4.4 Regla de L'Hospital

Los límites del tipo 0/0 ó ∞/∞ se pueden evaluar cancelando factores comunes o racionalizando.

a. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2} \underbrace{=}_{0/0} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+1)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{4}{3}$

b. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{4+t}-\sqrt{4-t}}{t} \cdot \dfrac{\sqrt{4+t}+\sqrt{4+t}}{\sqrt{4+t}+\sqrt{4+t}} \underbrace{=}_{0/0} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cancel{4}+t-\cancel{4}+t}{t(\sqrt{4+t}+\sqrt{4+t})}$ $2t$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2}{\sqrt{4+t}+\sqrt{4+t}} = \dfrac{2}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

a. Forma Indeterminada 0/0

Regla de L'Hospital: Suponga que f y g son derivables y $g'(x) \neq 0$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ y el límite del cociente existe, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \underbrace{=}_{0/0} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejercicio 1: Evalúe los sigs. límites.

a. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2} \underset{0/0}{\overset{LH}{=}} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x}{2x-1} = \dfrac{4}{4-1} = \dfrac{4}{3}$

b. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln(3x-8)}{x-3} \underbrace{=}_{0/0,\,LH} \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\frac{3}{3x-8}}{1} \underbrace{=}_{\text{Evalúe}} \dfrac{3}{9-8} = \dfrac{3}{1} = 3$

$\ln(9-8) = \ln 1 = 0$

c. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{4+t}-\sqrt{4-t}}{t} \underset{LH}{\overset{0/0}{=}} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\frac{1}{2}(4+t)^{-1/2}+\frac{1}{2}(4-t)^{-1/2}}{1} = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} + \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$

d. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\tan(16\theta)}{\tan(4\theta)} \underset{LH}{\overset{0/0}{=}} \lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{16\sec^2(16\theta)}{4\sec^2(4\theta)} = \dfrac{16\cancel{\sec^2 0}}{4\cancel{\sec^2 0}} = \dfrac{16}{4} = 4$

$\tan 0 = 0$

e) $\lim\limits_{\theta\to 2} \dfrac{\operatorname{sen}(3\theta^2-12)}{\operatorname{sen}(3\theta-6)} \underbrace{=}_{LH} \lim\limits_{\theta\to 2} \dfrac{6\theta\cos(3\theta^2-12)}{3\cos(3\theta-6)} = \dfrac{6\cdot 2\cos 0}{3\cos 0} = \dfrac{12}{3} = 4$

$\operatorname{sen} 0 = 0$

Forma indeterminada ∞/∞

La regla de L'Hospital también se puede aplicar si ambos límites tienden a $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \underset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejercicio 2: Evalúe los siguientes límites

a. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{e^{8x}} \underset{LH}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{10}{8e^{8x}} = \frac{10}{8}\lim_{x\to\infty} e^{-8x} = 0$

use $e^{-\infty}\to 0$

Ambos términos tienden a $+\infty$

b. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^{1/8})}{x^5} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{8x^5} \underset{LH}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{x^{-1}}{40x^4} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{40x^5} = 0$

Use $\frac{1}{\infty}\to 0$

Recuerde que $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\ln x = +\infty$

c. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{10x^3+6x^2+8}{4x^2-5-10x^3} \underset{LH}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{30x^2+12x}{8x-30x^2} \underset{LH}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{60x+12}{8-60x} \underset{LH}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{60}{-60} = -1$

Utilice la Regla de L'Hospital más de una vez

d. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\tan(x+\frac{\pi}{2})}$ no existe y no se puede utilizar la Regla de L'Hospital.

En este caso $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\ln x = +\infty$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\tan(x+\tfrac{\pi}{2})$ no existe, la función es periódica

e. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\tan(x+\frac{\pi}{2})} \underset{LH}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{\sec^2(x+\pi/2)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos^2(x+\pi/2)}{x}$

En este caso $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\tan(x+\tfrac{\pi}{2}) = -\infty$

tan tiene A.V en $x=\pi/2$ y valores negativos en el 2do cuadrante

En este caso $\cos(0+\pi/2) = \cos\pi/2 = 0$, vuelva a usar L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x+\pi/2)}{x} \underset{LH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos(x+\pi/2)\sin(x+\pi/2)}{1} = -2\cancel{\cos\tfrac{\pi}{2}}^{\,0}\cancel{\sin\tfrac{\pi}{2}}^{\,1} = 0$$

c. Productos Indeterminados.

Cuando evalúa $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ si $\lim_{x\to a} f(x) \to 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) \to \pm\infty$.

no es claro si este límite existe o no porque se multiplica un número arbitrariamente pequeño por un número arbitrariamente grande.

