INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DE ENVIGADO
Ciencia, educación y desarrollo
Vigilada Mineducación

- Celebración Día Internacional de las Matemáticas
- Supletorio de quiz
- Solución de quiz

Sistema de ecuaciones algebraicas lineales

Tomado de:

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). *Métodos numéricos para ingenieros.* Mexico: McGraw-Hill

Kiusalaas, J. (2014). *Numerical methods in engineering with Python 3.* Cambridge: Cambridge University Press

Conceptos Básicos

Un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, en general, es una colección de n ecuaciones que deben satisfacer las n incógnitas. En particular, las ecuaciones lineales son aquellas en las que las incógnitas hacen parte de expresiones lineales (el exponente de la incógnita es 1).

$$\begin{gathered} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{gathered}$$

Sistema de ecuaciones

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{gathered}$$

Sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Sistema matricial de ecuaciones lineales

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz de coeficientes

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Vector de incógnitas

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Vector de términos independientes

De forma simple: $A\vec{x} = \vec{b}$ ó $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Tipos de matrices

$$[A]=\begin{bmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 7\\ 2 & 7 & 8\end{bmatrix}$$

Matriz simétrica

$$[A]=\begin{bmatrix}a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ & & & a_{44}\end{bmatrix}$$

Matriz diagonal

$$[I]=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix}$$

Matriz identidad

$$[A]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ & & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}$$

Matriz a bandas

$$[A]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ & & a_{33} & a_{34} \\ & & & a_{44}\end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior

$$[A]=\begin{bmatrix}a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior

Matriz inversa

Si A es una matriz cuadrada de dimensión $n \times n$ entonces es no singular si y solo si existe otra matriz A^{-1}, llamada *inversa* de A, para la cual

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I\,.$$

Si A^{rs} representa la matriz que resulta de eliminar la fila r y la columna s de A entonces el determinante de A, $det(A) = |A|$, se define como:

$$|A| = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_{ik}\,(-1)^{i+k}\left|A^{ik}\right| \;\;\text{ó}\;\; |A| = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} a_{kj}\,(-1)^{j+k}\left|A^{kj}\right|.$$

Para el caso de una matriz cuadrada bidimensional (2×2):

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \;\;\text{y}\;\; A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Matriz inversa

Para tener en cuenta.

Si A es una matriz cuadrada de dimensión $n \times n$ entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- A es invertible.
- A es no singular.
- La única solución del sistema homogéneo es la solución trivial ($\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$).
- El sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene una solución única dada por $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.
- A puede escribirse como el producto de matrices elementales.
- Los renglones y columnas de A son linealmente independientes.
- $det(A) = |A| \neq 0$.
- Cero no es un valor propio de A.

Mal condicionamiento

¿Qué sucede cuando la matriz de coeficientes es casi singular (es decir, si $|A|$ es muy pequeño?

Para determinar si el determinante de la matriz de coeficientes es "pequeño", se requiere una referencia contra la cual se pueda medir el determinante. Esta referencia se llama la norma de la matriz y se denota por $\|A\|$. De esta forma, el determinante es pequeño si

$$|A| \ll \|A\| \,.$$

Dos normas matriciales muy conocidas son la norma Euclidiana y la norma fila-suma:

$$\|A\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2} \quad \text{y} \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \left| A_{ij} \right| \,.$$

El número de condición de una matriz se define como

$$cond(A) = \|A\| \|A\|^{-1} \,.$$

Si este número es cercano a la unidad, la matriz está bien condicionada. El número de condición aumenta con el grado de mal condicionamiento, alcanzando el infinito para una matriz singular. El número de condición no es único porque depende de la elección de la norma matricial.

Métodos de solución

Métodos directos.

Los tres métodos directos más populares son:

- Eliminación de Gauss. Se resuelve el sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ obteniendo un sistema equivalente $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, donde U es una matriz triangular superior (U se obtiene a través del proceso de escalonamiento).

