Laboratorio 5.

Problema 2: AHs, AVs y agujeros.

a) $f(x) = \dfrac{x^8+1}{x^8-1}$ b) $g(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$

Potenciales $1, -1$

$-1.1 \quad \lim_{x \to -1^-} \dfrac{x^8+1}{x^8-1} = +\infty \quad \dfrac{2}{0^+}$

$0.9 \quad \lim_{x \to -1^+} \dfrac{x^8+1}{x^8-1} = -\infty \quad \dfrac{2}{0^-}$ A.V en $x = -1$

$0.9 \quad \lim_{x \to 1^-} \dfrac{x^8+1}{x^8-1} = -\infty$

$\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x^8+1}{x^8-1} = +\infty \quad \dfrac{2}{0^+}$ A.V en $x = +1$

AHs:

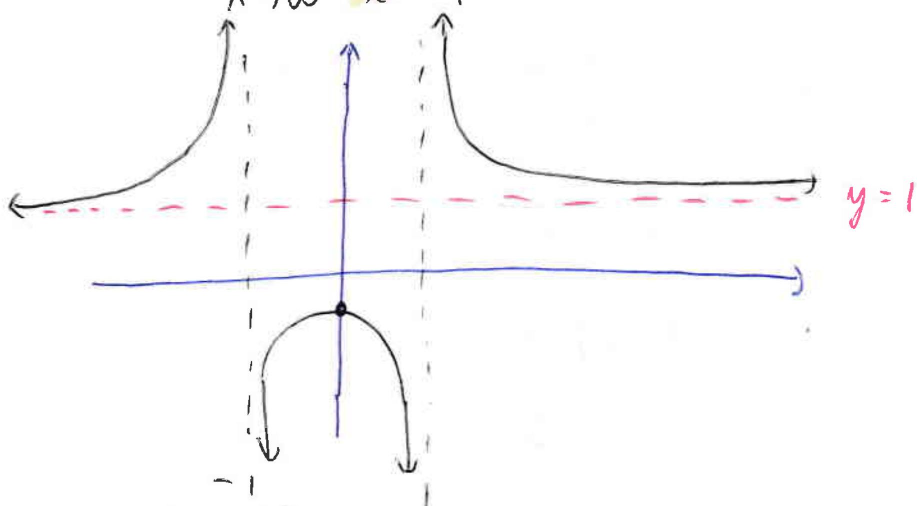
$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^8+1}{x^8-1} = 1$

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^8+1}{x^8-1} = 1$ A.H $y = 1$

No hay agujeros

$f(0) = \dfrac{0+1}{0-1} = -1$

Función Par.



b) $g(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ D $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$\dfrac{0}{0} \quad \lim_{x \to -1} \dfrac{x^4-1}{x^2-1} = \lim_{x \to -1} \dfrac{\cancel{(x^2-1)}(x^2+1)}{\cancel{(x^2-1)}} = \lim_{x \to -1} x^2+1 = 2$

Agujero en $(-1, 2)$

$\lim_{x \to +1} \dfrac{\cancel{(x^2-1)}(x^2+1)}{\cancel{(x^2-1)}} = \lim_{x \to 1^+} x^2+1 = 2.$

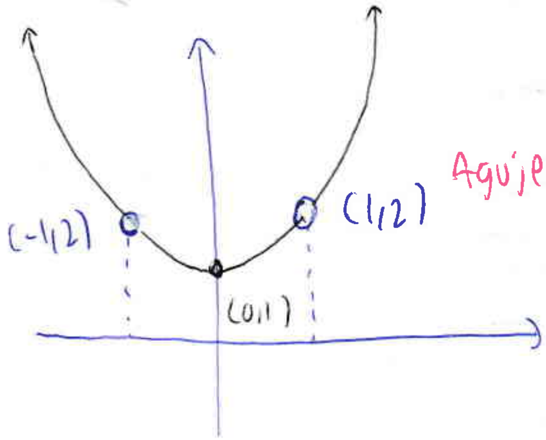
Agujero en $(1, 2)$

No hay AVs.

