3.1 Derivadas de Funciones Polinomiales.

Utilizando la definición de la derivada.

Función Constante $f(x)=C$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h}=\lim_{h\to 0}0\cdot\frac{1}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

Función Lineal $f(x)=x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}}=1$$

Función Cuadrática

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2hx+h^2-\cancel{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}2x+h=2x$$

Observe que la derivada es un polinomio de un grado menor multiplicado por la potencia anterior. Si continuamos derivando

$$\frac{d}{dx}x^3=3x^2 \qquad \frac{d}{dx}x^4=4x^3$$

La Regla de la Potencia se utiliza para encontrar la derivada de cualquier monomio o función potencia.

Regla de la Potencia: $r\in\mathbb{R}$ $\quad \frac{d}{dx}(x^r)=rx^{r-1}$

Ejemplo: Derive las siguientes funciones.

a. $\frac{d}{dx}(5{,}008)=0$

b. $\frac{d}{dx}(\log 37)=0$ $\quad$ log37 es una constante.

c. $\frac{d}{dx}(x^{20})=20x^{19}$

d. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^9}\right)=\frac{d}{dx}(x^{-9})=-9x^{-10}$ $\quad$ reescriba $\frac{1}{x^9}$ como una función potencia x^{-9}

e. $\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{5}}\right)=\sqrt{5}\,x^{\sqrt{5}-1}$

Ejercicio 1: Diferencie. Reescriba la función antes de aplicar la regla de la potencia.

a. $f(x) = \frac{1}{x^7}$ $\quad f(x) = x^{-7} \quad f'(x) = -7x^{-8}$

b. $g(t) = \sqrt[4]{t^3}$ $\quad g(t) = t^{3/4} \quad g'(t) = \frac{3}{4} t^{-1/4}$

c. $h(w) = \frac{w^5}{\sqrt{w^7}}$ $\quad h(w) = \frac{w^5}{w^{7/2}} = w^{3/2} \quad h'(w) = \frac{3}{2} w^{1/2}$

Reglas Básicas de Derivación

1. Factor constante: $\frac{d}{dx}\left[c\, f(x)\right] = c\, f'(x)$ $\quad c \in \mathbb{R}$.

2. Suma / Diferencia: $\frac{d}{dx}\left[f(x) \pm g(x)\right] = f'(x) \pm g'(x)$

Ejercicio 2: Derive

$a(x) = \sqrt[4]{\pi} + 8^{\log_2 8}$ $\quad a'(x) = 0$ $\quad$ los dos términos son constantes

$b(x) = \frac{1}{30} x^{60} + 5x^7 - 2x^{1.5}$ $\quad b'(x) = 2x^{59} + 35x^6 - 3x^{0.5}$

$c(x) = \sqrt[7]{x^5} - \frac{3}{x^{11}} = x^{5/7} - 3x^{-11}$ $\quad c'(x) = \frac{5}{7} x^{-2/7} + 33x^{-12}$

En algunos problemas es necesario simplificar la función antes de derivar.

$d(x) = (x+1)(x^3 + 2x^2) = x^4 + 2x^3 + x^3 + 2x^2 = x^4 + 3x^3 + 2x^2$ $\quad d'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 4x$

$e(x) = \frac{x^4 + 2x^{3/2} + 6x - 8}{2x^2} = \frac{1}{2} x^2 + x^{-1/2} + 3x^{-1} - 4x^{-2}$.

$e'(x) = x - \frac{1}{2} x^{-3/2} - 3x^{-2} + 8x^{-3}$

$f(x) = (4x)^3 = 4^3 x^3$ $\quad f'(x) = 3 \cdot 64\, x^2$

$g(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$ $\quad g(x) = x^3 - 8$ $\quad g'(x) = 3x^2$

Diferencia de Cubos

Ecuación de la Recta Tangente a $y=f(x)$ en $x=a$

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x-a)}$$

La pendiente es la derivada $f'(a)$.

Ejercicio 3: Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = 2x^6 - 3x^2 + 2$ en $x=1$.

