



EVALUACIÓN

Exámenes parciales (3)	30 %.
Tareas	30 %.
Proyecto final	30 %.
Participación y asistencia	10 %.

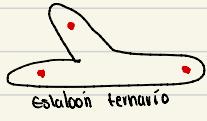
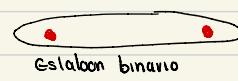
- **Grados de libertad (GDL)**: El número de coordenadas independientes requeridas para definir la posición y orientación de un cuerpo.
- **Espacio**: 6 GDL **PLANO**: 3 GDL.
- **Eslabón**: Un cuerpo rígido que posee al menos 2 nodos (puntas de unión con otros cuerpos).
- **Cuerpo Rígido**: La posición relativa de sus partículas NO CAMBIA.
- **Junta (Par Cinemático)**: Es la unión de dos o más eslabones en sus nodos y permite el movimiento entre ellos.
- **Eslabonamiento (Cadena cinemática)**: Un conjunto de eslabones conectados por juntas. Y pueden identificarse los siguientes elementos.
 - **TIERRA**: Es cualquier eslabón o eslabones que están fijos en el espacio.
 - **Acoplado (biela)**: Un eslabón que experimenta un movimiento complejo y no está conectado a la "tierra".
 - **Manivela**: Un eslabón que hace una revolución completa y está conectado a la "tierra" por un pivote.
 - **Seguidor**: Un eslabón que sigue el movimiento de la manivela. (Para que el seguidor debe haber leva).
 - **Balancín**: Un eslabón que hace un movimiento oscilatorio y está conectado a la tierra.

→ Todos los levas son manivelas pero no todas las manivelas son levas
 OJO UN MECANISMO SIEMPRE DEBE TENER TIERRA PARA SER MECANISMOS
 CONTAR A LA TIERRA PRIMERO. PARA NO OLVIDARLA

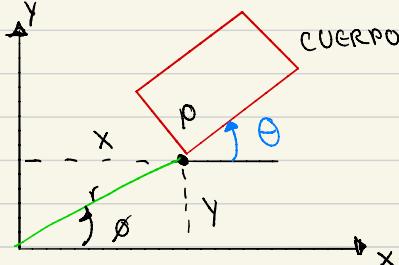
Mecanismo: Una cadena cinemática en la cual al menos un eslabón está conectado a la tierra o está fijo.

Maquina: Es un conjunto de mecanismos dispuestos para transmitir fuerzas y realizar trabajo.

Orden: Número de nodos por eslabón



Grados de libertad (GDL) en el plano: El movimiento de un cuerpo en el plano necesita 3 parámetros para definir sus (GDL)



- Eje x
- Eje y
- El grado de inclinación respecto a los ejes.
- En polares igual son tres.

1) Los GDL en el plano son generalmente:

- x, y 2 distancias
 - θ 1 ángulo
- 3 GDL

Tambien

- r 1 distancia
 - ϕ, θ 2 ángulos
- 3 GDL

2) Los GDL en el plano para "n" cuerpos NO UNIDOS son:

$$GDL = 3n$$

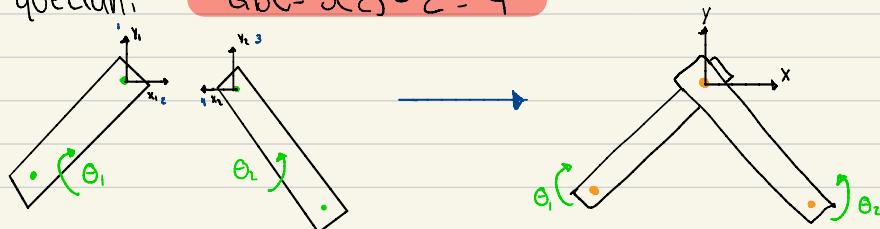
ECUACIÓN DE GRUEBLER - KUTZBACH PARA GDL EN EL PLANO

1: Un estabón cualquiera en el plano tiene: $GDL = 3$

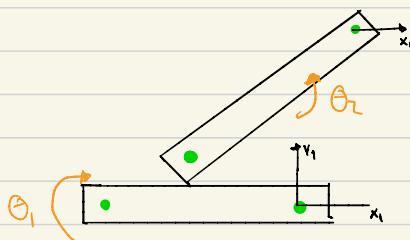
2: Un sist. de 'L' estabones NO CONECTADOS tiene: $GDL = 3L$

3: Dos estabones NO CONECTADOS tienen: $3(2) = 6$

4: Dos estabones unidos por una junta completa (junta con 1 GDL) pierden 2 GDL y quedan: $GDL = 3(2) - 2 = 4$



5: Dos estabones unidos por una semijunta (juntas con 2 GDL) pierden 1 GDL y quedan: $GDL = 3(2) - 1 = 5$ (Rota y se traslada)



6: Cuando un estabón se fija o sujeta a tierra se eliminan 3 GDL.

L (Link) = número de estabones, incluyendo la tierra

J (Joint) = número total de juntas.

G (Ground) = tierra

ecuación de Gruebler:

$$GDL = 3L - 2J - 3G = 3(L-G) - 2J \quad (\text{Siempre habrá una tierra})$$

$$GDL = 3(L-1) - 2J$$

J toma en cuenta juntas completas y semijuntas. Para semijuntas J se multiplica por $1/2$, ya que solo elimina 1 GDL.

La modificación de KUTZBACH

$$GDL = 3(L-1) - 2J_1 - 1J_2$$

L = número de eslabones, incluyendo la tierra.

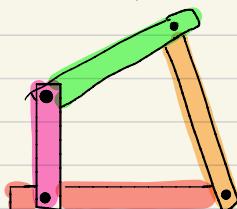
J₁ = número de juntas completas

J₂ = número de semijuntas

Para juntas múltiples (3 eslabones unidos o más) contamos el número de eslabones unidos a la junta y le restamos 1 y lo contamos como JUNTA COMPLETA. Es decir:

$$J_1 = \# \text{ eslabones} - 1$$

Valores posibles de GDL

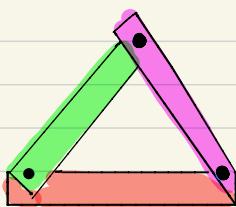


tomando el rojo como tierra hay cuatro eslabones

$$GDL = 3(4-1) - 2(4) - 1(0)$$

~~GDL = 1~~ PARA MOVER TODO EL MECANISMO SOLO

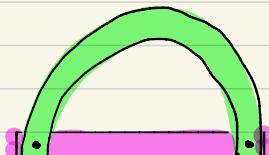
OCCUPARE UNA ENTRADA (UN MOTOR) (CON CONTROL)



$$GDL = 3(3-1) - 2(3) - 1(0)$$

~~GDL = 0~~ COMO DIO CERO ENTONCES SE

CONSIDERARA COMO ESTRUCTURA.



$$GDL = 3(2-1) - 2(2) - 1(0)$$

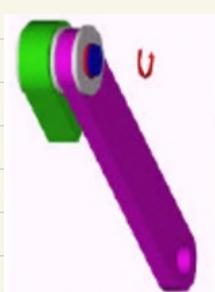
$$GDL = 3-4 = -1$$

SERA UNA ESTRUCTURA PRECARGADA ES DECIR HABRA FUERZAS INTERNAS. (TENSIONES O ESFUERZOS).

EJEMPLO: MUELDRES DE 3 y MEDIA.

TOLERANCIA AL MOVIMIENTO (ALMACENA ENERGIA)

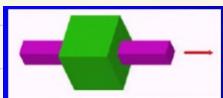
4: Tipos de juntas o pares cinemáticos



Junta rotacional (1 GDL)

Permite un giro entre eslabones

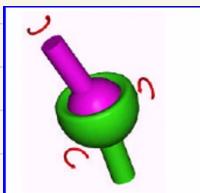
Usado en movimiento plano y espacial.



- Junta prismática (1 GDL)

Permite traslación d entre estabones

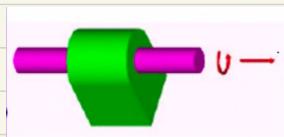
Usado en movimiento plano y espacial.



- Junta esférica (3 GDL)

Permite 3 giros $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ entre estabones

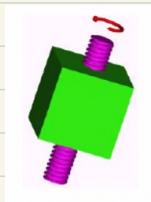
Usando en movimiento espacial



- Junta cilíndrica (2 GDL)

Permite traslación d y giro θ

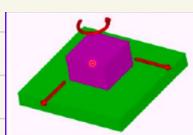
Usado en movimiento espacial



- Junta de tornillo (1 GDL)

Permite una traslación d y giro θ , pero **ESTAN REACIONADOS**

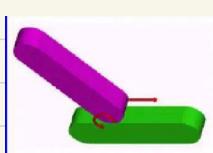
Usado en movimiento espacial



- Junta plana (3 GDO)

Permite 2 traslaciones (x, y) y un giro θ

Usado en movimiento plano y espacial.



- Semijunta (2 GDL)

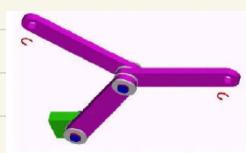
Permite una traslación d y un giro θ . Usado en movimiento plano y espacial.



- Perno y ranura (Semijunta 2 GDL)

Permite una traslación d y un giro θ

Usado en movimiento plano y espacial



- Junta multiple (2 GDO)

Permite 2 giros θ . Usado en movimiento plano y espacial.

- 1 grado de libertad = Junta completa
- 2 o mas grados de libertad = Semijunta.

La ecuación de kutzloach puede llegar a fallar cuando hay simetría en el mecanismo.

Siempre que alla conexión entre engranes será una semijunta.

$$GDL = 3(6-1) - 2(7) = 18 - 14 = 4 \quad \text{Mecanismo 4}$$

$$GDL = 3(3-1) - 2(2) - 1(1) = 1 \quad \text{Mecanismo 4 como leva y seguidor.}$$

$$GDL = 3(6-1) - 2(10) - 1(0) \quad \text{Mecanismo 6}$$

$$GDL = 21 - 20 = 1$$

$$GDL = 1$$

$$GDL = 3(3-1) - 2(2) - 1(3) \quad \text{Mecanismo 6 equivalente}$$

$$GDL = 6 - 2 - 3 = 1$$

$$GDL = 3(5-1) - 2(5) - 1(1)$$

$$GDL = 12 - 10 = 2$$

$$GDL = 2$$

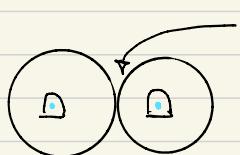
$$GDL = 3(6-1) - 2(6) - 1(2)$$

$$GDL = 3(5) - 12 - 2 = 15 - 14 = 1$$

Kutzloach para tres dimensiones.

$$GDL = 6(L-1) - 5J_1 - 4J_2 - 3J_3 - 2J_4 - 1J_5$$

Paradoja (afirmación absurda con apariencia de verdad.)
 A causa de que el criterio de Gruebler no toma en cuenta tamaño y forma de los estabones, este puede dar resultados erróneos



Junta completa, rodamiento
 SIN DESLIZAMIENTO.

DESLIZAMIENTO = Semijunta.

$$GDL = 3(L-1) - 2(J_1) - 1(J_2)$$

$$GDL = 3(3-1) - 2(3) - 1(0)$$

$$GDL = 6 - 6 - 0 = 0 \rightarrow \text{Indica estructura}$$

En realidad:

$$GDL = 1$$

Inversión:

Una inversión se crea por la fijación de un estorbo diferente en la cadena cinemática.

De esta manera existen tantas inversiones de un mecanismo como estorbos tenga.

estribos → inversores

Condición de Grashof: Es una relación que pronostica el comportamiento de rotación de las inversiones de un estribamiento de 4 baras con base sólo en las longitudes del estribos.

Sea:

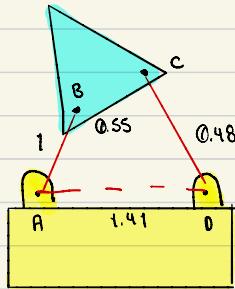
S (short): longitud de estribón más corto

L (large): longitud de estribón más largo

P y Q = longitudes de los estribos restantes.

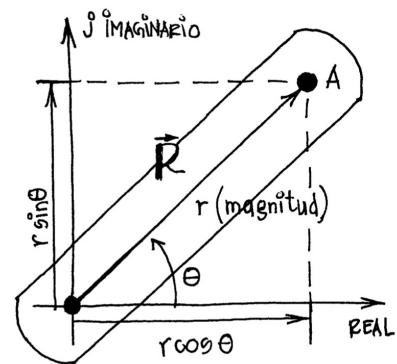
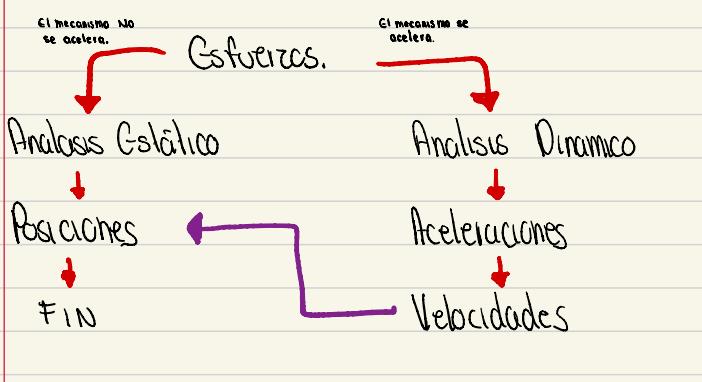
$$S + L < P + Q \quad \text{Condición de Grashof}$$

La condición de Grashof también asegura que existe un estribón que da un giro completo. ejemplos

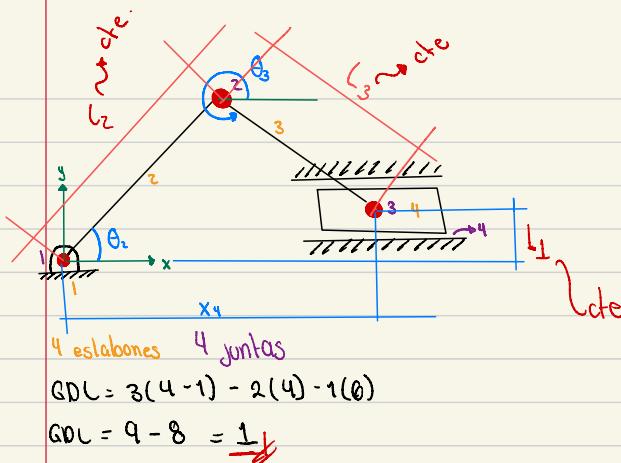


$$(0.48 + 1.41) > (1 + 0.55)$$

NO Grashof



$$\vec{R} = r e^{\pm j\theta} = r (\cos \theta \pm j \sin \theta)$$



- Definir un sistema de referencia
- Definir los grados de libertad
- Junta actuada convenientemente debe estar conectado a tierra.
- Obtener variables y constantes.
- Enumarar las variables
- Definir lazo vectorial.

Obteniendo Variables

Eslabón 2: Cambia de ángulo (siempre mi variable de orientación debe estar con respecto al eje horizontal). θ_2

Eslabón 3: Recomendación ponerlo donde hay un movimiento menos complejo, este será el que se encuentre más cercano a tierra. θ_3

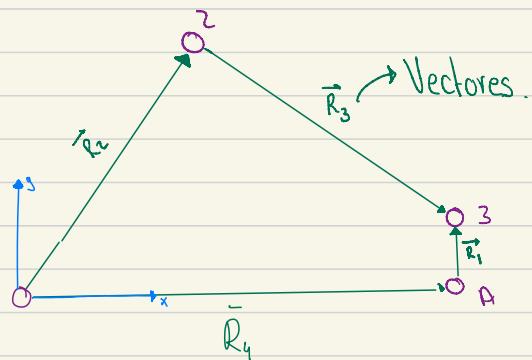
Eslabón 4: La referencia será el margen coordinado para el cambio de magnitud. x_4 (en caso de que aparezca un caso 3 tratar de simplificar a un caso más sencillo)

Var: $\{\theta_2, \theta_3, x_4\}$

Mi variable de control será θ_2 porque mi "motor estará en el nodo 1, por lo tanto tengo dos incógnitas".

Incógnitas $\{\theta_3, x_4\}$

Alajando nodos y estabones definiendo dirección, siempre nos convendrá que el vector salga de donde definimos la variable.



Definiendo mi lazo vectorial es decir escribir ec. de lazo vectorial

$$\vec{R}_2 + \vec{R}_3 - \vec{R}_1 - \vec{R}_4 = \vec{0}$$

$$\vec{R}_1 = l_1 \hat{j}$$

$$\vec{R}_2 = l_2 \hat{x}_2 = l_2 (\cos \theta_2 \hat{i} + \sin \theta_2 \hat{j})$$

$$\vec{R}_3 = l_3 (\cos \theta_3 \hat{i} + \sin \theta_3 \hat{j})$$

$$\vec{R}_4 = x_4 \hat{i}$$

$$l_2 (\cos \theta_2 \hat{i} + \sin \theta_2 \hat{j}) + l_3 (\cos \theta_3 \hat{i} + \sin \theta_3 \hat{j}) - l_1 \hat{j} - x_4 \hat{i} = \hat{o}_i + \hat{o}_j \text{ ec. vectorial}$$

ec. escalares.

$$i: l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 - x_4 = 0$$

$$j: l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 - l_1 = 0$$

Conuso l_2, θ_2, l_3, l_1

Buscamos θ_3 y x_4

$$\operatorname{Sen} \theta_3 = \frac{l_1 - l_2 \operatorname{Sen} \theta_2}{l_3}$$

$$\operatorname{Cos} \theta_3 = \frac{(x_4 - l_2 \operatorname{Cos} \theta_2)}{l_3}$$

Sen^2 Trabaja en 3 y 4
Cuadrantes.

$$\theta_3 = \operatorname{atan} 2 = \frac{(l_1 - l_2 \operatorname{Sen} \theta_2)}{(x_4 - l_2 \operatorname{Cos} \theta_2)} \quad \text{... ①}$$

Cos^2 Trabaja en 1 y 2
cuadrante.

$$\operatorname{Sen}^2 \theta_3 = \frac{(l_1 - l_2 \operatorname{Sen} \theta_2)^2}{l_3^2} \quad \operatorname{Cos}^2 \theta_3 = \frac{(x_4 - l_2 \operatorname{Cos} \theta_2)^2}{l_3^2}$$

$$\Rightarrow \text{Aplicando } \operatorname{Sen}^2 \theta_3 + \operatorname{Cos}^2 \theta_3 = 1 \quad (\text{Círculo unitario})$$

$$\frac{(l_1 - l_2 \operatorname{Sen} \theta_2)^2}{l_3^2} + \frac{(x_4 - l_2 \operatorname{Cos} \theta_2)^2}{l_3^2} = 1$$

$$(l_1 - l_2 \operatorname{Sen} \theta_2)^2 + (x_4 - l_2 \operatorname{Cos} \theta_2)^2 = l_3^2$$

$$l_1^2 - 2l_2 \operatorname{Sen} \theta_2 l_1 - l_2^2 \operatorname{Sen}^2 \theta_2 + x_4^2 - 2l_2 \operatorname{Cos} \theta_2 x_4 - l_2^2 \operatorname{Cos}^2 \theta_2 = l_3^2$$

$$x_4^2 - 2l_2 \operatorname{Cos} \theta_2 x_4 = l_3^2 + l_2^2 \operatorname{Cos}^2 \theta_2 - l_1^2 + 2l_2 \operatorname{Sen} \theta_2 l_1 + l_2^2 \operatorname{Sen}^2 \theta_2$$

$$x_4^2 - 2x_4 l_2 \operatorname{Cos} \theta_2 + (l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 - 2l_1 l_2 \operatorname{Sen} \theta_2) = 0$$

Aplicando chicharro nra

$$x_4 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \text{Tenemos dos soluciones}$$

y para obtener la solución de x_4 podemos obtener θ_3 sustituyendo en ec. ①



Aquí están mis dos posibles soluciones
(+) Azul (-) Verde

Como no limitamos a x_4 por eso obtenemos 2 soluciones
y como l_1 es fija se quedan ambas soluciones a la misma altura.

→ variable de control

$$l_1 = 1'' \quad l_2 = 2'' \quad l_3 = 4'' \quad \theta_2 = 45^\circ$$

$$x_4^2 - 2\sqrt{2} x_4 - 11 - 2\sqrt{2}$$

$$x_4' = 5.393'' \quad x_4'' = -2.564''$$

Si yo veo que los signos de mi numerador y denominador me llevan al primer o cuarto cuadrante aplico el arco tangente normal y ese sería mi resultado. En caso de que el resultado me mande al tercer o segundo cuadrante, entonces al resultado le sumo 180° .

$$\theta_3 = \tan^{-1} \frac{(-0.414)}{(3.979)} = -5.940^\circ \quad \text{utilizando } x_4 \quad (\text{Cuarto cuadrante})$$

$$\theta'_3 = \tan^{-1} \frac{(-0.414)}{(-3.979)} = 185.94^\circ \quad \text{utilizando } x'_4 \quad (\text{Tercer cuadrante})$$

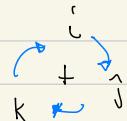
$$\bar{V}_2 + \bar{V}_3 - \bar{V}_1 - \bar{V}_4 = \bar{0}$$

$\bar{V}_1 = \bar{0}$ PONER $\bar{0}$ COMO VECTOR PORQUE NO SE PUEDE IGUALAR UN VECTOR A UN ESCALAR.

$$\bar{V}_2 = \bar{w}_2 \times \bar{R}_2 \quad (\text{Vector 2})$$

$$\bar{V}_3 = \bar{w}_3 \times \bar{R}_3 \quad (\text{Vector 4})$$

$$\bar{V}_4 = v_{x_4} i \quad (\text{Vector 4})$$



$$\Rightarrow \bar{V}_2 = -1 \hat{k} \times (\sqrt{2} \hat{i} + \sqrt{2} \hat{j})$$

$$\bar{V}_2 = \sqrt{2} \hat{i} - \sqrt{2} \hat{j}$$

$$\bar{V}_3 = w_3 \hat{k} \times (\sqrt{2} \hat{i} + \sqrt{2} \hat{j})$$

$$\bar{V}_3 = w_3 \hat{k} \times 4(\cos(-5.943) \hat{i} + \sin(-5.943) \hat{j})$$

$$\bar{V}_3 = w_3 \hat{k} \times (3.979 \hat{i} - 0.414 \hat{j})$$

$$\bar{V}_3 = 0.414 w_3 \hat{i} + 3.979 w_3 \hat{j}$$

Sustituyendo en mi ecuación de lazo vectorial

$$i: \sqrt{2} + 0.414 w_3 - v_{x_4} = 0$$

$$j: -\sqrt{2} + 3.979 w_3 = 0$$

NOTA: LAS ECUACIONES DE POSICIÓN SERÁN NO LINEALES, LA DE VELOCIDAD SI SERÁN LINEALES.
Rescribiendo

$$\begin{pmatrix} 0.414 & -1 \\ 3.979 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_3 \\ v_{x_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Velocidad

$$w_3 = 0.355 \text{ [rad/s]}$$

$$v_{x_4} = 1.561 \text{ [m/s]}$$

Aceleración

$$\alpha_3 = 0.342 \text{ [rad/s}^2]$$

$$\alpha_{x_4} = -1.773 \text{ [m/s}^2]$$

DERIVANDO LA VELOCIDAD

$$\bar{A}_2 + \bar{A}_3 - \bar{A}_1 - \bar{A}_4 = \bar{0}$$

$$\bar{A}_1 = \bar{0}$$

$$\bar{A}_4 = \alpha_{x_4} i$$

$$i: (-\sqrt{2} + 0.414 \alpha_3 - 0.501 - \alpha_{x_4}) = 0$$

$$j: (-\sqrt{2} + 3.979 \alpha_3 + 0.052 - 0) = 0$$

$$\bar{A}_2 = \bar{\alpha}_2 \times \bar{R} - \bar{w}_2^2 \bar{R}_2$$

$$\bar{A}_2 = 0 \hat{k} \times (\sqrt{2} \hat{i} + \sqrt{2} \hat{j}) - (-1)^2 (\sqrt{2} \hat{i} + \sqrt{2} \hat{j}) = -\sqrt{2} \hat{i} - \sqrt{2} \hat{j}$$

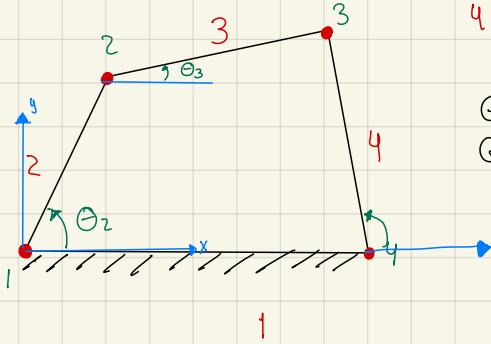
$$\bar{A}_3 = \bar{\alpha}_3 \times \bar{R}_3$$

$$= \bar{\alpha}_3 \hat{k} \times (3.979 \hat{i} - 0.414 \hat{j}) - (0.355)^2 (3.979 \hat{i} - 0.414 \hat{j})$$

$$= (0.414 \alpha_3 - 0.501) \hat{i} + (3.979 \alpha_3 + 0.052) \hat{j}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.414 \alpha_3 - \alpha_{x_4} = \sqrt{2} + 0.501 \dots ① \\ 3.979 + 0 = \sqrt{2} - 0.052 \dots ② \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.414 \alpha_3 - \alpha_{x_4} = \sqrt{2} + 0.501 \dots ① \\ 3.979 + 0 = \sqrt{2} - 0.052 \dots ② \end{array} \right.$$



4 JUNTAS COMPLETAS

4 ESCABONGS

$$GPL = 3(4-1) - 2(4) - 1(\emptyset)$$

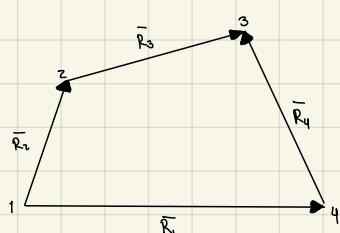
$$GDL = \underline{\underline{1}}$$

VARIABLES: θ_3, θ_4

CONSTANTES: l_2, l_3, l_4

θ_2 : Es mi variable de control (yo la defino)

Definiendo lazos vectoriales



ecuación de lazo

$$\bar{R}_2 + \bar{R}_3 - \bar{R}_4 - \bar{R}_1 = \bar{0}$$

Expresando vectores:

$$\bar{R}_1 = l_1 \hat{i}$$

$$\bar{R}_2 = l_2 \hat{u}_2 = l_2 (\cos \theta_2 \hat{i} + \sin \theta_2 \hat{j})$$

$$\bar{R}_3 = l_3 \hat{u}_3 = l_3 (\cos \theta_3 \hat{i} + \sin \theta_3 \hat{j})$$

$$\bar{R}_4 = l_4 \hat{u}_4 = l_4 (\cos \theta_4 \hat{i} + \sin \theta_4 \hat{j})$$

Sustituyendo en ec. de lazo

$$l_2 (\cos \theta_2 \hat{i} + \sin \theta_2 \hat{j}) + l_3 (\cos \theta_3 \hat{i} + \sin \theta_3 \hat{j}) - l_4 (\cos \theta_4 \hat{i} + \sin \theta_4 \hat{j}) - l_1 \hat{i} = \bar{0}$$

Separando por componentes:

$$\hat{i}: l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 - l_4 \cos \theta_4 - l_1 = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$\hat{j}: l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 - l_4 \sin \theta_4 = 0 \dots \textcircled{2}$$

$$\cos \theta_3 = \frac{(l_4 \cos \theta_4 + l_1 - l_2 \cos \theta_2)}{l_3}$$

$$\sin \theta_3 = \frac{l_4 \sin \theta_4 - l_2 \sin \theta_2}{l_3}$$

Aplicando círculo unitario

$$\left(\frac{l_4 \cos \theta_4 + l_1 - l_2 \cos \theta_2}{l_3} \right)^2 + \left(\frac{l_4 \sin \theta_4 - l_2 \sin \theta_2}{l_3} \right)^2 = 1$$

$$\underline{\underline{l_4^2 \cos^2 \theta_4 + l_1^2 + l_2^2 \cos^2 \theta_2 + 2l_1 l_4 \cos \theta_4}} - 2l_2 l_4 \cos \theta_2 \cos \theta_4 - 2l_1 l_2 \cos \theta_2$$

$$+ \underline{\underline{l_4^2 \sin^2 \theta_4 - 2l_2 l_4 \sin \theta_2 \sin \theta_4}} + \underline{\underline{l_2^2 \sin^2 \theta_2}} = l_3^2$$

$$\underline{\underline{l_4^2 + l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_4 \cos \theta_4 - 2l_2 l_4 (\cos \theta_2 \cos \theta_4 + \sin \theta_2 \sin \theta_4)}} - 2l_1 l_2 \cos \theta_2 = l_3^2$$

IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA.

$$l_4^2 + l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_4 \cos\theta_4 - 2l_2l_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) - 2l_1l_2 \cos\theta_2 = l_3^2$$

$$l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 + l_4^2 + 2l_1l_4 \cos\theta_4 - 2l_2l_4 \cos\theta_2 = 2l_2l_4 \cos(\theta_2 - \theta_4)$$

DIVIDIENDO ENTRE $2l_2l_4$

$$\frac{(l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 + l_4^2)}{2l_2l_4} + \frac{2l_1l_4 \cos\theta_4}{2l_2l_4} - \frac{2l_1l_2 \cos\theta_2}{2l_2l_4} = \frac{2l_2l_4 \cos(\theta_2 - \theta_4)}{2l_2l_4}$$

$$k_1 + k_2 \cos\theta_4 - k_3 \cos\theta_2 = \cos(\theta_2 - \theta_4) \quad \text{EQUACIÓN DE FREUDENSTEIN}$$

(fründstein)
(Amigo de la piedra)

EQUACIÓN DE FORMA CERRADA

$$\begin{aligned} \operatorname{Sen}\theta_4 &= \frac{2 \tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)} \\ \cos\theta_4 &= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$k_1 + k_2 \cos\theta_4 - k_3 \cos\theta_2 = \cos\theta_2 \cos\theta_4 + \operatorname{Sen}\theta_2 \operatorname{Sen}\theta_4$$

$$k_1 + k_2 \cos\theta_4 - k_3 \cos\theta_2 - \cos\theta_2 \cos\theta_4 = \operatorname{Sen}\theta_2 \operatorname{Sen}\theta_4$$

$$k_1 + \cos\theta_4(k_2 - \cos\theta_2) - k_3 \cos\theta_2 - \operatorname{Sen}\theta_2 \operatorname{Sen}\theta_4 = 0$$

$$k_1 + \left(\frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)} \right) (k_2 - \cos\theta_2) - k_3 \cos\theta_2 - \operatorname{Sen}\theta_2 \left(\frac{2 \tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)} \right) = 0$$

$$(k_2 - \cos\theta_2)(1 - \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)) - (\operatorname{Sen}\theta_2)(2 \tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)) + (k_1 - k_3 \cos\theta_2)(1 + \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)) = 0$$

$$(k_2 - \cos\theta_2) - (k_2 - \cos\theta_2)(\tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)) - (\operatorname{Sen}\theta_2)(2 \tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)) + (k_1 - k_3 \cos\theta_2)(k_1 - k_3 \cos\theta_2)(\tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)) = 0$$

$$(-k_2 + \cos\theta_2 + k_1 - k_3 \cos\theta_2) \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right) - (2 \operatorname{Sen}\theta_2)(\tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)) + (k_1 - k_3 \cos\theta_2 + k_2 - \cos\theta_2) = 0$$

$$A \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right) + B \tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right) + C = 0$$

APLICANDO FÓRMULA GENERAL.

$$\tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right) = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \Rightarrow \theta_4 = 2 \cdot \operatorname{atan} 2 \left(\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right)$$

Derivando la ecuación de lazo con respecto al tiempo obtenemos:

$$\bar{v}_2 + \bar{v}_3 - \bar{v}_4 - \bar{v}_1 = \bar{0}$$

$$\text{Caso 1} \quad \bar{v}_1 = \bar{0}$$

$$\text{Caso 2} \quad \bar{v}_2 = \bar{w}_2 \hat{k} \times \bar{l}_2 (\cos\theta_2 i + \operatorname{Sen}\theta_2 j) = -w_2 l_2 \operatorname{Sen}\theta_2 i + w_2 l_2 \cos\theta_2 j$$

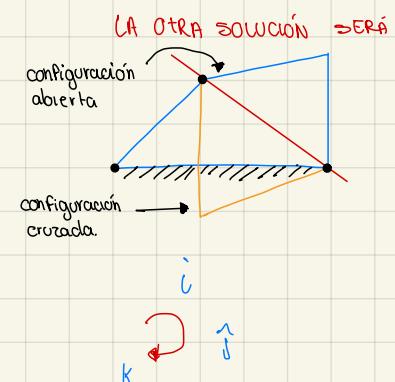
$$\text{Caso 2} \quad \bar{v}_3 = \bar{w}_3 \hat{k} \times \bar{l}_3 (\cos\theta_3 i + \operatorname{Sen}\theta_3 j) = -w_3 l_3 \operatorname{Sen}\theta_3 i + w_3 l_3 \cos\theta_3 j$$

$$\text{Caso 2} \quad \bar{v}_4 = \bar{w}_4 \hat{k} \times \bar{l}_4 (\cos\theta_4 i + \operatorname{Sen}\theta_4 j) = -w_4 l_4 \operatorname{Sen}\theta_4 i + w_4 l_4 \cos\theta_4 j$$

Separando por componentes

$$i: -w_2 l_2 \operatorname{Sen}\theta_2 - w_3 l_3 \operatorname{Sen}\theta_3 + w_4 l_4 \operatorname{Sen}\theta_4 = 0$$

$$j: w_2 l_2 \cos\theta_2 + w_3 l_3 \cos\theta_3 - w_4 l_4 \cos\theta_4 = 0$$



Segunda derivada a ecuación de lazo con respecto al tiempo:

$$\bar{A}_2 + \bar{A}_3 - \bar{A}_4 - \bar{A}_1 = \bar{0}$$

Caso 0 $\bar{A}_1 = \bar{0}$

Caso 2 $\bar{A}_2 = \bar{\alpha}_2 \times \bar{R}_2 - W_2^2 \bar{R}_2 = \alpha_2 \hat{k} \times l_2 (\cos \theta_2 \hat{i} + \sin \theta_2 \hat{j}) - W_2^2 l_2 (\cos \theta_2 \hat{i} + \sin \theta_2 \hat{j})$
 $\bar{A}_2 = (-\alpha_2 l_2 \sin \theta_2 - W_2^2 l_2 \cos \theta_2) \hat{i} + (\alpha_2 l_2 \cos \theta_2 - W_2^2 l_2 \sin \theta_2) \hat{j}$

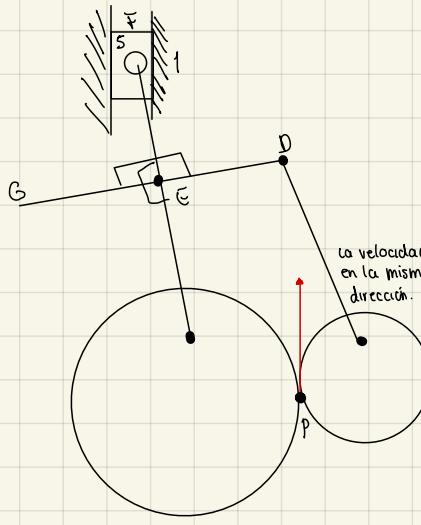
Caso 2 $\bar{A}_3 = \bar{\alpha}_3 \times \bar{R}_3 - W_3^2 \bar{R}_3 = \alpha_3 \hat{k} \times l_3 (\cos \theta_3 \hat{i} + \sin \theta_3 \hat{j}) - W_3^2 l_3 (\cos \theta_3 \hat{i} + \sin \theta_3 \hat{j})$
 $\bar{A}_3 = (-\alpha_3 l_3 \sin \theta_3 - W_3^2 l_3 \cos \theta_3) \hat{i} + (\alpha_3 l_3 \cos \theta_3 - W_3^2 l_3 \sin \theta_3) \hat{j}$

Caso 2 $\bar{A}_4 = \bar{\alpha}_4 \times \bar{R}_4 - W_4^2 \bar{R}_4 = \alpha_4 \hat{k} \times l_4 (\cos \theta_4 \hat{i} + \sin \theta_4 \hat{j}) - W_4^2 l_4 (\cos \theta_4 \hat{i} + \sin \theta_4 \hat{j})$
 $\bar{A}_4 = (-\alpha_4 l_4 \sin \theta_4 - W_4^2 l_4 \cos \theta_4) \hat{i} + (\alpha_4 l_4 \cos \theta_4 - W_4^2 l_4 \sin \theta_4) \hat{j}$

Separando por componentes:

i: $-\alpha_2 l_2 \sin \theta_2 - W_2^2 l_2 \cos \theta_2 - \alpha_3 l_3 \sin \theta_3 - W_3^2 l_3 \cos \theta_3 + \alpha_4 l_4 \sin \theta_4 + W_4^2 l_4 \cos \theta_4 = 0$
j: $\alpha_2 l_2 \cos \theta_2 - W_2^2 l_2 \sin \theta_2 + \alpha_3 l_3 \cos \theta_3 - W_3^2 l_3 \sin \theta_3 - \alpha_4 l_4 \cos \theta_4 + W_4^2 l_4 \sin \theta_4 = 0$

Mecanismo 4



$$L=7$$

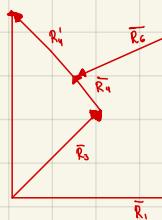
$$J_1=8$$

$$J_2=1$$

$$QDL = 3(7-1) - 2(8) - 1(1)$$

$$QDL = 18 - 16 - 1$$

$$QDL = \cancel{1}$$



Var { $\theta_2, \theta_3, \theta_4, Y_5, \theta_6, \theta_7$ }

Inc { $\theta_3, \theta_4, Y_5, \theta_6, \theta_7$ }

Variable control θ_2

EC. LAZO VECTORIAL

$$\bar{R}_3 + \bar{R}_4 + \bar{R}_4' - \bar{R}_5 = \bar{0} \quad LN. 1$$

$$\bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_7 + \bar{R}_C + \bar{R}_4' - \bar{R}_5 = \bar{0} \quad LN. 2$$

LN 1:

$$i: 3 \cos \theta_3 + 5 \cos \theta_4 + 5 \cos \theta_4 - 0 = 0$$

$$j: 3 \sin \theta_3 + 5 \sin \theta_4 + 5 \sin \theta_4 - Y_5 = 0$$

LN 2:

$$i: 7 + 2 \cos \theta_2 + 6 \cos \theta_7 + 4 \cos \theta_6 + 5 \cos \theta_4 - 0 = 0$$

$$j: 0 + 2 \sin \theta_2 + 6 \sin \theta_7 + 4 \sin \theta_6 + 5 \sin \theta_4 - Y_5 = 0$$

A partir de la velocidad angular de los engranes:

$$V = W_3 r_3 \approx W_2 r_2 \Rightarrow W_3 = \frac{W_2 r_2}{r_3} \rightarrow \text{ESCALEAR} \Rightarrow W_3 = \frac{-W_2 r_2}{r_3}$$

sentido horario y otro antihorario

$$\frac{d\theta_3}{dt} = -\frac{d\theta_2}{dt} \frac{r_2}{r_3} \Rightarrow d\theta_3 = -d\theta_2 \frac{r_2}{r_3} \Rightarrow \int_{\pi/3}^{\theta_3} d\theta_3 = -\frac{r_2}{r_3} \int_{\pi/2}^{\theta_2} d\theta_2$$

Condiciones iniciales (radíacos)

=>

$$\theta_3 - \pi/3 = -\frac{r_2}{r_3} (\theta_2 - \pi/2) \Rightarrow \theta_3 = -\frac{r_2}{r_3} (\theta_2 - \pi/2) + \frac{\pi}{3}$$

DESCRIBIENDO VELOCIDADES

Inc { $\dot{W}_3, \dot{W}_4, \dot{V}_S, \dot{W}_6, \dot{W}_7 \}$

LAS INCÓGNITAS SIEMPRE PONERLAS COMO POSITIVAS.

$$UV.1: \dot{V}_3 + \dot{V}_4 + \dot{V}_6 - \dot{V}_S = \bar{0}$$

$$UV.2: \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_7 + \dot{V}_6 + \dot{V}_4 - \dot{V}_S = \bar{0}$$

$$\dot{V}_1 = \dot{W}_i$$

$$\dot{V}_2 = W_2 \hat{k} \times (2 \cos \theta_2 \hat{i} + 2 \sin \theta_2 \hat{j}) \Rightarrow \text{RESOLVIENDO} \Rightarrow W_2 \hat{k} \times 2 \hat{j} = -2 W_2 \hat{i}$$

$$\dot{V}_3 = W_3 \hat{k} \times (3 \cos \theta_3 \hat{i} + 3 \sin \theta_3 \hat{j}) \Rightarrow W_3 \hat{k} \times (3/2 \hat{i} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \hat{j}) = -\frac{3W_3\sqrt{3}}{2} \hat{i} + \frac{3W_3}{2} \hat{j}$$

$$\dot{V}_4 = W_4 \hat{k} \times (5 \cos \theta_4 \hat{i} + 5 \sin \theta_4 \hat{j}) \Rightarrow W_4 \hat{k} \times (-0.749 \hat{i} + 4.943 \hat{j}) = -4.943 W_4 \hat{i} - 0.749 W_4 \hat{j}$$

$$\dot{V}_5 = \dot{V}_{ys} \hat{j}$$

$$\dot{V}_6 = W_6 \hat{k} \times (4 \cos \theta_6 \hat{i} + 4 \sin \theta_6 \hat{j}) = W_6 \hat{k} \times (-3.999 \hat{i} - 0.02 \hat{j}) = 0.02 W_6 \hat{i} - 3.99 W_6 \hat{j}$$

$$\dot{V}_7 = W_7 \hat{k} \times (6 \cos \theta_7 \hat{i} + 6 \sin \theta_7 \hat{j}) = W_7 \hat{k} \times (-2.2496 \hat{i} + 5.5623 \hat{j}) = -5.5623 W_7 \hat{i} - 2.25 \hat{i}$$

UV 1:

$$\hat{i}: -\frac{3\sqrt{3}}{2} W_3 - 4.943 W_4 - 4.943 W_4 - 0 = 0$$

$$W_3 = -W_2 \frac{r_2}{r_3}$$

$$\hat{j}: 3/2 W_3 - 0.749 W_4 - 0.749 W_4 - V_{ys} = 0$$

UV 2:

$$\hat{i}: 0 - 2 W_2 - 5.56 W_7 + 0.02 W_6 - 4.943 W_4 - 0 = 0$$

$$\hat{j}: 0 + 0 - 2.24 W_7 - 3.999 W_6 - 0.749 W_4 - V_{ys} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -9.886 & 0 & 0 & 0 \\ 1.498 & -1 & 0 & 0 \\ -4.943 & 0 & 0.020 & -5.562 \\ -0.749 & -1 & -3.999 & -2.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_4 \\ V_{ys} \\ W_6 \\ W_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3}/2 W_3 \\ -3/2 W_3 \\ 2 W_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(TERMINOS INDEPENDIENTES CON SIGNO CONTRARIO)

↳ INCÓGNITAS

$$\Rightarrow W_3 = 0.249 \text{ [rad/s]}$$

$$W_4 = -0.66 \text{ [rad/s]}$$

$$V_{ys} = 0.473 \text{ [m/s]}$$

$$W_6 = -0.206 \text{ [rad/s]}$$

$$W_7 = 0.178 \text{ [rad/s]}$$

~~✓~~

Inc { $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_{y5}, \alpha_6, \alpha_7$ }

$$L.V.1: \bar{A}_3 + \bar{A}_4 + \bar{A}_6 = \bar{0}$$

$$L.V.2: \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 + \bar{A}_6 + \bar{A}_7 - \bar{A}_5 = \bar{0}$$

$$\bar{A}_1 = 0\hat{i} + 0\hat{j}$$

$$\bar{A}_2 = \alpha_2 R \times (2 \cos \theta_2 \hat{i} + 2 \sin \theta_2 \hat{j}) - W_2^z (2 \cos \theta_2 \hat{i} + 2 \sin \theta_2 \hat{j}) = -2 \alpha_2 \hat{i} - 2 W_2^z \hat{j}$$

$$\bar{A}_3 = \alpha_3 R \times (3 \cos \theta_3 \hat{i} + 3 \sin \theta_3 \hat{j}) - W_3^z (3 \cos \theta_3 \hat{i} + 3 \sin \theta_3 \hat{j}) = -3\sqrt{3}/2 \alpha_3 \hat{i} + 3\sqrt{3}/2 \alpha_3 \hat{j} - 3/2 W_3^z \hat{i} - \frac{3\sqrt{3}}{2} W_3^z \hat{j}$$

$$\bar{A}_4 = \alpha_4 R \times (5 \cos \theta_4 \hat{i} + 5 \sin \theta_4 \hat{j}) - W_4^z (5 \cos \theta_4 \hat{i} + 5 \sin \theta_4 \hat{j}) = -4.943 \alpha_4 \hat{i} - 0.749 \alpha_4 \hat{j} + 0.749 W_4^z - 4.943 W_4^z \hat{j}$$

$$\bar{A}_5 = -4.943 \alpha_4 \hat{i} - 0.749 \alpha_4 \hat{j} + 0.749 W_4^z - 4.943 W_4^z \hat{j}$$

$$\bar{A}_5 = \alpha_{y5} \hat{j}$$

$$\bar{A}_6 = \alpha_6 R \times (4 \cos \theta_6 \hat{i} + 4 \sin \theta_6 \hat{j}) - W_6^z (4 \cos \theta_6 \hat{i} + 4 \sin \theta_6 \hat{j}) = 0.02 \alpha_6 \hat{i} - 3.99 \alpha_6 \hat{j} + 3.99 W_6^z \hat{i} + 0.02 W_6^z \hat{j}$$

$$\bar{A}_7 = \alpha_7 R \times (6 \cos \theta_7 \hat{i} + 6 \sin \theta_7 \hat{j}) - W_7^z (6 \cos \theta_7 \hat{i} + 6 \sin \theta_7 \hat{j}) = -5.5623 W_7 \hat{i} - 2.25 \hat{j} + 2.25 W_7^z \hat{i} - 5.562 W_7^z \hat{j}$$

$$\hat{i}: -\sqrt{3}/2 \alpha_3 - 3/2 W_3^z - 4.943 \alpha_4 + 0.749 W_4^z - 4.943 \alpha_4 + 0.749 W_4^z = 0$$

$$\hat{j}: 3/2 \alpha_3 - 3\sqrt{3}/2 W_3^z - 0.749 \alpha_4 + 4.943 W_4^z - 0.749 \alpha_4 + 4.943 W_4^z - \alpha_{y5} = 0$$

$$\hat{i}: 0 - 2 \alpha_2 + (-5.5623 \alpha_7 + 2.25 W_7^z) + (0.02 \alpha_6 + 3.99 W_6^z) + (-4.943 \alpha_4 + 0.749 W_4^z) = 0$$

$$\hat{j}: 0 - 2 W_2^z + (-2.25 \alpha_7 - 5.562 W_7^z) + (-3.99 \alpha_6 + 0.02 W_6^z) + (-0.749 \alpha_4 - 4.943 W_4^z) + (\alpha_{y5}) = 0$$

$$\alpha_3 = -\alpha_2 \quad \text{Donde } \alpha_2 = 0 \text{ [rad/s]}$$

$$\begin{pmatrix} -9.886 & 0 & 0 & 0 \\ 1.498 & -1 & 0 & 0 \\ -4.943 & 0 & 0.02 & -5.562 \\ -0.749 & -1 & -3.999 & -2.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_{y5} \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} W_3^z - 1.498 W_4^z + \frac{3\sqrt{3}}{2} \alpha_3 \\ -3/2 \alpha_3 + 3\sqrt{3}/2 W_3^z + 9.886 W_4^z \\ 2 \alpha_2 - 2.25 W_7^z - 3.99 W_6^z - 0.749 W_4^z \\ 2 W_2^z + 5.562 W_7^z - 0.02 W_6^z + 4.943 W_4^z \end{pmatrix}$$

CASO PARTICULAR

$$\begin{pmatrix} -9.886 & 0 & 0 & 0 \\ 1.498 & -1 & 0 & 0 \\ -4.943 & 0 & 0.02 & -5.562 \\ -0.749 & -1 & -3.999 & -2.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_{y5} \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8588 \\ 4.4687 \\ -0.5669 \\ 2.5502 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W_3 = 0.25 \text{ [rad/s]}$$

$$\alpha_4 = -0.66 \text{ [rad/s]}$$

$$\alpha_{y5} = 0.473 \text{ [m/s]}$$

$$W_6 = -0.206 \text{ [rad/s]}$$

$$W_7 = 0.178 \text{ [rad/s]} \quad \cancel{\text{[rad/s]}}$$

$$\alpha_3 = 0 \text{ rad/s}$$

$$\alpha_4 = -8.84 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$$

$$\alpha_{y5} = -0.191 \text{ m/s}$$

$$\alpha_6 = -0.084 \text{ rad/s}$$

$$\alpha_7 = 0.052 \text{ rad/s}$$

Unidad 3 Análisis dinámico de Fuerzas

Cuando la **síntesis cinemática** (hallar las dimensiones del mecanismo) y el **análisis cinemática** (hallar las posiciones, velocidades y aceleraciones del mecanismo) han sido realizados para definir la geometría y el movimiento de un diseño particular, el siguiente paso es un **análisis cinetostático** o un **análisis dinámico de fuerzas** para determinar las **fuerzas y momentos** en el sistema. Estas fuerzas y torques resultan y se requieren para impulsar el mecanismo de manera que proporcionen las velocidades y aceleraciones dadas por el ingeniero.

Métodos de solución: El análisis dinámico de fuerzas puede ser hecho por cualquiera de los siguientes métodos.

Método Newtoniano

Este método se basa en la suma de fuerzas y momentos en el sistema.

Vectorialmente

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_G$$

$$\sum \vec{M}_G = I_G \vec{\alpha}$$

Escalaramente

$$\sum F_x = m a_G x$$

$$\sum F_y = m a_G y$$

$$\sum M_G = I_G \alpha$$

Estas tres ecuaciones deben escribirse para cada cuerpo en movimiento en el sistema, el cual conducirá a un conjunto de ecuaciones lineales.

La solución Newtoniana es más completa, ya que proporciona información de las fuerzas en juntas, de modo que se puede analizar juntas y eslabones para las fallas debidas a esfuerzo.

VENTAJA:

Suministrar todas las fuerzas internas (fuerza de reacción) en las juntas como también las fuerzas y momentos externos (pistones o motores) que el sistema necesita para su movimiento. Siempre que el sistema sea estéticamente determinado.

DESVENTAJA

Relativa complejidad en su aplicación, el cual requiere la solución simultánea de un sistema grande de ecuaciones.

Métodos energéticos - Método de la potencia (Trabajo virtual)

Los métodos energéticos son más fáciles de implementar, pero dan menos información. Este método se basa en el concepto de trabajo.

Trabajo. - Es definido como el producto punto de la fuerza por el desplazamiento. Este puede ser positivo, negativo o cero y es una cantidad escalar.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{R}$$

- Positivo = Fuerza en dirección del movimiento
- Negativo = Fuerza contraria a dirección del movimiento
- Cero = Fuerza perpendicular al movimiento y no se mueve,

Ya que las fuerzas de acción y reacción en las juntas de los eslabones producen trabajos iguales y opuestos, no aparecen en la ecuación de trabajo.

El trabajo hecho por el sistema más las pérdidas es igual a la energía suministrada.

$$E = W + \text{Pérdidas.}$$

- Primera suposición

Eslabones unidos por pernos usando rodamientos de baja fricción, pueden tener una alta eficiencia, al rededor de 95% de energía transmitida. De esta manera, en una primera aproximación en el diseño de mecanismos, se pueden asumir las pérdidas iguales a cero.

Se tiene entonces:

$$E = W$$

Por otra parte la variación respecto al tiempo de la energía y el trabajo es igual a la potencia.

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{dW}{dt}$$

Analizando $P = dE/dt$. La energía generada por el movimiento de los cuerpos rígidos es:

energía = almacenado en mi sistema

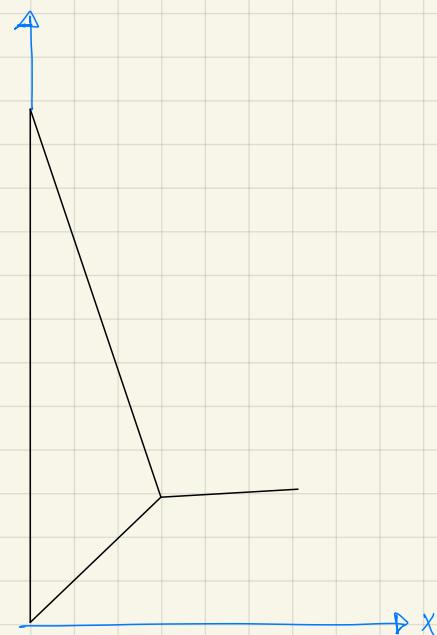
trabajo = lo que me da el sistema.

Ecucciones dinámicas:

Hallar el par torcional T_2 que moverá el mecanismo, cuando la manivela gira con un valor de:

$$\theta_2 = 60^\circ \quad \omega_2 = 30 \text{ rad/s} \quad \alpha = -10 \text{ rad/s}^2$$

Los siguientes cálculos son para el instante $\theta_2 = 60^\circ$. Este proceso se debe hacer para un giro completo ($0 \leq \theta_2 \leq 360^\circ$)



El diagrama de cuerpo libre solo incluyen las fuerzas que están interactuando en ese momento.

F_{12} = Del cuerpo 1 sobre el cuerpo 2.

F_{21} = Fuerza de mi cuerpo 2 sobre mi cuerpo 1.

Las restricciones son los movimientos que NO tengo. Por ejemplo en una semijunta perno - ranura solo sería x o y.

Los pares torcionales son vectores, y salen perpendicular al giro. (gira xy → sale en \vec{k})

Ecuaciones escalares del cuerpo

\vec{F}_{px} y $(\pm \mu F_{3,1x})$ → Fricción los signos tienen que ver con que suba y baje, con esto hacemos un caso "general"

Fuerza externa, Pesos, Masa e Inercias

Momento de inercia: Tendencia de un cuerpo a girar con una velocidad uniforme.

La fuerza \vec{F}_p tiene una magnitud de 50 lb y forma un ángulo de -45° con la horizontal.

$$\vec{F}_p = 50 (\cos(-45^\circ) \hat{i} + \sin(-45^\circ) \hat{j}) \rightarrow 35.355 \hat{i} - 35.355 \hat{j}$$

Momento de inercia siempre será el más bajo en el centro de masa

$$W_2 = 2 \text{ lb} \quad I_{G2} = 0.05 \text{ lb-in-s}^2 \\ W_3 = 4 \text{ lb} \quad I_{G3} = 0.10 \text{ lb-in-s}^2$$

$$M_2 = \frac{W_2}{g} = \frac{2 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in}} \right) = 0.00517 \frac{\text{lb}}{\text{in/s}^2} = 0.00517 \text{ bloks.}$$

$$M_3 = \frac{W_3}{g} = \frac{4 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in}} \right) = 0.0103 \text{ bloks}$$

$$\mu = 0.2$$

De donde viene y a donde va la fuerza.

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \bar{v}_k + \sum_{k=1}^n \bar{T}_k \cdot \bar{\omega}_k = \sum_{k=1}^n m_k \bar{a}_{Gk} \cdot \bar{v}_k + \sum_{k=1}^n I_{Gk} \bar{\alpha}_k \cdot \bar{\omega}_k$$

POTENCIA DEBIDO AL TRABAJO LINEAR POTENCIA DEBIDO AL TRABAJO ANGULAR

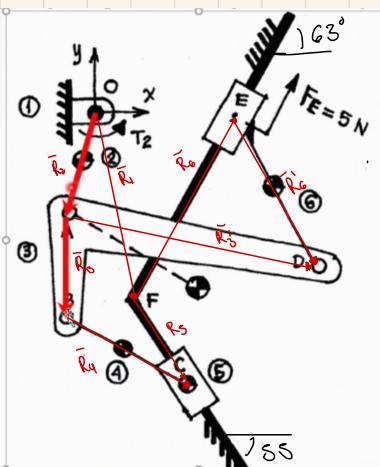
$$\bar{F}_E \cdot \bar{v}_E + \bar{T}_2 \cdot \bar{\omega}_2 = m_1 \bar{a}_{G2} \cdot \bar{v}_{G2} + m_3 \bar{a}_{G3} \cdot \bar{v}_{G3} + m_4 \bar{a}_{G4} \cdot \bar{v}_{G4} + m_5 \bar{a}_{G5} \cdot \bar{v}_{G5} + m_6 \bar{a}_{G6} \cdot \bar{v}_{G6}$$

ENERGIA CINETICA LINEAL

$$I_{G2} \alpha_2 \cdot \bar{\omega}_2 + I_{G3} \alpha_3 \cdot \bar{\omega}_3 + I_{G4} \alpha_4 \cdot \bar{\omega}_4$$

ENERGIA CINETICA ROTACIONAL.

ANÁLISIS CINEMÁTICO



$$\theta_3 = 271.759^\circ$$

$$\theta_4 = 332.534^\circ$$

$$x_S = 0.269 \text{ [m]}$$

$$x_G = 0.591 \text{ [m]}$$

$$\theta_2 = 255^\circ$$

$$OA = 0.281 \text{ [m]}$$

$$AB = 0.29 \text{ [m]}$$

$$AD = 0.69 \text{ [m]}$$

$$BC = 0.37 \text{ [m]}$$

$$ED = 0.46 \text{ [m]}$$

$$\beta_3 = 79^\circ$$

DEFINIENDO LÍAZOS VECTORIALES

$$\bar{R}_1 + \bar{R}_5 - \bar{R}_2 - \bar{R}_3 - \bar{R}_4 = \bar{0}$$

$$\bar{R}_1 + \bar{R}_6 + \bar{R}_5 - \bar{R}_3 - \bar{R}_4 = \bar{0}$$

RESOLVIENDO COMO VELOCIDAD

$$\cancel{\bar{V}_1 + \bar{V}_5 - \bar{V}_2 - \bar{V}_3 - \bar{V}_4 = \bar{0}} \quad / = \text{Son caso } 0$$

$$\bar{V}_1 + \bar{V}_6 + \cancel{\bar{V}_5 - \bar{V}_3 - \bar{V}_4} = \bar{0}$$

Los casos ① no se verán afectados
=> No lo calcularemos.

$$\bar{V}_2 = \bar{W}_2 \times \bar{R}_2 = 0.27 \bar{W}_2 \hat{i} - 0.072 \bar{W}_2 \hat{j}$$

$$\bar{R}_2 = -0.072 \hat{i} - 0.27 \hat{j}$$

$$\bar{V}_3 = \bar{W}_3 \times \bar{R}_3 = 0.29 \bar{W}_3 \hat{i} + 8.9 \times 10^{-3} \bar{W}_3 \hat{j}$$

$$\bar{R}_3 = 8.9 \times 10^{-3} \hat{i} - 0.29 \hat{j}$$

$$\bar{V}_3' = \bar{W}_3 \times \bar{R}_3' = 0.111 \bar{W}_3 \hat{i} + 0.681 \bar{W}_3 \hat{j}$$

$$\bar{R}_3' = 0.681 \hat{i} - 0.111 \hat{j}$$

$$\bar{V}_4 = \bar{W}_4 \times \bar{R}_4 = 0.171 \bar{W}_4 \hat{i} + 0.328 \bar{W}_4 \hat{j}$$

$$\bar{R}_4 = 0.328 \hat{i} - 0.171 \hat{j}$$

$$\bar{V}_5 = \bar{V}_{xS} \hat{i}_5 = 0.574 \bar{V}_{xS} \hat{i} - 0.819 \bar{V}_{xS} \hat{j}$$

$$\hat{i}_5 = 0.574 \hat{i} - 0.819 \hat{j}$$

$$\bar{V}_6 = \bar{V}_{xG} \hat{i}_6 = 0.452 \bar{V}_{xG} \hat{i} + 0.891 \bar{V}_{xG} \hat{j}$$

$$\hat{i}_6 = 0.452 \hat{i} + 0.891 \hat{j}$$

Sustituyendo en lizos, separando y resolviendo obtenemos:

$$\bar{W}_8 = -1.301 \text{ rad/s}$$

$$\bar{V}_{xS} = -0.679 \text{ m/s}$$

$$\bar{W}_9 = 1.51 \text{ rad/s}$$

$$\bar{V}_{xG} = -0.913 \text{ m/s}$$

$$\bar{A}_1 + \bar{A}_S - \bar{A}_4 - \bar{A}_3 - \bar{A}_2 = \bar{0}$$

$$\bar{A}_1 + \bar{A}_6 - \bar{A}_6' - \bar{A}_2 = \bar{0}$$

aceleración tangencial

$$\bar{A}_z = \bar{\alpha}_z \times \bar{R}_z - \underline{W_z^2 R_z}$$

aceleración Normal

$$\bar{F}_3 = \bar{\alpha}_3 \times \bar{R}_3 - W_3^2 \bar{R}_3$$

$$\bar{A}_3 = \bar{\alpha}_3 \times \bar{R}_3 - W_3^2 \bar{R}_3$$

$$\bar{A}_4 = \bar{\alpha}_4 \times \bar{R}_4 - W_4^2 \bar{R}_4$$

$$\bar{A}_5 = \bar{\alpha}_{x_5} \bar{A}_5$$

$$\bar{A}_6 = \bar{\alpha}_{x_6} \bar{A}_6$$

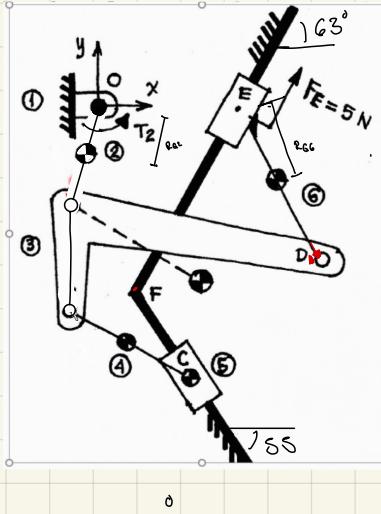
Resolviendo con ec. lato, dividiendo componentes y resolviendo sist. obtenemos,

$$\alpha_3 = -2.961 \text{ rad/s}^2$$

$$\alpha_4 = 0.807 \text{ rad/s}^2$$

$$\alpha_{x_5} = -1.519 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha_{x_6} = -1.912 \text{ m/s}^2$$



$$\bar{R}_{G2} = \bar{R}_2' = 0.13 (\cos \theta_2 \hat{i} + \sin \theta_2 \hat{j}) = -0.034 \hat{i} - 0.126 \hat{j}$$

$$\bar{V}_{G2} = \bar{W}_2 \times \bar{R}_{G2} = 0.126 w_i \hat{i} - 0.034 w_i \hat{j} = -0.126 \hat{i} + 0.034 \hat{j}$$

$$\bar{A}_{G2} = \bar{\alpha}_2 \times \bar{R}_{G2} - \bar{W}_2^2 \bar{R}_{G2} = 0.286 \hat{i} + 0.058 \hat{j}$$

$$\bar{V}_{G2} \cdot \bar{A}_{G2} = -0.034 \downarrow$$

$$\bar{R}_{G3} = \bar{R}_2 + \bar{R}_3' = -0.072 \hat{i} - 0.27 \hat{j} + 0.41 (\cos(\theta_3 + 58^\circ) \hat{i} + \sin(\theta_3 + 58^\circ) \hat{j})$$

$$\bar{R}_{G3} = 0.2822 \hat{i} - 0.4764 \hat{j}$$

$$\bar{V}_{G3} = \bar{V}_2 + \bar{V}_3 = -0.27 \hat{i} + 0.072 \hat{j} + 0.4764 W_3 \hat{i} + 0.2822 W_3 \hat{j} = -0.8897 \hat{i} - 0.2951 \hat{j}$$

$$\bar{A}_{G3} = \bar{A}_2 + \bar{A}_{G3} = \bar{\alpha}_2 \times \bar{R}_2 - \bar{W}_2^2 \bar{R}_2 + \bar{\alpha}_3 \times \bar{R}_3 - \bar{W}_3^2 \bar{R}_3$$

$$= 0.612 \hat{i} + 0.126 \hat{j} - 1.887 \hat{i} - 0.029 \hat{j}$$

$$= -1.275 \hat{i} + 0.097 \hat{j}$$

$$\bar{V}_{G3} \cdot \bar{A}_{G3} = 1.105 \downarrow$$

$$\bar{R}_{G4} = \bar{R}_1 + \bar{R}_3 - 0.2 (\cos \theta_4 \hat{i} + \sin \theta_4 \hat{j}) = \bar{R}_1 + \bar{R}_3 - (0.177 \hat{i} - 0.092 \hat{j})$$

$$\bar{V}_{G4} = \bar{V}_1 + \bar{V}_3 - (0.092 W_4 \hat{i} + 0.177 W_4 \hat{j}) = -0.529 \hat{i} + 0.289 \hat{j}$$

$$\bar{A}_{G4} = \bar{A}_3 - ((0.092 \alpha_4 - 0.177 W_4^2) \hat{i} + (0.177 \alpha_4 + 0.092 W_4) \hat{j}) = -0.543 \hat{i} + 0.891 \hat{j}$$

$$\bar{A}_{G4} \cdot \bar{V}_{G4} = 0.545 \downarrow$$

$$\bar{R}_{GS} = \bar{R}_1 + \bar{R}_5$$

$$\bar{V}_{GS} = \bar{V}_1 + \bar{V}_5 = -0.3897 \hat{i} + 0.5561 \hat{j}$$

$$\bar{A}_{GS} = \bar{A}_1 + \bar{A}_{GS} = \bar{A}_{GS} = -0.8719 \hat{i} + 1.244 \hat{j}$$

$$\bar{V}_{GS} \cdot \bar{A}_{GS} = 1.032 \downarrow$$

$$\bar{R}_{G6} = \bar{R}_1 + \bar{R}_6 + \bar{R}_{66}$$

$$\bar{V}_{G6} = \bar{V}_1 + \bar{V}_6 + \bar{V}_{66} = \bar{V}_6 = -0.412 \hat{i} - 0.813 \hat{j}$$

$$\bar{A}_{G6} = \bar{A}_1 + \bar{A}_6 + \bar{A}_{G6} = \bar{A}_6 = -0.864 \hat{i} - 1.703 \hat{j}$$

$$\bar{V}_{G6} \cdot \bar{A}_{G6} = 1.74 \downarrow$$

Diseño de levas

Objetivo: Calcular las coordenadas del perfil de la leva que produzca un movimiento controlado del oscilador o un mecanismo.