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^4-1}{x^2-1} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^4-1}{x^2-1} = +\infty$

No hay AH's.

Gráfica $g(x) = x^2+1$ si $x \neq -1,1$



¿Cómo $g(x)$ puede ser continua en $x=-1$ y $x=1$?

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^4-1}{x^2-1} & \text{si } x \neq -1,1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ 2. & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

3. Limites b, c y d.

b) $\lim_{x \to 2} \frac{(3x-4)^{40}}{(x^2-2)^{36}} = \frac{2^{40}}{2^{36}} = 2^4 = 16$

c) $\lim_{t \to -1} \frac{t^3+1}{t^2-1} \underset{0/0}{=} \lim_{t \to -1} \frac{(\cancel{t+1})(t^2-t+1)}{(\cancel{t+1})(t-1)} = \frac{1+1+1}{-1-1} = \frac{-3}{2}.$

d) $\lim_{w \to 1} \frac{\sqrt{w}}{w^2+w-2.} = \lim_{w \to 1} \frac{\sqrt{w}}{(w+2)(w-1)} = \mp \infty.$

$\lim_{w \to 1^-} \frac{\sqrt{w}}{(w+2)(w-1)} = -\infty \quad \frac{1}{2 \cdot 0^-}$ $\qquad \lim_{w \to 1^+} \frac{\sqrt{w}}{(w+2)(w+1).} = +\infty. \quad \frac{1}{0^+}$

f) $\lim_{t \to +1^-} \frac{t^3+1}{t^2-1} = -\infty. \quad \frac{2}{0^-}.$

0.9

7. Continuidad en $x = -2, 2$

$$g(x) = \begin{cases} 2x+2m+8 & , x < -2 \\ mx^2 & -2 \leq x < 2 \\ n & x = 2 \\ p\sqrt{3x-2} & x > 2. \end{cases}$$

a. Continuidad en $x=-2$. $\lim_{x\to -2} f(x) = f(-2) = 4m = \cancel{8}$

$\lim_{x\to -2^-} 2x+2m+8 = 2m+4$ ✓

$\lim_{x\to -2^+} mx^2 = 4m$ ✓

Continua en $x=-2$

si $2m+4 = 4m$

$2m = 4 \Rightarrow m=2$

b. Continuidad en $x=2$. $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = n = 8$.

$\lim_{x\to 2^-} mx^2 = 4m = 8$

$\lim_{x\to 2^+} p\sqrt{3x-2} = 2p$

Continua en $x=2$.

$n = 8 = 2p. \Rightarrow n=8$

$p = 8/2 = 4$

Si $m=2$, $n=8$ y $p=4$, la función es continua en $x=\pm 2$.

$$g(x) = \begin{cases} 2x+12 & x<-2 \\ 2x2 & -2\leq x<2 \\ 8 & x=2 \\ 4\sqrt{3x-2} & x>2 \end{cases}$$

Derive $g'(x)$

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & x<-2 \\ 4x & -2<x<2 \\ 6(3x-2)^{-1/2}. & x>2. \end{cases}$$

¿Es derivable en $x=-2, 2$?

$x=-2$: $\lim_{x\to -2^-} 2 = 2$ $\quad \lim_{x\to -2^+} 4x = -8$ $\quad \lim_{x\to -2} g'(x)$ no existe

$x=2$ $\lim_{x\to 2^-} 4x = 8$ $\quad \lim_{x\to 2^+} 6(3x-2)^{-1/2} = 6\cdot 4^{-1/2} = \frac{6}{\sqrt{4}} = 3.$

$\lim_{x\to 2} g'(x)$ no existe.

