No.Lista: 07
TAREA: 12

Universidad Nacional Autonoma de México
Facultad de Ingeniería

Investigación de método de momentos y máxima verosimilitud para estimación de parámetros puntual.

Celaya González David Alejandro
Grupo: 02
Estadistica
30/Noviembre/2020

Metodo de momentos

Definición: Sea x una v.a. y sea $k \geq 1$ un entero. El k-esimo momento de x, si existe, es el número $E(x^k)$.
A los números $E(x^1), E(x^2), \ldots$ se les llama también momentos poblacionales.

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a de la distribución $f(x; \theta)$

Definición: Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a y sea $k \geq 1$ un entero. El k-ésimo momento muestral es la v.a.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

Este metodo consiste en igualar los momentos poblacionales con los correspondientes momentos muestrales y resolver esta ecuación (o sistema de ecuaciones) para el parámetro o vector de parámetros.

1er m. poblacional $\quad E(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad$ 1er m. muestral

2do m. poblacional $\quad E(x^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \quad$ 2do m. muestral

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Ejemplo
Sea x una v.a. con función de densidad $f(x;\theta) = \begin{cases} \theta \cdot x^{\theta - 1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{eoc.} \end{cases}$

en donde $\theta > 0$

$\Rightarrow$

$$E(x) = \frac{\theta}{1+\theta}$$

Si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a. de esta distribución

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ 1er momento muestral. Entonces, por el método de momentos

$$\frac{\hat{\theta}}{1+\hat{\theta}} = \bar{X} \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta} = \bar{X} / 1 - \bar{X}$$

Este es el estimador para θ

Método de máxima Verosimilitud

Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio cuya distribución depende de un parametro θ.

Definición:
La función de verosimilitud del vector $(X_1, \ldots, X_n)$ es $L(\theta) = f_{X_1, \ldots, X_n}(x_1, \ldots, x_n; \theta)$
La letra 'L' viene de likelihood que se puede traducir como verosimilitud.

Si $X_1, \ldots, X_n$ son independientes
$L(\theta) = f_{X_1}(x_1; \theta) \ldots f_{X_n}(x_n; \theta)$
y cuando son identicamente distribuidas.
$L(\theta) = f(x_1; \theta) \ldots f(x_n; \theta)$
Este es el caso de una muestra aleatoria.

Consiste en obtener el valor de θ que maximiza a la función de verosimilitud $L(\theta) = f(x_1;\theta)\dots f(x_n;\theta)$. Al valor θ en donde $L(\theta)$ alcanza su máximo se le llama "estimación de máxima verosimilitud" o "estimación máximo verosímil".

Básicamente la idea es que θ debe ser tal que el valor numérico observado $(x_1,\dots,x_n)$ de la m.a. tenga la máxima probabilidad.

Ejemplo: Sea $x_1,\dots,x_n$ una m.a. de la distribución $\exp(\theta)$

La función de verosimilitud es
$$L(\theta) = f(x_1;\theta)\dots f(x_n;\theta) = \theta \cdot e^{-\theta x_1}\dots\theta\cdot e^{-\theta x_n} = \theta^n e^{-\theta n\bar{x}}$$

$L(\theta)$ es máxima en el mismo punto en donde $\ln(L(\theta))$ lo es.

$$\Rightarrow \quad \ln(L(\theta)) = n\cdot\ln(\theta) - \theta n\bar{x}$$

$$\therefore \frac{d}{d\theta}\ln(L(\theta)) = \frac{n}{\theta} - n\bar{x}$$

$\Rightarrow \theta = 1/\bar{x}$ Además es un máximo dado que $\frac{d^2}{d\theta^2}\ln(L(\theta)) = \frac{-n}{\theta^2} < 0$

$\hat{\theta} = 1/\bar{x}$ es la estimación para θ. $\to$ Número

$\hat{\Theta} = 1/\bar{X}$ es el estimador para θ $\to$ Estadística