3.11 Funciones Hiperbólicas

Seno Hiperbólico: $\boxed{\sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}}$

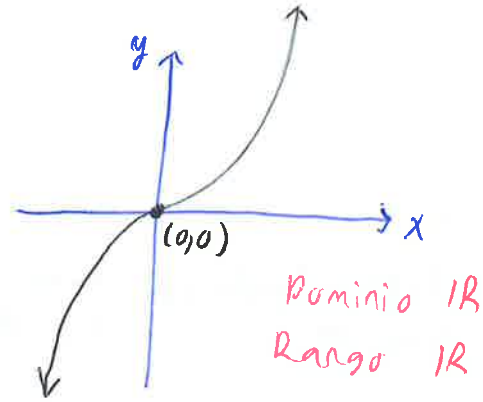
Propiedades

Intercepto-x y -y: el origen $(0,0)$

Función impar $\sinh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{+x}}{2} = -\sinh(x)$

No tiene AVs ni AHs

$\sinh(0) = \dfrac{e^{0} - e^{-0}}{2} = 0$



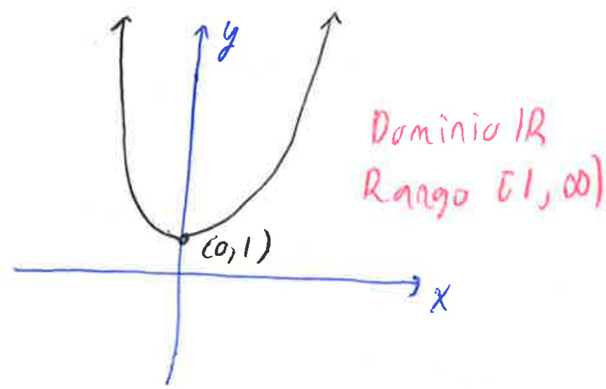
Coseno Hiperbólico: $\cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

Propiedades $\cosh(0) = \dfrac{1+1}{2} = 1$

Intercepto-x: Ninguno

Intercepto-y: $(0,1)$

Función Par: $\cosh(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{+x}}{2} = \cosh x$



No tiene AVs ni AHs

El resto de funciones hiperbólicas se definen en términos de $\sinh x$ y $\cosh x$

$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ $\qquad$ $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$

$\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$ $\qquad$ $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x}$

Ejercicio 1: Considere la función $y = \tanh x$.

a. Determine si $\tanh x$ es una función par, impar o ninguna.

Use el hecho que $\sinh x$ es impar y $\cosh x$ es par

$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x,$$

$\tanh x$ es una función impar.

b. Encuentre las asíntotas horizontales de $\tanh x$

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{\to 0}{e^{x}} - e^{-x}}{\underset{\to 0}{e^{x}} + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{0 - e^{-x}}{0 + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} -1 = -1$$

Recuerde que $e^{-\infty} \to 0$ y $e^{\infty} \to +\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x} - 0}{e^{x} + 0} = \lim_{x\to\infty} +1 = +1$$

c. Utilice la información anterior y el valor de $\tanh(0)$ para graficar $\tanh x$.

