Problemas con Valores Iniciales
Métodos de Runge - Kutta

Tomado de:

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). *Métodos numéricos para ingenieros.* Mexico: McGraw-Hill

Conceptos Básicos

Una *Ecuación Diferencial (ED)* es una ecuación que contiene las derivadas de una función desconocida, u. El *orden* de la ecuación diferencial es el orden de la mayor derivada en la ecuación.

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + ku = 0$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k\sin u = \sin(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u}{\partial y^2} + ku = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Las variables t, x y y representan variables independientes.

Conceptos Básicos

Si u es la función desconocida entonces, estructuralmente, cualquier ecuación diferencial tiene la forma

$$L(u) = F\ ,$$

donde el lado izquierdo representa todas las expresiones de la ecuación que están en términos de u o que dependen de u y sus derivadas. F típicamente es una función que solamente depende de las variables independientes. La función que aplica L a u se denomina operador.

$$L\text{: Operador Diferencial}$$

Una *solución* de una ED es una función u que cuando se sustituye en la ecuación genera una identidad.

Conceptos Básicos

La ecuación diferencial $L(u) = F$ se denomina *lineal* si el operador satisface

$$L(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha L(u_1) + \beta L(u_2)\,,$$

donde α y β son escalares (coeficientes) y u_1 y u_2 son funciones. Una *ED* para la cual F es igual a cero se denomina *homogénea*.

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + ku = 0 \qquad L(\cdot) = m\frac{d^2}{dt^2}(\cdot) + c\frac{d}{dt}(\cdot) + k(\cdot)$$ Lineal, homogénea

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k\sin u = \sin(\omega t) \qquad L(\cdot) = \frac{d^2}{dt^2}(\cdot) + k\sin(\cdot)$$ No lineal, no homogénea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + ku = 0 \qquad L(\cdot) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\cdot) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\cdot) + k\,(\cdot)$$ Lineal, homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad L(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + (\cdot)\frac{\partial}{\partial x}(\cdot)$$ No lineal, homogénea

Verificar las afirmaciones anteriores.

Conceptos Básicos

Una *ED* se denomina *Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)* si la función desconocida depende de una sola variable independiente

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + ku = F(t)\,.$$

La *ED* modela un sistema masa-resorte amortiguado. Aquí $u = u(t)$ representa el desplazamiento de la masa desde la posición de equilibrio como una función del tiempo, t. $m > 0$, $c \geq 0$ y $k > 0$ son constantes que representan la masa, la constante de amortiguamiento y la constante del resorte. $F(t)$ es una fuerza externa aplicada al sistema. Es de gran interés y utilidad resolver esta *ED* considerando la pareja de condiciones iniciales

$$u(0) = u_0 \qquad y \qquad \frac{du}{dt}(0) = u'_0\,,$$

que hacen referencia a la posición y velocidad iniciales de la masa. La ED y las dos condiciones forman un *Problema con Valores Iniciales (PVI)*.

Conceptos Básicos

La ecuación

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{g}{c} ,$$

sujeta a las condiciones

$$u(0) = u(l) = 0 ,$$

modela la posición de equilibrio de una cuerda elástica de longitud l que está sujeta en sus extremos bajo la influencia de la gravedad. Aquí x es la variable espacial que representa la posición de un punto sobre la cuerda y $u = u(x)$ representa el desplazamiento del punto en la posición x. La *EDO* y las dos condiciones forman un *Problema con Valores en la Frontera (PVF)*.

En este caso,

$$L(\cdot) = \frac{d^2}{dx^2}(\cdot) , \qquad F(x) = -\frac{g}{c} .$$

Conceptos Básicos

Una *Ecuación Diferencial Parcial (EDP)* es una ecuación diferencial en la que la función desconocida depende de más de una variable independiente.

Ecuación de calor

$$u_t - \alpha^2 u_{xx} = F(x,t)\,.$$

Ecuación de onda

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)\,.$$

Ecuación de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0\,.$$

Ecuación de Poisson

$$u_{xx} + u_{yy} = F(x,y)\,.$$

Ecuación de transporte

$$u_t + c u_x = 0\,.$$

t: tiempo; x, y: variables espaciales

Conceptos Básicos

Una *Ecuación Diferencial Parcial (EDP)* es una ecuación diferencial en la que la función desconocida depende de más de una variable independiente.