Coordenada- y: $y(1) = 2-3+2 = 1$

Derivada: $y'(x) = 12x^5 - 6x$

Pendiente: $y'(1) = 12-6 = 6.$

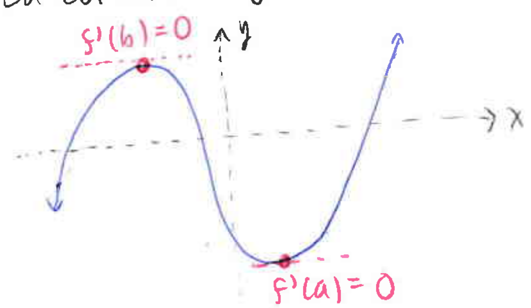
Recta Tangente: $y = y(1) + y'(1)(x-1) = 1 + 6(x-1)$

ó $y = 6x - 5$

Recta Tangente Horizontal:

Una recta tangente horizontal tiene ~~un~~ valor de pendiente igual a cero $m=0$.

La curva de $y=f(x)$ tiene una tangente horizontal en $x=a$ si $f'(a)=0$.



Tangentes horizontales en $x=a, b$.

Ejercicio 4: Encuentre todos los puntos sobre la curva $y = \frac{5}{3}x^3 - x^5$ en los que la recta tangente es horizontal.

Resuelva $y'(x)=0$: $y'(x) = 5x^2 - 5x^4 = 5x^2(1-x^2) = 0$

$x = 0, \pm 1$

Encuentre las coordenadas de cada punto.

$y(-1) = \frac{5}{3}(-1) + 1 = -\frac{2}{3}$ $\quad y(0) = 0-0$ $\quad y(1) = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$

$(-1, -2/3)$, $(0,0)$ y $(1, 2/3)$ tienen rectas tangentes.

Derivación de Funciones Definidas por Tramos

Cada tramo se deriva utilizando las reglas de derivación conocidas.

Por ejemplo, la derivada de. $f(x) = \begin{cases} x^3+2x, & x \leq 0 \\ x^4-3x^2, & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{x}-3, & x > 1 \end{cases}$ es

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2+2 & x < 0 \\ 4x^3-6x & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}x^{-1/2} & x > 1 \end{cases}$$

$f(x)$ no es derivable en $x=0,1$ porque $f'(x)$ tiene saltos en estos puntos.

Ejercicio 5: Derive la sig. función y explique si es derivable en $x=1$.

$$f(x) = \begin{cases} 3\sqrt[3]{x}, & x < 1 \\ \frac{3}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Si $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)$ existe, entonces Para f es derivable en $x=1$.

Derive cada tramo

$$f'(x) = \begin{cases} x^{-2/3}, & x < 1 \\ -3x^{-2}, & x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f'(x) &= \lim_{x\to 1^-} x^{-2/3} = 1 \\ \lim_{x\to 1^+} f'(x) &= \lim_{x\to 1^+} -\frac{3}{x^2} = -3 \end{aligned}\right\} \text{no son iguales}$$

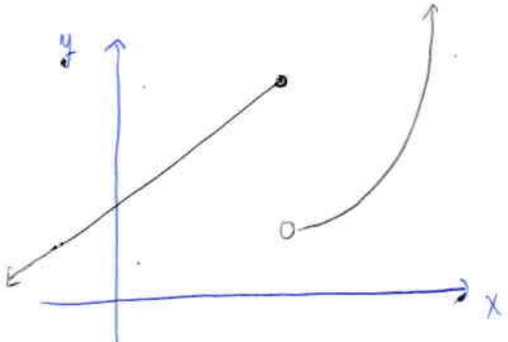
Como $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe, f no es derivable en $x=1$.

Funciones Derivables:

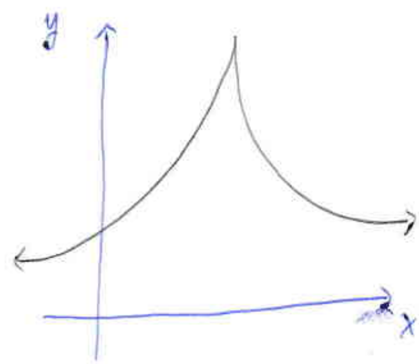
Una función es derivable en $x=a$ si $f'(a)$ existe.

Una función es derivable en $x=a$ en los siguientes casos.

