Razones Relacionadas (3.9)

La idea detrás de razones relacionadas es calcular la razón de cambio de una cantidad en términos de la razón de cambio de otra cantidad. Las razones relacionadas son una aplicación de la regla de la cadena y de la derivación implícita.

Sea $y(t) = F[\,x(t)\,]$, note que $y \longrightarrow x \longrightarrow t$.

Utilice la regla de la cadena para encontrar la razón de cambio de $y(t)$ respecto a t.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Ejercicio 1: Suponga que $y = \sqrt{2x+1}$, donde x & y son funciones de t.

a. Si $\frac{dx}{dt} = 3$, encuentre $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 4$.

Derive: $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2}\, 2\, \frac{dx}{dt}$

Sustituya $x=4,\ x'=3$

Resuelva $\frac{dy}{dt}$: $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{9}}\, 3 = \frac{3}{3} = 1$

$\frac{dy}{dt} = 1$

b. Si $\frac{dy}{dt} = 5$, encuentre $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 12$.

Derive: $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,\frac{dx}{dt}$

ahora la incógnita es $\frac{dx}{dt}$

Sustituya: $\frac{dy}{dt} = 5 = \frac{1}{\sqrt{9}}\,\frac{dx}{dt}$

Resuelva: $\frac{dx}{dt} = 5 \cdot 3$

$\frac{dx}{dt} = 15$

Ejercicio 2: Suponga que $4x^2 + 9y^2 = 36$, donde x & y son funciones de t.

a. Si $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}$, encuentre $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 2$ & $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.

Derive: $8\underbrace{x}_{2} \frac{dx}{dt} + 18y \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{1/3} = 0$

Sustituya: $16 \frac{dx}{dt} + \underbrace{6 \cdot \frac{2}{3}}_{4} \sqrt{5} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{4\sqrt{5}}{16} = -\frac{\sqrt{5}}{4}$

b. Si $\frac{dx}{dt} = 3$, encuentre $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = -2$ & $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.

utilice la misma derivada $8x \frac{dx}{dt} + 18y \frac{dy}{dt} = 0$

Sustituya nuevos valores: $\overbrace{-16(3)}^{-48} + \overbrace{\frac{18 \cdot 2}{3}}^{12} \sqrt{5} \frac{dy}{dt} = 0$

Resuelva $12\sqrt{5} \frac{dy}{dt} = 48 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{4}{\sqrt{5}}$

En algunos problemas, pueden haber tres variables que dependen del tiempo, por lo que la tasa relacionada de una variable depende de las tasas relacionadas de las otras dos variables.

Ejercicio 3: Si $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, (ecuación de una esfera de radio 3), encuentre $\frac{dz}{dt}$ cuando $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$, $\frac{dx}{dt} = 5$, & $\frac{dy}{dt} = 4$.

Derive: $2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} + 2z \frac{dz}{dt} = 0$

Sustituya: $4(5) + 4(4) + 2 \frac{dz}{dt} = 0$

Resuelva: $2 \frac{dz}{dt} = -20 - 16 = -36 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -18$

PASOS RAZONES RELACIONADAS

1. Lea el problema e identifique la información relevante.
2. Introduzca notación, asignando símbolos a todas las cantidades.
3. Escriba una ecuación que relacione las diferentes cantidades del problema.
4. Utilice la regla de la cadena para derivar respecto a t ambos miembros de la ecuación.
5. Sustituya la información dada en la ecuación resultante.
6. Resuelva para la razón de cambio desconocida.
7. Interprete el resultado en términos de unidades adecuadas como \$/unidad, \$/mes, $\cdots$, etc.

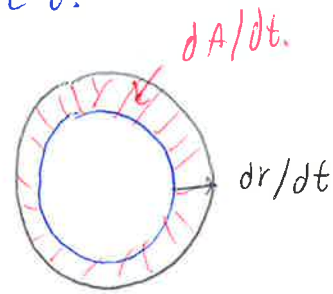
Ejercicio 4: El área A de un círculo de radio r y el radio se incrementa con el tiempo.

a. Encuentre la razón de cambio del área respecto al tiempo en términos de $\frac{dr}{dt}$.

Área Círculo: $A = \pi r^2$ A y r dependen de t.

Derive respecto a t: $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$

Sustituya y resuelva: $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$.



b. ¿Qué tan rápido se incrementa el área del círculo cuando el radio es de 10 pies y el radio se incrementa con una rapidez constante de 4 pies/s?

Sustituya y resuelva $r = 10$, $\frac{dr}{dt} = 4.0$ p/s.

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(10)(4) = 80\pi \text{ pies}^2/\text{s}.$$

El área se incrementa a una razón de 80 pies²/s.

