Problemas con Valores en la Frontera (*PVF*)

Tomado de:
Cheney, W. & Kincaid, D (2013). *Numerical mathematics and computing*. Texas: Cengage Learning.

Método del Euler

$$y' = f(x,y), \quad y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

El método de Euler puede ser utilizado para solucionar *PVI*s con EDO de segundo orden.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x, y(x), y'(x)), \\ y(a) = y_a, \qquad y'(a) = y'_a \end{cases}$$

Se introducen las variables $y_1 = y$, $y_2 = y'$ y se plantea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = f(x, y_1, y_2) \\ y_1(a) = y_{1a}, \qquad y_2(a) = y_{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2) \\ y_1(a) = y_{1a}, \qquad y_2(a) = y_{2a} \end{cases}$$

Ejercicio 1. Resuelva la EDO

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 0.6\frac{dy}{dx} + 8y = 0\ ,$$

sujeta a las condiciones $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$, en el intervalo $[0,5]$ y con $h = 0.5$.

Método del Disparo

Al igual que un *PVI*, un *PVF* está conformado por una EDO y condiciones auxiliares. Mientras en los *PVI*s las condiciones auxiliares se especifican en un mismo punto, en los *PVF*s las condiciones se especifican en los puntos extremos del intervalo de interés.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 0.6\dfrac{dy}{dx} + 8y = 0, \\ \\ y(0) = 4, \qquad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Problema con Valores Iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = e^{-2x}, \\ \\ y(0) = 1, \qquad y(2) = 0 \end{cases}$$

Problema con Valores en la Frontera

Método del Disparo

En general, el *PVF*

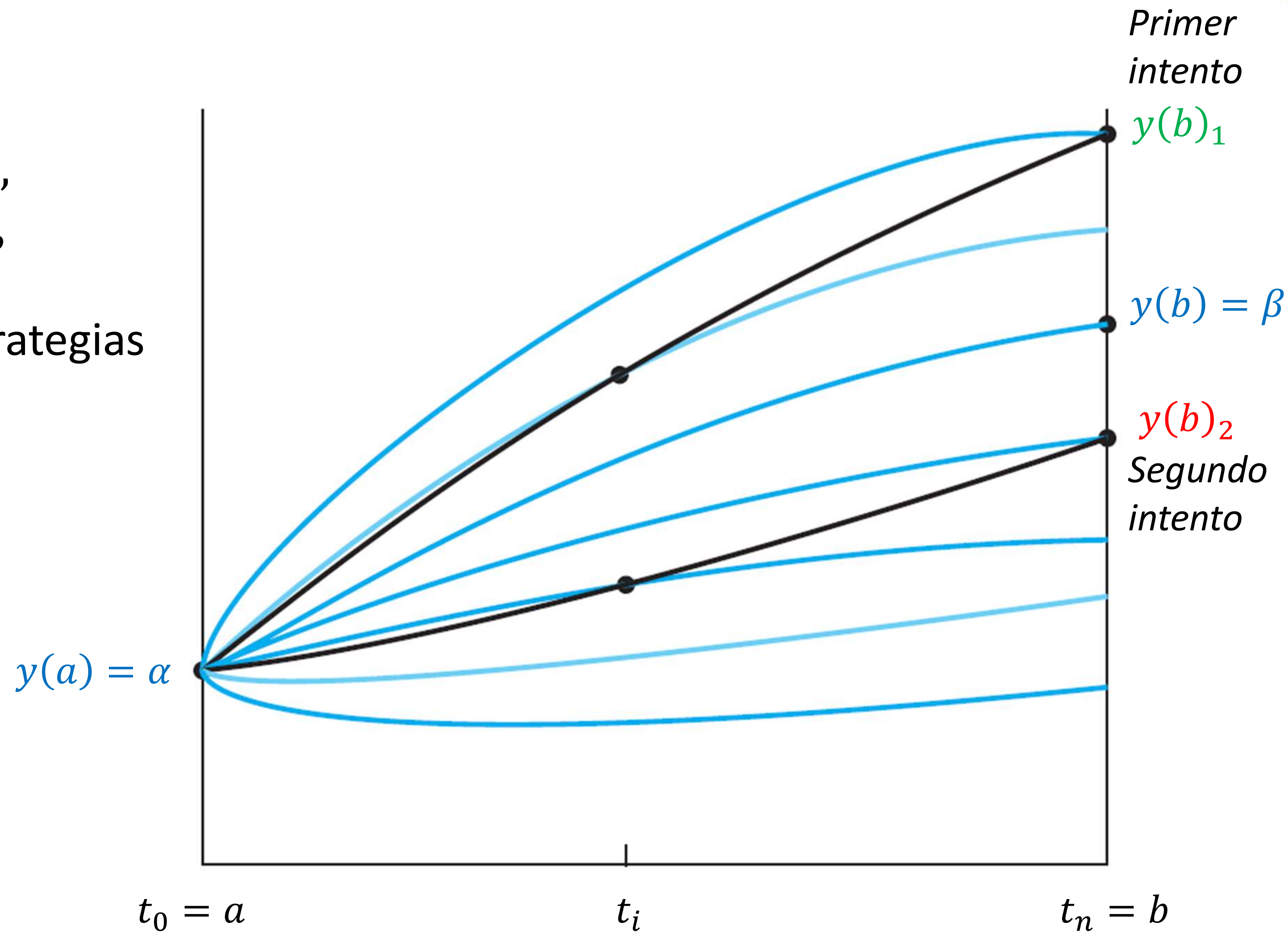
$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x, y(x), y'(x)), \\ y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta \end{cases}$$

