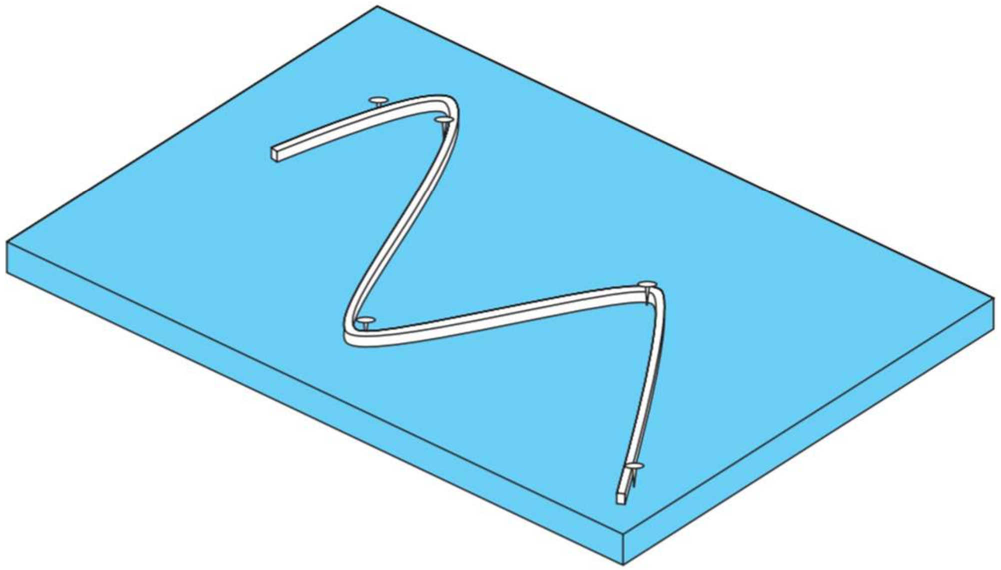
Interpolación
Trazadores (Splines)

Tomado de:

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). *Métodos numéricos para ingenieros.* Mexico: McGraw-Hill

Trazadores (Splines)



Lineales: Garantizan continuidad.

Cuadráticos: Garantizan suavidad.

Cúbicos: Garantizan concavidad.

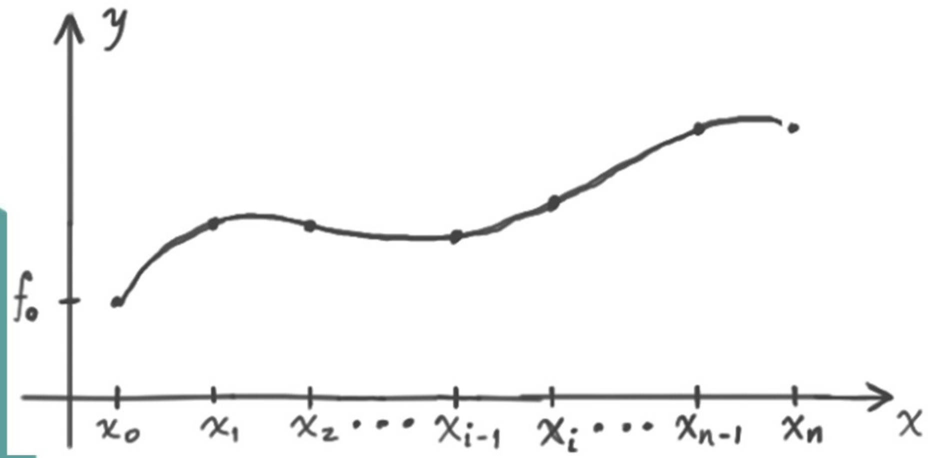
Trazadores lineales

Considere un conjunto de $n+1$ datos $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), \ldots, (x_n, f_n)$.

Trazadores lineales.

$(x_0, f_0) - (x_1, f_1)$:

$$y - f_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$



Trazadores lineales

Considere un conjunto de $n+1$ datos $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_n, f_n)$.