Ecuación de Burger

$$u_t + u u_x - \gamma u_{xx} = 0\,.$$

Ecuación de Korteweg – deVries

$$u_t + u u_x + u_{xxx} = 0\,.$$

Ecuación de Sine – Gordon

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0\,.$$

Ecuación de superficie minimal

$$(1 + u_y^2) u_{xx} - 2 u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0\,.$$

PVI

La solución numérica de una *EDO* es un conjunto de valores $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ de la variable dependiente que corresponden a un conjunto de valores $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ de la variable independiente y tales que cada pareja (x_i, y_i), para $i = 0, 1, 2, \ldots$, n, hacen que la diferencia $L(u) - F$ sea muy cercana a cero.

La solución numérica de una *EDP* es un conjunto de valores $\{y_i\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ tales que el valor y_i junto a la k–ésima tupla $\left(x_0^i, x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i\right)$ de variables independientes hacen que la diferencia $L(u) - F$ sea muy cercana a cero para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

PVI – Método de Euler

Dado el *PVI*

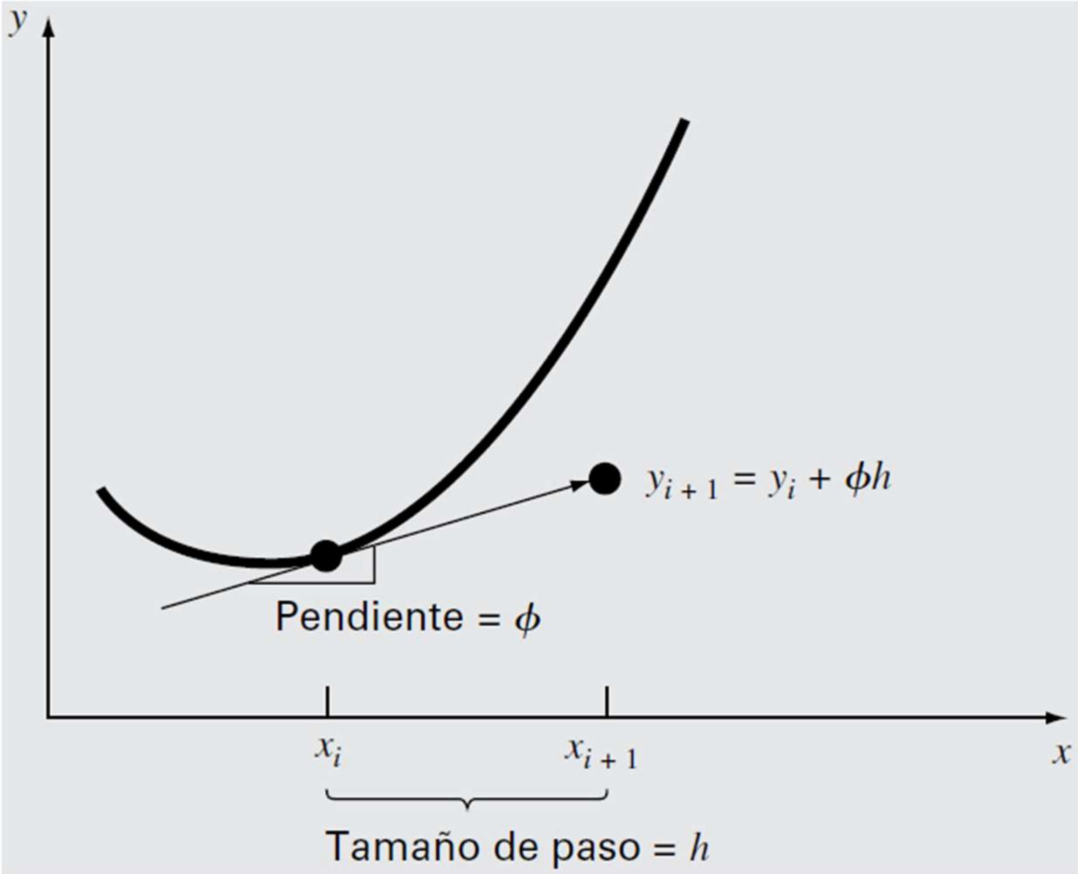
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

El método de Euler aproxima el valor de y que corresponde a $x_1, \ . \ . \ . \ , x_n$ con la expresión:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h\,, \qquad i = 0, \dots, n$$