puede solucionarse con las estrategias estudiadas para *PVI*s:

1. Se resuelven dos *PVI*s:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y'), \\ y(a) = \alpha, \qquad y'(a) = z_1\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y'), \\ y(a) = \alpha, \qquad y'(a) = z_2\,. \end{cases}$$



Método del Disparo

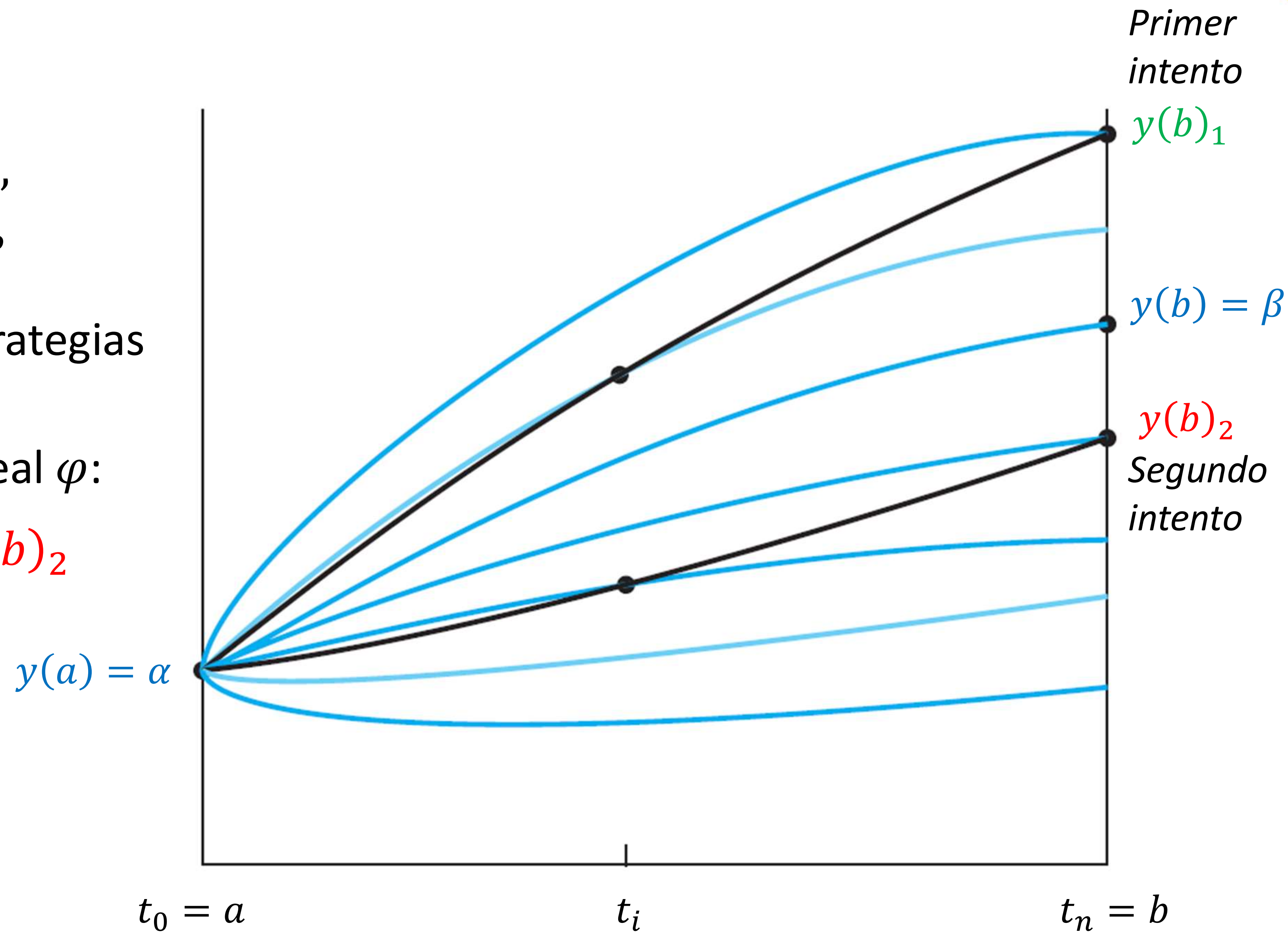
En general, el *PVF*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x, y(x), y'(x)), \\ y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta \end{cases}$$

se soluciona utilizando las estrategias estudiadas para *PVI*s:

2. Se construye una función lineal φ:

$$\varphi(z_1) = y(b)_1\,, \quad \varphi(z_2) = y(b)_2$$

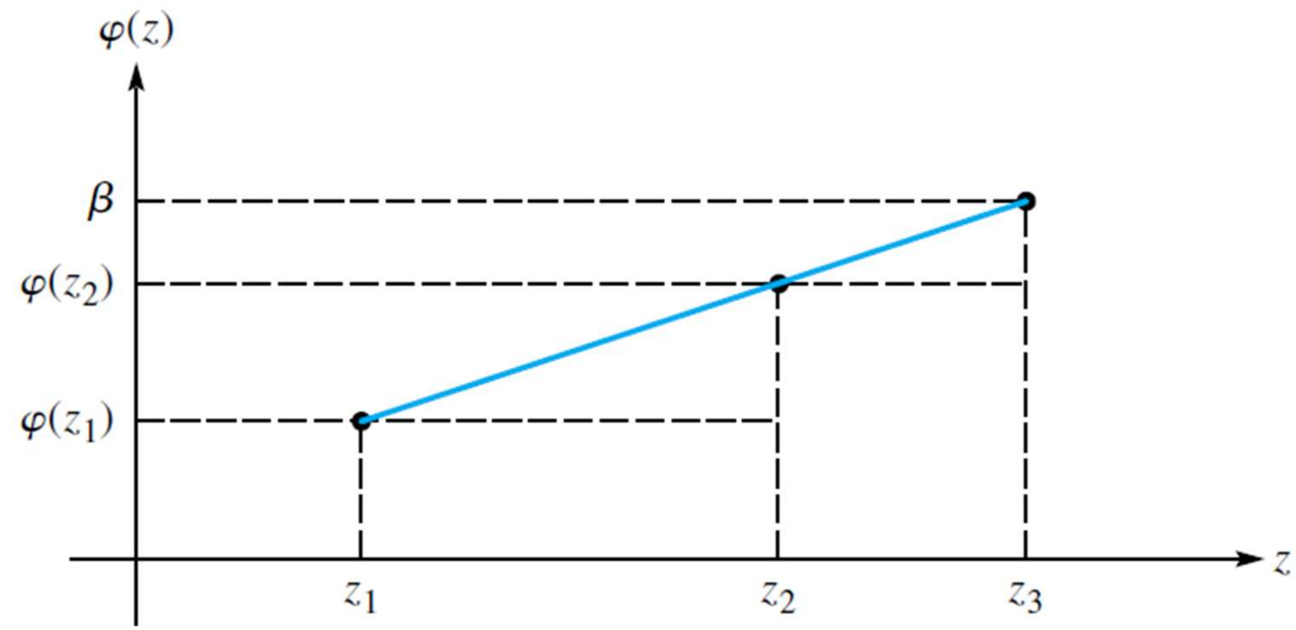


Método del Disparo

En general, el *PVF*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x, y(x), y'(x)), \\ y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta \end{cases}$$

se soluciona utilizando las estrategias estudiadas para *PVIs*:



2. Se construye una función lineal φ:

$$\varphi(z_1) = y(b)_1\,, \quad \varphi(z_2) = y(b)_2$$

3. A partir de la semejanza entre triángulos:

$$\frac{z_3 - z_2}{\beta - \varphi(z_2)} = \frac{z_2 - z_1}{\varphi(z_2) - \varphi(z_1)}$$

de donde,

$$z_3 = z_2 + [\beta - \varphi(z_2)]\left[\frac{z_2 - z_1}{\varphi(z_2) - \varphi(z_1)}\right]$$

