

Laboratorio 3 Procesamiento Digital de Señales

Alejandro Ayala Gil y David Contreras Franco

I. OBJETIVOS

1. Generar señales de pruebas que permitan probar el funcionamiento de los distintos filtros.
2. Realizar el diseño de un filtro FIR haciendo uso del método de ventanas.
3. Utilizar un filtro FIR por Chebyshev para eliminar componentes frecuenciales.
4. Lograr filtrar las señales de prueba a través de filtros IIR usando los métodos de transformación lineal y varianza impulsional.

II. MATERIALES

1. MATLAB

III. INTRODUCCIÓN

Los filtros digitales ayudan a extraer o eliminar información de una señal. Estos pueden ser con respuesta finita o infinita al impulso y utilizando varios tipos de ventanas o estrategias de discretización. Para este laboratorio se desarrollaron filtros FIR por el metodo de ventanas y la aproximación de Chebyshev y filtros IIR por el método de transformación bilineal y por varianza impulsional. Todos se probaron en una señal compuesta de senos de distintas frecuencias y un audio corto del sonido de una Marimba en D mayor, eliminando en estas señales frecuencias específicas.

IV. GENERACIÓN DE LAS SEÑALES DE PRUEBA

La señal compuesta que se trabajó se puede observar en la ecuación 1 la cual está compuesta de senos en 6 frecuencias distintas y en distintos segmentos de tiempo.

$$x_1(t) = \begin{cases} \sin(2\pi 150t) + \sin(2\pi 250t); & 0 \leq t \leq 0,2 \\ \sin(2\pi 350t) + \sin(2\pi 450t); & 0,2 \leq t \leq 0,4 \\ \sin(2\pi 550t) + \sin(2\pi 650t); & 0,4 \leq t \leq 0,6 \end{cases} \quad (1)$$

El resultado exacto de esta señal se puede observar en la figura 1 y su componente frecuencial en la figura 2.

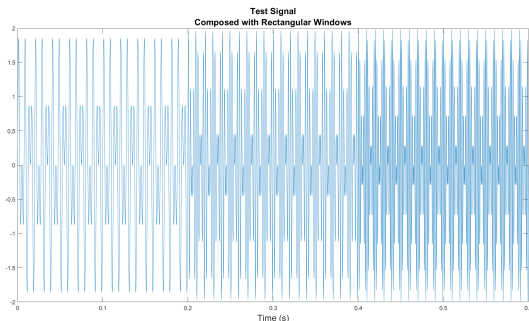


Figura 1. Señal x_1 construida con ventanas rectangulares.

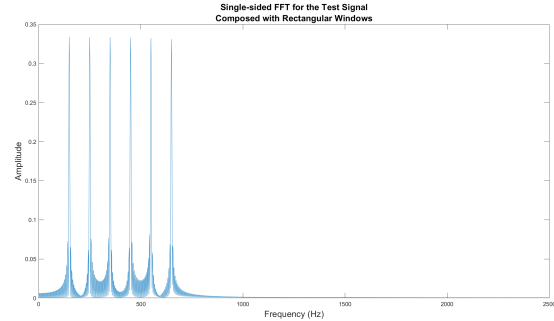


Figura 2. Magnitud de la transformada de Fourier de la señal x_1 construida con ventanas rectangulares.

Lo evidente de esta construcción es el hecho de que la transición entre las frecuencias en los distintos periodos de tiempo es muy brusca y por efecto Gibbs se generan lóbulos laterales. Esto se puede corregir construyendo la señal con ventanas más suaves. Se decide construir usando ventanas Hamming con un 25 % de *Overlapping*, las ventanas utilizadas se pueden observar en la figura 3. Con este cambio en la construcción de la señal se tiene un espectro de frecuencia con lóbulos laterales más pequeños, la señal resultante se puede observar en la figura 4 y el espectro de frecuencia en la figura 5.

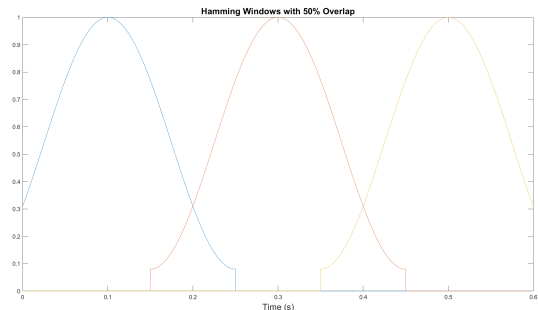


Figura 3. Ventanas *Hamming* utilizadas para la construcción de la señal.

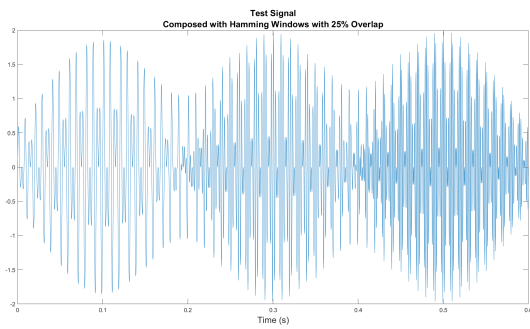


Figura 4. Señal x_1 construida con ventanas *Hamming*.

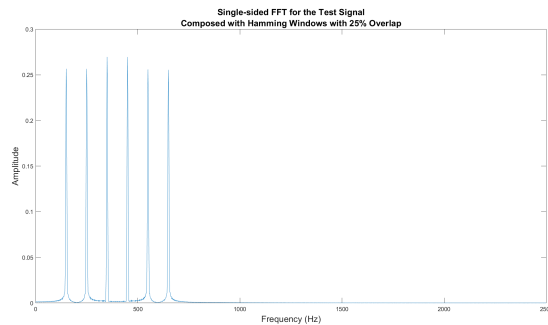


Figura 5. Magnitud de la transformada de Fourier de la señal x_1 construida con ventanas *Hamming*.

Es evidente que la señal construida con ventanas *Hamming* se ve afectada muy poco por el efecto Gibbs, por esta razón durante el desarrollo de los filtros se prueban los filtros para las dos señales.

Como es solicitado en el laboratorio, se requiere filtrar componentes de frecuencias de cada una de las señales de prueba, por lo que se determina un esquema de filtrado general para cada una de las pruebas. En el caso de la primera prueba se debe realizar un filtrado en cascada de los distintos filtros, a verse usado un filtro rechaza-banda en cada una de las etapas, este esquema se puede ver en la figura 6. Por otro lado la segunda prueba, simplemente debe filtrarse una componente de frecuencia, por lo que se tiene el planteamiento de la figura 7.

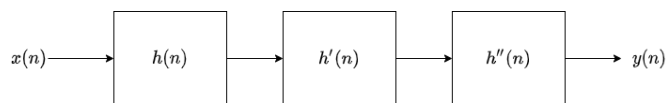


Figura 6. Diagrama de bloques para el filtrado de la primera señal de prueba.

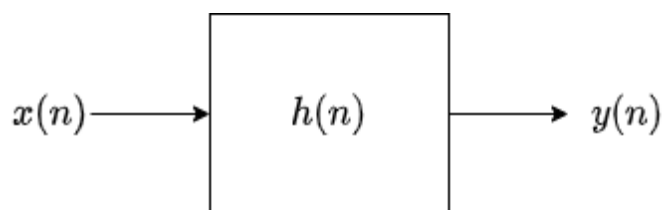


Figura 7. Diagrama de bloques para el filtrado de la segunda señal de prueba.

V. IDENTIFICADOR DEL ARMÓNICO DE MAYOR ENERGÍA

Para la señal del audio de la marimba es necesario filtrar el armónico de mayor energía. Para realizar esto primero es necesario identificar el armónico de mayor energía para poder definir los parámetros del filtro rechaza banda que se implementa para este audio. Esto se logra con un algoritmo muy sencillo en el cuál se calcula la transformada de Fourier de la señal y se busca el argumento (frecuencia) que sea máxima, esta frecuencia se toma como el armónico de mayor energía y es la frecuencia que se considera para el filtro rechaza banda.

Algorithm 1: Identificador del armónico de mayor energía.

Input: Frecuencia de Muestreo: F_s

Señal de audio: $y = \text{Vector } N \times 1$

$Y = \text{fft}(y);$

$A = \arg \max_f(Y(f));$

Result: A: Armónico de mayor energía en el audio y .

A partir de lo anterior se puede pasara analizar la señal de audio, la cual se puede observar en la figura 8 y su espectro de frecuencia (reducido en el eje X a las frecuencias más significativas) en la figura 9.

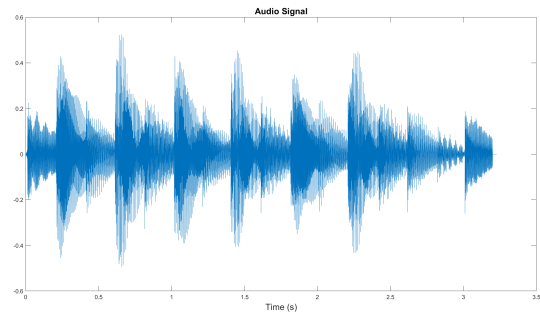


Figura 8. Señal de audio de una marimba den D Mayor.

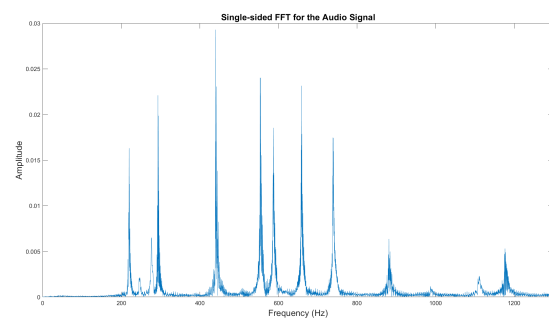


Figura 9. Magnitud del espectro de frecuencia de una señal de audio de una marimba den D Mayor.

Analizando la figura 9 y después de utilizar el algoritmo 1 se identifica que el armónico de mayor energía está en 440.008 Hz que corresponde a 440 Hz o el *pitch* de A4 [1].