4 d) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{t\sqrt{1+t}}-\dfrac{1}{t}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+t}}{t\sqrt{1+t}}\cdot\dfrac{1+\sqrt{1+t}}{1+\sqrt{1+t}}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-(1+\cancel{t})}{\cancel{t}\sqrt{1+t}\,(1+\sqrt{1+t})}=\dfrac{-1}{\sqrt{1}\,(1+\sqrt{1})}=-\dfrac{1}{2}$

4 e) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}\cdot\dfrac{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}$

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1+t-(1-t)}{t(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t})}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2\cancel{t}}{\cancel{t}(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t})}=\dfrac{2}{1+1}=1$

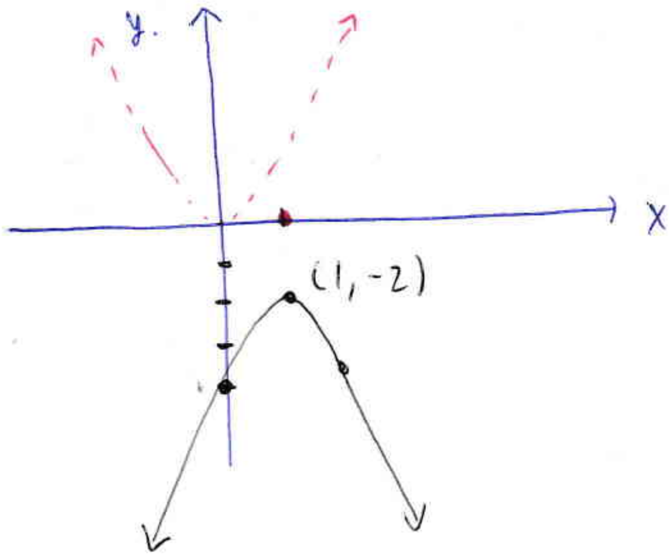
Reflexiones y Traslaciones

1 b) $g(x) = -2x^2 + 4x - 4$ c) $2 + |-(x-3)|$

Encuentre el vértice completando el cuadrado

$g(x) = -2(x^2 - 2x + 2) = -2(x^2 - 2x + 1 + 2 - 1)$

$g(x) = -2((x-1)^2 + 1) = -2(x-1)^2 - 2$. vértice $(1, -2)$



Transformaciones aplicadas respecto a $y = x^2$?

Ec. Parábola $y = a(x-h)^2 + K$.

- 1 unidad a la derecha.
- alarga verticalmente * 2
- refleja respecto al eje x.
- desplaza 2 uds hacia abajo.

¿Es función par? No porque $g(-x) = -2x^2 - 4x - 4 \neq g(x)$

No es simétrica respecto al eje-y.

Dominio $(-\infty, \infty)$ Rango $(-\infty, -2)$

Interceptos: en-y $g(0) = -4$ $(0, -4)$

en-x no hay $g(x) \neq 0$.

Función uno a uno: No.

Si se restringe el dominio de $[1, \infty)$ si es uno a uno

¿Cuál es la inversa de $g(x)$? $g(x) = -2x^2 + 4x - 4$

$g(x) = -2(x-1)^2 - 2$

Resuelva para y: $y + 2 = -2(x-1)^2$

$$\frac{y+2}{-2} = (x-1)^2$$

$$1 + \sqrt{\frac{y+2}{-2}} = x$$

Dominio f^{-1} $(-\infty, -2)$

Rango f^{-1} $[1, \infty)$

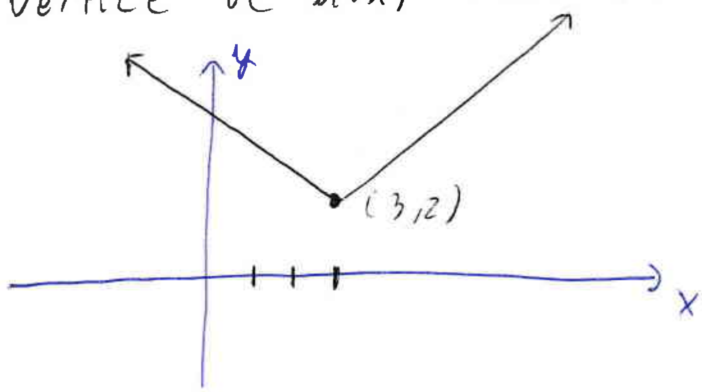
$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{-1 - \frac{y}{2}}$$

6.