Levas

- Fáciles de diseñar para satisfacer un número grande de movimientos de entradas y salidas.
- Ocupa menos espacio
- La respuesta dinámica es sensible a la exactitud en la manufactura del contorno de la leva.
- Fácil de producir
- Análisis dinámico fácil
- Sujeto a desgaste superficial

Eslabones

- Satisface un número limitado de movimientos de entrada y salida.
- Ocupa más espacio.
- Ligera inexactitud en la manufactura tiene poco efecto en la salida.
- Barato de producir.
- Análisis dinámico difícil y complicado.
- El desgaste en las juntas no es crítico y silencioso en operación.

TERMINOLOGIA LEVAS

Los sistemas leva-seguidor se clasifican de varias maneras

traslación

Rotatorio

Radial

Cilíndrico

Tridimensional

Clasificación de levas por restricciones de movimiento

Critical extreme position (CEP)

Restricción en la posición inicial y final del seguidor, con ninguna restricción en el intervalo de movimiento.

Critical Path Motion (CPM)

Restricción en la trayectoria del movimiento y alguna de sus derivadas, durante el intervalo de movimiento.

Por el tipo de programa de movimiento

rise - fall (RF)
rise - fall - dwell (RFD)

rise - dwell - fall - dwell (RDFD)

Diagrama SV AJ

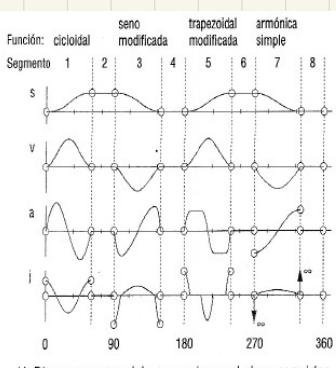
(Posición, Velocidad, Aceleración, Jerk)

Jerk: Tercera derivada = sacudida.

La primera tarea del diseñador de levas, es seleccionar las funciones matemáticas que definen el movimiento del seguidor. Estas funciones generan diagramas s v a j como se muestra en la figura.

Número de segmento	Función utilizada	Ángulo inicial	Ángulo final	Ángulo delta
1	Subida cicloidal	0	60	60
2	Detamiento	60	90	30
3	Bajada seno modificado	90	150	60
4	Detamiento	150	180	30
5	Subida trapezoidal modificada	180	240	60
6	Detamiento	240	270	30
7	Bajada armónica simple	270	330	60
8	Detamiento	330	360	30

a) Especificaciones del programa de leva

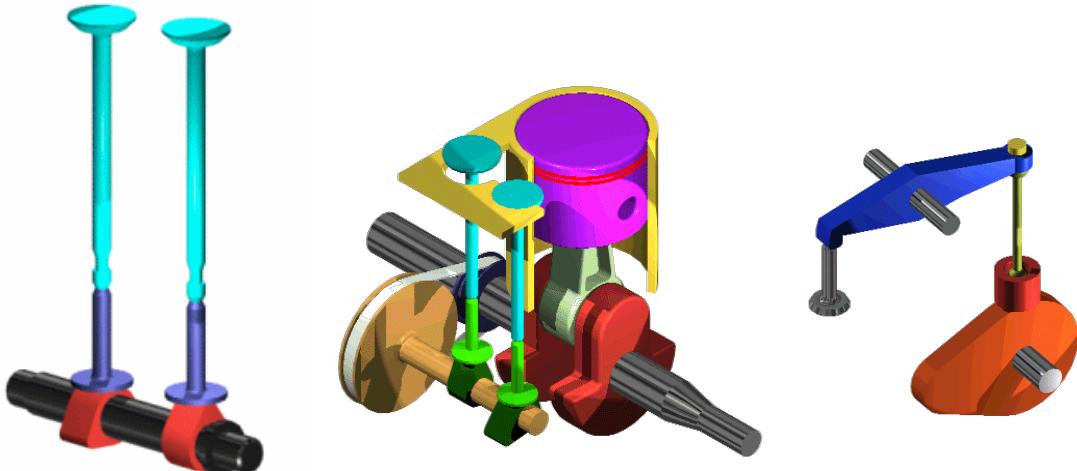


b) Diagramas s v a j de mecanismos de leva-seguidor

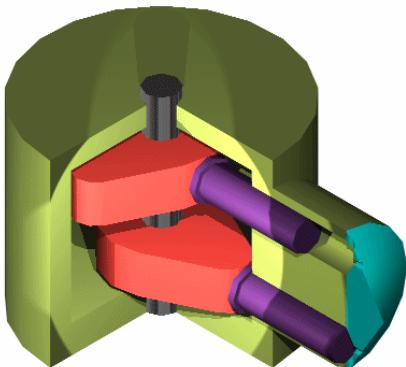
Unidad 4 Diseño de Levas

4.1 Introducción

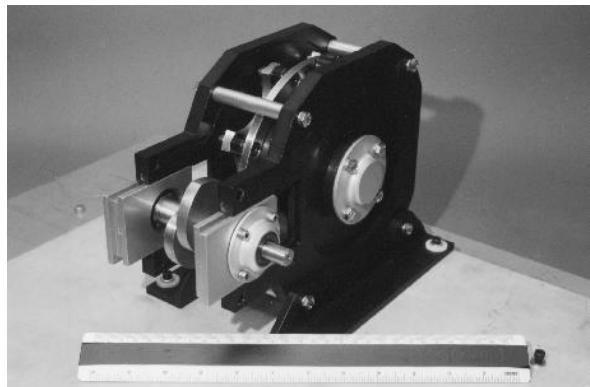
Sistemas *leva–seguidor* son frecuentemente usadas en todo tipo de máquinas.



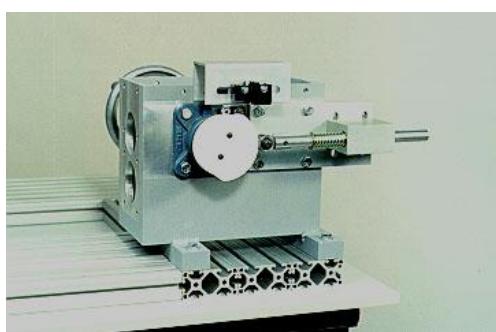
Las válvulas en los motores de los automóviles son abiertas por válvulas.

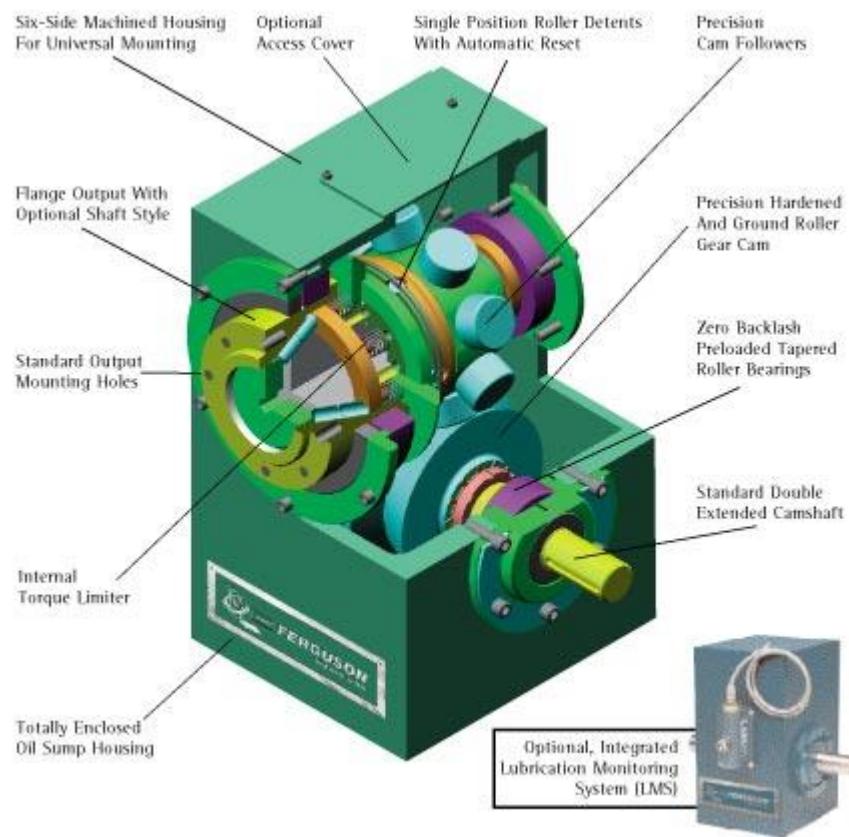


Bomba impulsada por levas



Reductor de velocidad





Comparación entre levas y eslabones

LEVAS	ESLABONES
Fáciles de diseñar para satisfacer un numero grande de movimientos de entradas y salidas.	Satisface un número limitado de movimientos de entrada y salida.
Ocupa menos espacio	Ocupa más espacio
La respuesta dinámica es sensitiva a la exactitud en la manufactura del contorno de la leva.	Ligera inexactitud en la manufactura tiene poco efecto en la salida.
Caro para producir	Barato de producir.
Ánálisis dinámico fácil.	Ánálisis dinámico dificultoso y complicado.
Sujeto a desgaste superficial.	El desgaste en las juntas no es crítico y silencioso en operación.

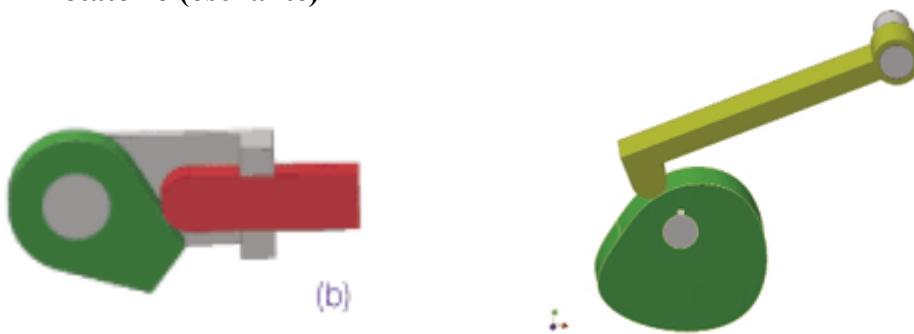
4.2 Terminología de Levas

Los sistemas **leva–seguidor** pueden ser clasificados de varias maneras:

1).- Por el **tipo de movimiento del seguidor:**

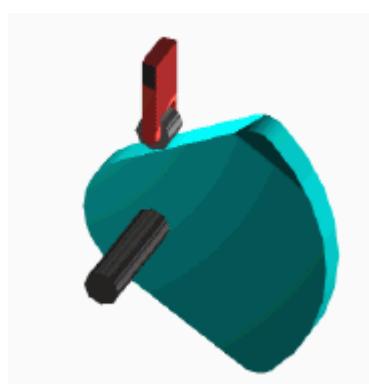
traslación

rotatorio (oscilante)



2).- Por el *tipo de la leva*:

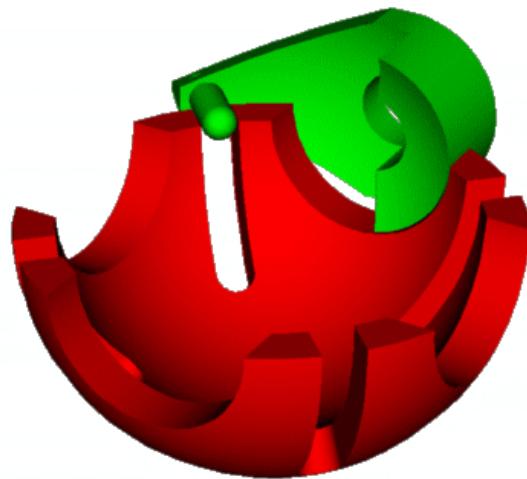
- radial
- cilíndrico
- tridimensional



radial

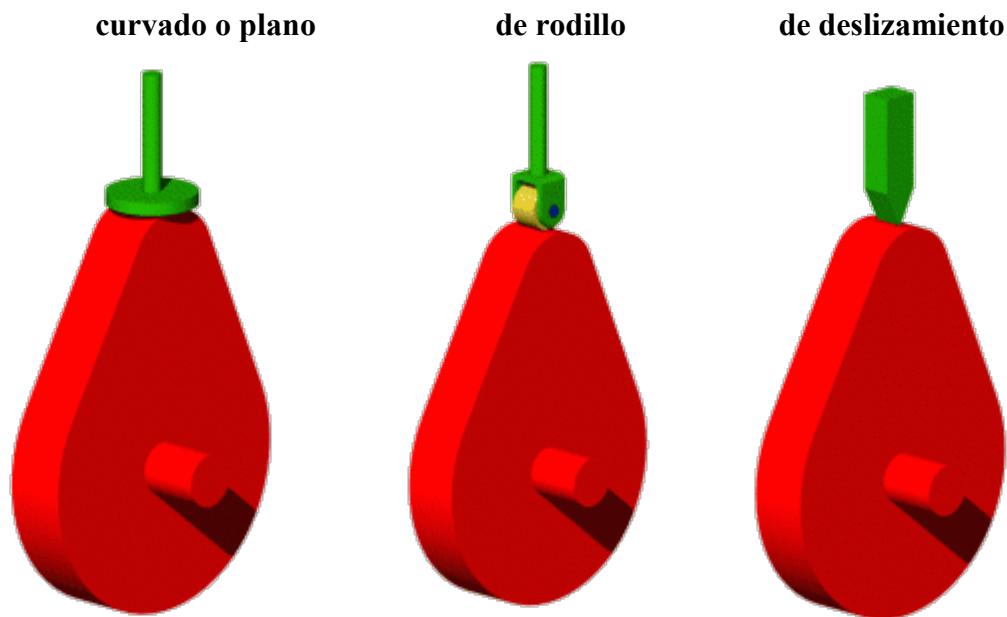


cilíndrico



tridimensional

3).- Por el *tipo de seguidor*:



4).- Por el *tipo de cerradura de la junta*:

- cerrado por fuerza**
- cerrado por forma**



cerrado por fuerza



cerrado por forma

5).- Por el *tipo de restricciones de movimiento:*

Critical Extreme Position (CEP)

Restricción en la posición inicial y final del seguidor, con ninguna restricción en el intervalo de movimiento.

Critical Path Motion (CPM)

Restricción en la trayectoria del movimiento y alguna de sus derivadas, durante el intervalo de movimiento.

4).- Por el *tipo de programa de movimiento:*

rise – fall (RF)

rise – fall – dwell (RFD)

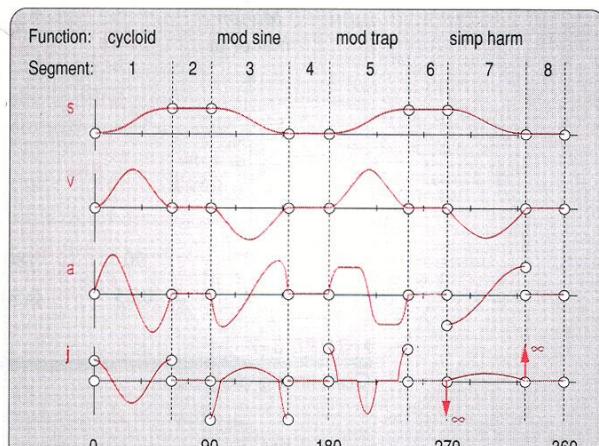
rise –dwell – fall – dwell (RDFD)

4.3 Diagramas S V A J

La primera tarea del diseñador de levas, es seleccionar las funciones matemáticas que definen el movimiento del seguidor. Estas funciones generan diagramas *s v a j* como se muestra en la figura:

Segment Number	Function Used	Start Angle	End Angle	Delta Angle
1	Cycloid rise	0	60	60
2	Dwell	60	90	30
3	ModSine fall	90	150	60
4	Dwell	150	180	30
5	ModTrap rise	180	240	60
6	Dwell	240	270	30
7	SimpHarm fall	270	330	60
8	Dwell	330	360	30

(a) Cam program specifications



(b) Plots of cam-follower's *s v a j* diagrams

FIGURE 8-6

Cycloidal, modified sine, modified trapezoid, and simple harmonic motion functions on a four-dwell cam

La gráfica está formada por funciones de:

- 1).- posición – *s*
- 2).- velocidad – *v*
- 3).- aceleración – *a*
- 4).- jerk (trepidación) – *j*

Todas en función del ángulo de rotación de la leva θ (o también respecto al tiempo, tal que $\theta = \omega t$, donde ω es velocidad del eje de la leva).

Las funciones que no son *detenciones* (*dwells*), deben ser elegidas sobre sus características de *velocidad* , *aceleración* y *jerk* y las relaciones entre los puntos de unión con otros segmentos.

4.4 Eligiendo Funciones S V A J

Gráficas como la anterior, son especificaciones para levas mostradas en forma de un *diagrama temporizador*, el cual muestra eventos en un ciclo de la máquina (una revolución del eje maestro).

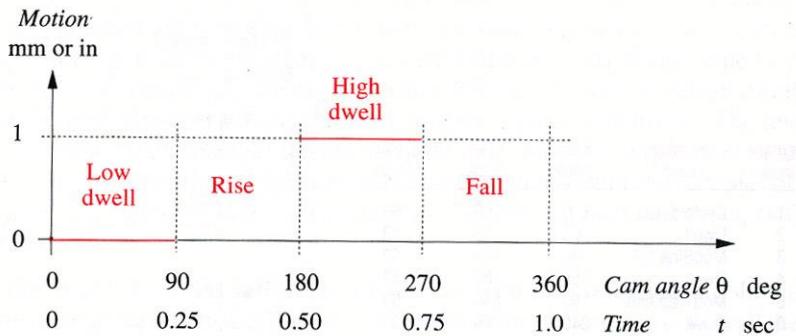


FIGURE 8-7

Cam timing diagram

Diferentes *funciones estandarizadas* pueden ser usadas para conectar las partes del diagrama desplazamiento. Estas funciones de desplazamiento determinan la forma de la leva. Algunas son:

- 1.- Movimiento Uniforme,
- 2.- Movimiento Armónico Simple,
- 3.- Movimiento Cicloidal,
- 4.- Funciones Combinadas
 Aceleración Trapezoidal Modificada
 Aceleración Sinosoidal Modificada
- 5.- Funciones Polinomiales

1.- Movimiento Uniforme

Este tipo de movimiento une los puntos del diagrama de la figura 7, mediante una línea recta (polinomio de primer grado).

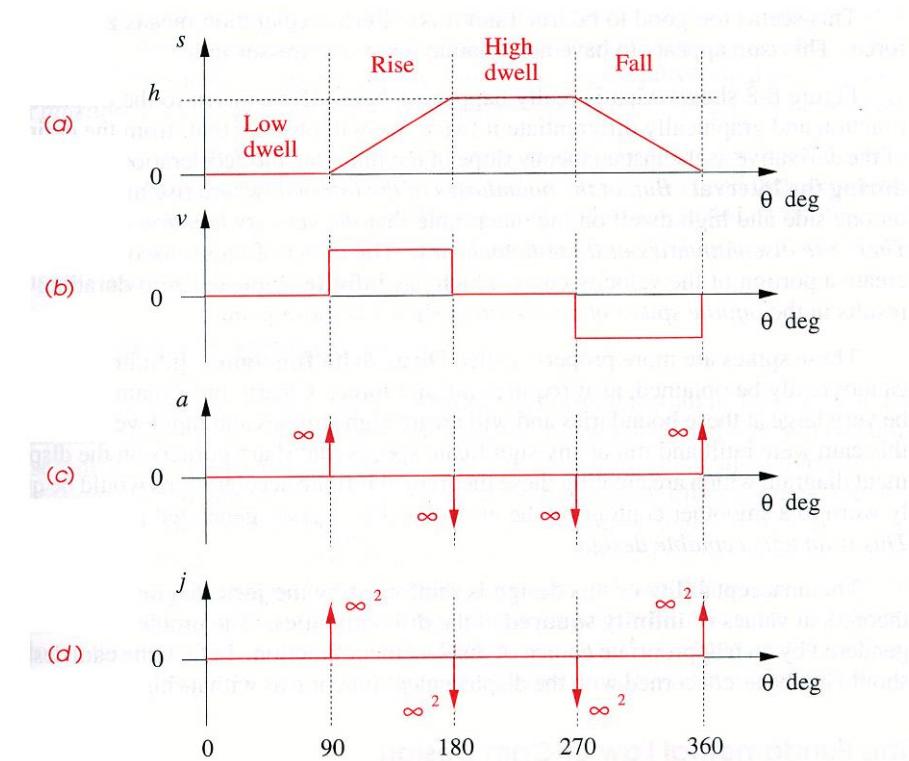


FIGURE 8-8

The s v a j diagrams of a "bad" cam design

Para el segmento de elevación:

$$y = m x + b \quad (1)$$

$$s = m \theta \quad (2)$$

derivando con respecto θ , da la velocidad durante la elevación :

$$v = m = \text{constante} \quad (3)$$

derivando nuevamente respecto θ , da la aceleración durante la elevación :

$$a = 0 \quad (4)$$

Puntos importantes:

- 1.- La aceleración es **cero durante el intervalo**. Pero en las fronteras del intervalo, la **velocidad es discontinua**.
- 2.- Las **discontinuidades** crean una porción de la curva de velocidad con **pendiente infinita** y cero duración. Esto resulta en **picos infinitos de aceleración**.
- 3.- Las fuerzas dinámicas serán muy grandes en estas fronteras, creando esfuerzos muy altos y un rápido desgaste.

- 4.- Este diseño con **movimiento uniforme** es **INACEPTABLE**. Al usar un polinomio de primer grado como función de desplazamiento, las discontinuidades aparecerán pronto en sus derivadas.

Ley Fundamental del Diseño de Levas

Cualquier leva diseñada para operar a velocidades bajas debe ser diseñada con la siguiente restricción:

La función de la leva debe ser continua a través de la primera y segunda derivada del desplazamiento en todo el intervalo (360°). (Velocidad y Aceleración).

COROLARIO

La función jerk debe ser finita en todo el intervalo (360°)

2.- Movimiento Armónico Simple (SHM)

Las funciones armónicas tienen la propiedad de ser **continuas** siempre que son derivadas. Las ecuaciones de **movimiento armónico simple** son:

Elevación	Retorno
$s = \frac{h}{2} \left[1 - \cos\left(\pi \frac{\theta}{\beta}\right) \right]$ $v = \frac{\pi h}{\beta} \frac{1}{2} \sin\left(\pi \frac{\theta}{\beta}\right)$ $a = -\frac{\pi^2 h}{\beta^2} \frac{1}{2} \cos\left(\pi \frac{\theta}{\beta}\right)$ $j = -\frac{\pi^3 h}{\beta^3} \frac{1}{2} \sin\left(\pi \frac{\theta}{\beta}\right)$	$s = \frac{h}{2} \left[1 + \cos\left(\pi \frac{\theta}{\beta}\right) \right]$ $v = -\frac{\pi h}{\beta} \frac{1}{2} \sin\left(\pi \frac{\theta}{\beta}\right)$ $a = -\frac{\pi^2 h}{\beta^2} \frac{1}{2} \cos\left(\pi \frac{\theta}{\beta}\right)$ $j = -\frac{\pi^3 h}{\beta^3} \frac{1}{2} \sin\left(\pi \frac{\theta}{\beta}\right)$

Donde: h – elevación total, θ – es el ángulo del eje de la leva, y β – es el ángulo total del intervalo de elevación.

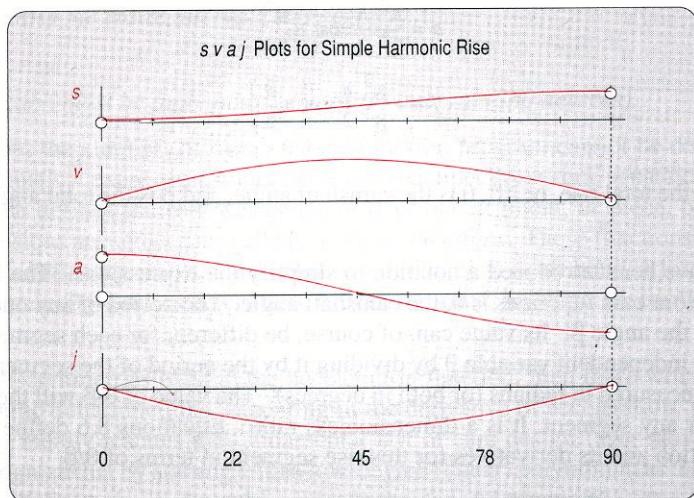


FIGURE 8-9

Simple harmonic motion with dwells has discontinuous acceleration

Puntos importantes:

- 1.- La figura 8-9 muestra una función armónica simple de **elevación**. En nuestro ejemplo va unida a dos detenciones (ver figura 8-7 o figura 8-8). **Las detenciones siempre tendrán velocidad y aceleración cero en todo el intervalo en que actúan.**
- 2.- La función **velocidad es continua**, e iguala los valores de velocidad de las detenciones en los extremos.
- 3.- La función **aceleración es discontinua**, y NO iguala los valores de aceleración de las detenciones en los extremos.
- 4.- Esto **viola la ley fundamental del diseño de levas**.
- 5.- Este diseño con **movimiento armónico simple** cuando es usado con **detenciones es INACEPTABLE.**

3.- Movimiento Cicloidal

Los dos malos ejemplos anteriores del diseño de una leva se corrigen empezando con la aceleración. **La función de aceleración y en menor grado la función jerk, debe ser la atención principal del diseñador.**

La familia de funciones armónicas mantiene sus ventajas, las cuales las hacen atractivas para estas aplicaciones. La figura 8-12 muestra una senoidal aplicada como función de aceleración.

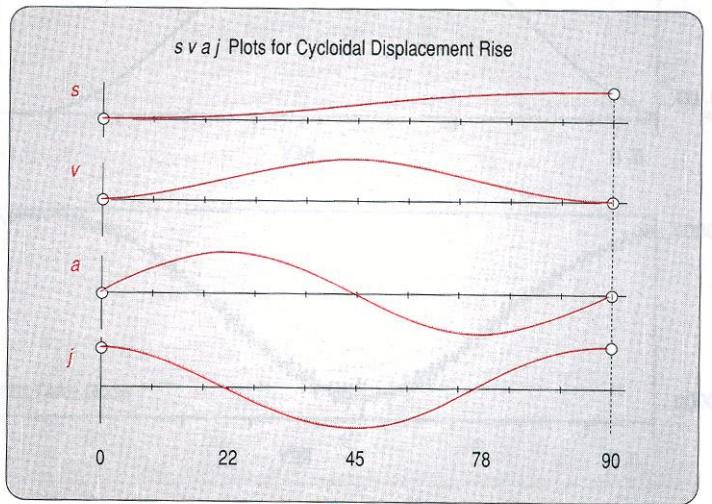


FIGURE 8-12

Sinusoidal acceleration gives cycloidal displacement

Este iguala la restricción de cero aceleración en las uniones con las detenciones. Las ecuaciones de **movimiento cicloidal** son:

Elevación	Retorno
$s = h \left[\frac{\theta'}{\beta} - \frac{1}{2\pi} \sin \left(2\pi \frac{\theta'}{\beta} \right) \right]$	$s = h \left[1 - \frac{\theta'}{\beta} + \frac{1}{2\pi} \sin \left(2\pi \frac{\theta'}{\beta} \right) \right]$
$v = \frac{h}{\beta} \left[1 - \cos \left(2\pi \frac{\theta'}{\beta} \right) \right]$	$v = -\frac{h}{\beta} \left[1 - \cos \left(2\pi \frac{\theta'}{\beta} \right) \right]$
$a = 2\pi \frac{h}{\beta^2} \sin \left(2\pi \frac{\theta'}{\beta} \right)$	$a = -2\pi \frac{h}{\beta^2} \sin \left(2\pi \frac{\theta'}{\beta} \right)$
$j = 4\pi^2 \frac{h}{\beta^3} \cos \left(2\pi \frac{\theta'}{\beta} \right)$	$j = -4\pi^2 \frac{h}{\beta^3} \cos \left(2\pi \frac{\theta'}{\beta} \right)$

β =Rango en el que se da la elevación.

θ' =Se utiliza por el hecho de que la gráfica se "recone" => $\theta' = \theta - \text{<inicio de rise o fall>}$

Las ecuaciones anteriores tienen unidades de: **longitud, longitud / rad, longitud / rad², longitud / rad³**, respectivamente. Para convertir estas ecuaciones respecto al **tiempo**, multiplicamos la velocidad **v** por la velocidad angular **ω** (**rad/s**) del eje de la leva, la aceleración **a** por **ω^2** (**rad/s²**), el jerk **j** por **ω^3** (**rad/s³**).

Puntos importantes:

- 1.- La funciones **velocidad y aceleración son continuas**, e igualan los valores de **cero velocidad y aceleración de las detenciones en los extremos**.
- 2.- La función **jerk es discontinua** en las fronteras, pero su magnitud es **finita** y esto es **aceptable**.

3.- La única desventaja de esta función es que tiene picos de velocidad y aceleración relativamente grandes en comparación con otras funciones usadas para unirse con detenciones.

4.- Este diseño con **movimiento cicloidal** cuando es usado con **detenciones es ACEPTABLE**.

4.- Funciones Combinadas (controlar la fuerza y energía cinética)

Las **fuerza dinámica** es proporcional a la **aceleración**. Generalmente queremos **minimizar las fuerzas dinámicas**, y de esta manera buscamos **minimizar la magnitud de la función aceleración, además de mantenerlo continuo**.

La **energía cinética** es proporcional a la **velocidad al cuadrado**. Igualmente queremos **minimizar la energía cinética almacenada**, y también buscamos **minimizar la magnitud de la función velocidad**.

Aceleración Constante

Para minimizar la magnitud de la función aceleración, la función que mejor satisface esta restricción es la **onda cuadrada** (figura 8-13), también llamada **función de aceleración constante**.

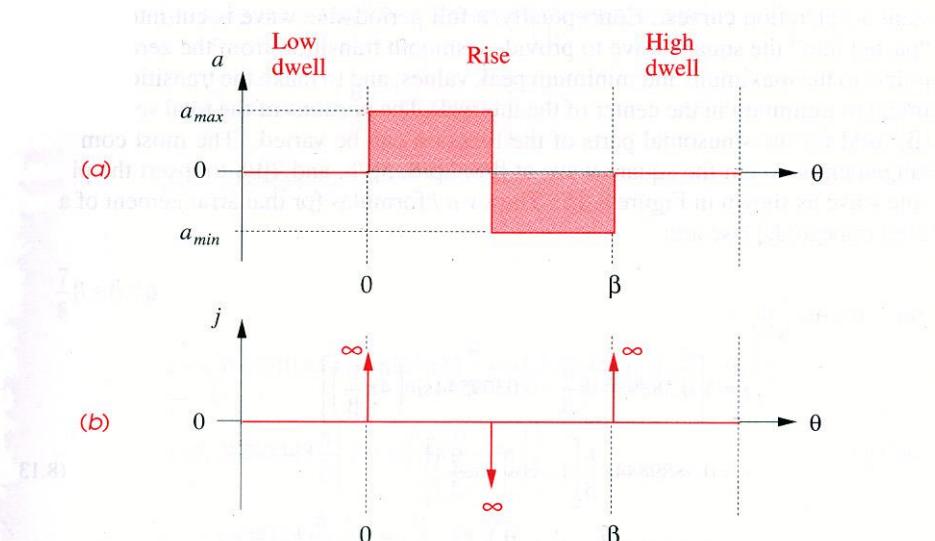


FIGURE 8-13

Constant acceleration gives infinite jerk

Desventajas

1.- Esta función no es continua.

- Tiene discontinuidades en el principio, en medio y al final de intervalo.
- Es inaceptable para una función de aceleración de una leva.

Aceleración Trapezoidal

Las discontinuidades de la onda **cuadrada** pueden ser removidas, simplemente rebajando las esquinas y creando la función de **aceleración trapezoidal** (figura 8-14a).

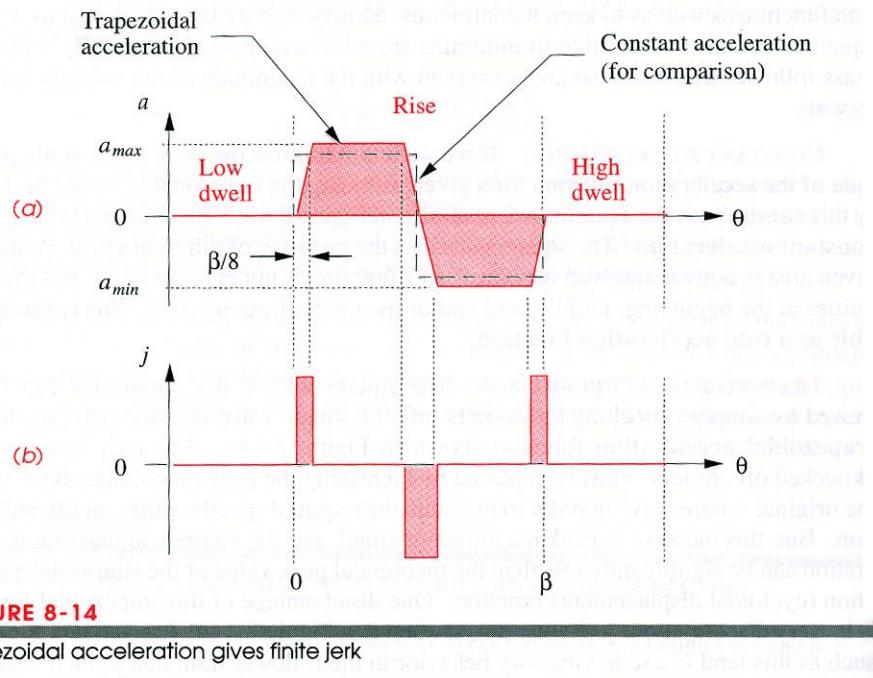


FIGURE 8-14

Trapezoidal acceleration gives finite jerk

Desventaja

- La función **jerk** es muy discontinua (figura 8-14b).
- Funciones **jerks** como estas, producen vibraciones en los seguidores debido a su alto contenido armónico.

Aceleración Trapezoidal Modificada

Una mejora puede ser hecha a la función de **aceleración trapezoidal**, sustituyendo partes de ondas seno en las pendientes de los lados. Esta función es llamada **aceleración trapezoidal modificada**.

Conceptualmente, una onda seno de periodo completo es cortada en cuatro partes y pegada a una onda cuadrada, para lograr una transición suave desde los ceros en los puntos extremos, hasta los valores picos máximos y mínimos en el centro del intervalo.

El método más común es cortar la onda cuadrada en $\beta/8$, $3\beta/8$, $5\beta/8$ y $7\beta/8$, para insertar las porciones de la onda seno (figura 8-15).

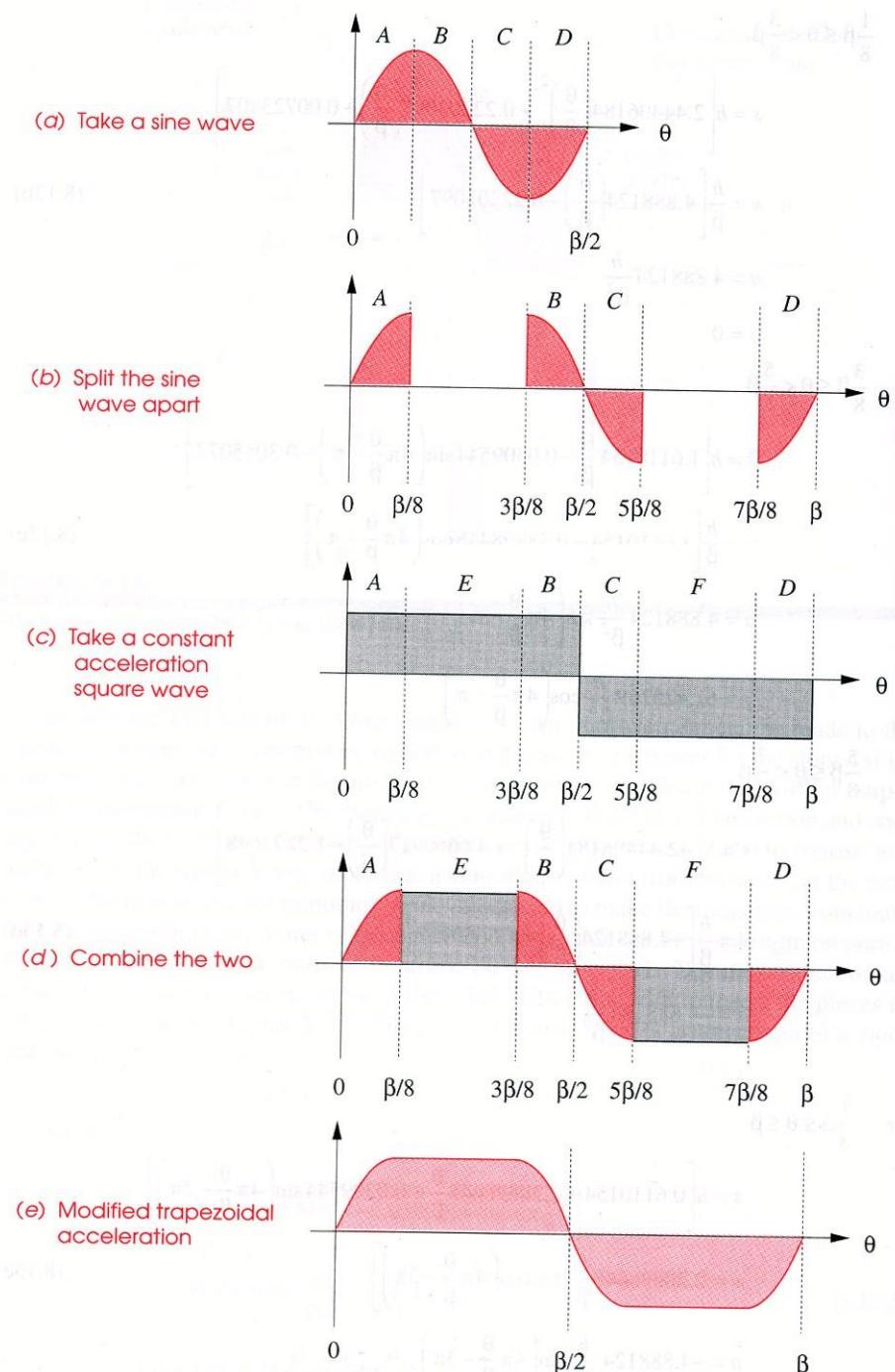


FIGURE 8-15

Creating the modified trapezoidal acceleration function

Las fórmulas para *elevación del trapezoide modificado* son:

$0 \leq \theta < \beta/8$	$s = h \left[0.38898448 \frac{\theta}{\beta} - 0.0309544 \sin\left(4\pi \frac{\theta}{\beta}\right) \right]$
---------------------------	---

	$v = 0.38898448 \frac{h}{\beta} \left[1 - \cos\left(4\pi \frac{\theta}{\beta}\right) \right]$ $a = 4.888124 \frac{h}{\beta^2} \sin\left(4\pi \frac{\theta}{\beta}\right)$ $j = 61.425769 \frac{h}{\beta^3} \cos\left(4\pi \frac{\theta}{\beta}\right)$	(9.1)
$\beta/8 \leq \theta < 3\beta/8$	$s = h \left[2.44406184 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 - 0.22203097 \left(\frac{\theta}{\beta} \right) + 0.00723407 \right]$ $v = \frac{h}{\beta} \left[4.888124 \left(\frac{\theta}{\beta} \right) - 0.22203097 \right]$ $a = 4.888124 \frac{h}{\beta^2}$ $j = 0$	(9.2)
$3\beta/8 \leq \theta < 5\beta/8$	$s = h \left[1.6110154 \frac{\theta}{\beta} - 0.0309544 \sin\left(4\pi \frac{\theta}{\beta} - \pi\right) - 0.3055077 \right]$ $v = \frac{h}{\beta} \left[1.6110154 - 0.38898448 \cos\left(4\pi \frac{\theta}{\beta} - \pi\right) \right]$ $a = 4.888124 \frac{h}{\beta^2} \sin\left(4\pi \frac{\theta}{\beta} - \pi\right)$ $j = 61.425769 \frac{h}{\beta^3} \cos\left(4\pi \frac{\theta}{\beta} - \pi\right)$	(9.3)
$5\beta/8 \leq \theta < 7\beta/8$	$s = h \left[-2.44406184 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 + 4.6660917 \left(\frac{\theta}{\beta} \right) - 1.2292648 \right]$ $v = \frac{h}{\beta} \left[-4.888124 \left(\frac{\theta}{\beta} \right) + 4.6660917 \right]$ $a = -4.888124 \frac{h}{\beta^2}$ $j = 0$	(9.4)
$7\beta/8 \leq \theta < \beta$	$s = h \left[0.6110154 + 0.38898448 \frac{\theta}{\beta} + 0.0309544 \sin\left(4\pi \frac{\theta}{\beta} - 3\pi\right) \right]$	

	$v = 0.38898448 \frac{h}{\beta} \left[1 + \cos\left(4\pi \frac{\theta}{\beta} - 3\pi\right) \right]$ $a = -4.888124 \frac{h}{\beta^2} \sin\left(4\pi \frac{\theta}{\beta} - 3\pi\right)$ $j = -61.425769 \frac{h}{\beta^3} \cos\left(4\pi \frac{\theta}{\beta} - 3\pi\right)$	(9.5)
--	--	-------

Puntos importantes:

- 1.- Pico de aceleración teórico relativamente bajo.
- 2.- Transición suave y rápida en el principio y final del intervalo.
- 3.- La función **trapezoidal modificada** es un programa popular y es frecuentemente usada para levas con doble detención.

Las curvas son mostradas en la figura 8-16.

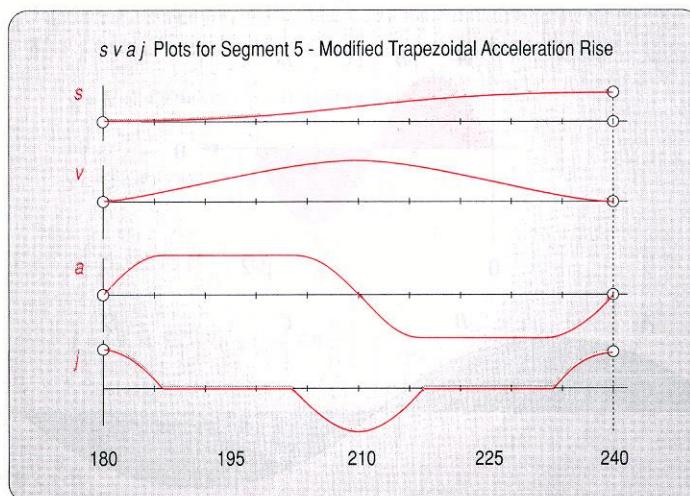


FIGURE 8-16

Modified trapezoidal acceleration

Aceleración Senoidal Modificada

La figura 8-17 muestra como la curva de aceleración de seno modificada es construida de partes de dos funciones seno, una de frecuencia superior que la otra.

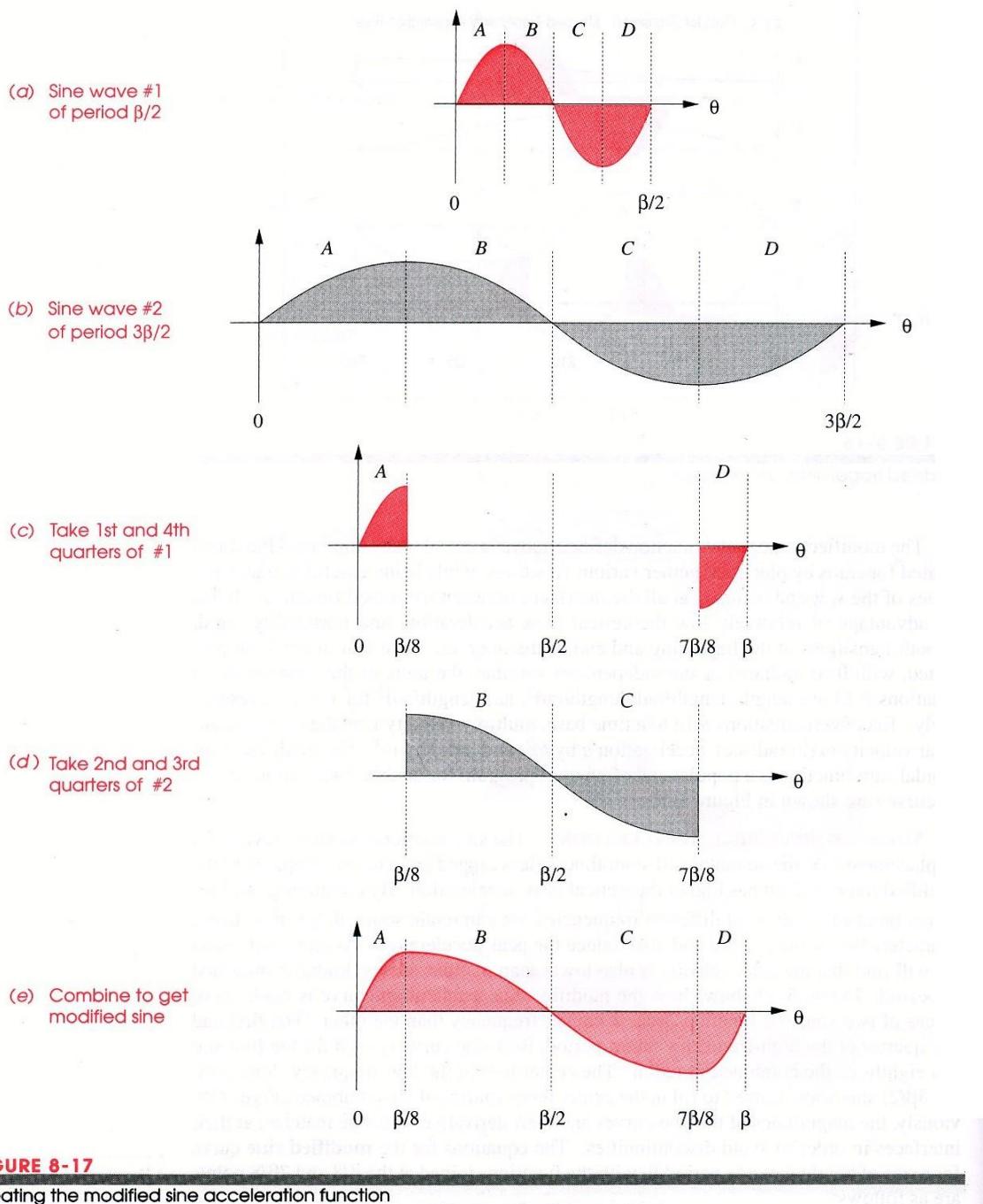


FIGURE 8-17

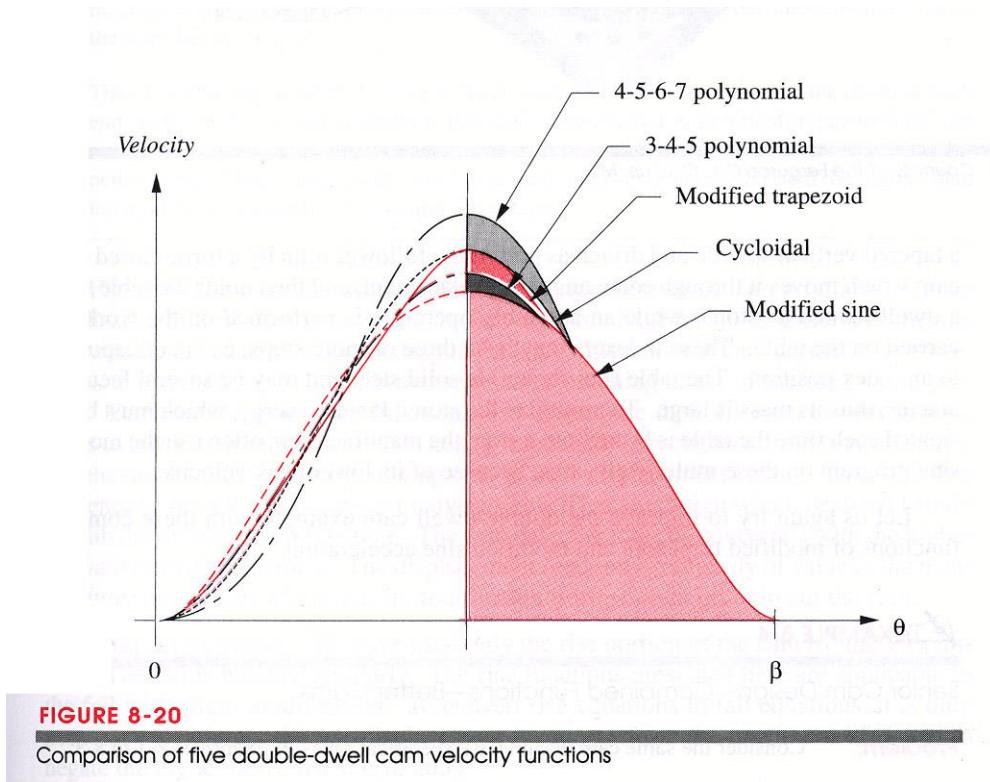
Creating the modified sine acceleration function

Las fórmulas para *elevación del seno modificado* son:

$0 \leq \theta < \beta/8$	$s = h \left[0.43990085 \frac{\theta}{\beta} - 0.0350062 \sin \left(4\pi \frac{\theta}{\beta} \right) \right]$ $v = 0.43990085 \frac{h}{\beta} \left[1 - \cos \left(4\pi \frac{\theta}{\beta} \right) \right]$ (10.1)
---------------------------	--

	$a = 5.5279571 \frac{h}{\beta^2} \sin\left(4\pi \frac{\theta}{\beta}\right)$ $j = 69.4663577 \frac{h}{\beta^3} \cos\left(4\pi \frac{\theta}{\beta}\right)$
$\beta/8 \leq \theta < 7\beta/8$	$s = h \left[0.28004957 + 0.43990085 \frac{\theta}{\beta} - 0.31505577 \cos\left(\frac{4\pi}{3} \frac{\theta}{\beta} - \frac{\pi}{6}\right) \right]$ $v = 0.43990085 \frac{h}{\beta} \left[1 + 3 \sin\left(\frac{4\pi}{3} \frac{\theta}{\beta} - \frac{\pi}{6}\right) \right] \quad (10.2)$ $a = 5.5279571 \frac{h}{\beta^2} \cos\left(\frac{4\pi}{3} \frac{\theta}{\beta} - \frac{\pi}{6}\right)$ $j = -23.1553 \frac{h}{\beta^2} \sin\left(\frac{4\pi}{3} \frac{\theta}{\beta} - \frac{\pi}{6}\right)$
$7\beta/8 \leq \theta < \beta$	$s = h \left[0.56009915 + 0.43990085 \frac{\theta}{\beta} - 0.0350062 \sin\left[2\pi\left(2 \frac{\theta}{\beta} - 1\right)\right] \right]$ $v = 0.43990085 \frac{h}{\beta} \left[1 - \cos\left[2\pi\left(2 \frac{\theta}{\beta} - 1\right)\right] \right] \quad (10.3)$ $a = 5.5279571 \frac{h}{\beta^2} \sin\left[2\pi\left(2 \frac{\theta}{\beta} - 1\right)\right]$ $j = 69.4663577 \frac{h}{\beta^3} \cos\left[2\pi\left(2 \frac{\theta}{\beta} - 1\right)\right]$

La figura 8-20 muestra una comparación de las formas y las magnitudes relativas de cinco programas de velocidad de levas incluyendo cicloidal, trapezoide modificado, seno modificado.



Puntos importantes:

- 1.- El pico de velocidades de las funciones cicloidal y trapezoide modificado son las mismas, tal que almacenarán el mismo pico de energía cinética en un tren de seguidores.
- 2.- El pico de velocidad del seno modificado es el más bajo de las cinco funciones mostradas.
- 3.- Esta es la ventaja principal de la curva de aceleración de seno modificado y la razón por la cual es elegida para aplicaciones en las cuales la masa del seguidor es muy grande.

Un ejemplo de tal aplicación es mostrada en la figura 8-21 el cual es una mesa de indexado (mesa para suministro de piezas en forma intermitente) usada para líneas automatizadas de ensamble. Para minimizar la energía cinética almacenada, la cual debe ser disipada cada vez que la mesa es detenida, los manufactureros frecuentemente usan el programa de **seno modificado** sobre esta levas de múltiples detenciones, a causa de su bajo pico de velocidad.



FIGURA 8-21

Funciones de Retorno

Para convertir ecuaciones de elevación en retorno, solamente hay que restar a la elevación máxima h la función de desplazamiento de elevación s , y poner signo negativo a las derivadas superiores v, a, j . Ejemplo para formar las ecuaciones de retorno cicloidal es:

Elevación	Retorno
$s = h \left[\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi} \sin \left(2\pi \frac{\theta}{\beta} \right) \right]$ $v = \frac{h}{\beta} \left[1 - \cos \left(2\pi \frac{\theta}{\beta} \right) \right] \quad (7)$ $a = 2\pi \frac{h}{\beta^2} \sin \left(2\pi \frac{\theta}{\beta} \right)$ $j = 4\pi^2 \frac{h}{\beta^3} \cos \left(2\pi \frac{\theta}{\beta} \right)$	$s' = h - s$ $v' = -v$ $a' = -a$ $j' = -j$

Se puede verificar que estas constituyen las ecuaciones (8) que se buscan para el retorno.

REGLA

5.- Funciones Polinomiales

Las **funciones polinomiales** son de las más versátiles que pueden ser usadas para el diseño de levas. Su forma general es:

$$s = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + C_5 x^5 + C_6 x^6 + \dots + C_n x^n \quad (11)$$

donde:

s .- desplazamiento del seguidor

x .- variable independiente (puede ser reemplazado por θ/β o el tiempo t)

C_n .- incógnitas a determinar mediante condiciones de frontera

Aplicaciones de Polinomios para Detenciones Dobles

Polinomio 3 - 4 - 5

- 1.- Para satisfacer la **ley fundamental para el diseño de levas**, los valores de las funciones de subida y de bajada en sus fronteras con los detenimientos deben corresponder sin discontinuidades, como mínimo en s, v, a .
- 2.- La figura 8-25 muestra los diagramas s, v, a con datos conocidos. Las detenciones son los únicos segmentos definidos.

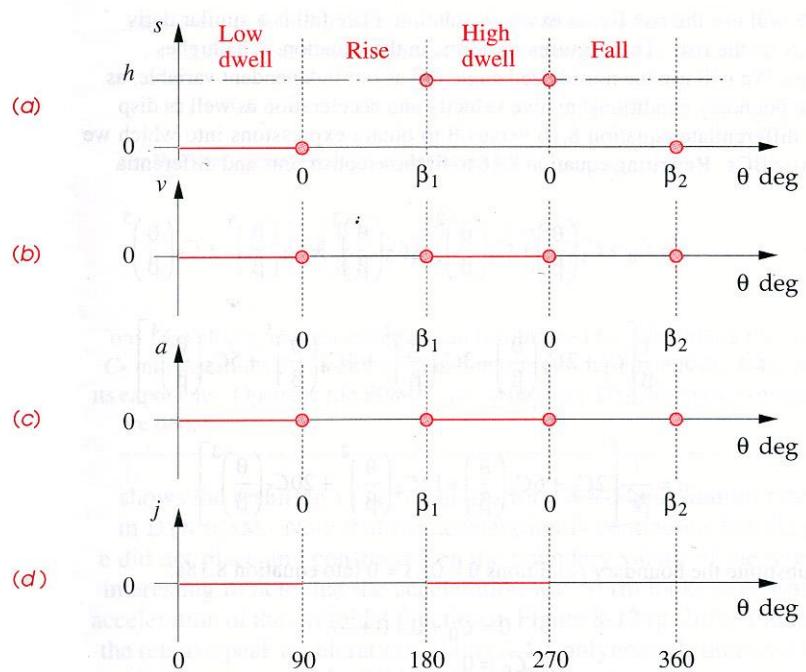


FIGURE 8-25

Minimum boundary conditions for the double-dwell case

3.- Los requerimientos para la continuidad a través de la aceleración define un mínimo de **6 condiciones de frontera** para la elevación y **6 más** para la bajada. Esta condiciones se muestran como círculos.

Elevación.

$$\text{Cuando } \theta = 0 \quad \begin{cases} s = 0 \\ v = 0 \\ a = 0 \end{cases} \quad \theta = \beta_1 \quad \begin{cases} s = h \\ v = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

Retorno

$$\text{Cuando } \theta = 0 \quad \begin{cases} s = h \\ v = 0 \\ a = 0 \end{cases} \quad \theta = \beta_2 \quad \begin{cases} s = 0 \\ v = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

4.- Solución para la elevación.

- a).- Tenemos 6 condiciones de frontera
- b).- Requerimos 6 términos en la ecuación
- c).- Usando el ángulo normalizado θ/β como término independiente
- d).- Como tenemos condiciones de velocidad y aceleración, derivamos (11) respecto a θ .

Las ecuaciones son:

$$s = C_0 + C_1 \left(\frac{\theta}{\beta} \right) + C_2 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 + C_3 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 + C_4 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 + C_5 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^5 \quad (11)$$

$$v = \frac{1}{\beta} \left[C_1 + 2C_2 \left(\frac{\theta}{\beta} \right) + 3C_3 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 + 4C_4 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 + 5C_5 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 \right] \quad (12)$$

$$a = \frac{1}{\beta^2} \left[2C_2 + 6C_3 \left(\frac{\theta}{\beta} \right) + 12C_4 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 + 20C_5 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 \right] \quad (13)$$

5.- Sustituimos las condiciones de frontera para $\theta = 0$ ($s = 0, v = 0, a = 0$) en (11), (12), (13).

$$\begin{aligned} \theta = C_0 &\Rightarrow C_0 = 0 \\ \theta = \frac{1}{\beta} C_1 &\Rightarrow C_1 = 0 \\ \theta = \frac{1}{\beta^2} 2C_2 &\Rightarrow C_2 = 0 \end{aligned}$$

6.- Sustituimos para $\theta = \beta$ ($s = h, v = 0, a = 0$) en (11), (12), (13).

$$h = C_3 + C_4 + C_5$$

$$\theta = \frac{1}{\beta} [3C_3 + 4C_4 + 5C_5]$$

$$\theta = \frac{1}{\beta^2} [6C_3 + 12C_4 + 20C_5]$$

resolviendo:

$$C_3 = 10 \text{ h} \quad C_4 = -15 \text{ h} \quad C_5 = 6 \text{ h}$$

7.- La ecuación de desplazamiento es finalmente:

$$s = h \left[10 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 - 15 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 + 6 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^5 \right]$$

$$v = \frac{h}{\beta} \left[30 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 - 60 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 + 30 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 \right]$$

$$a = \frac{h}{\beta^2} \left[60 \left(\frac{\theta}{\beta} \right) - 180 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 + 120 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 \right]$$

(14)

La figura 8-26 muestra los diagramas s , v , a , j para la elevación polinomial.

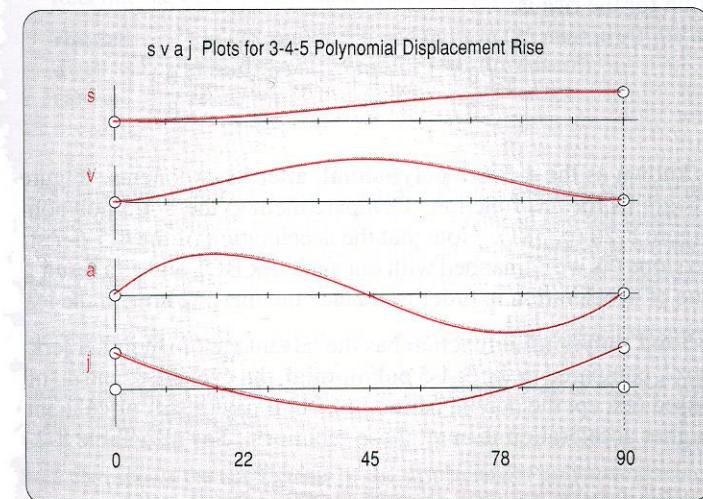


FIGURE 8-26

3-4-5 polynomial rise. Its acceleration is very similar to the sinusoid of cycloidal motion

Note que la **aceleración es continua**, pero el **jerk no lo es**, por que no pusimos restricciones de condiciones de frontera para este.

Polinomio 4 - 5 - 6 - 7

Las ecuaciones con restricciones de valor cero en los extremos de la elevación para la **función jerk**, tienen **8 condiciones de frontera** y produce un polinomio de séptimo grado. El procedimiento es parecido a lo anterior, obteniéndose:

$$s = h \left[35 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 - 84 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^5 + 70 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^6 - 20 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^7 \right] \quad (15)$$

La figura 8-27 muestra los diagramas s, v, a, j para la elevación polinomial.

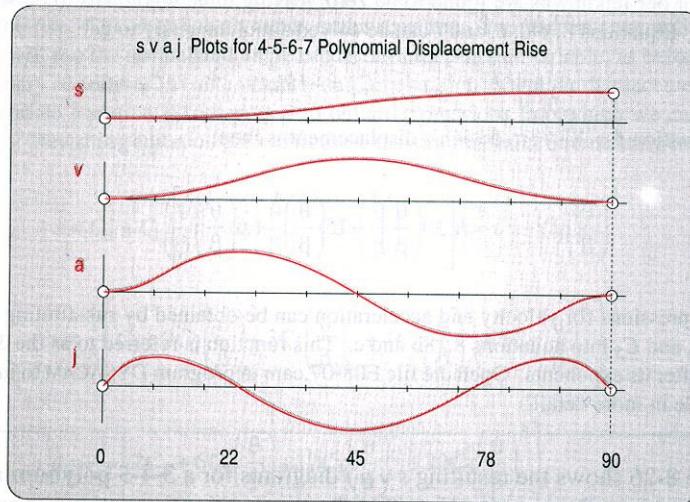


FIGURE 8-27

4-5-6-7 polynomial rise. Its jerk is piecewise continuous with the dwells

Note que el **jerk** es suave para un mejor control de la vibración, pero paga un alto precio al incrementar su aceleración.

Conclusión:

Las funciones polinomiales son la aproximación más versátil para cualquier problema de diseño de levas.

4.5. Dimensionamiento de la Leva Ángulo de Presión y Radio de Curvatura

Una vez que las funciones s , v , a , j han sido definidas, el siguiente paso es dimensionar la leva. Existen dos factores mayores, los cuales afectan el tamaño de la leva:

- 1.- *El ángulo de presión*
- 2.- *Y el radio de curvatura.*

Ambos implican el *radio del círculo base* en la leva (R_b) cuando se usan seguidores de *cara plana*, o bien el *radio del círculo primo* en la leva (R_p) cuando se usan seguidores de *rodillos o curvos*. Los centros de los círculos base y primo se hallan en el centro de rotación de la leva.

El *círculo base* se define como *el círculo más pequeño que puede ser dibujado tangente a la superficie física de la leva* (figura 8-39). Todas las levas radiales tendrán un círculo base, sin importar el tipo de seguidor usado.

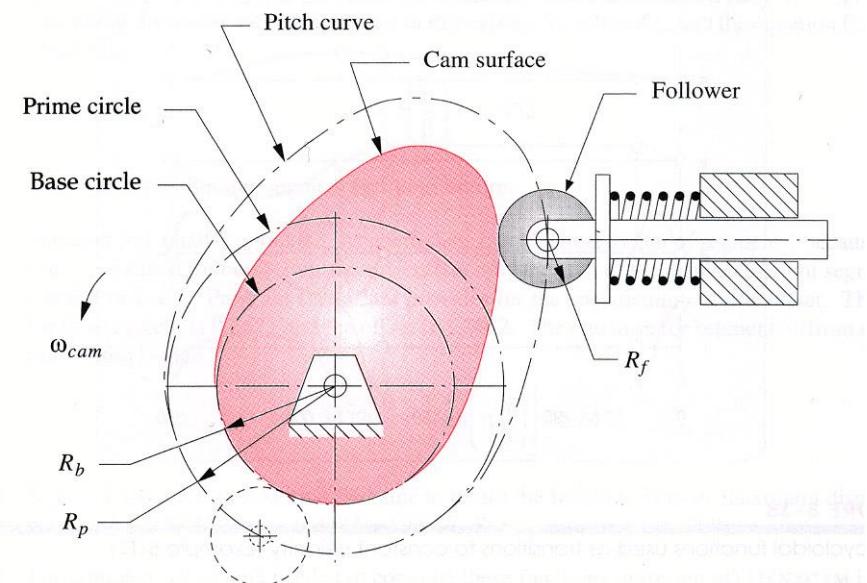


FIGURE 8-39 Diagram illustrating the base circle, prime circle, and pitch curve of a radial cam with roller follower

Base circle R_b , prime circle R_p , and pitch curve of a radial cam with roller follower

El círculo primo es solamente aplicable a las levas con seguidores de rodillos y se mide hasta el centro del seguidor.