VI. FILTROS FIR

VI-A. Método de ventanas

En lo que consiste al procesamiento de señales, es necesario tener en cuenta que muchas de las señales suelen ser contaminadas con distintos tipos de ruido. Por tal motivo es necesario hacer uso de filtros para poder extraer esas componentes de frecuencia no deseadas en nuestra señal. Los filtros FIR tienen la ventaja de poseer un fase lineal, permitiendo así poder ser usados en aplicaciones de telecomunicaciones. Debido a que en el laboratorio es necesario suprimir componentes frecuenciales, se opta para esta implementación por el método de ventanas realizar un filtro rechaza banda. Para eso se establece que la respuesta impulsional estará dada por la siguiente ecuación:

$$h(n) = h_d(n)w(n) \quad (2)$$

Donde $h_d(n)$ esta dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} h_d(n) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-W_{c2}} e^{-jw(\frac{M-1}{2})} e^{jwn} dw + \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-W_{c1}}^{-W_{c2}} e^{-jw(\frac{M-1}{2})} e^{jwn} dw + \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{W_{c2}}^{\pi} e^{-jw(\frac{M-1}{2})} e^{jwn} dw \end{aligned} \quad (3)$$

Teniendo entonces un orden de filtro impar se consideran como frecuencias de corte de rechaza-banda W_{c1} y W_{c2} . Realizando las integrales se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} h_d(n) = & \frac{1}{-2\pi j(\frac{M-1}{2})} [e^{jW_{c2}(\frac{M-1}{2}-n)} - \\ & e^{j\pi(\frac{M-1}{2}-n)} + e^{-jW_{c1}(\frac{M-1}{2}-n)} - \\ & e^{jW_{c1}(\frac{M-1}{2}-n)} + e^{-j\pi(\frac{M-1}{2}-n)} - \\ & e^{-jW_{c2}(\frac{M-1}{2}-n)}] \end{aligned} \quad (4)$$

Aplicando la identidad de senos expresado en exponenciales, se logra establecer una función que no depende de valores complejos, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h_d(n) = & \frac{1}{(\frac{M-1}{2}-n)\pi} [-\sin(W_{c2}(\frac{M-1}{2}-n)) + \\ & \sin(W_{c1}(\frac{M-1}{2}-n)) + \sin(\pi(\frac{M-1}{2}-n))] \end{aligned} \quad (5)$$

Debido a que cuando n toma el valor de $\frac{M-1}{2}$ se indetermina, se procede entonces a evaluar este valor antes de realizar la integral de la siguiente manera:

$$h_d(\frac{M-1}{2}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-W_{c2}} dw + \frac{1}{2\pi} \int_{-W_{c1}}^{-W_{c2}} dw + \frac{1}{2\pi} \int_{W_{c2}}^{\pi} dw \quad (6)$$

Realizando el proceso de integración se tiene el siguiente resultado:

$$h_d(\frac{M-1}{2}) = \frac{W_{c1}}{\pi} - \frac{W_{c2}}{\pi} + 1 \quad (7)$$

Teniendo la respuesta impulsional del filtro rechaza-banda, se determina que tipo de ventana se usara para el desarrollo. Para eso, como criterio de diseño se busca la banda que tenga una mayor atenuación en su banda de rechazo. En lo que se decide escoger una ventana Blackman, debido a que es la que posee mayor atenuación en la banda de rechazo que las otras, como se puede observar en la figura 10.

Window	Side-Lobe Amplitude (dB)	Transition width (Δf)	Stopband attenuation (dB)
Rectangular	-13	0.9/N	-21
Hanning	-31	3.1/N	-44
Hamming	-41	3.3/N	-53
Blackman	-57	5.5/N	-74

Cuadro: Peak side lobe amplitude of some common windows and the approximate transition width and stopband attenuation of an Nth order Low-Pass filter Designed using the given window. Source: Digital Signal Processing, M. Hayes, McGraw Hill, 2012

Figura 10. Características de las distintas ventanas.

En cuanto a la diferencia de frecuencias se considera mirar el espectro de las señales de prueba, para así determinar que tan angosta puede ser esta diferencia. Para estos casos se toma una diferencia de 100 Hz debido a que cubre un gran espacio de frecuencia, permitiendo así reducir el orden del filtro y aumentar su velocidad de procesamiento. Teniendo estos datos, se puede expresar entonces el orden del filtro, que para este caso es de 110. En las figuras 11, 12 y 13 se puede ver la respuesta impulsional que tienen los filtros diseñado para la primera señal de pruebas.

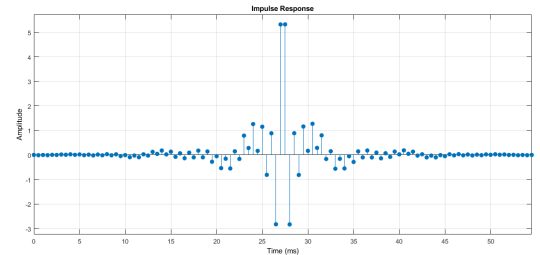


Figura 11. Respuesta impulsional del filtro supresor de la frecuencia de 150 Hz por el método de ventanas.

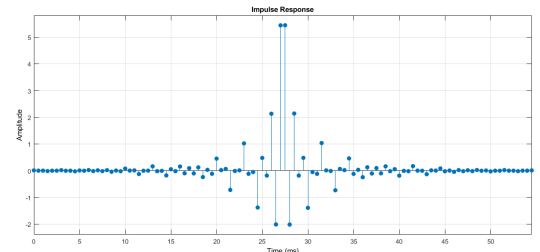


Figura 12. Respuesta impulsional del filtro supresor de la frecuencia de 350 Hz por el método de ventanas.

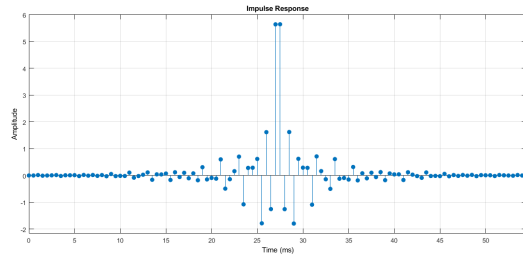


Figura 13. Respuesta impulsional del filtro supresor de la frecuencia de 550 Hz por el método de ventanas.

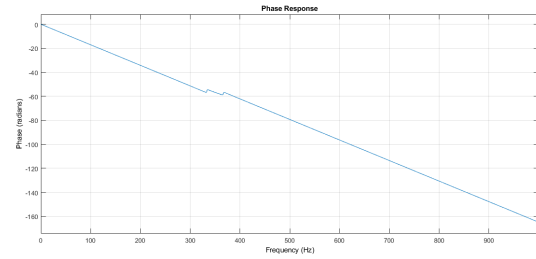


Figura 17. Fase del filtro FIR supresor de la frecuencia de 350 Hz por el método de ventanas.

Después se pasa a hacer las distintas figuras de cada uno de los filtros diseñado de su magnitud y su fase. En lo que para el filtro que suprime la frecuencia de 150 Hz se tiene las figuras 14 y 15, en el filtro supresor de frecuencia de 350 Hz se tienen las figuras 16 y 17 y en el filtro supresor de frecuencia 550 Hz se tienen las figuras 18 y 19.

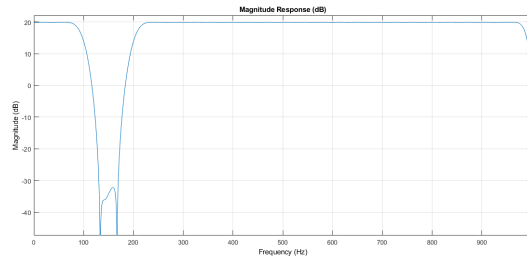


Figura 14. Magnitud del filtro FIR supresor de la frecuencia de 150 Hz por el método de ventanas.

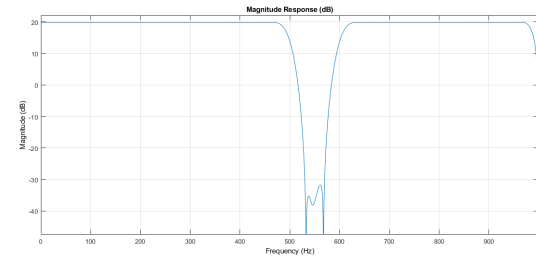


Figura 18. Magnitud del filtro FIR supresor de la frecuencia de 550 Hz por el método de ventanas.

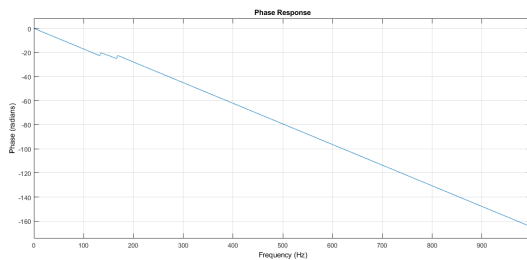


Figura 15. Fase del filtro FIR por supresor de la frecuencia de 150 Hz el método de ventanas.

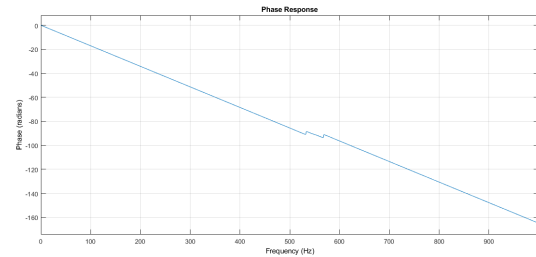


Figura 19. Fase del filtro FIR supresor de la frecuencia de 550 Hz por el método de ventanas.

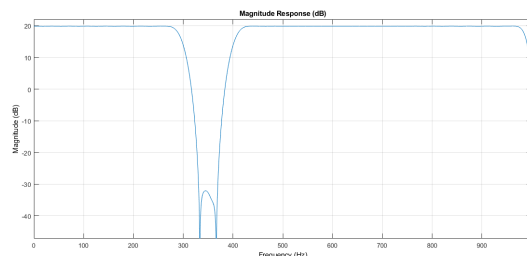


Figura 16. Magnitud del filtro FIR supresor de la frecuencia de 350 Hz por el método de ventanas.

Teniendo entonces el diseño del filtro, se parte entonces a realizar el proceso de filtrado de la primera señal de pruebas, para eso se hace uso de la rutina *conv* la cual realiza la convolución entre la respuesta impulsional del filtro y la señal. Este proceso debe hacerse en cascada con cada uno de los filtros como se muestra en la figura 6, realizado este proceso se obtiene como resultado una señal en el tiempo, que si se aplica la rutina de matlab *fft* se puede ver su comportamiento en la frecuencia. De lo anterior se evidencia en la figura 20 que los picos no deseados fueron eliminados de la señal.

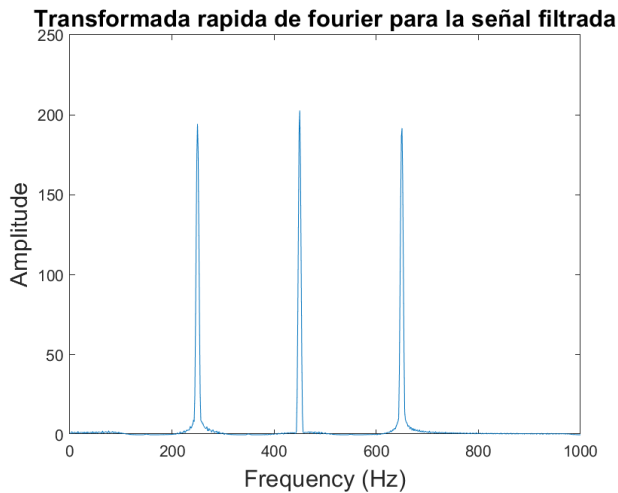


Figura 20. Transformada rápida de fourier de la primera señal de pruebas filtrada por el método de ventanas.

