Problemas con Valores Iniciales

Tomado de:

Bray, W. O. (2012). *A journey into Partial Differential Equations.* Maine: Jones & Bartlett Learning.

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2011). *Métodos numéricos para ingenieros.* Mexico: McGraw-Hill

Conceptos Básicos

Una *Ecuación Diferencial (ED)* es una ecuación que contiene las derivadas de una función desconocida, u. El *orden* de la ecuación diferencial es el orden de la mayor derivada en la ecuación.

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + ku = 0$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k\sin u = \sin(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + ku = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Las variables t, x y y representan variables independientes.

Conceptos Básicos

Si u es la función desconocida entonces, estructuralmente, cualquier ecuación diferencial tiene la forma

$$L(u) = F\ ,$$

donde el lado izquierdo representa todas las expresiones de la ecuación que están en términos de u o que dependen de u y sus derivadas. F típicamente es una función que solamente depende de las variables independientes. La función que aplica L a u se denomina operador.

$$L\text{: Operador Diferencial}$$

Una *solución* de una ED es una función u que cuando se sustituye en la ecuación genera una identidad.

Conceptos Básicos

La ecuación diferencial $L(u) = F$ se denomina *lineal* si el operador satisface

$$L(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha L(u_1) + \beta L(u_2)\,,$$

donde α y β son escalares (coeficientes) y u_1 y u_2 son funciones. Una *ED* para la cual F es igual a cero se denomina *homogénea*.

$m\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + ku = 0$	$L(\cdot) = m\frac{d^2}{dt^2}(\cdot) + c\frac{d}{dt}(\cdot) + k(\cdot)$	Lineal, homogénea
$\frac{d^2u}{dt^2} + k\sin u = \sin(\omega t)$	$L(\cdot) = \frac{d^2}{dt^2}(\cdot) + k\sin(\cdot)$	No lineal, no homogénea
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + ku = 0$	$L(\cdot) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\cdot) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\cdot) + k(\cdot)$	Lineal, homogénea
$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$	$L(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + (\cdot)\frac{\partial}{\partial x}(\cdot)$	No lineal, homogénea

Verificar las afirmaciones anteriores.

Conceptos Básicos

Una *ED* se denomina *Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)* si la función desconocida depende de una sola variable independiente

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + ku = F(t)\,.$$

La *ED* modela un sistema masa-resorte amortiguado. Aquí $u = u(t)$ representa el desplazamiento de la masa desde la posición de equilibrio como una función del tiempo, t. $m > 0$, $c \geq 0$ y $k > 0$ son constantes que representan la masa, la constante de amortiguamiento y la constante del resorte. $F(t)$ es una fuerza externa aplicada al sistema. Es de gran interés y utilidad resolver esta *ED* considerando la pareja de condiciones iniciales

$$u(0) = u_0 \qquad y \qquad \frac{du}{dt}(0) = {u'}_0\,,$$

que hacen referencia a la posición y velocidad iniciales de la masa. La ED y las dos condiciones forman un *Problema con Valores Iniciales (PVI)*.

Conceptos Básicos

La ecuación

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{g}{c}\,,$$

sujeta a las condiciones

$$u(0) = u(l) = 0\,,$$

modela la posición de equilibrio de una cuerda elástica de longitud l que está sujeta en sus extremos bajo la influencia de la gravedad. Aquí x es la variable espacial que representa la posición de un punto sobre la cuerda y $u = u(x)$ representa el desplazamiento del punto en la posición x. La *EDO* y las dos condiciones forman un *Problema con Valores en la Frontera (PVF)*.

En este caso,

$$L(\cdot) = \frac{d^2}{dx^2}(\cdot)\,, \qquad F(x) = -\frac{g}{c}\,.$$

Conceptos Básicos

Una *Ecuación Diferencial Parcial (EDP)* es una ecuación diferencial en la que la función desconocida depende de más de una variable independiente.

