3.10 Aproximaciones Lineales

La ecuación de la recta tangente a $y=f(x)$ en $x=a$,

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

se puede utilizar para aproximar el valor de $f(x)$ cuando x está cerca de a.

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

la ecuación de la recta tangente también se conoce como la aproximación lineal o linearización de f en a.

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Ejercicio 1: Considere la función $f(x) = e^{x^2-1}$

a. Encuentre la linearización $L(x)$ de $f(x)$ en $a=1$.

Derivada: $f'(x) = 2xe^{x^2-1}$

Pendiente: $f'(1) = 2e^0 = 2$

Coordenada-y: $f(1) = e^0 = 1$

Linearización: $L(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + 2(x-1) = 2x-1$

b. Estime el valor de $f(1.1)$ utilizando la aproximación lineal $L(x)$.

$f(1.1) = e^{0.21} \approx L(1.1) = 2.2-1 = 1.2$

Como $e^{0.21} \approx 1.2336$ la aproximación estima el valor de $f(1.1)$ bien.

Ejercicio 2: Considere la función $f(x) = x^{1/3}$.

a. Encuentre la aproximación lineal de $f(x)$ en $a=27$

$f(27) = (3^3)^{1/3} = 3$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, $f'(3^3) = \frac{1}{3}(3^3)^{-2/3} = \frac{1}{3 \cdot 3^2} = \frac{1}{27}$

$L(x) = 3 + \frac{1}{27}(x-27)$

b. Estime el valor de $\sqrt[3]{30}$

$$\sqrt[3]{30} \approx L(30) = 3 + \frac{3}{27} \approx 3.11111$$

Se obtiene una buena aproximación porque $\sqrt[3]{30} \approx 3.107232$.

Ejercicio 3: Aproximación Lineal de Seno

a. Encuentre la aproximación lineal de seno en $a=0$.

$f(x)=\sin x$

$f'(x)=\cos x$, $f(0)=\sin 0=0$, $f'(0)=\cos 0=1$

$L(x)=\underbrace{f(0)}_{0}+\underbrace{f'(0)}_{1}(x-0)=x$

$\boxed{L(x)=x\approx\sin x}$
Aproximación lineal muy común.

b. Estime el valor de $\sin(0.2)$

$\sin(0.2)\approx 0.2$ otra buena aproximación porque $\sin 0.2\approx 0.19867$

Diferenciales.

Si $y=f(x)$ es una función derivable, entonces la diferencia o diferencial en x, $\Delta x=dx$, se puede considerar como una variable independiente.

Diferencial. El diferencial en y, denotado como dy, se define como

$$\boxed{dy=f'(x)dx}$$

Interpretación del Diferencial.

La diferencia en y, denotada como Δy, se calcula como

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

La diferencial en y se puede utilizar para aproximar el valor de la diferencia en y.

$$\Delta y=\overbrace{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}^{f'(x)}\Delta x\approx f'(x)dx=dy$$

Por lo que $\Delta y\approx dy=f'(x)dx$

Ejercicio 4: Considere la función $g(x) = e^{x/20}$

a. Encuentre la diferencial dy.

$$dy = g'(x)\,dx = \frac{1}{20} e^{x/20}\,dx$$

b. Evalúe dy para $x = 0$ y $dx = 0.20$

$$dy = \frac{1}{20} e^{0}\, 0.20 = \frac{1}{100} = 0.010$$

c. Compare el valor de la diferencial con la diferencia en y de x entre $x = 0$ y $x = 0.2$

$$\Delta y = f(0.2) - f(0) = e^{0.2/20} - e^{0} = e^{0.01} - 1 \approx 0.01005.$$

Como $dy = 0.010$, se obtiene una muy buena estimación de la diferencia Δy con el diferencial.

Aplicación de las Diferenciales

Las diferenciales se utilizan para estimar los errores (o diferencias) que ocurren debido a mediciones aproximadas.

Sea Δx el error de medición de una variable.

El error en $f(x)$ es $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \approx df$.

El error relativo se calcula dividiendo el error entre el valor de $f(x)$.

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)} \approx \frac{df}{f}.$$

El porcentaje de error es el error porcentual del error relativo.

$$\frac{df}{f} \times 100\%.$$

Ejercicio 5: Se encontró que la arista de un cubo mide 30 cm con un posible error en la medición de 0.1 cm.

a. Estime el error máximo posible al calcular el volumen del cubo.

Volumen del Cubo: $V = x^3$.

El error al estimar el volumen del cubo es el diferencial.

Error $= dV = 3x^2 dx$, volumen estimado $V(30) = 2{,}7000$

En este caso $x = 30$ $dx = 0.1$, $dV = 2{,}7000(0.1) = 27.\ cm^3$

b. Calcule el error relativo y el porcentaje de error en la estimación del volumen.

Error relativo: $\frac{dV}{V} \approx \frac{27}{27{,}000} = \frac{1}{1000} = 0.001$

Porcentaje de error $\frac{dV}{V} \times 100\% = 0.1\%$

c. Utilice diferenciales para estimar el error máximo posible y el porcentaje de error al calcular el área del cubo

Área $A = 6x^2$ Diferencial $dA = 12x\,dx$

En este caso $x = 30$, $dx = 0.1$ cm $A = 5{,}400$ $dA = 360(0.1) = 36\ cm^2$

Error máximo $dA = 36\ cm^2$ Porcentaje Error $\frac{dA}{A} \times 100\% = \frac{36}{5400} \times 100\% \approx 0.666\%$

Ejercicio 6: Estime la cantidad de pintura necesaria para aplicar una mano de 0.05 cm de espesor a un domo hemisférico con radio de 25 cm

Área superficial de una esfera $A = 4\pi r^2$ Semi esfera $A = 2\pi r^2$.

La cantidad de pintura necesaria es aprox el diferencial de A, $dx = 0.05$

$dA = 4\pi r\,dr = 4\pi(25)(0.05) = 100\pi \frac{1}{20} = 5\pi\ cm^2$.

use $r = 25$, $dr = 0.05$ R/ Se necesitan aprox $5\pi\ m^2$ de pintura.