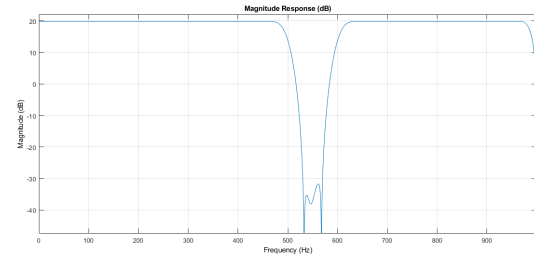


Figura 22. Magnitud del filtro FIR supresor de la frecuencia de mayor amplitud por el método de ventanas.

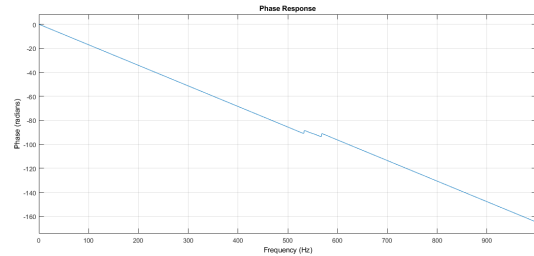


Figura 23. Fase del filtro FIR supresor de la frecuencia de mayor amplitud por el método de ventanas.

Realizado el procedimiento para la primera señal de pruebas, se parte entonces a realizar el filtrado de la segunda señal. Para esto se considera lo mismo que antes, debido a que se quiere que se tenga la mayor atenuación en la banda de rechazo. Por lo que partiendo de el espectro de la señal en la frecuencia, se determina que las frecuencias de cortes deberían ir de 400 a 500 Hz. Para eso se realizar el mismo procedimiento anterior, pero el nuevo filtro generado se utiliza en una señal distinta.

Detallando más a profundidad en la figura 21 se puede ver la respuesta impulsional que tiene el filtro, por otro lado, se puede ver claramente en la figura 22 que la magnitud se distribuye de la manera en la que se comporta un rechaza banda. Además se nota el comportamiento lineal en la fase en la figura 23 que se espera de un filtro FIR.

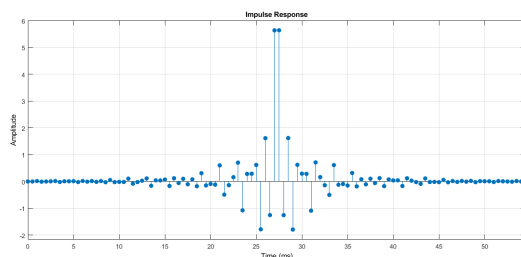


Figura 21. Respuesta impulsional del filtro supresor de la frecuencia de mayor amplitud por el método de ventanas.

Del filtrado de la señal se puede observar en el dominio de la frecuencia que la frecuencia de mayor amplitud ubicada entre 400 y 500 fue suprimida por completo, como se ve en la figura 24. Por lo que se logra lo esperado con los filtros FIR por el método de ventanas.

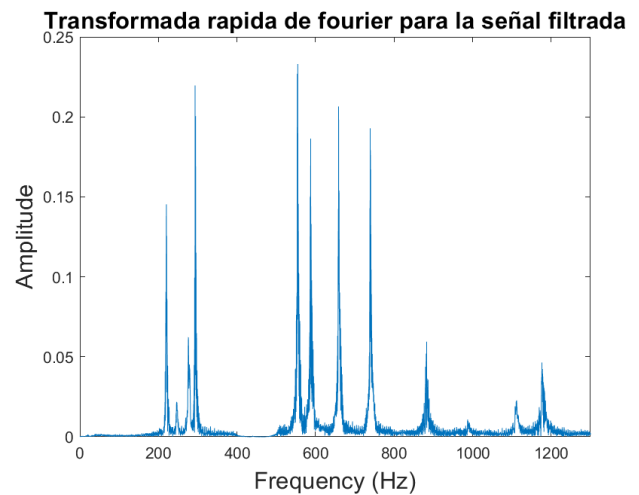


Figura 24. Transformada rápida de fourier de la segunda señal de pruebas filtrada por el método de ventanas.

VI-B. Chebyshev

Para el desarrollo de los filtros FIR por el método de Chebyshev, se hizo un desarrollo de un filtro rechaza-banda, usando como base el filtro pasabanda visto en clase. Para este se dio prioridad a la banda de rechazo como se planteo como lo deseado en el diseño. Luego entonces haciendo uso de la rutina de matlab *firpm* y ajustando los distintos vectores y cortes se realizaron cada uno de los procedimientos.

Se parte entonces del conocimiento de las frecuencias de corte usado en el método de ventanas y se determina una diferencia de frecuencia de 100 Hz. De lo anterior se establece cuanto será el orden del filtro y de acuerdo a eso se busca garantizar que se suprima la frecuencia requerida en cada uno de los casos de prueba. Para eso se tienen las distintas magnitudes de los filtros de la muestra uno determinadas en las figuras 25, 26 y 27. También se tiene la fase para esta misma prueba de cada uno de los filtros diseñados denotados en las figuras 28, 29 y 30. Por ultimo se gráfica las diferentes respuestas impulsionales de los distintos filtros diseñados, denotados en las figuras 31, 32 y 31.

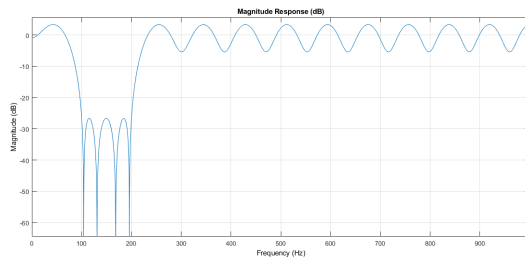


Figura 25. Magnitud del filtro FIR supresor de la frecuencia de 150 Hz por el método de chebyshev.

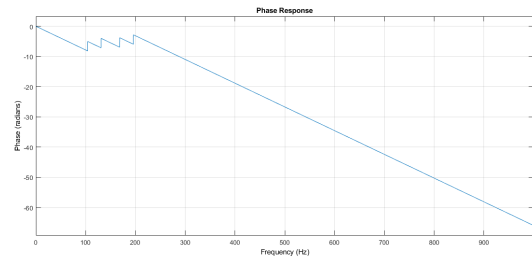


Figura 28. Fase del filtro FIR supresor de la frecuencia de 150 Hz por el método de chebyshev.

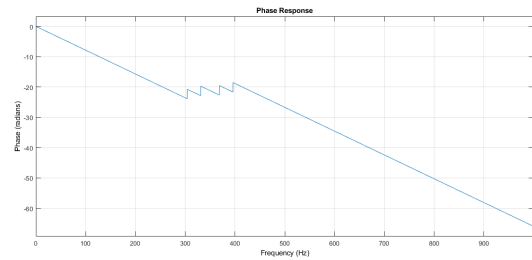


Figura 29. Fase del filtro FIR supresor de la frecuencia de 350 Hz por el método de chebyshev.

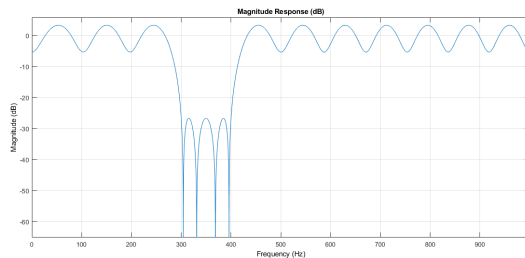


Figura 26. Magnitud del filtro FIR supresor de la frecuencia de 350 Hz por el método de chebyshev.

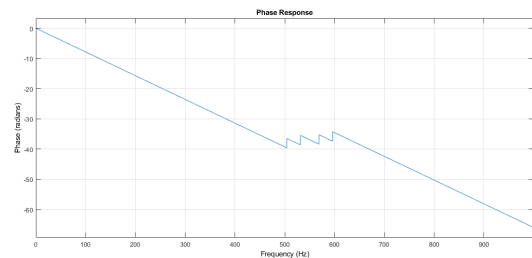


Figura 30. Fase del filtro FIR supresor de la frecuencia de 550 Hz por el método de chebyshev.

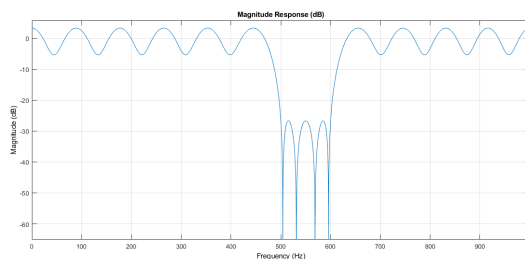


Figura 27. Magnitud del filtro FIR supresor de la frecuencia de 550 Hz por el método de chebyshev.

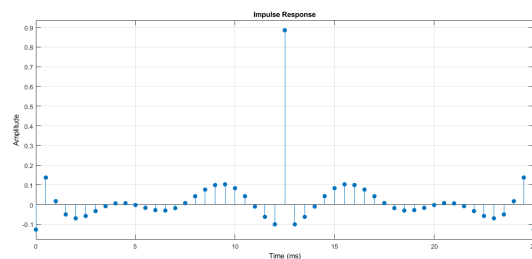


Figura 31. Respuesta impulsional del filtro supresor de la frecuencia de 150 Hz por el método de chebyshev.

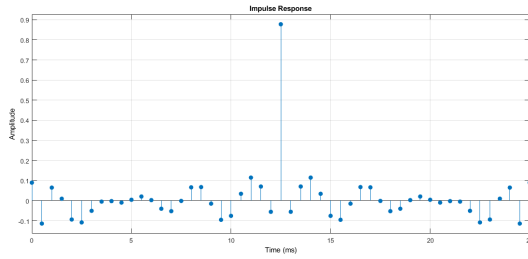


Figura 32. Respuesta impulsional del filtro supresor de la frecuencia de 350 Hz por el método de chebyshev.

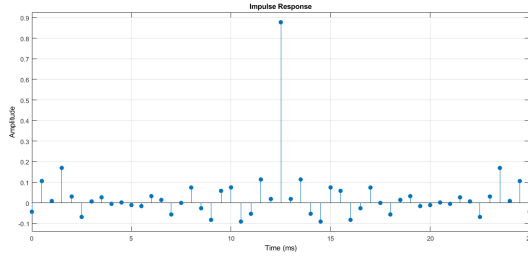


Figura 33. Respuesta impulsional del filtro supresor de la frecuencia de 550 Hz por el método de chebyshev.

Teniendo como resultado en el dominio de la frecuencia para la señal filtrada lo que se evidencia en la figura 34.