Ecuación de calor

$$u_t - \alpha^2 u_{xx} = F(x,t)\,.$$

Ecuación de onda

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)\,.$$

Ecuación de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0\,.$$

Ecuación de Poisson

$$u_{xx} + u_{yy} = F(x,y)\,.$$

Ecuación de transporte

$$u_t + c u_x = 0\,.$$

t: tiempo; x, y: variables espaciales

Conceptos Básicos

Una *Ecuación Diferencial Parcial (EDP)* es una ecuación diferencial en la que la función desconocida depende de más de una variable independiente.

Ecuación de Burger

$$u_t + uu_x - \gamma u_{xx} = 0\,.$$

Ecuación de Korteweg – deVries

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0\,.$$

Ecuación de Sine – Gordon

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0\,.$$

Ecuación de superficie minimal

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0\,.$$

PVI

La solución numérica de una *EDO* es un conjunto de valores $y_0, y_1, y_2, \dots y_n$ de la variable dependiente que corresponden a un conjunto de valores $x_0, x_1, x_2, \dots x_n$ de la variable independiente y tales que cada pareja (x_i, y_i), para $i = 0, 1, 2, \dots,$ n, hacen que la diferencia $L(u) - F$ sea muy cercana a cero.

La solución numérica de una *EDP* es un conjunto de valores $\{y_i\}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ tales que el valor y_i junto a la k–ésima tupla $\left(x_0^i, x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i\right)$ de variables independientes hacen que la diferencia $L(u) - F$ sea muy cercana a cero para $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

PVI – Método de Euler

La *EDO*

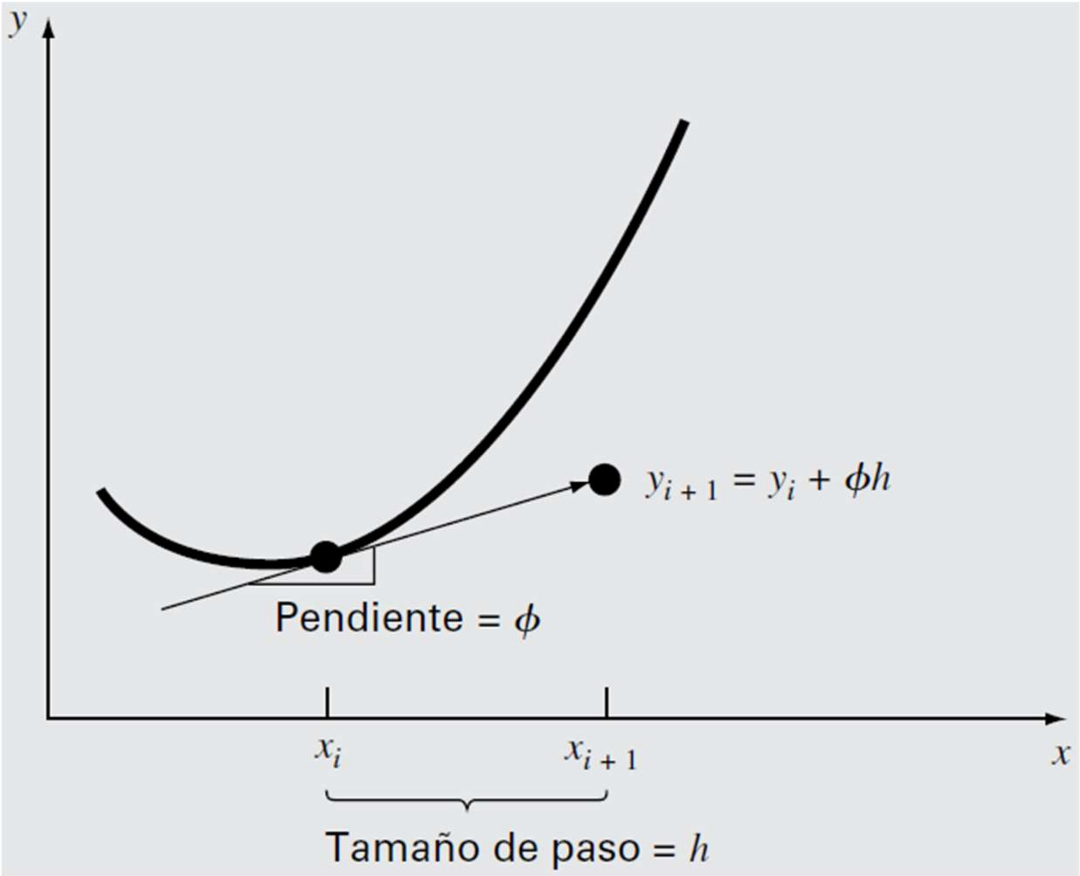
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

