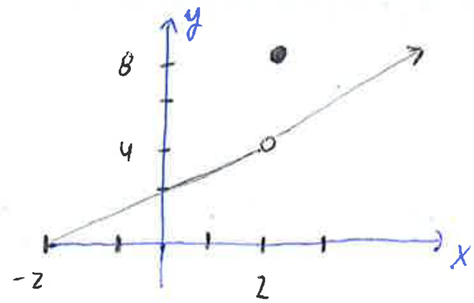
2.2-2.3 Límites

Concepto fundamental que define continuidad, derivadas, integrales y áreas.
Se utiliza para encontrar la pendiente de la recta tangente o la razón instantánea de cambio de y respecto a x.

Ejemplo 1: Considere la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 8 & x = 2. \end{cases}$

Observe el comportamiento de $f(x)$ cuando x se acerca a 2. $(x \to 2)$

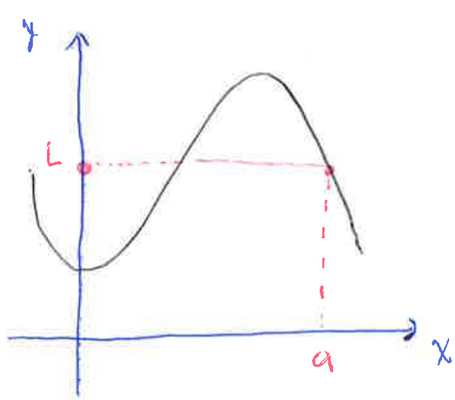
$x > 2$ x	$x \to 2^+$ $f(x)$	$x < 2$ x	$x \to 2^-$ $f(x)$
2.1	4.1	1.9	3.9
2.01	4.01	1.99	3.99
2.001	4.001	1.999	3.999

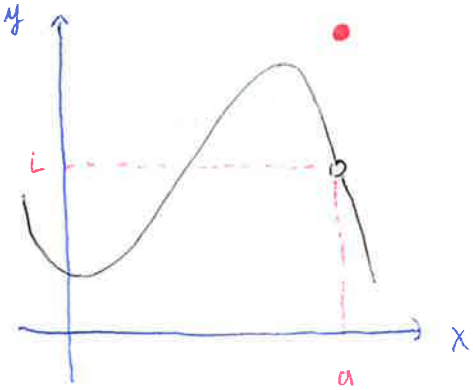


A medida que los números x se acercan más a 2, (por la derecha y por la izquierda), los valores de $f(x)$ se acercan al valor 4.

Este valor también es diferente al valor funcional $f(2) = 8$.

El límite de una función analiza el comportamiento de $f(x)$ cuando x se acerca, y no es igual a un número particular del dominio de f.





A medida que x se acerca al número a $(x \to a)$, los valores funcionales en ambas funciones se acercan a L $(f(x) \to L)$.

En ambas funciones, el límite es L a pesar de que en la 2da función $f(a) \neq L$.

Definición: El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima al número a es un ÚNICO número L, denotado como

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L.}$$

siempre y cuando $f(x) \to L$ al asumir un número x lo suficientemente cercano PERO DIFERENTE de a.

Si tal límite no existe, se dice que el límite de $f(x)$ no existe.

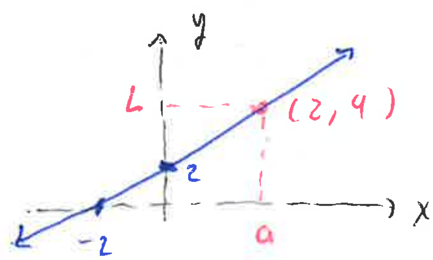
En el ejemplo anterior, el límite existe y podemos conjeturar que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

Ejemplo 2: Analice $\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} (x+2)$

Podemos conjeturar que el límite de esta función es igual a 4.

$x > 2$	$g(x)$	$x < 2$	$g(x)$
2.1	4.1	1.9	3.9
2.01	4.01	1.99	3.99
2.001	4.001	1.99	3.99



Por lo que $\lim_{x \to 2} (x+2) = 4.$

Propiedad de Límites.

Si $f(x)$ se puede simplificar utilizando álgebra a una función $g(x)$ excepto en $x=a$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$$

En los dos ejemplos anteriores

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \to 2} x+2 = 4$$

Propiedades de Límites.