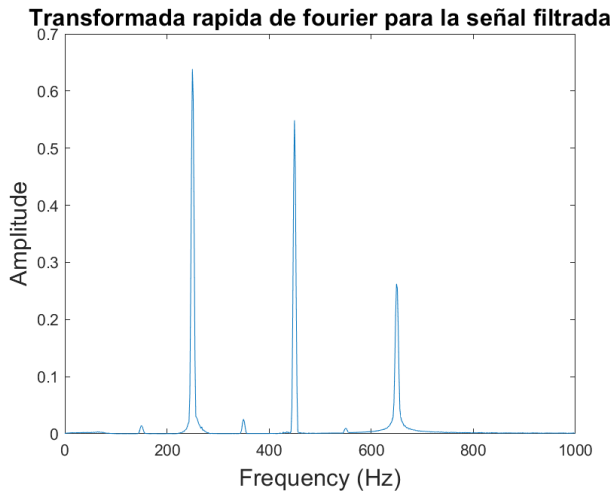


Figura 34. Transformada rápida de fourier de la primer señal de pruebas filtrada por el método de ventanas.

Filtro Rechaza Banda (FIR)	Wc1	Wc2	Rizado Banda de Paso	Rizado Banda de Rechazo
Ventana Blackman (150 Hz)	100 Hz	200 Hz	20dB	-35dB
Ventana Blackman (350 Hz)	300 Hz	400 Hz	20dB	-35dB
Ventana Blackman (550 Hz)	500 Hz	600 Hz	20dB	-35dB
Ventana Blackman (440 Hz)	400 Hz	500 Hz	20dB	-35dB
Chebyshev(150 Hz)	100 Hz	200 Hz	0.5dB	-29dB
Chebyshev(350 Hz)	300 Hz	400 Hz	0.5dB	-29dB
Chebyshev(550 Hz)	500 Hz	600 Hz	0.5dB	-29dB

Cuadro I

COMPARATIVO DE DISTINTOS TIPOS DE FILTRO FIR

Se puede observar en la tabla anterior que si se cumple las especificaciones requeridas, ya que lo que se buscaba atenuar las bandas de rechazo lo más que se pudieran. Debido a esto se puede ver en la tabla que el filtro por ventanas es mucho mejor que el filtro chebyshev y esto se puede deber al darle prioridad a otros parámetros en el chebyshev. Por ejemplo la banda de paso en el chebyshev es mucho más selectiva que en el de por ventanas, sin embargo la diferencia no es demasiada.

VII. FILTROS IIR

Al igual que en los filtros FIR, se diseñan filtros rechaza banda para eliminar las frecuencias de 150, 350 y 550 Hz no deseadas. Para esto se utilizaron 4 tipos de filtros distintos:

- Filtro Butterworth
- Filtro Chebyshev Tipo 1
- Filtro Chebyshev Tipo 2
- Filtro Elíptico

Cada uno de esos filtros se discretizó utilizando el método de Transformación lineal y de Varianza Impulsional. Puesto que la diferencia entre estos dos métodos radica en la última parte del filtro, se comparten los primeros pasos. Para se definen los parámetros de los filtros:

- Rizado en la banda de paso: $R_p = 1$ dB.
- Atenuación mínima de la banda supresora: $R_s = 40$ dB.
- Frecuencias de la banda supresora: $f_n \pm 5$ Hz.
- Frecuencias de la banda de paso: $f_n \pm 30$ Hz.

Esto significa que cada frecuencia que se desee eliminar (3 para la señal compuesta y 1 para el audio) se definen dos frecuencias de banda supresora y dos de banda de paso con los valores acorde a la frecuencia a eliminar y lo definido del rango. Esto resulta en:

- Filtro de 3 frecuencias:
 1. $f_{s11} = 145$ y $f_{s12} = 155$
 2. $f_{s21} = 345$ y $f_{s22} = 355$
 3. $f_{s31} = 545$ y $f_{s32} = 555$
 4. $f_{p11} = 120$ y $f_{p12} = 180$
 5. $f_{p21} = 320$ y $f_{p22} = 380$
 6. $f_{p31} = 520$ y $f_{p32} = 580$
- Filtro del audio:
 1. $f_{s11} \approx 435$ y $f_{s12} \approx 445$
 2. $f_{p31} \approx 410$ y $f_{p32} \approx 470$

Con los parámetros de frecuencias digitales definidos, se pasa a convertir estas en frecuencias analógicas equivalentes, esto debido a que los filtros IIR son filtros discretizados de los filtros analógicos. La primera parte es convertir cada frecuencia (supresora y de paso) en frecuencias angulares usando la ecuación 8 y luego convertir cada una de estas frecuencias en su equivalente analógico usando la ecuación 9 de *Pre-Warping*.

$$\omega = \frac{2\pi * f}{F_s} \quad (8)$$

En donde F_s es la frecuencia de muestreo, f es la frecuencia digital definida y ω es la frecuencia angular.

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (9)$$

En donde T es el periodo (inverso a F_s) y Ω es la frecuencia analógica equivalente. Con las frecuencias analógicas equivalentes encontradas, se pueden encontrar el ancho de banda B_ω del filtro análogo y la frecuencia central $\hat{\Omega}_0$. El ancho de banda se puede calcular con la diferencia de las frecuencias de la banda supresora analógicas en la ecuación 10 y la frecuencia central al cuadrado como el producto de estas mismas frecuencias en la ecuación 11.

$$B_\omega = \hat{\Omega}_{s_2} - \hat{\Omega}_{s_1} \quad (10)$$

$$\hat{\Omega}_0 = \hat{\Omega}_{s_1} \hat{\Omega}_{s_2} \quad (11)$$

Debido a que se debe mantener simetría geométrica entre las frecuencias de la banda supresora y las frecuencias de la banda supresora en relación con la frecuencia central (ecuación 12) es necesario ajustar el parámetro $\hat{\Omega}_{p_1}$, esto se realiza con la ecuación 13.

$$\hat{\Omega}_0 = \hat{\Omega}_{s_1} \hat{\Omega}_{s_2} = \hat{\Omega}_{p_1} \hat{\Omega}_{p_2} \quad (12)$$

$$\hat{\Omega}_{p_1} = \frac{\hat{\Omega}_{s_1} \hat{\Omega}_{s_2}}{\hat{\Omega}_{p_2}} \quad (13)$$

Con todos los parámetros obtenidos, ya es posible definir el filtro prototipo que se va a utilizar para construir el filtro rechaza banda. Considerando que es rechaza banda hay dos aspectos importantes a tener en cuenta: Ω_{s_1} se considera como 1 (frecuencia normalizada del borde de la banda supresora) y Ω_{p_1} como la relación dada en la ecuación 14, esta ecuación corresponde al prototipo analógico de un filtro rechaza banda únicamente.

$$\Omega = \Omega_s \frac{\hat{\Omega} B_\omega}{\hat{\Omega}_0^2 - \hat{\Omega}^2} \quad (14)$$

Ya como lo anterior se puede definir el orden del filtro prototipo, los coeficientes de la función de transferencia de este filtro prototipo, el filtro rechaza banda en cuestión de la transformación del filtro prototipo y por último, acorde a la discretización, el filtro digital resultante. Estos últimos pasos se realizan con funciones de MATLAB y no son generales, pues dependen del tipo de filtro y el método de discretización elegido. Primero se detallan los filtros, cuando filtran las tres frecuencias para la señal compuesta y cuando filtran el armónico con mayor energía; luego se considera el comportamiento que tienen estos filtros con las diferentes señales.

VII-A. Transformación Bilineal

Se considera entonces dentro de la transformación lineal: la señal compuesta utilizando ventanas rectangulares, la señal compuesta utilizando ventanas *Hamming* y el audio de la Marimba, cada uno con los cuatro tipos de filtros mencionados. Como características de cada filtro se detalla su magnitud, su fase, su respuesta al impulso y el diagrama de polos y ceros.

VII-A1. Filtro Butterworth: Primero se detalla el filtro de las tres frecuencias (150, 350 y 550 Hz) en su magnitud y fase en la figura 35, la respuesta al impulso en la figura 36 y el diagrama de polos y ceros en la figura 37.

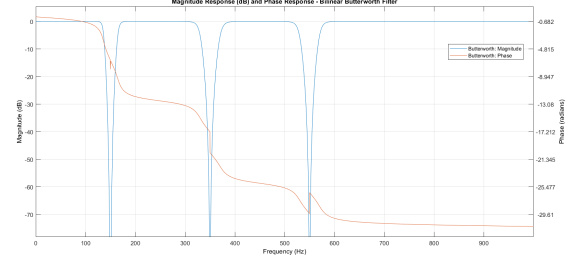


Figura 35. Filtro Butterworth rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado en magnitud y fase.

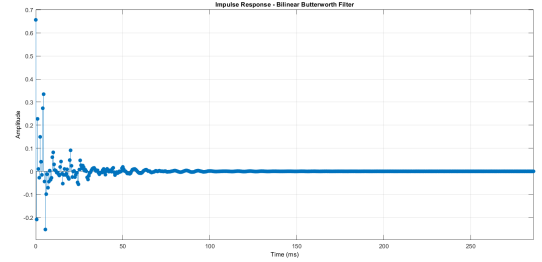


Figura 36. Filtro Butterworth rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado su respuesta al impulso.

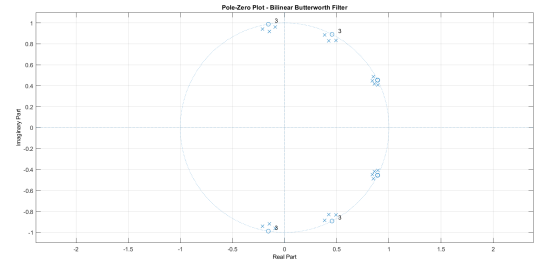


Figura 37. Filtro Butterworth rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado en diagrama de polos y ceros.

Segundo se detalla el filtro del armónico de mayor energía para el audio de la marimba en su magnitud y fase en la figura 38, la respuesta al impulso en la figura 39 y el diagrama de polos y ceros en la figura 40.

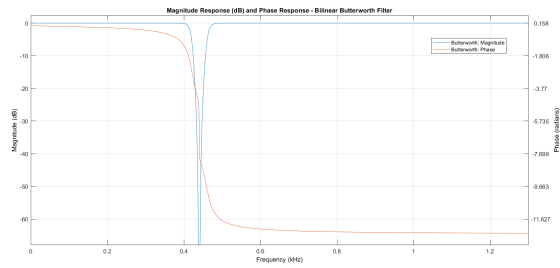


Figura 38. Filtro Butterworth rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado en magnitud y fase.