$|ab| = |a||b|$

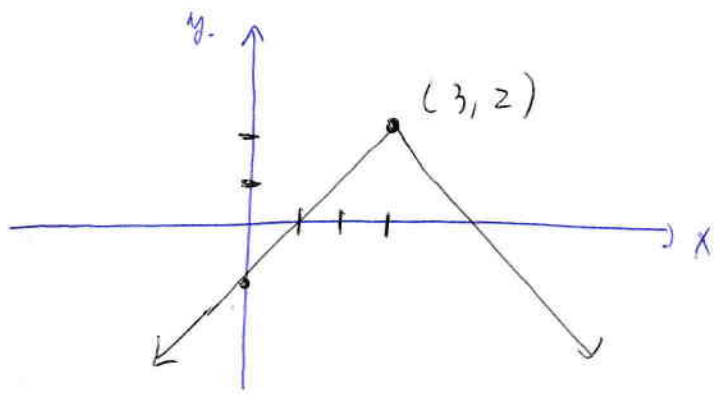
c) $h(x) = 2 + |-(x-3)| = 2 + |-1||x-3| = 2 + |x-3|$

vertice de $h(x)$ está en $(3, 2)$



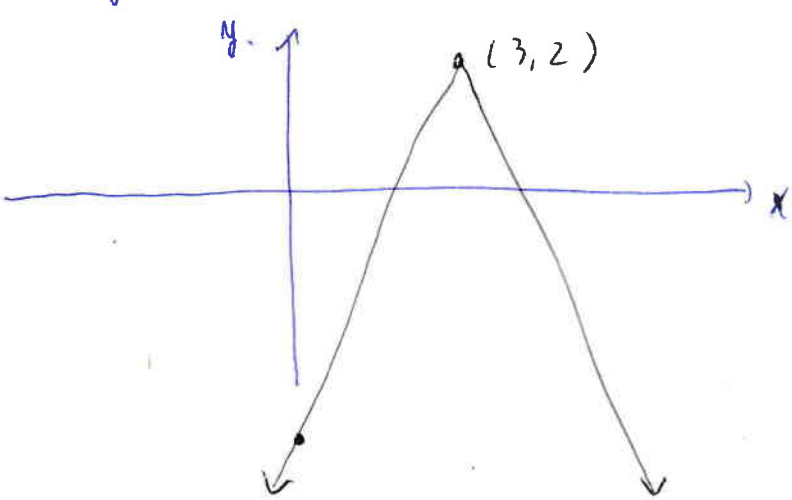
desplaza 3 a la derecha
2 hacia arriba

d) $i(x) = 2 - |x-3|$



3 ud a la derecha
refleje respecto al eje-x
2 uds hacia arriba

e) $j(x) = 2 - 3|x-3|$



alarga verticalmente
por 3

2. AHs, AVs y Agujeros. Grafique

c) $h(x) = \dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-5x+4}$ $\qquad$ $i(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x-1}$

$$h(x) = \frac{(2x-1)(x-1)}{(x-4)(x-1)} = \frac{2x-1}{x-4}$$

$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$

Potenciales AVs $x = 1, 4$

discontinuidad removible

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{x-4} = \frac{1}{-3}$$

Agujero en $(1, -1/3)$

$$\lim_{x\to 4^-} h(x) = \lim_{x\to 4^-} \frac{2x-1}{x-4} = -\infty \qquad \frac{8}{0^-}$$