expresa que la pendiente en cada punto (x, y) de una gráfica está dada por la función $f(x, y)$. Si se conoce la pendiente en (x_i, y_i) entonces es posible aproximar el valor de y_{i+1} a través de la recta tangente a la curva en (x_i, y_i).

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h\,,$$

donde $h = x_{i+1} - x_i$. Es decir,

$$y_{i+1} = y_i + \phi h\,.$$



PVI – Método de Euler

La *EDO*

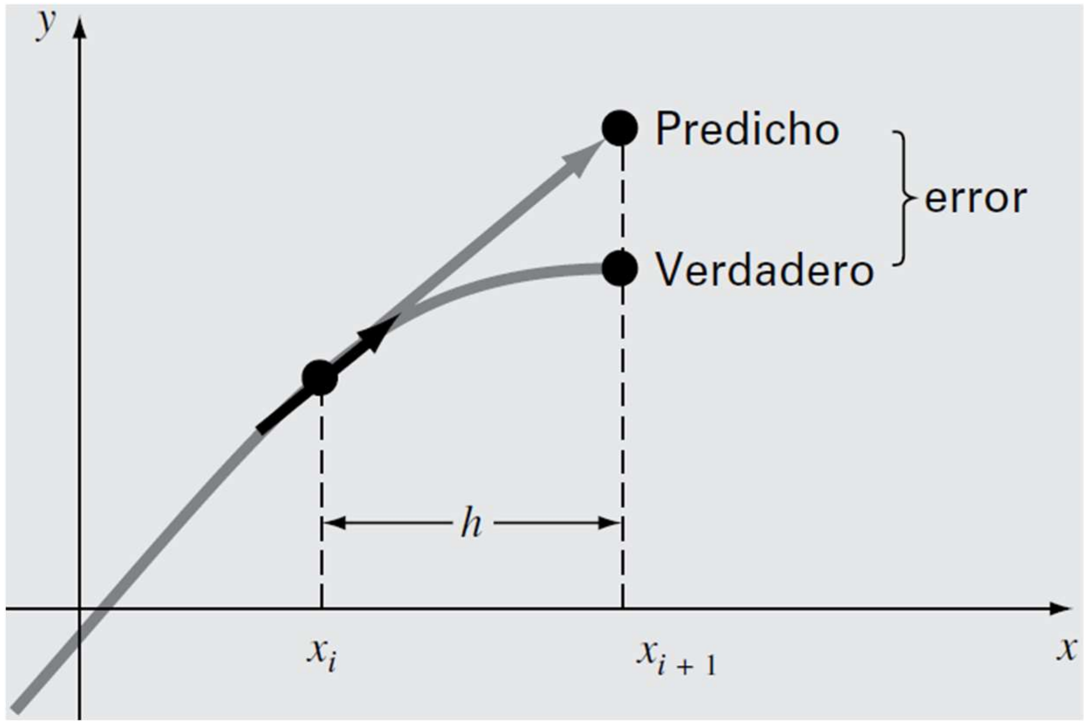
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

expresa que la pendiente en cada punto (x, y) de una gráfica está dada por la función $f(x, y)$. Si se conoce la pendiente en (x_i, y_i) entonces es posible aproximar el valor de y_{i+1} a través de la recta tangente a la curva en (x_i, y_i).