Con las sigs. propiedades podemos evaluar límites sin necesidad de conjeturar sus valores.

1. Constante: $\lim_{x \to a} c = c$

2. Monomio: $\lim_{x \to a} x^n = a^n$

Si $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ existen, entonces.

3. Suma/Diferencia $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

4. Producto Escalar: $\lim_{x \to a} c\, f(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$

5. Producto: $\lim_{x \to a} f(x) g(x) = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$

6. Cociente: $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0.$

7. Raíces: $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$

Ejercicio 1: Evalúe los sigs. límites.

a. $\lim_{t \to \frac{1}{2}} 6t+3 = 6 \cdot \cancel{\lim_{t \to 0.5} t}^{\,0.5} + \cancel{\lim_{t \to 0.5} 3}^{\,3} = 6(0.5) + 3 = 6.$

b. $\lim_{x \to -6} \dfrac{x^2+12}{x-6} = \dfrac{\lim_{x \to -6} x^2+12}{\lim_{x \to -6} x-6} = \dfrac{(-6)^2+12}{-6-6} = \dfrac{36+12}{-12} = -4$

c. $\lim_{p \to 4} \sqrt{p^2+p+5} = \sqrt{\lim_{p \to 4} p^2+p+5} = \sqrt{16+4+5} = \sqrt{25} = 5$

Límites y manipulación algebraica.

Límite de la Forma 0/0: tanto el límite del numerador como del denominador son cero.

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) \longrightarrow \frac{0}{0}$$

No se pueden evaluar aplicando las propiedades de límites, pero se pueden evaluar si el cociente se simplifica a otra función.

Límite de la Forma K/0: sólo el límite del denominador es igual a cero.

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) \longrightarrow \frac{K}{0}$$

Los límites de esta forma no existen y se verá que tienden a $\pm\infty$.

Ejercicio 2: Encuentre los sigs. límites.

a) $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \to 2} x+2 = 2+2 = 4$$

Diferencia de cubos.

b) $$\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \to 2} x^2+2x+4 = 4+4+4 = 12$$

c) $$\lim_{x \to -3} \frac{x^4-81}{x^2+9x+18} = \lim_{x \to -3} \frac{(x-3)(x^2+9)\cancel{(x+3)}}{(x+6)\cancel{(x+3)}} = \lim_{x \to -3} \frac{(x-3)(x^2+9)}{(x+6)} = \frac{-6(18)}{3}$$

Factorice el numerador: $x^4-81 = (x^2-9)(x^2+9) = (x-3)(x+3)(x^2+9)$

el denominador: $x^2+9x+18 = (x+6)(x+3)$

el límite es igual a $L = -2(18) = -36$

d) $$\lim_{u \to 1} \frac{\sqrt{u}-1}{u-1} \cdot \frac{\sqrt{u}+1}{\sqrt{u}+1} = \lim_{u \to 1} \frac{\cancel{(u-1)}}{\cancel{(u-1)}(\sqrt{u}+1)} = \lim_{u \to 1} \frac{1}{\sqrt{u}+1} = \frac{1}{2}.$$

Racionalice y simplifique.

Límites para cocientes de diferencias

El cociente de diferencias de $f(x)$ es la pendiente de la recta secante a $y=f(x)$ entre dos puntos x y $x+h$.

$$m_{sec} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Cuando $h \to 0$ se tiene el límite $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Ejercicio 3: Encuentre $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

$a(x) = x^2-3$

$a(x+h) = (x+h)^2 - 3 = x^2+2hx+h^2-3$

$a(x) = x^2-3$

$a(x+h)-a(x) = \cancel{x^2}+2hx+h^2\cancel{-3}\cancel{-x^2}\cancel{+3} = 2hx+h^2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)-a(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}}(2x+h) = 2x+0$$

$b(x) = \frac{1}{x+5}$

$$b(x+h)-b(x) = \frac{1}{x+h+5} - \frac{1}{x+5} = \frac{\cancel{x}\cancel{+5}-\cancel{x}-h\cancel{-5}}{(x+h+5)(x+5)} = \frac{-h}{(x+h+5)(x+5)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{b(x+h)-b(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{h}^{1}}{\cancel{h}}\frac{1}{(x+\underbrace{h}_{h=0}+5)(x+5)} = \frac{-1}{(x+5)(x+5)} = \frac{-1}{(x+5)^2}$$

