1.6 Funciones Inversas.

Una función es un conjunto de pares ordenados (x, y) donde cada x tiene un sólo valor en y.

Por ejemplo, sea $f(x) = x + 3$ Dominio $\mathbb{R}$ Rango $\mathbb{R}$

Si intercambiamos las variables independiente x y dependiente y. obtenemos una nueva función que es la función inversa de f

Resuelva para x: $y = x + 3 \Rightarrow x = y - 3$.

Intercambie x & y: $y = f^{-1}(x) = x - 3$.

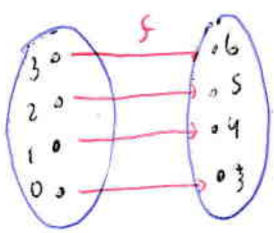
La función inversa de $f(x) = x + 3$ es $f^{-1}(x) = x - 3$.

Para que una función f tenga inversa es necesario que sea uno a uno

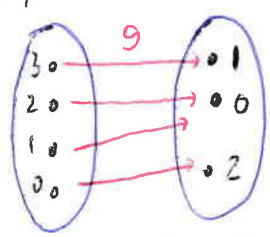
Funciones Uno a Uno.

Una función uno a uno nunca toma el mismo valor dos veces, es decir para cualquier $x_1, x_2 \in D$ $\boxed{x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$

Una función uno a uno se ilustra por medio del sig. diagrama de flechas.



Función Uno a Uno.



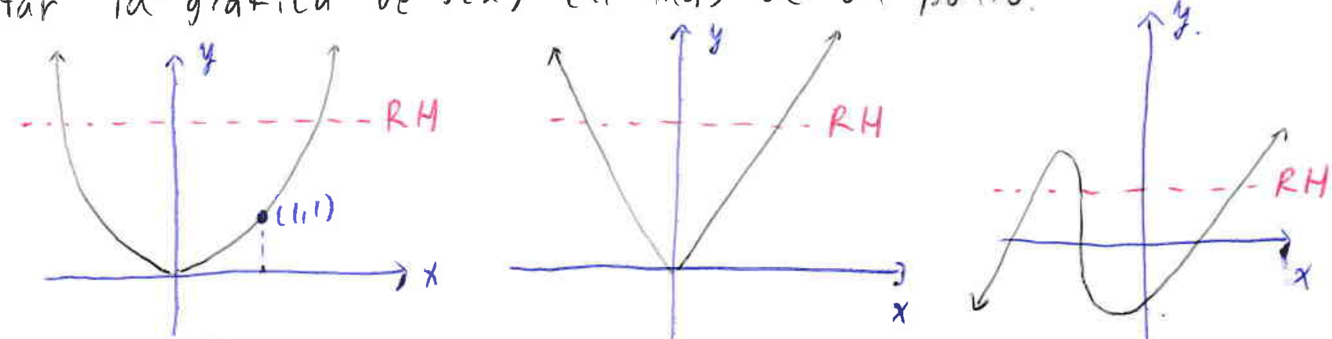
1 y 2 comparten el mismo valor funcional

No es función uno a uno.

Ejemplos de funciones que no son uno a uno.

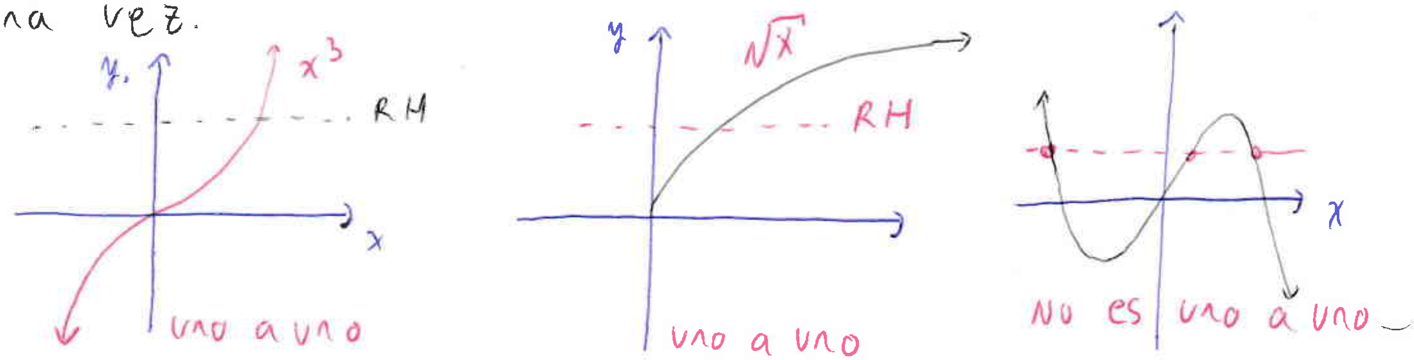
- Potencias pares $f(x) = x^{2n}$ $x = \pm 1$ son dos números distintos. pero $f(-1) = f(1) = 1$
- La función valor absoluto tampoco es uno a uno $|-2| = |2| = 2$.