Ejercicio 5: El volumen de una esfera se incrementa a una razón de 64 mm/s^3. ¿Qué tan rápido se incrementa el radio cuando el radio es igual a 40 mm?

Volumen Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ Conocido $r = 40$, $\frac{dV}{dt} = 64$

Derive: $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$.

Sustituya: $64 = 4\pi(40)^2 \frac{dr}{dt}$

Resuelva: $\frac{dr}{dt} = \underbrace{\frac{64}{4\pi}}_{16/\pi} \frac{1}{(40)^2} = \frac{16}{\pi} \frac{1}{\underbrace{40 \cdot 40}_{16 \cdot 100}} = \frac{1}{100\pi}$ $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{100\pi}$ mm/s

R/ El radio se incrementa a una razón de $\frac{1}{100\pi}$ mm/s

Ejercicio 6: La presión P y el volumen V de un gas satisfacen la ley de Boyle $PV = c$, donde c es una constante. En cierto instante, el volumen del gas es de 5 m^3, la presión es de 20 kPa (kilopascales), y la presión se está incrementando a una razón de 10 kPa/min. ¿Con qué rapidez disminuye el volumen del gas en este instante?

Use: $PV = C$

Conocida: $V = 5$, $P = 20$, $\frac{dP}{dt} = 10$

Derive ley de boyle respecto a t. (use la regla del producto)

$$\frac{dP}{dt} V + P \frac{dV}{dt} = 0$$

Sustituya

$$10(5) + 20 \frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{-50}{20} = -\frac{5}{2} \ m^3/min.$$

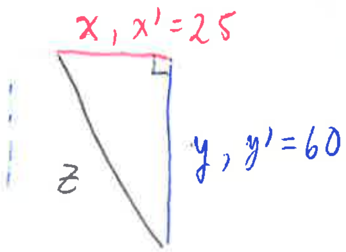
R/ El volumen del gas disminuyó en 2.5 m^3/min.

Problemas que requieren el uso de triángulos rectángulos

- Distancia entre dos carros si sus desplazamientos son perpendiculares entre sí.
- Escaleras apoyadas contra un muro vertical.
- Aviones que vuelan horizontalmente y pasan justo por debajo de un edificio.

Ejercicio 7: Dos automóviles parten desde el mismo punto. Uno se dirige hacia el sur a 60 kph y el otro hacia el oeste en una ruta más congestionada a 25 kph.
¿Con qué rapidez se incrementa la distancia entre los dos automóviles 2 horas después?

Realice un diagrama.



La distancia entre ambos carros es la hipotenusa del triángulo rectángulo

$$x^2 + y^2 = z^2$$

los vehículos se mueven a una velocidad constante

$$x = 25t, \quad y = 60t = 5\cdot 12t$$

Sustituya en z: $z^2 = 25^2t^2 + 60^2t^2 = 5^2t^2(\underbrace{5^2+12^2}_{25+144})$

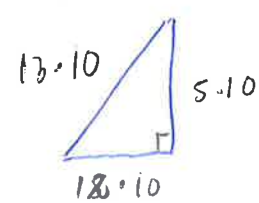
$$z^2 = 25t^2(169)$$

$$z = \sqrt{25t^2(169)} = 5\cdot 13t$$

Derive respecto a t: $\frac{dz}{dt} = 5\cdot 13 = 65$ Kph.

La distancia aumenta a una razón de 65 Kph.

O utilice la regla de la cadena $z^2 = x^2 + y^2$



Derive respecto a t: $2zz' = 2xx' + 2yy'$

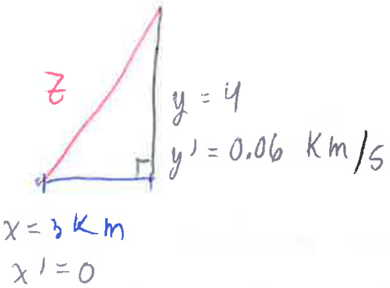
Resuelva para z': $z' = \frac{xx' + yy'}{z}$

Encuentre x, y, z: $x = 25(2), \quad y = 60(2) \qquad z = \sqrt{50^2 + 120^2} = 10\sqrt{\overbrace{5^2+12^2}^{13}}$

$$z' = \frac{50(25) + 120(60)}{130} = \frac{125 + 720}{13} = \frac{845}{13} = 65 \text{ Kph.}$$

Ejercicio 8: Un observador se encuentra a 3 km de la plataforma de un transbordador espacial. El transbordador asciende verticalmente a una velocidad de 60 m/s.

a. Encuentre la razón de cambio de la distancia entre el transbordador y el observador cuando está 4 km sobre la plataforma.



La distancia entre la persona y el transbordador es la hipotenusa.