El *círculo primo* se define como *el círculo más pequeño que puede ser dibujado tangente al lugar geométrico de la línea central del seguidor* (figura 8-39).

El *lugar geométrico de la línea central del seguidor* es llamado la *curva de paso* (*pitch curve*).

Las levas con seguidores de rodillos, son definidos para la manufactura con respecto a la curva de paso, más que respecto a la superficie de la leva.

Las levas con seguidores de cara plana, son definidos para la manufactura con respecto a la superficie de la leva, ya que no hay curva de paso.

Ángulo de Presión – Seguidores de Rodillos

El **ángulo de presión** es definido como lo muestra la figura 8-40. Una fuerza puede solamente ser transmitida de la leva al seguidor o viceversa a lo largo del **eje de transmisión** el cual es perpendicular al **eje de deslizamiento**, o tangente común.

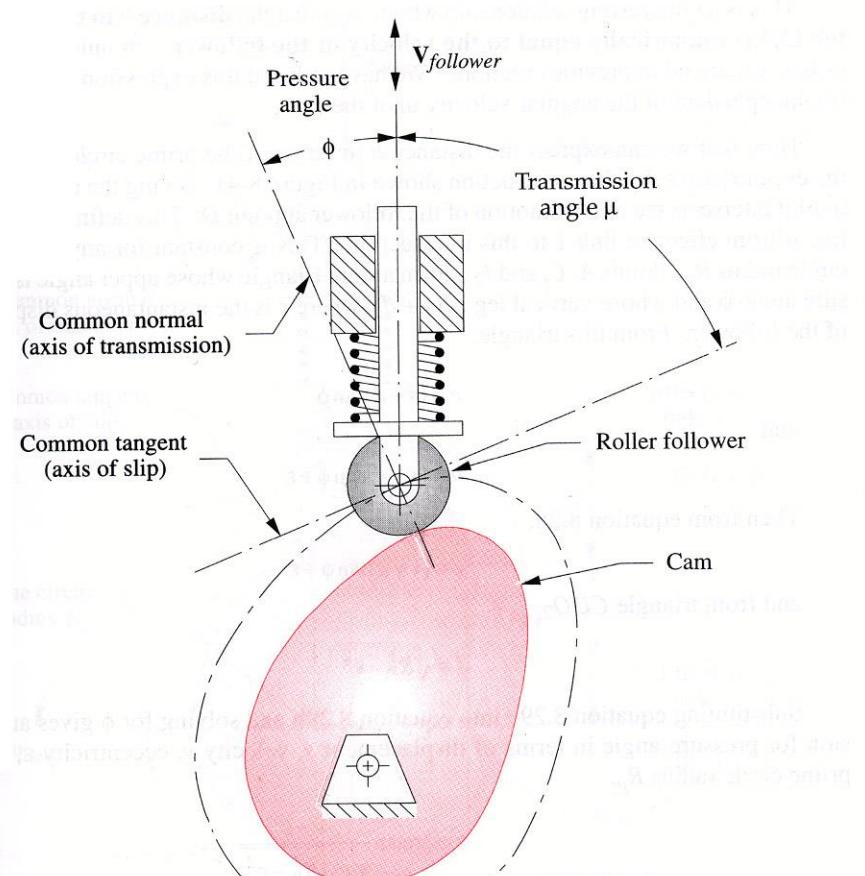


FIGURE 8-40

Cam pressure angle

ÁNGULO DE PRESIÓN

El **ángulo de presión** ϕ es el ángulo entre la dirección del movimiento (velocidad) del seguidor y la dirección del eje de transmisión.

- a).- Cuando $\phi = 0^\circ$ toda la fuerza transmitida se aplica al movimiento del seguidor y ninguna parte a la velocidad de deslizamiento.
- b).- Cuando $\phi = 90^\circ$ no habrá movimiento del seguidor.

En la **práctica** conviene que el **ángulo de presión esté entre 0° y 30°** para **seguidores de traslación**, a fin de evitar una carga lateral excesiva sobre el deslizador del seguidor.

Si el **seguidor es oscilante** sobre un brazo pivoteado, un ángulo de presión alrededor de **35°** es aceptable.

Valores de ϕ mayores que estos, aumentan la fricción sobre el deslizador del seguidor o sobre el pivote, a niveles indeseables y pueden atascar a seguidores de traslación en sus guías.

EXCENTRICIDAD

La figura 8-41 muestra el caso general, en que el eje de movimiento del seguidor no intersecta el centro de la leva. Hay una **excentricidad ϵ** definida como la distancia perpendicular entre el eje del seguidor de movimiento y el centro de la leva.

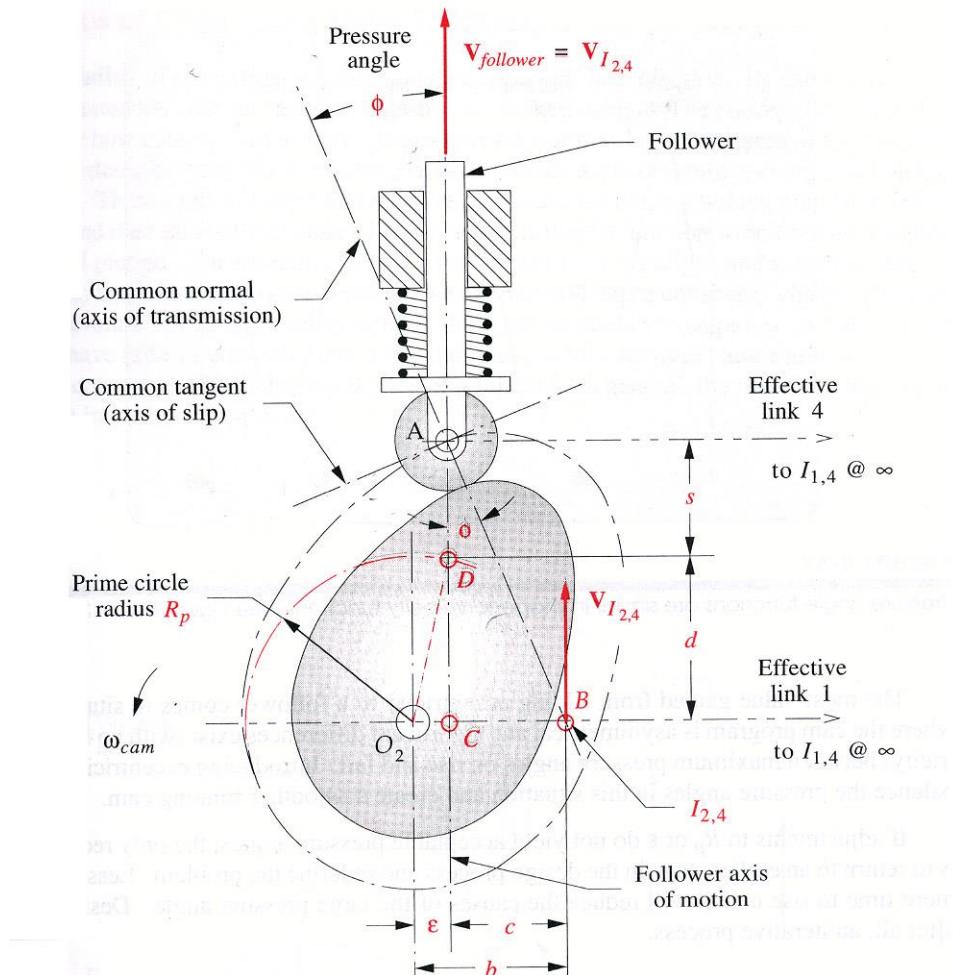


FIGURE 8-41

Geometry for the derivation of the equation for pressure angle

Ideas a tomar en cuenta

1.- El primer paso en el trazado es **seleccionar un radio de círculo base**.

El círculo base representa la posición del seguidor en elevación cero.

2.- Elegir un **radio de círculo base grande** resulta en una **leva grande**.

Si el círculo base es **demasiado pequeño**, el perfil de la leva puede tener huecos de radios más pequeños que el seguidor. Esto debe evitarse, ya que el seguidor no podrá seguir todo el contorno.

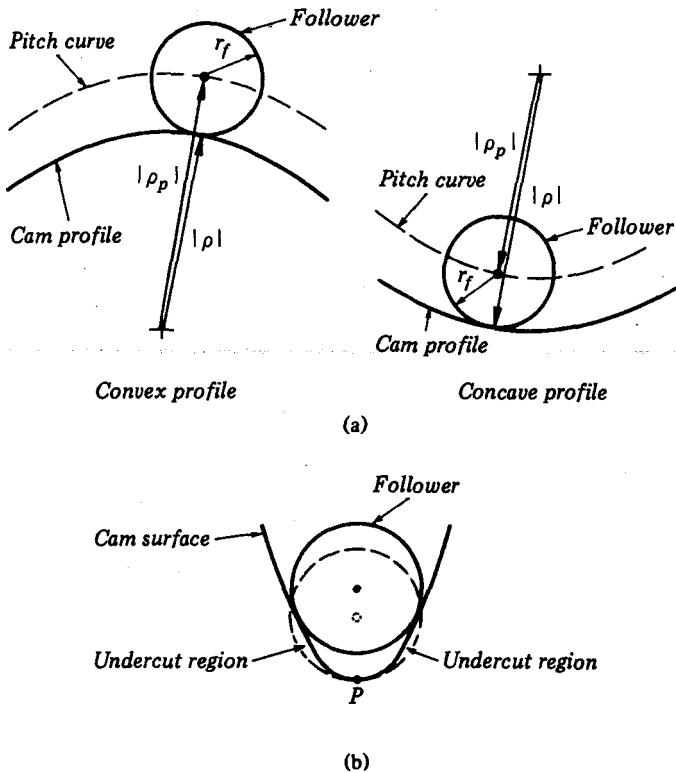


Figure 5.28 (a) A roller follower can operate on both convex and concave portions of cam profiles. (b) There are situations where unacceptable operation can occur, as shown here.

3.- *El ángulo de presión de la leva* es el ángulo entre la **normal** de contacto y la **velocidad** del punto sobre el seguidor en la localización de contacto.

Reduciendo el ángulo de presión, se reducen las cargas de contacto y asegura una operación más suave con menos desgaste.

Incrementando el radio del círculo base, decrece el valor máximo del ángulo de presión.

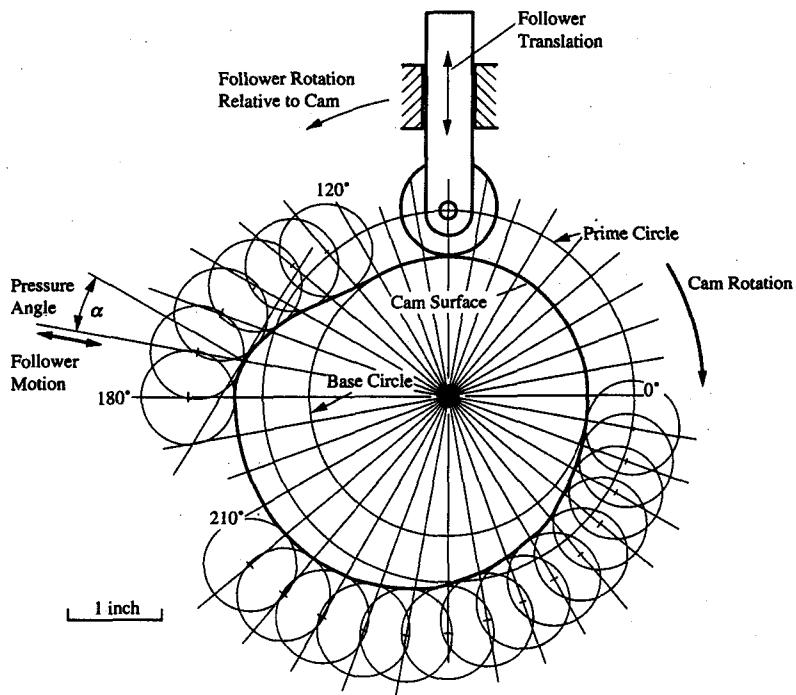
Es muy buena práctica, usar el **círculo base más grande** que las restricciones del diseño lo permitan. **Como una regla general, el radio del círculo base debe ser 2 o 3 veces el valor de elevación máximo.**

4.6 Diseño de Levas Analítico^[1]

[1] Kinematics and Dynamics of Machinery.
Charles E. Wilson & J. Peter Sadler. Second Edition

4.6.1 Teoría de Envolventes

Igual que en la *aproximación gráfica*, las posiciones deseadas del seguidor son determinadas por una *inversión* del sistema leva–seguidor, en el cual la leva es mantenida estacionaria. La leva que producirá el movimiento deseado es entonces obtenido mediante el “llenado” de una curva tangente a las posiciones del seguidor.



La base para esta aproximación es *la teoría de envolventes* proveniente del cálculo.

- 1.- Considere la serie de posiciones del seguidor mostradas en la figura 5.19a. El seguidor es mostrado como un seguidor de rodillo. Aunque cualquier forma de seguidor puede ser considerado.

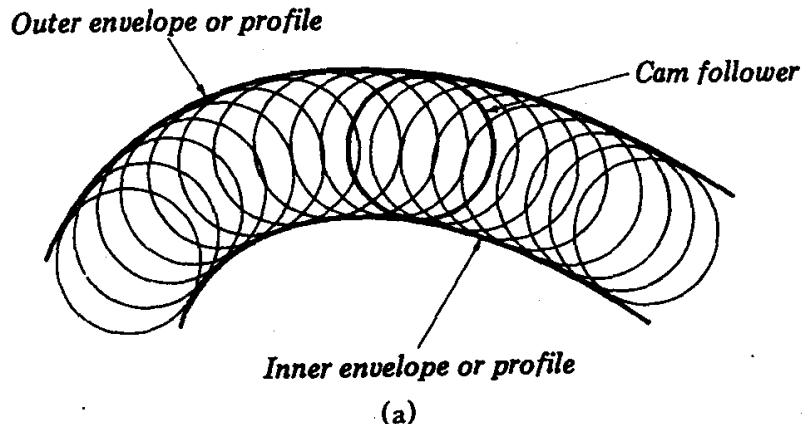


Figura 5.19

2.- El conjunto de posiciones del seguidor describe una **familia de curvas**, círculos en este caso.

3.- La **frontera de la familia de curvas** del seguidor es referida como la **envolvente** y es el **perfil de la leva**.

4.- Note que para este ejemplo, la envolvente consiste de dos curvas, indicando que existen dos posibles perfiles de leva. **Un perfil interior y un perfil exterior**.

5.- La teoría matemática para determinar la envolvente se describe como:

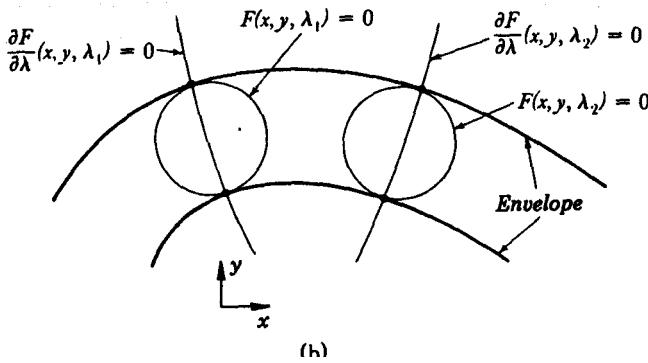
a).- Una familia de curvas en el plano $x - y$ puede ser expresada como:

$$F(x, y, \lambda) = 0 \quad (1)$$

Donde: λ es el parámetro de la familia (λ diferencia una curva de otra).

b).- Por ejemplo en la figura 5.19a, el parámetro λ representa la localización del centro de los seguidores, de radio constante.

c).- En la figura 5.19b, dos miembros de la curva para valores arbitrarios λ_1 y λ_2 son mostradas.



d).- Puntos radicando sobre la envolvente también radican sobre la curva, y por lo tanto coordenadas x, y de la envolvente deben satisfacer (1).

e).- Considere la derivada parcial de la función \mathbf{F} respecto al parámetro λ .

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0 \quad (2)$$

La ecuación (2) representa una segunda familia de curvas con parámetro λ . Cada miembro de la curva de la ecuación (2), intercepta al correspondiente miembro de la ecuación curva (1) (figura 5.19b).

f).- La solución simultanea de ecuaciones (1) y (2), define la **envolvente**. La solución es lograda eliminando el parámetro λ o expresando x y y en términos de λ .

4.6.2 Leva de Disco con Seguidor de Traslación de Cara Plana

Una leva con seguidor de cara plana se muestra en la figura 5.21. Esta figura representa una **inversión**, donde la leva está fija y el seguidor se mueve relativa a él. En operación normal, la leva deberá rotar y el seguidor deberá trasladarse en la guía a lo largo del eje *y*.

En cualquier caso, el movimiento relativo entre la leva y el seguidor es la misma. La leva, teniendo radio de círculo base r_b , **se asume para rotar en la dirección horaria bajo operación normal.**

De esta manera, para una rotación de la leva θ , el seguidor rotará antihorario relativa a la leva a través de un ángulo θ , mientras experimenta un desplazamiento translacional s , como se muestra. Se asume que el desplazamiento del seguidor es una función conocida del ángulo de la leva.

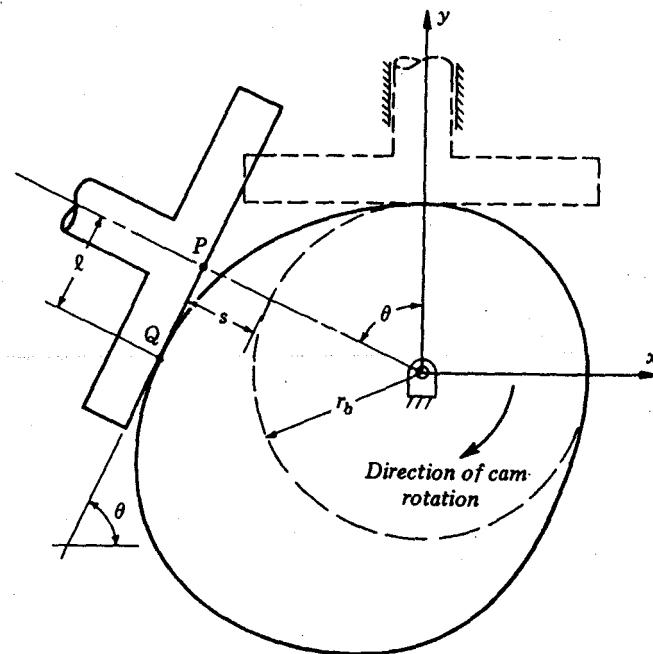


Figure 5.21 A disk cam with a translating flat-faced follower. The figure shows the motion of the follower relative to the cam. This motion consists of follower translation s during cam rotation θ . Point *P* is the point on the follower face coinciding with the follower centerline, and point *Q* is the instantaneous point of contact between the cam and follower.

La ecuación de la familia de líneas rectas (**cara del seguidor**) generadora del perfil de la leva está dada por:

$$y = m x + b \quad (3)$$

$$m = \tan \theta$$

Las coordenadas del punto *P*, en la intersección de la cara del seguidor y su eje son:

$$\begin{aligned}x &= -(r_b + s) \sin \theta \\y &= (r_b + s) \cos \theta\end{aligned}\tag{4}$$

donde s es el desplazamiento del seguidor. El punto P está en la línea descrita por la ecuación (3). Sustituyendo (4) en (3) y despejando b .

$$b = \frac{(r_b + s)}{\cos \theta}$$

la ecuación (3) se puede escribir como:

$$y = \frac{x \sin \theta + (r_b + s)}{\cos \theta}$$

Arreglando esta ecuación, tenemos la familia de líneas rectas (*posiciones del seguidor*) que genera el perfil de la leva:

$$F(x, y, \theta) = y \cos \theta - x \sin \theta - r_b - s = 0\tag{5}$$

Cada valor de θ representa una posición diferente del seguidor. Derivando respecto a θ :

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(x, y, \theta) = -y \sin \theta - x \cos \theta - \frac{ds}{d\theta} = 0\tag{6}$$

Resolviendo (5) y (6) simultáneamente, se obtienen *las coordenadas del perfil de la leva*.

$$\begin{aligned}x &= -(r_b + s) \sin \theta - \frac{ds}{d\theta} \cos \theta \\y &= (r_b + s) \cos \theta - \frac{ds}{d\theta} \sin \theta\end{aligned}\tag{7}$$

La ecuación (7) da las coordenadas del punto de contacto Q para un ángulo θ . La distancia l entre los puntos P y Q está dada por:

$$l = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2} = \frac{ds}{d\theta}\tag{8}$$

El valor máximo de l puede ser usado para determinar las dimensiones de la cara del seguidor.

4.6.3 Leva de Disco con Seguidor de Traslación de Rodillo Excéntrico

La configuración para este tipo de seguidor es mostrada en la figura 5.24. Aquí el seguidor tiene un rodillo de radio r_f y una excentricidad e . El radio del círculo base es r_b y el desplazamiento de seguidor es s , el cual es una función preescrita del ángulo θ de la leva.

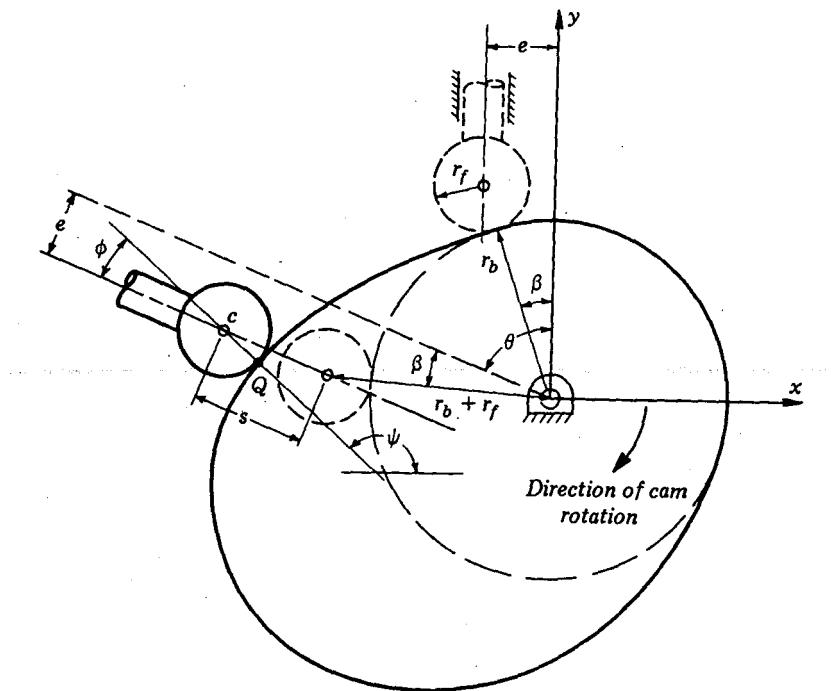


Figure 5.24 A disk cam with a translating, offset roller follower. Angle β is a function of the base circle radius r_b , the roller radius r_f , and the offset e . Angle ϕ is the pressure angle. The follower translates through distance s as the cam rotates through angle θ .

La ecuación para la familia de círculos descrita por el rodillo del seguidor es:

$$F(x, y, \theta) = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 - r_f^2 = 0 \quad (1)$$

donde: x_c , y_c , son las coordenadas x , y respectivamente del centro del rodillo c . Para una posición arbitraria mostrada en la figura 5.24.

$$x_c = -(r_b + r_f) \sin(\theta + \beta) - s \sin \theta \quad (2)$$

$$y_c = (r_b + r_f) \cos(\theta + \beta) + s \cos \theta \quad (3)$$

donde:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{e}{r_b + r_f}\right) \quad (4)$$

sustituyendo (2) y (3) en (1):

$$F(x, y, \theta) = [x + (r_b + r_f) \sin(\theta + \beta) + s \sin \theta]^2 + [y - (r_b + r_f) \cos(\theta + \beta) - s \cos \theta]^2 - r_f^2 = 0 \quad (5)$$

De la ecuación (1) la derivada parcial es:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -2(x - x_c) \frac{dx_c}{d\theta} - 2(y - y_c) \frac{dy_c}{d\theta} = 0 \quad (6)$$

De (1) y (2) tenemos:

$$\frac{dx_c}{d\theta} = -(r_b + r_f) \cos(\theta + \beta) - s \cos \theta - \frac{ds}{d\theta} \sin \theta \quad (7)$$

$$\frac{dy_c}{d\theta} = -(r_b + r_f) \sin(\theta + \beta) - s \sin \theta + \frac{ds}{d\theta} \cos \theta \quad (8)$$

Resolviendo (1) y (6) dan las coordenadas del perfil de la leva.

$$x = x_c \pm r_f \left(\frac{dy_c}{d\theta} \right) \left[\left(\frac{dx_c}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy_c}{d\theta} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (9)$$

$$y = y_c \mp r_f \left(\frac{dx_c}{d\theta} \right) \left[\left(\frac{dx_c}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy_c}{d\theta} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (10)$$

Note los signos más y menos en las ecuaciones (9) y (10). Este refleja el hecho de que existen 2 envolventes, un perfil interior y exterior. También observe que el signo más en (9) va con el signo menos en (10) y viceversa.

4.6.4 Ángulo de Presión

El **ángulo de presión** está definido como *el ángulo entre la normal común en el punto de contacto leva-seguidor y la línea de viaje del seguidor*.

La normal común es la línea recta pasando a través del punto de contacto $Q(x, y)$, ecuaciones (9) y (10) y el centro del rodillo $c(x_c, y_c)$, ecuaciones (2) y (3). El ángulo ψ que esta línea hace con la dirección x está dado por:

$$\psi = \arctan\left(\frac{y_c - y}{x_c - x}\right)$$

El ángulo ψ también puede ser expresado en términos del ángulo de presión ϕ y el ángulo de la leva θ como:

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \theta - \phi$$

Por lo tanto, igualando las dos expresiones para ψ , el ángulo de presión es:

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \theta - \arctan\left(\frac{y_c - y}{x_c - x}\right)$$

(11)

Una relación útil entre el ángulo de presión ϕ y las dimensiones de la leva puede ser derivada a partir de la ecuación (11). Reescribiendo la ecuación tenemos:

$$\left(\frac{y_c - y}{x_c - x}\right) = \tan\left[\frac{\pi}{2} + (\theta - \phi)\right] = -\cot(\theta - \phi) = \frac{-1}{\tan(\theta - \phi)}$$

$$\tan(\theta - \phi) = -\left(\frac{x - x_c}{y - y_c}\right)$$

Sustituyendo ecuaciones (9) y (10) para x y y se tiene:

$$\tan(\theta - \phi) = -\left(\frac{\pm \frac{dy_c}{d\theta}}{\mp \frac{dx_c}{d\theta}}\right) = \left(\frac{\frac{dy_c}{d\theta}}{\frac{dx_c}{d\theta}}\right)$$

Sustituyendo ecuaciones (7) y (8) se tiene:

$$\tan(\theta - \phi) = \frac{\sin(\theta - \phi)}{\cos(\theta - \phi)} = \frac{(r_b + r_f) \sin(\theta + \beta) + s \sin \theta - \frac{ds}{d\theta} \cos \theta}{(r_b + r_f) \cos(\theta + \beta) + s \cos \theta + \frac{ds}{d\theta} \sin \theta}$$

Empleando identidades trigonométricas y reduciendo:

$$\frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \tan \phi = \frac{\frac{ds}{d\theta} - (r_b + r_f) \sin \beta}{s + (r_b + r_f) \cos \beta}$$

de (4):

$$\sin \beta = \frac{e}{r_b + r_f}$$

además:

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{e}{r_b + r_f} \right)^2}$$

sustituyendo finalmente:

$$\tan \phi = \frac{\frac{ds}{d\theta} - e}{s + \sqrt{(r_b + r_f)^2 - e^2}}$$

(12)

Dado una función de desplazamiento del seguidor s y un ángulo de presión límite ϕ , la ecuación (12) puede ser usada para dimensionar *el círculo base, radio del rodillo y la excentricidad*.

4.6.5 Leva de Disco con Seguidor Oscilante de Cara Plana

El seguidor de cara plana oscilante o pivoteado es mostrado en la figura 5.25. La familia de posiciones del seguidor son líneas rectas

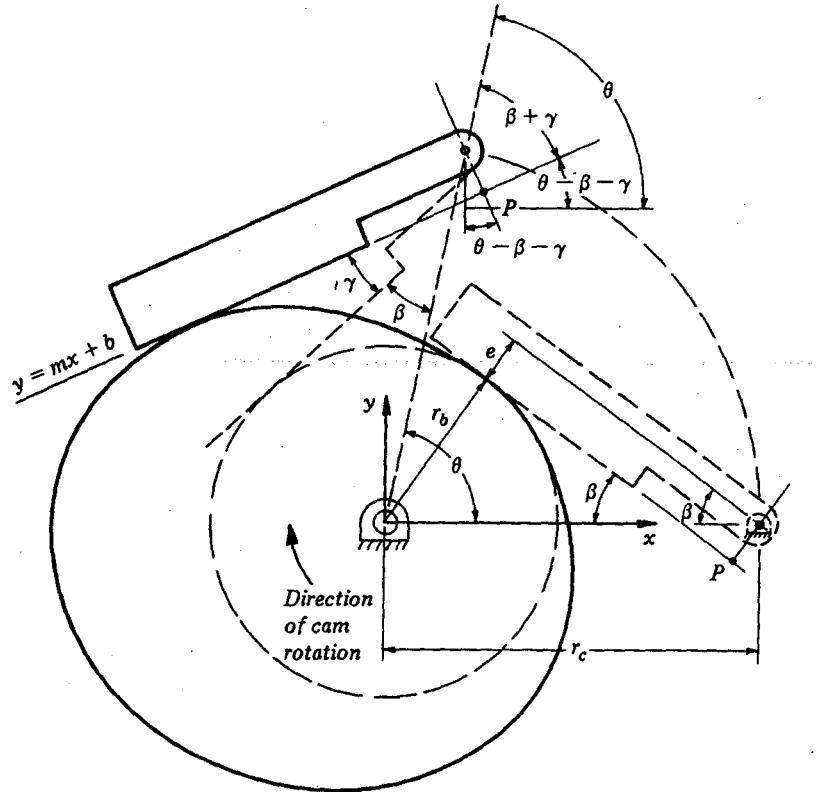


Figure 5.25 A disk cam with a rotating flat-faced follower. The motion of the follower relative to the cam consists of rotation γ during cam rotation θ . Angle β is a function of the base circle radius r_b , the distance r_c between the centers of rotation of the cam and follower, and the perpendicular distance e from the follower pivot to point P on the extension of the follower face.

La ecuación para la familia de líneas determinará la envolvente es:

$$y = m x + b \quad (13)$$

A partir de la figura 5.25, la pendiente m está dada por:

$$m = \tan(\theta - \beta - \gamma) \quad (14)$$

donde γ es el desplazamiento angular del seguidor y β es el ángulo incial del seguidor dado por:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{r_b + e}{r_c}\right)$$

En una situación de diseño típico el desplazamiento del seguidor γ deberá ser una función de θ . Las coordenadas del punto P sobre la extensión de la cara del seguidor son:

$$x = r_c \cos\theta + e \sin(\theta - \beta - \gamma) \quad (15)$$

$$y = r_c \sin\theta - e \cos(\theta - \beta - \gamma) \quad (16)$$

sustituyendo (14), (15) y (16) en (13) y resolviendo para b :

$$\begin{aligned} b &= r_c \sin\theta - e \cos A - (r_c \cos\theta + e \sin A) \tan A \\ A &= (\theta - \beta - \gamma) \end{aligned}$$

Entonces (13) se escribe como:

$$F(x, y, \theta) = y + (r_c \cos\theta + e \sin A - x) \tan A - r_c \sin\theta + e \cos A = 0 \quad (17)$$

La derivada parcial es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \theta} &= (-r_c \sin\theta + e \cos A \frac{dA}{d\theta}) \tan A + (r_c \cos\theta + e \sin A - x) \sec^2 A \frac{dA}{d\theta} \\ &\quad - r_c \cos\theta - e \sin A \frac{dA}{d\theta} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

donde: $\frac{dA}{d\theta} = 1 - \frac{d\gamma}{d\theta}$

Resolviendo (17) y (18) dan las coordenadas del perfil de la leva.

$$x = e \sin A + r_c \left[\cos\theta - \frac{\cos A \cos(\theta - A)}{\frac{dA}{d\theta}} \right] \quad (19)$$

$$y = -e \cos A + r_c \left[\sin\theta - \frac{\sin A \cos(\theta - A)}{\frac{dA}{d\theta}} \right] \quad (20)$$

4.6.6 Leva de Disco con Seguidor Oscilante de Rodillo

La ecuación para la familia de círculos descrita por el rodillo del seguidor es:

$$F(x, y, \theta) = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 - r_f^2 = 0 \quad (21)$$

Los parámetros son mostrados en la figura 5.26.

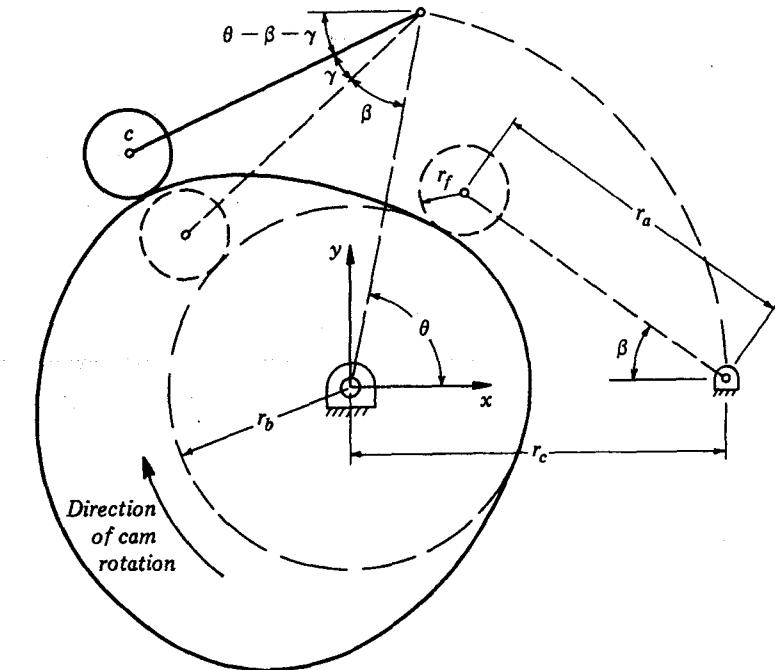


Figure 5.26 A disk cam with a rotating roller follower. The motion of the follower relative to the cam consists of rotation γ during cam rotation θ . Initial follower angle β is a function of the base circle radius r_b , the roller radius r_f , the center distance r_c between the cam and follower pivots, and the length r_a of the follower arm.

Donde:

r_a .- es la longitud del brazo del seguidor

r_f .- es el radio del seguidor

r_c .- es la distancia entre el centro de rotación de la leva y el pivote del seguidor

γ .- es el desplazamiento angular del seguidor como una función de θ .

Las coordenadas x, y del centro del rodillo c son:

$$x_c = r_c \cos \theta - r_a \cos(\theta - \beta - \gamma) \quad (22)$$

$$y_c = r_c \sin \theta - r_a \sin(\theta - \beta - \gamma) \quad (23)$$

donde el ángulo inicial β del seguidor es determinado mediante la ley de los cosenos:

$$\beta = \arccos \left(\frac{r_a^2 + r_c^2 - (r_b + r_f)^2}{2r_a r_c} \right) \quad (24)$$

La solución es similar al **seguidor de traslación de rodillo**, y las coordenadas del perfil de la leva son:

$$x = x_c \pm r_f \left(\frac{dy_c}{d\theta} \right) \left[\left(\frac{dx_c}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy_c}{d\theta} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (25)$$

$$y = y_c \mp r_f \left(\frac{dx_c}{d\theta} \right) \left[\left(\frac{dx_c}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy_c}{d\theta} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (26)$$

Donde:

$$\frac{dx_c}{d\theta} = -r_c \sin \theta + r_a \left(1 - \frac{d\gamma}{d\theta} \right) \sin(\theta - \beta - \gamma) \quad (27)$$

$$\frac{dy_c}{d\theta} = r_c \cos \theta - r_a \left(1 - \frac{d\gamma}{d\theta} \right) \cos(\theta - \beta - \gamma) \quad (28)$$

Como en el caso del seguidor de rodillo, existen dos envolventes, designados por el signo más y menos en las ecuaciones de las coordenadas, representando un perfil interior y exterior.

4.6.7 Ángulo de Presión

Ver diapositiva “Unidad 4 Diseño de Levas 6.ppt”.

4.6.8 Radio de Curvatura de la Leva

Otro factor importante afectando el tamaño de la leva y su comportamiento es la **curvatura de la leva**.

Si no se está limitado por el ángulo de presión o alguna otra consideración, el **tamaño mínimo** que una leva puede tener para una aplicación dada, estará dictada por la **curvatura de la leva**.

Como se **disminuye el radio del círculo base, se disminuye la leva**. Eventualmente se produce una **cúspide (cusp)**, en el perfil. **Esta leva no es satisfactoria**.

A partir del cálculo el radio de curvatura ρ se define como:

$$\rho = \frac{\left[\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left(\frac{dx}{d\theta} \right) \left(\frac{d^2y}{d\theta^2} \right) - \left(\frac{dy}{d\theta} \right) \left(\frac{d^2x}{d\theta^2} \right)} \quad (29)$$

La ecuación (29) se utiliza para examinar la curvatura de la leva para cualquiera de los seguidores vistos.

Interpretación de los Signos

El radio de curvatura tendrá magnitud y sentido, y ambos son importantes. Cuando el **radio de curvatura** es:

- a).- **positivo** significa que el perfil de la leva es **convexa**.
- b).- **negativo** significa que el perfil de la leva es **cóncava**.
- c).- **cero** significa que el perfil de la leva corresponde a una **cúspide**.
- d).- **infinito** significa que el perfil de la leva corresponde a una transición entre cóncavo y convexo o también una porción de línea recta.

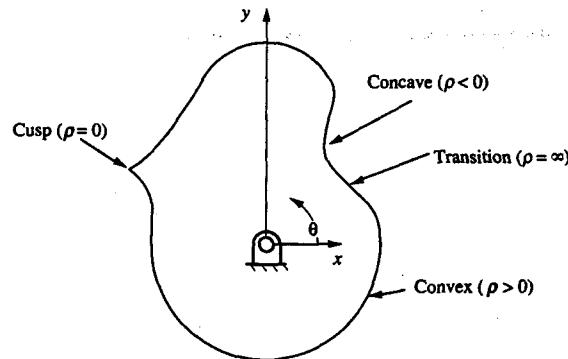


Figure 6.37 Interpretation of the sign of ρ .

Interpretación de la Magnitud

- 1).- Si la leva es **cóncava** en un área dada, el **radio de curvatura** determina el **diámetro máximo del cortador** para maquinar la leva y define el **diámetro máximo** del seguidor.
- 2).- El **radio de curvatura** de la leva **no puede ser más pequeño** que el radio del cortador,

si la leva es *cóncava* en el área que está siendo maquinada.

4.6.9 Radio de Curvatura – Seguidor de Traslación de Cara Plana

El radio de curvatura para este caso se calcula como:

1).- Ecuaciones de coordenadas de la leva

$$x = -(r_b + s) \sin \theta - \frac{ds}{d\theta} \cos \theta$$

$$y = (r_b + s) \cos \theta - \frac{ds}{d\theta} \sin \theta$$

2).- Derivadas respecto a θ :

$$\frac{dx}{d\theta} = -(r_b + s + \frac{d^2 s}{d\theta^2}) \cos \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -(r_b + s + \frac{d^2 s}{d\theta^2}) \sin \theta$$

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} = (r_b + s + \frac{d^2 s}{d\theta^2}) \sin \theta - (\frac{ds}{d\theta} + \frac{d^3 s}{d\theta^3}) \cos \theta$$

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} = -(r_b + s + \frac{d^2 s}{d\theta^2}) \cos \theta - (\frac{ds}{d\theta} + \frac{d^3 s}{d\theta^3}) \sin \theta$$

3).- Sustituyendo en :

$$\rho = \frac{\left[\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left(\frac{dx}{d\theta} \right) \left(\frac{d^2 y}{d\theta^2} \right) - \left(\frac{dy}{d\theta} \right) \left(\frac{d^2 x}{d\theta^2} \right)}$$

$$\boxed{\rho = r_b + s + \frac{d^2 s}{d\theta^2}}$$

(30)

Puntos Importantes:

- 1.- De la ecuación (30) se nota que el radio de curvatura depende de *el radio del círculo base y el movimiento de seguidor*.
- 2.- Las *cúspides deben ser evitadas*, es decir $\rho = 0$.

3.- El seguidor de cara plana ***no funcionará sobre porciones concavas*** del perfil.

Es decir $\rho < 0$.

Por lo tanto, la leva debe ser diseñada para que la siguiente desigualdad se mantenga en todos los puntos del perfil.

$$\rho > 0$$

$$r_b + s + \frac{d^2 s}{d\theta^2} > 0$$

(31)

Dado el movimiento del seguidor s , la ecuación (31), puede ser usada para determinar un ***valor aceptable para el radio de círculo base***. Esto ***evita*** un ***proceso de prueba y error*** inherente al trazado gráfico de levas.

4.6.10. Radio de Curvatura – Seguidor de Traslación de Rodillo

Generalmente, ***la curvatura de la curva de paso*** es analizada cuando se consideran seguidores de rodillo. La ecuación del ***radio de curvatura de la curva de paso*** es más fácil de obtener que el del perfil de la leva. El radio de curvatura de la curva de paso puede ser determinada a partir de las ecuaciones de las coordenadas del centro del rodillo y derivadas respectivas:

$$x_c = -(r_b + r_f) \sin(\theta + \beta) - s \sin \theta$$

$$y_c = (r_b + r_f) \cos(\theta + \beta) + s \cos \theta$$

$$\frac{dx_c}{d\theta} = -(r_b + r_f) \cos(\theta + \beta) - s \cos \theta - \frac{ds}{d\theta} \sin \theta$$

$$\frac{dy_c}{d\theta} = -(r_b + r_f) \sin(\theta + \beta) - s \sin \theta + \frac{ds}{d\theta} \cos \theta$$

$$\frac{d^2 x_c}{d\theta^2} = (r_b + r_f) \sin(\theta + \beta) + s \sin \theta - 2 \frac{ds}{d\theta} \cos \theta - \frac{d^2 s}{d\theta^2} \sin \theta$$

$$\frac{d^2 y_c}{d\theta^2} = -(r_b + r_f) \cos(\theta + \beta) - s \cos \theta - 2 \frac{ds}{d\theta} \sin \theta + \frac{d^2 s}{d\theta^2} \cos \theta$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{e}{r_b + r_f}\right)$$

finalmente sustituyendo en:

$$\rho_p = \frac{\left[\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left(\frac{dx}{d\theta} \right) \left(\frac{d^2y}{d\theta^2} \right) - \left(\frac{dy}{d\theta} \right) \left(\frac{d^2x}{d\theta^2} \right)}$$

Aquí ρ_p se refiere al radio de curvatura de la curva de paso.

Condiciones de Curvatura

Condiciones aceptables

1.- Perfil Convexo: $\rho_p > r_f$

2.- Perfil Concavo: $\rho_p < 0$

Condición inaceptable

3.- $0 \leq \rho_p \leq r_f$

Diseño de una leva con seguidor de rodillo oscilante.

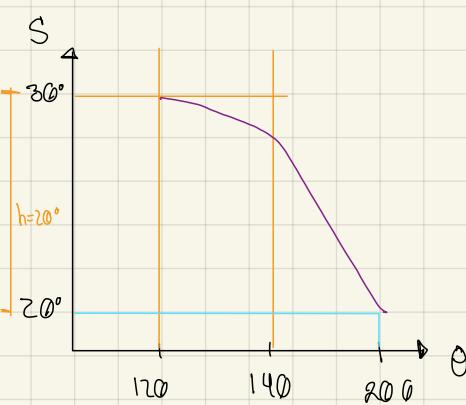
Un segmento de movimiento del seguidor, produce un retorno con mov. Polinomial 3;4;5 entre 120° y 200° según muestra la figura.

Determinar:

- Coordenadas del perfil
- Ángulo de presión
- El radio de curvatura.

El radio del círculo base es de 35 mm

$$\begin{aligned} r_b &= 35 \text{ mm} & h &= 20^\circ \\ r_f &= 10 \text{ mm} & r_c &= 72 \text{ mm} \\ r_a &= 57 \text{ mm} \end{aligned}$$



Ecuaciones:

$$S = h \left[10 \left(\frac{\theta'}{\beta} \right)^3 - 15 \left(\frac{\theta'}{\beta} \right)^4 + 6 \left(\frac{\theta'}{\beta} \right)^5 \right]$$

$$\begin{aligned} \theta' &= \theta - 120^\circ \\ \theta' &= 20^\circ & h &= 20^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \text{Es una constante, rango donde se aplica la curva} \\ \beta &= \theta_f - \theta_i = 200^\circ - 120^\circ = 80^\circ \end{aligned}$$

Derivando 'S'

$$\Rightarrow \frac{\theta'}{\beta} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$V = h \left| 30 \left(\frac{\theta'}{\beta} \right)^2 - 60 \left(\frac{\theta'}{\beta} \right)^3 + 30 \left(\frac{\theta'}{\beta} \right)^4 \right|$$

Derivando "V"

$$a = h \left| 60 \left(\frac{\theta'}{\beta} \right) - 180 \left(\frac{\theta'}{\beta} \right)^2 + 120 \left(\frac{\theta'}{\beta} \right)^3 \right|$$

Como es lojada

$$S' = h - h \left[10 \left(\frac{\theta'}{\beta} \right)^3 - 15 \left(\frac{\theta'}{\beta} \right)^4 + 6 \left(\frac{\theta'}{\beta} \right)^5 \right] = 0.313 \text{ rad}$$

$$V' = -\frac{h}{\beta} \left| 30 \left(\frac{\theta'}{\beta} \right)^2 - 60 \left(\frac{\theta'}{\beta} \right)^3 + 30 \left(\frac{\theta'}{\beta} \right)^4 \right| = -0.264 \text{ rad/s}$$

$$a' = -\frac{h}{\beta^2} \left| 60 \left(\frac{\theta'}{\beta} \right) - 180 \left(\frac{\theta'}{\beta} \right)^2 + 120 \left(\frac{\theta'}{\beta} \right)^3 \right| = -1.00715 \text{ rad/s}^2$$

$$\beta = \arccos \left(\frac{r_a^2 + r_c^2 - (r_o + r_f)^2}{2r_a r_c} \right) = \arccos \left(\frac{57^2 + 72^2 - (35 + 10)^2}{2(57)(72)} \right) = 38.68^\circ$$

$$X_C = r_c \cos \theta - r_a \cos(\theta - \beta - \gamma) = -71.45 \text{ mm}$$

$$Y_C = r_c \sin \theta - r_a \sin(\theta - \beta - \gamma) = -8.341 \text{ mm}$$

2do o 3er cuadrante sumar 180 al resultado. (arctang)

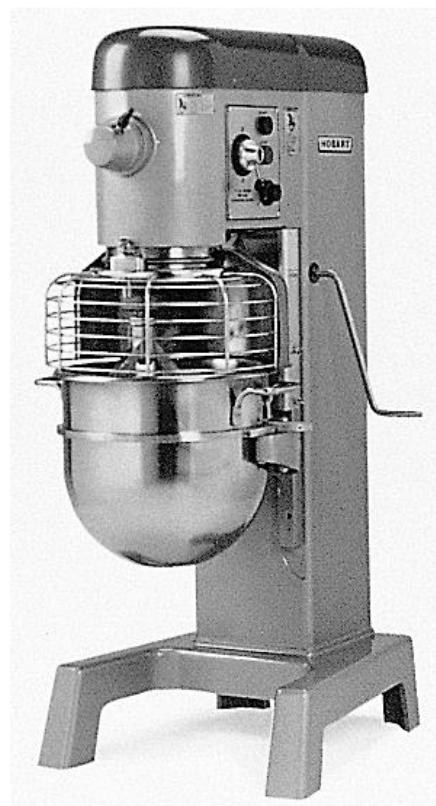
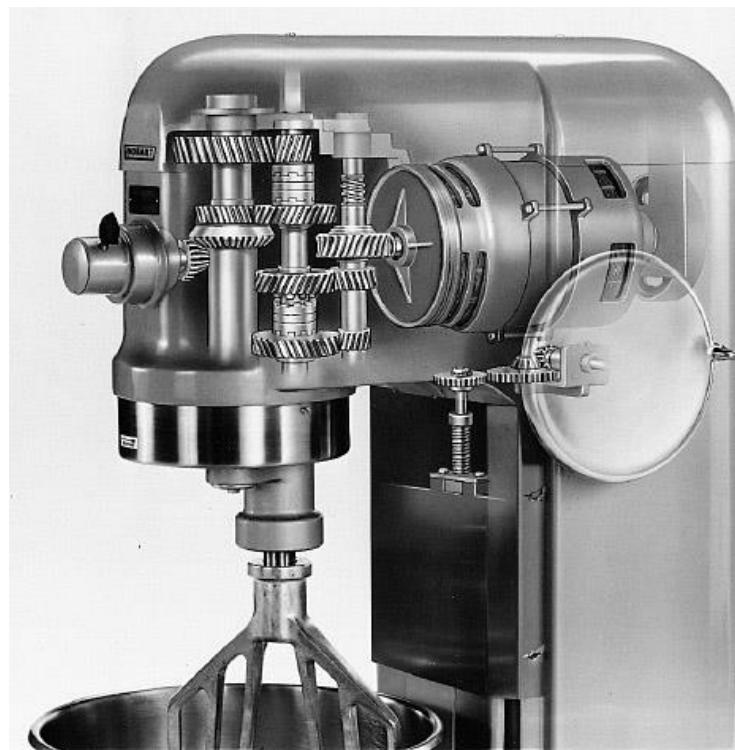
$$\frac{dx_C}{d\theta} = -r_c \sin \theta + r_a \sin(\theta + \beta^1 + \gamma^1)(1 - \gamma^1) = 22.761 \text{ mm/rad}$$

$$\frac{dy_C}{d\theta} = -r_c \cos \theta - r_a \cos(\theta - \beta^1 - \gamma^1)(1 - \gamma^1) = 75.75 \text{ mm/rad} /$$

-0.9617

Unidad 5 Cinemática de Engranes





5.1. Introducción

- Un tren de engranes es una colección de 2 o más engranes
- **Trenes de engranes** o uno de sus primos, **bandas o cadenas** transmiten rotación en mecanismos y máquinas.
- Siempre que un **cambio en la velocidad o torque** de un dispositivo en rotación sea necesaria, se usa un **tren de engranes**.

5.2. Rodillos Cilíndricos

- La forma más simple de transferir movimiento rotatorio de un eje a otro es un par de **rodillos cilíndricos**. Ellos pueden ser **externos** o **internos** (figura 10-1).

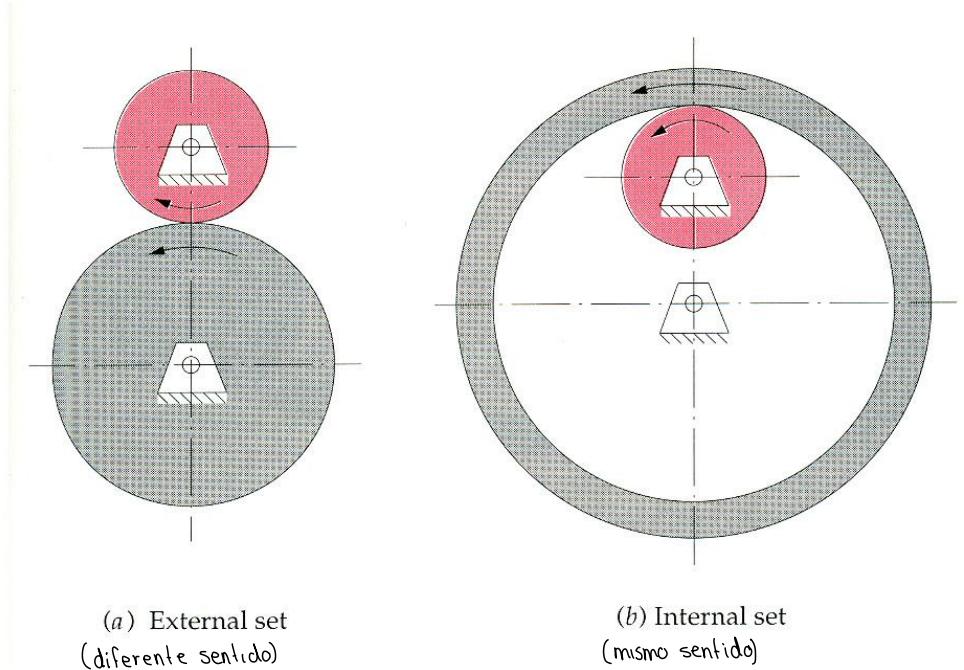


FIGURE 10-1

Rolling cylinders

- No habrá deslizamiento entre los cilindros hasta que la fuerza friccional máxima sea excedida por la transferencia de torque.
- Una variante de los rodillos cilíndricos es la **banda en V** como se muestra en la fig. 10-2.

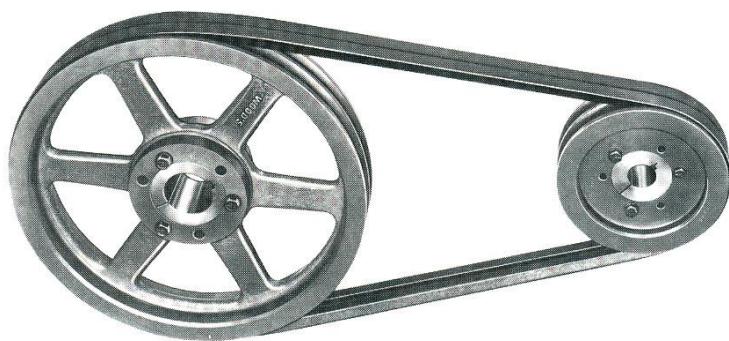


FIGURE 10-2

A two-groove vee belt drive - Courtesy of T. B. Wood's Sons Co., Chambersburg Pa.

- Las **bandas** son relativamente silenciosas, no requieren lubricación, y son baratos comparados con los engranes y cadenas.
- La **desventaja principal** de los mecanismos operados por **rodillos cilíndricos** (o bandas) son su **relativamente baja capacidad de torque y la posibilidad de deslizamiento**.
- Algunos elementos requieren una coordinación de los ejes de entrada y salida. En este caso algún medio de prevenir el deslizamiento es necesario.
- Usualmente se añaden dientes a los rodillos cilíndricos. Entonces se convierten en engranes como se muestra en la figura 10-4 y son llamados **engranajes o trasmisión de engranes**.

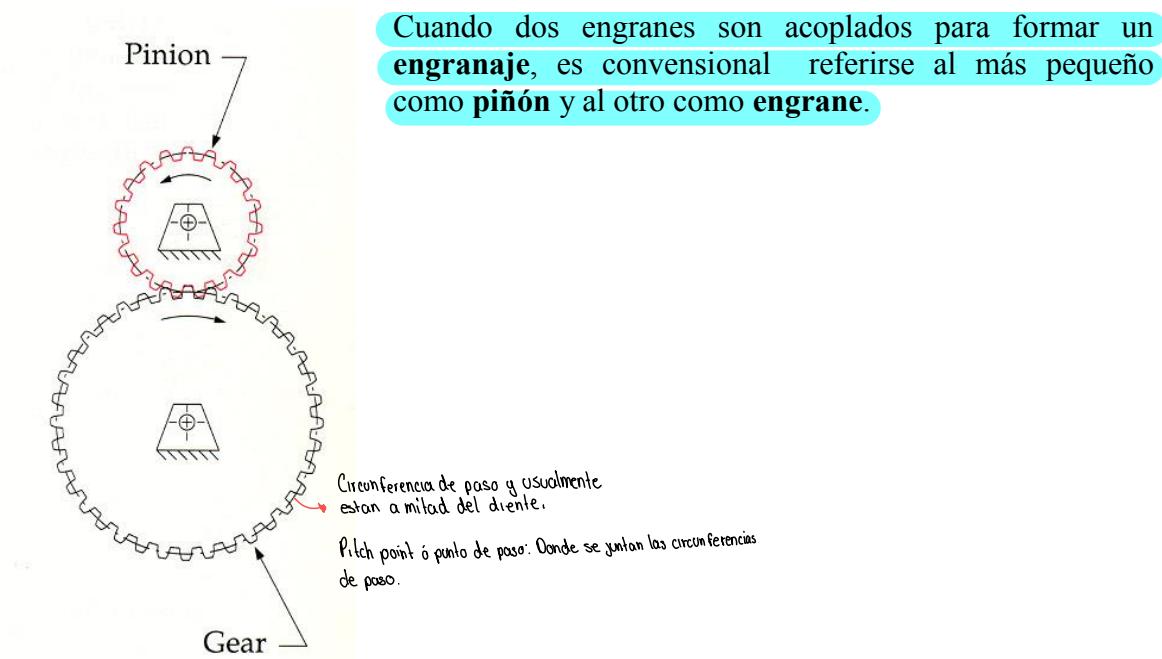


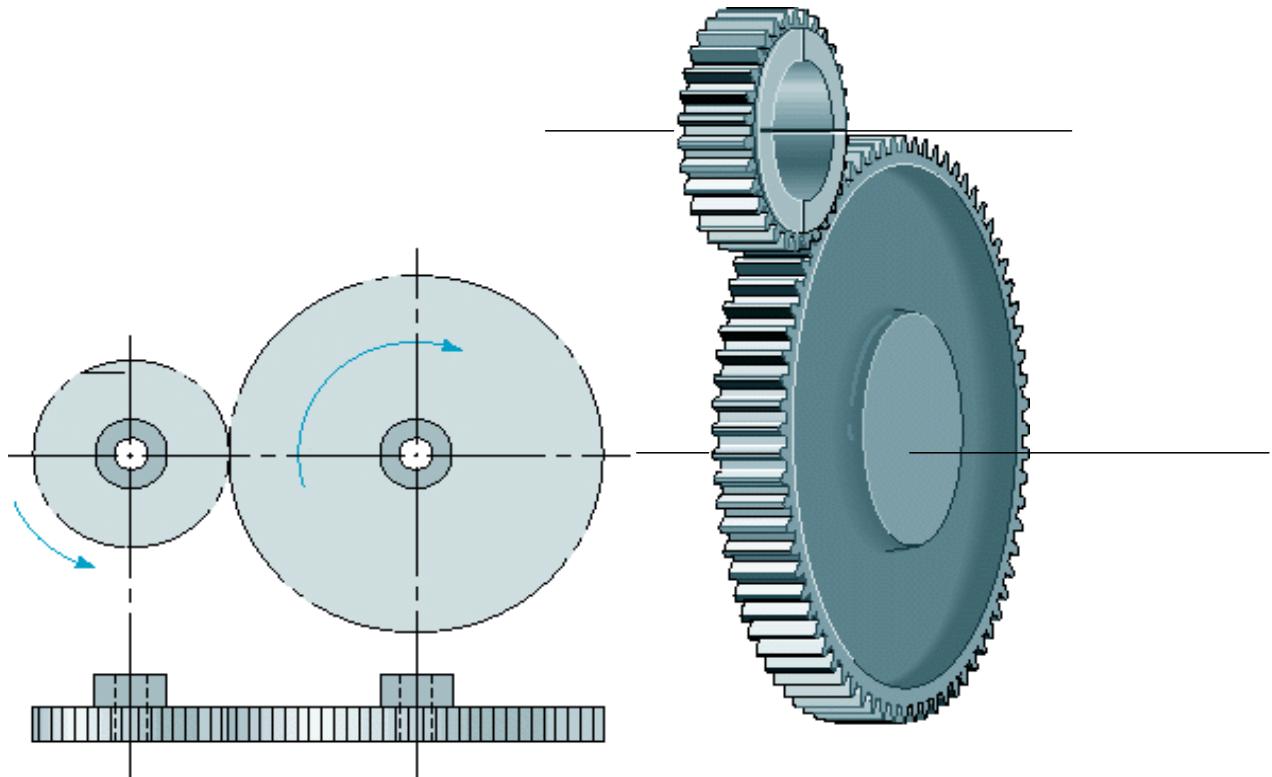
fig. 10-4

5.3. Tipos de Engranes

- Existen varios tipos de engranes de uso común. Entre los tipos más importantes están los siguientes:

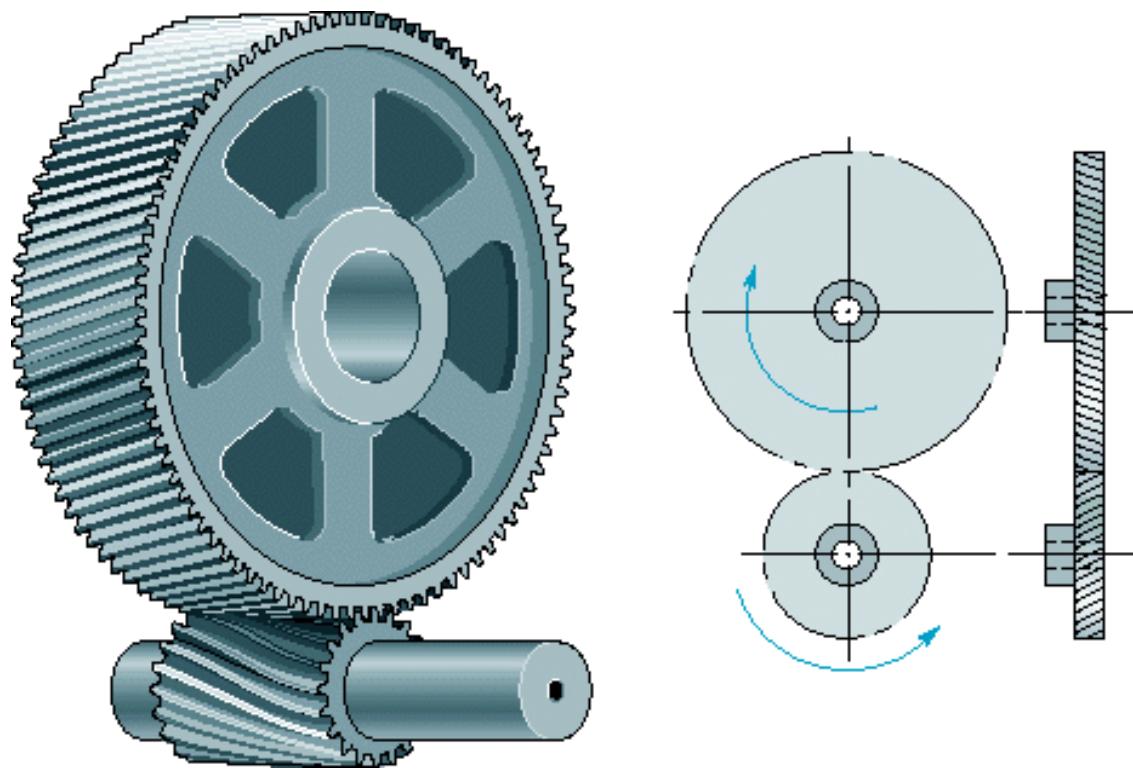
1. Engranes Rectos (Spur Gears)

- Son usados cuando el eje impulsor y el eje conducido son paralelos.
- Los engranes rectos producen más impacto en su operación, ya que el ancho de diente entra en contacto repentinamente.
- Son baratos de producir.



2. Engranes Helicoidales (Helical Gears)

- Los engranes helicoidales producen menos impacto y son silenciosos en su funcionamiento que los engranes rectos.
- Esto se debe a que los dientes entran en contacto en forma gradual.
- En comparación con los engranes rectos son caros de producir.
- También tienden a producir un empuje axial a través del eje debido a su forma helicoidal.