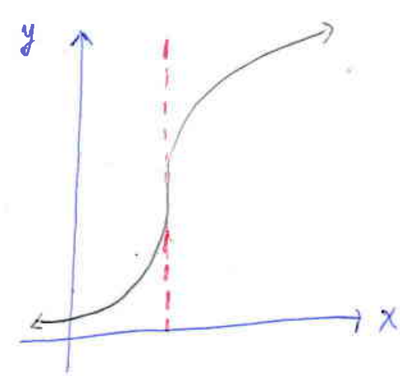
Una función no es derivable en $x=a$ en los siguientes casos.



a) Discontinuidad de Salto.



b) Esquina o Pico.



c) Tangente Vertical

$\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \pm\infty$

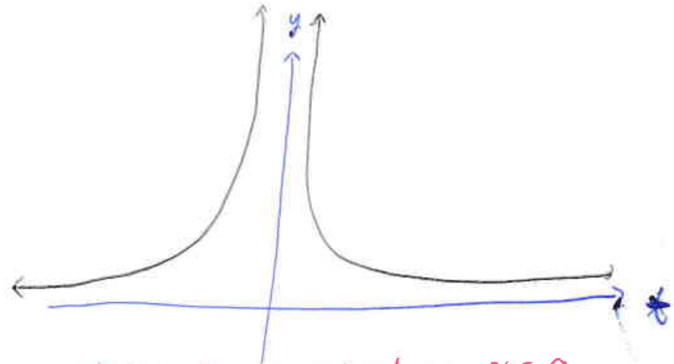
Ejercicio 6: Determine dónde cada una de las siguientes funciones es derivable.

a) $f(t) = \frac{1}{t^4}$

$f'(t) = \frac{1}{t^5}$

no existe para $t = 0$

$f(t)$ es derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



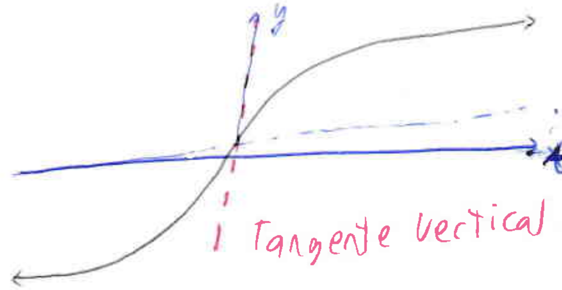
Asintota vertical en $x=0$.

b. $g(t) = \sqrt[5]{t} = t^{1/5}$

$g'(t) = \frac{1}{5} t^{-4/5} = \frac{1}{5t^{4/5}}$

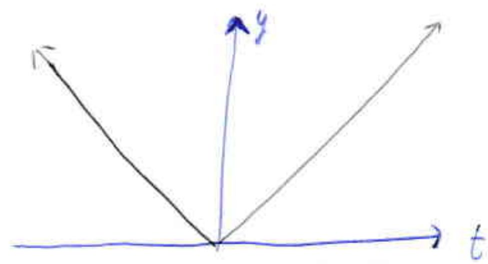
no existe para $t=0$

$g(t)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$



Tangente vertical en $x=0$

c. $h(t) = |t| = \begin{cases} -t, & t<0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$



esquina en $t=0$

Derive cada tramo

$h(t) = \begin{cases} -1 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$

como $\lim_{t \to 0} h(t)$ no existe $h(t)$ no es derivable en $t=0$, $|t|$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

d. $i(t) = |2t-4| = 2|t-2|$

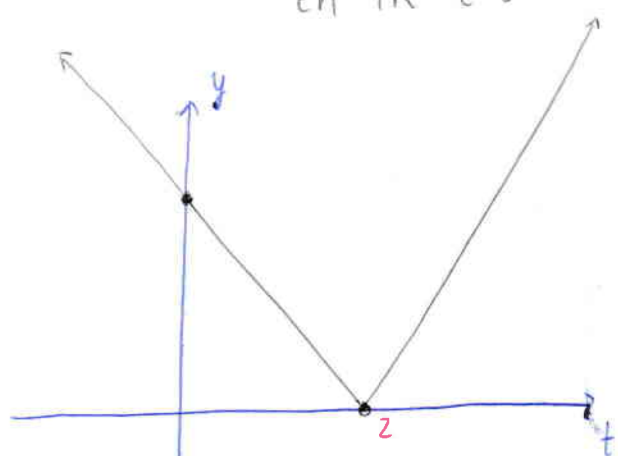
Valor absoluto 2 uds. a la derecha

Alargado verticalmente por $*2$.

$i(t)$ no es derivable en $t=2$

porque tiene un pico o esquina

$i(t)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$.



esquina en $t=2$.