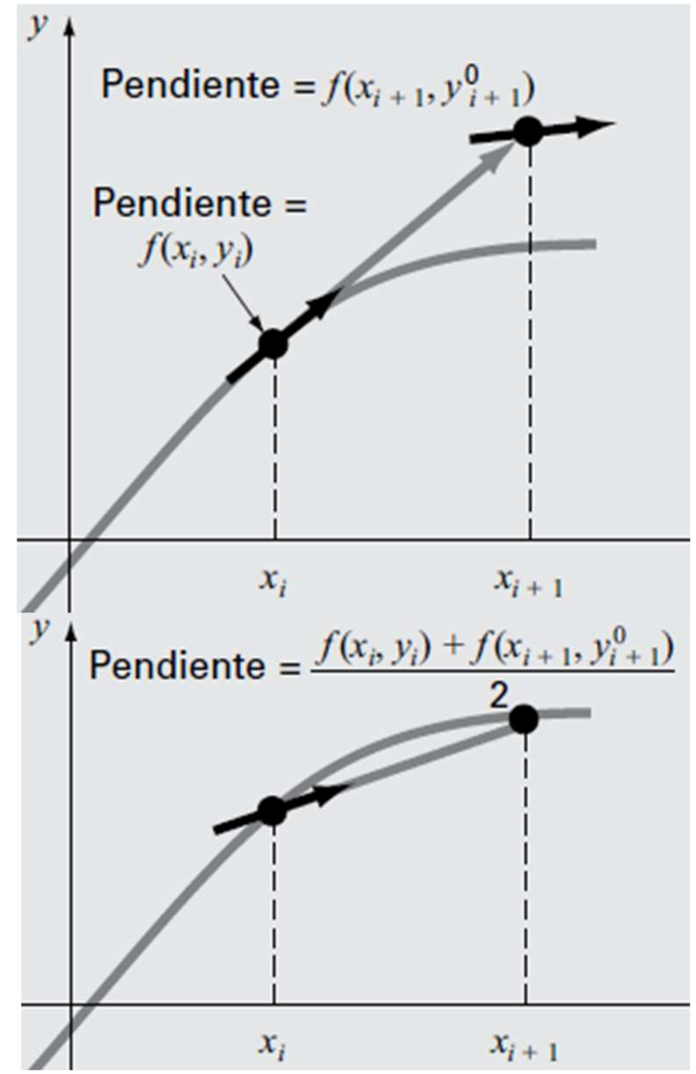
donde $h = x_{i+1} - x_i$. Es decir,

$$y_{i+1} = y_i + \phi h\,.$$



PVI – Método de Heun

El método de Heun mejora la estimación del método de Euler porque aproxima el valor de y_{i+1} utilizando un promedio de las derivadas en x_i y x_{i+1} .