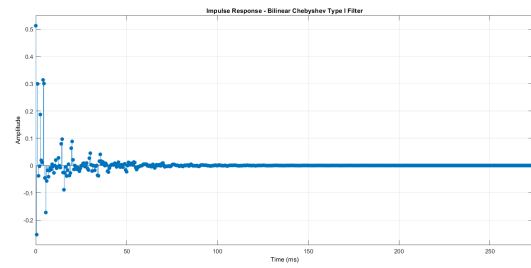


Figura 42. Filtro Chebyshev Tipo 1 rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado su respuesta al impulso.

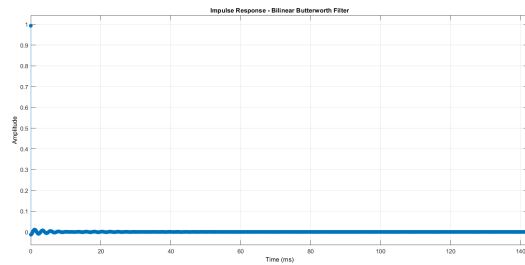


Figura 39. Filtro Butterworth rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado su respuesta al impulso.

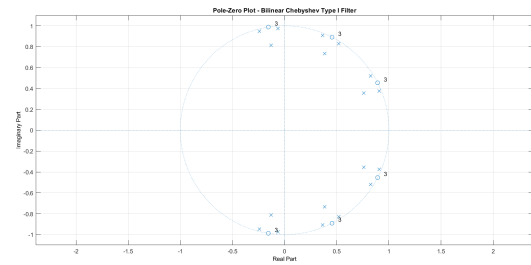


Figura 43. Filtro Chebyshev Tipo 1 rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado en diagrama de polos y ceros.

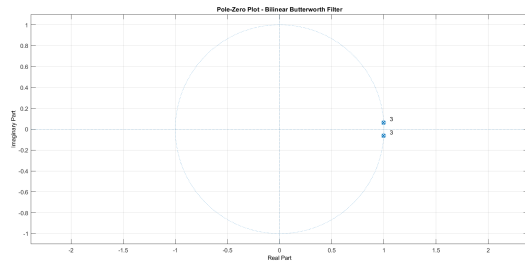


Figura 40. Filtro Butterworth rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado en diagrama de polos y ceros.

Segundo se detalla el filtro del armónico de mayor energía para el audio de la marimba en su magnitud y fase en la figura 44, la respuesta al impulso en la figura 45 y el diagrama de polos y ceros en la figura 46.

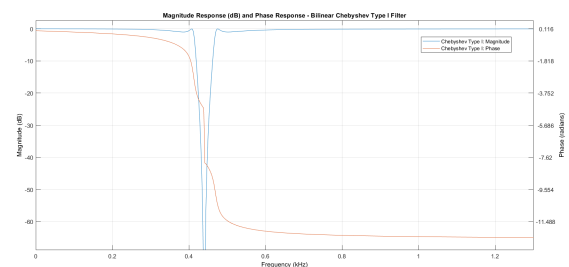


Figura 44. Filtro Chebyshev Tipo 1 rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado en magnitud y fase.

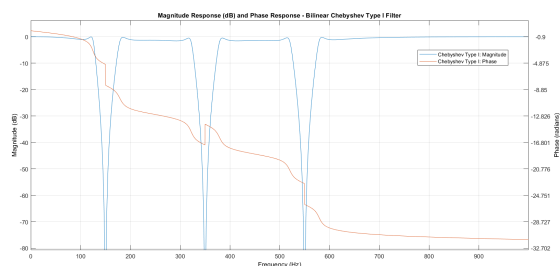


Figura 41. Filtro Chebyshev Tipo 1 rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado en magnitud y fase.

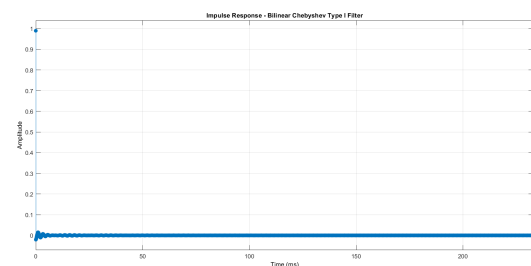


Figura 45. Filtro Chebyshev Tipo 1 rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado su respuesta al impulso.

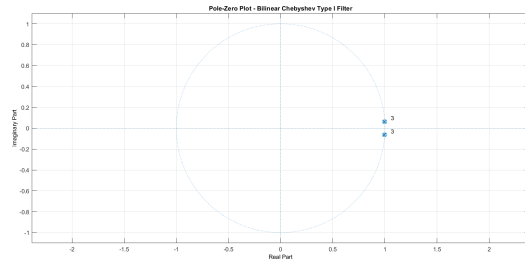


Figura 46. Filtro Chebyshev Tipo 1 rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado en diagrama de polos y ceros.

VII-A3. Filtro Chebyshev Tipo 2: Primero se detalla el filtro de las tres frecuencias (150, 350 y 550 Hz) en su magnitud y fase en la figura 47, la respuesta al impulso en la figura 48 y el diagrama de polos y ceros en la figura 49.

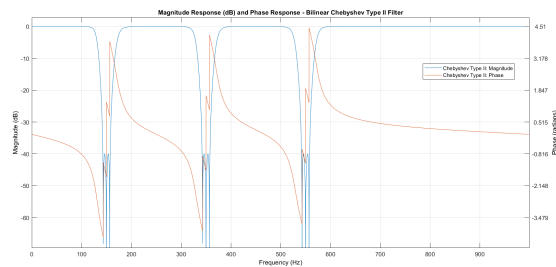


Figura 47. Filtro Chebyshev Tipo 2 rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado en magnitud y fase.

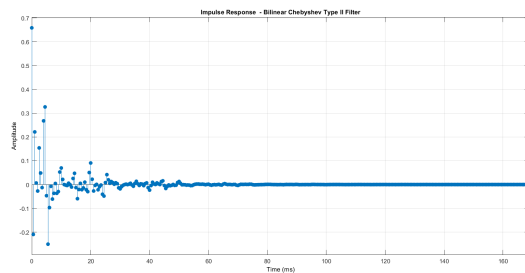


Figura 48. Filtro Chebyshev Tipo 2 rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado su respuesta al impulso.

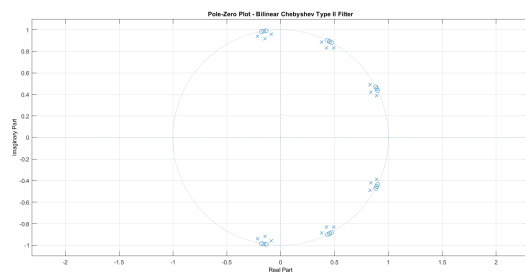


Figura 49. Filtro Chebyshev Tipo 2 rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado en diagrama de polos y ceros.

Segundo se detalla el filtro del armónico de mayor energía para el audio de la marimba en su magnitud y fase en la figura

50, la respuesta al impulso en la figura 51 y el diagrama de polos y ceros en la figura 52.

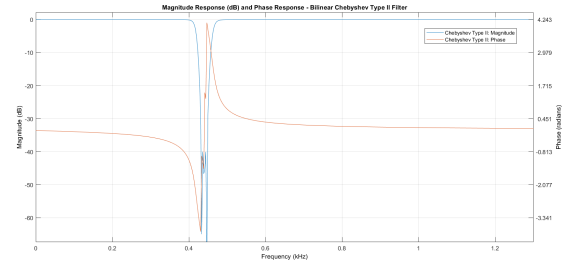


Figura 50. Filtro Chebyshev Tipo 2 rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado en magnitud y fase.

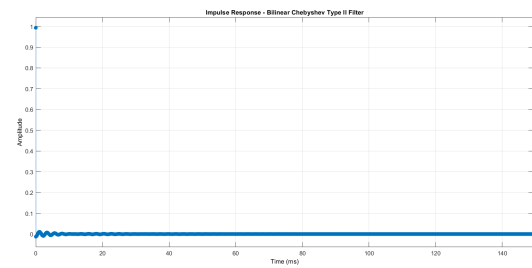


Figura 51. Filtro Chebyshev Tipo 2 rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado su respuesta al impulso.

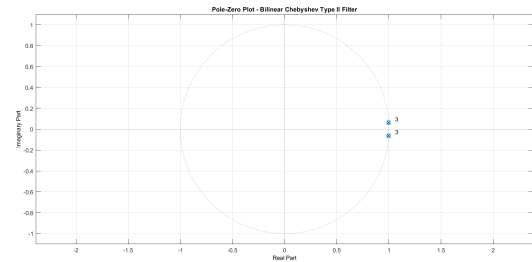


Figura 52. Filtro Chebyshev Tipo 2 rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado en diagrama de polos y ceros.

VII-A4. Filtro Elíptico: Primero se detalla el filtro de las tres frecuencias (150, 350 y 550 Hz) en su magnitud y fase en la figura 53, la respuesta al impulso en la figura 54 y el diagrama de polos y ceros en la figura 55.

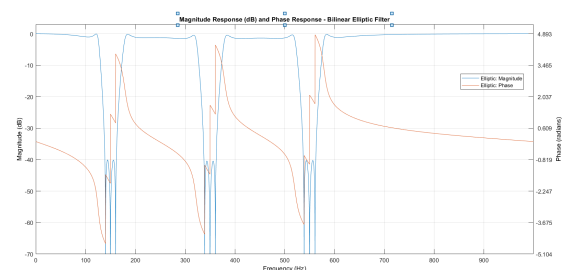


Figura 53. Filtro Elíptico rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado en magnitud y fase.

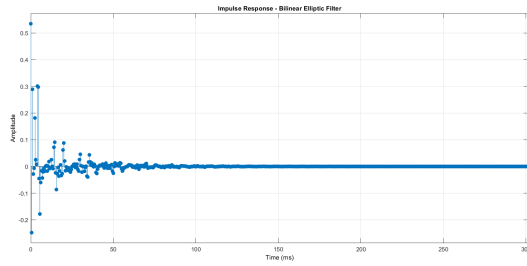


Figura 54. Filtro Elíptico rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado su respuesta al impulso.

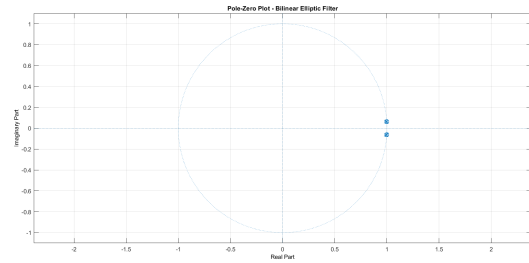


Figura 58. Filtro Elíptico rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado en diagrama de polos y ceros.