Trazadores lineales.

$$(x_0, f_0) - (x_1, f_1): \quad y - f_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_1) \quad \Leftrightarrow \quad S_1 = f_1 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$

$$(x_1, f_1) - (x_2, f_2): \quad y - f_2 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}(x - x_2) \quad \Leftrightarrow \quad S_2 = f_2 + \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

$$\vdots$$

$$(x_{i-1}, f_{i-1}) - (x_i, f_i): \quad y - f_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_i) \quad \Leftrightarrow \quad S_i = f_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_i)$$

Trazadores lineales

Considere un conjunto de $n+1$ datos $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), \ldots, (x_n, f_n)$.

Trazadores lineales.

Función definida por secciones

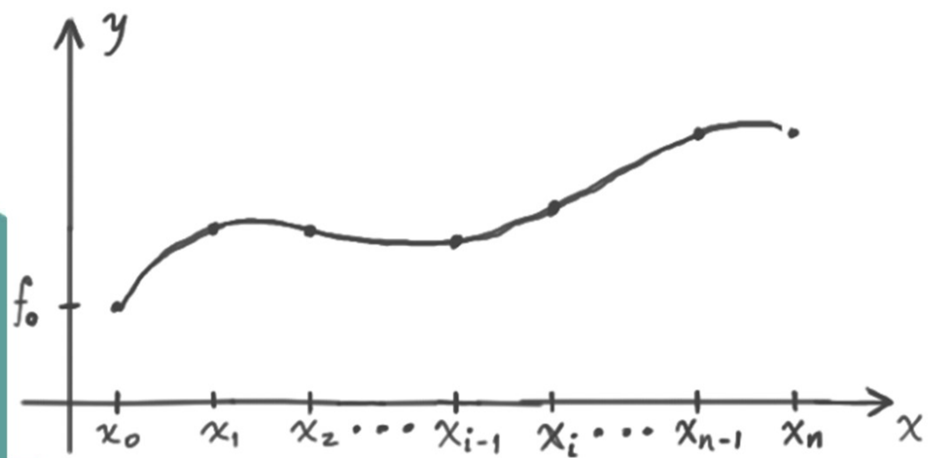
$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x_0 \le x \le x_1 \\ S_2(x), & x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots & \vdots \\ S_i(x), & x_{i-1} \le x \le x_i \\ \vdots & \vdots \\ S_n(x), & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

$$S_1 = f_1 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$

$$S_2 = f_2 + \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

$$\vdots$$

$$S_i = f_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_i)$$



Trazadores cuadráticos

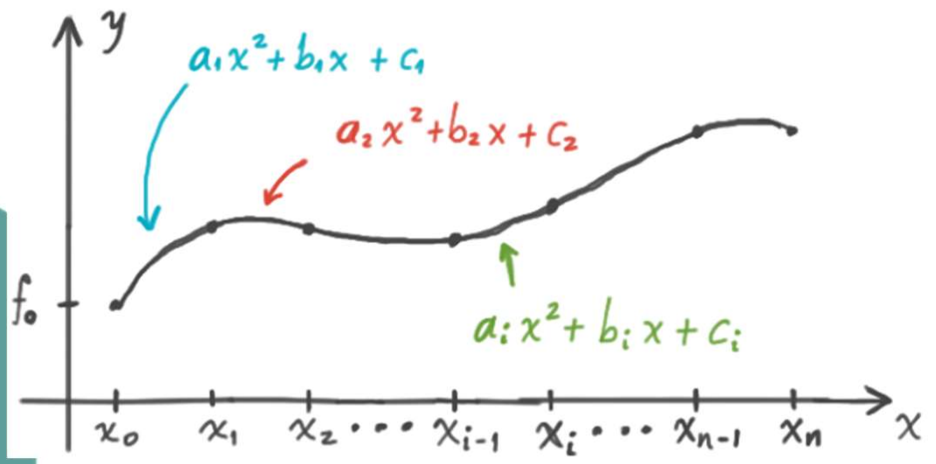
Trazadores cuadráticos. $S(x) = ax^2 + bx + c$

para n intervalos: $S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \qquad 1 \le i \le n \quad (3n$ incógnitas)