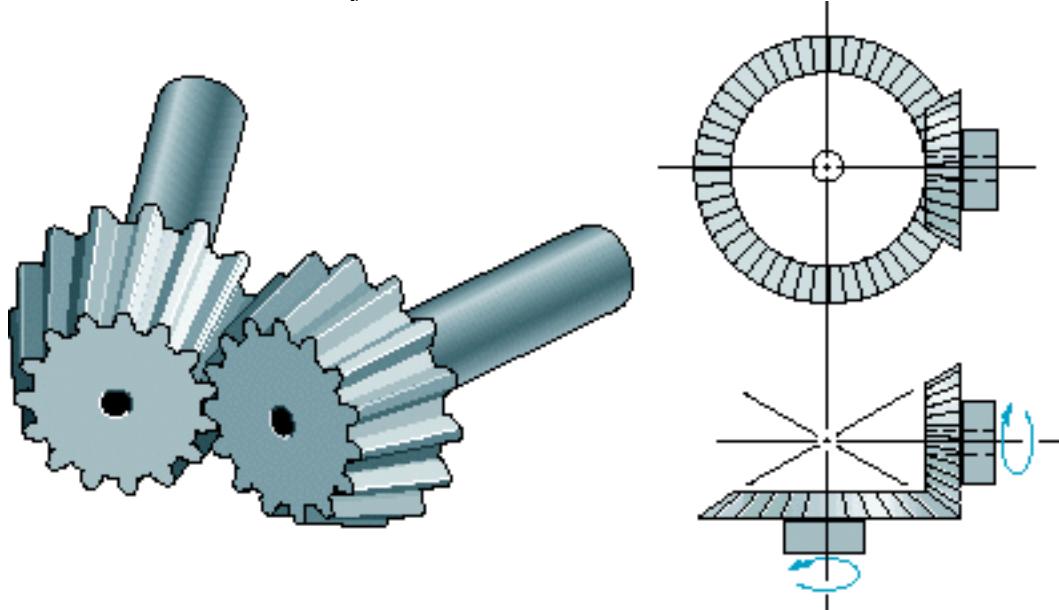


Doble helicoidal \rightarrow Herringbone gear

3. Engranes Cónicos (Bevel Gears)

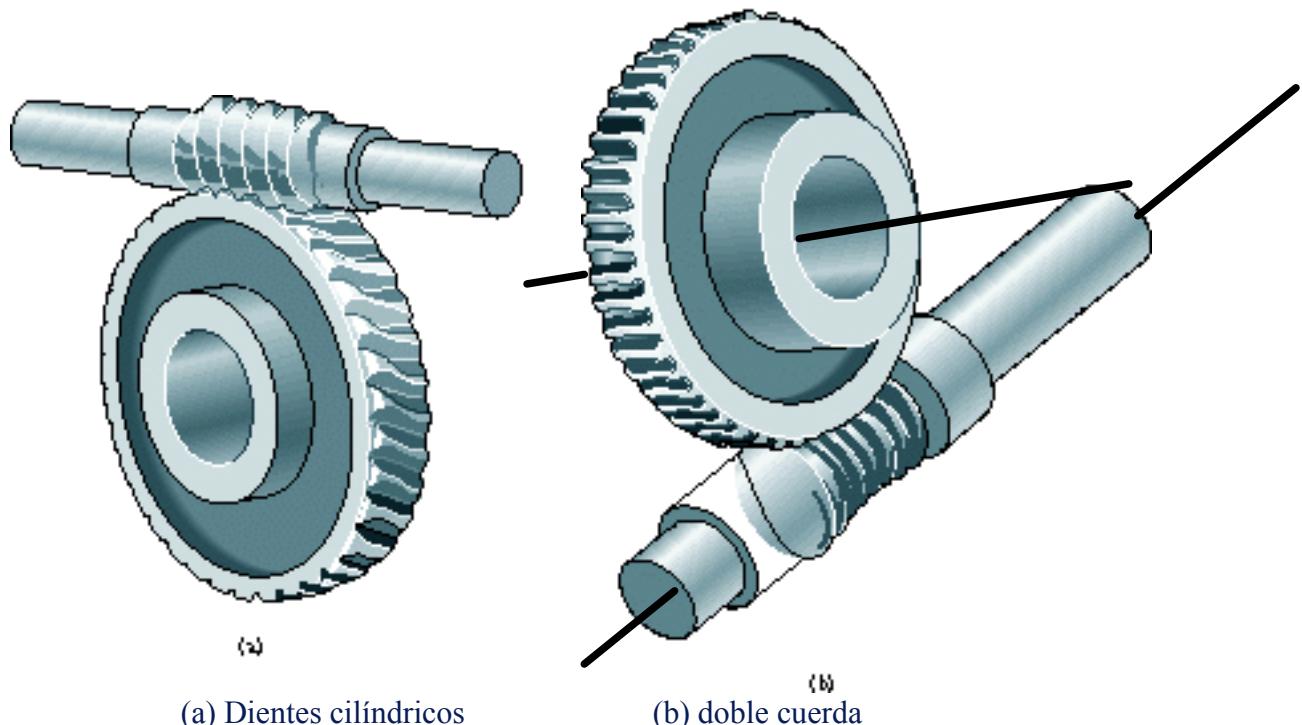
Cambio en el eje de transmisión

- Son usados cuando los ejes se intersectan.



4. Engrane y Tornillo sin Fín (Worm Gear)

- Son usados cuando los ejes no se intersectan y no son paralelos.
- Son usados para reducir grandes velocidades.



(a) Dientes cilíndricos

(b) doble cuerda

La doble cuerda sirve como de seguridad.

5.5. Ley Fundamental de Engranamiento

- Una razón importante para el uso de engranes, es que mantiene una razón de velocidad angular constante. La **ley fundamental de engranamiento** establece la condición la cual los perfiles de dientes de engranes deben satisfacer con objeto de mantener una razón velocidad angular constante.

Ley Fundamental de Engranamiento

- La forma (perfil) de un diente de engrane debe ser tal que la **normal común** en el **punto de contacto** entre dos dientes siempre pase a través de un **punto fijo** sobre la **línea de centros** de los engranes. El punto fijo es llamado el **punto de paso (pitch point)**.

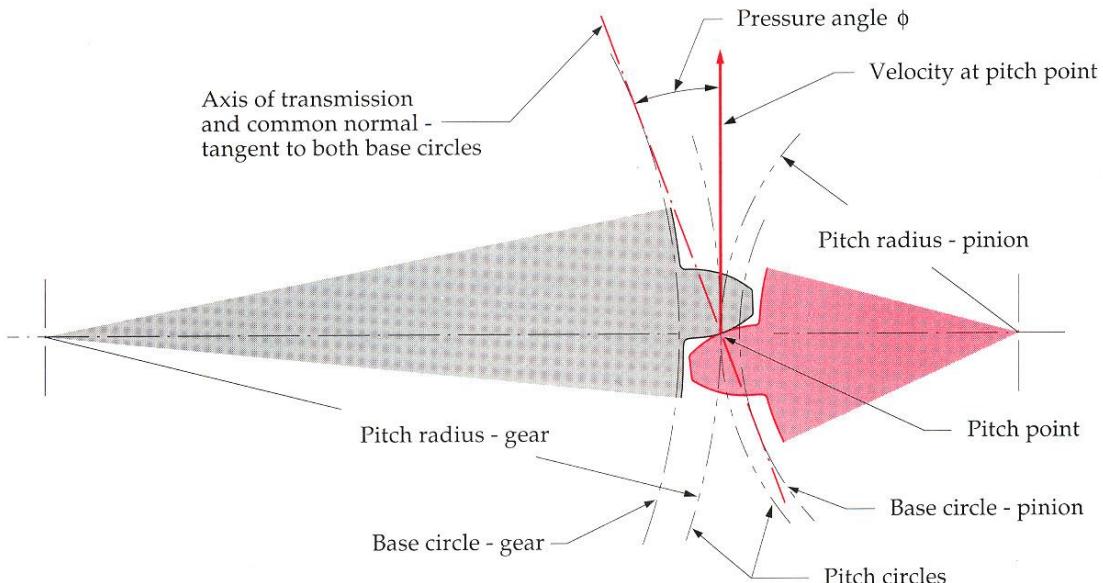


FIGURE 10-6

Contact geometry of involute teeth and pressure angle

- La **Razón de Velocidad Angular (rv)** es :

La **Razón de Velocidad angular (rv)** es igual a la velocidad angular del engrane de salida dividido por la velocidad angular del engrane de entrada.

$$r_v = \frac{\omega_{out}}{\omega_{in}} = \frac{vel. angular engrane salida}{vel. angular engrane entrada}$$

La razón puede también ser definido en términos de **revoluciones por minuto**, **radio de paso**, y el **número de dientes de engranes**. La subíndice 1 se refiere al **engrane de entrada** y el 2 al **engrane de salida**.

$$r_v = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Salida/entrada Entrada/Salida

donde:

r_v - razón de velocidad	ω - velocidad angular (rad/s)	n - velocidad angular (rev/min)	r - radio del círculo de paso (elemento geométrico)	N - número de dientes (elemento geométrico)	Velocidad angular · radio = Velocidad Tangencial.
Elementos cinemáticos,					
ω - velocidad angular (rad/s)					
n - velocidad angular (rev/min)					

5.6. Acción Conjugada

- Cuando la ley fundamental es satisfecha, se dice que los engranes producen un **acción conjugada**.
- La **normal común** es el **eje de transmisión** y siempre pasa a través del **punto de paso** no importando en donde los dientes hacen contacto (fig. 10-6).

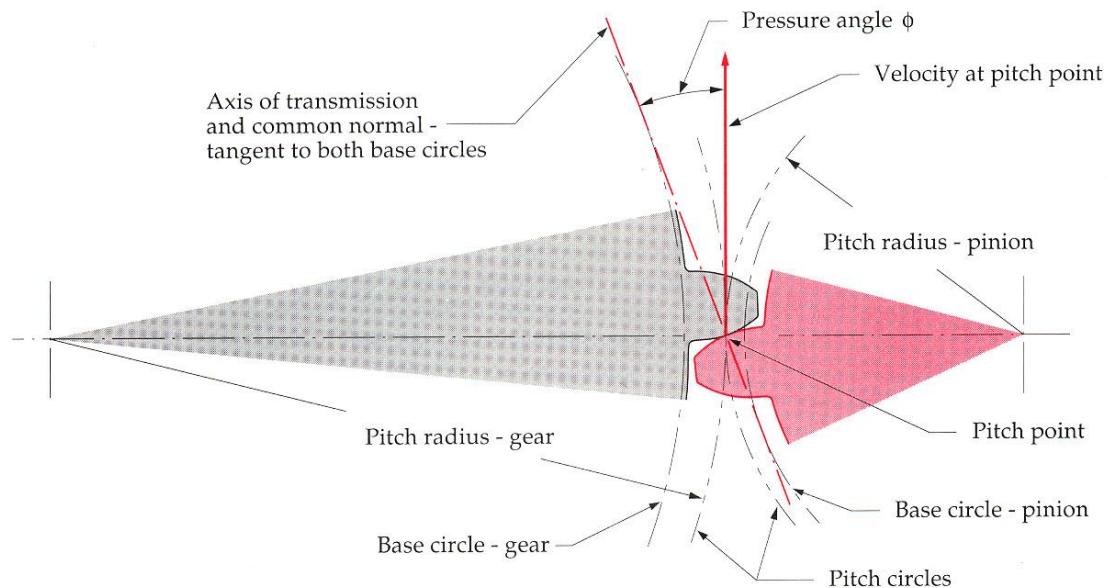


FIGURE 10-6

Contact geometry of involute teeth and pressure angle

La figura 10-7 muestra dos dientes en otras dos posiciones, empezando el contacto y terminando el contacto.

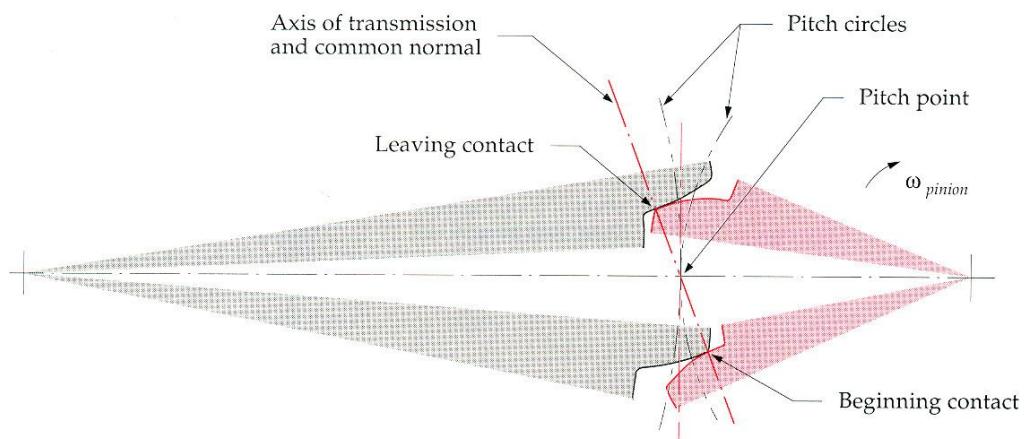


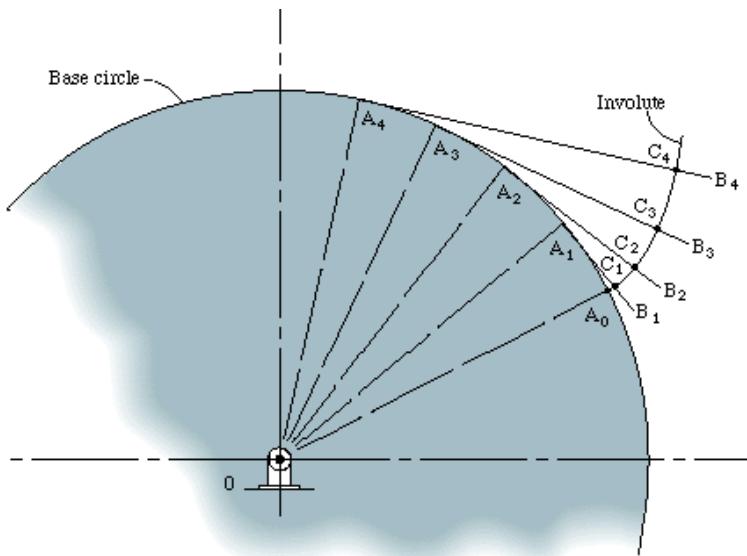
FIGURE 10-7

All contact points in the mesh lie on the common normal which passes through the pitch point with involute teeth

La **normal común** de ambos puntos de contacto permanece pasando a través del mismo **punto de paso**.

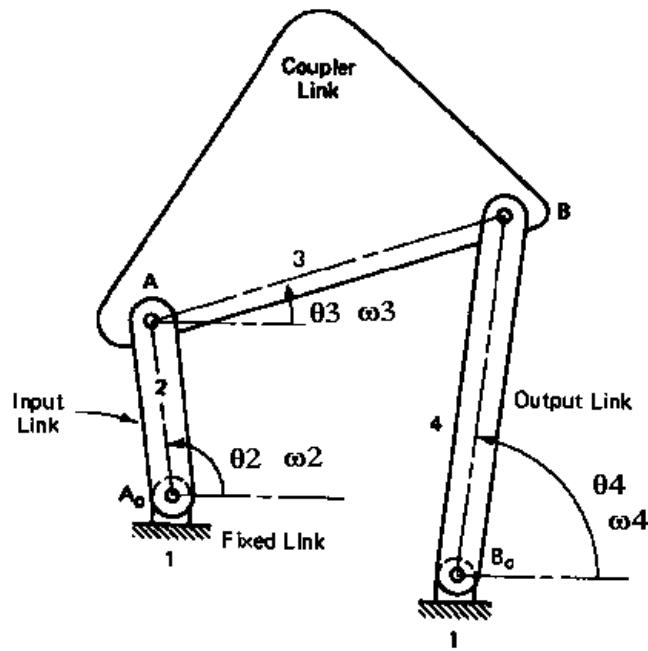
5.7. La Curva Involuta

- Cuando los perfiles del diente se les dá una forma tal, para que produzca una **razón constante entre las velocidades angulares** durante el engranamiento, se dice que las superficies son *conjugadas*.
- Es posible especificar cualquier perfil para un diente y luego encontrar un perfil para el diente que se va acoplar de modo que las superficies sean conjugadas..
- Una de estas soluciones es el **perfil de involuta**, esta se utiliza generalmente en los dientes de engranes.
- Una **curva involuta** es la trayectoria generada por un punto trazador sobre una cuerda, conforme ésta se desenrolla en un cilindro denominado **círculo base**.



5.8. Tren de Engranes

- En muchas instancias se desea transmitir la rotación de un eje a otro. Si estos ejes son paralelos y existe una relación **nolineal** entre sus rotaciones, un **mecanismo generador de función** o una **leva con seguidor oscilante** deberán ser considerados (particularmente si el eje de salida no requiere un giro completo).
- Para un **mecanismo generador de función** (mecanismo que producen un valor del ángulo θ_4 , dando un valor de θ_2) las velocidades angulares de los cuerpos 3 y 4 se pueden expresar en función de la velocidad angular del cuerpo 2:

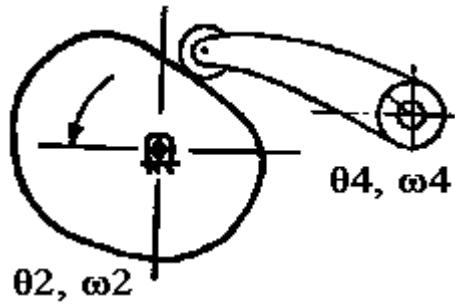


$$\omega_3 = \frac{-(\cos \theta_4 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_4) r_2 \omega_2}{(\cos \theta_4 \sin \theta_3 - \cos \theta_3 \sin \theta_4) r_3} = - \frac{\sin(\theta_2 - \theta_4)}{\sin(\theta_3 - \theta_4)} \frac{r_2}{r_3} \omega_2$$

$$\omega_4 = \frac{-(\cos \theta_3 \sin \theta_2 - \cos \theta_2 \sin \theta_3) r_2 \omega_2}{(\cos \theta_4 \sin \theta_3 - \cos \theta_3 \sin \theta_4) r_4} = - \frac{\sin(\theta_2 - \theta_3)}{\sin(\theta_3 - \theta_4)} \frac{r_2}{r_4} \omega_2$$

- La velocidad angular de salida ω_4 es no lineal en ω_2 (ya que aparecen senos).

- Para una leva con seguidor oscilante tenemos:

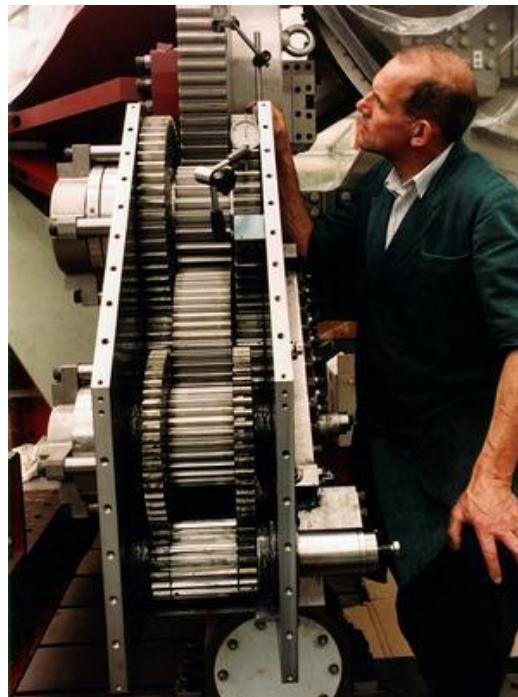


Movimiento lineal	Movimiento angular
$s = s(\theta)$ $V = \frac{ds(\theta)}{dt} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = v\omega$	$\theta_4 = \theta_4(\theta_2)$ $\omega_4 = \frac{d\theta_4}{dt} = \frac{d\theta_4}{d\theta_2} \frac{d\theta_2}{dt} = v_4 \omega_2$ <p>Usando por ejemplo el movimiento cicloidal (rise):</p> $v_4 = \frac{h}{\beta} \left[1 - \cos\left(2\pi \frac{\theta_2}{\beta}\right) \right]$ <p>Finalmente tenemos:</p> $\omega_4 = \frac{h}{\beta} \left[1 - \cos\left(2\pi \frac{\theta_2}{\beta}\right) \right] \omega_2$

- La velocidad angular de salida ω_4 es no lineal en ω_2 (ya que aparece el coseno).
- En muchas instancias, sin embargo, una razón de velocidad angular constante es requerida entre ejes de entrada y salida. Y esta la proporciona un **tren de engranes**.

Tren de Engranes

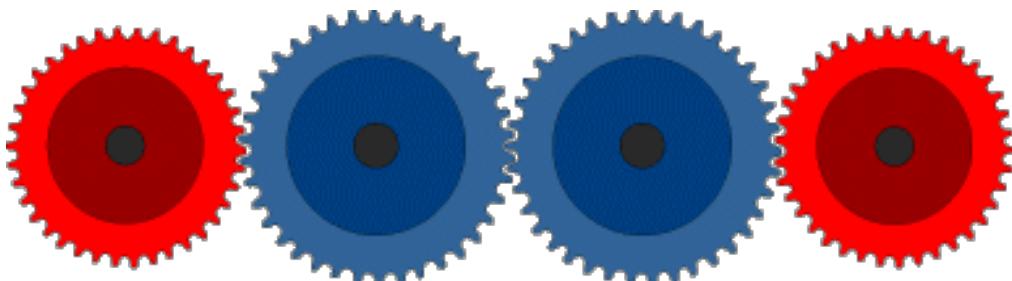
- Un **tren de engranes** es cualquier colección de 2 o más engranes.
- Un **tren de engranes** tiene como propósito transmitir movimiento de un eje a otro, usualmente cambiando el movimiento en el proceso.



- Existen dos categorías de trenes de engranes: **ordinarios** y **planetarios**.

Tren de Engranes Ordinario

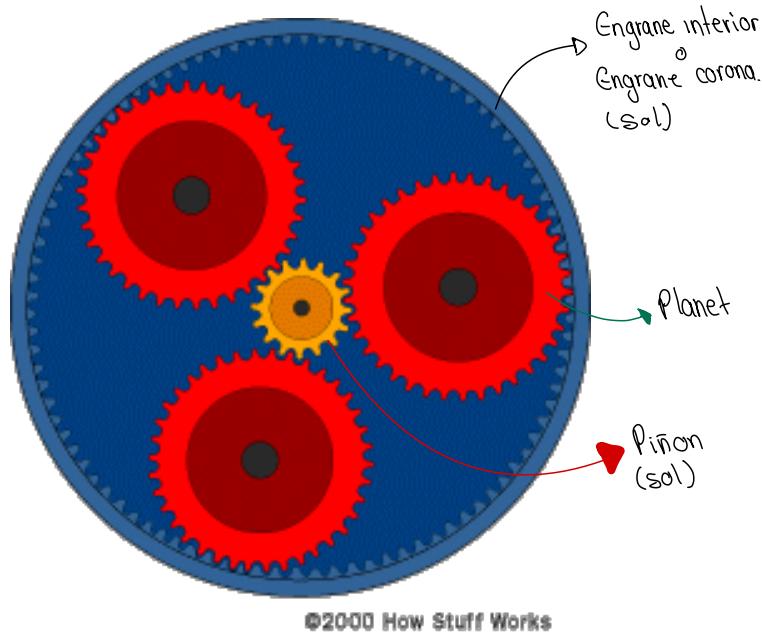
- En un **tren de engranes ordinario**, todos los ejes de engranes están fijos a la tierra.



©2000 How Stuff Works

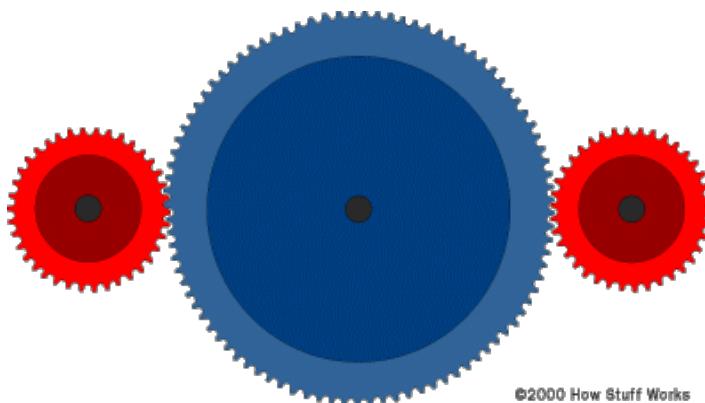
Tren de Engranes Planetario

- En un **tren de engranes planetario**, uno o más de los ejes de engranes rotan relativo a la tierra.

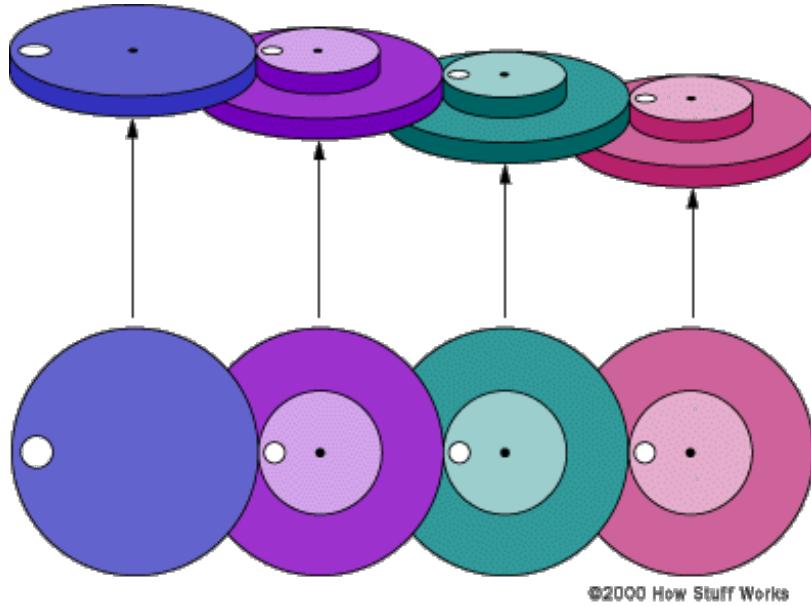


5.9. Tren de Engranes Simple

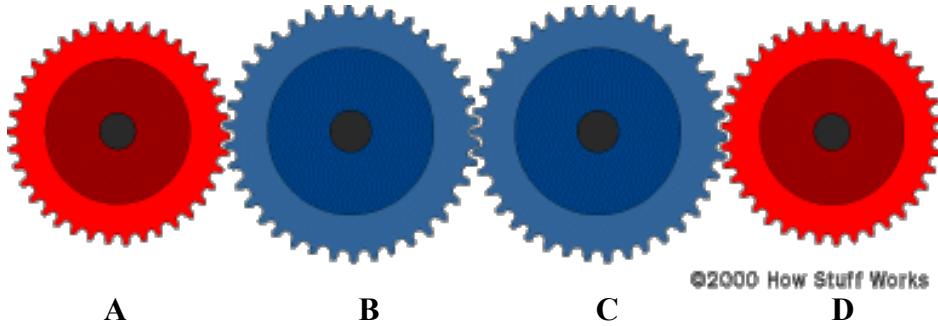
- El tren de engranes ordinario puede ser: **simple** o **compuesto**.
- **Simple:** Cada eje soporta un engrane.



- **Compuesto:** Uno o más ejes soportan dos engranes.



- La figura muestra un tren de engranes simple impulsado por el engrane A. La **razón de velocidad** para un par de engranes unidos es:



$$\frac{\omega_B}{\omega_A} = \frac{N_A}{N_B}$$

$$\frac{\omega_C}{\omega_B} = \frac{N_B}{N_C}$$

$$\frac{\omega_D}{\omega_C} = \frac{N_C}{N_D}$$

- La **razón de velocidad angular total** puede ser escrita como:

$$\left(\frac{\omega_B}{\omega_A} \right) \left(\frac{\omega_C}{\omega_B} \right) \left(\frac{\omega_D}{\omega_C} \right) = \left(\frac{N_A}{N_B} \right) \left(\frac{N_B}{N_C} \right) \left(\frac{N_C}{N_D} \right)$$

Engranes locos

Par = Cambia sentido de giro.

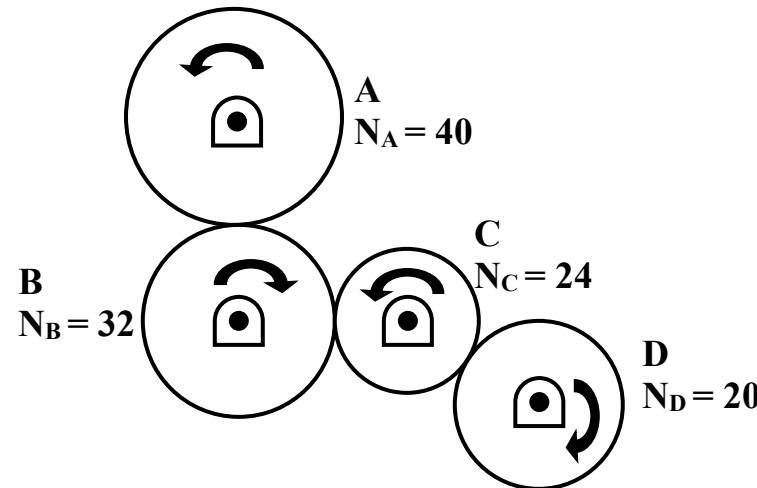
Impar = Mismo sentido de giro.

$$\left(\frac{\omega_D}{\omega_A} \right) = \left(\frac{N_A}{N_D} \right) \quad (1)$$

- Engranes **B, C**, no aparecen en la ec. (1) y de esta manera no contribuyen a la razón de velocidad angular total. Estos engranes son llamados **engranes intermedios o locos**.
- Los **engranes locos** son usados para dos propósitos:
 - 1.- Conectar engranes donde una distancia entre centros grande es requerida.
 - 2.- Cambiar la dirección de rotación entre engranes.

Ejemplo 1 Tren de Engranes Simple

Dado un tren de engranes simple, donde el engrane A rota **1000 rpm antihorario**. Determinar las **rpm** del engrane D.

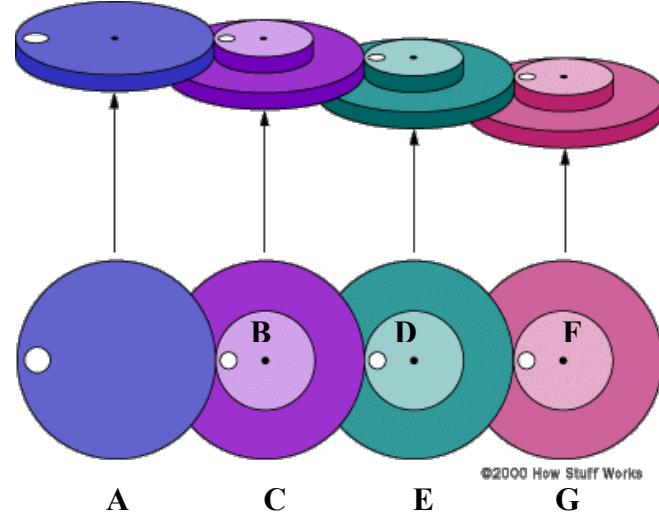


Solución

$$\left(\frac{\omega_D}{\omega_A} \right) = \left(\frac{N_A}{N_D} \right)$$
$$\omega_D = \left(\frac{N_A}{N_D} \right) \omega_A = \left(\frac{40}{20} \right) (1000 \text{ rpm}) = 2000 \text{ rpm}$$

5.10. Tren de Engranes Compuestos

- La figura muestra un tren de engranes compuesto, impulsado por el engrane A. La **razón de velocidad** para un par de engranes unidos es:



$$\frac{\omega_B}{\omega_A} = \frac{N_A}{N_B} \quad \frac{\omega_D}{\omega_C} = \frac{N_C}{N_D} \quad \frac{\omega_F}{\omega_E} = \frac{N_E}{N_F}$$

La **razón velocidad angular total** puede ser escrita como:

$$\left(\frac{\omega_B}{\omega_A} \right) \left(\frac{\omega_D}{\omega_C} \right) \left(\frac{\omega_F}{\omega_E} \right) = \left(\frac{N_A}{N_B} \right) \left(\frac{N_C}{N_D} \right) \left(\frac{N_E}{N_F} \right)$$

donde: $\omega_B = \omega_C$, $\omega_D = \omega_E$

$$\left(\frac{\omega_F}{\omega_A} \right) = \left(\frac{N_A}{N_B} \right) \left(\frac{N_C}{N_D} \right) \left(\frac{N_E}{N_F} \right) \quad (2)$$

También:

$$\left(\frac{\omega_F}{\omega_A} \right) = \frac{\text{Producto de número de dientes de engranes impulsores}}{\text{Producto de número de dientes de engranes impulsados}}$$

(3)

Ejemplo 2 Tren de Engranes Compuesto

La figura, es un tren reduedor cuadruple de engranes helicoidales impulsado por un motor eléctrico de **1750 rpm**.

Sec. 8.3

COMPOUND GEAR TRAIN

291

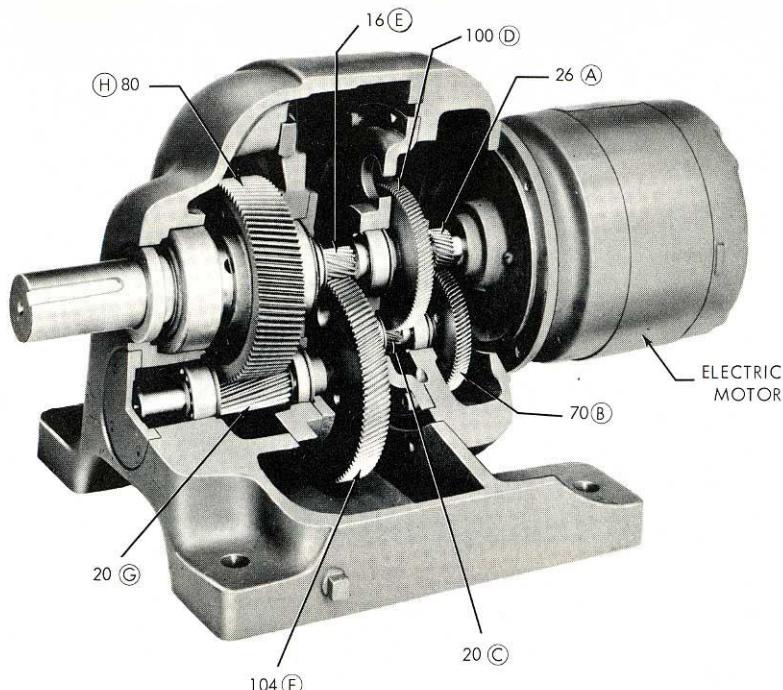


Fig. 8.4. Quadruple reduction gearmotor. (Courtesy of Link-Belt.)

Los dientes de engranes son:

$$\begin{array}{llll} N_A = 26 & N_B = 70 & N_C = 20 & N_D = 100 \\ N_E = 16 & N_F = 104 & N_G = 20 & N_H = 80 \end{array}$$

Determinar las **rpm** del eje de salida

Solución

Aplicando (3):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega_H}{\omega_A} \right) &= \frac{(N_A)(N_C)(N_E)(N_G)}{(N_B)(N_D)(N_F)(N_H)} = \frac{(26)(20)(16)(20)}{(70)(100)(104)(80)} \\ \omega_H &= \left(\frac{166\,400}{58\,240\,000} \right) \omega_A = (2.857\,10^{-3})(1750) = 5 \text{ rpm} \end{aligned}$$

El eje de salida rota en la misma dirección como el eje de entrada.

5.11. Tren de Engranes Planetarios

- La sección previa fue concerniente con **trenes de engranes ordinarios**, esto es, trenes en la cual cada engrane rota con respecto al centro que está fijo a la tierra.
- **Trenes de engranes ordinarios tienen un grado de libertad.** Girando el engrane 2 (fig. 7.18a), por ejemplo forza al engrane 3 a rotar.

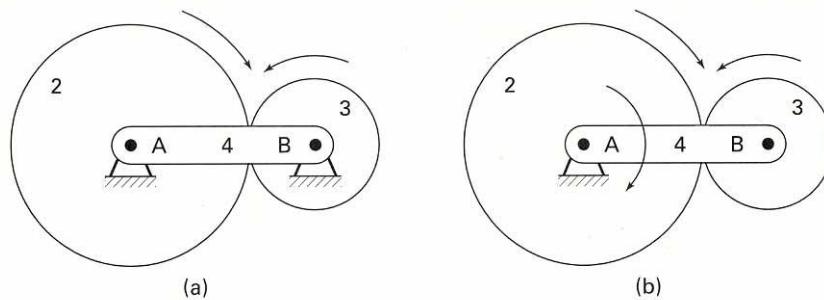


Figure 7.18 Types of gear trains: (a) ordinary, (b) planetary.

- En contraste a un tren ordinario, un **tren de engranes planetario (o epicílico)** (*debido a la curva que genera un punto sobre el engrane 3*) puede suministrar **2 grados de libertad**. Esto se hace liberando uno de los centros de engranes en la figura 7.18a.
- De la figura 7.18b, el engrane 3 es llamado **engrane planeta**, porque su centro **no está fijo** a la tierra, y orbita alrededor del engrane 2. El engrane 2 es llamado **engrane sol**, porque su centro **está fijo** a la tierra y es orbitado por el planeta.
- Engranes planetas, como 3, giran sobre un eje que está fijo a un brazo giratorio, también llamado **carrier o araña**.

5.12. Aplicaciones de Engranajes Planetarios

- Trenes de engranes planetarios son más caros de manufacturar y mantener que trenes de engranes ordinarios, pero los diseñadores pueden optar por usarlos por dos razones.
 1. PRIMERO: Existen algunas situaciones en la cuales dos grados de libertad son requeridas.
 2. SEGUNDO: Cuando se requiere una transmisión de un grado de libertad de un eje de entrada a un eje de salida, es posible conseguir la misma razón de engrane en menos espacio y transmitir más potencia, usando los planetarios en vez de los trenes de engranes ordinarios.
- Tres clases de aplicaciones de trenes planetarios son discutidos brevemente:

Diferencial

- Cuando un tren de engranes planetarios le es permitido retener sus dos grados de libertad, este es llamado un **diferencial**. Los diferenciales son usados cuando es necesario combinar dos entradas para producir una salida.
- La diferencial sobre un auto, (fig. 7.20) por ejemplo, permite a dos llantas traseras rotar a diferentes velocidades cuando va en una curva. Sin los dos grados de libertad, las dos llantas serían forzadas a rotar a la misma velocidad , aun cuando ellas están viajando a diferentes distancias en la misma cantidad de tiempo. El resultado sería una llanta patinando y deslizándose cuando gire en una esquina.

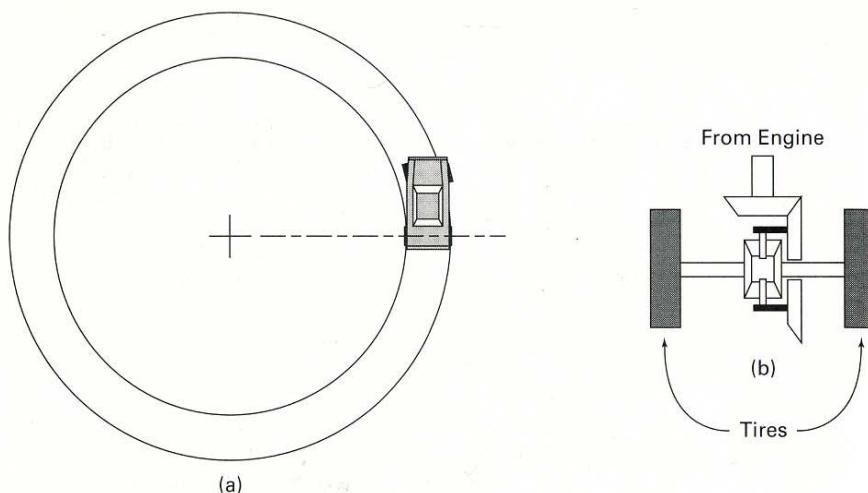
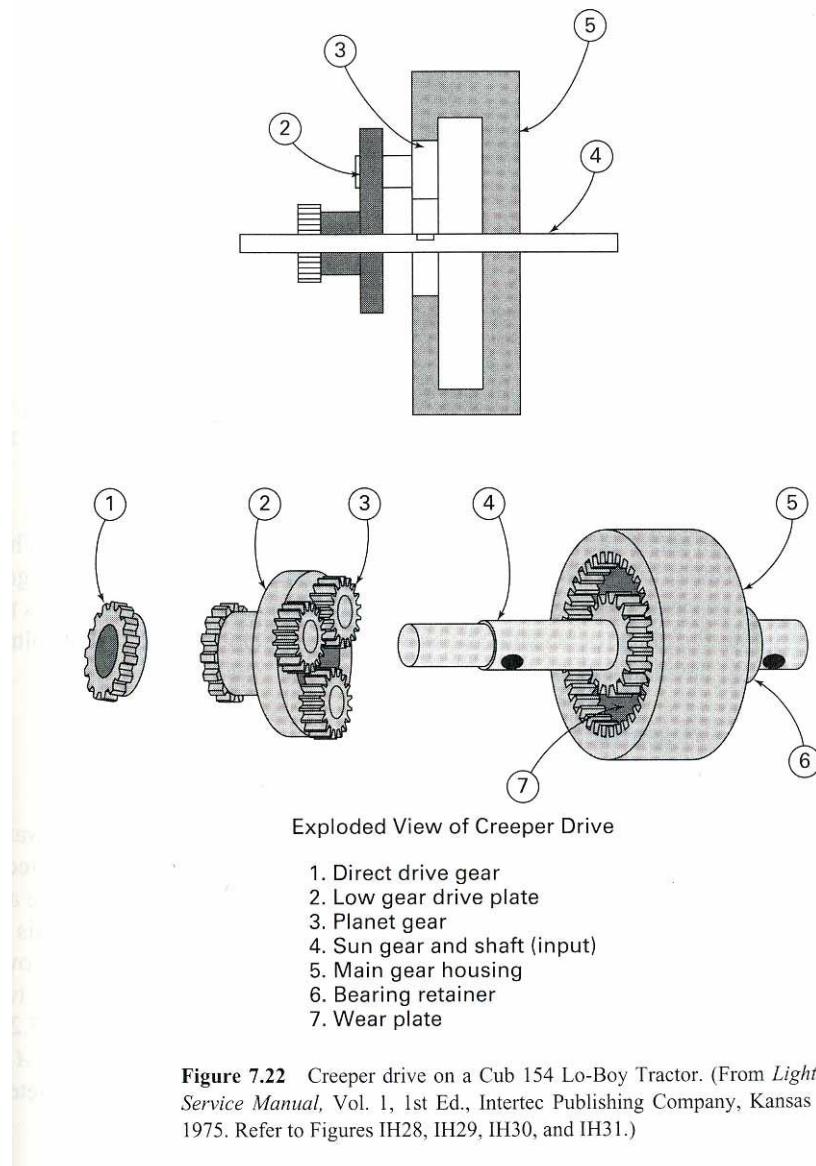


Figure 7.20 Differential located at the back axle of a car. (a) Cornering requires the two back tires to move at different speeds. (b) Unscaled diagram of a differential driving the back wheels of the car.

Transmisión

- Si un tren de engranes, es usado para transmitir potencia de un eje de entrada a un eje de salida, entonces el tren debe tener un grado de libertad. Tal tren de engranes es llamado una **transmisión**.
- Un tren de engranes planetarios puede ser usados para funcionar como transmisión , fijando un miembro a la tierra y removiendo un grado de libertad.
- La figura 7.22, es una transmisión usada por los diseñadores de tractores. Este es usado cuando los tractores necesitan moverse muy lentamente o suministrar un torque extra a las ruedas.



5.13. Determinación de la Velocidad Angular de los Engranajes Planetarios

- El análisis de trenes de engranes planetarios es complicado por el hecho de que los engranes planetas rotan alrededor de su propio centro, y al mismo tiempo rotan alrededor del centro del engrane sol.
- Este tiene dos velocidades angulares diferentes:
 1. uno respecto al brazo ω_{34} (fig. 7.24),
 2. otro con respecto a la tierra ω_{31} (rotación en el centro instantáneo, punto A).
- Se necesitan determinar ambas velocidades angulares para determinar completamente el movimiento de los engranes planetas.

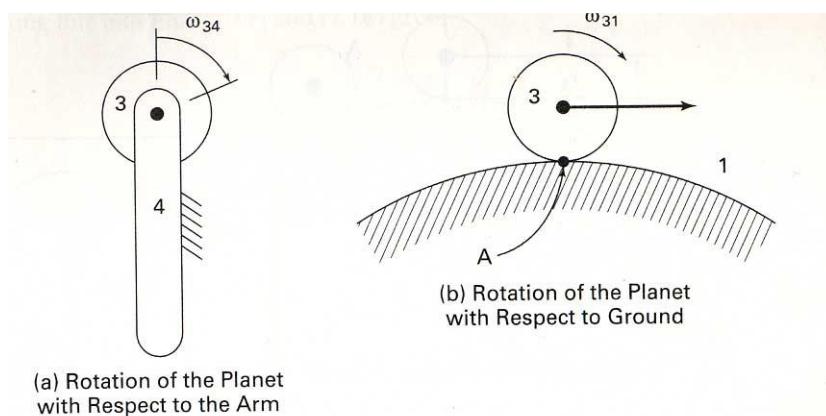


Figura 7.24 Dos perspectivas de la velocidad angular del engrane planeta

ω_{31} : Rotación del Planeta con Respecto a la Tierra

- Como el engrane planeta (3) rueda a lo largo de la circunferencia exterior del engrane sol (2), la velocidad del centro del planeta (punto B) puede ser expresado de dos diferentes maneras (fig 7.25):

$$V_B = \omega_{41} r_4$$

$$V_B = \omega_{31} r_3$$

Igualando:

$$\omega_{31} r_3 = \omega_{41} r_4$$

$$\omega_{3I} = \frac{r_4}{r_3} \omega_{4I} = \left(\frac{r_2 + r_3}{r_3} \right) \omega_{4I} = \left(\frac{r_2}{r_3} + 1 \right) \omega_{4I} \quad (1)$$

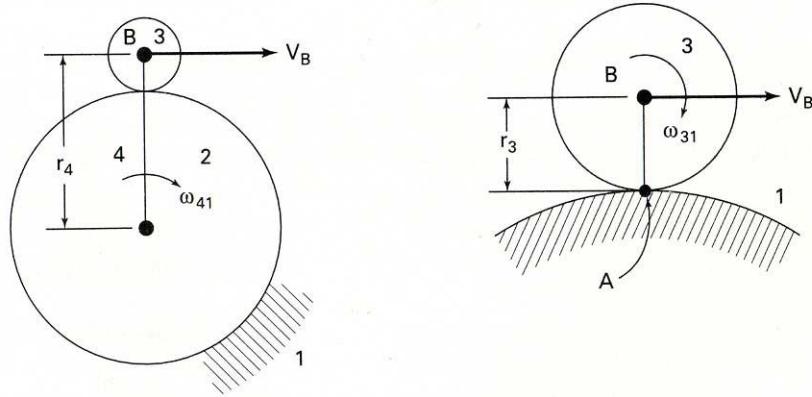


Figure 7.25 Calculating ω_{31}

ω_{34} : Rotación del Planeta con Respecto al Brazo

- A medida que el brazo se mueve, el engrane planeta rota alrededor de su propio eje unido al brazo. De la geometría, la longitud del arco A-A' es igual a:

$$L_I = \theta_{4I} (r_4 - r_3)$$

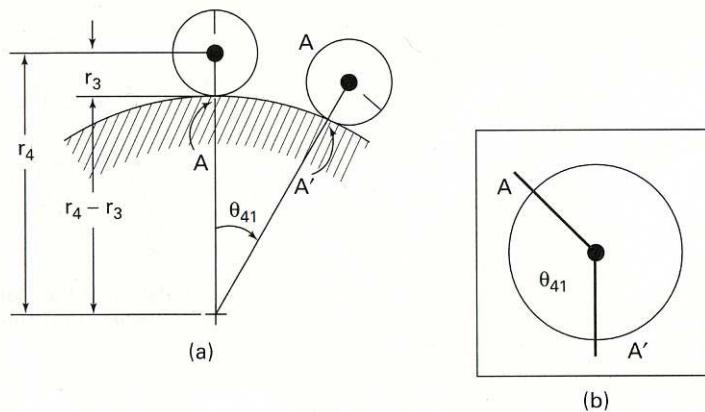


Figure 7.26. Calculating ω_{34} .

El punto A viaja la misma distancia en el engrane 3 (fig 7.26b):

$$L_1 = \theta_{34} r_3$$

Igualando las dos distancias y derivando respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \theta_{34} r_3 &= \theta_{41} (r_4 - r_3) \text{ Derivando} \\ \omega_{34} r_3 &= \omega_{41} (r_4 - r_3) \\ \text{Omega planeta.} \\ \omega_{34} &= \frac{r_4 - r_3}{r_3} \omega_{41} \end{aligned}$$

$$\omega_{34} = \left(\frac{r_4}{r_3} - 1 \right) \omega_{41} = \left(\frac{r_2 + r_3}{r_3} - 1 \right) \omega_{41} = \left(\frac{r_2}{r_3} \right) \omega_{41} \quad (2)$$

En la ecuación (2), se tomó en cuenta que $r_4 = r_2 + r_3$, como se ve en la figura 7.27.

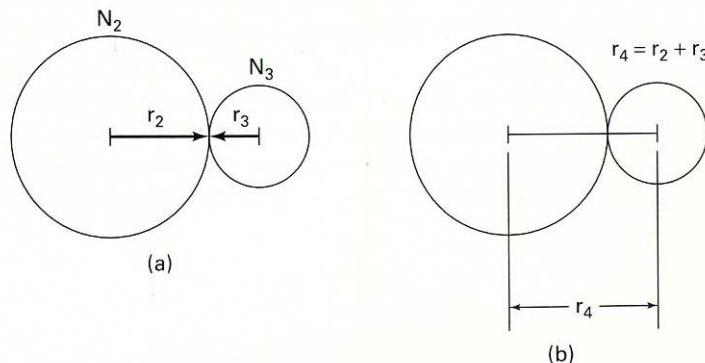


Figure 7.27 Gear tooth ratio

Además el paso diametral es:

$$P = \frac{N}{D} = \frac{\text{número de dientes / in}}{\text{diámetro de engrane}}$$

Así:

$$\begin{aligned} P &= \frac{N_2}{2r_2} = \frac{N_3}{2r_3} \\ \frac{N_2}{N_3} &= \frac{r_2}{r_3} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\mathcal{W}_{61} = \begin{pmatrix} & \\ & N \end{pmatrix}$$

De ec. (1) y (2) sustituimos (3):

$$\boldsymbol{\omega}_{3I} = \left(\frac{\mathbf{r}_2}{\mathbf{r}_3} + \mathbf{I} \right) \boldsymbol{\omega}_{4I} = \left(\frac{\mathbf{N}_2}{\mathbf{N}_3} + \mathbf{I} \right) \boldsymbol{\omega}_{4I} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{34} = \left(\frac{\mathbf{r}_2}{\mathbf{r}_3} \right) \boldsymbol{\omega}_{4I} = \left(\frac{\mathbf{N}_2}{\mathbf{N}_3} \right) \boldsymbol{\omega}_{4I} \quad (5)$$

La ecuación (4) y (5) calculan la velocidad angular del engrane planeta 3 respecto a la tierra y respecto al brazo, respectivamente.

Relaciones entre las dos Velocidades Angulares

De (5) tenemos:

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_{34}}{\boldsymbol{\omega}_{4I}} = \left(\frac{\mathbf{N}_2}{\mathbf{N}_3} \right)$$

Sustituyendo en (4):

$$\boldsymbol{\omega}_{3I} = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_{34}}{\boldsymbol{\omega}_{4I}} + \mathbf{I} \right) \boldsymbol{\omega}_{4I}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}_{3I} = \boldsymbol{\omega}_{4I} + \boldsymbol{\omega}_{34}}$$

(6)

La ecuación (6) declara que la velocidad del engrane 3 es igual a la velocidad del brazo 4, mas la velocidad de 3 respecto a 4.

5.14. El Método de la Fórmula

- El tren de engranes planetario (figura 7.28) es la configuración más simple posible: **un engrane sol, un engrane planeta y un brazo**.
- Desafortunadamente, trenes útiles son raramente simples. En general, un tren de engranes planetarios empleará más de tres engranes, y el análisis será más complicado.

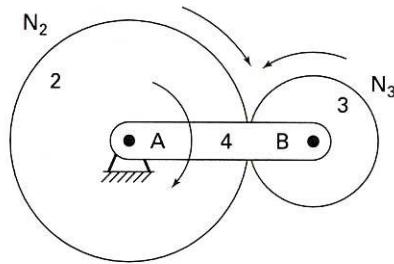


Figure 7.28 Two-degree-of-freedom planetary gear train.

- Se empezará derivando una fórmula de razón de engranes para trenes de engranes simples y se extenderá para configuraciones de trenes de engranes más reales. De la ecuación (6) se tiene:

$$\omega_{3I} = \omega_{4I} + \omega_{34} \quad (6)$$

De manera similar se puede escribir:

$$\omega_{2I} = \omega_{4I} + \omega_{24}$$

Arreglando las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \omega_{34} &= \omega_{3I} - \omega_{4I} \\ \omega_{24} &= \omega_{2I} - \omega_{4I} \end{aligned} \quad (7) \quad (8)$$

El respeto sería como si lo estuviéramos convirtiendo en Tierra.

La razón entre ω_{34} y ω_{24} se calcula como:

$$\frac{\omega_{34}}{\omega_{24}} = \frac{\omega_{3I} - \omega_{4I}}{\omega_{2I} - \omega_{4I}} \quad (9)$$

- Esta razón de velocidad es importante. En la inversión cinemática donde el brazo (4) está fijo, la razón de ω_{34} a ω_{24} es la misma como la razón de trenes de engranes ordinarios de ω_3 a ω_2 . Usando :

$$\left(\frac{\omega_L}{\omega_F} \right) = \frac{\text{Producto de número de dientes de engranes impulsores}}{\text{Producto de número de dientes de engranes impulsados}}$$

la ecuación (9) se escribe como:

$$\frac{\omega_{34}}{\omega_{24}} = -\frac{N_2}{N_3} \quad (10)$$

El signo menos indica que los engranes rotan en sentido opuesto. Igualando (9) y (10) para la razón de velocidad se tiene:

$$\frac{\omega_{34}}{\omega_{24}} = \frac{\omega_{31} - \omega_{41}}{\omega_{21} - \omega_{41}} = -\frac{N_2}{N_3}$$

Una expresión más general de este método analítico puede ser escrito como:

$\frac{\omega_{LA}}{\omega_{FA}} = \frac{\omega_L - \omega_A}{\omega_F - \omega_A} = \frac{\text{Pr oducto del n\'umero de dientes de los engranes impulsores}}{\text{Pr oducto del n\'umero de dientes de los engranes impulsados}}$	(11)
---	------

Donde: $L = \text{last} \Rightarrow \text{first} \quad A = \text{arm}$
impulsado impulsor brazo

ω_{LA} .- velocidad angular del **último** engrane **relativo** al brazo

ω_{FA} .- velocidad angular del **primer** engrane **relativo** al brazo

ω_L .- velocidad angular **absoluta** del **último** engrane

ω_F .- velocidad angular **absoluta** del **primer** engrane

ω_A .- velocidad angular **absoluta** del **brazo**

5.15. Ejemplos

Ejemplo 1

La figura 7.31 muestra un tren de engranes planetarios que tiene 2 entradas:

- el engrane sol 2, rota a 50 rad/s,
- y el carrier o brazo 6, rota a 75 rad/s

ambos en sentido horario, vistos desde la izquierda. Determinar la magnitud y la dirección de la velocidad angular del engrane sol, ω_{S1} .

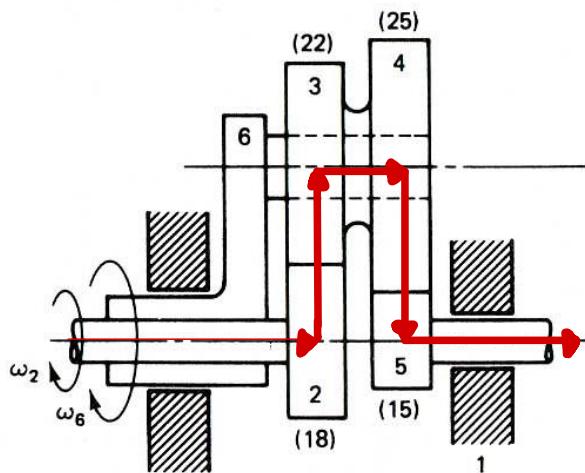


Figure 7.31 Compound planetary gear train with two inputs and one output (see Examples 7.3 and 7.6). See Fig. 7.36 for an end view sketch of this gear train.

ges impares - El sentido de giro no cambia

Solución

$$\omega_u = -50 \text{ rad/s} \quad \omega_{c1} = -75 \text{ rad/s}$$

$$\frac{\omega_{SA}}{\omega_{FA}} = \frac{\omega_L - \omega_A}{\omega_F - \omega_A} = \frac{\omega_{S1} - \omega_{G1}}{\omega_{u1} - \omega_{c1}} = \frac{N_2 N_4}{N_3 N_5} \rightarrow \text{impares:}$$

Despejar ω_S

$$\frac{\omega_S - \omega_B}{\omega_2 - \omega_{c1}} = \frac{N_2 N_4}{N_3 N_5} \Rightarrow \omega_S = \frac{(N_2 N_4)(\omega_2 - \omega_{c1})}{N_3 N_5} + \omega_B \Rightarrow \omega_S = \frac{((18)(25))(-50 - (-75))}{(22)(15)} + (-75) = -40.911 \text{ rad/s}$$

Ejemplo 2

En el tren de engranes de la figura 7.32, las entradas son el engrane sol 5 y el engrane corona 2. Para velocidades angulares de $\omega_{51} = 300 \text{ rpm}$ y $\omega_{21} = 500 \text{ rpm}$ (ambos en sentido antihorario, vistos desde la derecha), Hallar la velocidad angular del brazo 6.

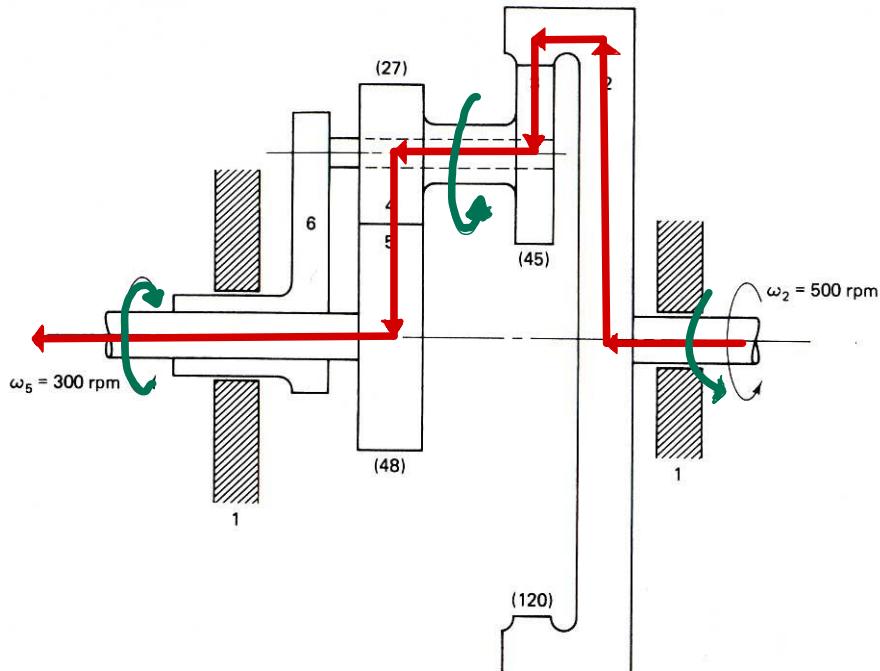


Figure 7.32 Two-degree-of-freedom planetary gear train; 2 and 5 are inputs, 6 is output (see Examples 7.4, 7.7, and 7.9). See Fig. 7.37 for an end view sketch of this gear train.

Solución

$$\omega_{2i} = 500 \text{ rpm}$$

$$\omega_{51} = 300 \text{ rpm}$$

Despejando

$$\frac{\omega_{CA}}{\omega_{F0}} = \frac{\omega_C - \omega_A}{\omega_F - \omega_A} = \frac{\omega_S - \omega_6}{\omega_2 - \omega_0} = -\frac{N_2 N_4}{N_3 N_5}$$

$$\omega_S - \omega_6 = -\frac{N_2 N_4}{N_3 N_5} \omega_2 + \frac{N_2 N_4}{N_3 N_5} \omega_6 \Rightarrow \omega_S + \frac{N_2 N_4}{N_3 N_5} \omega_2 = \omega_6 + \frac{N_2 N_4}{N_3 N_5} \omega_6 \Rightarrow \omega_S + \frac{N_2 N_4}{N_3 N_5} \omega_2 = \omega_6 \left(1 + \frac{N_2 N_4}{N_3 N_5}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_S + \frac{N_2 N_4}{N_3 N_5} \omega_2}{1 + \frac{N_2 N_4}{N_3 N_5}} = \omega_6 \quad \omega_6 = 420 \text{ rad/s}$$

Ejemplo 3

Este ejemplo es similar al ejemplo 2, pero el número de grados de libertad del tren de engranes es reducido a uno, añadiendo un engrane corona fijo en acoplamiento con el engrane planeta 4 (fig 7.33). Si $\omega_{21} = 500 \text{ rpm}$ (sentido antihorario, visto desde la derecha) , ¿cuál es la magnitud y dirección de ω_{51} ?.

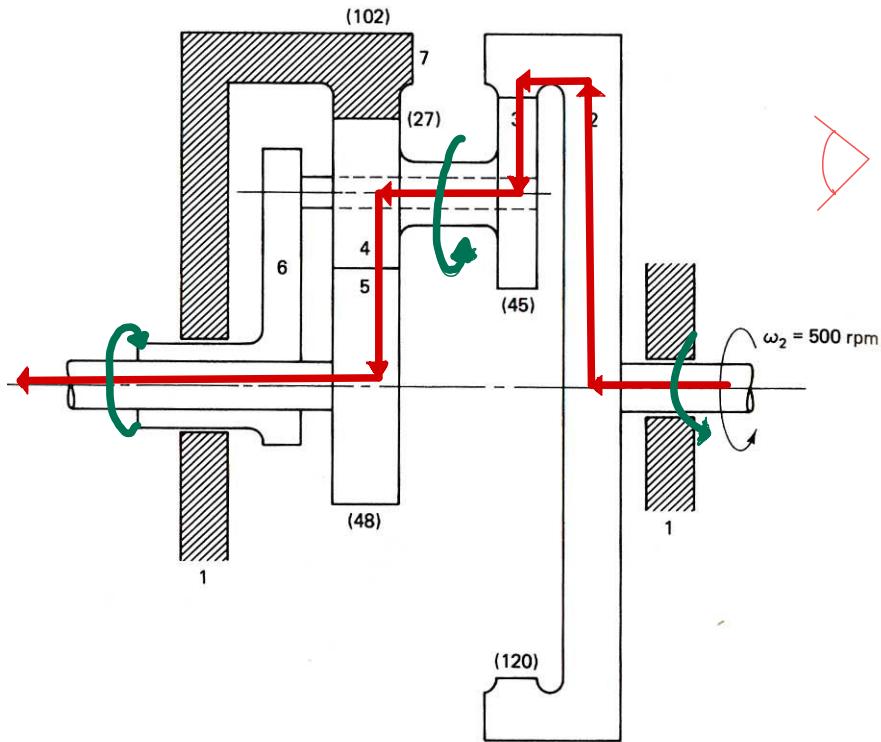


Figure 7.33 The degrees of freedom of the planetary gear train of Fig. 7.32 reduced to one by the addition of fixed ring gear 7 (see Examples 7.5 and 7.8). See Fig. 7.38 for an end view sketch of this gear train.

Solución

$$\omega_{21} = 500 \text{ rpm} \quad \omega_{71} = 0 \text{ rpm}$$

$$\frac{\omega_{CA}}{\omega_{FA}} = \frac{\omega_L - \omega_A}{\omega_F - \omega_A} = \frac{\omega_{51} - \omega_{61}}{\omega_{21} - \omega_{61}} = -\frac{N_2 N_4}{N_3 N_5} \Rightarrow \omega_{51} - \omega_{61} + \left(\frac{N_2 N_4}{N_3 N_5} \right) (\omega_{21} - \omega_{61}) = 0$$

$$\boxed{\omega_{51} - \omega_{61} \left(1 + \frac{N_2 N_4}{N_3 N_5} \right) + \left(\frac{N_2 N_4}{N_3 N_5} \right) \omega_{21} = 0} \quad \dots (1)$$

$$\frac{\omega_{51} - \omega_{61}}{\omega_{21} - \omega_{61}} = -\frac{N_2 N_4}{N_3 N_5} \times \omega_{21} = 0 \Rightarrow \omega_{51} - \omega_{61} + \left(\frac{N_2 N_4}{N_3 N_5} \right) \omega_{61} = 0$$

$$\boxed{\omega_{51} - \omega_{61} \left(1 + \frac{N_2 N_4}{N_3 N_5} \right) = 0} \quad \dots (2)$$

Sustituyendo en ① y ②

$$W_{51} + 2.5 W_{61} = -750 \quad \dots \textcircled{3}$$

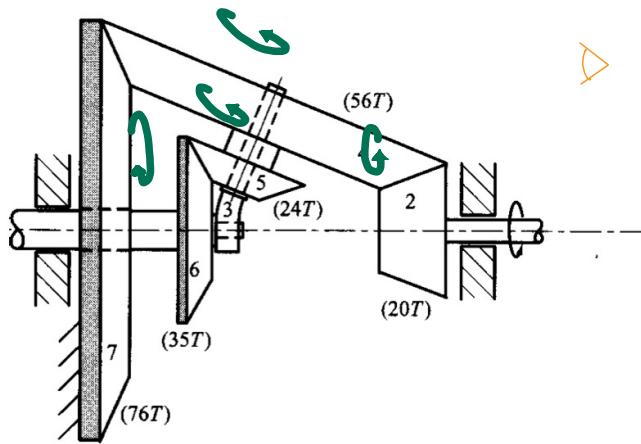
$$W_{51} - 3.125 W_{61} = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

Resolviendo el sist. ec.

$$W_{61} = 1200 \text{ l rpm} \quad W_{51} = 3750 \text{ l rpm}$$

Ejemplo 4

En este ejemplo se analizará un tren de engranes con engranes cónicos. La entrada es el engrane 2 y la salida es el engrane 6. El brazo 3 rota alrededor del eje del engrane 6. Los engranes planetarios compuestos 4 y 5 rotan alrededor del eje brazo. El engrane 7 está fijo a tierra. Si $\omega_{21} = 100 \text{ rpm}$ (sentido antihorario, visto desde la derecha), ¿cuál es la magnitud y dirección de ω_{61} ?