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \, ,$$

donde $h = x_{i+1} - x_i$. Es decir,

$$y_{i+1} = y_i + \phi h \, .$$



PVI – Método de Euler

Para tener en cuenta.

- En la *EDO* $y' = f(x, y)$ sólo se tiene una variable independiente y una variable dependiente por lo que este tipo de ecuaciones, generalmente, modelan fenómenos transitorios (aquellos que cambian en el tiempo).
- De acuerdo con la anterior observación, la *EDO* se acostumbra a escribir como

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$

donde $y = y(t)$.

- La *EDO*, en situaciones prácticas, se acompaña de una condición inicial dando lugar a un *PVI* que se plantea en la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

PVI – Método de Euler

$y' = f(x,y), \quad y_{i+1} = y_i + f(x_i,y_i)h$

Ejemplo 1. El siguiente PVI

$$\begin{cases} y'(t) = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

tiene por solución analítica la función $y = e^t$. El método de Euler permite obtener una solución numérica luego de establecer un tamaño de paso, $h = 0.2$, y un intervalo de solución como $[0,2]$.

$x_0 = 0$, $y_0 = y(x_0) = y(0) = 1.$

$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.2 = 0.2$

$y_1 = y_0 + f(x_0,y_0)h = 1 + (y_0)(0.2) = 1 + (1)(0.2) = 1.2$

$x_2 = x_1 + h = 0.2 + 0.2 = 0.4$

$y_2 = y_1 + f(x_1,y_1)h = 1.2 + (y_1)(0.2) = 1.2 + (1.2)(0.2) = 1.2 + 0.24 = 1.44$

Si se continúan los cálculos: $x_{10} = 2$ y $y_{10} = y(x_{10}) = 6.192$.

PVI – Método de Euler

$$y' = f(x,y), \quad y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Ejemplo 2. El siguiente PVI

$$\begin{cases} y'(x) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

tiene por solución analítica la función $y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$. Si establecemos un tamaño de paso $h = 0.5$ y un intervalo de solución $[0,4]$, el método de Euler conduce a:

$x_0 = 0,\ y_0 = y(x_0) = y(0) = 1.$

$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.5 = 0.5$

$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h = 1 + (-2x_0^3 + 12x_0^2 - 20x_0 + 8.5)(0.5) = 5.25$

$x_2 = x_1 + h = 0.5 + 0.5 = 1.0$

$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h = 5.25 + (-2x_1^3 + 12x_1^2 - 20x_1 + 8.5)(0.5) = 5.875$

Si se continúan los cálculos: $x_8 = 4$ y $y_8 = y(x_8) = 7$.

PVI – Métodos de Taylor

Recordemos la serie de Taylor

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n\,,\qquad R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$y(x)=y(a)+y'(a)(x-a)+\frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Si $x=x_{i+1}$, $a=x_i$, $x-a=x_{i+1}-x_i=h$, $y(x_{i+1})=y_{i+1}$, $y(x_i)=y_i$, $y'(x_i)=y_i'$, $y''(x_i)=y_i'',\ldots,y^{(n)}(x_i)=y_i^{(n)}$ se obtiene:

$$y(x_{i+1})=y(x_i)+y'(x_i)h+\frac{y''(x_i)}{2!}h^2+\cdots+\frac{y^{(n)}(x_i)}{n!}h^n+\frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}\,,$$

$$y_{i+1}=y_i+y_i'h+\frac{y_i''}{2!}h^2+\cdots+\frac{y_i^{(n)}}{n!}h^n+\frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}\,.$$

El método de Euler se sigue si $n=1$

$$y_{i+1}=y_i+y_i'h+\frac{y''(\xi)}{2!}h^2\,.$$

PVI – Métodos de Taylor

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \frac{y_i''}{2!} h^2 + \cdots + \frac{y_i^{(n)}}{n!} h^n + \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

Ejercicio 1. Utilice métodos de la serie de Taylor hasta de orden cuatro para calcular un valor aproximado de $y(2)$ sujeto al PVI

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y^2 + t^3 \\ y(1) = -4 \end{cases}$$

considerando 100 pasos. Tenga en cuenta que el valor correcto es $y(2) = 4.371221866$.