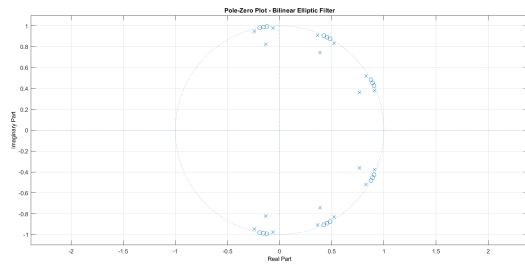


Figura 55. Filtro Elíptico rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado en diagrama de polos y ceros.

Segundo se detalla el filtro del armónico de mayor energía para el audio de la marimba en su magnitud y fase en la figura 56, la respuesta al impulso en la figura 57 y el diagrama de polos y ceros en la figura 58.

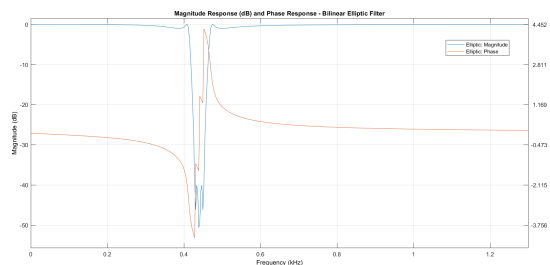


Figura 56. Filtro Elíptico rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado en magnitud y fase.

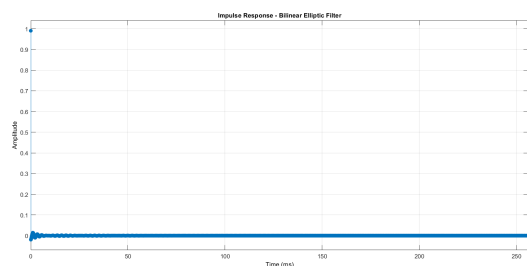


Figura 57. Filtro Elíptico rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado su respuesta al impulso.

VII-B. Varianza Impulsional

Después de realizar se procede a aplicar el mismo proceso pero cambiando el método de discretización por el método de varianza impulsional. Es importante considerar que este método no es recomendado para el tipo de filtros que se está desarrollando (rechaza banda) puesto que es complejo definir de forma delimitada las bandas y por lo tanto se presenta el fenómeno de *Aliasing*. Igualmente se realizan todos los casos generados para el método por transformación bilineal, considerando que los resultados presentados son después de múltiples intentos y variaciones de parámetros en el intento de obtener un filtro útil. De la misma manera que en el método de transformación bilineal se considera su magnitud, su fase, su respuesta al impulso y el diagrama de polos y ceros.

VII-B1. Filtro Butterworth: Primero se detalla el filtro de las tres frecuencias (150, 350 y 550 Hz) en su magnitud y fase en la figura 59, la respuesta al impulso en la figura 60 y el diagrama de polos y ceros en la figura 61.

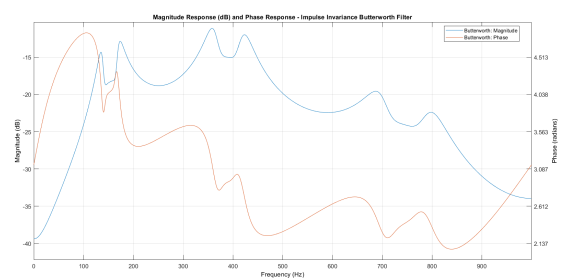


Figura 59. Filtro Butterworth rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado en magnitud y fase.

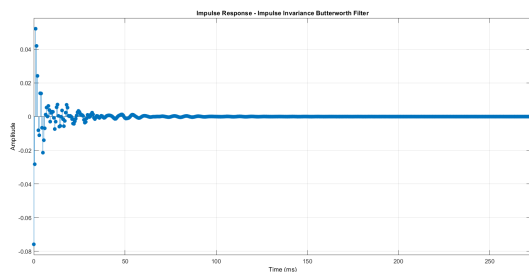


Figura 60. Filtro Butterworth rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado su respuesta al impulso.

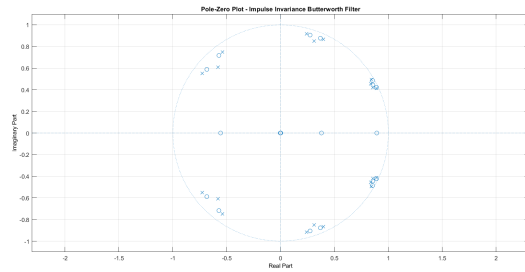


Figura 61. Filtro Butterworth rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado en diagrama de polos y ceros.

Segundo se detalla el filtro del armónico de mayor energía para el audio de la marimba en su magnitud y fase en la figura 62, la respuesta al impulso en la figura 63 y el diagrama de polos y ceros en la figura 64.

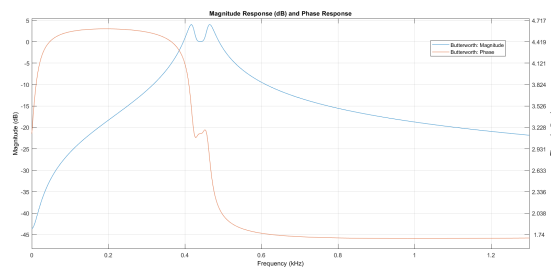


Figura 62. Filtro Butterworth rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado en magnitud y fase.

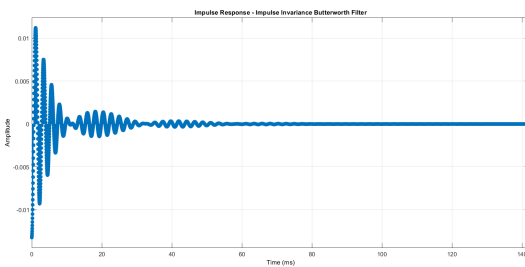


Figura 63. Filtro Butterworth rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado su respuesta al impulso.

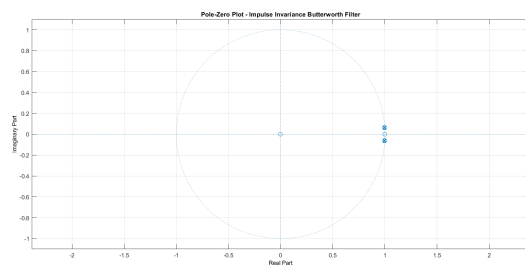


Figura 64. Filtro Butterworth rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado en diagrama de polos y ceros.

VII-B2. Filtro Chebyshev Tipo 1: Primero se detalla el filtro de las tres frecuencias (150, 350 y 550 Hz) en su

magnitud y fase en la figura 65, la respuesta al impulso en la figura 66 y el diagrama de polos y ceros en la figura 67.

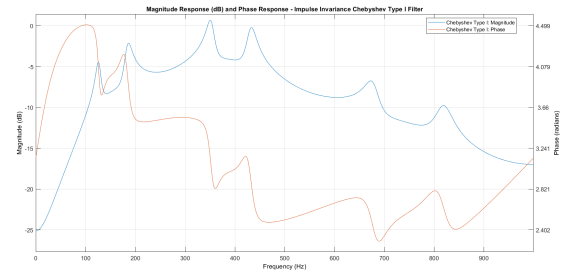


Figura 65. Filtro Chebyshev Tipo 1 rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado en magnitud y fase.

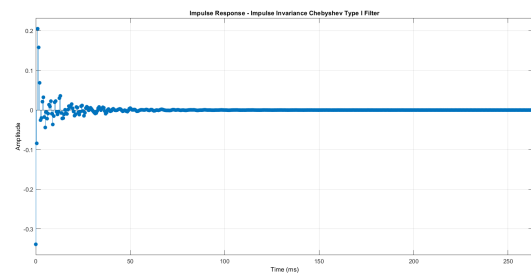


Figura 66. Filtro Chebyshev Tipo 1 rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado su respuesta al impulso.

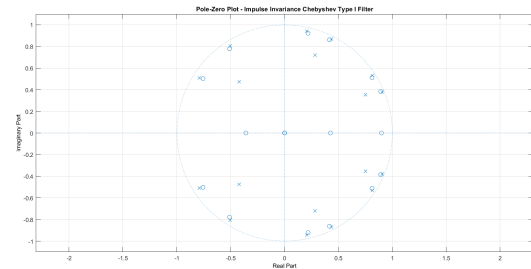


Figura 67. Filtro Chebyshev Tipo 1 rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado en diagrama de polos y ceros.

Segundo se detalla el filtro del armónico de mayor energía para el audio de la marimba en su magnitud y fase en la figura 68, la respuesta al impulso en la figura 69 y el diagrama de polos y ceros en la figura 70.

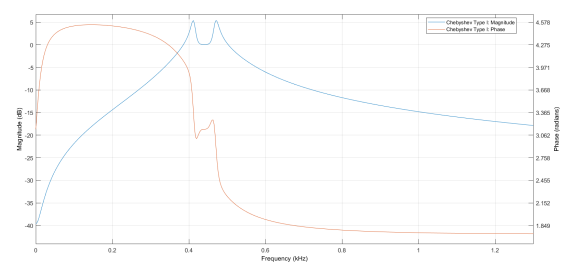


Figura 68. Filtro Chebyshev Tipo 1 rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado en magnitud y fase.

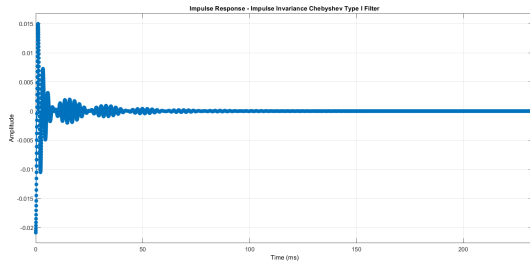


Figura 69. Filtro Chebyshev Tipo 1 rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado su respuesta al impulso.

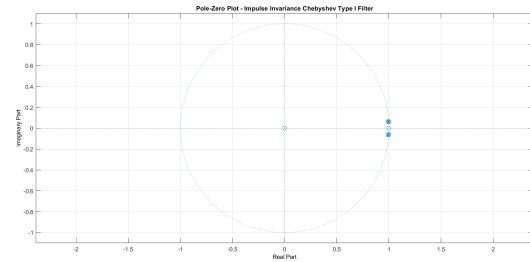


Figura 70. Filtro Chebyshev Tipo 1 rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado en diagrama de polos y ceros.

VII-B3. Filtro Chebyshev Tipo 2: Primero se detalla el filtro de las tres frecuencias (150, 350 y 550 Hz) en su magnitud y fase en la figura 71, la respuesta al impulso en la figura 72 y el diagrama de polos y ceros en la figura 73.

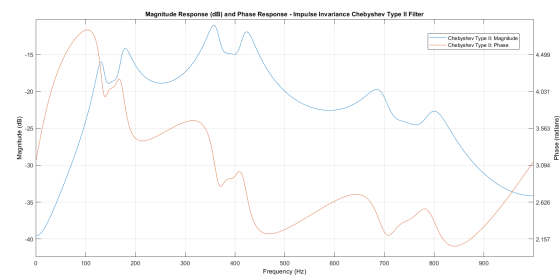


Figura 71. Filtro Chebyshev Tipo 2 rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado en magnitud y fase.