El *PVI*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

es solucionado utilizando la expresión

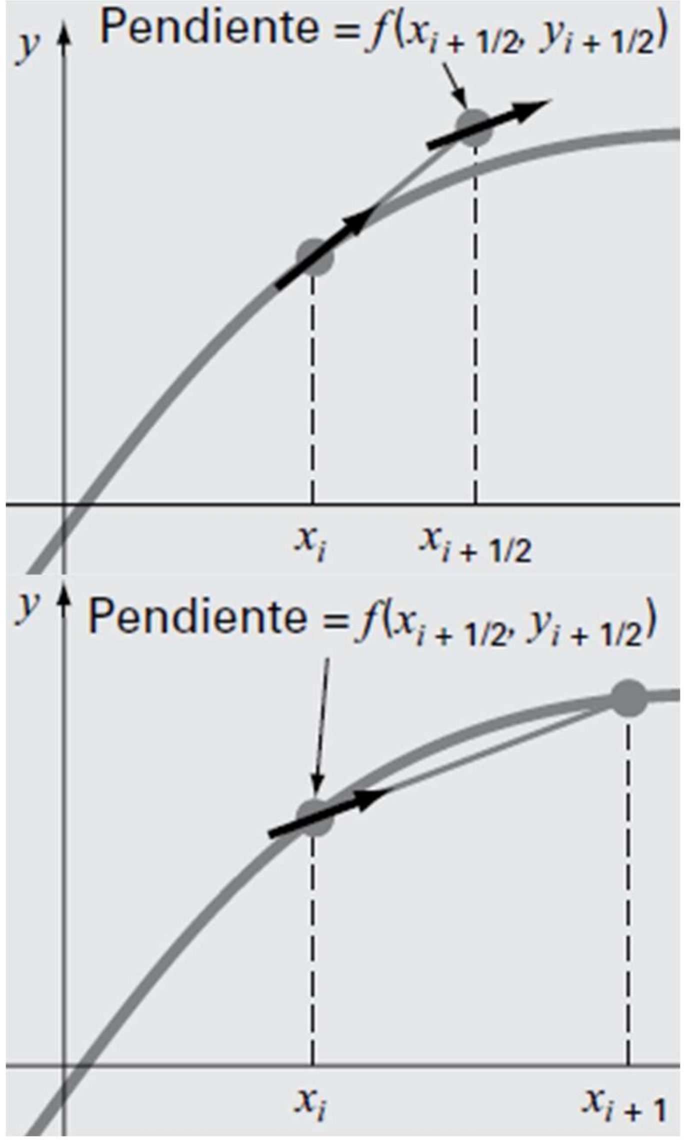
$$y_{i+1} = y_i + \overline{m}h\,,$$

donde

$$\overline{m} = \frac{f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y^0_{i+1}\right)}{2}$$

PVI – Punto Medio

El método del punto medio predice un valor $y_{i+1/2}^{0}$ para utilizarlo en la estimación de la pendiente en el punto $x_{i+1/2}, y_{i+1/2}$. A su vez, la pendiente calculada es utilizada para obtener y_{i+1}.



El *PVI*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

es solucionado utilizando la expresión

$$y_{i+1} = y_i + f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right)h\,.$$

Runge – Kutta (Orden 4)

El *PVI*

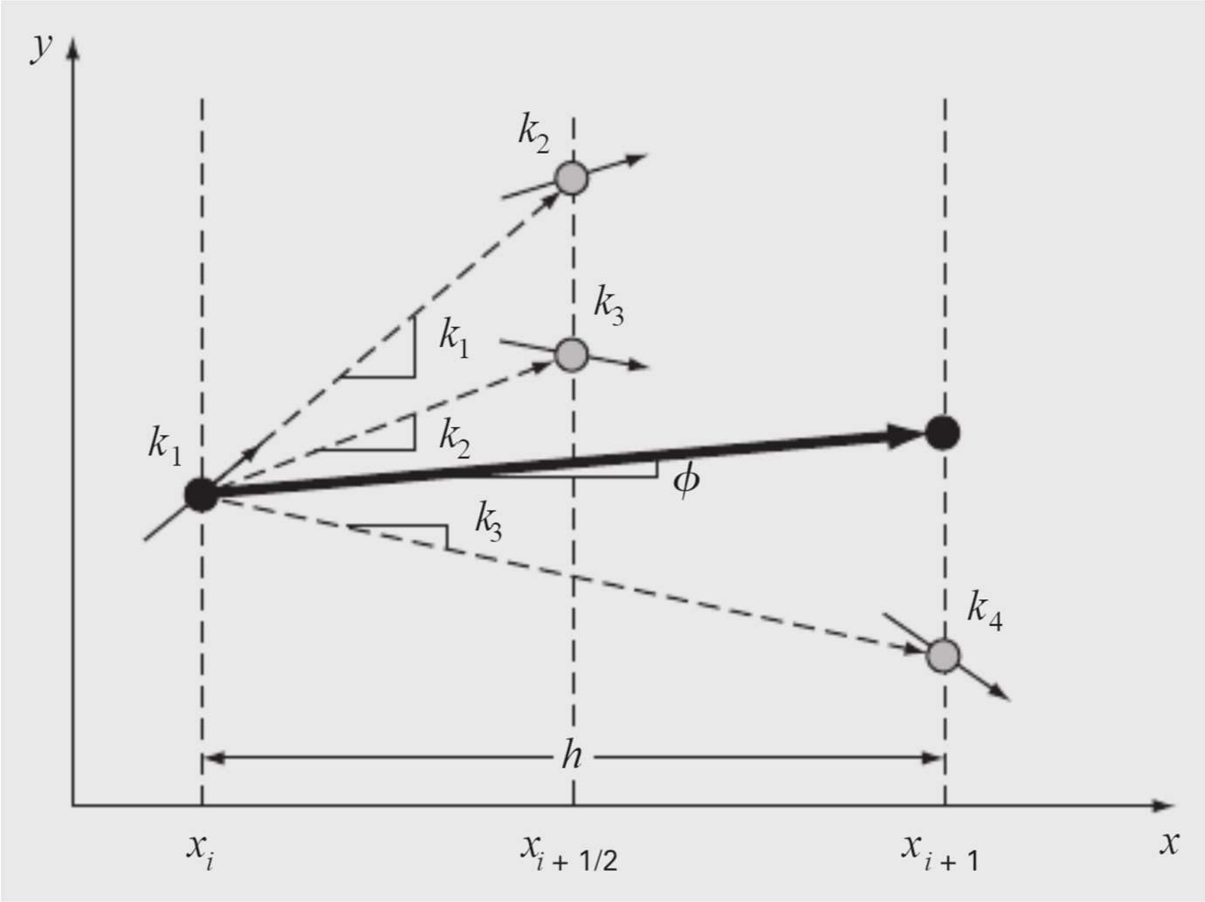
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