1. La función de interpolación debe ser continua.

$$a_{i-1}x_{i-1}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = f_{i-1} \qquad\qquad n-1 \text{ ecuaciones}$$
$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f_{i-1} \qquad 2 \le i \le n \qquad n-1 \text{ ecuaciones}$$

Total: $2n-2$ ecuaciones



Función de interpolación continua: $2n-2$

Trazadores cuadráticos

Trazadores cuadráticos. $S(x) = ax^2 + bx + c$

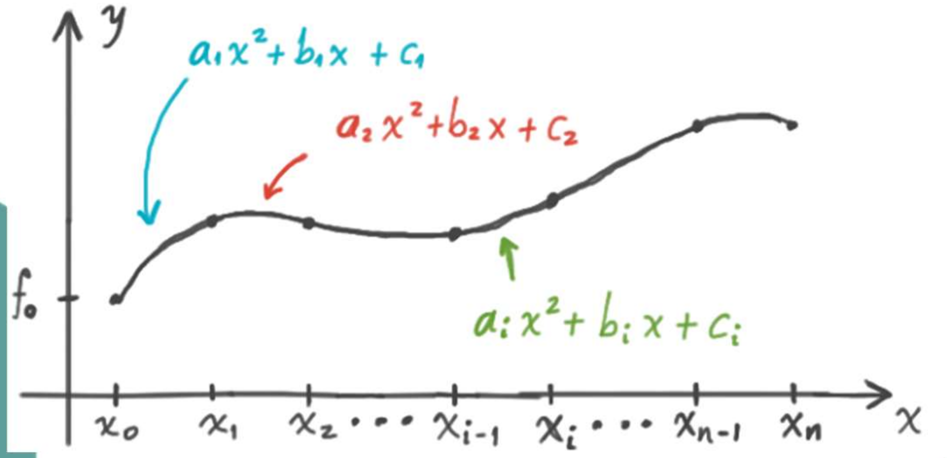
para n intervalos: $S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \qquad 1 \leq i \leq n \qquad$ ($3n$ incógnitas)

2. La función de interpolación debe contener los puntos extremos.

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f_0$$
$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f_n$$

2 ecuaciones

Total: $2n$ ecuaciones



Función de interpolación continua: $2n - 2$

Función de interpolación contiene extremos: 2

Trazadores cuadráticos

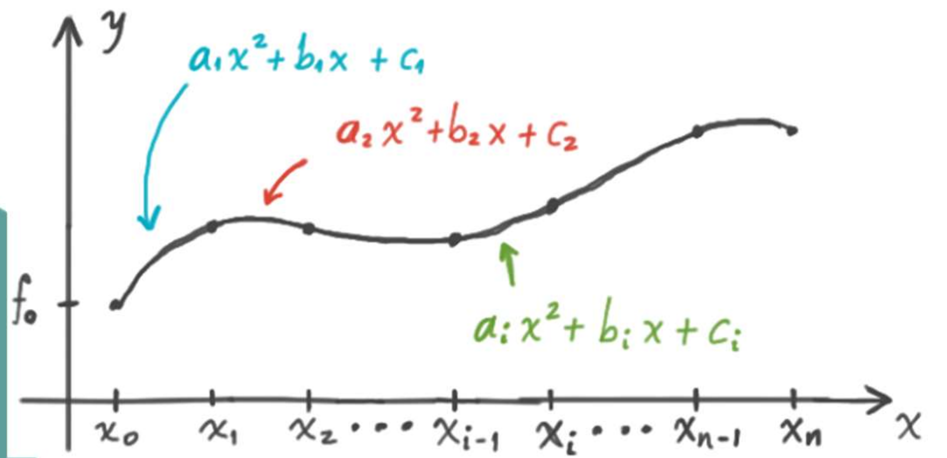
Trazadores cuadráticos. $S(x) = ax^2 + bx + c$

para n intervalos: $S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \qquad 1 \leq i \leq n \quad (3n \text{ incógnitas})$

3. La función de interpolación debe ser suave. $f'(x) = 2ax + b$

$$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_i x_{i-1} + b_i \qquad 2 \leq i \leq n \qquad n-1 \text{ ecuaciones}$$