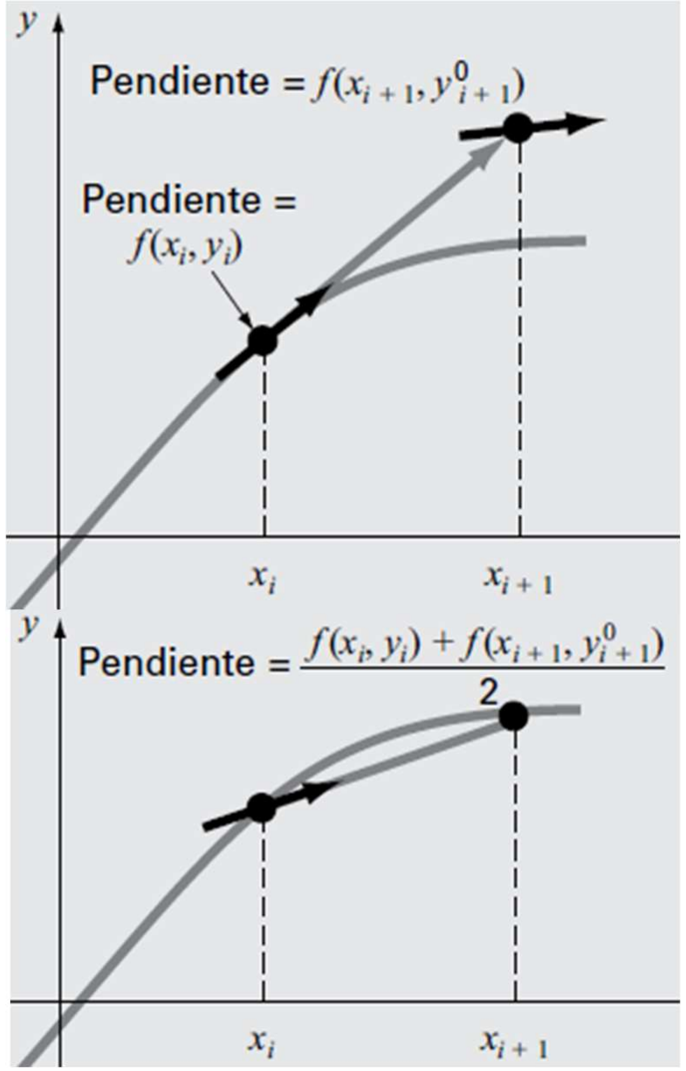
Ejercicio 2. Utilice métodos de la serie de Taylor hasta de orden cuatro para calcular un valor aproximado de $y(4)$ sujeto al PVI

$$\begin{cases} y'(x) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

considerando $h = 0.5$.

PVI – Método de Heun

El método de Heun mejora la estimación del método de Euler porque aproxima el valor de y_{i+1} utilizando un promedio de las derivadas en x_i y x_{i+1} . El método de Euler sólo utiliza la derivada en x_i .