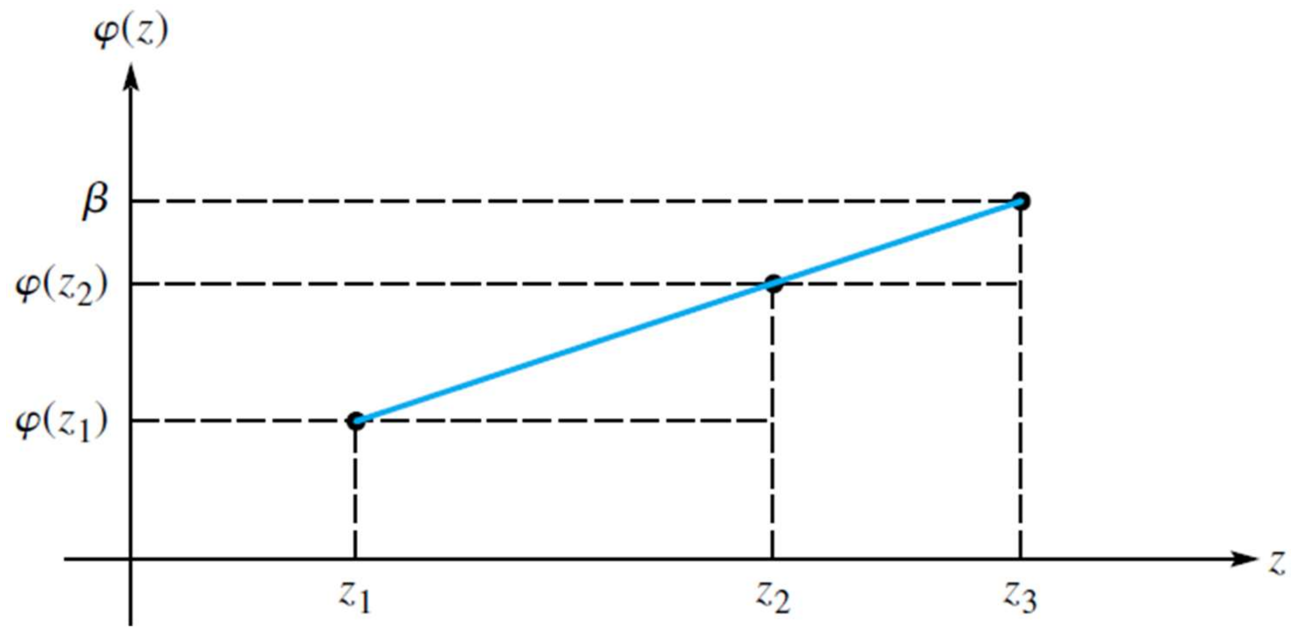
Método del Disparo

3. A partir de la semejanza entre triángulos:

$$\frac{z_3 - z_2}{\beta - \varphi(z_2)} = \frac{z_2 - z_1}{\varphi(z_2) - \varphi(z_1)}$$

de donde,

$$z_3 = z_2 + [\beta - \varphi(z_2)]\left[\frac{z_2 - z_1}{\varphi(z_2) - \varphi(z_1)}\right]$$



4. Si el valor calculado no es suficientemente cercano al esperado se puede repetir el proceso a través de la sucesión:

$$z_{n+1} = z_n + [\beta - \varphi(z_n)]\left[\frac{z_n - z_{n-1}}{\varphi(z_n) - \varphi(z_{n-1})}\right]$$

Los cálculos se inician con dos valores iniciales z_1 y z_2.

Método del Disparo

Ejemplo 1. Utilizar el método del disparo para solucionar el *PVF*:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2T}{dx^2} + 0.01(20 - T) = 0, \\ T(0) = 40, \qquad T(10) = 200 \end{cases}$$

Definimos las incógnitas $T_1 = T$ y $T_2 = T'$ con lo cual $T_1' = T_2,\ T_2' = 0.01(T_1 - 20)$.

Con el método de Euler y $h = 0.1$ conseguimos las siguientes dos ecuaciones:

$$T_{1,i+1} = T_{1,i} + f_1(x_i, T_{1,i}, T_{2,i})h = T_{1,i} + T_{2,i}h$$
$$T_{2,i+1} = T_{2,i} + f_2(x_i, T_{1,i}, T_{2,i})h = T_{2,i} + 0.01(T_{1,i} - 20)h$$

Si suponemos $T_2(0) = 10 = z_1$ conseguimos $T_1(10) = 167.6 = \varphi(z_1)$.

Si suponemos $T_2(0) = 20 = z_2$ conseguimos $T_1(10) = 284.6 = \varphi(z_2)$.

$$z_3 = z_2 + [\beta - \varphi(z_2)]\left[\frac{z_2 - z_1}{\varphi(z_2) - \varphi(z_1)}\right] = 20 + [200 - 284.6]\left[\frac{20 - 10}{284.6 - 167.6}\right] = 12.76$$

Si consideramos entonces $T_2(0) = 12.76$ se obtiene $T_1(10) = 199.9$