- Descomposición LU. Se resuelve el sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ obteniendo un sistema equivalente $LU\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior (L se obtiene multiplicando las inversas de las matrices elementales utilizadas en el proceso de escalonamiento mientras que U es la misma matriz del método de eliminación de Gauss).

- Eliminación de Gauss-Jordan. Se resuelve el sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ obteniendo un sistema equivalente $I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, donde I es la matriz identidad (I se obtiene escalonando hacia adelante y luego hacia atrás).

Factorización LU

Consiste en reescribir una matriz A de dimensión $n \times n$ como el producto de una matriz triangular (con diagonal principal de unos) por una matriz triangular superior

$$A = LU\,.$$

- El sistema $Ax = b$ se reescribe como $LUx = b$ y se solucionan los dos sistemas de ecuaciones:

$$(1)\quad Ly = b \qquad\qquad (2)\quad Ux = y$$

- La factorización LU de A ofrece un procedimiento de solución para calcular A^{-1} en el que se resuelven los sistemas de ecuaciones lineales

$$A\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{b}_i\ , \qquad 1 \leq i \leq n\ ,$$

donde $\boldsymbol{x}_i$ es la i - ésima columna de A^{-1} y $\boldsymbol{b}_i$ es la i – ésima columna de la matriz identidad.

Gauss - Seidel

En los métodos indirectos de solución se supone un vector solución inicial que a través de varias iteraciones puede conducir a la solución del sistema.

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

del que puede despejarse la i −ésima incógnita en la i −ésima ecuación:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \qquad x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \qquad x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

$$\left|\varepsilon_{a,i}\right| = \left|\frac{x_i^j - x_i^{j-1}}{x_i^j}\right| 100\% < \varepsilon_s$$

Gauss - Seidel

Ejemplo: Utilice el método de Gauss-Seidel para solucionar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4 \end{aligned}$$

Solución verdadera:

$x_1 = 3;\quad x_2 = -2.5;\quad x_3 = 7$

Solución: Se toma $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$ y se despeja la i −ésima variable en la i −ésima ecuación:

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1x_2 + 0.2x_3}{3} \qquad x_1 = \frac{7.85 + 0 + 0}{3} = 2.616667$$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1x_1 + 0.3x_3}{7} \qquad x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.616667) + 0}{7} = -2.794524$$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3x_1 + 0.2x_2}{10} \qquad x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.616667) + 0.2(-2.794524)}{10} = 7.005610$$

Gauss - Seidel

Ejemplo: Utilice el método de Gauss-Seidel para solucionar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$
$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$
$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

Solución verdadera:

$x_1 = 3; \quad x_2 = -2.5; \quad x_3 = 7$

Solución: Se toma $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$ y se despeja la i −ésima variable en la i −ésima ecuación:

$x_1 = 2.616667$ $\quad x_1 = \dfrac{7.85 + 0.1(-2.794524) + 0.2(7.005610)}{3} = 2.990557$ $\quad |\varepsilon_t| = 0.31\%$

$x_2 = -2.794524$ $\quad x_2 = \dfrac{-19.3 - 0.1(2.990557) + 0.3(7.005610)}{7} = -2.499625$ $\quad |\varepsilon_t| = 0.015\%$

$x_3 = 7.005610$ $\quad x_3 = \dfrac{71.4 - 0.3(2.990557) + 0.2(-2.499625)}{10} = 7.000291$ $\quad |\varepsilon_t| = 0.0042\%$

Observaciones:

1. (Condición suficiente) Se puede garantizar convergencia del método de Gauss-Seidel si la matriz del sistema es diagonalmente dominante. Es decir, si se cumple que

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \, , \qquad 1 \leq i \leq n \, .$$

$$\boxed{\begin{aligned} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4 \end{aligned}}$$

2. La convergencia del método puede mejorar si se utiliza una estrategia de relajación en cada iteración. Esto significa:

$$\vec{x}_i^{\,k+1} = \lambda \vec{x}_i^{\,k+1} + (1-\lambda)\vec{x}_i^{\,k} \, .$$