinante de A, *b)* solucionar el sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$, donde $\vec{b}^T = [-10 \quad 44 \quad -26]$, y *c)* calcular A^{-1}.

$$[A] = [L][U] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0.6667 & 1 & \\ -0.3333 & -0.3636 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ & 7.3333 & -4.6667 \\ & & 3.6364 \end{bmatrix}$$

5. a) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones; b) Verifique la exactitud de las soluciones reemplazándolas en el sistema de ecuaciones correspondiente; c) Calcule el número de condición de la matriz de coeficientes asociada a cada sistema y utilícelo para analizar la precisión de las soluciones.

$\begin{aligned} 8x_1 + 4x_2 - x_3 &= 11 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 &= 7 \end{aligned}$	$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 - x_3 &= -38 \\ -3x_1 - x_2 + 7x_3 &= -34 \\ -8x_1 + x_2 - 2x_3 &= -20 \end{aligned}$	$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 - x_3 &= 27 \\ -3x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= -61.5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -21.5 \end{aligned}$
$\begin{aligned} 15c_1 - 3c_2 - c_3 &= 3\,800 \\ -3c_1 + 18c_2 - 6c_3 &= 1\,200 \\ -4c_1 - c_2 + 12c_3 &= 2\,350 \end{aligned}$	$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= -10 \\ 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 &= 44 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= -26 \end{aligned}$	

6. a) Resuelva el sistema de ecuaciones lineales $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ para A y b dados en cada caso; b) Verifique la exactitud de las soluciones reemplazándolas en el sistema de ecuaciones correspondiente; c) Calcule el número de condición de la matriz de coeficientes asociada a cada sistema y utilícelo para analizar la precisión de las soluciones.

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix}$	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -4 \\ 9 & -8 & 24 \\ -12 & 24 & -26 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 65 \\ -42 \end{bmatrix}$	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 8 & -3 & 10 \\ -4 & 12 & -10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.34 & -4.10 & 1.78 \\ -1.98 & 3.47 & -2.22 \\ 2.36 & -15.17 & 6.18 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.02 \\ -0.73 \\ -6.63 \end{bmatrix}$

7. Determine los coeficientes del polinomio $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ que pasa por los puntos (0, 10), (1, 35), (3, 31) y (4, 2).

8. Determine el polinomio de cuarto grado $y(x)$ que pasa por los puntos (0, −1), (1, 1), (3, 3), (5, 2) y (6, −2).

9. Encuentre el polinomio de cuarto grado $y(x)$ que pasa por los puntos (0, 1), (0.75, −0.25), (1, 1) y tiene curvatura cero en (0, 1) y (1, 1).

10. Calcule el número de condición de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando a) la norma euclidiana y b) la norma infinito.