Total: $3n-1$ ecuaciones



Función de interpolación continua: $2n-2$

Función de interpolación contiene extremos: 2

Función de interpolación suave: $n-1$

Trazadores cuadráticos

Trazadores cuadráticos. $S(x) = ax^2 + bx + c$

para n intervalos: $S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \qquad 1 \le i \le n \quad (3n \text{ incógnitas})$

3. La función de interpolación debe ser suave. $f'(x) = 2ax + b$

$$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_i x_{i-1} + b_i \qquad 2 \le i \le n \qquad n - 1 \text{ ecuaciones}$$

Total: $3n - 1$ ecuaciones

4. Suposición: La segunda derivada ($f''(x) = 2a$) es cero en el extremo izquierdo.

$$2a_1 = 0$$

Total: $3n$ ecuaciones

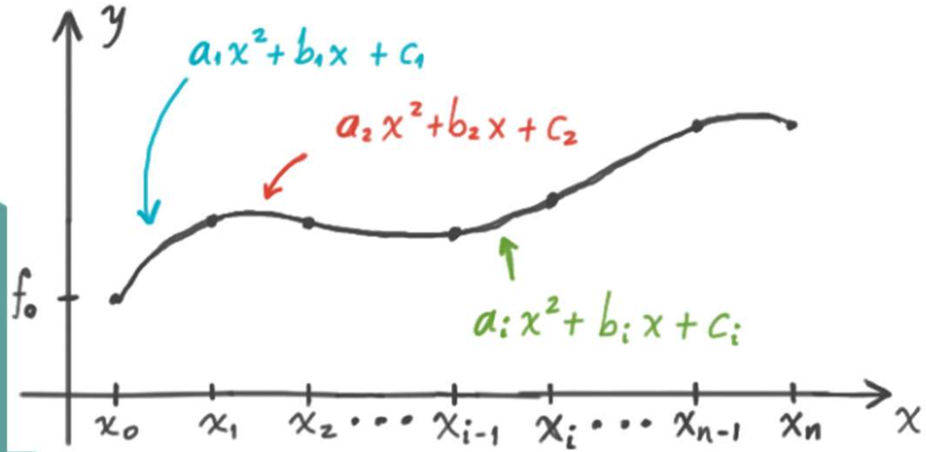
Trazadores cuadráticos

Trazadores cuadráticos. $S(x) = ax^2 + bx + c$

para n intervalos: $S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \qquad 1 \le i \le n \quad (3n$ incógnitas$)$

Función definida por secciones

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x)\,, & x_0 \le x \le x_1 \\ S_2(x)\,, & x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots & \vdots \\ S_i(x)\,, & x_{i-1} \le x \le x_i \\ \vdots & \vdots \\ S_n(x)\,, & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$



Función de interpolación continua:	$2n - 2$
Función de interpolación contiene extremos:	2
Función de interpolación suave:	$n - 1$
Segunda derivada es cero en x_0:	1

Trazadores cúbicos

Trazadores cúbicos. $S(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

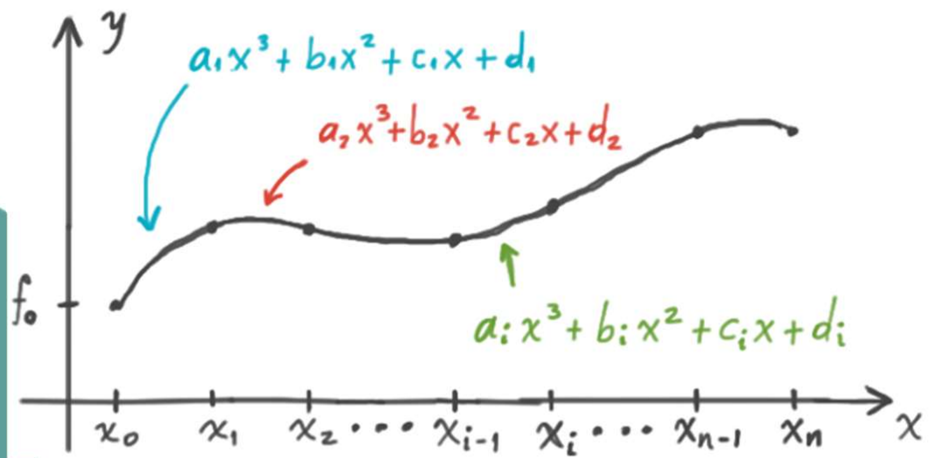
para n intervalos: $S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \qquad 1 \le i \le n \qquad (4n$ incógnitas$)$