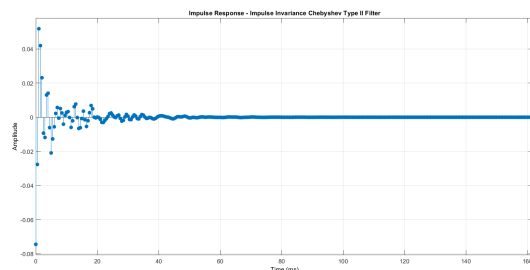


Figura 72. Filtro Chebyshev Tipo 2 rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado su respuesta al impulso.

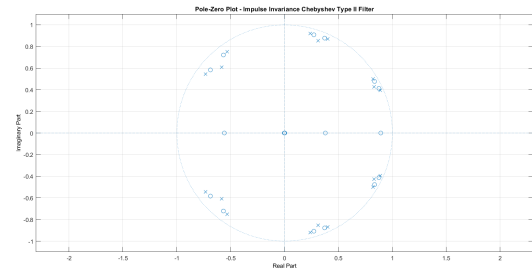


Figura 73. Filtro Chebyshev Tipo 2 rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado en diagrama de polos y ceros.

Segundo se detalla el filtro del armónico de mayor energía para el audio de la marimba en su magnitud y fase en la figura 74, la respuesta al impulso en la figura 75 y el diagrama de polos y ceros en la figura 76.

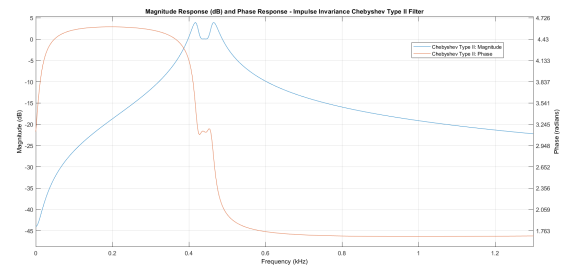


Figura 74. Filtro Chebyshev Tipo 2 rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado en magnitud y fase.

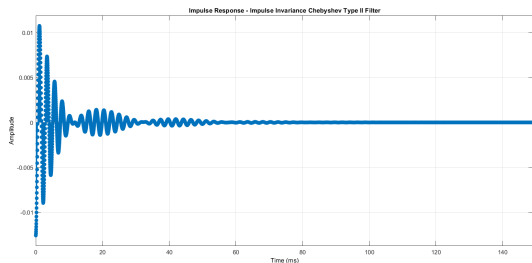


Figura 75. Filtro Chebyshev Tipo 2 rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado su respuesta al impulso.

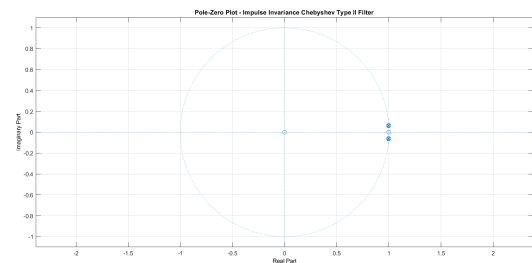


Figura 76. Filtro Chebyshev Tipo 2 rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado en diagrama de polos y ceros.

VII-B4. Filtro Elíptico: Primero se detalla el filtro de las tres frecuencias (150, 350 y 550 Hz) en su magnitud y fase

en la figura 77, la respuesta al impulso en la figura 78 y el diagrama de polos y ceros en la figura 79.

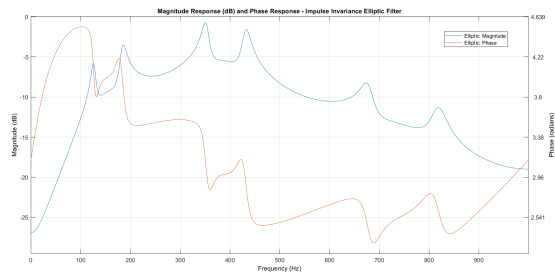


Figura 77. Filtro Elíptico rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado en magnitud y fase.

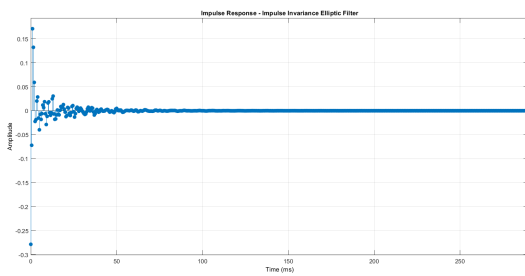


Figura 78. Filtro Elíptico rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado su respuesta al impulso.

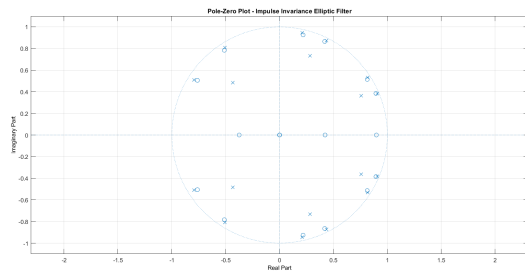


Figura 79. Filtro Elíptico rechaza banda de frecuencias 150, 350 y 550 Hz expresado en diagrama de polos y ceros.

Segundo se detalla el filtro del armónico de mayor energía para el audio de la marimba en su magnitud y fase en la figura 80, la respuesta al impulso en la figura 81 y el diagrama de polos y ceros en la figura 82.

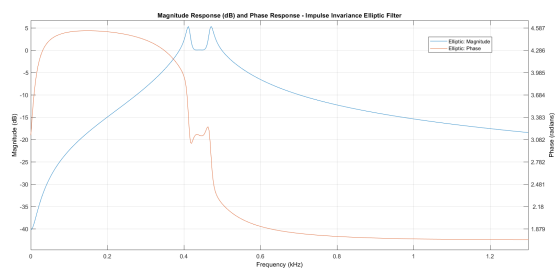


Figura 80. Filtro Elíptico rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado en magnitud y fase.

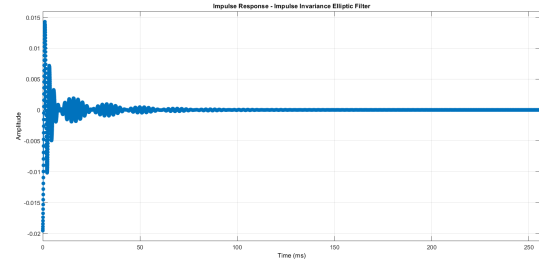


Figura 81. Filtro Elíptico rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado su respuesta al impulso.

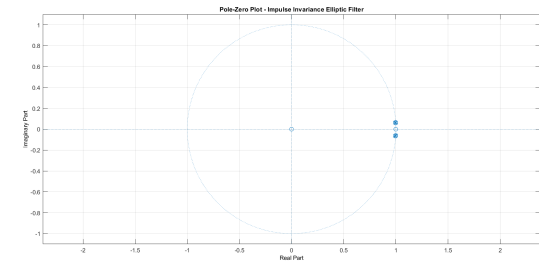


Figura 82. Filtro Elíptico rechaza banda del armónico de mayor energía para el audio de la marimba expresado en diagrama de polos y ceros.

VII-C. Resultado de filtrar las señales

Debido a son varios los filtros considerados, se muestra el resultado del filtro que tuvo mejor comportamiento en el método de transformación bilineal y en el método por varianza impulsional. Como resultado se muestran las tres señales tras haber sido filtradas por el filtro seleccionado.

VII-C1. Comparación entre filtros: Debido a que todos los filtros tienen los mismos parámetros base, se considera a partir de los requisitos de diseño: frecuencia a filtrar, máxima y mínima frecuencia que cumple el rizado en la banda de paso y máxima y mínima frecuencia que cumple la atenuación mínima de la banda supresora. Las mediciones de todos los filtros no se pueden mostrar por la cantidad de datos que están involucrados, en este orden de ideas se presenta en la tabla II las mediciones de cada caso. La pérdida se consideró como la norma euclidiana considerando la mejor medición obtenida para el filtro en cada uno de las frecuencias de banda acorde a la medida de atenuación que debía alcanzar (1 dB para f_s y 40 dB par f_p); adicionalmente, se considera en evaluación una función de activación ReLU, que significa que lo que se calcula es cuánto se equivocó el filtro alejándose del valor requerido pero no se considera si el corte de banda está en una mejor posición a la esperada. Por último, debido al funcionamiento completamente erróneo de los filtros realizados con el método de la invarianza impulsional, estos no se consideraron para encontrar el de mejor ajuste, en cambio se muestra el mismo mejor equivalente en el método de transformación bilineal.

Cuadro II

TABLA DE LOS VALORES MEDIDOS DE LAS FRECUENCIAS LÍMITE DE LAS BANDAS DE PASO Y SUPRESORAS PARA LOS FILTROS DE TRES FRECUENCIAS.

Bilineal	Diseño	Butterworth	Chev1	Chev2	Elliptic
f_{p11}	120	132,2021	124,3896	124,3896	124,3896
f_{p12}	180	169,7998	180,4199	180,1758	180,4199
f_{s11}	145	145,0195	142,7002	142,7002	138,916
f_{s12}	155	154,9072	157,4707	157,4707	161,7432
f_{p21}	320	321,5332	320,1904	321,2891	320,4346
f_{p22}	380	379,7607	381,2256	380,0049	380,9814
f_{s21}	345	345,0928	342,041	342,1631	337,8906
f_{s22}	355	354,9805	358,0322	357,9102	362,3047
f_{p31}	520	520,752	518,6768	519,5313	518,7988
f_{p32}	580	578,8574	580,4443	580,0781	580,4443
f_{s31}	545	545,0439	541,8701	541,8701	537,4756
f_{s32}	555	554,9316	558,1055	558,1055	562,5
Loss	0		7,239505	6,899842	17,37914

Acorde al cuadro es evidente que el mejor comportamiento es el del filtro Butterworth, seguido por Chebyshev Tipo II, luego Chebyshev Tipo I y por último elíptico. Es importante considerar que esto sólo considera como criterio el acercamiento a los parámetros de diseño y depende de la aplicación puede que se prefiera uno u otro filtro dado el rizado requerido en las bandas de paso o de rechazo. Acorde a el filtro Butterworth se tiene la señal compuesta por ventanas rectangulares y por ventanas *Hamming* después de ser filtradas por el filtro Butterworth con el método de transformación bilineal y por varianza impulsional.