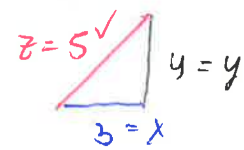
$$z^2 = x^2 + y^2 \qquad x = cte.$$

Derive respecto a t.

$$2z\frac{dz}{dt} = 0 + 2y\frac{dy}{dt}.$$

Resuelva para $\frac{dz}{dt}$: $\frac{dz}{dt} = \frac{y}{z}\frac{dy}{dt}.$

Encuentre z:

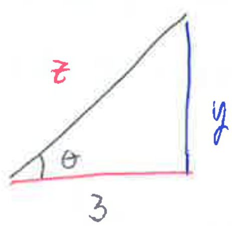


Sustituya valores conocidos: $\frac{dz}{dt} = \frac{4}{5}\,0.06 = \frac{0.24}{5} = 0.048$ Km/s.

La distancia cambia a una razón de 0.048 Km/s

b. Encuentre la razón de cambio del ángulo entre el suelo y el observador cuando la altura es de 4 km y y la velocidad vertical del cohete es de 60 m/s

Construya un nuevo diagrama.



Encuentre una relación entre y, 3 y θ.

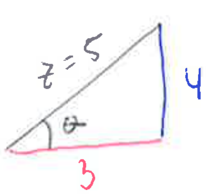
$$\tan\theta = \frac{y}{3}.$$ θ, y cambian en el tiempo

Derive respecto a t:

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{3}\frac{dy}{dt}.$$

Resuelva para $d\theta/dt$.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2\theta}{3}\,\frac{dy}{dt}.$$



Encuentre cos θ.

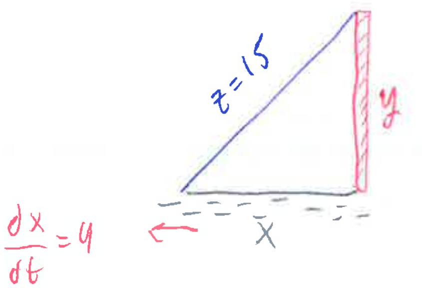
$$\cos\theta = \frac{3}{5}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{9/5}{3}\cdot\frac{60}{1000} = \frac{9\cdot 20}{5000} = \frac{9}{250}\ \text{rad/s.}$$

R/ El ángulo aumenta a una razón de $\frac{9}{250}$ rad/s

Ejercicio 9: Una escalera de 15 pies está apoyada contra un muro vertical. Si la parte inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared a una razón de 4 pies/s.

a. ¿Qué tan rápido la parte superior de la escalera resbala hacia abajo cuando la parte inferior de la escalera está a 9 pies del muro?



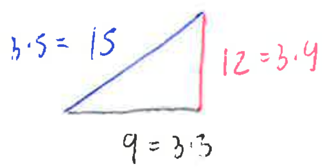
Encuentre una relación entre $x, y, 15$

$$x^2 + y^2 = 15^2$$

Derive respecto a x:

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

razón conocida $\frac{dx}{dt} = 4$



Resuelva para dy/dt.

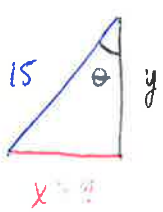
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}.$$

En este caso $x = 9$, $y = 12$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-9}{12}(4) = \frac{-36}{12} = -3 \text{ p/s.}$$

R La parte superior resbala a una razón de 3 pies/s.

b. ¿Con qué rapidez cambia el ángulo entre el muro y la escalera cuando la parte interior de la escalera está a 9 pies del muro?



Encuentre una relación entre $\theta, y, 15$

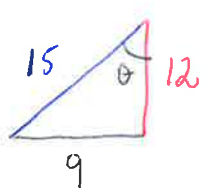
$$\cos\theta = \frac{y}{15}$$

y, θ cambian respecto a t.

Derive respecto a t

$$-\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{15}\frac{dy}{dt}.$$

en el inciso anterior $\frac{dy}{dt} = -3$



$$\sin\theta = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Resuelva para $d\theta/dt$.

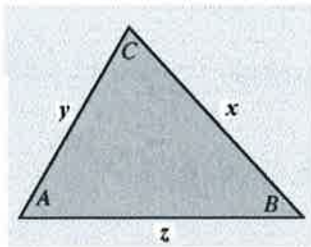
$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{15\sin\theta}\frac{dy}{dt}$$

encuentre el valor de $\sin\theta$.

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{15}\cdot\frac{5}{3}(-3) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3} \text{ rad/s.}$$

R El ángulo aumenta a una razón de $\frac{1}{3}$ rad/s.