Este límite se conoce como una forma indeterminada $0\cdot\infty$, para usar la regla de L'Hospital se debe rescribir como un cociente.

$$fg = \frac{f}{1/g} \text{ (Forma } 0/0) \quad \text{ó} \quad fg = \frac{g}{1/f} \text{ (Forma } \infty/\infty)$$

Ejercicio 3: Evalúe los sigs. límites.

a. $$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{x^2}_{0} \underbrace{\ln x}_{-\infty} \underset{\text{reescriba}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-2}} \underset{LH}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{-2} = 0$$

Forma ∞/∞

b. $$\lim_{x\to\infty} \underbrace{x}_{\infty} \underbrace{e^{-x^2}}_{0} \underset{\text{reescriba}}{=} \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{x}{e^{x^2}}}_{\infty/\infty} \underset{LH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\underbrace{2x}_{\infty}\underbrace{e^{x^2}}_{\infty}} = 0 \quad \text{porque } \frac{1}{\infty} \to 0$$

Si no se utiliza el cociente adecuado, el límite se vuelve más complicado

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^{-1}} \underset{0/0}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-2xe^{-x^2}}{-x^{-2}} \underset{\text{Reescriba}}{=} \lim_{x\to\infty} 2x^3 e^{-x^2}$$

. Sigue siendo indeterminado y es más complicado.

c. $$\lim_{x\to 0^+} \overset{0 \to \infty}{x \sinh\left(\frac{1}{x}\right)} \underset{\text{Reescriba}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(x^{-1})}{x^{-1}} \underset{LH}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{-x^{-2}}\cosh(x^{-1})}{\cancel{-x^{-2}}}$$

use $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{x\to 0^+} \sinh\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} \cosh\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty.$$ el límite no existe $\quad \lim_{t\to\infty} \cosh t = +\infty.$

d. $$\lim_{x\to -\infty} \overset{-\infty \cdot 0}{x \tan\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\tan(x^{-1})}{x^{-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{-x^{-2}}\sec^2(x^{-1})}{\cancel{-x^{-2}}} = \lim_{x\to\infty} \sec^2\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\sec^2\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right) = \sec^2(0) = 1^2 = 1$$

d. Potencias indeterminadas $1^{\infty}, 0^0, \infty^0$

Hay varias formas indeterminadas que surgen al evaluar el límite.

$$y = \lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$$

Forma $0^0, \infty^0, 1^{\infty}$ Tome el logaritmo natural de $[f(x)]^{g(x)}$

evalúe el $\lim_{x \to a} \ln y$ el cual es una forma indeterminada $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty$

Note que ∞^{∞} es un tipo de límite que no existe también $\infty^1 \to \infty$

$0^{\infty} \to 0$, $\infty^0 \to 1$ son tipos de límites que existen

Ejercicio 4: Evalúe los sigs. límites.

a. $y = \lim_{x \to 0^+} x^{10x}$ Tome ln's $\ln y = \lim_{x \to 0^+} 10x \ln x$ Forma $0 \cdot \infty$

Forma 0^0

Reescriba: $\ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{10 \ln x}{x^{-1}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{10x^{-1}}{-x^{-2}}$

Evalúe $\ln y = \lim_{x \to 0^+} -10x = 0$

Como $\ln y = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1$ $\quad \lim_{x \to 0^+} x^{10x} = 1$

b. $\lim_{x \to 0^+} (1+4x)^{1/\sin x}$ forma 1^{∞}, Tome ln's

$$\ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+4x)}{\sin x} \underset{LH}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{4}{1+4x}}{\cos x} = \frac{\frac{4}{1}}{\cos 0} = \frac{4}{1} = 4 \Rightarrow y = e^4$$

Forma 0/0

c. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{r}{x}\right)^{xt}$ r cte. Forma 1^{∞}, Tome ln's.

$$\ln y = \lim_{x \to \infty} \underbrace{xt \ln(1 + rx^{-1})}_{\infty \cdot 0} = t \lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{\ln(1+rx^{-1})}^{0}}{\underbrace{x^{-1}}_{0}} \underset{LH}{=} t \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-rx^{-2}}{1+rx^{-1}}}{-x^{-2}} \begin{matrix} * x^2 \\ * x^2 \end{matrix}$$

$$\ln y = t \lim_{x \to \infty} \frac{-r}{-(1+\underbrace{\tfrac{r}{x}}_{0})} = \frac{-rt}{-(1+0)} = \frac{rt}{1} = rt.$$

Por lo que $y = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{r}{x}\right)^{xt} = e^{rt}$

Conexión interés compuesto continuamente e interés compuesto por períodos.

e. Diferencias Indeterminadas $\infty - \infty$

La diferencia $\lim_{x\to a} f(x) - g(x)$ es indeterminada si $\lim_{x\to a} f(x) \to \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) \to \infty$

Ejercicio 5: Evalúe los sigs. límites.

a. $\lim_{x\to 1^+} [\underbrace{\ln(x^8-1)}_{\ln 0^+ \to -\infty} - \underbrace{\ln(x^4-1)}_{\ln 0^+ \to -\infty}] \underset{\text{Reescriba}}{=} \lim_{x\to 1^+} \ln\left[\frac{x^8-1}{x^4-1}\right]$ Forma 0/0 use LH

$$\ln\left[\lim_{x\to 1^+} \frac{x^8-1}{x^4-1}\right] \underset{LH}{=} \ln\left[\lim_{x\to 1^+} \frac{8x^7}{4x^3}\right] = \ln\left[\frac{8}{4}\right] = \ln 2 \approx 0.7$$

b. $\lim_{x\to 1^+} \left[\underbrace{\frac{x}{x-1}}_{+\infty} - \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\frac{1}{0^+}\to +\infty}\right] = \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{x\ln x - x + 1}^{0}}{\underbrace{(x-1)\ln x}_{0}} \underset{LH}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + (x-1)/x}$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - x^{-1}} \underset{LH}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{1/x}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Forma 0/0 Evalúe

c. $\lim_{x\to 0^+} (\cot x - \csc x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\cos x - 1}^{1-1=0}}{\underbrace{\sin x}_{0}}$ Forma $\frac{0}{0}$

Aplicando L'Hospital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{-0}{1} = 0$$