1. La función de interpolación debe ser continua.

$$a_{i-1}x_{i-1}^3 + b_{i-1}x_{i-1}^2 + c_{i-1}x_{i-1} + d_{i-1} = f_{i-1} \qquad n-1 \text{ ecuaciones}$$
$$a_i x_{i-1}^3 + b_i x_{i-1}^2 + c_i x_{i-1} + d_i = f_{i-1} \qquad n-1 \text{ ecuaciones}$$

$2 \le i \le n$

Total: $2n - 2$ ecuaciones



Función de interpolación continua: $2n - 2$

Trazadores cúbicos

Trazadores cúbicos. $S(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

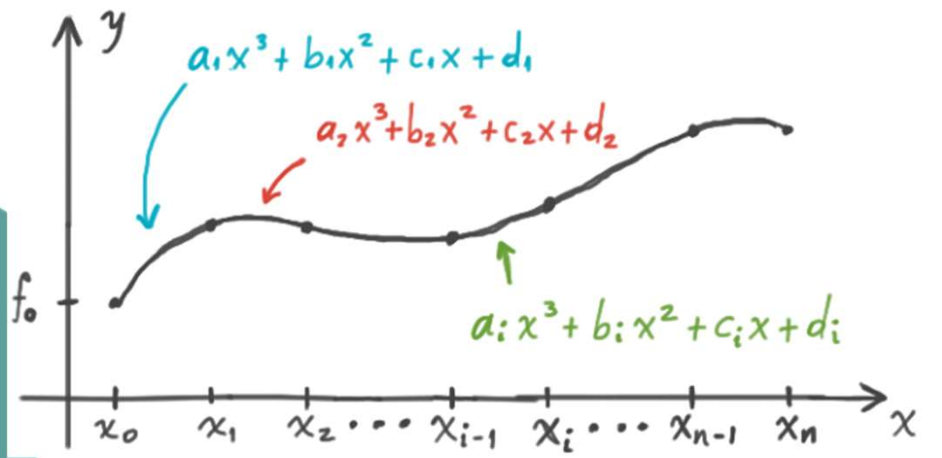
para n intervalos: $S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \qquad 1 \leq i \leq n \qquad (4n$ incógnitas$)$

2. La función de interpolación debe contener los puntos extremos.

$$a_1 x_0^3 + b_1 x_0^2 + c_1 x_0 + d_1 = f_0$$
$$a_n x_n^3 + b_n x_n^2 + c_n x_n + d_n = f_n$$

2 ecuaciones

Total: $2n$ ecuaciones



Función de interpolación continua: $2n - 2$

Función de interpolación contiene extremos: 2

Trazadores cúbicos

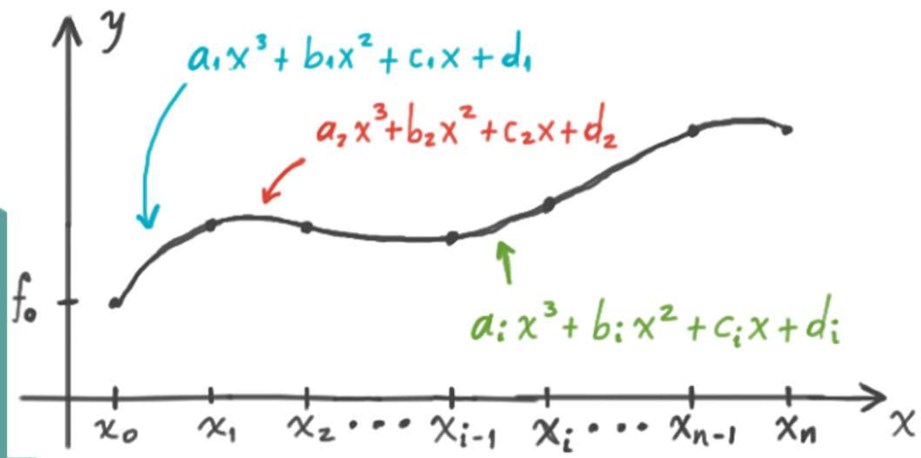
Trazadores cúbicos. $S(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

para n intervalos: $S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \qquad 1 \leq i \leq n \quad (4n$ incógnitas)