Solución

$$\frac{W_6 - W_3}{W_2 - W_3} = \frac{W_{61} - W_{31}}{W_{21} - W_{31}} = \frac{N_2 N_3}{N_4 N_6} \Rightarrow W_{61} - W_{31} + (W_{21} - W_{31}) \left(\frac{N_2 N_3}{N_4 N_6} \right) = 0 \Rightarrow W_{61} - W_{31} \left(1 + \frac{N_2 N_3}{N_4 N_6} \right) = -W_{21} \left(\frac{N_2 N_3}{N_4 N_6} \right) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{W_{61} - W_{31}}{W_{21} - W_{31}} = \frac{N_2 N_3}{N_4 N_6} \Rightarrow W_{61} - W_{31} + W_{31} \left(\frac{N_2 N_3}{N_4 N_6} \right) = 0 \Rightarrow W_{61} + W_{31} \left(\frac{N_2 N_3}{N_4 N_6} - 1 \right) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

Sust.

$$W_{61} - 1.2959 W_{31} = -24.4898 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$W_{61} - 0.0694 W_{31} = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

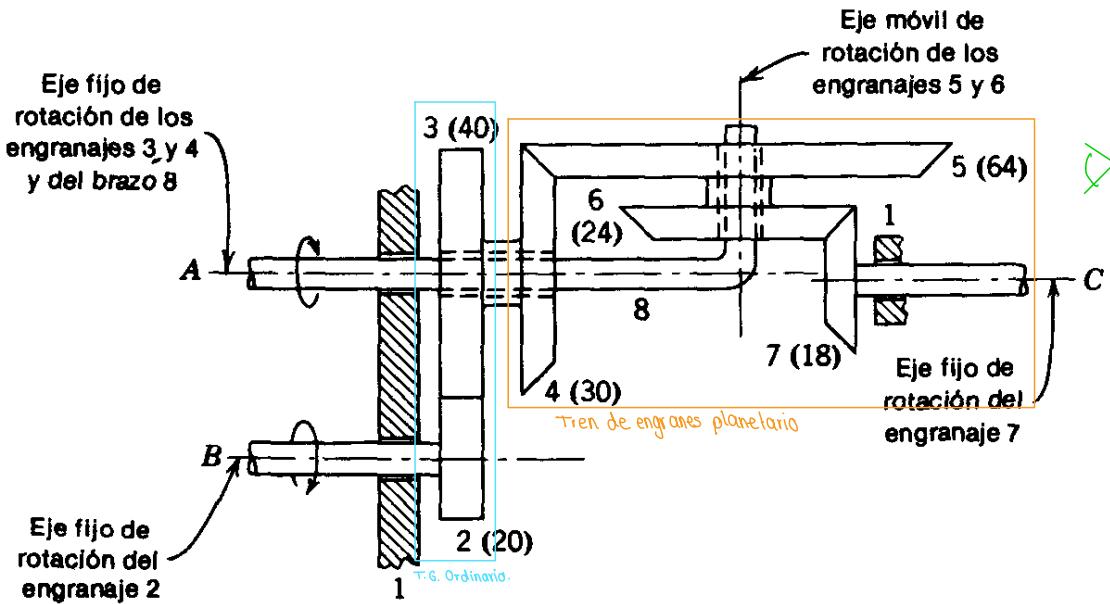
Resolviendo ③ y ④

$$W_{61} = 1.3857 \text{ l rpm}$$

$$W_{31} = 19.9672 \text{ l rpm}$$

Ejemplo 5

En el tren de engranes de la figura, la velocidad angular $\omega_{81} = 350 \text{ rad/min}$ y la velocidad angular $\omega_{21} = 2000 \text{ rad/min}$ en las direcciones mostradas. Hallar la velocidad angular ω_{71} del engrane 7.



Solución $\omega_{81} = -350 \text{ rad/min}$ $\omega_{21} = 2000 \text{ rad/min}$ $\omega_{71} = ?$

$$\frac{\omega_c - \omega_4}{\omega_f - \omega_4} = \frac{\omega_{71} - \omega_{81}}{\omega_{41} - \omega_{81}} = -\frac{N_4 N_6}{N_5 N_7} \Rightarrow \boxed{\omega_{71} = -\frac{N_4 N_6}{N_5 N_7} (\omega_{41} - \omega_{81}) + \omega_{81}} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = -\frac{N_2}{N_3} \Rightarrow \omega_{31} = \boxed{\omega_{41} = -\frac{N_2}{N_3} \omega_{21}} \quad \dots \textcircled{2}$$

Sustituyendo $\textcircled{2}$ en $\textcircled{1}$

$$\omega_{71} = -\frac{N_4 N_6}{N_5 N_7} \left(\left(-\frac{N_2}{N_3} \omega_{21} \right) - \omega_{81} \right) + \omega_{81}$$

Sustituyendo

$$\omega_{71} = -\frac{(30)(24)}{(64)(18)} \left(\left(-\frac{20}{40} (2000) \right) - (-350) \right) + (-350)$$

$$\omega_{71} = -\frac{5}{8} (-1000 + 350) - 350$$

$$\omega_{71} = 56.25 \text{ [rad/min]} \cancel{x}$$

5.16. El Método Tabular (*No se puede aplicar para conicos*)

- Un segundo método de análisis de trenes de engranes, el **método tabular**, está basado sobre la **inversión cinemática**.
- Dos partes del movimiento son analizados separadamente y después sumados:
 - 1).- **Movimiento con todos los componentes fijos al brazo y**
 - 2).- **Movimiento de todos los componentes relativos al brazo**
- Este método tiene los siguientes pasos:
 - 1).- **Desconectar todos los engranes de la tierra (si existe alguno fijo a la tierra) y fijar todos los engranes rígidamente al brazo.**
 - 2).- **Movimiento con el brazo**
 - Rotar el brazo con los engranes rígidamente unidos, un número de revoluciones proporcional a la velocidad angular del brazo.
 - Si la velocidad angular es desconocida, girar el brazo \times revoluciones, x será determinada en el análisis.
 - 3).- **Movimiento relativo al brazo**
 - Ahora el brazo es asumido para estar en su orientación final, pero algunos componentes restantes no lo están.
 - Por lo tanto, desconecta los engranes del brazo y mientras mantienes el brazo fijo, rota el resto de los componentes en sentido inverso, tal que la rotación total (paso 2 + paso 3) de uno o más de los engranes iguala sus rotaciones dadas.
 - El número total de rotaciones de cada engrane es hallado sumando sus rotaciones en los pasos 2 y 3.

Ejemplo 1

La figura 7.35 muestra un tren de engranes planetarios que tiene 1 entrada:

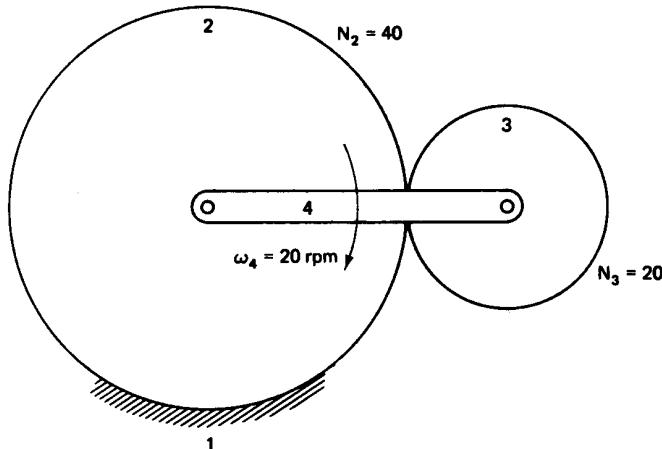


Figure 7.35 Epicyclic planetary gear set kinematically analyzed by the tabular method

Pasos 1 y 2, se escriben en una tabla como **Movimiento con el brazo**:

- 1).- Desconectar todos los engranes de la tierra y fijarlos rígidamente al brazo.
- 2).- **Movimiento con el brazo.** Rotar el brazo con los engranes rígidamente unidos.

	Engrane 2	Engrane 3	Brazo 4
1.- Mov. con el brazo	20	20	20
2.- Mov. Relativo al brazo			
3.- Mov. Total			

- De esta manera el brazo y los engranes 2 y 3, rotan 20 rpm.
- El giro horario es tomado como positivo.

Paso 3 **Movimiento relativo al brazo**:

- El brazo tiene un **movimiento total** de **20 rpm**. Y se escribe **20 rpm** en el **3^{er} renglón (Movimiento Total)**.

	Engrane 2	Engrane 3	Brazo 4
1.- Mov. con el brazo	20	20	20
2.- Mov. Relativo al brazo			
3.- Mov. Total			20

- Así que ningún movimiento más es necesario. Por lo tanto se escribe **0** en el **2^o renglón (Movimiento Relativo al brazo)**.

	Engrane 2	Engrane 3	Brazo 4
1.- Mov. con el brazo	20	20	20
2.- Mov. Relativo al brazo			0
3.- Mov. Total			20

- A continuación se usa cualquier otra información de **Movimiento Total** de los engranes.
- El movimiento total del engrane 2 es **0** (ya que originalmente está fijo).

	Engrane 2	Engrane 3	Brazo 4
1.- Mov. con el brazo	20	20	20
2.- Mov. Relativo al brazo			0
3.- Mov. Total	0		20

- Para obtener **0**, se escribe -20 rpm de **movimiento relativo al brazo**.

	Engrane 2	Engrane 3	Brazo 4
1.- Mov. con el brazo	20	20	20
2.- Mov. Relativo al brazo	-20		0
3.- Mov. Total	0		20

- Si el engrane 2 tiene -20 rpm **relativo al brazo fijo**, el engrane 3 tiene **relativo al brazo**:

$$+20 \left(\frac{N_2}{N_3} \right)$$

- Esto se calcula como:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{34}}{\omega_{24}} &= - \left(\frac{N_2}{N_3} \right) & \omega_{34} &= -\omega_{24} \left(\frac{N_2}{N_3} \right) \\ \omega_{34} &= -(-20) \left(\frac{N_2}{N_3} \right) & & \\ \omega_{34} &= +20 \left(\frac{N_2}{N_3} \right) & & \end{aligned}$$

- Así

	Engrane 2	Engrane 3	Brazo 4
1.- Mov. con el brazo	20	20	20
2.- Mov. Relativo al brazo	- 20	+ 20 $\left(\frac{N_2}{N_3}\right)$	0
3.- Mov. Total	0		20

- El movimiento total es la suma de las columnas:

	Engrane 2	Engrane 3	Brazo 4
1.- Mov. con el brazo	20	20	20
2.- Mov. Relativo al brazo	- 20	+ 20 $\left(\frac{N_2}{N_3}\right)$	0
3.- Mov. Total	0	$20 + 20 \left(\frac{N_2}{N_3}\right)$	20

- Finalmente ω_{31} es:

$$\begin{aligned}\omega_{31} &= 20 + 20 \left(\frac{N_2}{N_3}\right) \\ &= 20 + 20 \left(\frac{40}{20}\right)\end{aligned}$$

$$\omega_{31} = 60 \text{ rpm}$$

Ejemplo 2

La figura 7.31 muestra un tren de engranes planetarios que tiene 2 entradas:

- el engrane sol 2, rota a 50 rad/s,
- y el carrier o brazo 6, rota a 75 rad/s

ambos en sentido horario, vistos desde la izquierda. Determinar la magnitud y la dirección de la velocidad angular del engrane sol, ω_{s1} .

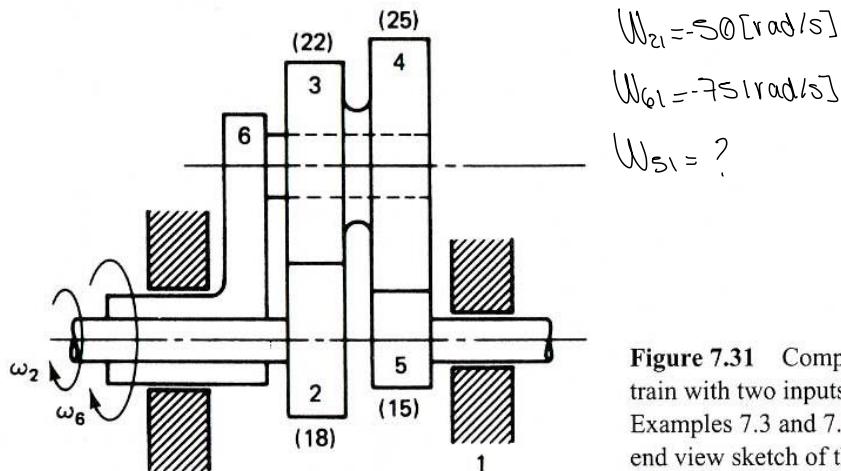


Figure 7.31 Compound planetary gear train with two inputs and one output (see Examples 7.3 and 7.6). See Fig. 7.36 for an end view sketch of this gear train.

Solución

	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	ϵ_5	B_6
Mov. con brazo	-75	-75	-75	-75	-75
Mov. rel. brazo	25	$-\omega_{26} \left(\frac{N_2}{N_3} \right) = -20.455$	$\omega_{46} = \omega_{36} - 20.455$	$-\omega_{46} \left(\frac{N_4}{N_5} \right) = 34.0917$	0
Mov. Total	-50	-95.455	-95.455	-40.91	-75

$$W_{26} = 25 \text{ [rad/s]}$$

Ejemplo 3

En el tren de engranes de la figura 7.32, las entradas son el engrane sol 5 y el engrane corona 2. Para velocidades angulares de $\omega_{51} = 300 \text{ rpm}$ y $\omega_{21} = 500 \text{ rpm}$ (ambos en sentido antihorario, vistos desde la derecha), Hallar la velocidad angular del brazo 6.

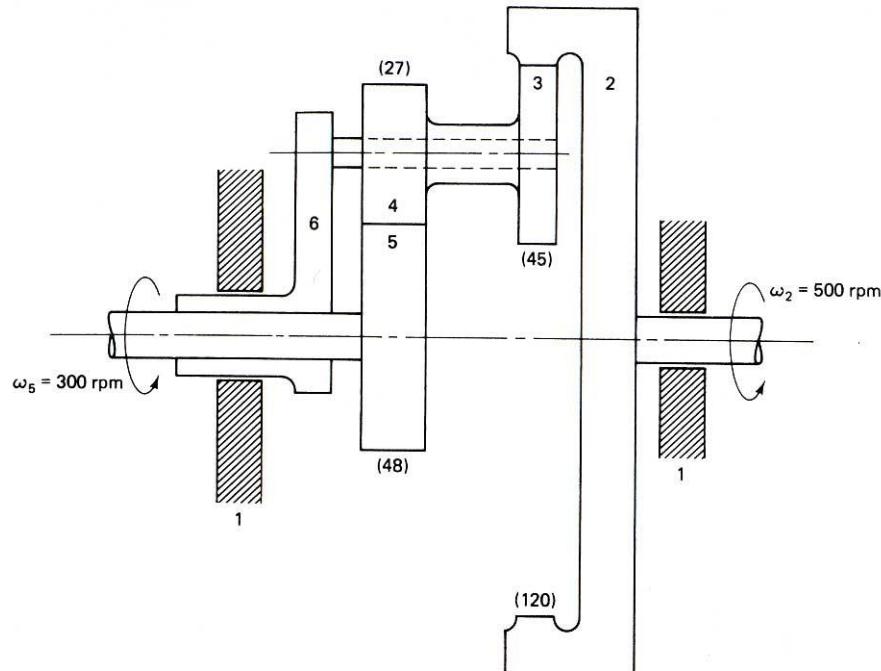


Figure 7.32 Two-degree-of-freedom planetary gear train; 2 and 5 are inputs, 6 is output (see Examples 7.4, 7.7, and 7.9). See Fig. 7.37 for an end view sketch of this gear train.

Solución

	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	B_6
Mov. con brazo	\cancel{x}_{420}	x_{420}	\cancel{x}_{420}	\cancel{x}_{420}	\cancel{x}_{420}
Mov. rel. brazo	$500 - x = 80$	$W_{26} \left(\frac{N_2}{N_3} \right)$ $(500 - x) \left(\frac{120}{420} \right) = 213.333$	$-W_{56} \left(\frac{N_5}{N_4} \right)$ $-(300 - x) \left(\frac{48}{27} \right) = 213.333$	$300 - x - 120$	\emptyset
Mov. Total	500	633.333	633.333	300	x_{420}

$$\Rightarrow \varepsilon_3 = \varepsilon_4$$

$$\Rightarrow x = 420$$

$$(500 - x) \left(\frac{120}{420} \right) = (x - 300) \left(\frac{48}{27} \right)$$

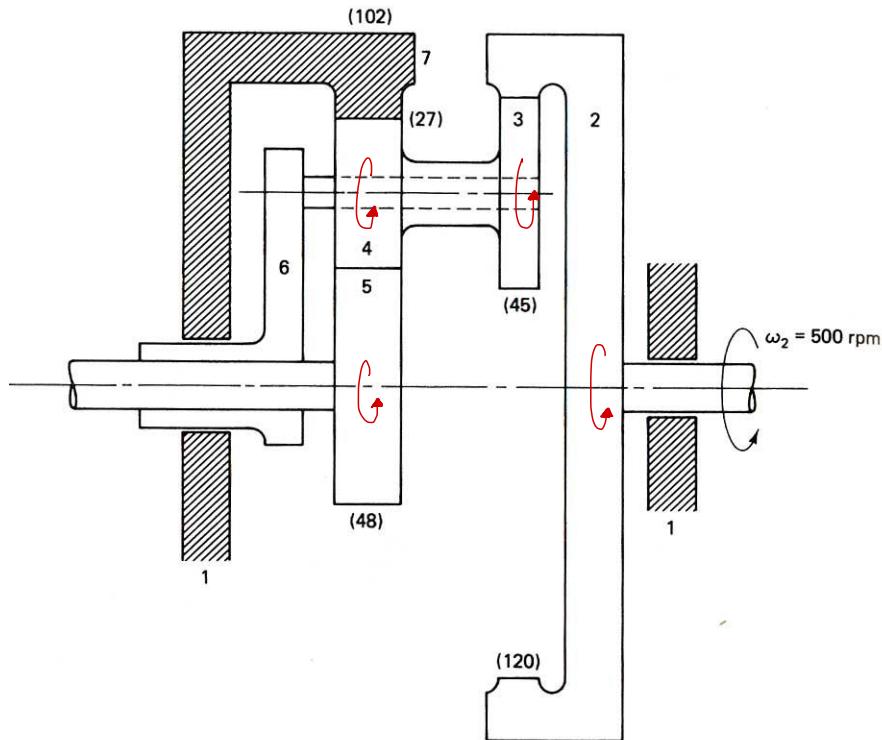
$$\frac{4000}{3} - \frac{8}{3}x = \frac{16}{9}x - \frac{1600}{3}$$

$$\frac{16}{9}x + \frac{8}{3}x = \frac{4000}{3} + \frac{1600}{3}$$

$$\frac{40}{9}x = \frac{5600}{3} \Rightarrow x = \frac{5600}{3} \left(\frac{9}{40} \right)$$

Ejemplo 4

Este ejemplo es similar al ejemplo 2, pero el número de grados de libertad del tren de engranes es reducido a uno, añadiendo un engrane corona fijo en acoplamiento con el engrane planeta 4 (fig 7.33). Si $\omega_2 = 500 \text{ rpm}$ (sentido antihorario, visto desde la derecha) , ¿cuál es la magnitud y dirección de ω_5 ?



$$\omega_2 = 500 \text{ rpm}$$

$$\omega_5 = ?$$

Figure 7.33 The degrees of freedom of the planetary gear train of Fig. 7.32 reduced to one by the addition of fixed ring gear 7 (see Examples 7.5 and 7.8). See Fig. 7.38 for an end view sketch of this gear train.

Solución

	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	ϵ_5	ϵ_7	B_G
Mov. con brazo	\times -1200	\times -1200	\times -1200	\times -1200	\times -1200	\times -1200
Mov. rel. brazo	$500 - x$ 1700	$W_{26} \left(\frac{N_2}{N_5} \right)$ $(500 - x) \left(\frac{10}{45} \right)$ 4533,333	$W_{26} \left(\frac{N_2}{N_5} \right)$ $-x \left(\frac{10}{45} \right)$ 4533,333	$-W_{46} \left(\frac{N_4}{N_5} \right)$ $-(-x \left(\frac{10}{45} \right)) \left(\frac{10}{45} \right)$ -2550	$-x$ 1200	\emptyset
Mov. Tctal	500	3333,3333	3333,3333	-3750	\emptyset	\times

$$500 - x \left(\frac{8}{3} \right) = -x \left(\frac{34}{9} \right)$$

$$\frac{8}{3}x - \frac{34}{9}x = \frac{4000}{3}$$

$$x = -1200$$

engranamiento: velocidad constante.
eslabones: plano general.

Levas: Puedes "pausar" el movimiento y sincronizarlo

Unidad 6 Síntesis Analítica de Mecanismos

6.1 Introducción

Muchos problemas de Diseño de máquinas [1], requieren la creación de un dispositivo con un movimiento particular.

- Quizás necesitas mover una herramienta de la posición A a la posición B en un intervalo de tiempo particular.
- Quizás necesitas trazar una trayectoria particular en el espacio para insertar una parte en un ensamblaje.

Las posibilidades son infinitas, pero un denominador común es frecuente, **la necesidad de un mecanismo para generar los movimientos deseados.**

En esta unidad se explorarán algunas técnicas de síntesis (diseño) de mecanismos, que permitirán crear soluciones de diseño de mecanismos para algunas aplicaciones cinemáticas típicas.

6.2 Tipos de Síntesis Cinemática

Diseñar un mecanismo apropiado involucra lo siguiente:

- **Síntesis de Tipo:** Elegir un tipo apropiado de mecanismo: *eslabones, levas, tren de engranes, dispositivos de movimiento intermitente o una combinación de ellos.*
- **Síntesis Dimensional:** Determinar un conjunto de dimensiones apropiadas o mejor aún, **óptimas**, para las partes del mecanismo.

Ermand y Sandor [1], definen tres tipos de **Síntesis Dimensional Cinemática**:

1.- Generación de Función: Es definida como la correlación de una **función de entrada** con una **función de salida** en un mecanismo.

- Típicamente un mecanismo de doble balancín o manivela – corredera es el resultado, con rotación de entrada y salida pura (figura 1–2).
- Un mecanismo de manivela – corredera puede ser también un generador de función. Con rotación y traslación o viceversa en entrada – salida.

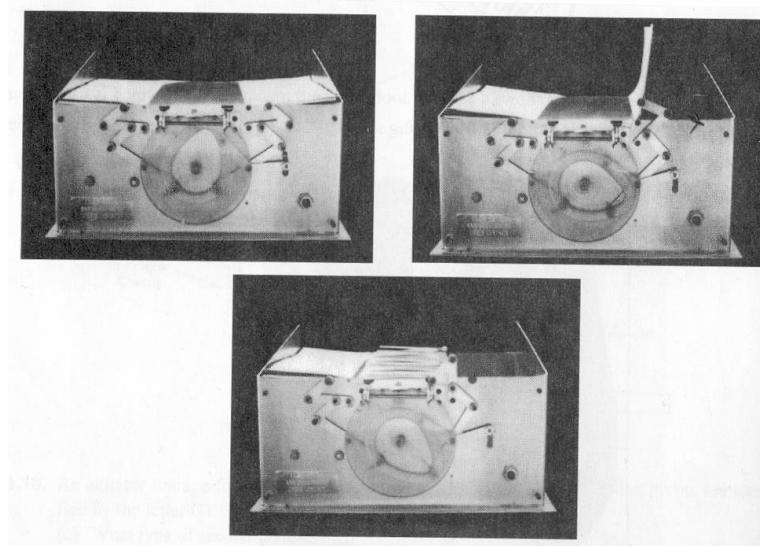


Figura 1 Mecanismo dobladora de trípticos

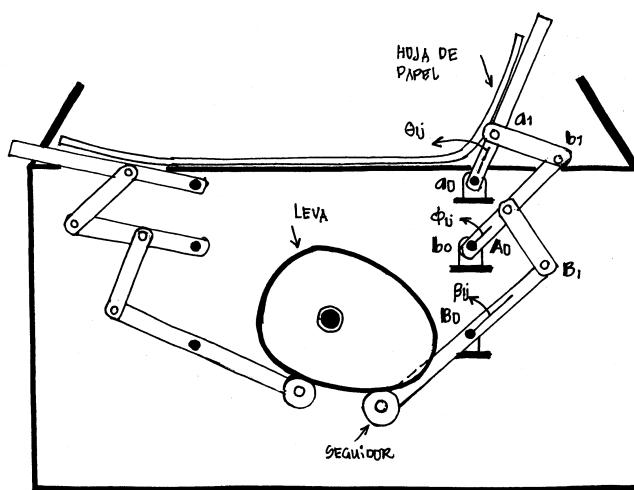


Figura 2 Mecanismo generación de función

2.- Generación de Trayectoria: Es definida como el control de un *punto* en el plano tal que este, sigue alguna trayectoria preescrita.

- Este es típicamente realizado con un mecanismo de 4 barras de doble balancín o manivela – corredera, en donde un punto sobre el acoplador traza la trayectoria de salida deseada (figura 3).
- No se intenta controlar la orientación del eslabón el cual contiene el punto de interés.
- La curva del acoplador pasa a través de un conjunto de puntos deseados.
- Es común sincronizar el giro de la manivela con los puntos de la trayectoria.
- Este caso es llamado **generación de trayectoria con temporización (timing)**.

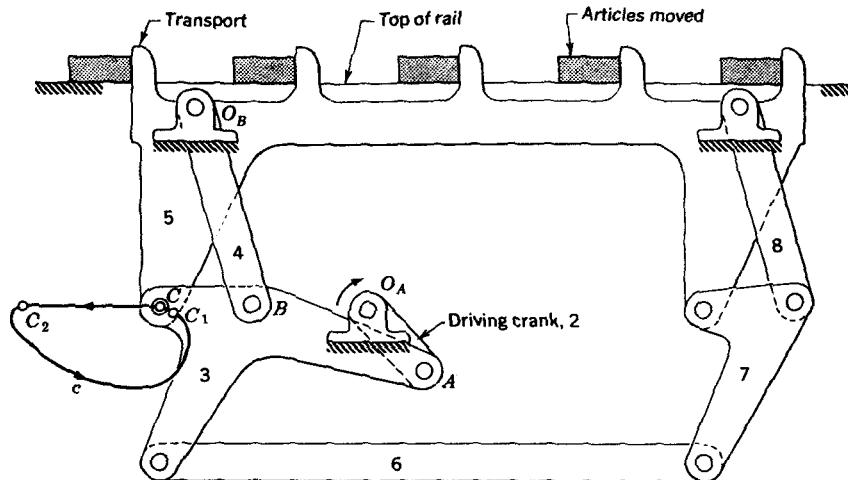


Figura 3 Mecanismo transportador

3.- Generación de Movimiento (Conducción de Cuerpo Rígido): Se define como el control de una línea en el plano, cuando esta asume algún conjunto de posiciones preescritas.

- Este es típicamente realizado con un mecanismo de 4 barras, manivela – balancín o doble balancín. Donde un punto sobre el acoplador traza la trayectoria de salida deseada y el eslabón controla la orientación del acoplador (figura 4).

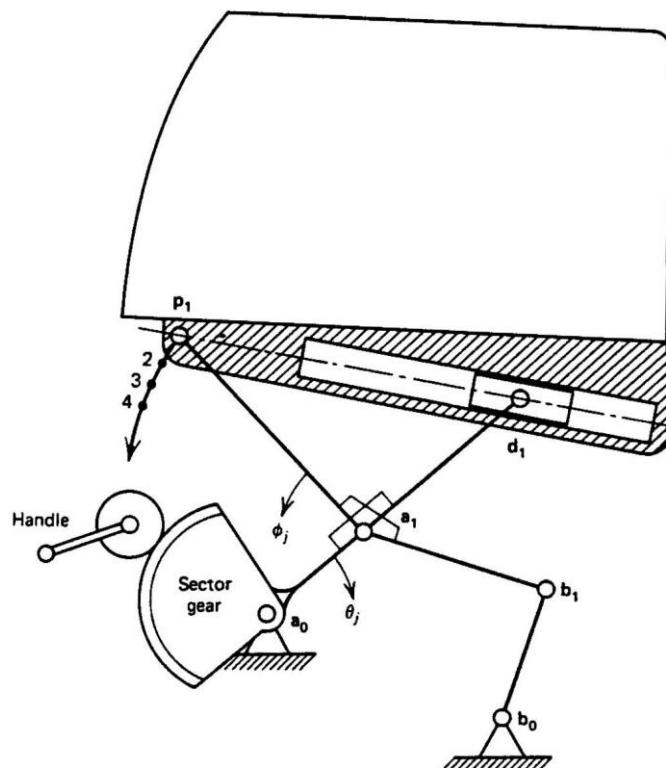


Figura 4 Mecanismo conductor del cristal de la ventana de un auto.

6.3 Puntos de Precisión

Los puntos, o posiciones preescritas para localizaciones sucesivas del eslabón de salida (acoplador o balancín) en el plano, son llamados **puntos de precisión** o **posiciones de precisión**.

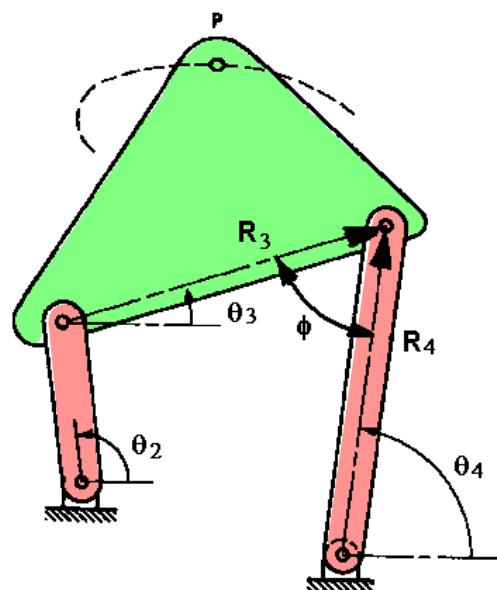
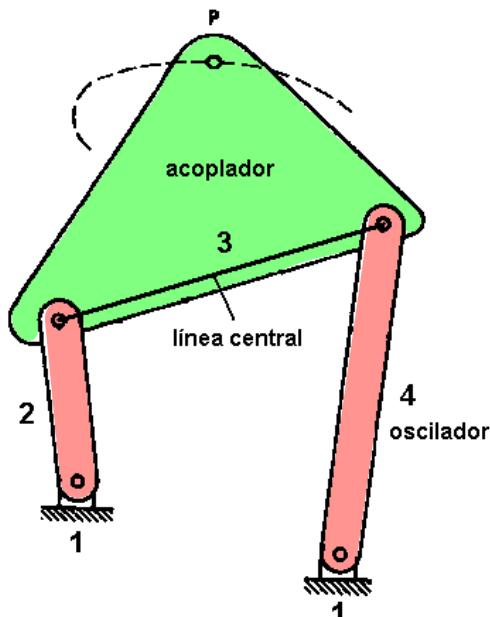
- El número de puntos de precisión los cuales pueden ser sintetizados, está limitado por el número de ecuaciones disponibles para la solución.
- Las ecuaciones de síntesis darán soluciones que estarán o pasarán en los puntos de precisión, pero no garantizan el comportamiento entre estos puntos.
- Es posible que el mecanismo resultante, sea incapaz de moverse entre los puntos de precisión.
- De ahí la necesidad de crear un programa de computadora para evaluar la movilidad del mecanismo y la transmisión del movimiento o **ángulo de transmisión**.

6.4 Ángulo de Transmisión

(El ángulo ideal es 90° porque la fuerza será tangencial a la trayectoria del oscilador.)

El **ángulo de transmisión** ϕ es una medida de la fuerza transmitida por el eslabón acoplador al eslabón oscilador de salida en un mecanismo.

La figura 5 muestra un mecanismo manivela – balancín:



- El eslabón acoplador 3, transmite fuerza a lo largo de su línea central al eslabón oscilador 4 (figura 5).

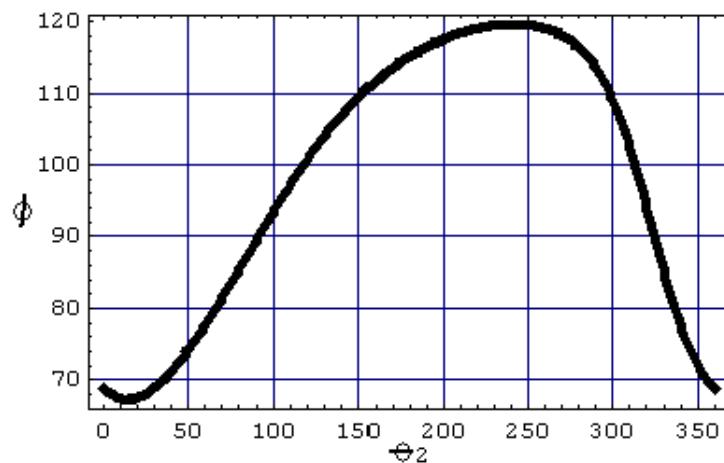
(acoplador y oscilador es solo que se maneja el ángulo de presión.)

- Si queremos **maximizar** el torque de salida (en la barra 4) y **minimizar** el torque de fricción (figura 6), trataremos de mantener el ángulo de transmisión ϕ muy próximo a 90° .
- Un ángulo ϕ satisfactorio está en un rango de $\pm 50^\circ$, es decir:

$$(90^\circ - 50^\circ) \leq \phi \leq (90^\circ + 50^\circ)$$

$$40^\circ \leq \phi \leq 140^\circ$$

- Dependiendo del tipo de rodamiento y lubricación, valores fuera de este rango resultarán en:
 1. Atascamiento del mecanismo.
 2. Carga excesiva en los rodamientos.
 3. Flexión en las barras.
 4. Desgaste.
 5. Ruido.
 6. Vibraciones, a más grandes velocidades de los cuerpos.
 7. Necesidad de motores con capacidad de torque más grande.
- El ángulo de transmisión cambia mientras el mecanismo se mueve. Si θ_2 es el ángulo de entrada, una posible gráfica de ϕ dentro del límite sería:



- El ángulo de transmisión ϕ se calcula como (figura 6):

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{R}_4}{\|\mathbf{R}_3\| \|\mathbf{R}_4\|}$$

$$\phi = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{R}_4}{\|\mathbf{R}_3\| \|\mathbf{R}_4\|} \right)$$

6.5 Ecuaciones de Diseño para Generación de Movimiento

Generación de Movimiento (Conducción de Cuerpo Rígido)

Este problema requiere que un cuerpo (eslabón 3), no unido directamente a la tierra, pase a través de posiciones y orientaciones específicas (figura 7).

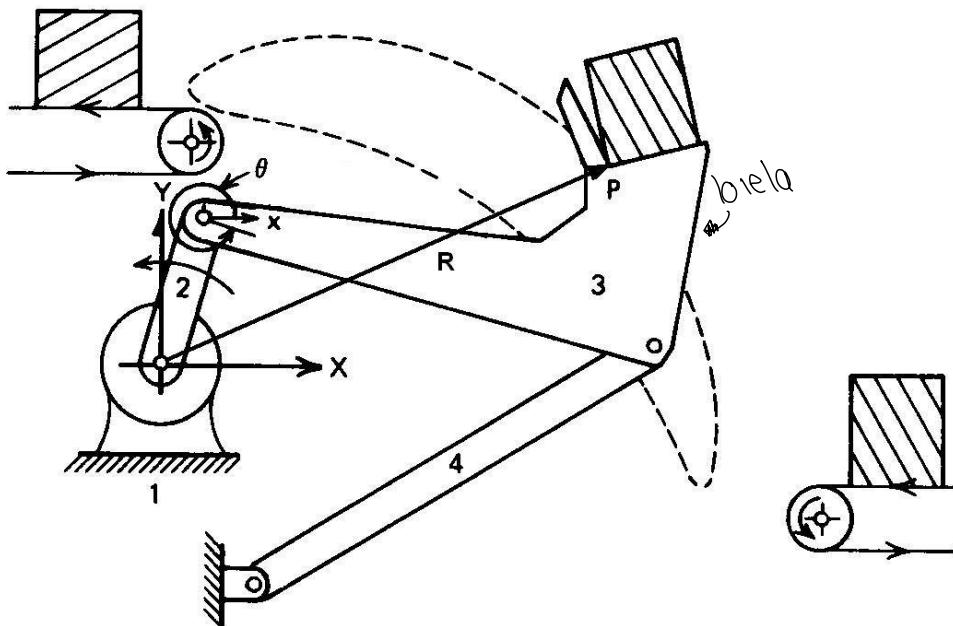


Figura 7 Mecanismo para conducción de cuerpo rígido

En el siguiente desarrollo, a un **par de vectores** se les llamará **diada**. Considere la posición 1 y 2 del mecanismo de 4 barras, mostrado en la figura 8.

1. El vector de posición \mathbf{R}_{21} define el desplazamiento del punto P como:

$$\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 \quad (1)$$

2. La **diada** $\mathbf{W}_1\mathbf{Z}_1$ define la *mitad derecha* del mecanismo. La **diada** $\mathbf{U}_1\mathbf{S}_1$ define la *mitad izquierda* del mecanismo.
3. Si definimos las dos diadas $\mathbf{W}_1\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{U}_1\mathbf{S}_1$, tendremos definido el mecanismo que satisface las especificaciones del problema.
4. \mathbf{Z}_1 y \mathbf{S}_1 forman el eslabón 3 y rotan un ángulo α_2 de la posición 1 a la 2.
5. El vector \mathbf{V}_1 y \mathbf{G}_1 se definen como:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{Z}_1 - \mathbf{S}_1 \quad (2a)$$

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{W}_1 + \mathbf{V}_1 - \mathbf{U}_1 \quad (2b)$$

6. La ecuación de diseño de la *mitad derecha*, se forma con la ecuación de lazo vectorial:

$$\mathbf{W}_2 + \mathbf{Z}_2 - \mathbf{R}_{21} - \mathbf{Z}_1 - \mathbf{W}_1 = \mathbf{0} \quad (3)$$

$$w e^{i(\theta+\beta_2)} + z e^{i(\phi+\alpha_2)} - r_{21} e^{i\delta_2} - z e^{i\phi} - w e^{i\theta} = 0$$

$$w e^{i\theta} e^{i\beta_2} + z e^{i\phi} e^{i\alpha_2} - r_{21} e^{i\delta_2} - z e^{i\phi} - w e^{i\theta} = 0$$

$$w e^{i\theta} (e^{i\beta_2} - 1) + z e^{i\phi} (e^{i\alpha_2} - 1) = r_{21} e^{i\delta_2} \quad (4)$$

Los vectores \mathbf{W}_1 y \mathbf{W}_2 tienen la misma magnitud w , ya que son los mismos eslabones en diferente posición. Igualmente, para \mathbf{Z}_1 y \mathbf{Z}_2 su magnitud es z .

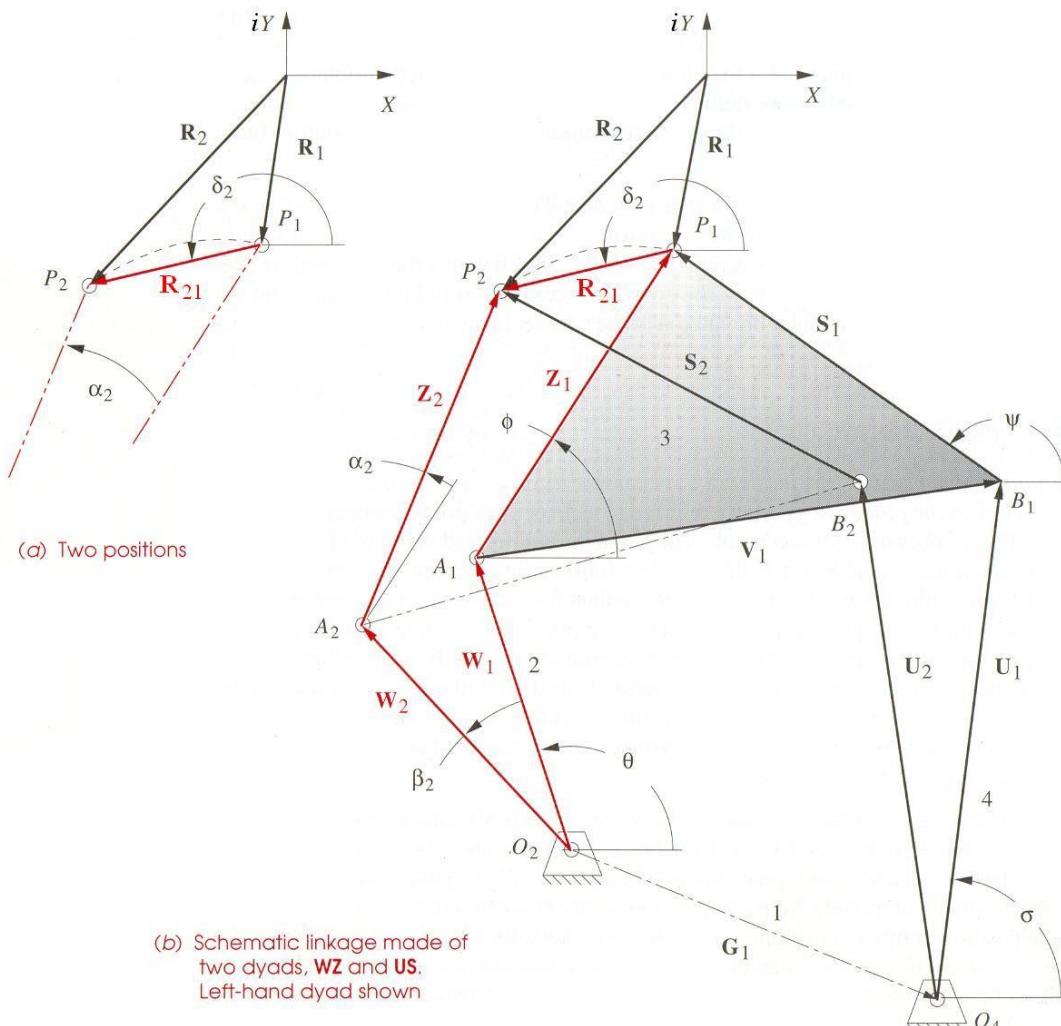


Figura 8 Lazos vectoriales

7. Sabemos que:

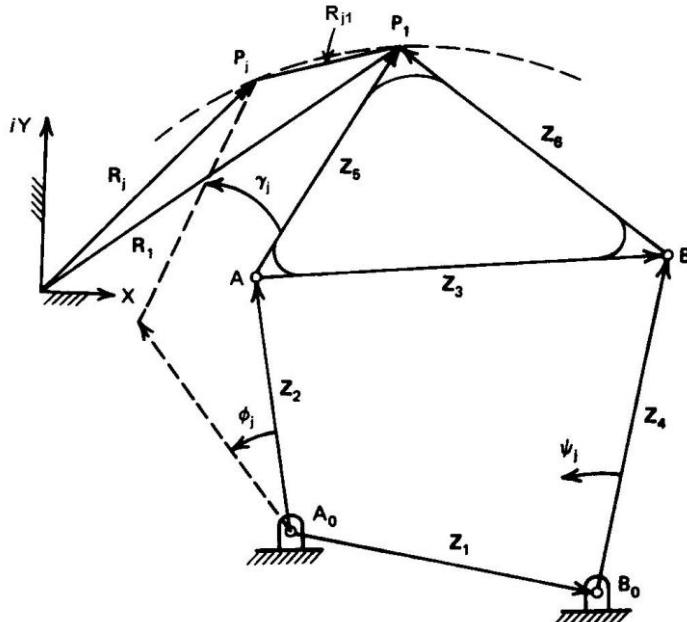
$$\mathbf{W}_1 = w e^{i\theta}$$

$$\mathbf{Z}_1 = z e^{i\phi}$$

La ec.(4) se puede escribir como:

$$\mathbf{W}_1 (e^{i\beta^2} - 1) + \mathbf{Z}_1 (e^{i\alpha^2} - 1) = \mathbf{R}_{21} \quad (5)$$

8. A partir de la figura 9, la ecuación de diseño (5), se puede generalizar como:



$$\psi = \varphi_{S1}$$

Figura 9

$$\mathbf{Z}_2 (e^{i\phi_j} - 1) + \mathbf{Z}_5 (e^{i\gamma_j} - 1) = \mathbf{R}_{j1} \quad (6a)$$

$$\mathbf{Z}_4 (e^{i\psi_j} - 1) + \mathbf{Z}_6 (e^{i\gamma_j} - 1) = \mathbf{R}_{j1} \quad (6b)$$

La cual es conocida como la **ecuación de la forma estandar de la diada**.
Además:

$$\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_5 - \mathbf{Z}_6 \quad (7a)$$

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_4 \quad (7b)$$

Ejemplo 1 Generación de Movimiento

Diseño de Mecanismo Pick and Place

- La compañía 3M requería un mecanismo para alimentar discos automáticamente a partir de un depósito y colocarlos sobre una banda transportadora [2].
- La figura 10, muestra los discos apilados en el depósito y las tres posiciones de diseño que cada disco debe ir pasando.

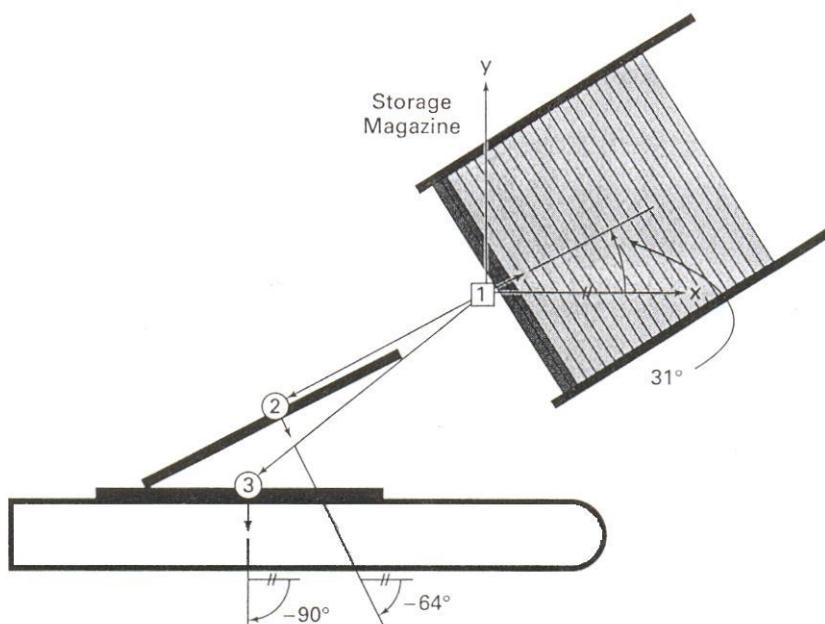


Figura 10

- Las coordenadas (x , y) de un punto sobre el disco en la **primera** y **tercera** posición son conocidas, también las orientaciones angulares de los discos en estas posiciones.
- La tarea a ejecutar es **generación de movimiento (conducción de cuerpo rígido)** y el mecanismo solución es referido como un **mecanismo de pick and place**, los objetos son tomados a partir del depósito y colocados en alguna localización preescrita.
- Aunque la primera y la última posición son de gran importancia, la posición intermedia es preescrita para ayudar a guiar los discos en la dirección correcta.
- Un dispositivo mecánico era requerido para esta tarea, debido que los operadores no podrían manualmente alimentar los discos lo suficientemente rápido.
- Aunque robots son usados frecuentemente en aplicaciones de pick and place, un mecanismo de cuatro barras es suficiente.

- Un reto adicional es localizar la parte inferior del depósito tan cerca como sea posible a la banda transportadora, tal que el operador pueda cargar los discos en el depósito sin subir a una escalera.
- Además, el mecanismo de cuatro barras tiene que satisfacer los siguientes criterios:
 1. Deberá ser relativamente compacto.
 2. Los pivotes a tierra deberán ser localizados en posiciones razonables.
 3. Los eslabones que están rotando no deberán interferir con la banda transportadora o el depósito, como el mecanismo ejecuta su tarea.
- Una posible solución es mostrada en la figura 11, en las primeras tres posiciones de diseño.

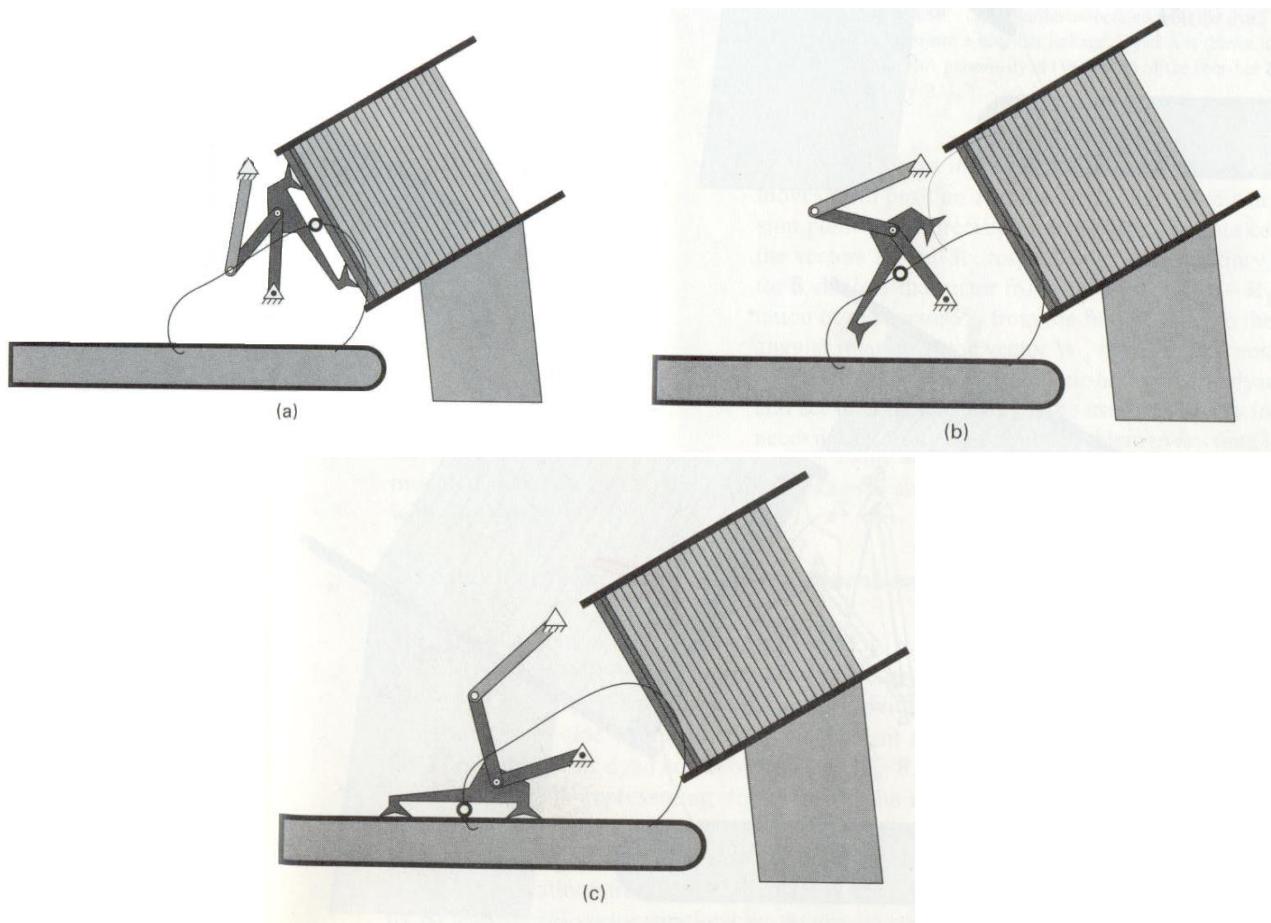


Figura 11

- Los discos pueden ser transportados por el eslabón acoplador o por algún dispositivo, que está soldado en el eslabón acoplador.
- El diseño final es mostrado en la figura 12 y está formado por dos mecanismos de cuatro barras: **un mecanismos de pick & place y un mecanismo motriz**.

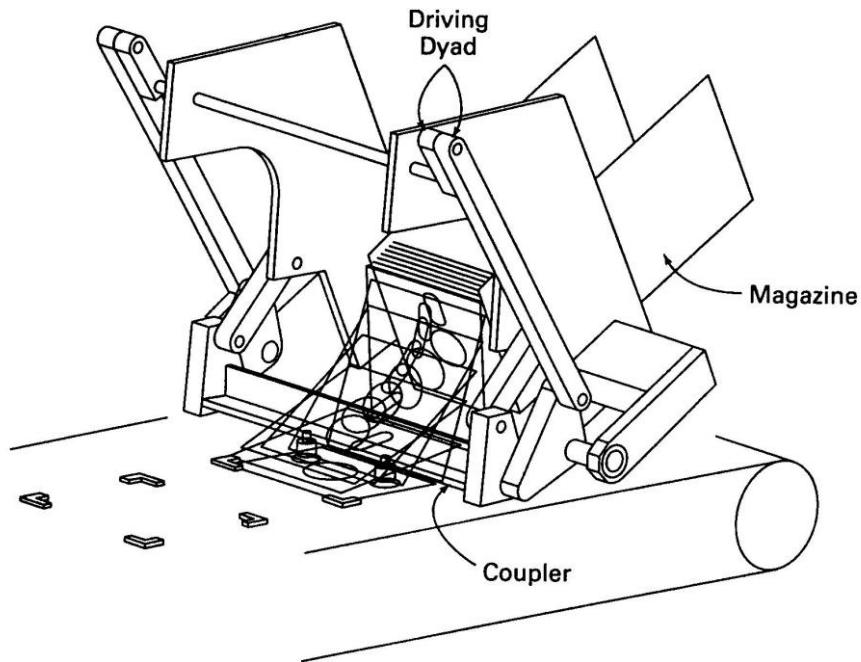


Figura 12

- En el mecanismo final, el eslabón acoplador con copas de vacío adheridas, se extiende a través del frente del depósito.
- El mecanismo, excluyendo el acoplador, está duplicado en ambos lados del depósito.
- El diseñador podría haber construido el mecanismo sobre un solo lado del depósito con el acoplador en cantiliver. Sin embargo, el depósito era demasiado largo.
- Los eslabones del mecanismo fueron hechos de barras y placas de aluminio, mientras que rodamientos de aguja fueron usados para las juntas.

Solución

El sistema coordenado es localizado por simplicidad en el punto de la primera posición (figura 10).

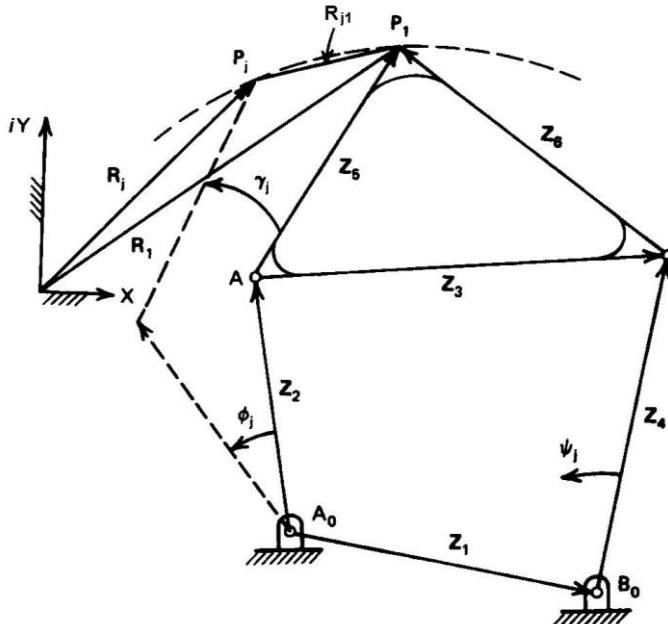


Figura 9

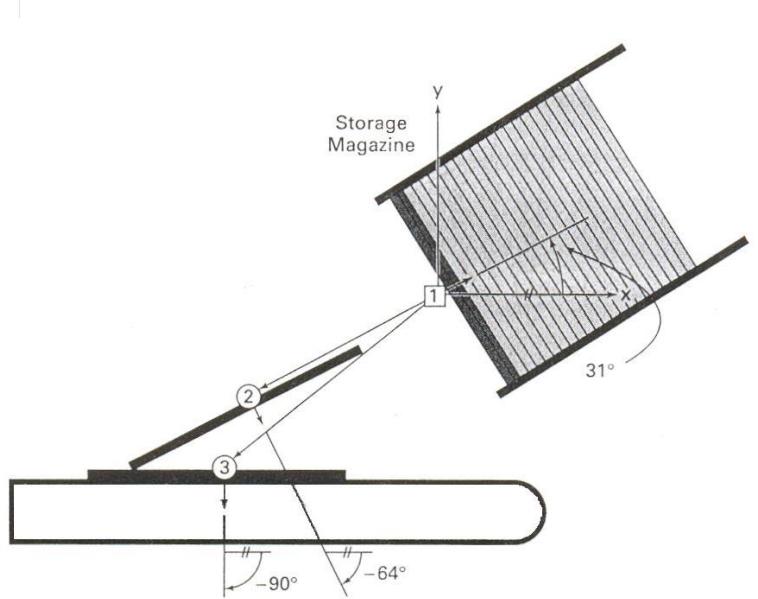


Figura 10

Las ecs. de diseño son (figura 9):

$$\mathbf{Z}_2 (e^{i\phi_j} - 1) + \mathbf{Z}_5 (e^{i\gamma_j} - 1) = \mathbf{R}_{j1} \quad (6a)$$

$$\mathbf{Z}_4 (e^{i\psi_j} - 1) + \mathbf{Z}_6 (e^{i\gamma_j} - 1) = \mathbf{R}_{j1} \quad (6b)$$

$$\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_5 - \mathbf{Z}_6 \quad (7a)$$

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_4 \quad (7b)$$

Datos:

$$\mathbf{R}_1 = 0 + 0 \mathbf{i} \quad \theta_1 = 31^\circ$$

$$\mathbf{R}_2 = -1.21 - 0.65 \mathbf{i} \quad \theta_2 = 296^\circ$$

$$\mathbf{R}_3 = -1.37 - 1.09 \mathbf{i} \quad \theta_3 = 270^\circ$$

Donde:

$$\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 = -1.21 - 0.65 \mathbf{i}$$

$$\mathbf{R}_{31} = \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1 = -1.37 - 1.09 \mathbf{i}$$

$$\gamma_2 = \theta_2 - \theta_1 = -95^\circ$$

$$\gamma_3 = \theta_3 - \theta_1 = -121^\circ$$

$$\mathbf{Z}_2 = x_2 + y_2 \mathbf{i} \quad \mathbf{e}^{i\phi_j} = c\phi_j + s\phi_j \mathbf{i}$$

$$\mathbf{Z}_4 = x_4 + y_4 \mathbf{i} \quad \mathbf{e}^{i\psi_j} = c\psi_j + s\psi_j \mathbf{i}$$

$$\mathbf{Z}_5 = x_5 + y_5 \mathbf{i} \quad \mathbf{e}^{i\gamma_j} = c\gamma_j + s\gamma_j \mathbf{i}$$

$$\mathbf{Z}_6 = x_6 + y_6 \mathbf{i}$$

Resolviendo para Z_2 y Z_5

Desarrollando las ecs.(6a) para $j = 2, 3$:

$$Z_2 (e^{i\phi^2} - 1) + Z_5 (e^{i\gamma^2} - 1) = R_{21} \quad (E1.1)$$

$$Z_2 (e^{i\phi^3} - 1) + Z_5 (e^{i\gamma^3} - 1) = R_{31} \quad (E1.2)$$

Sustituyendo Z_2 y Z_5 :

$$(x_2 + y_2 i) (e^{i\phi^2} - 1) + (x_5 + y_5 i) (e^{i\gamma^2} - 1) = R_{21}$$

$$(x_2 + y_2 i) (e^{i\phi^3} - 1) + (x_5 + y_5 i) (e^{i\gamma^3} - 1) = R_{31}$$

Sustituyendo $e^{i\phi^2}, e^{i\phi^3}, e^{i\gamma^2}, e^{i\gamma^3}$:

$$(x_2 + y_2 i) ((c\phi_2 + s\phi_2 i) - 1) + (x_5 + y_5 i) ((c\gamma_2 + s\gamma_2 i) - 1) = (x_{21} + y_{21} i)$$

$$(x_2 + y_2 i) ((c\phi_3 + s\phi_3 i) - 1) + (x_5 + y_5 i) ((c\gamma_3 + s\gamma_3 i) - 1) = (x_{31} + y_{31} i)$$

Multiplicando y arreglando en reales e imaginarios:

$$(x_2(c\phi_2 - 1) + x_5(c\gamma_2 - 1) - y_2 s\phi_2 - y_5 s\gamma_2) + (y_2(c\phi_2 - 1) + y_5(c\gamma_2 - 1) + x_2 s\phi_2 + x_5 s\gamma_2) i = x_{21} + y_{21} i$$

$$(x_2(c\phi_3 - 1) + x_5(c\gamma_3 - 1) - y_2 s\phi_3 - y_5 s\gamma_3) + (y_2(c\phi_3 - 1) + y_5(c\gamma_3 - 1) + x_2 s\phi_3 + x_5 s\gamma_3) i = x_{31} + y_{31} i$$

De ec.(E1.1) tenemos 2 ecs. escalares:

$$\text{Re: } (x_2(c\phi_2 - 1) + x_5(c\gamma_2 - 1) - y_2 s\phi_2 - y_5 s\gamma_2) = x_{21} \quad (E1.3)$$

$$\text{Im: } (y_2(c\phi_2 - 1) + y_5(c\gamma_2 - 1) + x_2 s\phi_2 + x_5 s\gamma_2) = y_{21}$$

De ec.(E1.2) tenemos 2 ecs. escalares:

$$\text{Re: } (x_2(c\phi_3 - 1) + x_5(c\gamma_3 - 1) - y_2 s\phi_3 - y_5 s\gamma_3) = x_{31} \quad (E1.4)$$

$$\text{Im: } (y_2(c\phi_3 - 1) + y_5(c\gamma_3 - 1) + x_2 s\phi_3 + x_5 s\gamma_3) = y_{31}$$

En total tenemos **4 ecs. escalares** \times **6 incógnitas** ($x_2, y_2, x_5, y_5, \phi_2, \phi_3$), para el problema de **Generación de Movimiento de 3 puntos de precisión**. Para resolver damos arbitrariamente (ϕ_2, ϕ_3). Y se tiene finalmente **4 ecs. escalares** \times **4 incógnitas** (x_2, y_2, x_5, y_5).

Resolviendo ecs. (E1.3) y (E1.4) a partir de los datos:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{21} &= -1.21 - 0.65 \mathbf{i} \\ \mathbf{R}_{31} &= -1.37 - 1.09 \mathbf{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= -95^\circ \\ \gamma_3 &= -121^\circ\end{aligned}$$

Y sugiriendo:

$$\begin{aligned}\phi_2 &= 68^\circ \\ \phi_3 &= 114^\circ\end{aligned}$$

Las ecs.(E1.3) y (E1.4) toman la forma:

$$\begin{aligned}\text{Re: } -0.625 x_2 - 1.087 x_5 - 0.927 y_2 + 0.996 y_5 &= -1.21 \\ \text{Im: } 0.927 x_2 - 0.996 x_5 - 0.625 y_2 - 1.087 y_5 &= -0.65\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Re: } -1.406 x_2 - 1.515 x_5 - 0.913 y_2 + 0.857 y_5 &= -1.37 \\ \text{Im: } 0.913 x_2 - 0.857 x_5 - 1.406 y_2 - 1.515 y_5 &= -1.09\end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\begin{array}{ll}x_2 = 0.031 & y_2 = 0.700 \\ x_5 = 0.381 & y_5 = -0.127\end{array}$$

Vectorialmente:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_2 &= x_2 + y_2 \mathbf{i} = 0.031 + 0.700 \mathbf{i} \\ \mathbf{Z}_5 &= x_5 + y_5 \mathbf{i} = 0.381 - 0.127 \mathbf{i}\end{aligned}$$

Resolviendo para Z_4 y Z_6

Desarrollando las ecs.(6b) para $j = 2, 3$:

$$Z_4 (e^{i\psi^2} - 1) + Z_6 (e^{i\gamma^2} - 1) = R_{21} \quad (E1.5)$$

$$Z_4 (e^{i\psi^3} - 1) + Z_6 (e^{i\gamma^3} - 1) = R_{31} \quad (E1.6)$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} Z_4 &= x_4 + y_4 i \\ Z_6 &= x_6 + y_6 i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\psi_j} &= c\psi_j + s\psi_j i \\ e^{i\gamma_j} &= c\gamma_j + s\gamma_j i \end{aligned}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} (x_4 + y_4 i) ((c\psi_2 + s\psi_2 i) - 1) + (x_6 + y_6 i) ((c\gamma_2 + s\gamma_2 i) - 1) &= (x_{21} + y_{21} i) \\ (x_4 + y_4 i) ((c\psi_3 + s\psi_3 i) - 1) + (x_6 + y_6 i) ((c\gamma_3 + s\gamma_3 i) - 1) &= (x_{31} + y_{31} i) \end{aligned}$$

Multiplicando y arreglando en reales e imaginarios:

$$\begin{aligned} (x_4(c\psi_2 - 1) + x_6(c\gamma_2 - 1) - y_4 s\psi_2 - y_6 s\gamma_2) + (y_4(c\psi_2 - 1) + y_6(c\gamma_2 - 1) + x_4 s\psi_2 + x_6 s\gamma_2) i &= x_{21} + y_{21} i \\ (x_4(c\psi_3 - 1) + x_6(c\gamma_3 - 1) - y_4 s\psi_3 - y_6 s\gamma_3) + (y_4(c\psi_3 - 1) + y_6(c\gamma_3 - 1) + x_4 s\psi_3 + x_6 s\gamma_3) i &= x_{31} + y_{31} i \end{aligned}$$

De ec.(E1.5) tenemos 2 ecs. escalares:

$$\begin{aligned} \text{Re: } (x_4(c\psi_2 - 1) + x_6(c\gamma_2 - 1) - y_4 s\psi_2 - y_6 s\gamma_2) &= x_{21} & (E1.7) \\ \text{Im: } (y_4(c\psi_2 - 1) + y_6(c\gamma_2 - 1) + x_4 s\psi_2 + x_6 s\gamma_2) &= y_{21} \end{aligned}$$

De ec.(E1.6) tenemos 2 ecs. escalares:

$$\begin{aligned} \text{Re: } (x_4(c\psi_3 - 1) + x_6(c\gamma_3 - 1) - y_4 s\psi_3 - y_6 s\gamma_3) &= x_{31} & (E1.8) \\ \text{Im: } (y_4(c\psi_3 - 1) + y_6(c\gamma_3 - 1) + x_4 s\psi_3 + x_6 s\gamma_3) &= y_{31} \end{aligned}$$

En total tenemos **4 ecs. escalares** \times **6 incógnitas** ($x_4, y_4, x_6, y_6, \psi_2, \psi_3$), para el problema de **Generación de Movimiento de 3 puntos de precisión**. Para resolver damos arbitrariamente (ψ_2, ψ_3). Y se tiene finalmente **4 ecs. escalares** \times **4 incógnitas** (x_4, y_4, x_6, y_6).