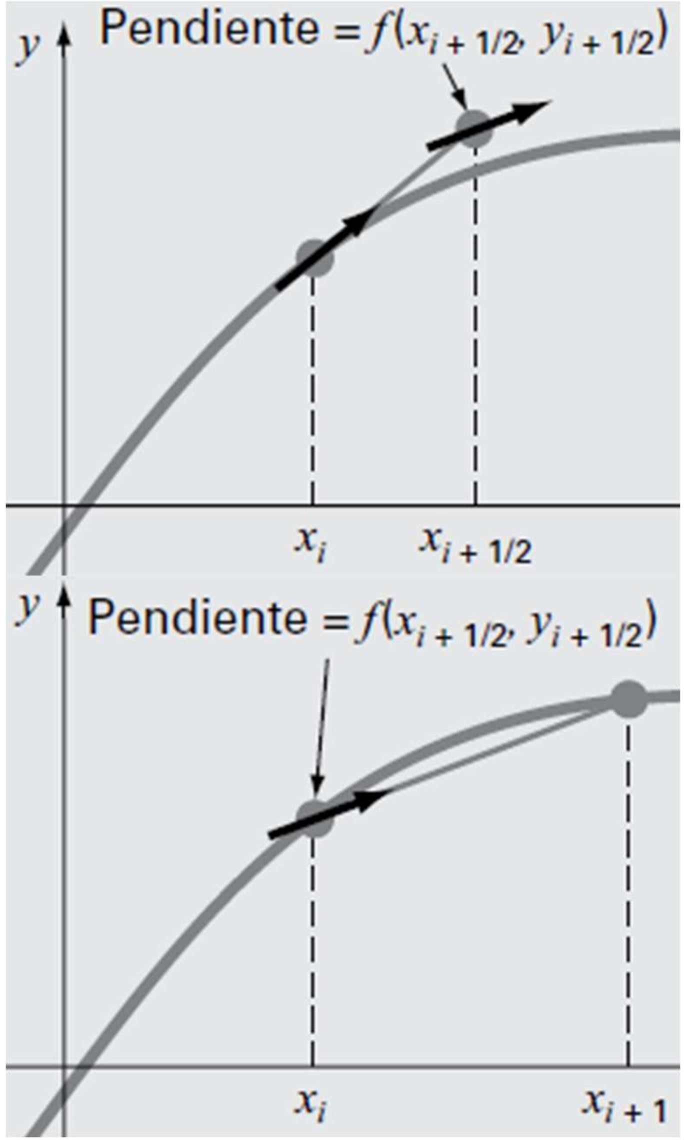


Algoritmo

1. Calcular pendiente al inicio del intervalo: $y_i' = f(x_i, y_i)$.
2. Calcular (utilizando Euler) $y^0_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$.
3. Calcular pendiente al final del intervalo $y_{i+1}' = f\left(x_{i+1}, y^0_{i+1}\right)$
4. Promediar pendientes $\overline{m} = \dfrac{f(x_i,y_i)+f\left(x_{i+1},y^0_{i+1}\right)}{2}$
5. Calcular (utilizando Euler) $y_{i+1} = y_i + \overline{m}h$.

PVI – Punto Medio

El método del punto medio predice un valor $y_{i+1/2}^{0}$ para utilizarlo en la estimación de la pendiente en el punto $x_{i+1/2}, y_{i+1/2}$. A su vez, la pendiente calculada es utilizada para obtener y_{i+1}.



Algoritmo

1. Calcular pendiente al inicio del intervalo: $y_i' = f(x_i, y_i)$.
2. Calcular: $y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i)\left(\frac{h}{2}\right)$.
3. Calcular pendiente en el punto medio del intervalo $y_{i+1/2}' = f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right)$.
4. Calcular $y_{i+1} = y_i + f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right)h$

PVIs

Ejercicio 3. Utilice los métodos de Heun y punto medio para calcular un valor aproximado de $y(4)$ sujeto al PVI

$$\begin{cases} y'(x) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

y considerando $h = 0.5$.

Método de Heun.

Calcular:

1. $y_i' = f(x_i, y_i)$,
2. $y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h$,
3. $y_{i+1}' = f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^0\right)$,
4. $\overline{m} = \frac{f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^0\right)}{2}$,
5. $y_{i+1} = y_i + \overline{m}h$.

Método del punto medio.

Calcular:

1. $y_i' = f(x_i, y_i)$.
2. $y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i)\left(\frac{h}{2}\right)$.
3. $y_{i+1/2}' = f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right)$.
4. $y_{i+1} = y_i + f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right)h$