$c(x) = \sqrt{2x+3}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2x+2h+3}-\sqrt{2x+3}}{h}\cdot\frac{\sqrt{2x+2h+3}+\sqrt{2x+3}}{\sqrt{2x+2h+3}+\sqrt{2x+3}} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{2x}+2h\cancel{+3}-\cancel{2x}\cancel{-3}}{h(\sqrt{2x+2h+3}+\sqrt{2x+3})}$$

Racionalice: Cancele $\frac{h}{h}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2}{(\sqrt{2x+2\underbrace{h}_{0}+3}+\sqrt{2x+3})} = \frac{2}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

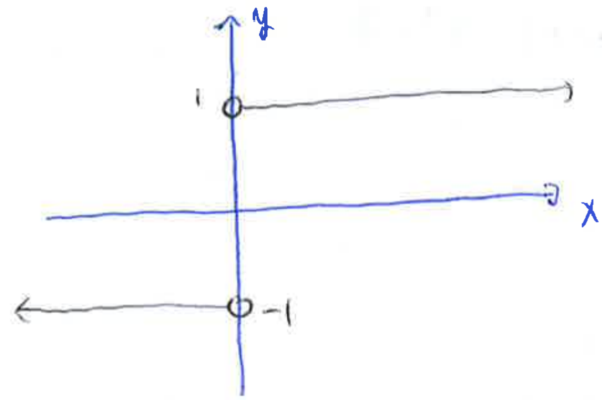
Límites que no existen

Ejemplo 3: Sea $s(x) = \frac{x}{|x|}$, evalúe $\lim_{x \to 0} s(x)$

utilizando la definición de valor absoluto $s(x)$ se reescribe como.

$$s(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1, & \text{si } x > 0 \\ \frac{x}{-x} = -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$s(x)$ está indefinida en $x = 0$, pero se puede analizar su comportamiento alrededor de $x = 0$.



Si $x < 0$, entonces $s(x) = -1$

$$\lim_{x \to 0} s(x) = -1$$

PERO, si $x > 0$, entonces $s(x) = 1$

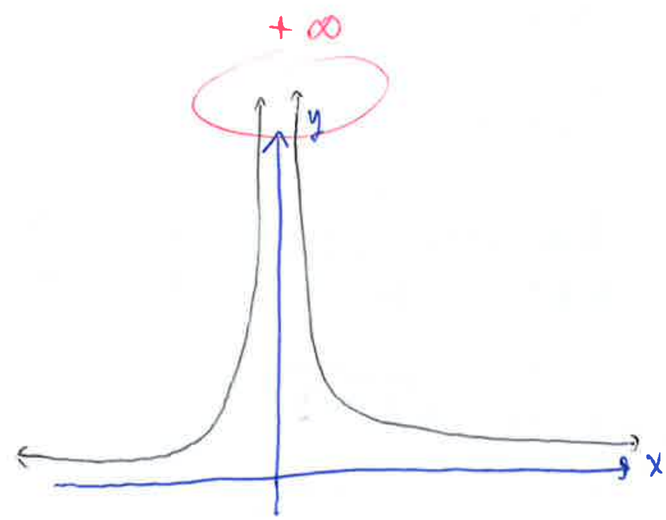
$$\lim_{x \to 0} s(x) = 1$$

Como $s(x)$ se aproxima a dos números diferentes, entonces

$\lim_{x \to 0} s(x)$ no existe.

Ejemplo 4: Analice $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$.

$x > 0$	$f(x)$	$x < 0$	$f(x)$
0.1	100	-0.1	100
0.01	10,000	-0.01	10,000
0.001	1,000,000	-0.001	1,000,000
	$f(x) \to \infty$		$f(x) \to \infty$



Como los valores de $f(x)$ se hacen más y más grandes, denotado $f(x) \to \infty$, a medida que x se acerca más y más a cero, este límite NO EXISTE

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ no existe ó $+\infty$. (notación para límite de no existe pero $f(x) \to +\infty$)