Resolviendo ecs. (E1.7) y (E1.8) a partir de los datos:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{21} &= -1.21 - 0.65 \mathbf{i} \\ \mathbf{R}_{31} &= -1.37 - 1.09 \mathbf{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= -95^\circ \\ \gamma_3 &= -121^\circ\end{aligned}$$

Y sugiriendo:

$$\begin{aligned}\psi_2 &= -61^\circ \\ \psi_3 &= -34^\circ\end{aligned}$$

Las ecs.(E1.7) y (E1.8) toman la forma:

$$\begin{aligned}\text{Re: } -0.515 x_4 - 1.087 x_6 + 0.874 y_4 + 0.996 y_6 &= -1.21 \\ \text{Im: } -0.874 x_4 - 0.996 x_6 - 0.515 y_4 - 1.087 y_6 &= -0.65\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Re: } -0.170 x_4 - 1.515 x_6 + 0.559 y_4 + 0.857 y_6 &= -1.37 \\ \text{Im: } -0.559 x_4 - 0.857 x_6 - 0.170 y_4 - 1.515 y_6 &= -1.09\end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned}x_4 &= -0.150 & y_4 &= -0.943 \\ x_6 &= 0.811 & y_6 &= 0.422\end{aligned}$$

Vectorialmente:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_4 &= x_4 + y_4 \mathbf{i} = -0.150 - 0.943 \mathbf{i} \\ \mathbf{Z}_6 &= x_6 + y_6 \mathbf{i} = 0.811 + 0.422 \mathbf{i}\end{aligned}$$

Resolviendo para \mathbf{Z}_1 y \mathbf{Z}_3

Las ecs. (7a) y (7b) son:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_3 &= \mathbf{Z}_5 - \mathbf{Z}_6 & (7a) \\ \mathbf{Z}_1 &= \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_4 & (7b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_3 &= (0.381 - 0.127 \mathbf{i}) - (0.811 + 0.422 \mathbf{i}) \\ \mathbf{Z}_3 &= -0.430 - 0.549 \mathbf{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_1 &= (0.031 + 0.700 \mathbf{i}) + (-0.430 - 0.549 \mathbf{i}) - (-0.150 - 0.943 \mathbf{i}) \\ \mathbf{Z}_1 &= -0.249 + 1.094 \mathbf{i}\end{aligned}$$

El mecanismo diseñado se muestra en la figura 13:

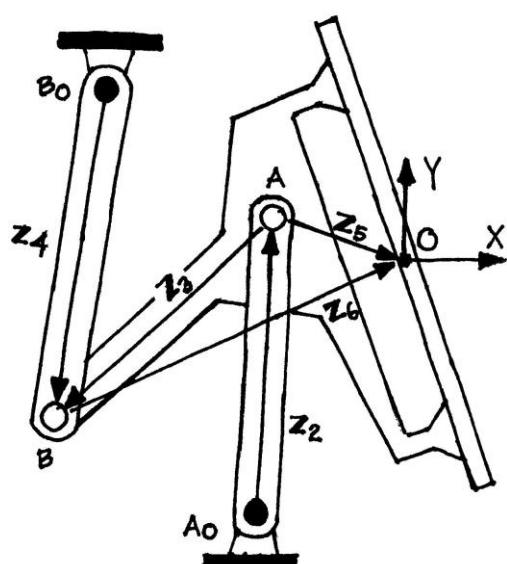


Figura 13

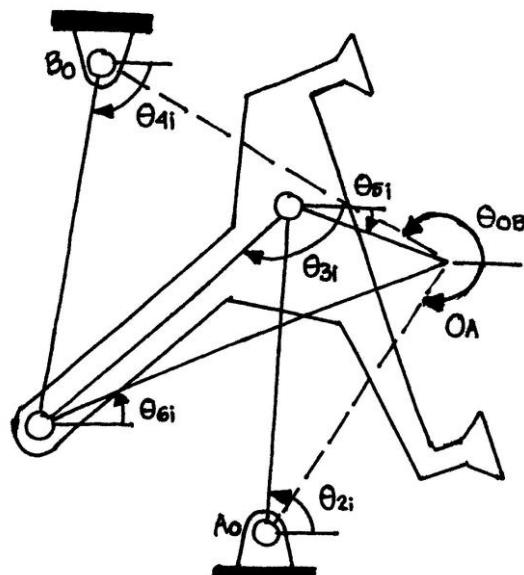


Figura 14

Análisis de Posición

Los vectores empleados por las ecuaciones de diseño se muestran en la figura 9.

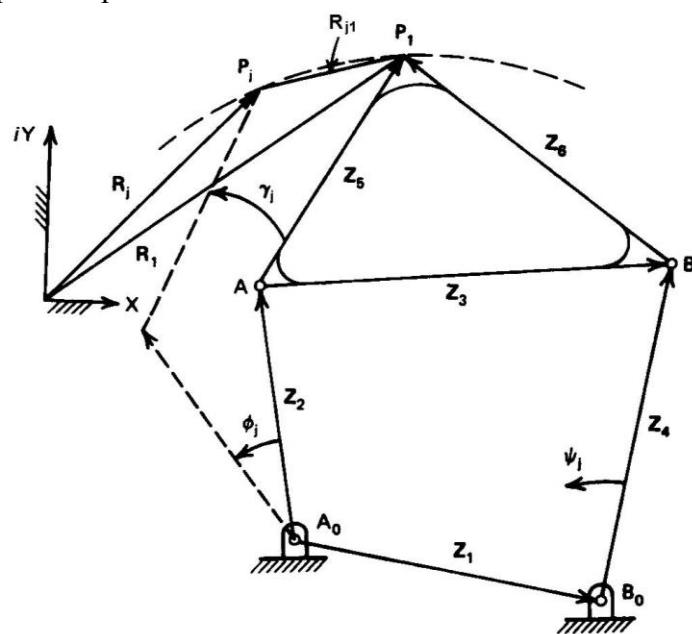


Figura 9

Se requiere un análisis de posición, este nos permitirá calcular el ángulo de transmisión ϕ para un ciclo de movimiento del mecanismo. Y también no permitirá hacer una simulación del mecanismo diseñado.

En la figura 15, se muestran los vectores utilizados en el análisis.

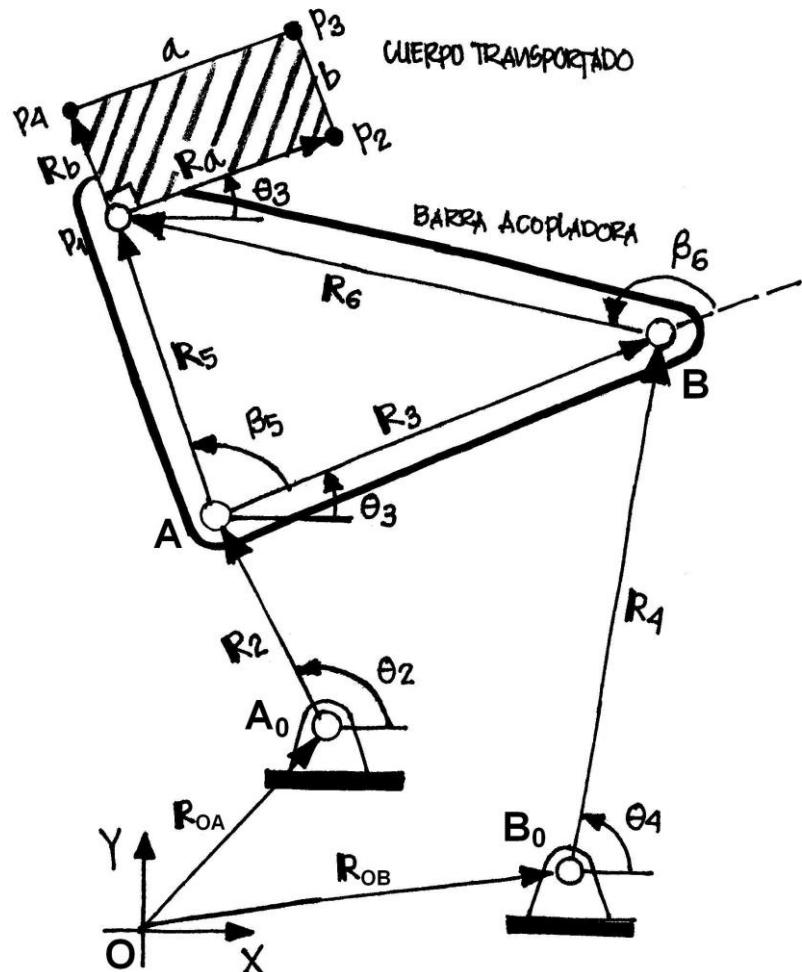


Figura 15

La magnitud de los vectores y los ángulos (figura 14) medidos con la horizontal de la posición inicial del mecanismo, se calculan como (ver programa en *Mathematica* “Síntesis Complejos 1”):

$$\mathbf{R}_{OA} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{Z}_5 - \mathbf{Z}_2 = -0.412 - 0.572 \mathbf{i}$$

$$\mathbf{R}_{OB} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{Z}_6 - \mathbf{Z}_4 = -0.661 + 0.521 \mathbf{i}$$

$$r_{OA} = \| \mathbf{R}_{OA} \| = 0.705$$

$$r_2 = \| \mathbf{Z}_2 \| = 0.700$$

$$r_4 = \| \mathbf{Z}_4 \| = 0.955$$

$$r_6 = \| \mathbf{Z}_6 \| = 0.914$$

$$r_{OB} = \| \mathbf{R}_{OB} \| = 0.842$$

$$r_3 = \| \mathbf{Z}_3 \| = 0.698$$

$$r_5 = \| \mathbf{Z}_5 \| = 0.401$$

$$\theta_{OA} = -125.737^\circ$$

$$\theta_{2i} = 87.461^\circ$$

$$\theta_{4i} = -99.039^\circ$$

$$\theta_{6i} = 27.476^\circ$$

$$\theta_{OB} = 141.745^\circ$$

$$\theta_{3i} = -128.078^\circ$$

$$\theta_{5i} = -18.513^\circ$$

A partir de la figura 15, los vectores son:

$$\beta_5 = \theta_{5i} - \theta_{3i} = 109.565^\circ$$

$$\beta_6 = \theta_{6i} - \theta_{3i} = 155.555^\circ$$

$$\mathbf{u}_{OA} = c\theta_{OA} \mathbf{i} + s\theta_{OA} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_{OB} = c\theta_{OB} \mathbf{i} + s\theta_{OB} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_2 = c\theta_2 \mathbf{i} + s\theta_2 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_3 = c\theta_3 \mathbf{i} + s\theta_3 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_4 = c\theta_4 \mathbf{i} + s\theta_4 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_5 = c(\theta_3 + \beta_5) \mathbf{i} + s(\theta_3 + \beta_5) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_6 = c(\theta_3 + \beta_6) \mathbf{i} + s(\theta_3 + \beta_6) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{RoA} = r_{OA} \mathbf{u}_{OA}$$

$$\mathbf{RoB} = r_{OB} \mathbf{u}_{OB}$$

$$\mathbf{R}_2 = r_2 \mathbf{u}_2$$

$$\mathbf{R}_3 = r_3 \mathbf{u}_3$$

$$\mathbf{R}_4 = r_4 \mathbf{u}_4$$

$$\mathbf{R}_5 = r_5 \mathbf{u}_5$$

$$\mathbf{R}_6 = r_6 \mathbf{u}_6$$

La ecuación de posición es:

$$\mathbf{RoA} + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{RoB} = \mathbf{0}$$

Nota: Los vectores **Ra** y **Rb** de la figura 15, son usados para dibujar una caja de largo *a* y ancho *b*, que se utilizan en la simulación.

Ángulo de Transmisión ϕ

La manivela es la barra 2 y el mecanismo realiza la tarea para un ángulo θ_2 :

$$\theta_{2i} \leq \theta_2 \leq (\theta_{2i} + \phi_3)$$

Esto se puede ver en el programa en *Mathematica*. El ángulo de transmisión para el movimiento de la manivela se ve en la figura 16.

1. La gráfica muestra que la curva del ángulo ϕ , no se encuentra entre los límites de $40^\circ \leq \phi \leq 140^\circ$, cuando θ_2 está en los rangos de $87.4611^\circ - 131.461^\circ$ (estos valores se obtienen del programa).
2. El ángulo de transmisión ϕ , es una medida de la carga estática que la barra acopladora 3, transmite a la barra de salida 4. Es importante reducir esta carga estática, ya que el mecanismo debido a su tarea, deberá moverse rápido, generando fuerzas iniciales grandes, que afectarán aun más su funcionamiento.

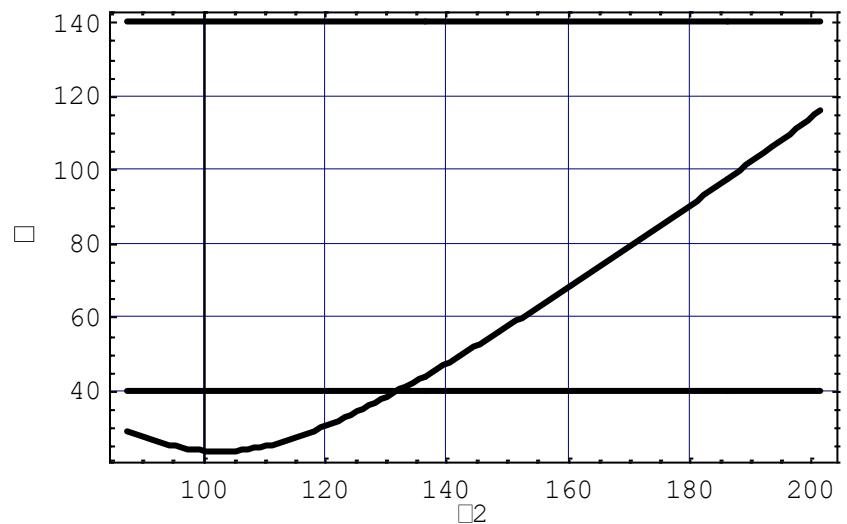


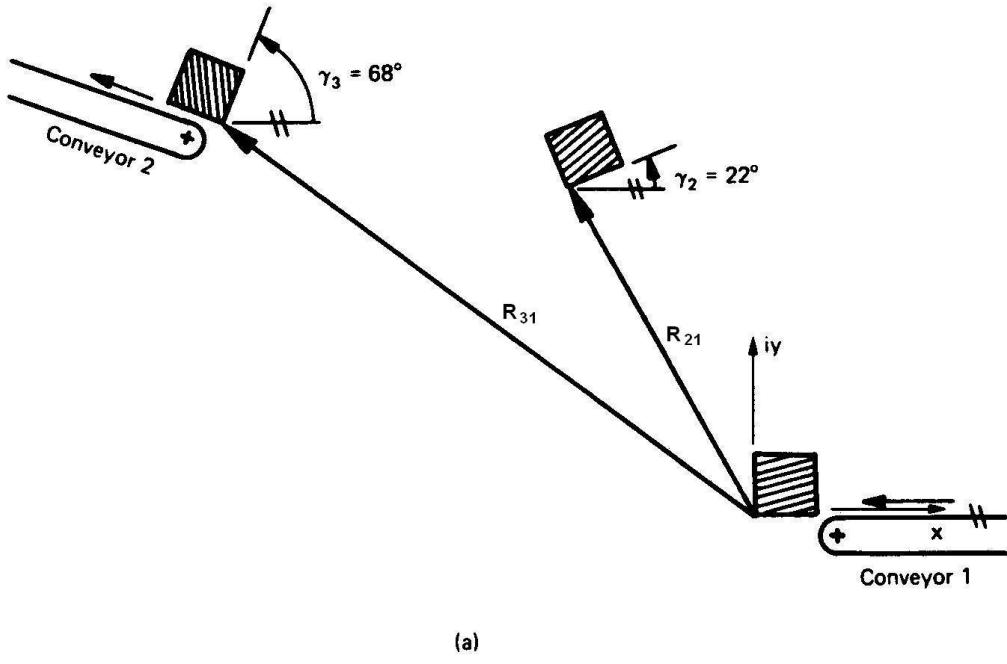
Figura 16

3. De ahí, la importancia de generar otros mecanismos con mejor ángulo ϕ .

Ejemplo 2 Generación de Movimiento

Diseño de Mecanismo Transportador

- La terminación de una línea de ensamble requiere la síntesis de un mecanismo generador de movimiento para transferir cajas de una banda transportadora a otra (figura 17a). Un mecanismo de 4 barras es elegido para la tarea [2].



(a)

Figura 17

Solución

El sistema coordenado es localizado por simplicidad en el punto de la primera posición, figura 9.

Las ecs. de diseño son:

$$Z_2 (e^{i\phi j} - 1) + Z_5 (e^{iyj} - 1) = R_{j1} \quad (6a)$$

$$Z_4 (e^{iyj} - 1) + Z_6 (e^{ij} - 1) = R_{j1} \quad (6b)$$

$$Z_3 = Z_5 - Z_6 \quad (7a)$$

$$Z_1 = Z_2 + Z_3 - Z_4 \quad (7b)$$

Datos:

$$R_1 = 0 + 0 i$$

$$\theta_1 = 0^\circ$$

$$R_2 = -6 + 11 i$$

$$\theta_2 = 22^\circ$$

$$R_3 = -17 + 13 i$$

$$\theta_3 = 68^\circ$$

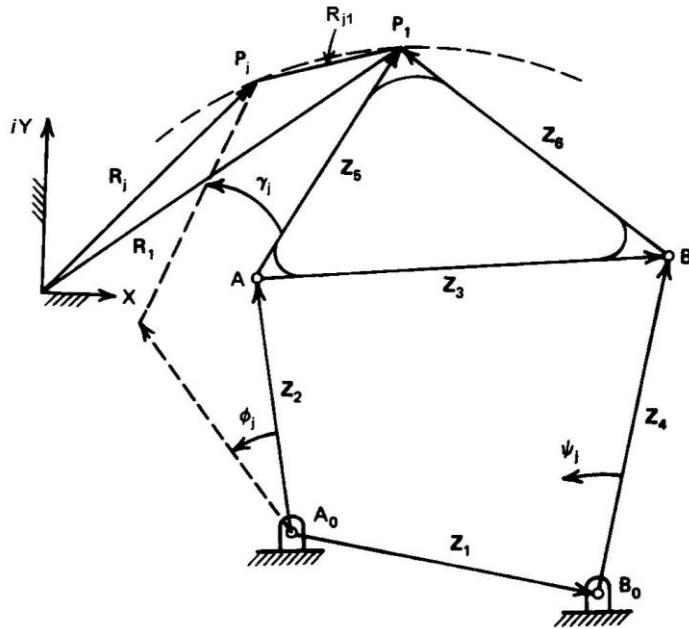


Figura 9

Donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{21} &= \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 = -6 + 11\mathbf{i} \\ \mathbf{R}_{31} &= \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1 = -17 + 13\mathbf{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \theta_2 - \theta_1 = 22^\circ \\ \gamma_3 &= \theta_3 - \theta_1 = 68^\circ\end{aligned}$$

Resolviendo para Z_2 y Z_5

Desarrollando las ecs.(6a) para $j = 2, 3$:

$$Z_2 (e^{i\phi^2} - 1) + Z_5 (e^{i\gamma^2} - 1) = R_{21} \quad (E2.1)$$

$$Z_2 (e^{i\phi^3} - 1) + Z_5 (e^{i\gamma^3} - 1) = R_{31} \quad (E2.2)$$

Donde:

$$\begin{aligned}Z_2 &= x_2 + y_2 \mathbf{i} & e^{i\phi^2} &= c\phi_2 + s\phi_2 \mathbf{i} & e^{i\gamma^2} &= c\gamma_2 + s\gamma_2 \mathbf{i} \\ Z_5 &= x_5 + y_5 \mathbf{i} & e^{i\phi^3} &= c\phi_3 + s\phi_3 \mathbf{i} & e^{i\gamma^3} &= c\gamma_3 + s\gamma_3 \mathbf{i}\end{aligned}$$

De las ecs.(E2.1) y (E2.2) se tienen **4 ecs. escalares** \times **6 incógnitas** ($x_2, y_2, x_5, y_5, \phi_2, \phi_3$), para el problema de **Generación de Movimiento de 3 puntos de precisión**. Para resolver damos arbitrariamente (ϕ_2, ϕ_3). Y se tiene finalmente **4 ecs. escalares** \times **4 incógnitas** (x_2, y_2, x_5, y_5). Sugiriendo:

$$\begin{aligned}\phi_2 &= 90^\circ \\ \phi_3 &= 198^\circ\end{aligned}$$

Especificando rotaciones de entrada alrededor del doble de las rotaciones de salida, creará un mecanismo de 4 barras del tipo manivela – balancín [2].

Las ecs.(E2.1) y (E2.2) toman la forma:

$$\begin{aligned} \text{Re: } & -1x_2 - 0.072x_5 - 1y_2 - 0.374y_5 = -6 \\ \text{Im: } & 1x_2 + 0.374x_5 - 1y_2 - 0.072y_5 = 11 \end{aligned} \quad (\text{E2.1})$$

$$\begin{aligned} \text{Re: } & -1.951x_2 - 0.625x_5 + 0.309y_2 - 0.927y_5 = -17 \\ \text{Im: } & -0.309x_2 + 0.927x_5 - 1.951y_2 - 0.625y_5 = 13 \end{aligned} \quad (\text{E2.2})$$

Resolviendo:

$$\begin{array}{ll} x_2 = 5.755 & y_2 = 0.480 \\ x_5 = 14.610 & y_5 = -3.469 \end{array}$$

Vectorialmente:

$$\begin{array}{ll} Z_2 = x_2 + y_2 \mathbf{i} = 5.755 + 0.480 \mathbf{i} \\ Z_5 = x_5 + y_5 \mathbf{i} = 14.610 - 3.469 \mathbf{i} \end{array}$$

Resolviendo para Z_4 y Z_6

Desarrollando las ecs.(6b) para $j = 2, 3$:

$$Z_4 (e^{i\psi^2} - 1) + Z_6 (e^{i\gamma^2} - 1) = R_{21} \quad (\text{E2.3})$$

$$Z_4 (e^{i\psi^3} - 1) + Z_6 (e^{i\gamma^3} - 1) = R_{31} \quad (\text{E2.4})$$

Donde:

$$\begin{array}{lll} Z_4 = x_4 + y_4 \mathbf{i} & e^{i\psi^2} = c\psi_2 + s\psi_2 \mathbf{i} & e^{i\gamma^2} = c\gamma_2 + s\gamma_2 \mathbf{i} \\ Z_6 = x_6 + y_6 \mathbf{i} & e^{i\psi^3} = c\psi_3 + s\psi_3 \mathbf{i} & e^{i\gamma^3} = c\gamma_3 + s\gamma_3 \mathbf{i} \end{array}$$

De las ecs.(E2.3) y (E2.4) se tienen **4 ecs. escalares \times 6 incógnitas** ($x_4, y_4, x_6, y_6, \psi_2, \psi_3$), para el problema de **Generación de Movimiento de 3 puntos de precisión**. Para resolver damos arbitrariamente (ψ_2, ψ_3). Y se tiene finalmente **4 ecs. escalares \times 4 incógnitas** (x_4, y_4, x_6, y_6). Sugiriendo:

$$\begin{array}{l} \psi_2 = 40^\circ \\ \psi_3 = 73^\circ \end{array}$$

Las ecs.(E2.3) y (E2.4) toman la forma:

$$\begin{aligned} \text{Re: } & -0.233x_4 - 0.072x_6 - 0.642y_4 - 0.374y_6 = -6 \\ \text{Im: } & 0.642x_4 + 0.374x_6 - 0.233y_4 - 0.072y_6 = 11 \end{aligned} \quad (\text{E2.3})$$

$$\begin{aligned} \text{Re: } & -0.707 x_4 - 0.625 x_6 - 0.956 y_4 - 0.927 y_6 = -17 \\ \text{Im: } & 0.956 x_4 + 0.927 x_6 - 0.707 y_4 - 0.625 y_6 = 13 \end{aligned} \quad (\text{E2.4})$$

Resolviendo:

$$\begin{array}{ll} x_4 = 18.374 & y_4 = -0.661 \\ x_6 = -1.420 & y_6 = 5.951 \end{array}$$

Vectorialmente:

$$\begin{array}{l} \mathbf{Z}_4 = x_4 + y_4 \mathbf{i} = 18.374 - 0.661 \mathbf{i} \\ \mathbf{Z}_6 = x_6 + y_6 \mathbf{i} = -1.420 + 5.951 \mathbf{i} \end{array}$$

Resolviendo para \mathbf{Z}_1 y \mathbf{Z}_3

Las ecs. (7a) y (7b) son:

$$\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_5 - \mathbf{Z}_6 \quad (7a)$$

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_4 \quad (7b)$$

$$\mathbf{Z}_3 = (14.610 - 3.469 \mathbf{i}) - (-1.420 + 5.95 \mathbf{i})$$

$$\mathbf{Z}_3 = 16.031 - 9.421 \mathbf{i}$$

$$\mathbf{Z}_1 = (5.755 + 0.480 \mathbf{i}) + (16.031 - 9.421 \mathbf{i}) - (18.374 - 0.661 \mathbf{i})$$

$$\mathbf{Z}_1 = 3.411 - 8.279 \mathbf{i}$$

El mecanismo diseñado se muestra en la figura 17b.

Análisis de Posición

Se realiza el análisis de posición, de la misma manera que el ejemplo 1. Ver programa en *Mathematica* “Síntesis Complejos 2”.

Ángulo de Transmisión ϕ

La manivela es la barra 2 y el mecanismo realiza la tarea para un ángulo θ_2 :

$$\theta_{2i} \leq \theta_2 \leq (\theta_{2i} + 360^\circ)$$

En este ejemplo la manivela puede realizar un giro completo, a diferencia del ejemplo 1. El ángulo de transmisión para el movimiento de la manivela se ve en la figura 18.

1. La gráfica muestra que la curva del ángulo ϕ , no se encuentra en los rangos de $40^\circ \leq \phi \leq 140^\circ$.
2. En la simulación del mecanismo diseñado, se aprecia la carga producida por el eslabón acoplador sobre el eslabón balancín, cuando ϕ toma valores abajo de 40° .
3. Es recomendable diseñar otro mecanismo, que esté entre los límites.

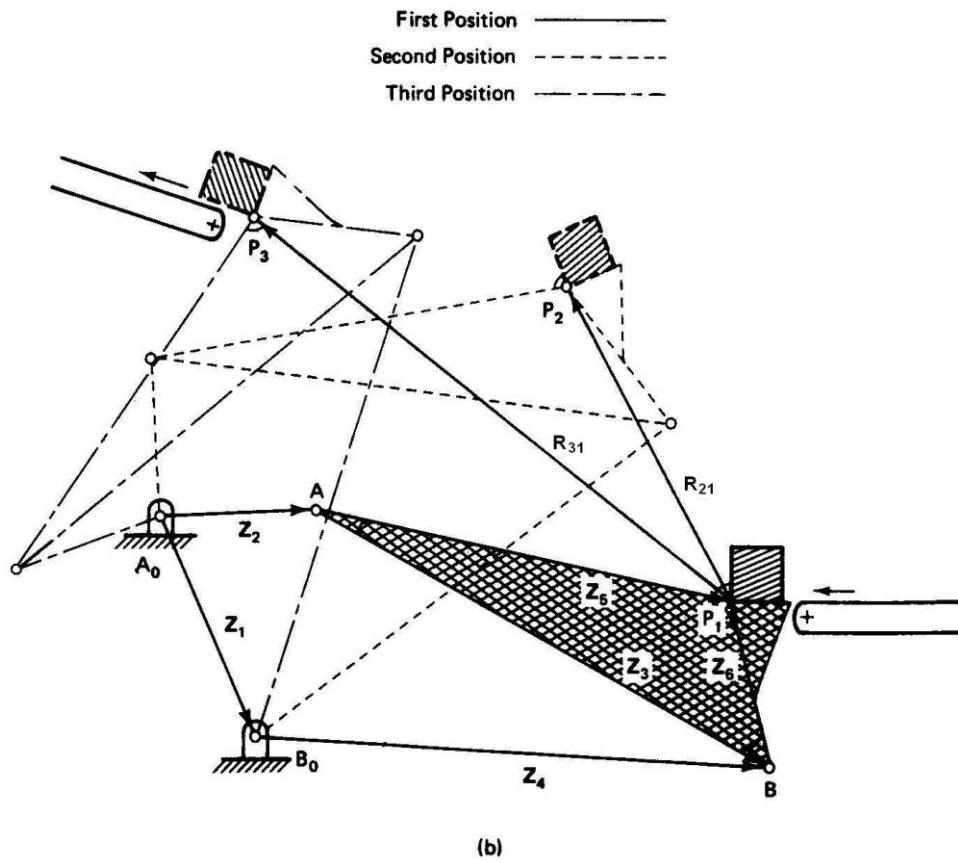


Figura 17

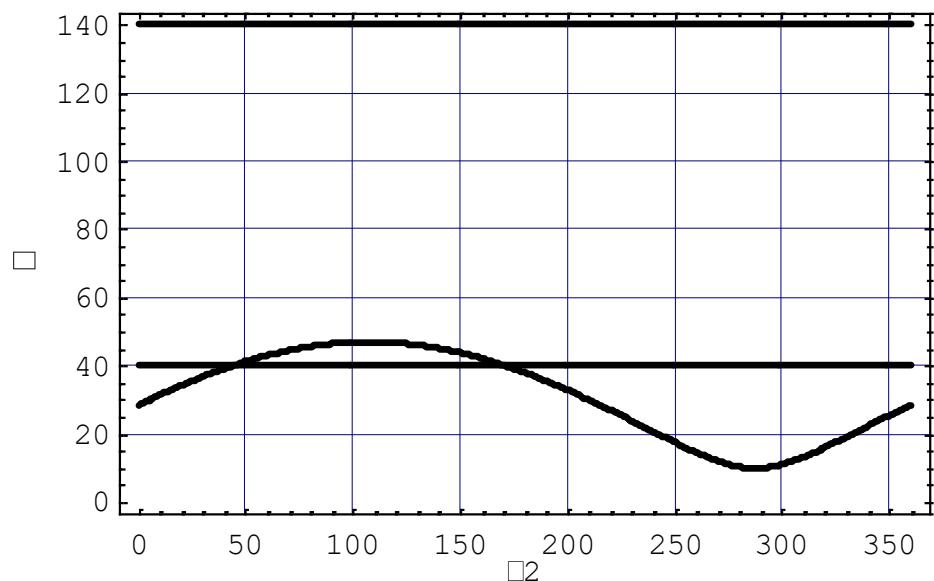


Figura 18

Bibliografía

- [1]. – **Design of Machinery – An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines.** Robert L. Norton. Second Edition 2001. McGraw – Hill.

[2]. – **Mechanism Design – Analysis and Synthesis Volume 1.** Arthur G. Erdman & George N. Sandor. Third Edition 1997. Prentice Hall.

6. La ecuación de diseño de la *mitad derecha*, se forma con la ecuación de lazo vectorial:

$$\mathbf{W}_2 + \mathbf{Z}_2 - \mathbf{R}_{21} - \mathbf{Z}_1 - \mathbf{W}_1 = \mathbf{0} \quad (3)$$

$$w e^{i(\theta+\beta_2)} + z e^{i(\phi+\alpha_2)} - r_{21} e^{i\delta_2} - z e^{i\phi} - w e^{i\theta} = 0$$

$$w e^{i\theta} e^{i\beta_2} + z e^{i\phi} e^{i\alpha_2} - r_{21} e^{i\delta_2} - z e^{i\phi} - w e^{i\theta} = 0$$

$$w e^{i\theta} (e^{i\beta_2} - 1) + z e^{i\phi} (e^{i\alpha_2} - 1) = r_{21} e^{i\delta_2} \quad (4)$$

Los vectores \mathbf{W}_1 y \mathbf{W}_2 tienen la misma magnitud w , ya que son los mismos eslabones en diferente posición. Igualmente, para \mathbf{Z}_1 y \mathbf{Z}_2 su magnitud es z .

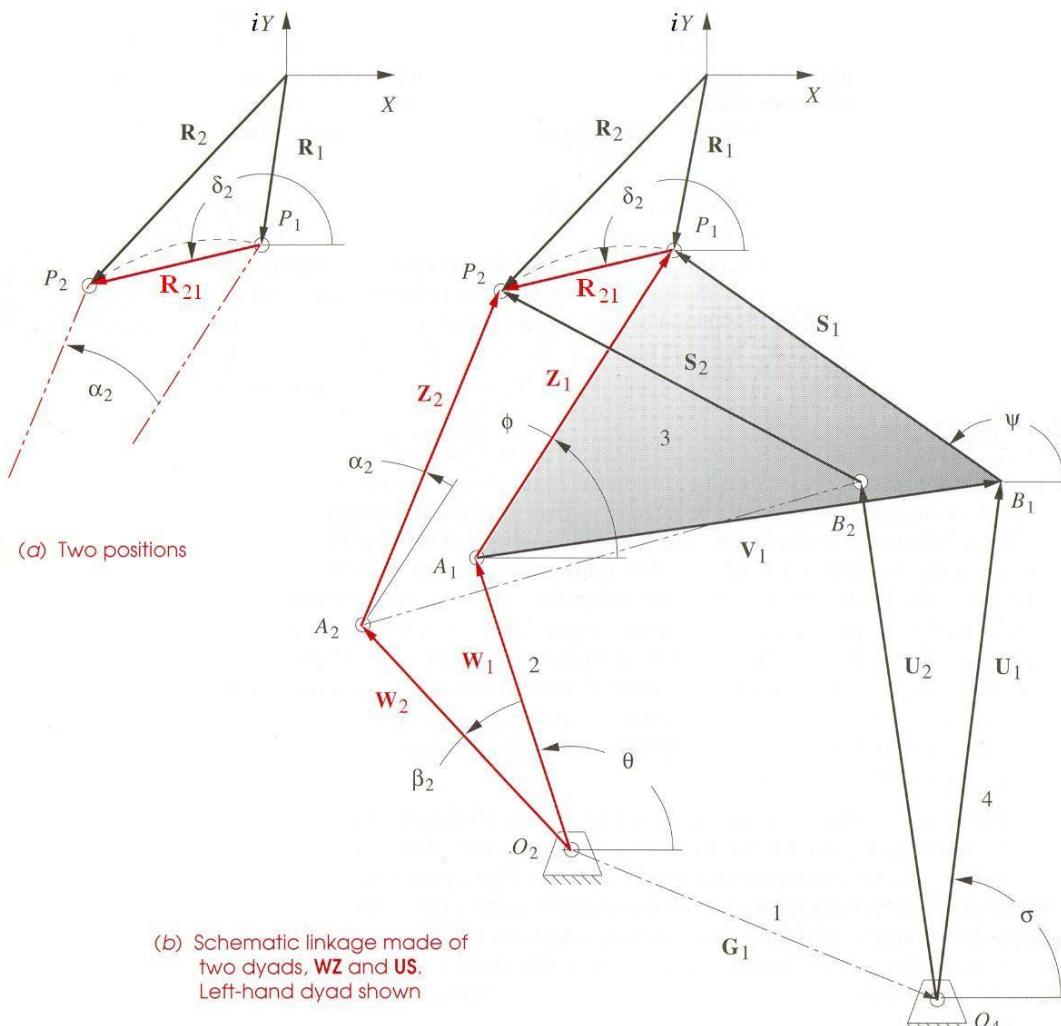


Figura 8 Lazos vectoriales

7. Sabemos que:

$$\mathbf{W}_1 = w e^{i\theta}$$

$$\mathbf{Z}_1 = z e^{i\phi}$$

La ec.(4) se puede escribir como:

$$\mathbf{W}_1 (e^{i\beta_2} - 1) + \mathbf{Z}_1 (e^{i\alpha_2} - 1) = \mathbf{R}_{21} \quad (5)$$

8. A partir de la figura 9, la ecuación de diseño (5), se puede generalizar como:

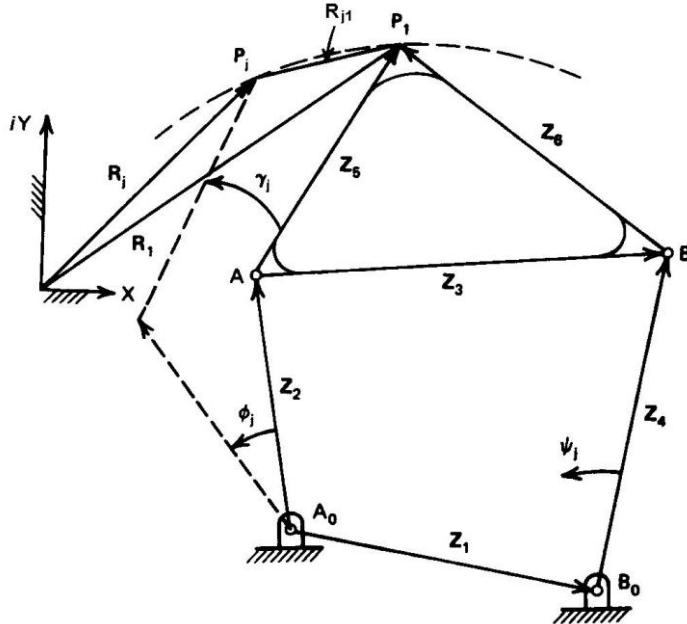


Figura 9

$$\mathbf{Z}_2 (e^{i\phi_j} - 1) + \mathbf{Z}_5 (e^{i\gamma_j} - 1) = \mathbf{R}_{j1} \quad (6a)$$

$$\mathbf{Z}_4 (e^{i\psi_j} - 1) + \mathbf{Z}_6 (e^{i\gamma_j} - 1) = \mathbf{R}_{j1} \quad (6b)$$

La cual es conocida como la ecuación de la **forma estandar de la diada**.
Además:

$$\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_5 - \mathbf{Z}_6 \quad (7a)$$

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_4 \quad (7b)$$

Ejemplo 1 Generación de Movimiento

Diseño de Mecanismo Pick and Place

- La compañía 3M requería un mecanismo para alimentar discos automáticamente a partir de un depósito y colocarlos sobre una banda transportadora [2].
- La figura 10, muestra los discos apilados en el depósito y las tres posiciones de diseño que cada disco debe ir pasando.

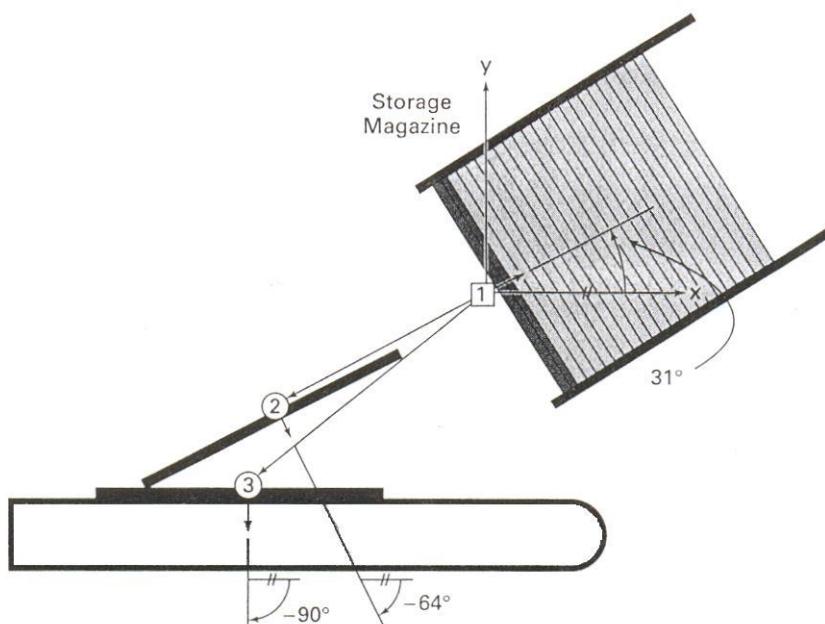


Figura 10

- Las coordenadas (x , y) de un punto sobre el disco en la **primera** y **tercera** posición son conocidas, también las orientaciones angulares de los discos en estas posiciones.
- La tarea a ejecutar es **generación de movimiento (conducción de cuerpo rígido)** y el mecanismo solución es referido como un **mecanismo de pick and place**, los objetos son tomados a partir del depósito y colocados en alguna localización preescrita.
- Aunque la primera y la última posición son de gran importancia, la posición intermedia es preescrita para ayudar a guiar los discos en la dirección correcta.
- Un dispositivo mecánico era requerido para esta tarea, debido que los operadores no podrían manualmente alimentar los discos lo suficientemente rápido.
- Aunque robots son usados frecuentemente en aplicaciones de pick and place, un mecanismo de cuatro barras es suficiente.

- Un reto adicional es localizar la parte inferior del depósito tan cerca como sea posible a la banda transportadora, tal que el operador pueda cargar los discos en el depósito sin subir a una escalera.
- Además, el mecanismo de cuatro barras tiene que satisfacer los siguientes criterios:
 1. Deberá ser relativamente compacto.
 2. Los pivotes a tierra deberán ser localizados en posiciones razonables.
 3. Los eslabones que están rotando no deberán interferir con la banda transportadora o el depósito, como el mecanismo ejecuta su tarea.
- Una posible solución es mostrada en la figura 11, en las primeras tres posiciones de diseño.

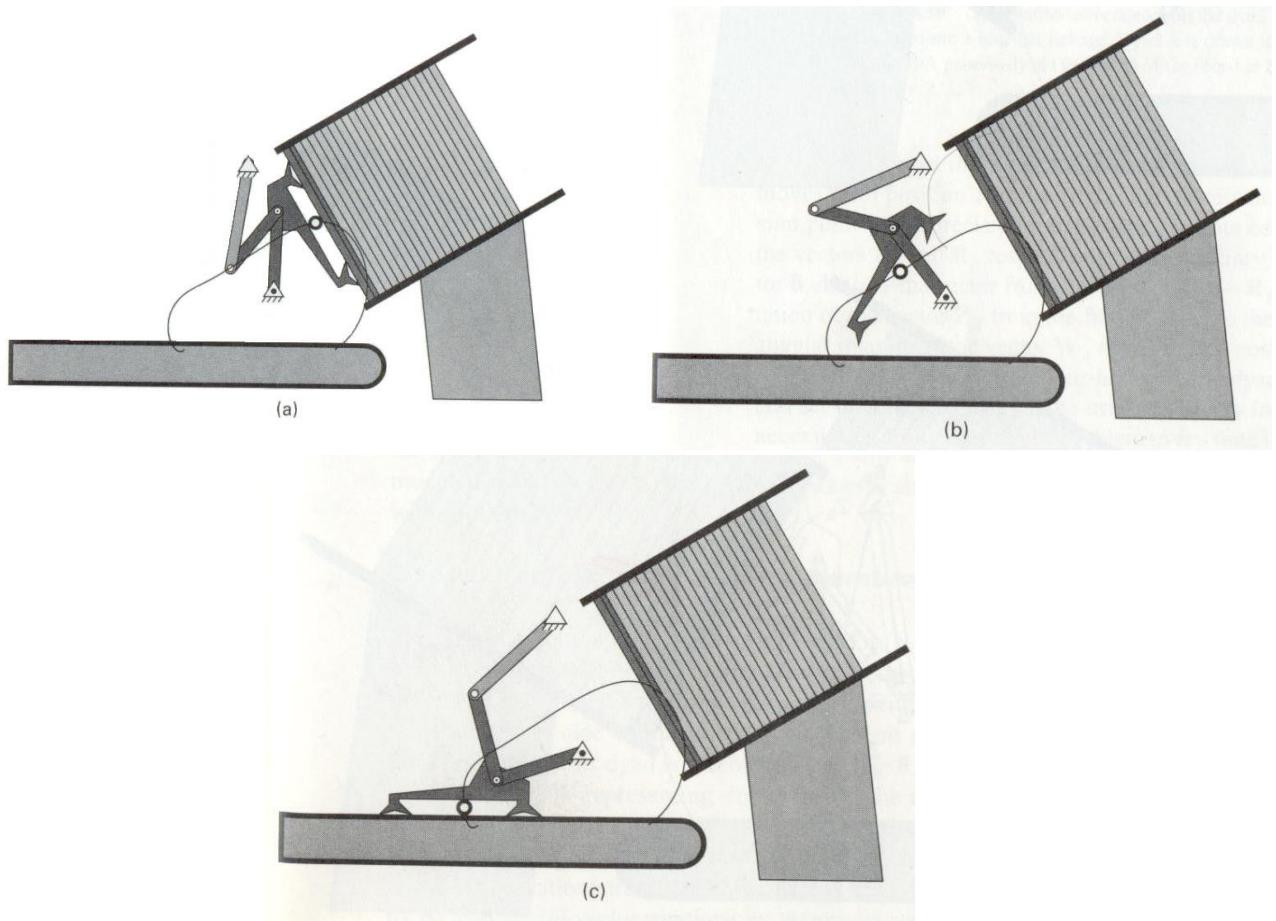


Figura 11

- Los discos pueden ser transportados por el eslabón acoplador o por algún dispositivo, que está soldado en el eslabón acoplador.
- El diseño final es mostrado en la figura 12 y está formado por dos mecanismos de cuatro barras: **un mecanismos de pick & place y un mecanismo motriz**.

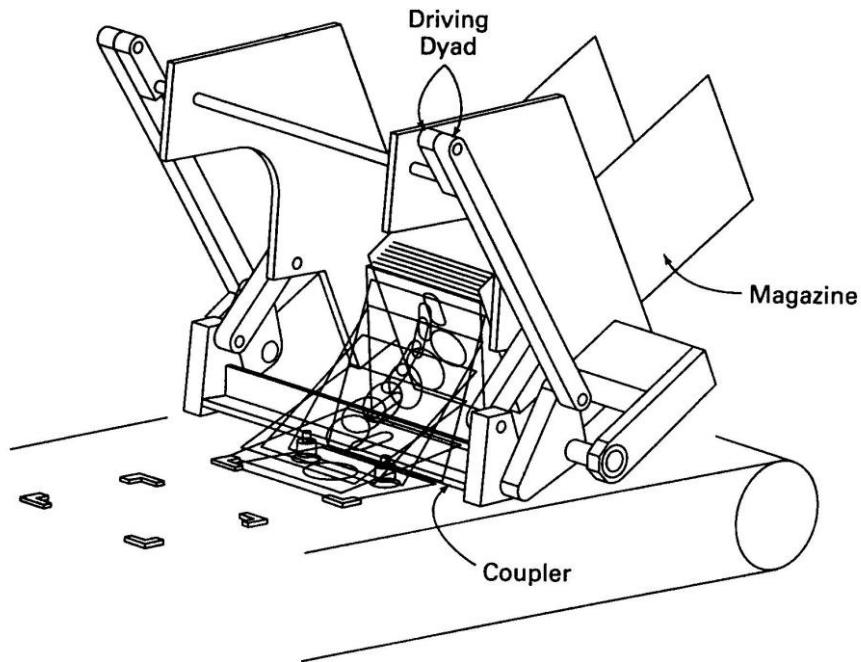


Figura 12

- En el mecanismo final, el eslabón acoplador con copas de vacío adheridas, se extiende a través del frente del depósito.
- El mecanismo, excluyendo el acoplador, está duplicado en ambos lados del depósito.
- El diseñador podría haber construido el mecanismo sobre un solo lado del depósito con el acoplador en cantiliver. Sin embargo, el depósito era demasiado largo.
- Los eslabones del mecanismo fueron hechos de barras y placas de aluminio, mientras que rodamientos de aguja fueron usados para las juntas.

Solución

El sistema coordenado es localizado por simplicidad en el punto de la primera posición (figura 10).

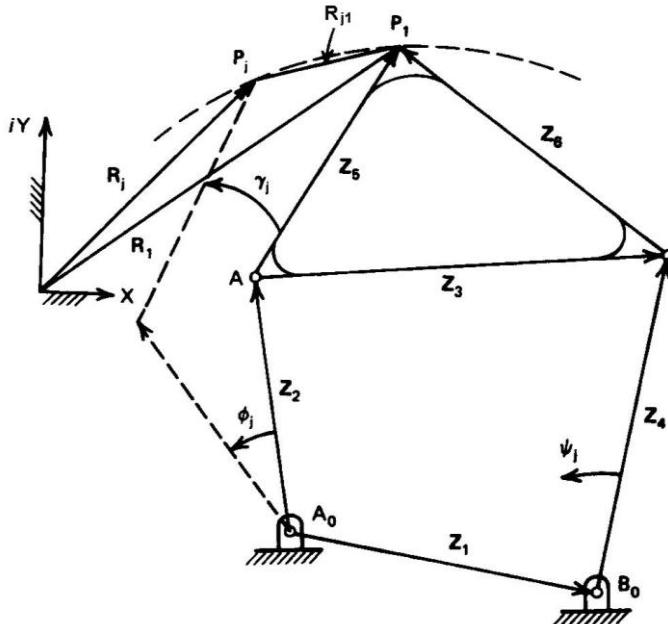


Figura 9

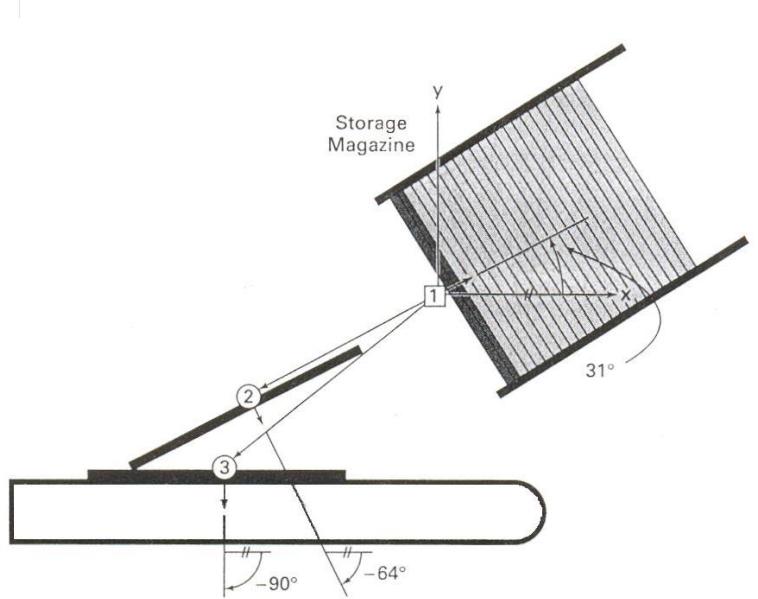


Figura 10

Las ecs. de diseño son (figura 9):

$$Z_2 (e^{i\phi_j} - 1) + Z_5 (e^{i\gamma_j} - 1) = R_{j1} \quad (6a)$$

$$Z_4 (e^{i\psi_j} - 1) + Z_6 (e^{i\gamma_j} - 1) = R_{j1} \quad (6b)$$

$$Z_3 = Z_5 - Z_6 \quad (7a)$$

$$Z_1 = Z_2 + Z_3 - Z_4 \quad (7b)$$

Datos:

$$R_1 = 0 + 0 i \quad \theta_1 = 31^\circ$$

$$R_2 = -1.21 - 0.65 i \quad \theta_2 = 296^\circ$$

$$R_3 = -1.37 - 1.09 i \quad \theta_3 = 270^\circ$$

Donde:

$$R_{21} = R_2 - R_1 = -1.21 - 0.65 i$$

$$R_{31} = R_3 - R_1 = -1.37 - 1.09 i$$

$$\gamma_2 = \theta_2 - \theta_1 = -95^\circ$$

$$\gamma_3 = \theta_3 - \theta_1 = -121^\circ$$

$$Z_2 = x_2 + y_2 i \quad e^{i\phi_j} = c\phi_j + s\phi_j i$$

$$Z_4 = x_4 + y_4 i \quad e^{i\psi_j} = c\psi_j + s\psi_j i$$

$$Z_5 = x_5 + y_5 i \quad e^{i\gamma_j} = c\gamma_j + s\gamma_j i$$

$$Z_6 = x_6 + y_6 i$$

Resolviendo para Z_2 y Z_5

Desarrollando las ecs.(6a) para $j = 2, 3$:

$$Z_2 (e^{i\phi^2} - 1) + Z_5 (e^{i\gamma^2} - 1) = R_{21} \quad (E1.1)$$

$$Z_2 (e^{i\phi^3} - 1) + Z_5 (e^{i\gamma^3} - 1) = R_{31} \quad (E1.2)$$

Sustituyendo Z_2 y Z_5 :

$$(x_2 + y_2 i) (e^{i\phi^2} - 1) + (x_5 + y_5 i) (e^{i\gamma^2} - 1) = R_{21}$$

$$(x_2 + y_2 i) (e^{i\phi^3} - 1) + (x_5 + y_5 i) (e^{i\gamma^3} - 1) = R_{31}$$

Sustituyendo $e^{i\phi^2}, e^{i\phi^3}, e^{i\gamma^2}, e^{i\gamma^3}$:

$$(x_2 + y_2 i) ((c\phi_2 + s\phi_2 i) - 1) + (x_5 + y_5 i) ((c\gamma_2 + s\gamma_2 i) - 1) = (x_{21} + y_{21} i)$$

$$(x_2 + y_2 i) ((c\phi_3 + s\phi_3 i) - 1) + (x_5 + y_5 i) ((c\gamma_3 + s\gamma_3 i) - 1) = (x_{31} + y_{31} i)$$

Multiplicando y arreglando en reales e imaginarios:

$$(x_2(c\phi_2 - 1) + x_5(c\gamma_2 - 1) - y_2 s\phi_2 - y_5 s\gamma_2) + (y_2(c\phi_2 - 1) + y_5(c\gamma_2 - 1) + x_2 s\phi_2 + x_5 s\gamma_2) i = x_{21} + y_{21} i$$

$$(x_2(c\phi_3 - 1) + x_5(c\gamma_3 - 1) - y_2 s\phi_3 - y_5 s\gamma_3) + (y_2(c\phi_3 - 1) + y_5(c\gamma_3 - 1) + x_2 s\phi_3 + x_5 s\gamma_3) i = x_{31} + y_{31} i$$

De ec.(E1.1) tenemos 2 ecs. escalares:

$$\text{Re: } (x_2(c\phi_2 - 1) + x_5(c\gamma_2 - 1) - y_2 s\phi_2 - y_5 s\gamma_2) = x_{21} \quad (E1.3)$$

$$\text{Im: } (y_2(c\phi_2 - 1) + y_5(c\gamma_2 - 1) + x_2 s\phi_2 + x_5 s\gamma_2) = y_{21}$$

De ec.(E1.2) tenemos 2 ecs. escalares:

$$\text{Re: } (x_2(c\phi_3 - 1) + x_5(c\gamma_3 - 1) - y_2 s\phi_3 - y_5 s\gamma_3) = x_{31} \quad (E1.4)$$

$$\text{Im: } (y_2(c\phi_3 - 1) + y_5(c\gamma_3 - 1) + x_2 s\phi_3 + x_5 s\gamma_3) = y_{31}$$

En total tenemos **4 ecs. escalares × 6 incógnitas** ($x_2, y_2, x_5, y_5, \phi_2, \phi_3$), para el problema de **Generación de Movimiento de 3 puntos de precisión**. Para resolver damos arbitrariamente (ϕ_2, ϕ_3). Y se tiene finalmente **4 ecs. escalares × 4 incógnitas** (x_2, y_2, x_5, y_5).

Resolviendo ecs. (E1.3) y (E1.4) a partir de los datos:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{21} &= -1.21 - 0.65 \mathbf{i} \\ \mathbf{R}_{31} &= -1.37 - 1.09 \mathbf{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= -95^\circ \\ \gamma_3 &= -121^\circ\end{aligned}$$

Y sugiriendo:

$$\begin{aligned}\phi_2 &= 68^\circ \\ \phi_3 &= 114^\circ\end{aligned}$$

Las ecs.(E1.3) y (E1.4) toman la forma:

$$\begin{aligned}\text{Re: } -0.625 x_2 - 1.087 x_5 - 0.927 y_2 + 0.996 y_5 &= -1.21 \\ \text{Im: } 0.927 x_2 - 0.996 x_5 - 0.625 y_2 - 1.087 y_5 &= -0.65\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Re: } -1.406 x_2 - 1.515 x_5 - 0.913 y_2 + 0.857 y_5 &= -1.37 \\ \text{Im: } 0.913 x_2 - 0.857 x_5 - 1.406 y_2 - 1.515 y_5 &= -1.09\end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\begin{array}{ll}x_2 = 0.031 & y_2 = 0.700 \\ x_5 = 0.381 & y_5 = -0.127\end{array}$$

Vectorialmente:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_2 &= x_2 + y_2 \mathbf{i} = 0.031 + 0.700 \mathbf{i} \\ \mathbf{Z}_5 &= x_5 + y_5 \mathbf{i} = 0.381 - 0.127 \mathbf{i}\end{aligned}$$

Resolviendo para Z_4 y Z_6

Desarrollando las ecs.(6b) para $j = 2, 3$:

$$Z_4 (e^{i\psi^2} - 1) + Z_6 (e^{i\gamma^2} - 1) = R_{21} \quad (E1.5)$$

$$Z_4 (e^{i\psi^3} - 1) + Z_6 (e^{i\gamma^3} - 1) = R_{31} \quad (E1.6)$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} Z_4 &= x_4 + y_4 i \\ Z_6 &= x_6 + y_6 i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\psi_j} &= c\psi_j + s\psi_j i \\ e^{i\gamma_j} &= c\gamma_j + s\gamma_j i \end{aligned}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} (x_4 + y_4 i) ((c\psi_2 + s\psi_2 i) - 1) + (x_6 + y_6 i) ((c\gamma_2 + s\gamma_2 i) - 1) &= (x_{21} + y_{21} i) \\ (x_4 + y_4 i) ((c\psi_3 + s\psi_3 i) - 1) + (x_6 + y_6 i) ((c\gamma_3 + s\gamma_3 i) - 1) &= (x_{31} + y_{31} i) \end{aligned}$$

Multiplicando y arreglando en reales e imaginarios:

$$\begin{aligned} (x_4(c\psi_2 - 1) + x_6(c\gamma_2 - 1) - y_4 s\psi_2 - y_6 s\gamma_2) + (y_4(c\psi_2 - 1) + y_6(c\gamma_2 - 1) + x_4 s\psi_2 + x_6 s\gamma_2) i &= x_{21} + y_{21} i \\ (x_4(c\psi_3 - 1) + x_6(c\gamma_3 - 1) - y_4 s\psi_3 - y_6 s\gamma_3) + (y_4(c\psi_3 - 1) + y_6(c\gamma_3 - 1) + x_4 s\psi_3 + x_6 s\gamma_3) i &= x_{31} + y_{31} i \end{aligned}$$

De ec.(E1.5) tenemos 2 ecs. escalares:

$$\begin{aligned} \text{Re: } (x_4(c\psi_2 - 1) + x_6(c\gamma_2 - 1) - y_4 s\psi_2 - y_6 s\gamma_2) &= x_{21} & (E1.7) \\ \text{Im: } (y_4(c\psi_2 - 1) + y_6(c\gamma_2 - 1) + x_4 s\psi_2 + x_6 s\gamma_2) &= y_{21} \end{aligned}$$

De ec.(E1.6) tenemos 2 ecs. escalares:

$$\begin{aligned} \text{Re: } (x_4(c\psi_3 - 1) + x_6(c\gamma_3 - 1) - y_4 s\psi_3 - y_6 s\gamma_3) &= x_{31} & (E1.8) \\ \text{Im: } (y_4(c\psi_3 - 1) + y_6(c\gamma_3 - 1) + x_4 s\psi_3 + x_6 s\gamma_3) &= y_{31} \end{aligned}$$

En total tenemos **4 ecs. escalares** \times **6 incógnitas** ($x_4, y_4, x_6, y_6, \psi_2, \psi_3$), para el problema de **Generación de Movimiento de 3 puntos de precisión**. Para resolver damos arbitrariamente (ψ_2, ψ_3). Y se tiene finalmente **4 ecs. escalares** \times **4 incógnitas** (x_4, y_4, x_6, y_6).

Resolviendo ecs. (E1.7) y (E1.8) a partir de los datos:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{21} &= -1.21 - 0.65 \mathbf{i} \\ \mathbf{R}_{31} &= -1.37 - 1.09 \mathbf{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= -95^\circ \\ \gamma_3 &= -121^\circ\end{aligned}$$

Y sugiriendo:

$$\begin{aligned}\psi_2 &= -61^\circ \\ \psi_3 &= -34^\circ\end{aligned}$$

Las ecs.(E1.7) y (E1.8) toman la forma:

$$\begin{aligned}\text{Re: } -0.515 x_4 - 1.087 x_6 + 0.874 y_4 + 0.996 y_6 &= -1.21 \\ \text{Im: } -0.874 x_4 - 0.996 x_6 - 0.515 y_4 - 1.087 y_6 &= -0.65\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Re: } -0.170 x_4 - 1.515 x_6 + 0.559 y_4 + 0.857 y_6 &= -1.37 \\ \text{Im: } -0.559 x_4 - 0.857 x_6 - 0.170 y_4 - 1.515 y_6 &= -1.09\end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned}x_4 &= -0.150 & y_4 &= -0.943 \\ x_6 &= 0.811 & y_6 &= 0.422\end{aligned}$$

Vectorialmente:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_4 &= x_4 + y_4 \mathbf{i} = -0.150 - 0.943 \mathbf{i} \\ \mathbf{Z}_6 &= x_6 + y_6 \mathbf{i} = 0.811 + 0.422 \mathbf{i}\end{aligned}$$

Resolviendo para \mathbf{Z}_1 y \mathbf{Z}_3

Las ecs. (7a) y (7b) son:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_3 &= \mathbf{Z}_5 - \mathbf{Z}_6 & (7a) \\ \mathbf{Z}_1 &= \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_4 & (7b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_3 &= (0.381 - 0.127 \mathbf{i}) - (0.811 + 0.422 \mathbf{i}) \\ \mathbf{Z}_3 &= -0.430 - 0.549 \mathbf{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_1 &= (0.031 + 0.700 \mathbf{i}) + (-0.430 - 0.549 \mathbf{i}) - (-0.150 - 0.943 \mathbf{i}) \\ \mathbf{Z}_1 &= -0.249 + 1.094 \mathbf{i}\end{aligned}$$

El mecanismo diseñado se muestra en la figura 13:

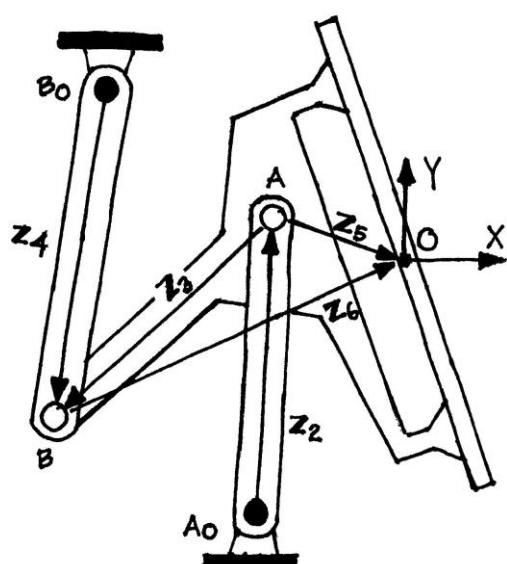


Figura 13

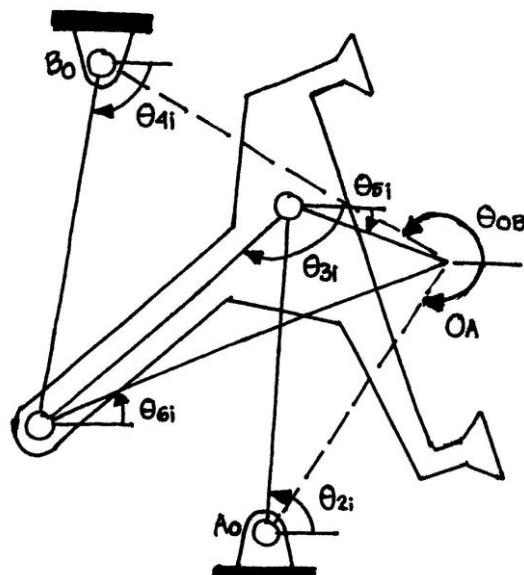


Figura 14

Análisis de Posición

Los vectores empleados por las ecuaciones de diseño se muestran en la figura 9.