3. La función de interpolación debe ser suave. $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$3a_{i-1}x_{i-1}^2 + 2b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = 3a_i x_{i-1}^2 + 2b_i x_{i-1} + c_i \quad 2 \leq i \leq n \quad n-1 \text{ ecuaciones}$$

Total: $3n - 1$ ecuaciones



Función de interpolación continua:	$2n - 2$
Función de interpolación contiene extremos:	2
Función de interpolación suave:	$n - 1$

Trazadores cúbicos

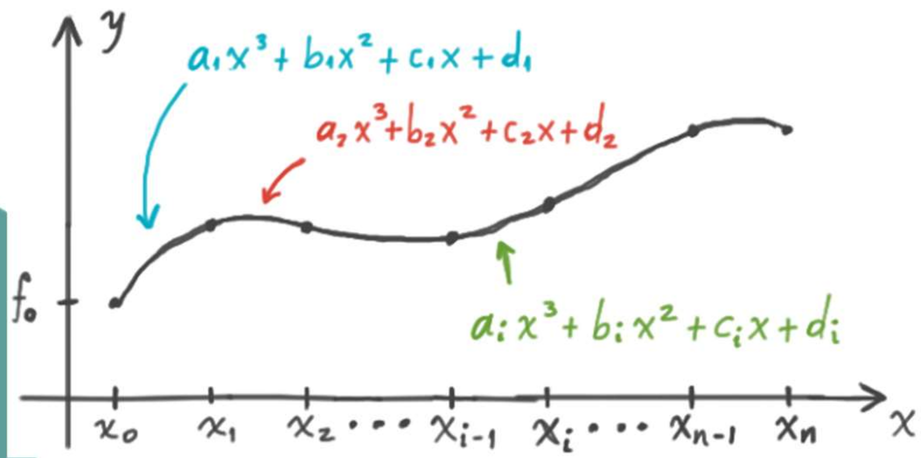
Trazadores cúbicos. $S(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

para n intervalos: $S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \qquad 1 \le i \le n \qquad (4n$ incógnitas$)$

4. La concavidad de la función de interpolación debe ser continua. $f''(x) = 6ax + 2b$

$$6a_{i-1}x_{i-1} + 2b_{i-1} = 6a_i x_{i-1} + 2b_i \qquad 2 \le i \le n \qquad n-1 \text{ ecuaciones}$$

Total: $4n - 2$ ecuaciones



Función de interpolación continua: $2n - 2$

Función de interpolación contiene extremos: 2

Función de interpolación suave: $n - 1$

Concavidad continua: $n - 1$

Trazadores cúbicos

Trazadores cúbicos. $S(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

para n intervalos: $S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$ $\quad 1 \leq i \leq n \quad$ ($4n$ incógnitas)

4. La concavidad de la función de interpolación debe ser continua. $f''(x) = 6ax + 2b$

$$6a_{i-1}x_{i-1} + 2b_{i-1} = 6a_i x_{i-1} + 2b_i \qquad 2 \leq i \leq n \qquad n-1 \text{ ecuaciones}$$

Total: $4n - 2$ ecuaciones

5. Suposición: La segunda derivada ($f''(x) = 6ax + 2b$) es cero en ambos extremos.

$$6a_1x_0 + 2b_1 = 0$$
$$6a_nx_n + 2b_n = 0$$

2 ecuaciones

Total: $4n$ ecuaciones

Ejemplo. Ajuste los datos de la siguiente tabla

i	0	1	2	3
x	3	4,5	7	9
$f(x)$	2,5	1	2,5	0,5

a) Utilizando trazadores lineales.

b) Utilizando trazadores cuadráticos.

c) Evalúe las funciones de interpolación en $x = 5$.