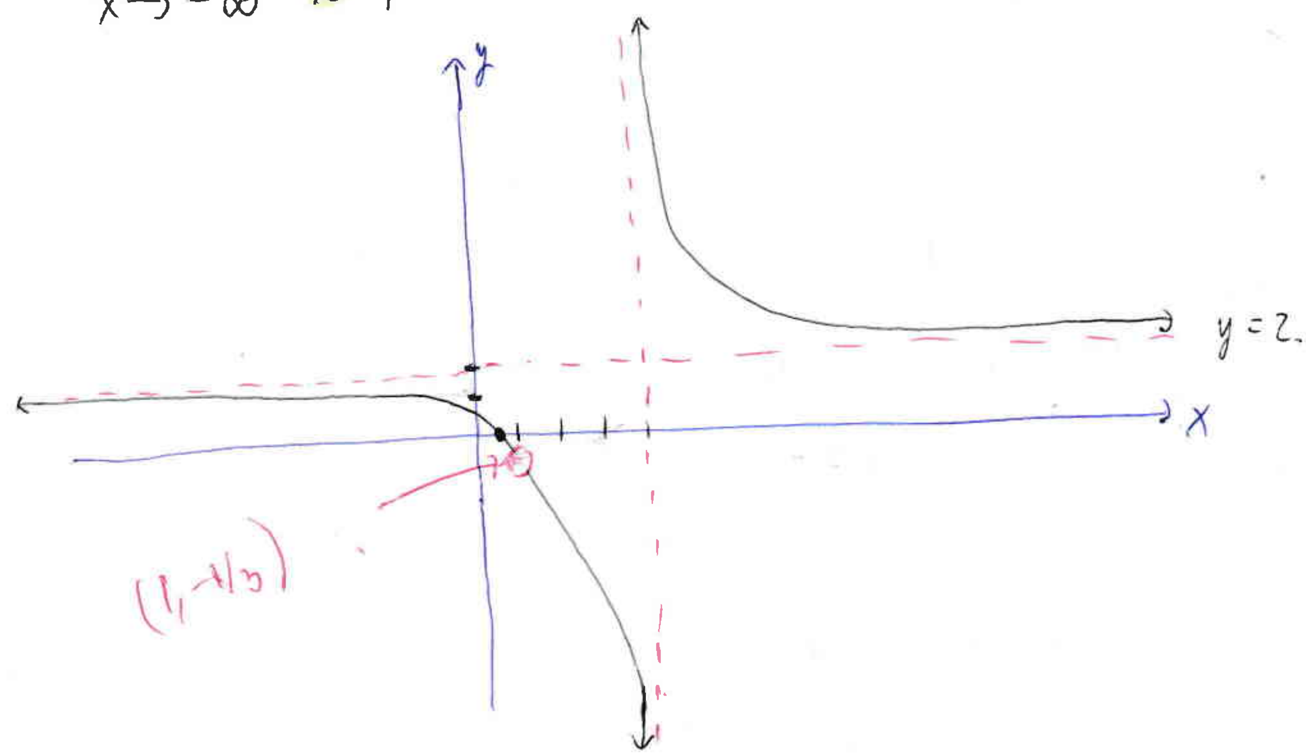
$$\lim_{x\to 4^+} \frac{2x-1}{x-4} = +\infty \qquad \frac{8}{0^+}$$

A.V. en $x = 4$.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{2x-1}{x-4} = 2.$$

AH $y = 2$.

AH. $$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x-1}{x-4} = 2$$



d. $i(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x-1}$ $\quad D\ \mathbb{R}-\{1\}$.

A.V. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{\underbrace{x-1}_{-}} = -\infty$ $\quad$ 0.9

1.1 $\quad \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{\underbrace{x-1}_{+}} = +\infty$ $\quad x = 1$

$\dfrac{1}{\infty} \to 0$

Agujeros: Ninguno.

A.H. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\underbrace{\sqrt{x^2}}_{+}\sqrt{4+1/x^2}}{x-1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-\cancel{x}\sqrt{4+1/x^2}}{\cancel{x}(1-1/x)} = \dfrac{-\sqrt{4}}{1}$ $\quad y = -2$

negativos

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2}\sqrt{4+1/x^2}}{x(1-1/x)} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{x}\,\dfrac{\sqrt{4+1/x^2}}{1-1/x} = \sqrt{4}$ $\quad y = +2$

$\sqrt{x^4} = x^2$ $\quad$ pero $\sqrt{x^2} \neq x$ $\quad \sqrt{x^2} = |x|$

Gráfica $\quad i(0) = \dfrac{\sqrt{1}}{-1} = -1$