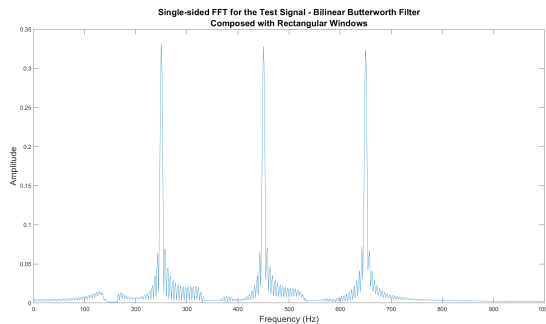


Figura 83. Magnitud de la transformada de Fourier de la señal x_1 construida con ventanas rectangulares después de ser filtrada de las frecuencias 150, 350 y 550 Hz con un filtro rechaza banda Butterworth utilizando el método de transformación bilineal.

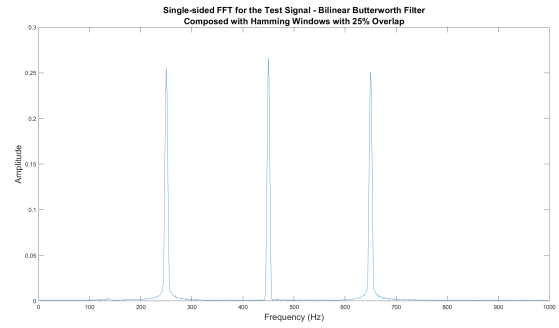


Figura 84. Magnitud de la transformada de Fourier de la señal x_1 construida con ventanas *Hamming* con *Overlapping* del 25 % después de ser filtrada de las frecuencias 150, 350 y 550 Hz con un filtro rechaza banda Butterworth utilizando el método de transformación bilineal.

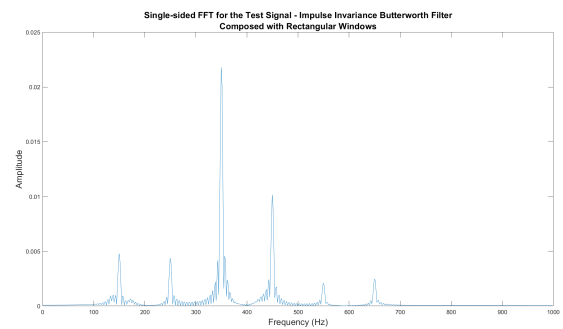


Figura 85. Magnitud de la transformada de Fourier de la señal x_1 construida con ventanas rectangulares después de ser filtrada de las frecuencias 150, 350 y 550 Hz con un filtro rechaza banda Butterworth utilizando el método de varianza impulsional.

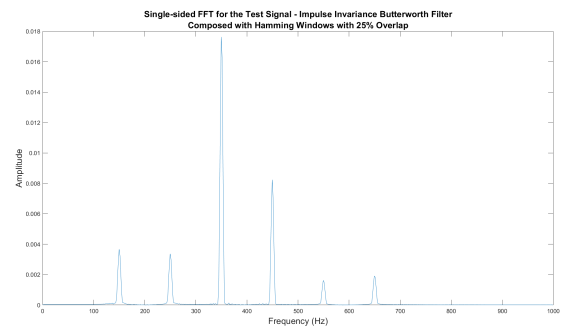


Figura 86. Magnitud de la transformada de Fourier de la señal x_1 construida con ventanas *Hamming* con *Overlapping* del 25 % después de ser filtrada de las frecuencias 150, 350 y 550 Hz con un filtro rechaza banda Butterworth utilizando el método de varianza impulsional.

Con este resultado de las figuras 83, 84, 85 y 86 es evidente la incapacidad del método de varianza impulsional para realizar filtros rechaza banda y las ventajas de utilizar ventanas suaves para definir las señales compuestas; en las conclusiones se detalla más. Se continua, con el filtro para la señal de audio de la marimba en D Mayor. Se realiza el mismo procedimiento de caracterización de los filtros para definir cuál se acerca más a los parámetros definidos y este comparativo se puede observar en la tabla III.

Cuadro III

TABLA DE LOS VALORES MEDIDOS DE LAS FRECUENCIAS LÍMITE DE LAS BANDAS DE PASO Y SUPRESORAS PARA LOS FILTROS DEL ARMÓNICO CON MAYOR ENERGÍA.

Bilineal	Diseño	Butterworth	Chev1	Chev2	Elliptic
f_{p1}	410	411,8225	411,8225	411,8225	411,8225
f_{p2}	470	471,0388	471,0388	471,0388	471,0388
f_{s1}	435	436,0474	433,3557	433,3557	430,6641
f_{s2}	445	444,1223	446,814	444,1223	449,5056
	Loss	1,0388	2,659591	1,944949	6,338735

Se evidencia una calificación similar a los filtros de tres frecuencias con la diferencia de que el filtro Chebyshev Tipo II tiene mejor acercamiento que el Chebyshev Tipo I. Igualmente se muestra la señal del audio después de ser filtrada por el filtro Butterworth con el método de transformación bilineal y por varianza impulsional.

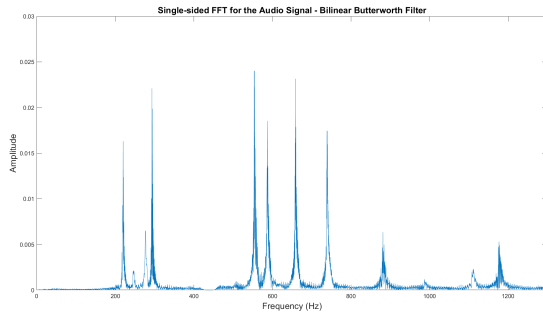


Figura 87. Magnitud de la transformada de Fourier de una señal de audio de una marimba en D Mayor después de ser filtrada del armónico con mayor energía con un filtro rechaza banda Butterworth utilizando el método de transformada bilineal.

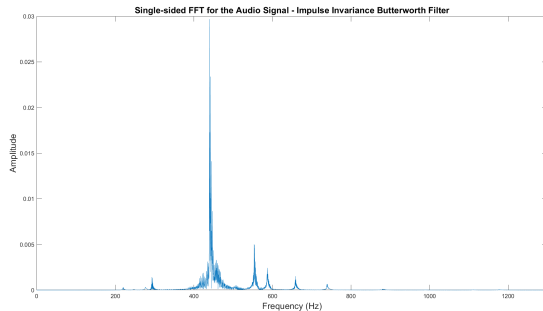


Figura 88. Magnitud de la transformada de Fourier de una señal de audio de una marimba en D Mayor después de ser filtrada del armónico con mayor energía con un filtro rechaza banda Butterworth utilizando el método de varianza impulsional.

Se evidencia como en la señal filtrada por el método de la transformada bilineal se elimina el pico más alto observado en la figura 9. De la misma manera, se evidencia el erróneo comportamiento del método por varianza impulsional.

VIII. CONCLUSIONES

1. Se pudo observar en cada una de las implementaciones de los filtros FIR que la fase siempre fue lineal, lo cual

garantiza lo visto en la teoría y rectifica que este tipo de filtros pueden ser usados en telecomunicaciones.

2. En cuanto a la implementación de filtros FIR por chebyshev es mucho mejor que implementar el método por ventanas, ya que los parámetros que tiene te da un control mucho mejor del filtro, teniendo en cuenta el error en las bandas.
3. Cabe aclarar que a pesar de que los filtros chebyshev permiten ajustar muy bien los parámetros deseados al ser usado pueden afectar otros parámetros. El filtro siempre maneja la proporción entre los dos rizados de las bandas.
4. La conclusión más importante de los filtros IIR es que el método de varianza impulsional no es el adecuado para el diseño de un filtro rechaza banda por la dificultad de tener bandas definidas y cómo esto genera *aliasing*; considerando que los filtros IIR tienen realimentación, cualquier error de cuantización o solapamiento es completamente caótico para el filtro.
5. Los diferentes filtros pueden ser preferidos unos sobre los otros dependiendo del problema, elegir cuál es el más indicado depende completamente del criterio de selección y de la necesidad de la aplicación.
6. El error de la fase no lineal en los filtros IIR se puede resolver en sistemas *offline* ya que se puede considerar todo el cálculo *forward* y *backward*, antes y después del *flip*.
7. Al comparar las tablas II y III de la IRR con la tabla I, se observa un comportamiento bastante superior por parte de los filtros IIR. Estos están manejando ordenes bastante menores, como es usual en los filtros IIR, y tienen una mejor respuesta al momento de tener que filtrar las señales. Claramente usando el método de transformación bilineal como ya fue explicado. Adicionalmente, el problema de la fase no lineal de los filtros IIR es resuelto en este escenario debido a que se está trabajando *offline*, ventaja adicional a los FIR.

IX. OBSERVACIONES

1. Al implementar filtros fir por ventana hay que tener mucha precaución a la hora de hacer los cálculos previos a la implementación e incluso tener cuidado con la codificación de las funciones. Debido a pequeños errores, puede que el filtro no logre lo esperado y la búsqueda de una solución pueda tardar horas y horas.
2. Intentar diseñar un filtro IIR con parámetros muy exigentes (como la selectividad) puede ocasionar que se genera un filtro completamente opuesto a lo deseado, es necesario balancear las frecuencias de banda de paso y de rechazo acorde a esta selectividad deseada.
3. MATLAB tiene muchas herramientas para desarrollar filtros digitales, unas más automáticas que otras y cuentan con documentación detallada e instructivos de cómo usarlas, facilitando el desarrollo de estos.

X. DISTRIBUCIÓN DEL TRABAJO

- Alejandro Ayala Gil: Filtros FIR
- David Contreras Franco: Generación de la señal, identificador del armónico de mayor energía, filtros IIR.

REFERENCIAS

- [1] E. Sengpiel, "Note names of musical notes keyboard piano frequencies = octave piano keys number tone tones 88 notes frequency names of all keys on a grand piano standard concert pitch tuning German English system MIDI 88 - sengpielaudio Sengpiel Berlin", Sengpielaudio.com, 2020. [Online]. Available: <http://www.sengpielaudio.com/calculator-notenames.htm>. [Accessed: 19 - May - 2020].
- [2] "IIR Filter Design", Mathworks.com, 2020. [Online]. Available: <https://www.mathworks.com/help/signal/ug/iir-filter-design.html>. [Accessed: 19 - May - 2020].
- [3] "Zero-phase digital filtering", Mathworks.com, 2020. [Online]. Available: <https://www.mathworks.com/help/signal/ref/filtfilt.html>. [Accessed: 19 - May - 2020].
- [4] "Filter Visualization Tool", Mathworks.com, 2020. [Online]. Available: <https://www.mathworks.com/help/signal/ref/fvtool.html>. [Accessed: 19 - May - 2020].
- [5] Apuntes de clase de procesamiento digital de señales. Ingeniería Electrónica y ciencias de la computación. Pontificia Universidad Javeriana Cali. Abril y Mayo 2020.