$$\tanh(0) = \frac{\sinh(0)}{\cosh(0)} = \frac{0}{1} = 0,$$

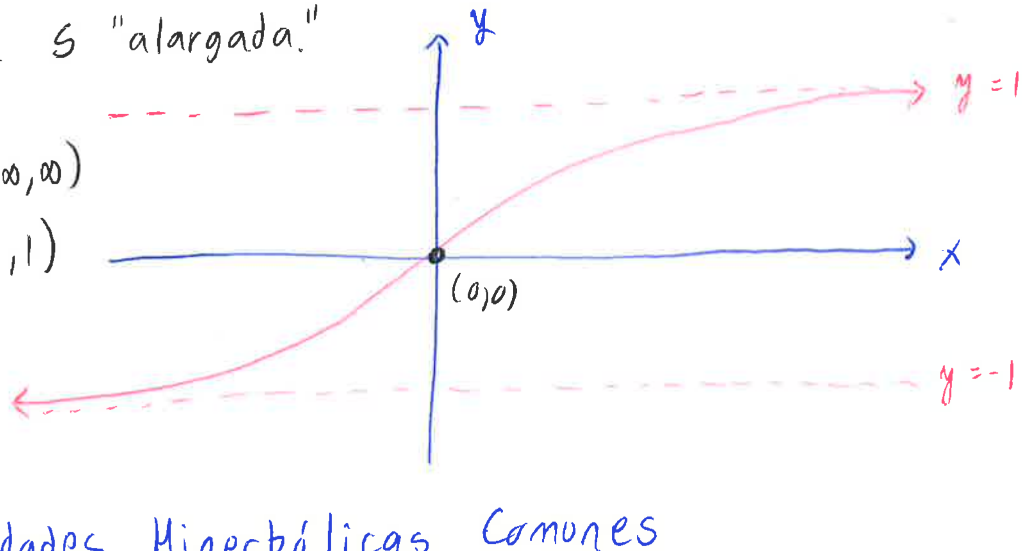
use $\tanh(1) \approx 0.7615$

$\tanh(-1) \approx 0.7615$

Como $-1 < \tanh x < 1$ y es una función impar, su gráfica tiene una forma de S "alargada."

Dominio $(-\infty, \infty)$

Rango $(-1, 1)$



Identidades Hiperbólicas Comunes

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$$

Ejercicio 2: Utilice las definiciones de $\sinh x$ y $\cosh x$ para simplificar las siguientes expresiones hiperbólicas.

a. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$ Note que $e^x e^{-x} = 1$

Identidad Hiperbólica

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} = \frac{0+4}{4} = 1$$

b. $$\sinh 2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \underbrace{\frac{(e^x - e^{-x})}{2}}_{\sinh x}\underbrace{\frac{(e^{+x} + e^{-x})}{2}}_{\cosh x} 2 = 2\sinh x \cosh x$$

Derivadas de funciones Hiperbólicas

Las derivadas de estas funciones se encuentran utilizando las definiciones de $\sinh x$ y $\cosh x$.

- $$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$
- $$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

Utilice las derivadas de $\sinh x$ y $\cosh x$ para encontrar el resto de las derivadas.

- $$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right) = \frac{\overbrace{\cosh^2 x - \sinh^2 x}^{1}}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$$
- $$\frac{d}{dx}(\coth x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right) = \frac{\overbrace{\sinh^2 x - \cosh^2 x}^{-1}}{\sinh^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x$$
- $$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cosh x}\right) = \frac{-\sinh x}{\cosh^2 x} = -\frac{\sinh x}{\cosh x}\frac{1}{\cosh x} = -\operatorname{sech} x \tanh x$$
- $$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sinh x}\right) = \frac{-\cosh x}{\sinh^2 x} = \frac{-\cosh x}{\sinh x}\frac{1}{\sinh x} = -\coth x \operatorname{csch} x$$

Derivadas Funciones Hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$$

Ejercicio 3: Derive las siguientes funciones.

a. $f(x) = \sinh(6x^2-4x)$ $\quad f'(x) = (12x-4)\cosh(6x^2-4x)$

b. $g(x) = \tanh^2(x) - 4\tanh(x^2)$ Dos Reglas de la Cadena

$g'(x) = 2\tanh(x)\operatorname{sech}^2 x - 8x\operatorname{sech}^2(x^2)$ Regla del Producto.

c. $h(x) = 4^x \operatorname{sech} x$, $\quad h'(x) = 4^x \ln(4)\operatorname{sech} x - 4^x \operatorname{sech} x \tanh x$

d. $u(t) = \ln[\cosh(t^3)]$; $\quad u'(t) = 3t^2 \dfrac{\sinh(t^3)}{\cosh(t^3)} = 3t^2\tanh(t^3)$

e. $w(t) = \cosh[\ln t^3]$ $\quad w'(t) = \sinh(\ln t^3)\dfrac{3t^2}{t^3} = \dfrac{3\sinh(\ln t^3)}{t}$

f. $z(t) = \dfrac{1-\coth(t)}{1+\coth(t)}$ $\quad z'(t) = \dfrac{\operatorname{csch}^2(t)(1+\coth t) + \operatorname{csch}^2 t(1-\coth t)}{(1+\coth t)^2}$

$$z'(t) = \frac{2\operatorname{csch}^2 t}{(1+\coth t)^2}$$

g. $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ $\quad$ encuentre $F'(x)$ y $F''(x)$

$$F'(x) = \frac{1 + x(x^2+1)^{-1/2}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\cancel{[(x^2+1)^{1/2} + x]}}{\cancel{(x + (x^2+1)^{1/2})}(x^2+1)^{1/2}} = (x^2+1)^{-1/2}$$

$$F''(x) = \frac{-x}{(x^2+1)^{3/2}}$$