Problemas que requieren Trigonometría Adicional

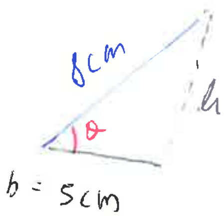


Ley de Cosenos: $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos C$

Ley de Senos: $\dfrac{x}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{y}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{z}{\operatorname{sen} C}$

Triángulos Semejantes $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2}$

Ejercicio 10: Dos lados de un triángulo tienen una longitud de 8 cm y 5 cm resp. El ángulo entre ellos se incrementa a una razón de 0.05 rad/s. Encuentre la razón de cambio del área del triángulo respecto al tiempo cuando el ángulo entre los dos lados es de $\frac{\pi}{3}$.



El área del triángulo es $A = \frac{1}{2} b h$

$h = 8 \sin\theta$. , $b = 5$

$A = \frac{1}{2} 5 \cdot 8 \sin\theta = 20 \sin\theta$.

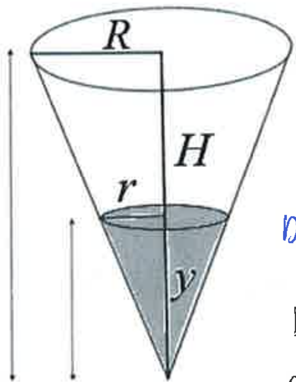
A y θ dependen del tiempo, derive respecto a t

$\dfrac{dA}{dt} = 20\cos\theta \dfrac{d\theta}{dt}$ use $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\dfrac{d\theta}{dt} = 0.05$

$\dfrac{dA}{dt} = 20\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) 0.05 = \frac{20}{2}(0.05) = 0.5 \text{ cm}^2/\text{s}$.

R/ El área aumenta a una razón de 0.5 cm²/s.

Ejercicio 11: Un líquido se vierte en un vaso de papel cónico a una razón de $6\pi\ cm^3/s$. El vaso cónico tiene una altura de 10 cm y un radio de 2 cm. Determine la rapidez a la cual el nivel de agua sube cuando el líquido dentro del vaso tiene una altura de 5 cm.

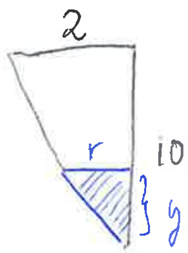


Volumen del Líquido (Volumen del Cono)

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 y$$

Datos Conocidos de líquido $\frac{dV}{dt} = 6\pi\ cm^3/s.$, $y = 5$

El líquido tiene la forma del vaso, encuentre r en función de y utilizando triángulos semejantes.



Las pendientes de ambos triángulos son iguales

$$\underbrace{\frac{y}{r}}_{\text{pendiente líquido}} = \underbrace{\frac{10}{2}}_{\text{pendiente vaso}} = 5 \Rightarrow y = 5r \text{ ó } r = y/5$$

Sustituya $r = \frac{y}{5}$ en el volumen del líquido

$$V(y) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{y}{5}\right)^2 y = \frac{\pi y^3}{75}$$

V, y dependen de t.

Derive respecto a t.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{25} y^2 \frac{dy}{dt}$$

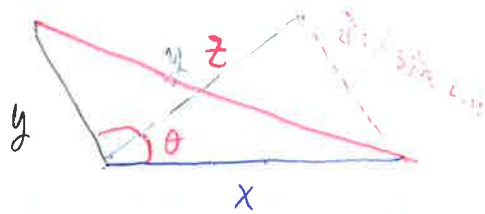
Sustituya $\frac{dV}{dt} = 6\pi$, $y = 5$

$$6\pi = \frac{\pi}{25} 25 \frac{dy}{dt.} = \pi \frac{dy}{dt}$$

Resuelva para $\frac{dy}{dt} = \frac{6\pi}{\pi} = 6\ cm/s$

R/ El nivel del ~~va~~ líquido sube a una razón de 6 cm/s.

Ejercicio 12: Dos personas parten del mismo punto. Una camina hacia el este a 4 km/h y la otra camina hacia al noroeste a $2\sqrt{2}$ km/h.
¿Qué tan rápido cambia la distancia entre las personas después de 30 minutos?



El triángulo no es rectángulo.
Utilice la ley de cosenos para encontrar z.

$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta$.

Datos conocidos: $x = 4t$, $y = 2\sqrt{2}\,t$, $\theta = 3\pi/4$ (ángulo entre este y noroeste)

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, $x^2 = 16t^2$, $y^2 = 4 \cdot 2 \cdot t^2$.

Sustituya en z^2:

$$z^2 = 16t^2 + 8t^2 - 8t\,2\sqrt{2}\,t\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 24t^2 + 16 \cdot 2\frac{t^2}{2} = 24t^2 + 16t^2$$

$$z^2 = 40t^2$$

Resuelva para z: $z = \sqrt{40}\,t = 2\sqrt{10}\,t$

Derive respecto a t: $\frac{dz}{dt} = 2\sqrt{10}$ Km/h.

R La distancia entre las personas aumenta a una razón de $2\sqrt{10}\,\frac{Km}{h}$.