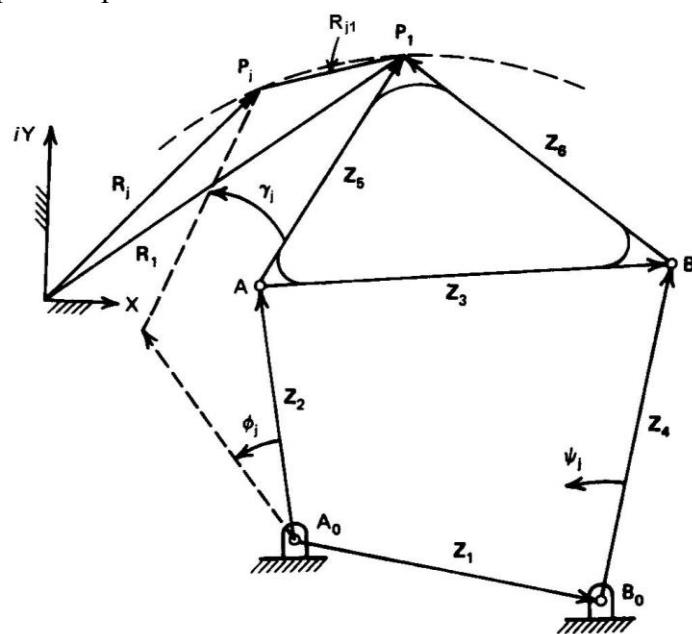


Figura 9

Se requiere un análisis de posición, este nos permitirá calcular el ángulo de transmisión ϕ para un ciclo de movimiento del mecanismo. Y también no permitirá hacer una simulación del mecanismo diseñado.

En la figura 15, se muestran los vectores utilizados en el análisis.

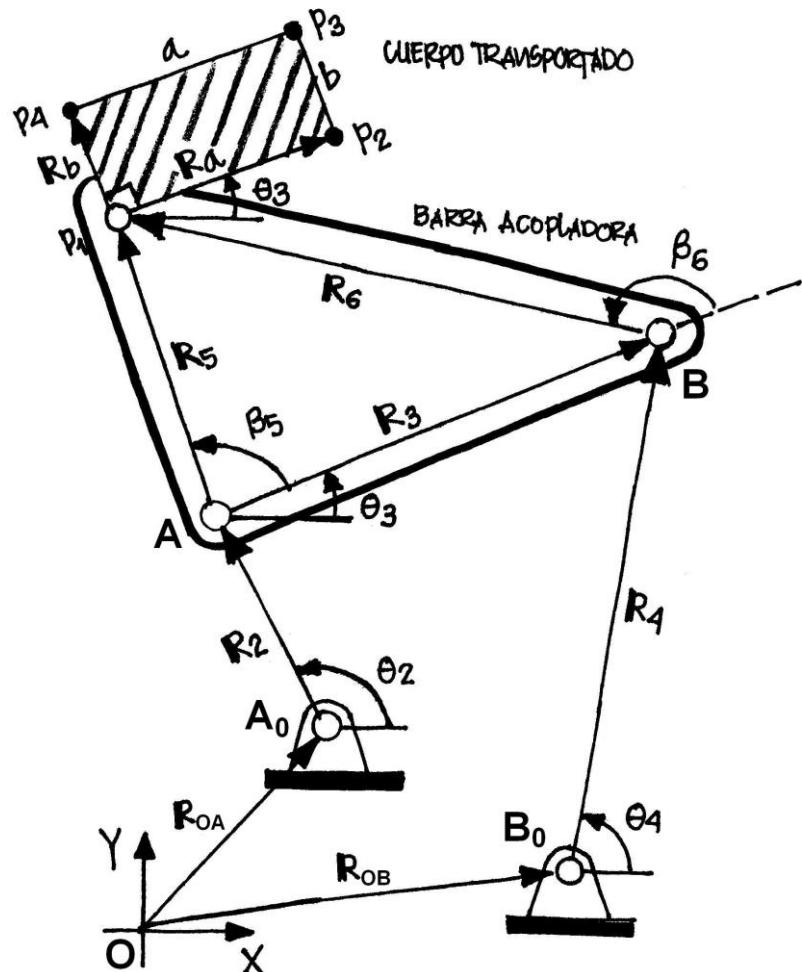


Figura 15

La magnitud de los vectores y los ángulos (figura 14) medidos con la horizontal de la posición inicial del mecanismo, se calculan como (ver programa en *Mathematica* “Síntesis Complejos 1”):

$$\mathbf{R}_{OA} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{Z}_5 - \mathbf{Z}_2 = -0.412 - 0.572 \mathbf{i}$$

$$\mathbf{R}_{OB} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{Z}_6 - \mathbf{Z}_4 = -0.661 + 0.521 \mathbf{i}$$

$$r_{OA} = \| \mathbf{R}_{OA} \| = 0.705$$

$$r_2 = \| \mathbf{Z}_2 \| = 0.700$$

$$r_4 = \| \mathbf{Z}_4 \| = 0.955$$

$$r_6 = \| \mathbf{Z}_6 \| = 0.914$$

$$r_{OB} = \| \mathbf{R}_{OB} \| = 0.842$$

$$r_3 = \| \mathbf{Z}_3 \| = 0.698$$

$$r_5 = \| \mathbf{Z}_5 \| = 0.401$$

$$\theta_{OA} = -125.737^\circ$$

$$\theta_{2i} = 87.461^\circ$$

$$\theta_{4i} = -99.039^\circ$$

$$\theta_{6i} = 27.476^\circ$$

$$\theta_{OB} = 141.745^\circ$$

$$\theta_{3i} = -128.078^\circ$$

$$\theta_{5i} = -18.513^\circ$$

A partir de la figura 15, los vectores son:

$$\beta_5 = \theta_{5i} - \theta_{3i} = 109.565^\circ$$

$$\beta_6 = \theta_{6i} - \theta_{3i} = 155.555^\circ$$

$$\mathbf{u}_{OA} = c\theta_{OA} \mathbf{i} + s\theta_{OA} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_{OB} = c\theta_{OB} \mathbf{i} + s\theta_{OB} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_2 = c\theta_2 \mathbf{i} + s\theta_2 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_3 = c\theta_3 \mathbf{i} + s\theta_3 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_4 = c\theta_4 \mathbf{i} + s\theta_4 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_5 = c(\theta_3 + \beta_5) \mathbf{i} + s(\theta_3 + \beta_5) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_6 = c(\theta_3 + \beta_6) \mathbf{i} + s(\theta_3 + \beta_6) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{RoA} = r_{OA} \mathbf{u}_{OA}$$

$$\mathbf{RoB} = r_{OB} \mathbf{u}_{OB}$$

$$\mathbf{R}_2 = r_2 \mathbf{u}_2$$

$$\mathbf{R}_3 = r_3 \mathbf{u}_3$$

$$\mathbf{R}_4 = r_4 \mathbf{u}_4$$

$$\mathbf{R}_5 = r_5 \mathbf{u}_5$$

$$\mathbf{R}_6 = r_6 \mathbf{u}_6$$

La ecuación de posición es:

$$\mathbf{RoA} + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{RoB} = \mathbf{0}$$

Nota: Los vectores **Ra** y **Rb** de la figura 15, son usados para dibujar una caja de largo *a* y ancho *b*, que se utilizan en la simulación.

Ángulo de Transmisión ϕ

La manivela es la barra 2 y el mecanismo realiza la tarea para un ángulo θ_2 :

$$\theta_{2i} \leq \theta_2 \leq (\theta_{2i} + \phi_3)$$

Esto se puede ver en el programa en *Mathematica*. El ángulo de transmisión para el movimiento de la manivela se ve en la figura 16.

1. La gráfica muestra que la curva del ángulo ϕ , no se encuentra entre los límites de $40^\circ \leq \phi \leq 140^\circ$, cuando θ_2 está en los rangos de $87.4611^\circ - 131.461^\circ$ (estos valores se obtienen del programa).
2. El ángulo de transmisión ϕ , es una medida de la carga estática que la barra acopladora 3, transmite a la barra de salida 4. Es importante reducir esta carga estática, ya que el mecanismo debido a su tarea, deberá moverse rápido, generando fuerzas iniciales grandes, que afectarán aun más su funcionamiento.

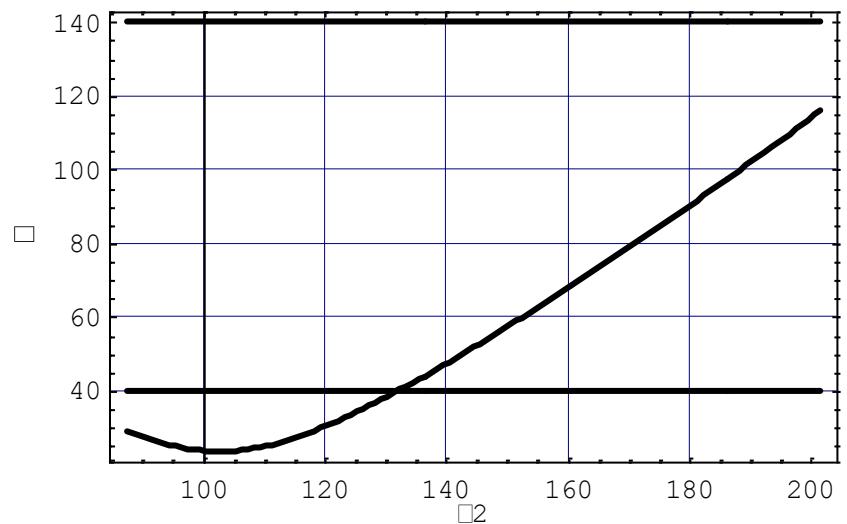


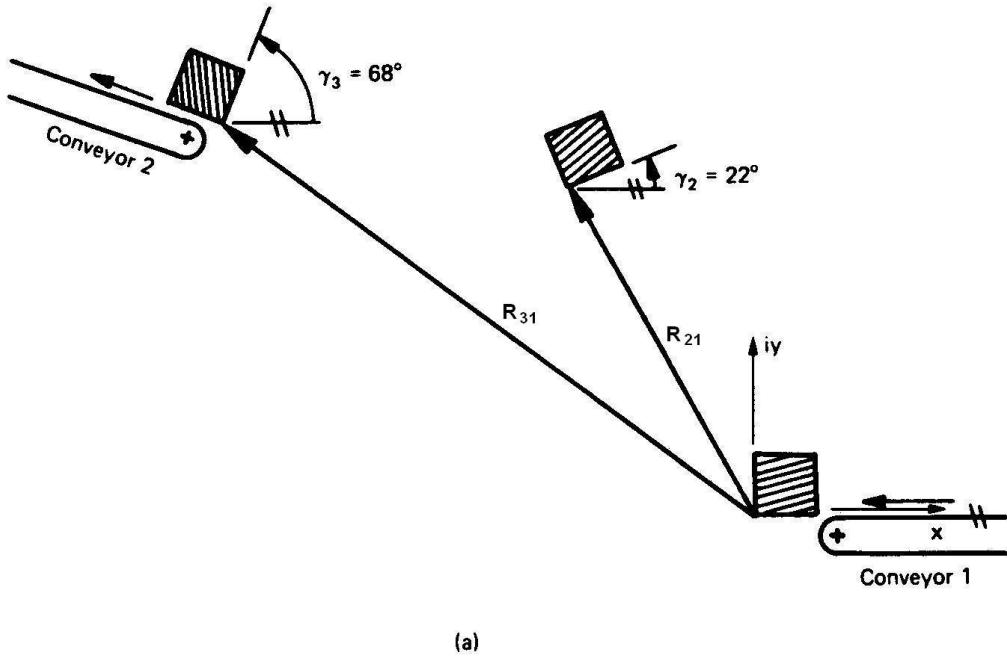
Figura 16

3. De ahí, la importancia de generar otros mecanismos con mejor ángulo ϕ .

Ejemplo 2 Generación de Movimiento

Diseño de Mecanismo Transportador

- La terminación de una línea de ensamble requiere la síntesis de un mecanismo generador de movimiento para transferir cajas de una banda transportadora a otra (figura 17a). Un mecanismo de 4 barras es elegido para la tarea [2].



(a)

Figura 17

Solución

El sistema coordenado es localizado por simplicidad en el punto de la primera posición, figura 9.

Las ecs. de diseño son:

$$Z_2 (e^{i\phi j} - 1) + Z_5 (e^{iyj} - 1) = R_{j1} \quad (6a)$$

$$Z_4 (e^{iyj} - 1) + Z_6 (e^{ij} - 1) = R_{j1} \quad (6b)$$

$$Z_3 = Z_5 - Z_6 \quad (7a)$$

$$Z_1 = Z_2 + Z_3 - Z_4 \quad (7b)$$

Datos:

$$R_1 = 0 + 0 i$$

$$\theta_1 = 0^\circ$$

$$R_2 = -6 + 11 i$$

$$\theta_2 = 22^\circ$$

$$R_3 = -17 + 13 i$$

$$\theta_3 = 68^\circ$$

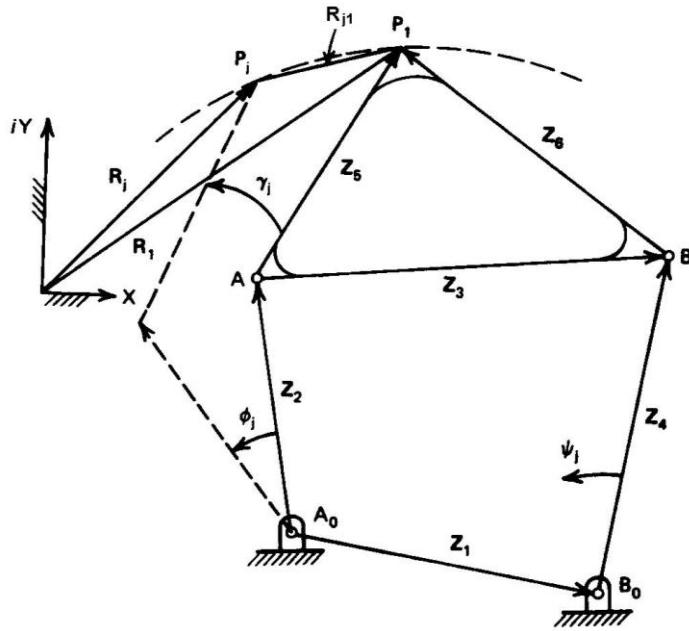


Figura 9

Donde:

$$\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 = -6 + 11\mathbf{i}$$

$$\mathbf{R}_{31} = \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1 = -17 + 13\mathbf{i}$$

$$\gamma_2 = \theta_2 - \theta_1 = 22^\circ$$

$$\gamma_3 = \theta_3 - \theta_1 = 68^\circ$$

Resolviendo para Z_2 y Z_5

Desarrollando las ecs.(6a) para $j = 2, 3$:

$$Z_2 (e^{i\phi^2} - 1) + Z_5 (e^{i\gamma^2} - 1) = \mathbf{R}_{21} \quad (E2.1)$$

$$Z_2 (e^{i\phi^3} - 1) + Z_5 (e^{i\gamma^3} - 1) = \mathbf{R}_{31} \quad (E2.2)$$

Donde:

$$\begin{aligned} Z_2 &= x_2 + y_2 \mathbf{i} & e^{i\phi^2} &= c\phi_2 + s\phi_2 \mathbf{i} & e^{i\gamma^2} &= c\gamma_2 + s\gamma_2 \mathbf{i} \\ Z_5 &= x_5 + y_5 \mathbf{i} & e^{i\phi^3} &= c\phi_3 + s\phi_3 \mathbf{i} & e^{i\gamma^3} &= c\gamma_3 + s\gamma_3 \mathbf{i} \end{aligned}$$

De las ecs.(E2.1) y (E2.2) se tienen **4 ecs. escalares** \times **6 incógnitas** ($x_2, y_2, x_5, y_5, \phi_2, \phi_3$), para el problema de **Generación de Movimiento de 3 puntos de precisión**. Para resolver damos arbitrariamente (ϕ_2, ϕ_3). Y se tiene finalmente **4 ecs. escalares** \times **4 incógnitas** (x_2, y_2, x_5, y_5). Sugiriendo:

$$\begin{aligned} \phi_2 &= 90^\circ \\ \phi_3 &= 198^\circ \end{aligned}$$

Especificando rotaciones de entrada alrededor del doble de las rotaciones de salida, creará un mecanismo de 4 barras del tipo manivela – balancín [2].

Las ecs.(E2.1) y (E2.2) toman la forma:

$$\begin{aligned} \text{Re: } & -1x_2 - 0.072x_5 - 1y_2 - 0.374y_5 = -6 \\ \text{Im: } & 1x_2 + 0.374x_5 - 1y_2 - 0.072y_5 = 11 \end{aligned} \quad (\text{E2.1})$$

$$\begin{aligned} \text{Re: } & -1.951x_2 - 0.625x_5 + 0.309y_2 - 0.927y_5 = -17 \\ \text{Im: } & -0.309x_2 + 0.927x_5 - 1.951y_2 - 0.625y_5 = 13 \end{aligned} \quad (\text{E2.2})$$

Resolviendo:

$$\begin{array}{ll} x_2 = 5.755 & y_2 = 0.480 \\ x_5 = 14.610 & y_5 = -3.469 \end{array}$$

Vectorialmente:

$$\begin{array}{ll} Z_2 = x_2 + y_2 \mathbf{i} = 5.755 + 0.480 \mathbf{i} \\ Z_5 = x_5 + y_5 \mathbf{i} = 14.610 - 3.469 \mathbf{i} \end{array}$$

Resolviendo para Z_4 y Z_6

Desarrollando las ecs.(6b) para $j = 2, 3$:

$$Z_4 (e^{i\psi^2} - 1) + Z_6 (e^{i\gamma^2} - 1) = R_{21} \quad (\text{E2.3})$$

$$Z_4 (e^{i\psi^3} - 1) + Z_6 (e^{i\gamma^3} - 1) = R_{31} \quad (\text{E2.4})$$

Donde:

$$\begin{array}{lll} Z_4 = x_4 + y_4 \mathbf{i} & e^{i\psi^2} = c\psi_2 + s\psi_2 \mathbf{i} & e^{i\gamma^2} = c\gamma_2 + s\gamma_2 \mathbf{i} \\ Z_6 = x_6 + y_6 \mathbf{i} & e^{i\psi^3} = c\psi_3 + s\psi_3 \mathbf{i} & e^{i\gamma^3} = c\gamma_3 + s\gamma_3 \mathbf{i} \end{array}$$

De las ecs.(E2.3) y (E2.4) se tienen **4 ecs. escalares \times 6 incógnitas** ($x_4, y_4, x_6, y_6, \psi_2, \psi_3$), para el problema de **Generación de Movimiento de 3 puntos de precisión**. Para resolver damos arbitrariamente (ψ_2, ψ_3). Y se tiene finalmente **4 ecs. escalares \times 4 incógnitas** (x_4, y_4, x_6, y_6). Sugiriendo:

$$\begin{array}{l} \psi_2 = 40^\circ \\ \psi_3 = 73^\circ \end{array}$$

Las ecs.(E2.3) y (E2.4) toman la forma:

$$\begin{aligned} \text{Re: } & -0.233x_4 - 0.072x_6 - 0.642y_4 - 0.374y_6 = -6 \\ \text{Im: } & 0.642x_4 + 0.374x_6 - 0.233y_4 - 0.072y_6 = 11 \end{aligned} \quad (\text{E2.3})$$

$$\begin{aligned} \text{Re: } & -0.707 x_4 - 0.625 x_6 - 0.956 y_4 - 0.927 y_6 = -17 \\ \text{Im: } & 0.956 x_4 + 0.927 x_6 - 0.707 y_4 - 0.625 y_6 = 13 \end{aligned} \quad (\text{E2.4})$$

Resolviendo:

$$\begin{array}{ll} x_4 = 18.374 & y_4 = -0.661 \\ x_6 = -1.420 & y_6 = 5.951 \end{array}$$

Vectorialmente:

$$\begin{array}{l} \mathbf{Z}_4 = x_4 + y_4 \mathbf{i} = 18.374 - 0.661 \mathbf{i} \\ \mathbf{Z}_6 = x_6 + y_6 \mathbf{i} = -1.420 + 5.951 \mathbf{i} \end{array}$$

Resolviendo para \mathbf{Z}_1 y \mathbf{Z}_3

Las ecs. (7a) y (7b) son:

$$\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_5 - \mathbf{Z}_6 \quad (7a)$$

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_4 \quad (7b)$$

$$\mathbf{Z}_3 = (14.610 - 3.469 \mathbf{i}) - (-1.420 + 5.95 \mathbf{i})$$

$$\mathbf{Z}_3 = 16.031 - 9.421 \mathbf{i}$$

$$\mathbf{Z}_1 = (5.755 + 0.480 \mathbf{i}) + (16.031 - 9.421 \mathbf{i}) - (18.374 - 0.661 \mathbf{i})$$

$$\mathbf{Z}_1 = 3.411 - 8.279 \mathbf{i}$$

El mecanismo diseñado se muestra en la figura 17b.

Análisis de Posición

Se realiza el análisis de posición, de la misma manera que el ejemplo 1. Ver programa en *Mathematica* “Síntesis Complejos 2”.

Ángulo de Transmisión ϕ

La manivela es la barra 2 y el mecanismo realiza la tarea para un ángulo θ_2 :

$$\theta_{2i} \leq \theta_2 \leq (\theta_{2i} + 360^\circ)$$

En este ejemplo la manivela puede realizar un giro completo, a diferencia del ejemplo 1. El ángulo de transmisión para el movimiento de la manivela se ve en la figura 18.

1. La gráfica muestra que la curva del ángulo ϕ , no se encuentra en los rangos de $40^\circ \leq \phi \leq 140^\circ$.
2. En la simulación del mecanismo diseñado, se aprecia la carga producida por el eslabón acoplador sobre el eslabón balancín, cuando ϕ toma valores abajo de 40° .
3. Es recomendable diseñar otro mecanismo, que esté entre los límites.

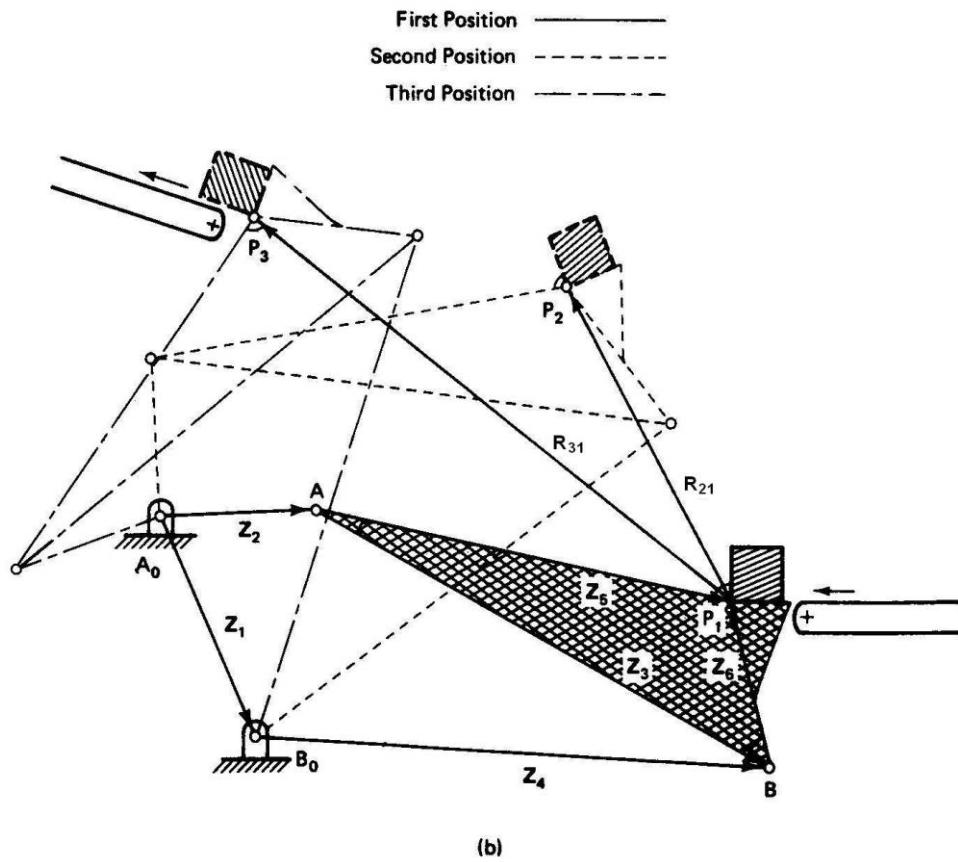


Figura 17

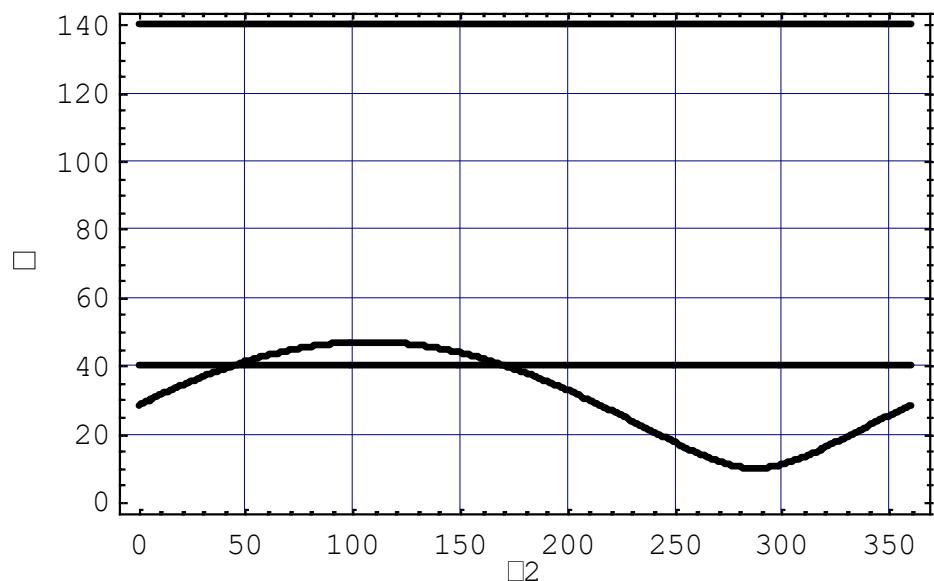


Figura 18

Bibliografía

[1]. – **Design of Machinery – An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines.** Robert L. Norton. Second Edition 2001. McGraw – Hill.

[2]. – **Mechanism Design – Analysis and Synthesis Volume 1.** Arthur G. Erdman & George N. Sandor. Third Edition 1997. Prentice Hall.

6.6 Ecuaciones de Diseño para Generación de Trayectoria con Temporización

Generación de Trayectoria

Este problema requiere que un punto de un cuerpo (eslabón 3), no unido directamente a la tierra, trace una trayectoria definida y sin controlar las orientaciones del cuerpo 3 (figura19).

Si los puntos de la trayectoria están relacionados (sincronizados) con el tiempo, o las posiciones del eslabón de entrada, la tarea es llamada **Generación de Trayectoria con Temporización Prescrita**.

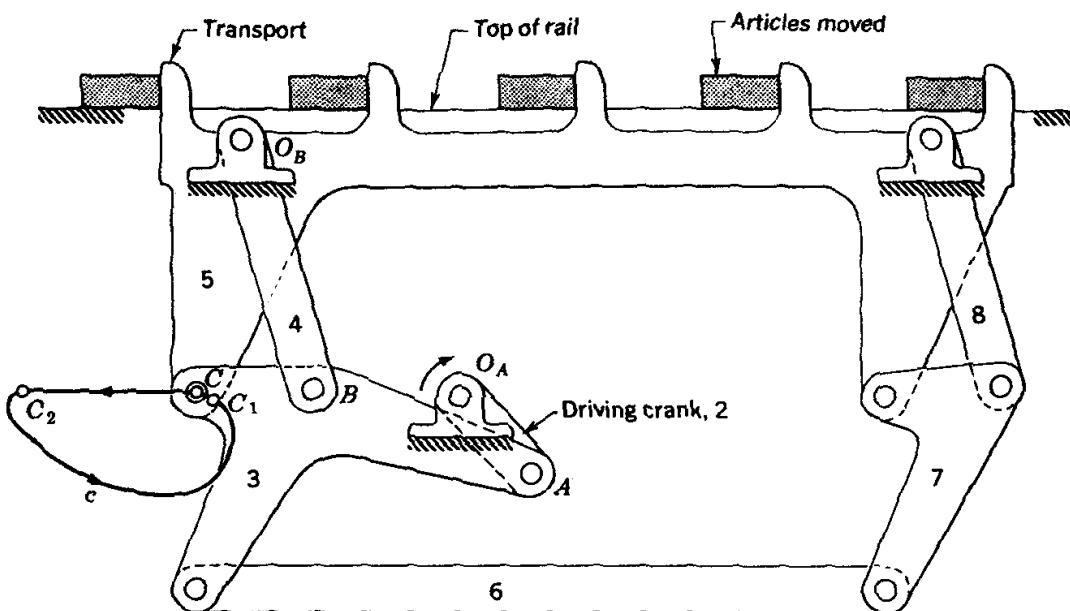


Figura 19 Mecanismo transportador

Suponga que un mecanismo de 4 barras (figura 9), debe ser sintetizado para generación de trayectoria con temporización.

La mismas ecuaciones usadas para **Generación de Movimiento**, ecs.(6) y (7), se aplicarán en este caso, pero los ángulos prescritos serán diferentes.

$$Z_2 (e^{i\phi_j} - 1) + Z_5 (e^{i\gamma_j} - 1) = R_{j1} \quad (6a)$$

$$Z_4 (e^{i\psi_j} - 1) + Z_6 (e^{i\eta_j} - 1) = R_{j1} \quad (6b)$$

$$Z_3 = Z_5 - Z_6 \quad (7a)$$

$$Z_1 = Z_2 + Z_3 - Z_4 \quad (7b)$$

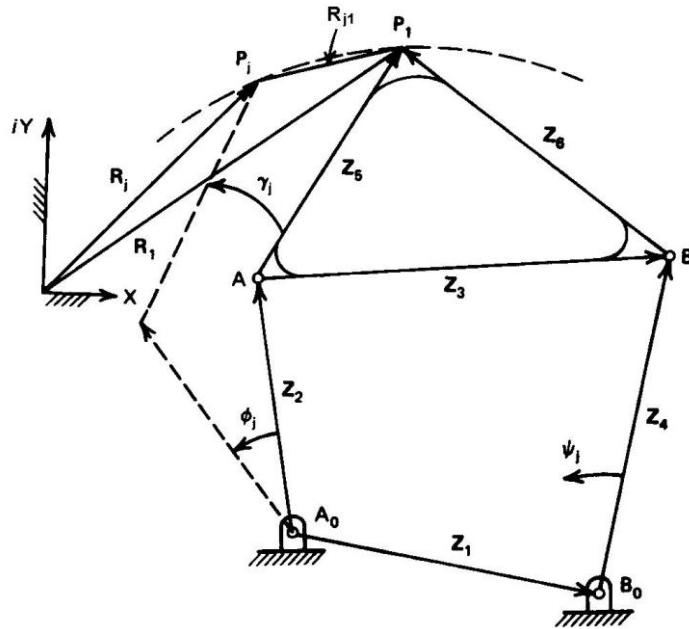


Figura 9

En vez de γ_j en la ec.(6a), el ángulo ϕ_j será prescrito. Esto debido al interés de coordinar el giro de la manivela, con el trazado de la trayectoria.

De esta manera los ángulos γ_j , $j=2,3$ serán elecciones libres. Así la ec.(6a) estará en la **forma estandar de la diada** (es decir, si R_{j1} es conocida y también lo es, cualquiera de los siguientes ángulos γ_j o ϕ_j).

De igual manera para la ec.(6b), ya conocida γ_j , se puede dar ψ_j para poder despejar los vectores de la posición inicial (Z_2 , Z_5 , Z_4 , Z_6).

Por lo tanto, el mecanismo generador de trayectoria de 4 barras con temporización prescrita, tiene el mismo procedimiento de solución como el problema de generación de movimiento.

Ejemplo 3 Generación de Trayectoria con Temporización

Diseño de Mecanismo Transportador

- La figura 19 muestra un mecanismo transportador, que transmite movimiento lineal a los objetos depositados sobre un riel.
- Aunque el mecanismo está compuesto de 8 barras, el mecanismo motriz es un mecanismo de 4 barras.

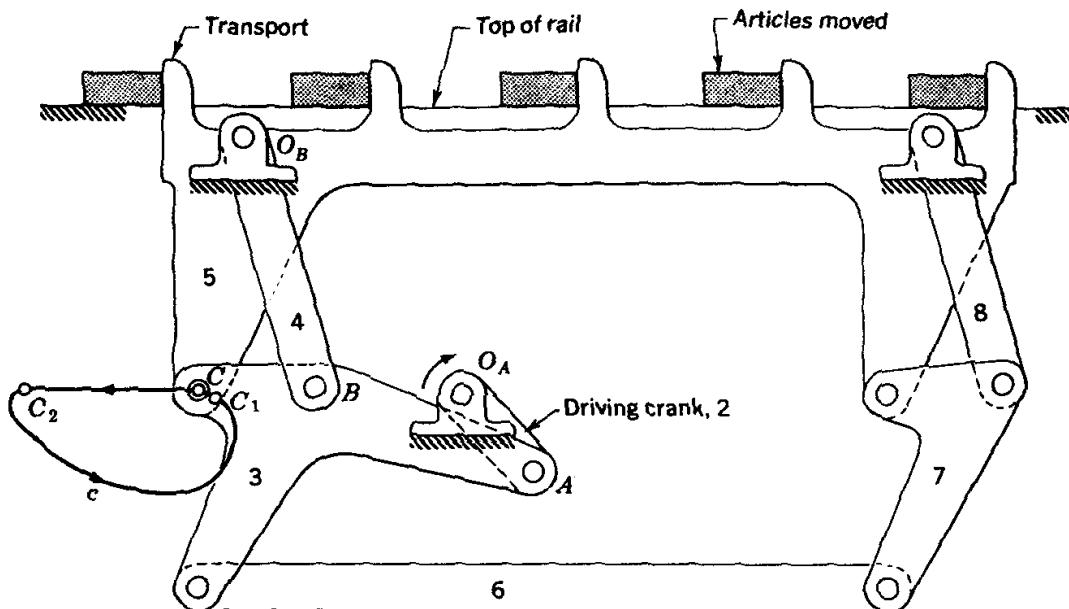


Figura 19

- El punto C en la barra acopladora 3 genera la trayectoria mostrada y se sincroniza con el giro de la manivela 2.
- Los cuerpos 3 y 4 se duplican a través de los cuerpos 7 y 8. Y el movimiento del mecanismo motriz se transmite por medio del cuerpo 6.
- Finalmente la trayectoria del punto C, genera una desplazamiento casi horizontal del cuerpo 5, cuando pasa por los puntos C₁, C₂. Y se logra el avance de los objetos.
- El retorno del mecanismo transportador, se da, cuando se sigue la parte baja de la trayectoria.
- Se requiere diseñar el mecanismo motriz de 4 barras para los puntos siguientes:

$$C_1 = (-28, 0)$$

$$C_2 = (-38, 0)$$

$$C_3 = (-48, -2)$$

Solución

Las ecs. de diseño son (figura 9):

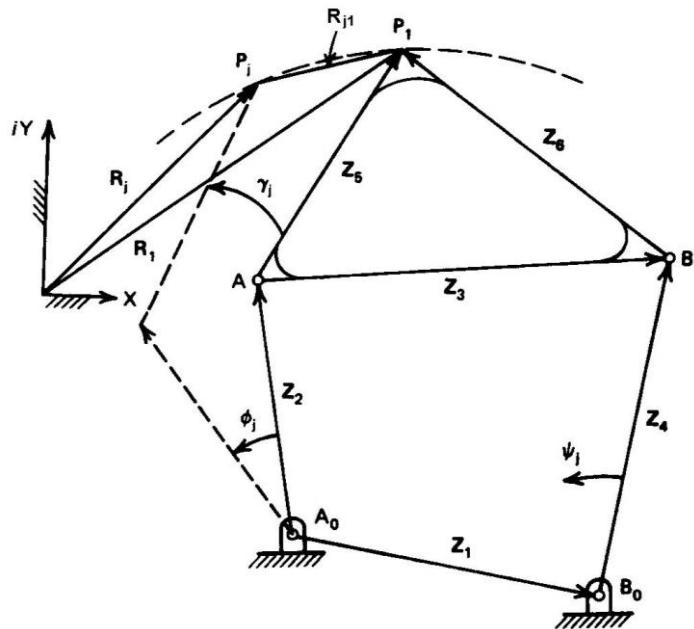


Figura 9

$$Z_2 (e^{i\phi_j} - 1) + Z_5 (e^{i\gamma_j} - 1) = R_{j1} \quad (6a)$$

$$Z_4 (e^{i\psi_j} - 1) + Z_6 (e^{i\gamma_j} - 1) = R_{j1} \quad (6b)$$

$$Z_3 = Z_5 - Z_6 \quad (7a)$$

$$Z_1 = Z_2 + Z_3 - Z_4 \quad (7b)$$

Datos:

$$R_1 = -28 + 0 i$$

$$R_2 = -38 + 0 i$$

$$R_3 = -48 - 2 i$$

Donde:

$$R_{21} = R_2 - R_1 = -10 + 0 i$$

$$R_{31} = R_3 - R_1 = -20 - 2 i$$

Resolviendo para Z_2 y Z_5

Desarrollando las ecs.(6a) para $j = 2, 3$:

$$Z_2 (e^{i\phi^2} - 1) + Z_5 (e^{i\gamma^2} - 1) = R_{21} \quad (E3.1)$$

$$Z_2 (e^{i\phi^3} - 1) + Z_5 (e^{i\gamma^3} - 1) = R_{31} \quad (E3.2)$$

Donde:

$$\begin{aligned} Z_2 &= x_2 + y_2 i & e^{i\phi^2} &= c\phi_2 + s\phi_2 i & e^{i\gamma^2} &= c\gamma_2 + s\gamma_2 i \\ Z_5 &= x_5 + y_5 i & e^{i\phi^3} &= c\phi_3 + s\phi_3 i & e^{i\gamma^3} &= c\gamma_3 + s\gamma_3 i \end{aligned}$$

De las ecs.(E3.1) y (E3.2) se tienen **4 ecs. escalares \times 6 incógnitas** ($x_2, y_2, x_5, y_5, \gamma_2, \gamma_3$), para el problema de **Generación de Trayectoria con Temporización para 3 puntos de precisión**.

Recordar que por la temporización ángulos (ϕ_2, ϕ_3) de la manivela, son valores arbitrarios conocidos. Para resolver daremos arbitrariamente (γ_2, γ_3). Y se tiene finalmente un sistema lineal de **4 ecs. escalares \times 4 incógnitas** (x_2, y_2, x_5, y_5).

Los valores sugeridos son:

$$\begin{aligned} \phi_2 &= -55^\circ \\ \phi_3 &= -130^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= -3^\circ \\ \gamma_3 &= 18^\circ \end{aligned}$$

Las ecs.(E3.1) y (E3.2) a resolver son:

$$\begin{aligned} \text{Re: } & -0.426 x_2 - 0.001 x_5 + 0.819 y_2 + 0.052 y_5 = -10 \\ \text{Im: } & -0.819 x_2 - 0.052 x_5 - 0.426 y_2 - 0.001 y_5 = 0 \end{aligned} \quad (E3.1)$$

$$\begin{aligned} \text{Re: } & -1.642 x_2 - 0.048 x_5 + 0.766 y_2 - 0.309 y_5 = -20 \\ \text{Im: } & -0.766 x_2 + 0.309 x_5 - 1.642 y_2 - 0.048 y_5 = -2 \end{aligned} \quad (E3.2)$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned} x_2 &= 7.094 & y_2 &= -9.209 \\ x_5 &= -36.270 & y_5 &= 9.920 \end{aligned}$$

Vectorialmente:

$$\begin{aligned} Z_2 &= x_2 + y_2 i = 7.094 - 9.209 i \\ Z_5 &= x_5 + y_5 i = -36.270 + 9.920 i \end{aligned}$$

Resolviendo para Z_4 y Z_6

Desarrollando las ecs.(6b) para $j = 2, 3$:

$$Z_4 (e^{i\psi^2} - 1) + Z_6 (e^{i\gamma^2} - 1) = R_{21} \quad (E3.3)$$

$$Z_4 (e^{i\psi^3} - 1) + Z_6 (e^{i\gamma^3} - 1) = R_{31} \quad (E3.4)$$

Donde:

$$\begin{aligned} Z_4 &= x_4 + y_4 i & e^{i\psi^2} &= c\psi_2 + s\psi_2 i & e^{i\gamma^2} &= c\gamma_2 + s\gamma_2 i \\ Z_6 &= x_6 + y_6 i & e^{i\psi^3} &= c\psi_3 + s\psi_3 i & e^{i\gamma^3} &= c\gamma_3 + s\gamma_3 i \end{aligned}$$

De las ecs.(E3.3) y (E3.4) se tienen **4 ecs. escalares \times 6 incógnitas** ($x_4, y_4, x_6, y_6, \gamma_2, \gamma_3$), para el problema de **Generación de Trayectoria con Temporización para 3 puntos de precisión**.

Recordar que ya se dieron los valores (γ_2, γ_3) de la barra acopladora. Para resolver daremos arbitrariamente (ψ_2, ψ_3). Y se tiene finalmente un sistema lineal de **4 ecs. escalares \times 4 incógnitas** (x_4, y_4, x_6, y_6).

Los valores sugeridos son:

$$\psi_2 = -19^\circ$$

$$\psi_3 = -38^\circ$$

Las ecs.(E3.1) y (E3.2) a resolver son:

$$\begin{aligned} \text{Re: } & -0.054 x_4 - 0.001 x_6 + 0.325 y_4 + 0.052 y_6 = -6 \\ \text{Im: } & -0.325 x_4 - 0.052 x_6 - 0.054 y_4 - 0.001 y_6 = 11 \end{aligned} \quad (E3.3)$$

$$\begin{aligned} \text{Re: } & -0.211 x_4 - 0.048 x_6 + 0.615 y_4 - 0.309 y_6 = -17 \\ \text{Im: } & -0.615 x_4 + 0.309 x_6 - 0.211 y_4 - 0.048 y_6 = 13 \end{aligned} \quad (E3.4)$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned} x_4 &= 7.035 & y_4 &= -29.949 \\ x_6 &= -12.647 & y_6 &= 2.228 \end{aligned}$$

Vectorialmente:

$$\begin{aligned} Z_4 &= x_4 + y_4 i = 7.035 - 29.949 i \\ Z_6 &= x_6 + y_6 i = -12.647 + 2.228 i \end{aligned}$$

Resolviendo para Z_1 y Z_3

Las ecs. (7a) y (7b) son:

$$Z_3 = Z_5 - Z_6 \quad (7a)$$

$$Z_1 = Z_2 + Z_3 - Z_4 \quad (7b)$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} Z_3 &= (-36.270 + 9.920 i) - (-12.647 + 2.228 i) \\ Z_3 &= -23.622 + 7.692 i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= (7.094 - 9.209 i) + (-23.622 + 7.692 i) - (7.035 - 29.949 i) \\ Z_1 &= -23.563 + 28.432 i \end{aligned}$$

El mecanismo diseñado se muestra en la figura 20.

Análisis de Posición

Se realiza el análisis de posición, de la misma manera que el ejemplo 1. Ver programa en *Mathematica* “Síntesis Complejos 3”.

Ángulo de Transmisión ϕ

La manivela es la barra 2 y el mecanismo realiza la tarea para un ángulo θ_2 :

$$\theta_{2i} \leq \theta_2 \leq (\theta_{2i} + 360^\circ)$$

En este ejemplo la manivela puede realizar un giro completo. El ángulo de transmisión para el movimiento de la manivela se ve en la figura 21.

1. La gráfica muestra que la curva del ángulo ϕ , se encuentra en los rangos de $40^\circ \leq \phi \leq 140^\circ$.
2. La gráfica de ϕ muestra que la carga de la barra acopladora es mayor cuando se aproxima a los límites. Esto es al inicio, a la mitad y al final de la curva:

Inicio:	$(\theta_2, \phi) = (-52.38^\circ, 121.25^\circ)$
Mitad:	$(\theta_2, \phi) = (134.61^\circ, 52.98^\circ)$
Final:	$(\theta_2, \phi) = (307.61^\circ, 121.25^\circ)$

3. El mecanismo es adecuado para la tarea a realizar.

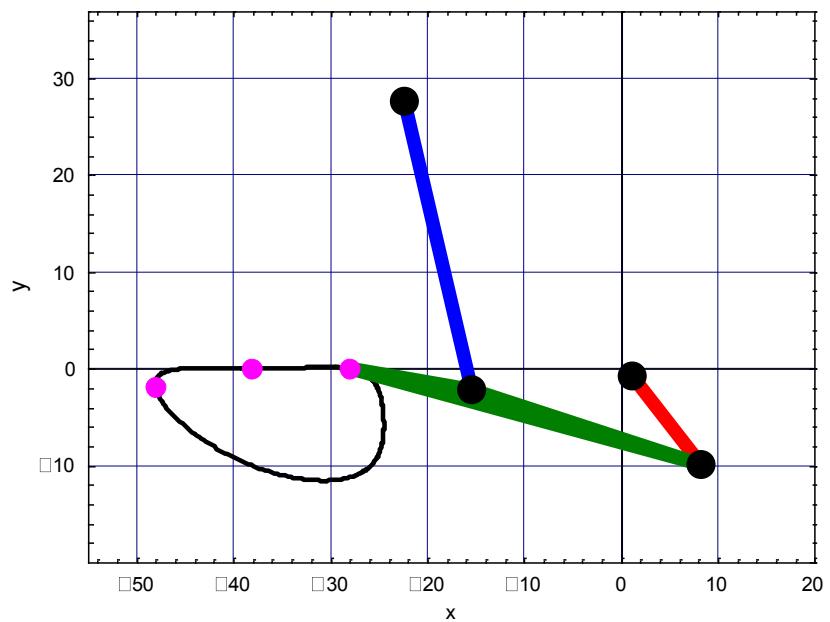


Figura 20

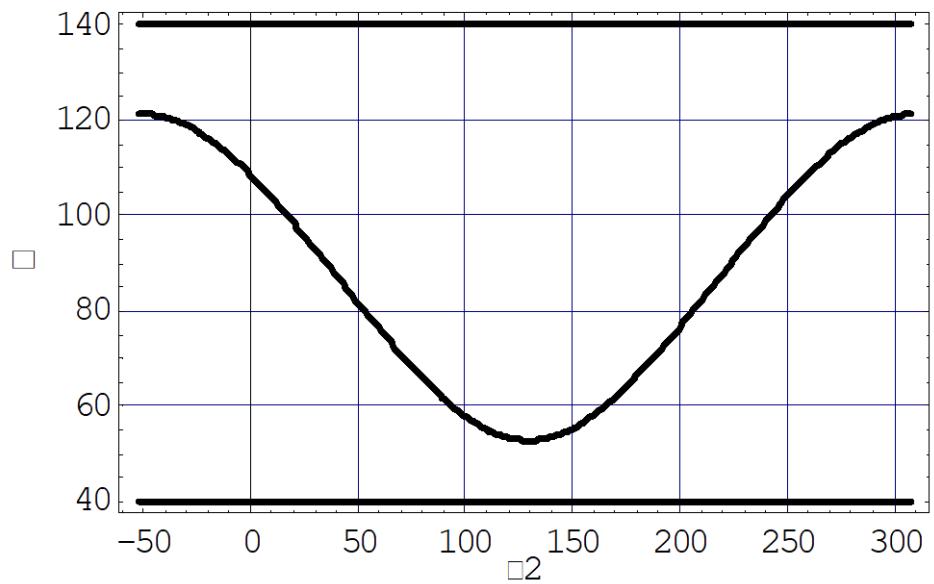


Figura 21

Ejemplo 4 Generación de Trayectoria con Temporización

Diseño de Mecanismo Revolvedor

- Una operación de revoltura requiere la generación de una trayectoria elíptica aproximada. Un mecanismo de 4 barras es elegido para esta tarea (figura 22).
- Ya que un mecanismo manivela – balancín es requerido, las rotaciones de entrada son preescritas.
- Los datos de la trayectoria son:

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0) \\ P_2 &= (-1.4, -0.76) \\ P_3 &= (-1.0, -2.3) \end{aligned}$$

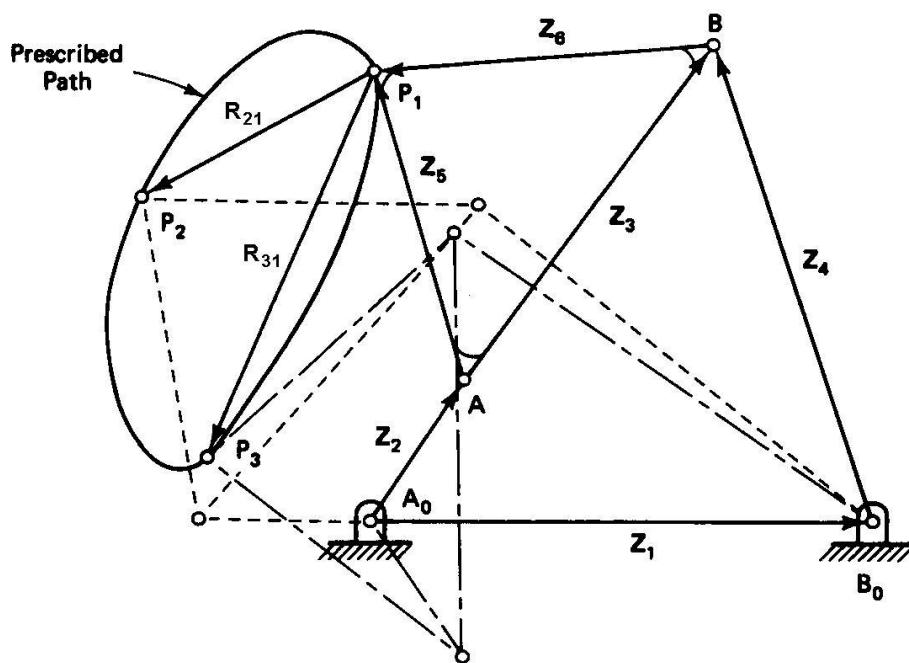


Figura 22

Solución

Las ecs. de diseño son:

$$Z_2 (e^{i\phi j} - 1) + Z_5 (e^{i\gamma j} - 1) = R_{j1} \quad (6a)$$

$$Z_4 (e^{i\psi j} - 1) + Z_6 (e^{i\gamma j} - 1) = R_{j1} \quad (6b)$$

$$Z_3 = Z_5 - Z_6 \quad (7a)$$

$$Z_1 = Z_2 + Z_3 - Z_4 \quad (7b)$$

Datos:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 &= 0 + 0 \mathbf{i} \\ \mathbf{R}_2 &= -1.4 - 0.76 \mathbf{i} \\ \mathbf{R}_3 &= -1.0 - 2.30 \mathbf{i}\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{21} &= \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 = -1.4 - 0.76 \mathbf{i} \\ \mathbf{R}_{31} &= \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1 = -1.0 - 2.30 \mathbf{i}\end{aligned}$$

Resolviendo para \mathbf{Z}_2 y \mathbf{Z}_5

Desarrollando las ecs.(6a) para $j = 2, 3$:

$$\mathbf{Z}_2 (e^{i\phi^2} - 1) + \mathbf{Z}_5 (e^{i\gamma^2} - 1) = \mathbf{R}_{21} \quad (\text{E4.1})$$

$$\mathbf{Z}_2 (e^{i\phi^3} - 1) + \mathbf{Z}_5 (e^{i\gamma^3} - 1) = \mathbf{R}_{31} \quad (\text{E4.2})$$

Donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_2 &= x_2 + y_2 \mathbf{i} & e^{i\phi^2} &= c\phi_2 + s\phi_2 \mathbf{i} & e^{i\gamma^2} &= c\gamma_2 + s\gamma_2 \mathbf{i} \\ \mathbf{Z}_5 &= x_5 + y_5 \mathbf{i} & e^{i\phi^3} &= c\phi_3 + s\phi_3 \mathbf{i} & e^{i\gamma^3} &= c\gamma_3 + s\gamma_3 \mathbf{i}\end{aligned}$$

De las ecs.(E4.1) y (E4.2) se tienen **4 ecs. escalares \times 6 incógnitas** ($x_2, y_2, x_5, y_5, \gamma_2, \gamma_3$), para el problema de **Generación de Trayectoria con Temporización para 3 puntos de precisión**.

Recordar que por la temporización ángulos (ϕ_2, ϕ_3) de la manivela, son valores arbitrarios conocidos. Para resolver daremos arbitrariamente (γ_2, γ_3). Y se tiene finalmente un sistema lineal de **4 ecs. escalares \times 4 incógnitas** (x_2, y_2, x_5, y_5).

Los valores sugeridos son:

$$\begin{aligned}\phi_2 &= 126^\circ \\ \phi_3 &= 252^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= -6^\circ \\ \gamma_3 &= 37^\circ\end{aligned}$$

Las ecs.(E4.1) y (E4.2) a resolver son:

$$\begin{aligned}\text{Re: } -1.587 x_2 - 0.005 x_5 - 0.809 y_2 + 0.104 y_5 &= -1.4 \\ \text{Im: } 0.809 x_2 - 0.104 x_5 - 1.587 y_2 - 0.005 y_5 &= -0.76\end{aligned} \quad (\text{E4.1})$$

$$\begin{aligned}\text{Re: } -1.309 x_2 - 0.201 x_5 + 0.951 y_2 - 0.601 y_5 &= -1.0 \\ \text{Im: } -0.951 x_2 + 0.601 x_5 - 1.309 y_2 - 0.201 y_5 &= -2.30\end{aligned} \quad (\text{E4.2})$$

Resolviendo:

$$\begin{array}{ll} x_2 = 0.591 & y_2 = 0.808 \\ x_5 = -0.518 & y_5 = 1.824 \end{array}$$

Vectorialmente:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_2 &= x_2 + y_2 \mathbf{i} = 0.591 + 0.808 \mathbf{i} \\ \mathbf{Z}_5 &= x_5 + y_5 \mathbf{i} = -0.518 + 1.824 \mathbf{i} \end{aligned}$$

Resolviendo para \mathbf{Z}_4 y \mathbf{Z}_6

Desarrollando las ecs.(6b) para $j = 2, 3$:

$$\mathbf{Z}_4 (e^{i\psi^2} - 1) + \mathbf{Z}_6 (e^{i\gamma^2} - 1) = \mathbf{R}_{21} \quad (\text{E4.3})$$

$$\mathbf{Z}_4 (e^{i\psi^3} - 1) + \mathbf{Z}_6 (e^{i\gamma^3} - 1) = \mathbf{R}_{31} \quad (\text{E4.4})$$

Donde:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{Z}_4 = x_4 + y_4 \mathbf{i} & e^{i\psi^2} = c\psi_2 + s\psi_2 \mathbf{i} & e^{i\gamma^2} = c\gamma_2 + s\gamma_2 \mathbf{i} \\ \mathbf{Z}_6 = x_6 + y_6 \mathbf{i} & e^{i\psi^3} = c\psi_3 + s\psi_3 \mathbf{i} & e^{i\gamma^3} = c\gamma_3 + s\gamma_3 \mathbf{i} \end{array}$$

De las ecs.(E4.3) y (E4.4) se tienen **4 ecs. escalares \times 6 incógnitas** ($x_4, y_4, x_6, y_6, \gamma_2, \gamma_3$), para el problema de **Generación de Trayectoria con Temporización para 3 puntos de precisión**.

Recordar que ya se dieron los valores (γ_2, γ_3) de la barra acopladora. Para resolver daremos arbitrariamente (ψ_2, ψ_3). Y se tiene finalmente un sistema lineal de **4 ecs. escalares \times 4 incógnitas** (x_4, y_4, x_6, y_6).

Los valores sugeridos son:

$$\begin{aligned} \psi_2 &= 33^\circ \\ \psi_3 &= 37^\circ \end{aligned}$$

Las ecs.(E3.1) y (E3.2) a resolver son:

$$\begin{array}{ll} \text{Re: } -0.161 x_4 - 0.005 x_6 - 0.544 y_4 + 0.104 y_6 = -1.4 & (\text{E4.3}) \\ \text{Im: } 0.544 x_4 - 0.104 x_6 - 0.161 y_4 - 0.005 y_6 = -0.76 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Re: } -0.201 x_4 - 0.201 x_6 - 0.601 y_4 - 0.601 y_6 = -1.0 & (\text{E4.4}) \\ \text{Im: } 0.601 x_4 + 0.601 x_6 - 0.201 y_4 - 0.201 y_6 = -2.30 & \end{array}$$

Resolviendo:

$$\begin{array}{ll} x_4 = -0.941 & y_4 = 2.833 \\ x_6 = -1.995 & y_6 = -0.188 \end{array}$$

Vectorialmente:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_4 &= x_4 + y_4 \mathbf{i} = -0.941 + 2.833 \mathbf{i} \\ \mathbf{Z}_6 &= x_6 + y_6 \mathbf{i} = -1.995 - 0.188 \mathbf{i} \end{aligned}$$

Resolviendo para Z_1 y Z_3

Las ecs. (7a) y (7b) son:

$$Z_3 = Z_5 - Z_6 \quad (7a)$$

$$Z_1 = Z_2 + Z_3 - Z_4 \quad (7b)$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} Z_3 &= (-0.518 + 1.824 i) - (-1.995 - 0.188 i) \\ Z_3 &= 1.477 + 2.013 i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= (0.591 + 0.808 i) + (1.477 + 2.013 i) - (-0.941 + 2.833 i) \\ Z_1 &= 3.010 - 0.011 i \end{aligned}$$

El mecanismo diseñado se muestra en las figuras 22 y 23.

Análisis de Posición

Se realiza el análisis de posición, de la misma manera que el ejemplo 1. Ver programa en *Mathematica* “Síntesis Complejos 4”.

Ángulo de Transmisión ϕ

La manivela es la barra 2 y el mecanismo realiza la tarea para un ángulo θ_2 :

$$\theta_{2i} \leq \theta_2 \leq (\theta_{2i} + 360^\circ)$$

En este ejemplo la manivela puede realizar un giro completo. El ángulo de transmisión para el movimiento de la manivela se ve en la figura 24.

1. La gráfica muestra que la curva del ángulo ϕ , se encuentra en los rangos de $40^\circ \leq \phi \leq 140^\circ$.
2. Es recomendable seguir la búsqueda de un mecanismo que se aleje del límite inferior, para mejorar la transmisión del movimiento.
3. Sin embargo el mecanismo es adecuado para la tarea a realizar.

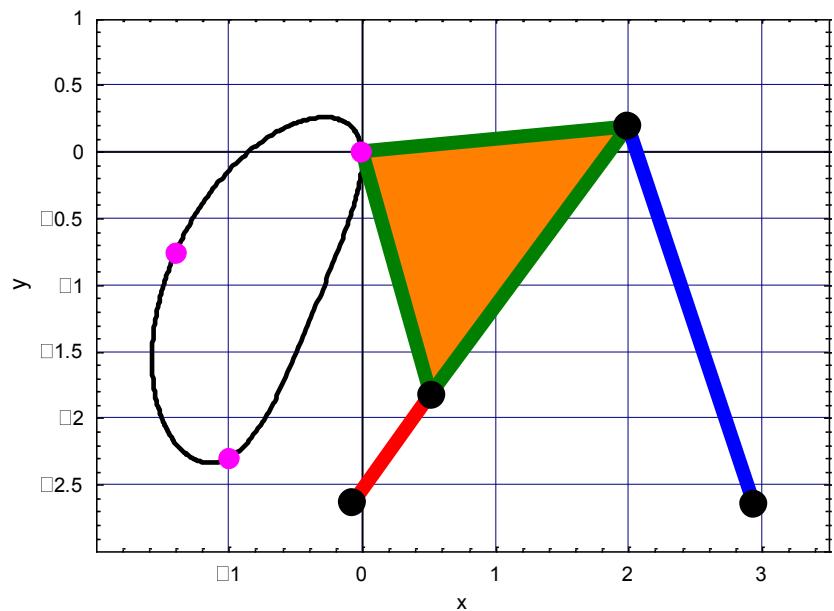


Figura 23

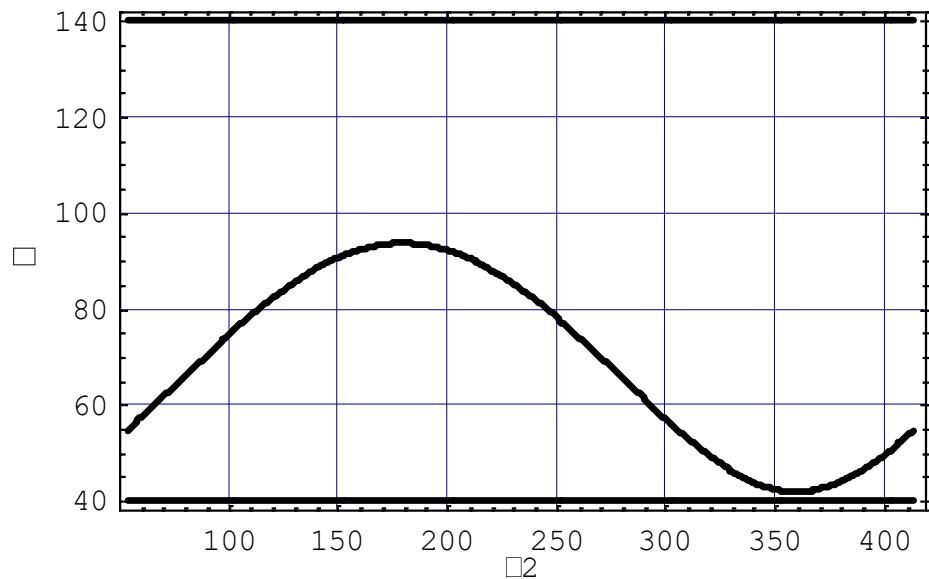


Figura 24

6.7 Ecuaciones de Diseño para Generación de Función

Generación de Función

Este problema requiere un movimiento coordinado entre la entrada y la salida, donde ambos entrada y salida (rotación o traslación) se mueven con respecto a un eje fijo.

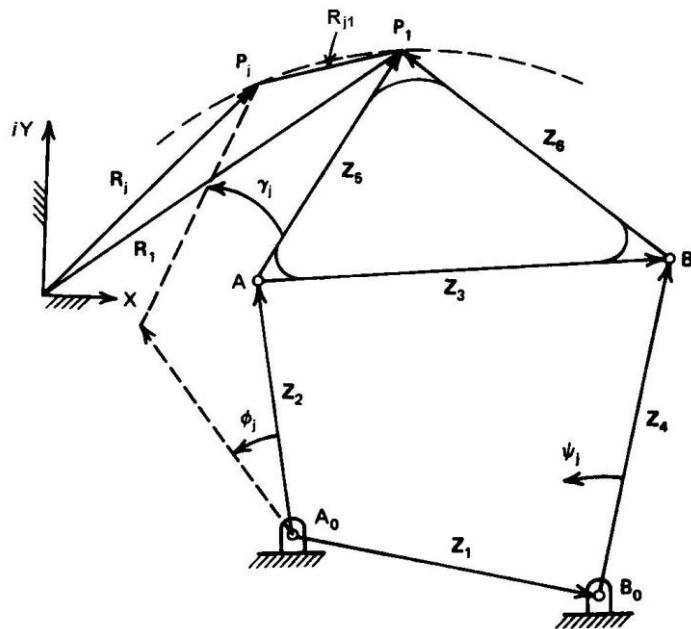


Figura 9

Recordar que en la generación de función, nosotros queremos correlacionar las rotaciones preescritas del eslabón de entrada (ϕ_j) y del eslabón de salida (ψ_j). Por lo tanto, los vectores Z_5 y Z_6 , de la barra acopladora no son de interés en esta tarea.

La figura 25, muestra el mecanismo de 4 barras básico de la figura 9 en la primera y en la j -ésima posición. La **forma estandar** para un generador de función de 4 barras [2], puede ser derivado a partir de la figura 25 como sigue:

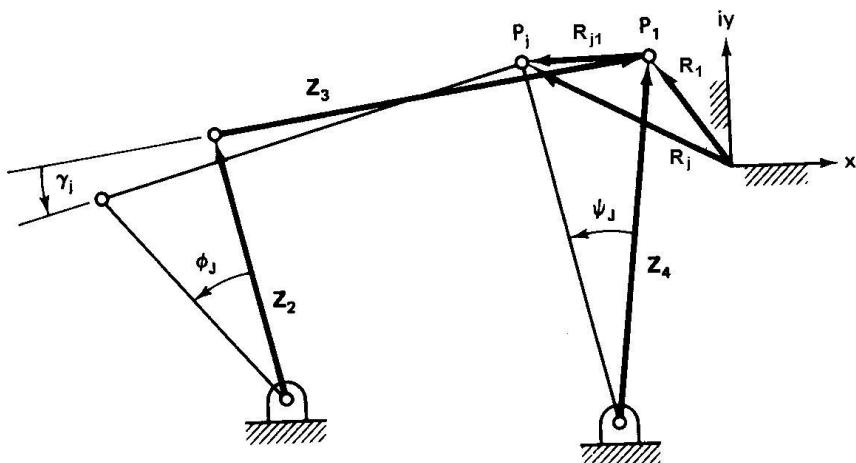


Figura 25 Generador de función de 4 barras

$$\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_4 + \mathbf{Z}_4 e^{i\psi_j} - \mathbf{Z}_3 e^{i\gamma_j} - \mathbf{Z}_2 e^{i\phi_j} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_2 e^{i\phi_j} + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_3 e^{i\gamma_j} - \mathbf{Z}_4 + \mathbf{Z}_4 e^{i\psi_j} = \mathbf{0}$$

Multiplicando por (-1) :

$$-\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2 e^{i\phi_j} - \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3 e^{i\gamma_j} + \mathbf{Z}_4 - \mathbf{Z}_4 e^{i\psi_j} = \mathbf{0}$$

Factorizando:

$$\mathbf{Z}_2 (e^{i\phi_j} - 1) + \mathbf{Z}_3 (e^{i\gamma_j} - 1) - \mathbf{Z}_4 (e^{i\psi_j} - 1) = \mathbf{0}$$

Finalmente:

$$\boxed{\mathbf{Z}_2 (e^{i\phi_j} - 1) + \mathbf{Z}_3 (e^{i\gamma_j} - 1) = \mathbf{R}_{j1} = \mathbf{Z}_4 (e^{i\psi_j} - 1)} \quad (8)$$

$$\boxed{\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_4} \quad (9)$$

Para resolver la ec.(8), se puede elegir arbitrariamente \mathbf{Z}_2 o \mathbf{Z}_4 , el vector \mathbf{Z}_3 no se suele elegir ya que la ec.(8) no estaría en su forma estandar. Es decir, los vectores del lado izquierdo de la igualdad son incógnitas y del lado derecho datos.