es solucionado utilizando una combinación lineal de cuatro pendientes y la expresión

$$y_{i+1} = y_i + mh\,,$$

donde

$$m = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\,.$$



Runge – Kutta

Ecuación base

$$y_{i+1} = y_i + mh\,, \qquad m = \phi(x_i, y_i, h)\,,$$

donde ϕ es una pendiente representativa (combinación de pendientes ponderadas)

$$\phi(x_i, y_i, h) = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n\,, \qquad k_l = k_l(x_i, y_i, h), \qquad l = 1,2,\ldots,n$$

Los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes mientras las expresiones k_l , $l = 1,2,\ldots,n$ se definen como

$$k_1 = f(x_i, y_i),$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h),$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h),$$

$$\vdots$$

$$k_n = f\left(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h\right).$$

Los coeficientes p y q son constantes.

Runge – Kutta

El valor de y_{i+1} se obtiene según el método de Euler

$$y_{i+1} = y_i + mh\,, \qquad m = a_1 k_1 + a_2 k_2\,,$$

donde las pendientes k_1 y k_2 están dadas por

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \end{cases}.$$

Luego de utilizar la serie de Taylor se consigue

$$a_1 + a_2 = 1\,,$$

$$a_2 p_1 = \frac{1}{2}\,,$$

$$a_2 q_{11} = \frac{1}{2}\,.$$

Runge – Kutta

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + mh\,, \\ m = a_1k_1 + a_2k_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i)\,, \\ k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2p_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_2q_{11} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Método de Heun ($a_1 = a_2 = \frac{1}{2}\,; p_1 = q_{11} = 1$):

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + mh = y_i + [a_1k_1 + a_2k_2]h \\ &= y_i + [a_1f(x_i, y_i) + a_2f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)]h \\ &= y_i + \left[\frac{1}{2}f(x_i, y_i) + \frac{1}{2}f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)\right]h \\ &= y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)}{2}h \\ &= y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + k_1h)}{2}h = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + f(x_i, y_i)h)}{2}h \\ &= y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^0\right)}{2}h \end{aligned}$$

Runge – Kutta

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + mh\,, \\ m = a_1 k_1 + a_2 k_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i)\,, \\ k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 p_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_2 q_{11} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Método del punto medio ($a_1 = 0\,;\, a_2 = 1\,;\, p_1 = q_{11} = \frac{1}{2}$):

$$y_{i+1} = y_i + mh = y_i + a_2 k_2 h$$

$$= y_i + a_2 f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)h$$

$$= y_i + f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)h$$

$$= y_i + f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)h = y_i + f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + f(x_i, y_i)\frac{h}{2}\right)h$$

$$= y_i + f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right)h$$

Runge – Kutta

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + mh\,, \\ m = a_1k_1 + a_2k_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i)\,, \\ k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2p_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_2q_{11} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Método de Ralston ($a_1 = \frac{1}{3}$; $a_2 = \frac{2}{3}$; $p_1 = q_{11} = \frac{3}{4}$):

$$y_{i+1} = y_i + mh = y_i + [a_1k_1 + a_2k_2]h$$

$$= y_i + [a_1f(x_i, y_i) + a_2f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)]h$$

$$= y_i + \left[\frac{1}{3}f(x_i, y_i) + \frac{2}{3}f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1h\right)\right]h$$

$$= y_i + \frac{f(x_i, y_i) + 2f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}f(x_i, y_i)h\right)}{3}h$$