Al elegir el vector \mathbf{Z}_4 , estamos especificando la escala y la orientación del generador de función.

Una vez que el mecanismo es sintetizado para generador de función, el mecanismo puede ser escalado y orientado en cualquier dirección sin cambiar la relación entre los eslabones de entrada y salida ($\psi_j = f(\phi_j)$).

Ejemplo 5 Generación de Función

Diseño de Mecanismo Doblador de Trípticos

- Se desea un mecanismo para doblar hojas en tres partes de forma automática. Estas hojas salen de una impresora y requieren ser colocadas en sobres.
- El mecanismo es impulsado por una leva y tiene 2 mecanismos semejantes sobre cada lado de la leva (figura 26).

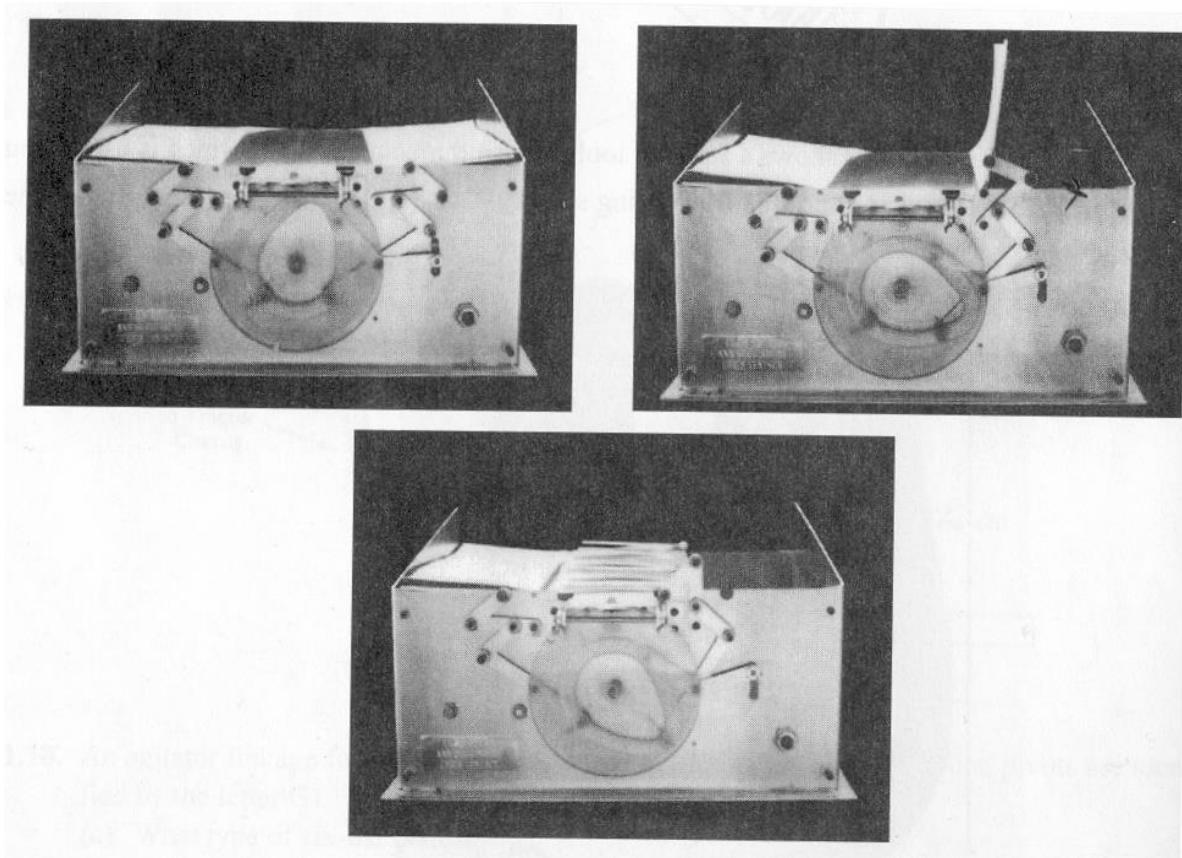


Figura 26 Mecanismo doblador de trípticos

- A partir de la figura 27, se requiere que el eslabón **B₀–B₁** gire 25° .
- El eslabón **b₀–b₁** gire 90° .
- Y el eslabón **a₀–a₁** gire 180° .
- El movimiento de entrada es de 25° y lo proporciona la leva y el movimiento de salida es de 180° con el que se dobla la hoja.
- Ángulos de rotación para las manivelas de entrada y salida son especificadas como:

$$\begin{array}{lll} \phi_2 = 14^\circ & \psi_2 = 45^\circ & \beta_2 = 90^\circ \\ \phi_3 = 25^\circ & \psi_3 = 90^\circ & \beta_3 = 180^\circ \end{array}$$

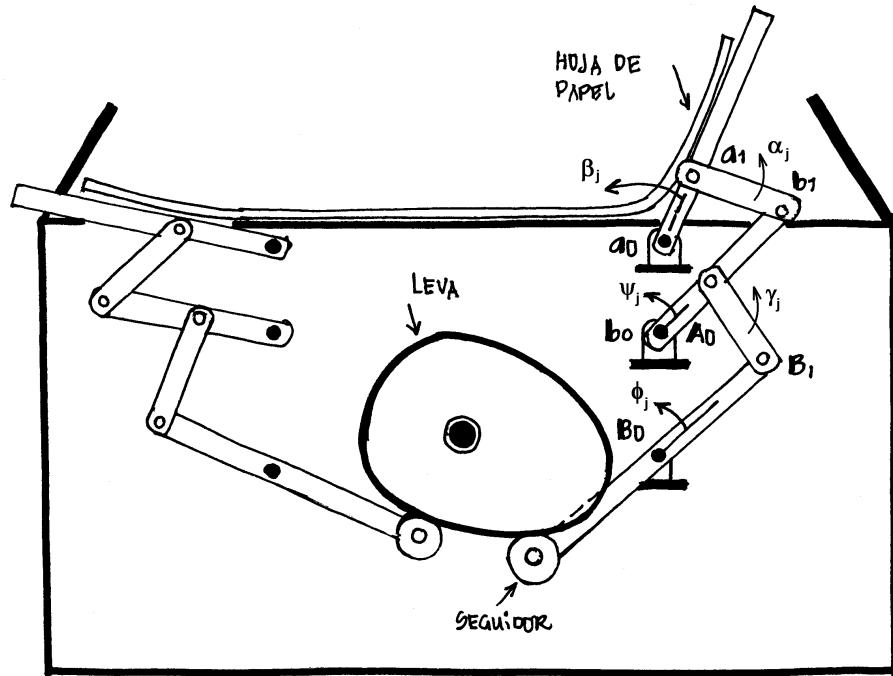


Figura 27 Mecanismo generación de función

Solución

Las ecs. de diseño son (figura 25):

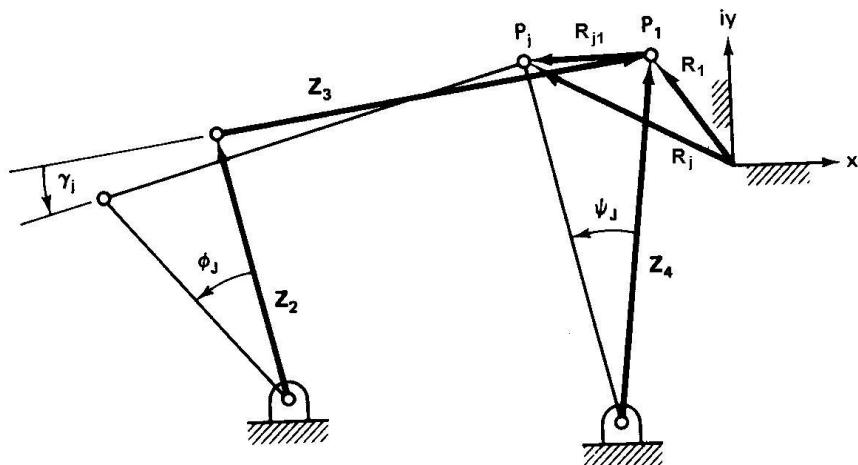


Figura 25 Generador de función de 4 barras

$$Z_2 (e^{i\phi_j} - 1) + Z_3 (e^{i\gamma_j} - 1) = Z_4 (e^{i\psi_j} - 1) \quad (8)$$

$$Z_1 = Z_2 + Z_3 - Z_4 \quad (9)$$

Datos:

$$\begin{array}{lll} \phi_2 = 14^\circ & \psi_2 = 45^\circ & \beta_2 = 90^\circ \\ \phi_3 = 25^\circ & \psi_3 = 90^\circ & \beta_3 = 180^\circ \end{array}$$

Aplicando al problema tenemos (figura 28):

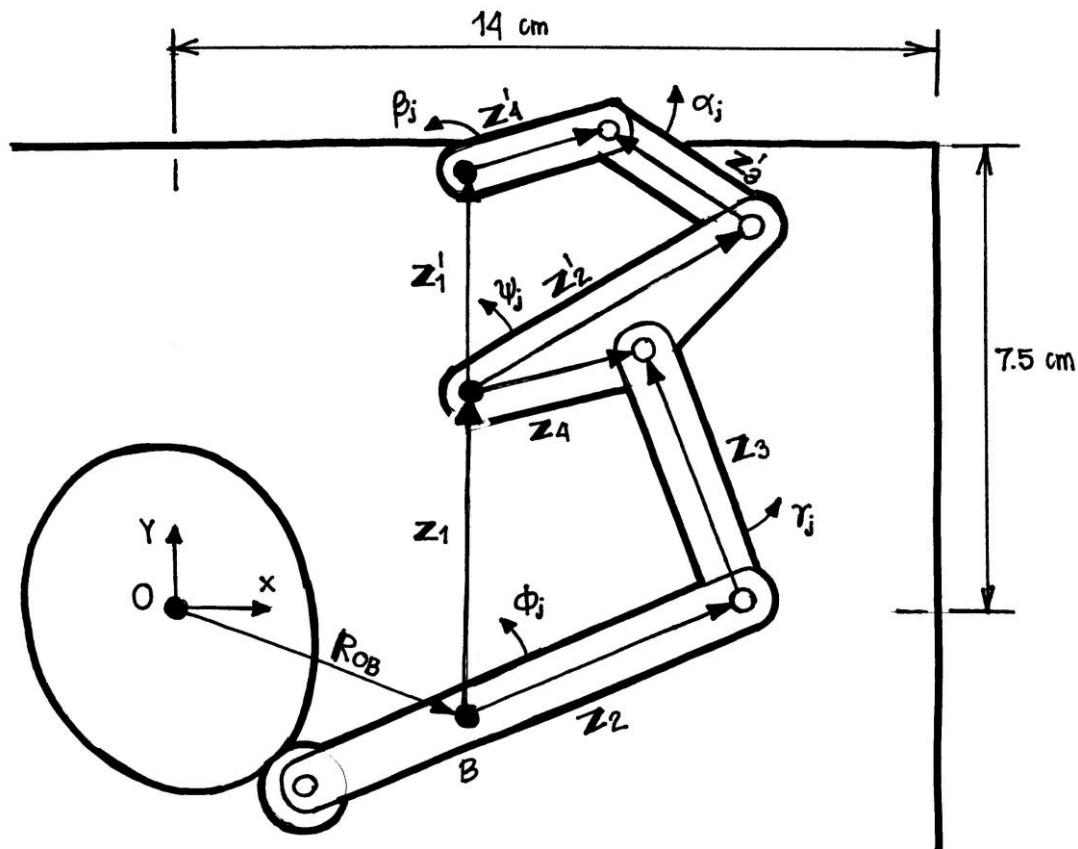


Figura 28

Resolviendo para el mecanismo 1 de ángulos ($\phi - \gamma - \psi$)

Desarrollando las ecs.(8) para $j = 2, 3$:

$$Z_2 (e^{i\phi^2} - 1) + Z_3 (e^{i\gamma^2} - 1) = Z_4 (e^{i\psi^2} - 1) \quad (E5.1)$$

$$Z_2 (e^{i\phi^3} - 1) + Z_3 (e^{i\gamma^3} - 1) = Z_4 (e^{i\psi^3} - 1) \quad (E5.2)$$

Donde:

$$\begin{aligned} Z_2 &= x_2 + y_2 i & e^{i\phi^2} &= c\phi_2 + s\phi_2 i & e^{i\gamma^2} &= c\gamma_2 + s\gamma_2 i & e^{i\psi^2} &= c\psi_2 + s\psi_2 i \\ Z_3 &= x_3 + y_3 i & e^{i\phi^3} &= c\phi_3 + s\phi_3 i & e^{i\gamma^3} &= c\gamma_3 + s\gamma_3 i & e^{i\psi^3} &= c\psi_3 + s\psi_3 i \\ Z_4 &= x_4 + y_4 i \end{aligned}$$

De las ecs.(E5.1) y (E5.2) se tienen **4 ecs. escalares × 6 incógnitas** ($x_2, y_2, x_3, y_3, \gamma_2, \gamma_3$), para el problema de **Generación de Función para 3 puntos de precisión**.

Recordar que los ángulos ($\phi_2, \phi_3, \psi_2, \psi_3$) de las manivelas de entrada-salida y las coordenadas (x_4, y_4), son valores conocidos. Para resolver daremos arbitrariamente (γ_2, γ_3). Y se tiene finalmente un sistema lineal de **4 ecs. escalares × 4 incógnitas** (x_2, y_2, x_3, y_3).

Los valores sugeridos son:

$$\begin{array}{ll} \gamma_2 = 0^\circ & \gamma_3 = 9.7^\circ \\ x_4 = 1.5 \text{ cm} & y_4 = 0.5 \text{ cm} \end{array}$$

Las ecs.(E5.1) y (E5.2) a resolver son:

$$\begin{array}{ll} \text{Re:} & -0.029 x_2 - 0.241 y_2 = -0.792 \\ \text{Im:} & 0.241 x_2 - 0.029 y_2 = 0.914 \end{array} \quad (\text{E5.1})$$

$$\begin{array}{ll} \text{Re:} & -0.093 x_2 - 0.014 x_3 - 0.422 y_2 - 0.168 y_3 = -2 \\ \text{Im:} & 0.422 x_2 + 0.168 x_3 - 0.093 y_2 - 0.014 y_3 = 1 \end{array} \quad (\text{E5.2})$$

Resolviendo:

$$\begin{array}{ll} x_2 = 4.119 & y_2 = 2.771 \\ x_3 = -2.614 & y_3 = 2.849 \end{array}$$

Vectorialmente:

$$\begin{array}{l} \mathbf{Z}_2 = x_2 + y_2 \mathbf{i} = 4.119 + 2.771 \mathbf{i} \\ \mathbf{Z}_3 = x_3 + y_3 \mathbf{i} = -2.614 + 2.849 \mathbf{i} \end{array}$$

Aplicando ec.(9):

$$\begin{array}{l} \mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_4 \\ \mathbf{Z}_1 = (4.119 + 2.771 \mathbf{i}) + (-2.614 + 2.849 \mathbf{i}) - (1.5 - 0.5 \mathbf{i}) \\ \mathbf{Z}_1 = 0.005 + 5.120 \mathbf{i} \end{array} \quad (\text{E5.3})$$

Resolviendo para el mecanismo 2 de ángulos ($\psi - \alpha - \beta$)

Desarrollando las ecs.(8) para $j = 2, 3$:

$$\mathbf{Z}_2' (e^{i\psi^2} - 1) + \mathbf{Z}_3' (e^{i\alpha^2} - 1) = \mathbf{Z}_4' (e^{i\beta^2} - 1) \quad (\text{E5.4})$$

$$\mathbf{Z}_2' (e^{i\psi^3} - 1) + \mathbf{Z}_3' (e^{i\alpha^3} - 1) = \mathbf{Z}_4' (e^{i\beta^3} - 1) \quad (\text{E5.5})$$

Donde:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{Z}_2' = x_2' + y_2' \mathbf{i} & e^{i\alpha^2} = c\alpha_2 + s\alpha_2 \mathbf{i} & e^{i\beta^2} = c\beta_2 + s\beta_2 \mathbf{i} \\ \mathbf{Z}_3' = x_3' + y_3' \mathbf{i} & e^{i\alpha^3} = c\alpha_3 + s\alpha_3 \mathbf{i} & e^{i\beta^3} = c\beta_3 + s\beta_3 \mathbf{i} \\ \mathbf{Z}_4' = x_4' + y_4' \mathbf{i} & & \end{array}$$

De las ecs.(E5.4) y (E5.5) se tienen **4 ecs. escalares × 6 incógnitas** ($x_2', y_2', x_3', y_3', \alpha_2, \alpha_3$), para el problema de **Generación de Función para 3 puntos de precisión**.

Recordar que los ángulos ($\psi_2, \psi_3, \beta_2, \beta_3$) de las manivelas de entrada–salida y las coordenadas (x_4', y_4'), son valores conocidos. Para resolver daremos arbitrariamente

(α_2, α_3) . Y se tiene finalmente un sistema lineal de **4 ecs. escalares \times 4 incógnitas** (x_2', y_2', x_3', y_3') .

Los valores sugeridos son:

$$\begin{array}{ll} \alpha_2 = 7^\circ & \alpha_3 = 90^\circ \\ x_4' = 2.2 \text{ cm} & y_4' = 0 \text{ cm} \end{array}$$

Las ecs.(E3.4) y (E3.5) a resolver son:

$$\begin{array}{ll} \text{Re: } -0.292 x_2' - 0.007 x_3' - 0.707 y_2' - 0.121 y_3' = -2.2 \\ \text{Im: } 0.707 x_2' + 0.121 x_3' - 0.292 y_2' - 0.007 y_3' = 2.2 \end{array} \quad (\text{E5.4})$$

$$\begin{array}{ll} \text{Re: } -x_2' - x_3' - y_2' - y_3' = -4.4 \\ \text{Im: } x_2' + x_3' - y_2' - y_3' = 0 \end{array} \quad (\text{E5.5})$$

Resolviendo:

$$\begin{array}{ll} x_2' = 3.978 & y_2' = 1.332 \\ x_3' = -1.778 & y_3' = 0.867 \end{array}$$

Vectorialmente:

$$\begin{array}{l} \mathbf{Z}_2' = x_2' \mathbf{i} + y_2' \mathbf{j} = 3.978 \mathbf{i} + 1.332 \mathbf{j} \\ \mathbf{Z}_3' = x_3' \mathbf{i} + y_3' \mathbf{j} = -1.778 \mathbf{i} + 0.867 \mathbf{j} \end{array}$$

Aplicando ec.(9):

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1' &= \mathbf{Z}_2' + \mathbf{Z}_3' - \mathbf{Z}_4' & (\text{E5.6}) \\ \mathbf{Z}_1' &= (3.978 + 1.332 \mathbf{i}) + (-1.778 + 0.867 \mathbf{i}) - (2.2 + 0 \mathbf{i}) \\ \mathbf{Z}_1' &= 0 + 2.2 \mathbf{i} \end{aligned}$$

El mecanismo diseñado se muestra en la figura 29.

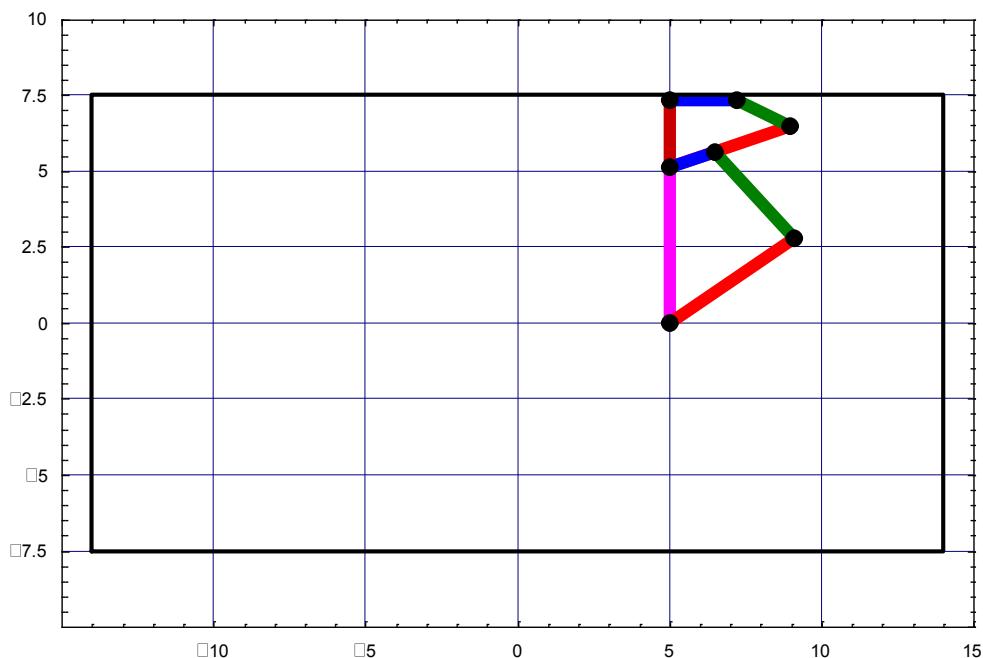


Figura 29

Análisis de Posición

En la figura 30, se muestran los vectores utilizados en el análisis. La magnitud de los vectores y los ángulos medidos con la horizontal de la posición inicial del mecanismo, se definen a continuación (ver programa en *Mathematica* “Síntesis Complejos 5”):

$$\mathbf{R}_{OB} = 5 + 0 \mathbf{i} \text{ cm}$$

El vector \mathbf{R}_{OB} (figura 28), es sugerido de manera arbitraria por nosotros, que somos los diseñadores del mecanismo. Este vector no es requerido en el análisis de posición, pero es utilizado para la simulación en el programa.

$$r_1 = \| \mathbf{Z}_1 \| = 5.120 \text{ cm}$$

$$r_3 = \| \mathbf{Z}_2 \| = 3.866$$

$$r_1' = \| \mathbf{Z}_1' \| = 2.2 \text{ cm}$$

$$r_3' = \| \mathbf{Z}_2' \| = 1.979$$

$$r_2 = \| \mathbf{Z}_3 \| = 4.964$$

$$r_4 = \| \mathbf{Z}_4 \| = 1.581$$

$$r_2' = \| \mathbf{Z}_3' \| = 4.196$$

$$r_4' = \| \mathbf{Z}_4' \| = 2.2$$

$$\theta_{1i} = 89.943^\circ$$

$$\theta_{3i} = 132.537^\circ$$

$$\theta_{1i}' = 90^\circ$$

$$\theta_{3i}' = 154^\circ$$

$$\theta_{2i} = 33.934^\circ$$

$$\theta_{4i} = 18.4349^\circ$$

$$\theta_{2i}' = 18.513^\circ$$

$$\theta_{4i}' = 0^\circ$$

$$\beta_4 = \theta_{2i}' - \theta_{4i} = 0.078^\circ$$

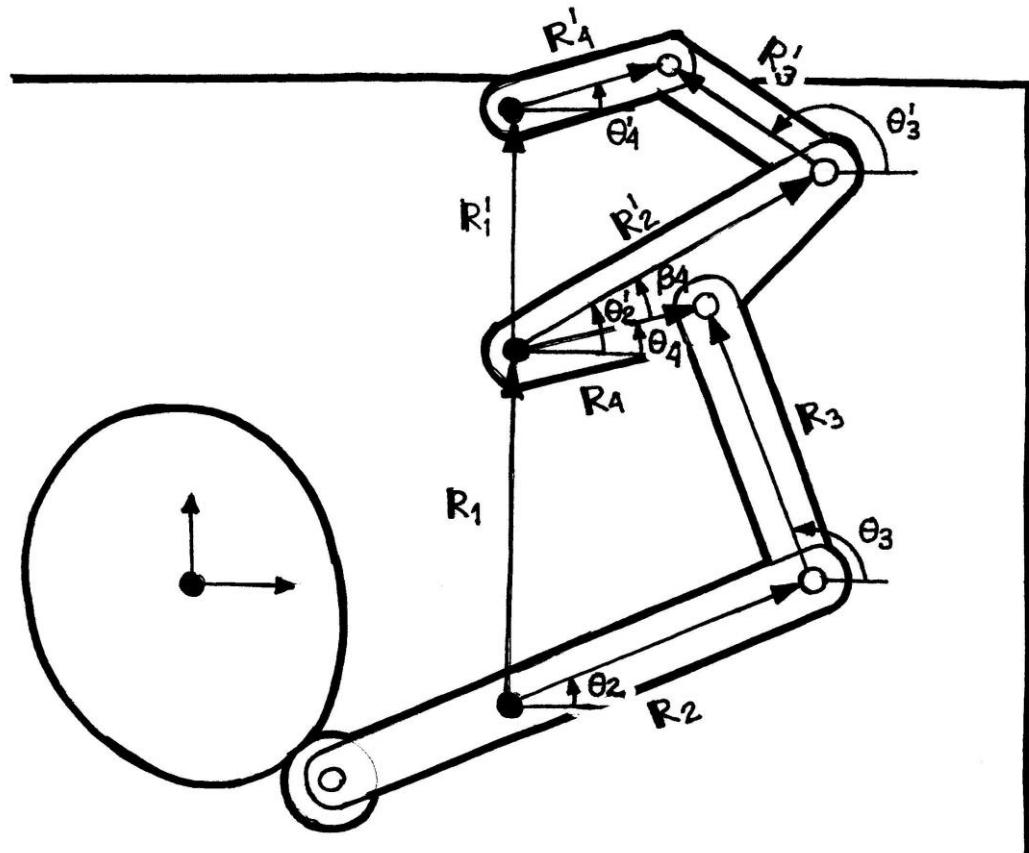


Figura 30

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= c\theta_{1i} \mathbf{i} + s\theta_{1i} \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_2 &= c\theta_2 \mathbf{i} + s\theta_2 \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_3 &= c\theta_3 \mathbf{i} + s\theta_3 \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_4 &= c\theta_4 \mathbf{i} + s\theta_4 \mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1' &= c\theta_{1i}' \mathbf{i} + s\theta_{1i}' \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_2' &= c(\theta_4 + \beta_4) \mathbf{i} + s(\theta_4 + \beta_4) \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_3' &= c\theta_3' \mathbf{i} + s\theta_3' \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_4' &= c\theta_4' \mathbf{i} + s\theta_4' \mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 &= r_1 \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{R}_2 &= r_2 \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{R}_3 &= r_3 \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{R}_4 &= r_4 \mathbf{u}_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1' &= r_1' \mathbf{u}_1' \\ \mathbf{R}_2' &= r_2' \mathbf{u}_2' \\ \mathbf{R}_3' &= r_3' \mathbf{u}_3' \\ \mathbf{R}_4' &= r_4' \mathbf{u}_4'\end{aligned}$$

La ecuación de posición es:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_2' + \mathbf{R}_3' - \mathbf{R}_4' - \mathbf{R}_1' &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

El análisis de posición se realiza de la misma manera que el ejemplo 1. Ver programa en *Mathematica* “Síntesis Complejos 5”.

Ángulo de Transmisión ϕ

El mecanismo de 6 barras cuenta con dos ángulos de transmisión ϕ_1 y ϕ_2 (figura 31).

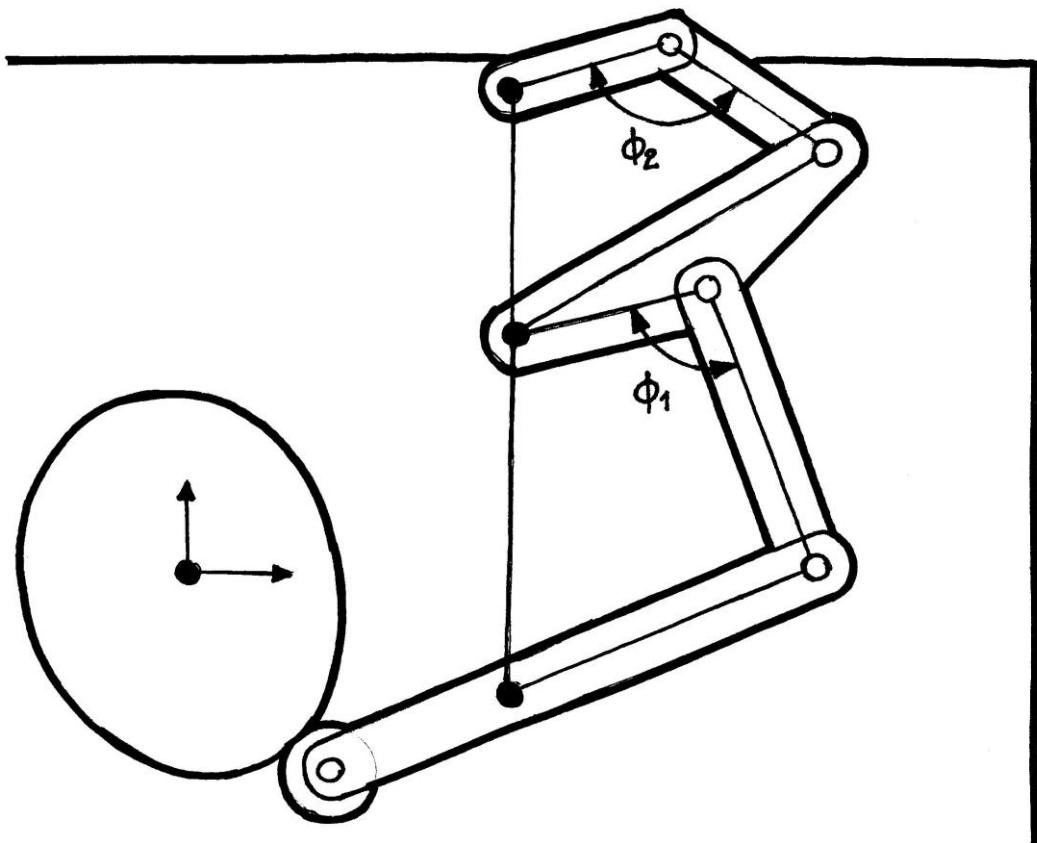


Figura 31

La manivela es la barra 2, unida a la leva mediante un rodillo. El mecanismo realiza la tarea para un ángulo θ_2 :

$$\theta_{2i} \leq \theta_2 \leq (\theta_{2i} + 25^\circ)$$

En este ejemplo la manivela realiza un giro de 25° . Los ángulos de transmisión para el movimiento de la manivela se ven en las figuras 32 y 33.

1. La figura 32 muestra que el ángulo ϕ_1 , se sale del rango inferior $40^\circ \leq \phi$, al final de su tarea. Y la figura 33 muestra que ϕ_2 , se sale del rango superior $\phi \leq 140^\circ$, al inicio del mismo.
2. Se sugiere seguir buscando otras soluciones.

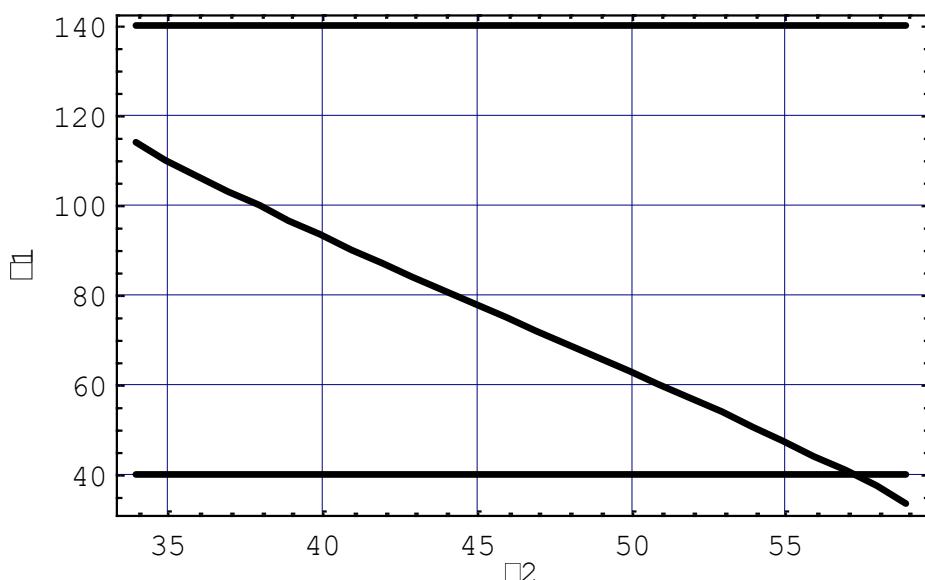


Figura 32

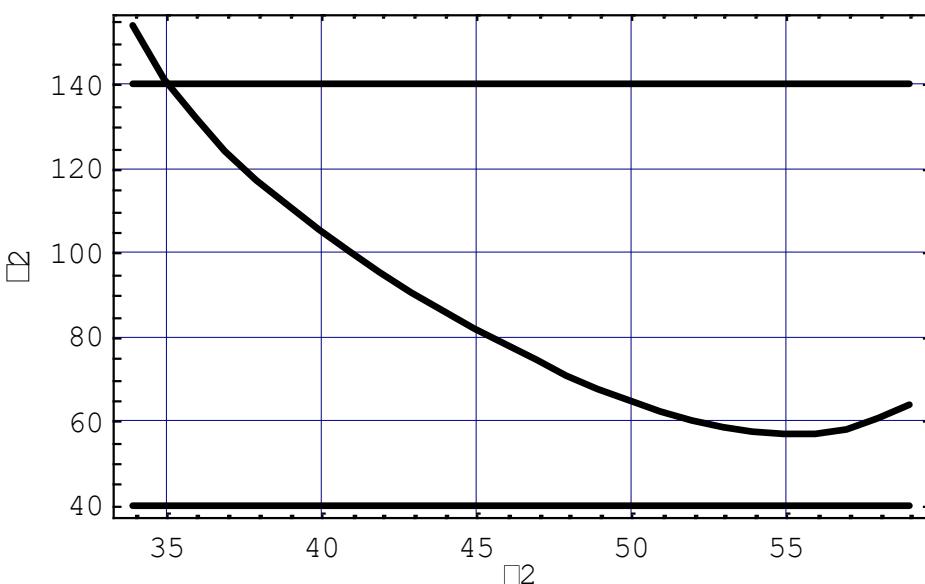


Figura 33

Ejemplo 6 Generación de Función

Diseño de Mecanismo de Asiento Reclinable

- La figura 34 muestra un asiento de barbero, en el cual un brazo controla el descanso de pies y cabeza.
- El tipo de mecanismo elegido para esta tarea está formado por dos mecanismos de 4 barras en serie.
- Los datos de rotación para la manivela de entrada y salida del mecanismo 1 (descanso de cabeza – brazo) son:

$$\begin{aligned}\phi_2 &= 50^\circ & \psi_2 &= 22.5^\circ \\ \phi_3 &= 75^\circ & \psi_3 &= 45^\circ\end{aligned}$$

- Los datos de rotación para la manivela de entrada y salida del mecanismo 2 (brazo – descanso de pies) son:

$$\begin{aligned}\psi_2 &= 22.5^\circ & \beta_2 &= 40^\circ \\ \psi_3 &= 45^\circ & \beta_3 &= 70^\circ\end{aligned}$$

Solución

Las ecs. de diseño son (figura 25):

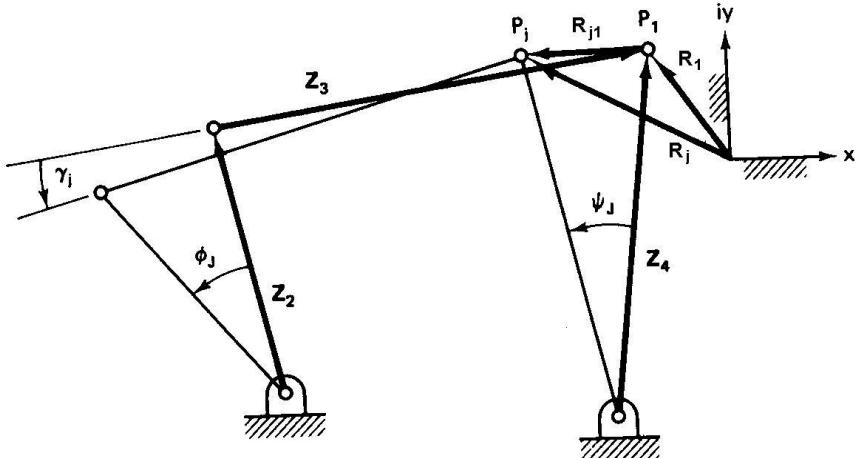
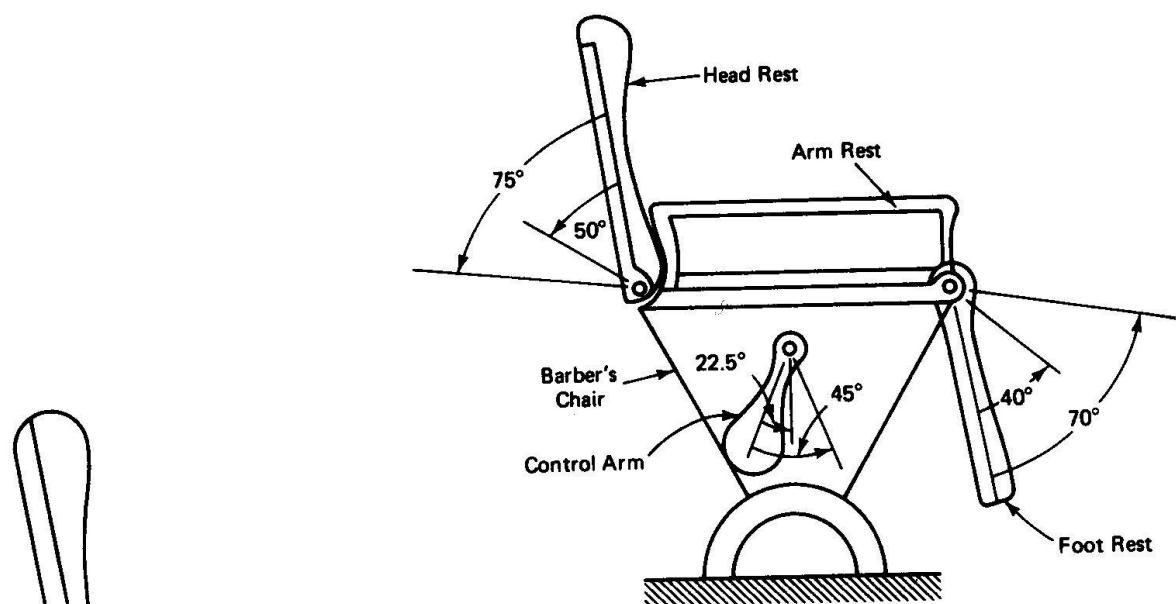


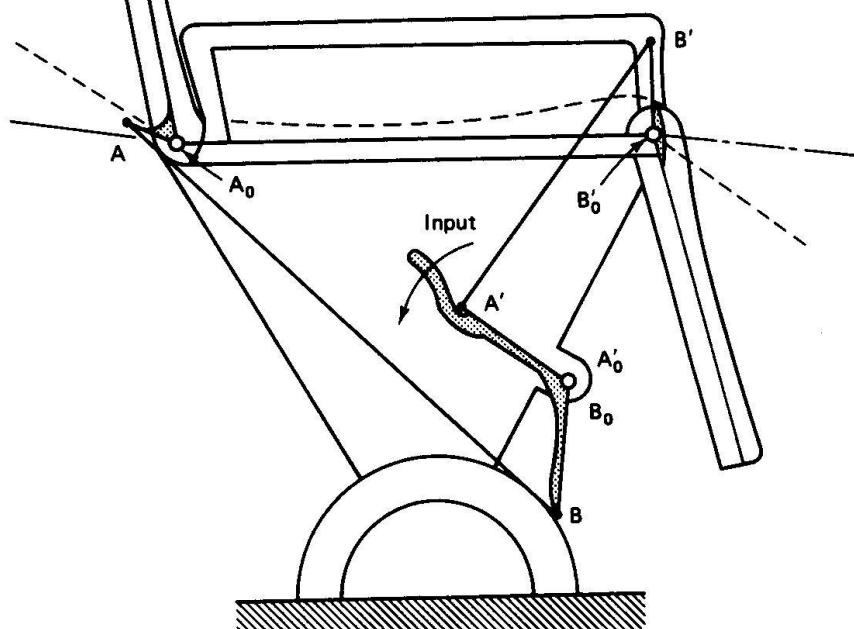
Figura 25 Generador de función de 4 barras

$$Z_2 (e^{i\phi_j} - 1) + Z_3 (e^{i\gamma_j} - 1) = Z_4 (e^{i\psi_j} - 1) \quad (8)$$

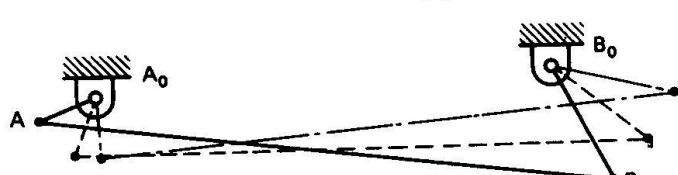
$$Z_1 = Z_2 + Z_3 - Z_4 \quad (9)$$



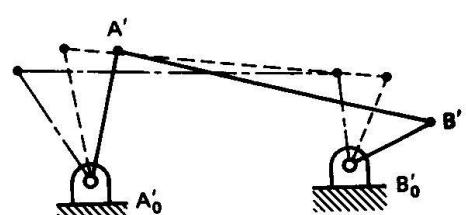
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 34

Aplicando al problema tenemos (figura 35):

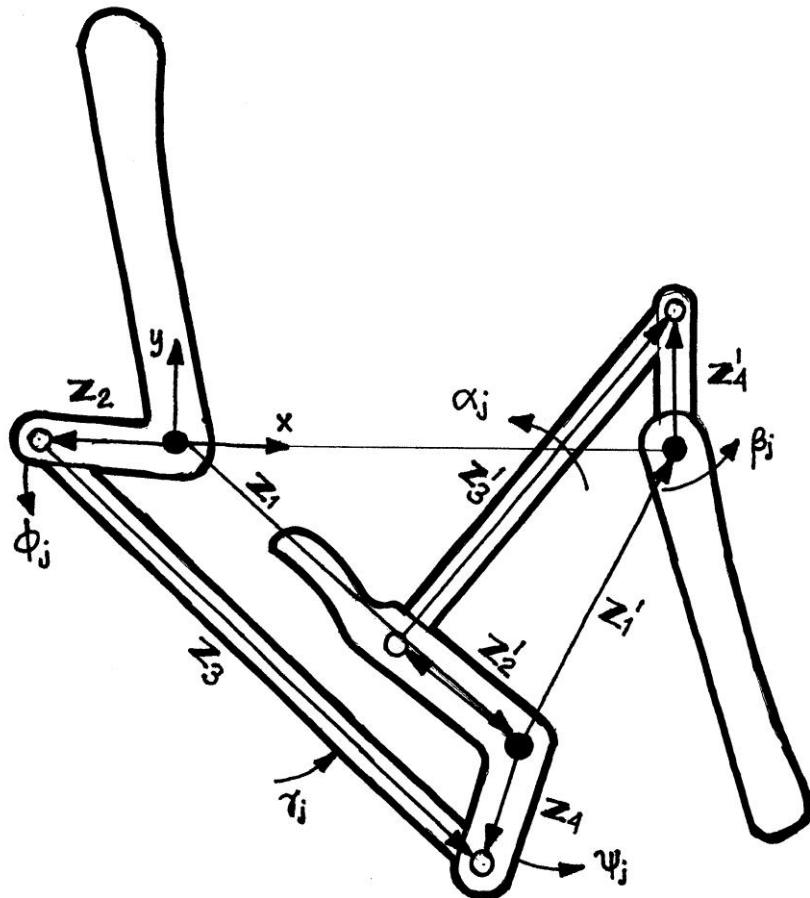


Figura 35

Resolviendo para el mecanismo 1 (descanso de cabeza – brazo)

Desarrollando las ecs.(8) para $j = 2, 3$:

$$Z_2 (e^{i\phi^2} - 1) + Z_3 (e^{i\gamma^2} - 1) = Z_4 (e^{i\psi^2} - 1) \quad (E6.1)$$

$$Z_2 (e^{i\phi^3} - 1) + Z_3 (e^{i\gamma^3} - 1) = Z_4 (e^{i\psi^3} - 1) \quad (E6.2)$$

Donde:

$$\begin{array}{llll} Z_2 = x_2 + y_2 i & e^{i\phi^2} = c\phi_2 + s\phi_2 i & e^{i\gamma^2} = c\gamma_2 + s\gamma_2 i & e^{i\psi^2} = c\psi_2 + s\psi_2 i \\ Z_3 = x_3 + y_3 i & e^{i\phi^3} = c\phi_3 + s\phi_3 i & e^{i\gamma^3} = c\gamma_3 + s\gamma_3 i & e^{i\psi^3} = c\psi_3 + s\psi_3 i \\ Z_4 = x_4 + y_4 i & & & \end{array}$$

De las ecs.(E6.1) y (E6.2) se tienen **4 ecs. escalares \times 6 incógnitas** ($x_2, y_2, x_3, y_3, \gamma_2, \gamma_3$), para el problema de **Generación de Función para 3 puntos de precisión**.

Recordar que los ángulos ($\phi_2, \phi_3, \psi_2, \psi_3$) de las manivelas de entrada–salida y las coordenadas (x_4, y_4), son valores conocidos. Para resolver daremos arbitrariamente

(γ_2, γ_3) . Y se tiene finalmente un sistema lineal de **4 ecs. escalares \times 4 incógnitas** (x_2, y_2, x_3, y_3) .

Datos:

$$\begin{array}{lll} \phi_2 = 50^\circ & \psi_2 = 22.5^\circ & \beta_2 = 40^\circ \\ \phi_3 = 75^\circ & \psi_3 = 45^\circ & \beta_3 = 70^\circ \end{array}$$

Los valores sugeridos son:

$$\begin{array}{ll} \gamma_2 = 7^\circ & \gamma_3 = 12^\circ \\ x_4 = -2 \text{ cm} & y_4 = -10 \text{ cm} \end{array}$$

Las ecs.(E6.1) y (E6.2) a resolver son:

$$\begin{array}{ll} \text{Re: } -0.357 x_2 - 0.007 x_3 - 0.766 y_2 - 0.121 y_3 = 3.979 & (\text{E6.1}) \\ \text{Im: } 0.766 x_2 + 0.121 x_3 - 0.357 y_2 - 0.007 y_3 = -0.004 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Re: } -0.741 x_2 - 0.021 x_3 - 0.965 y_2 - 0.207 y_3 = 7.656 & (\text{E6.2}) \\ \text{Im: } 0.965 x_2 + 0.207 x_3 - 0.741 y_2 - 0.021 y_3 = 1.514 & \end{array}$$

Resolviendo:

$$\begin{array}{ll} x_2 = -4.244 & y_2 = 1.700 \\ x_3 = 29.627 & y_3 = -32.713 \end{array}$$

Vectorialmente:

$$\begin{array}{l} \mathbf{Z}_2 = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} = -4.244 \mathbf{i} + 1.700 \mathbf{j} \\ \mathbf{Z}_3 = x_3 \mathbf{i} + y_3 \mathbf{j} = 29.627 \mathbf{i} - 32.713 \mathbf{j} \end{array}$$

Aplicando ec.(9):

$$\begin{array}{ll} \mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_4 & (\text{E6.3}) \\ \mathbf{Z}_1 = (-4.244 + 1.700 \mathbf{i}) + (29.627 - 32.713 \mathbf{i}) - (-2 - 10 \mathbf{i}) & \\ \mathbf{Z}_1 = 27.383 - 21.012 \mathbf{i} & \end{array}$$

Resolviendo para el mecanismo 2 (brazo – descanso de pies)

Desarrollando las ecs.(8) para $j = 2, 3$:

$$\mathbf{Z}_2' (e^{i\psi_2} - 1) + \mathbf{Z}_3' (e^{i\alpha_2} - 1) = \mathbf{Z}_4' (e^{i\beta_2} - 1) \quad (\text{E6.4})$$

$$\mathbf{Z}_2' (e^{i\psi_3} - 1) + \mathbf{Z}_3' (e^{i\alpha_3} - 1) = \mathbf{Z}_4' (e^{i\beta_3} - 1) \quad (\text{E6.5})$$

Donde:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{Z}_2' = x_2' \mathbf{i} + y_2' \mathbf{j} & e^{i\alpha_2} = c\alpha_2 + s\alpha_2 \mathbf{i} & e^{i\beta_2} = c\beta_2 + s\beta_2 \mathbf{i} \\ \mathbf{Z}_3' = x_3' \mathbf{i} + y_3' \mathbf{j} & e^{i\alpha_3} = c\alpha_3 + s\alpha_3 \mathbf{i} & e^{i\beta_3} = c\beta_3 + s\beta_3 \mathbf{i} \\ \mathbf{Z}_4' = x_4' \mathbf{i} + y_4' \mathbf{j} & & \end{array}$$

De las ecs.(E6.4) y (E6.5) se tienen **4 ecs. escalares × 6 incógnitas** (x_2' , y_2' , x_3' , y_3' , α_2 , α_3), para el problema de **Generación de Función para 3 puntos de precisión**.

Recordar que los ángulos (ψ_2 , ψ_3 , β_2 , β_3) de las manivelas de entrada-salida y las coordenadas (x_4' , y_4'), son valores conocidos. Para resolver daremos arbitrariamente (α_2 , α_3). Y se tiene finalmente un sistema lineal de **4 ecs. escalares × 4 incógnitas** (x_2' , y_2' , x_3' , y_3').

Los valores sugeridos son:

$$\begin{array}{ll} \alpha_2 = 8^\circ & \alpha_3 = 13.5^\circ \\ x_4' = 0 \text{ cm} & y_4' = 8 \text{ cm} \end{array}$$

Las ecs.(E3.4) y (E3.5) a resolver son:

$$\begin{array}{ll} \text{Re: } -0.076 x_2' - 0.009 x_3' - 0.382 y_2' - 0.139 y_3' = -5.142 & (\text{E64}) \\ \text{Im: } 0.382 x_2' + 0.139 x_3' - 0.076 y_2' - 0.009 y_3' = -1.871 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Re: } -0.292 x_2' - 0.027 x_3' - 0.707 y_2' - 0.233 y_3' = -7.517 & (\text{E65}) \\ \text{Im: } 0.707 x_2' + 0.233 x_3' - 0.292 y_2' - 0.027 y_3' = -5.263 & \end{array}$$

Resolviendo:

$$\begin{array}{ll} x_2' = -10.987 & y_2' = 7.006 \\ x_3' = 22.145 & y_3' = 22.143 \end{array}$$

Vectorialmente:

$$\mathbf{Z}_2' = x_2' \mathbf{i} + y_2' \mathbf{j} = -10.987 \mathbf{i} + 7.006 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{Z}_3' = x_3' \mathbf{i} + y_3' \mathbf{j} = 22.145 \mathbf{i} + 22.143 \mathbf{j}$$

Aplicando ec.(9):

$$\mathbf{Z}_1' = \mathbf{Z}_2' + \mathbf{Z}_3' - \mathbf{Z}_4' \quad (\text{E5.6})$$

$$\mathbf{Z}_1' = (-10.987 \mathbf{i} + 7.006 \mathbf{j}) + (22.145 \mathbf{i} + 22.143 \mathbf{j}) - (0 \mathbf{i} + 8 \mathbf{j})$$

$$\mathbf{Z}_1' = 11.157 \mathbf{i} + 21.150 \mathbf{j}$$

El mecanismo diseñado se muestra en la figura 36.

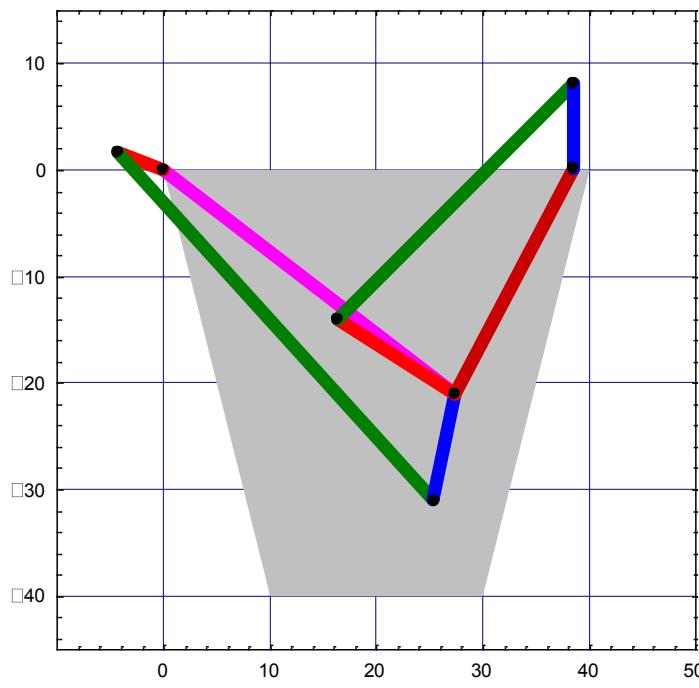


Figura 36

Análisis de Posición

En la figura 37, se muestran los vectores utilizados en el análisis. La magnitud de los vectores y los ángulos medidos con la horizontal de la posición inicial del mecanismo, se definen a continuación (ver programa en *Mathematica* “Síntesis Complejos 6”):

$$r_1 = \| \mathbf{Z}_1 \| = 34.516 \text{ cm}$$

$$r_3 = \| \mathbf{Z}_2 \| = 44.135$$

$$r_2 = \| \mathbf{Z}_3 \| = 4.572$$

$$r_4 = \| \mathbf{Z}_4 \| = 10.198$$

$$r_1' = \| \mathbf{Z}_1' \| = 23.912 \text{ cm}$$

$$r_3' = \| \mathbf{Z}_2' \| = 31.316$$

$$r_2' = \| \mathbf{Z}_3' \| = 13.031$$

$$r_4' = \| \mathbf{Z}_4' \| = 8$$

$$\theta_{1i} = -37.5^\circ$$

$$\theta_{3i} = -47.834^\circ$$

$$\theta_{2i} = 158.162^\circ$$

$$\theta_{4i} = -101.31^\circ$$

$$\theta_{1i}' = 62.187^\circ$$

$$\theta_{3i}' = 44.997^\circ$$

$$\theta_{2i}' = 147.474^\circ$$

$$\theta_{4i}' = 90^\circ$$

$$\beta_4 = \theta_{4i} - \theta_{2i}' = -248.784^\circ$$

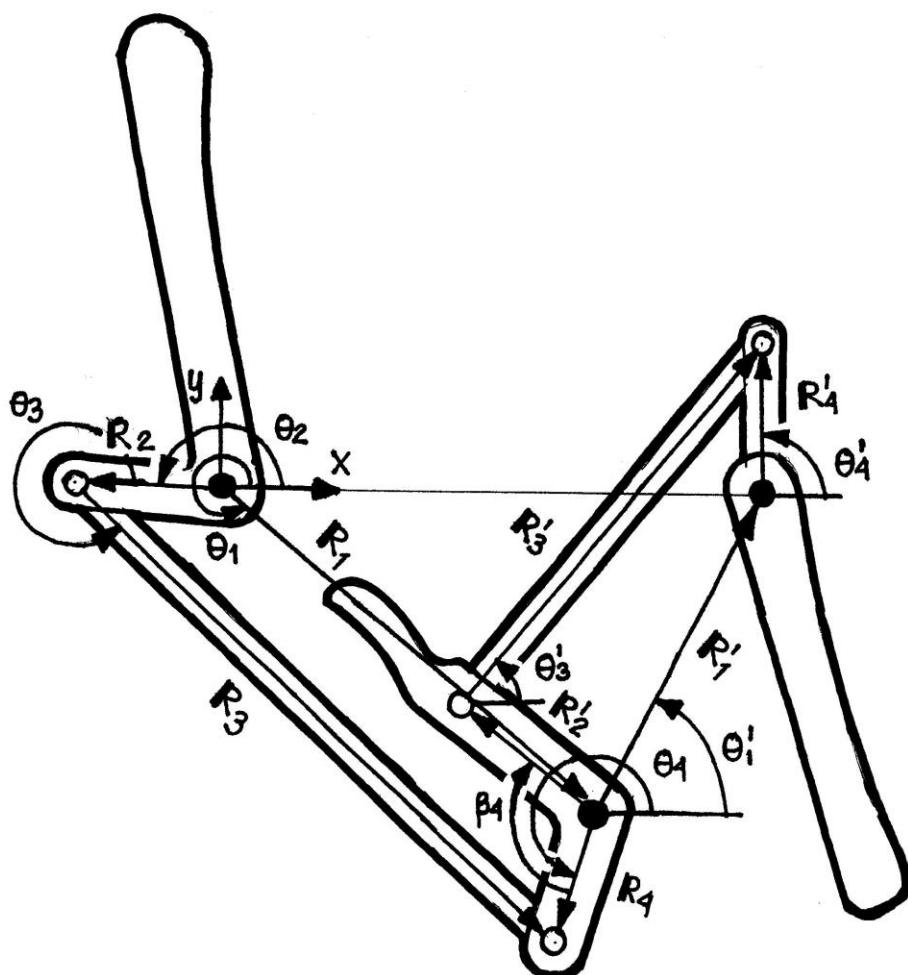


Figura 37

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= c\theta_{1i} \mathbf{i} + s\theta_{1i} \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_2 &= c\theta_2 \mathbf{i} + s\theta_2 \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_3 &= c\theta_3 \mathbf{i} + s\theta_3 \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_4 &= c\theta_4 \mathbf{i} + s\theta_4 \mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1' &= c\theta_{1i}' \mathbf{i} + s\theta_{1i}' \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_2' &= c(\theta_4 + \beta_4) \mathbf{i} + s(\theta_4 + \beta_4) \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_3' &= c\theta_3' \mathbf{i} + s\theta_3' \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_4' &= c\theta_4' \mathbf{i} + s\theta_4' \mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 &= r_1 \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{R}_2 &= r_2 \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{R}_3 &= r_3 \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{R}_4 &= r_4 \mathbf{u}_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1' &= r_1' \mathbf{u}_1' \\ \mathbf{R}_2' &= r_2' \mathbf{u}_2' \\ \mathbf{R}_3' &= r_3' \mathbf{u}_3' \\ \mathbf{R}_4' &= r_4' \mathbf{u}_4'\end{aligned}$$

La ecuación de posición es:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_2' + \mathbf{R}_3' - \mathbf{R}_4' - \mathbf{R}_1' &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

El análisis de posición se realiza de la misma manera que el ejemplo 1. Ver programa en *Mathematica* “Síntesis Complejos 6”.

Ángulo de Transmisión ϕ

El mecanismo de 6 barras cuenta con dos ángulos de transmisión ϕ_1 y ϕ_2 (figura 38).

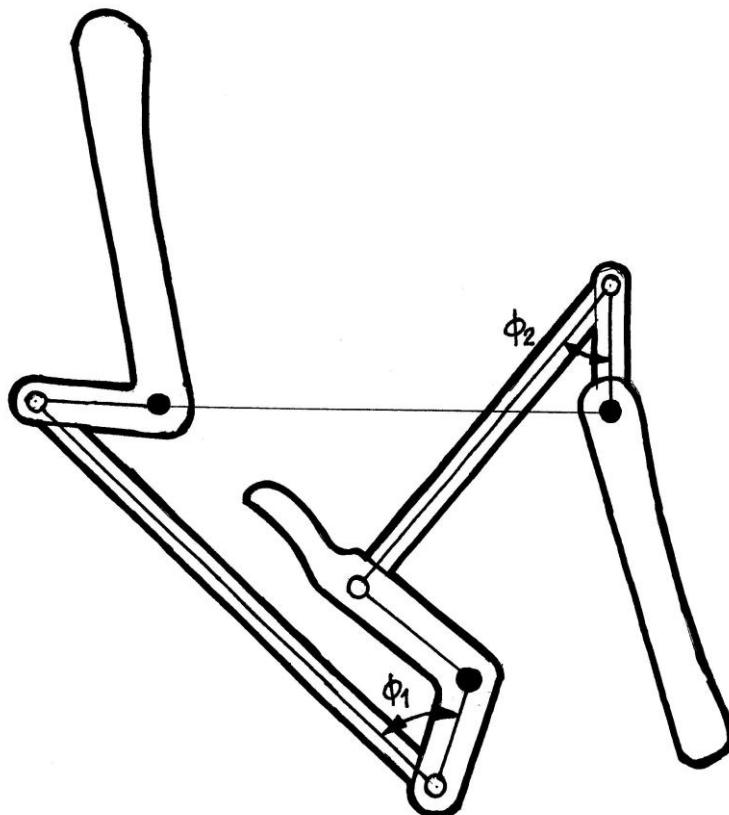


Figura 38

El mecanismo realiza la tarea para un ángulo θ_2 :

$$\theta_{2i} \leq \theta_2 \leq (\theta_{2i} + 75^\circ)$$

En este ejemplo la manivela realiza un giro de 75° . Los ángulos de transmisión para el movimiento de la manivela se ven en las figuras 39 y 40.

3. La figura 39 muestra que el ángulo ϕ_1 , se sale del rango inferior $40^\circ \leq \phi$. Y la figura 40 muestra que ϕ_2 , tiene un comportamiento aceptable.
4. Se sugiere seguir buscando otras soluciones para el mecanismo 1.

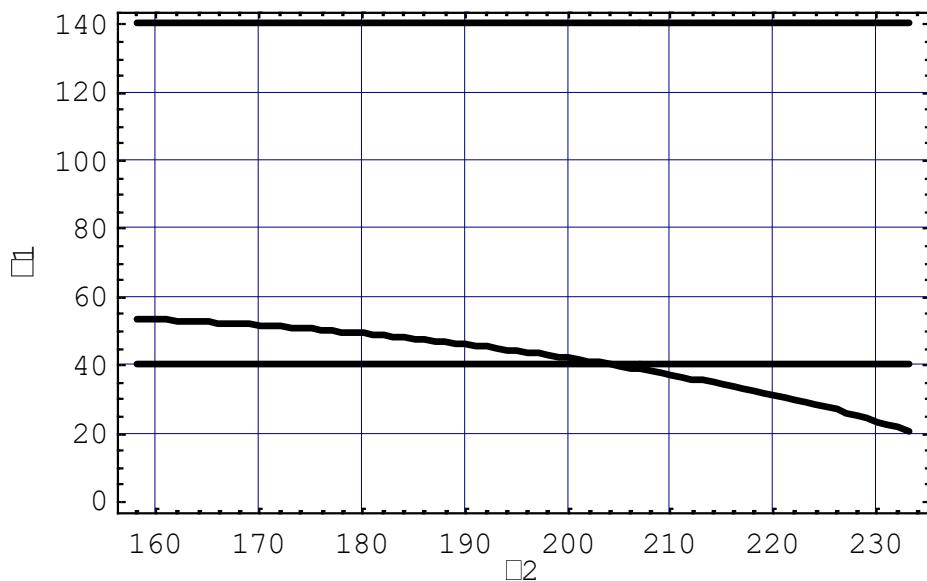


Figura 39

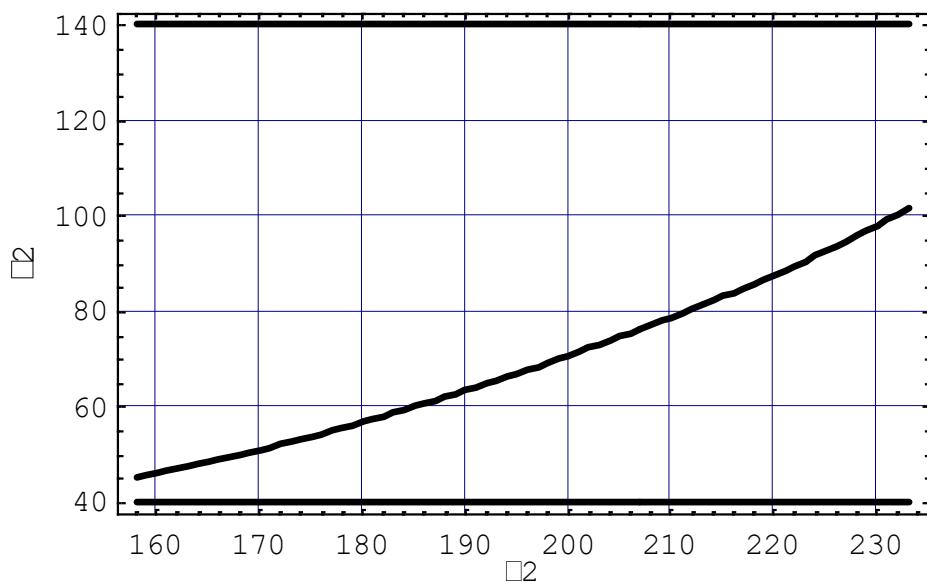


Figura 40