Runge – Kutta

El valor de y_{i+1} se obtiene según el método de Euler

$$y_{i+1} = y_i + mh\,,$$

utilizando la combinación ponderada de pendientes

$$m = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\,,$$

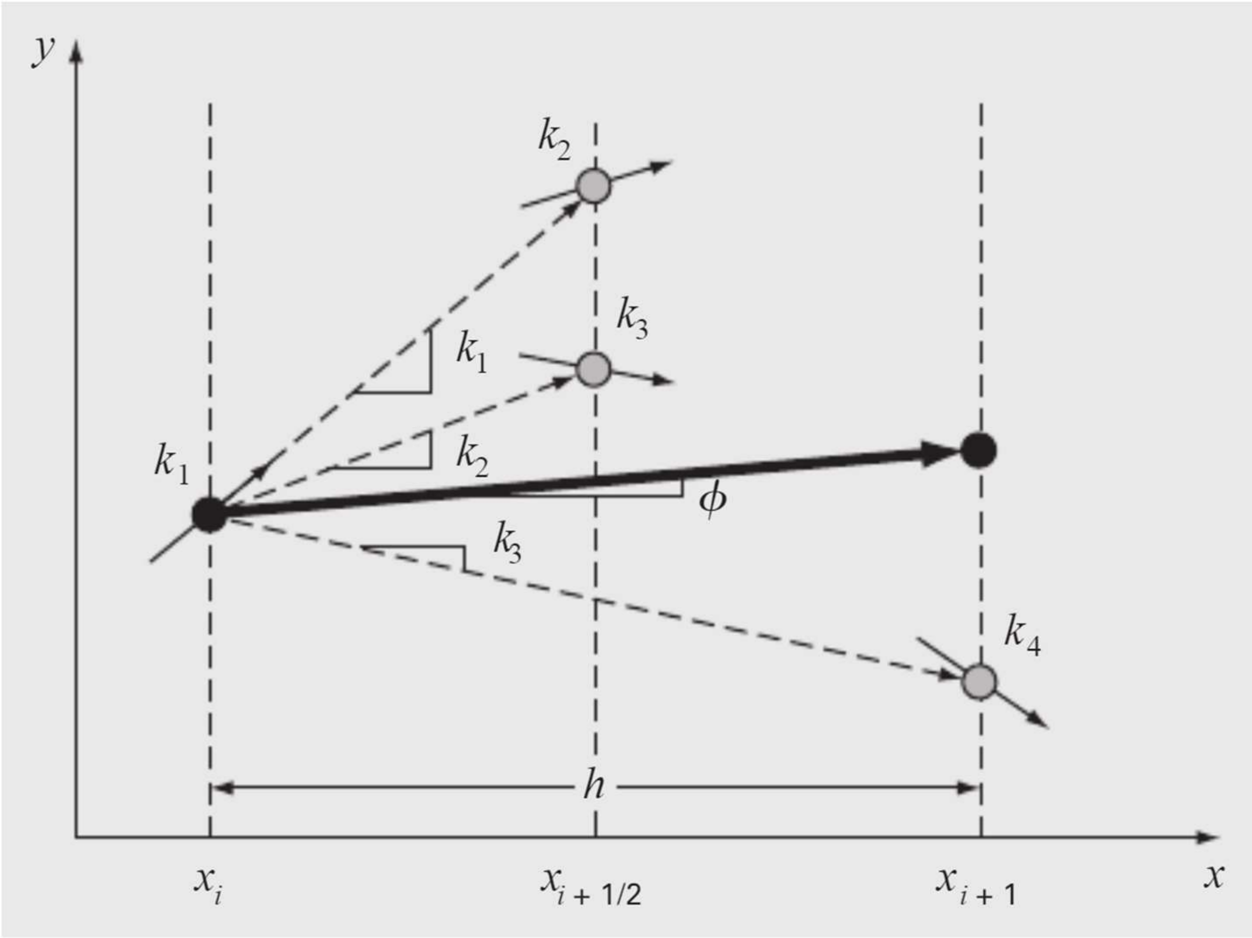
donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)\,,$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)\,,$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)\,,$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$



Runge – Kutta

$$y_{i+1} = y_i + mh\,,$$

$$m = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\,,$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)\,,$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)\,,$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)\,,$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

Ejercicio 1. Utilice el método de Runge-Kutta de cuarto orden para calcular un valor aproximado de $y(2)$ sujeto al PVI

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y^2 + t^3 \\ y(1) = -4 \end{cases}$$

considerando 100 pasos. Tenga en cuenta que el valor correcto es $y(2) = 4.371221866$.

Ejercicio 2. Utilice el método de Runge-Kutta de cuarto orden y $h = 0.5$ para calcular un valor aproximado de $y(4)$ sujeto al PVI

$$\begin{cases} y'(x) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5 \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$