Gráficamente, en una función uno a uno una recta horizontal puede cortar la gráfica de f(x) en más de un punto.



Funciones que no son uno a una

Prueba de la Recta Horizontal: una función es uno a uno si y sólo si **NO** existe una recta horizontal (RH) que interseque su gráfica más de una vez.



Ejercicio 1: Determine algebraicamente o gráficamente si las siguientes funciones son uno a uno.

a) $f(x) = x^4 - 16x^2$. NO LO ES:

Identifique los interceptos x, y.

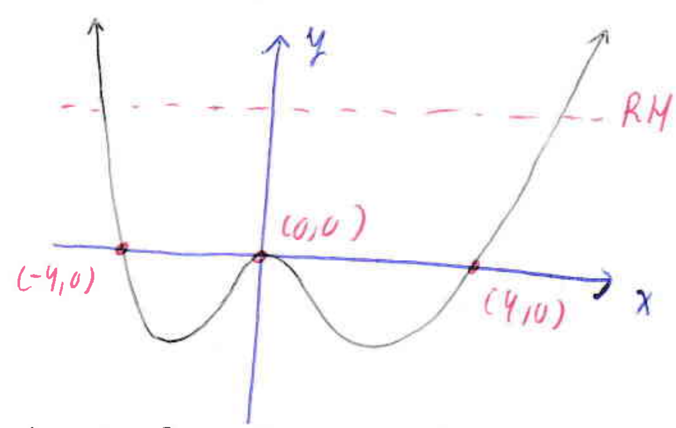
y bosqueje f(x).

$f(x) = x^2(x^2 - 16) = x(x-4)(x+4)$

Eje-x $(0,0)$ $(4,0)$ y $(-4,0)$

Eje-y $f(0) = 0$ $(0,0)$

$f(x) > 0$ si $x > 4$ ó $x < -4$



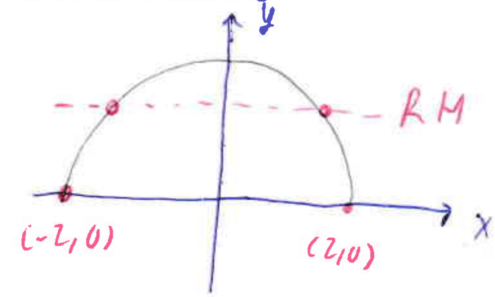
No es función uno a uno
no satisface prueba RH

Algebraicamente: note que $x = 0, \pm 4$ son números diferentes

PERO $f(-4) = f(0) = f(4) = 0$, por lo que f no puede ser uno a uno.

b. $g(x) = \sqrt{4-x^2}$

Gráficamente



Dominio $[-2, 2]$.

Intersecto-y : $g(0) = \sqrt{4} = 2$, $(0, 2)$

Intersecto-x: $4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

$(2-x)(2+x) = 0$

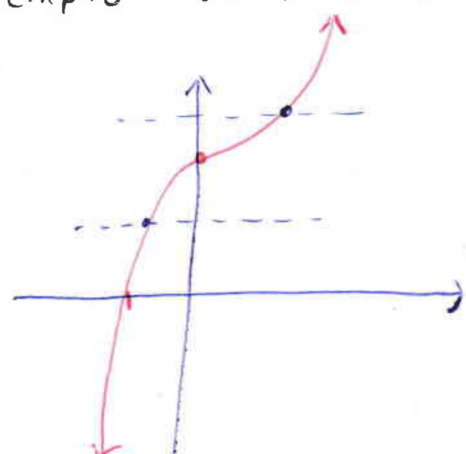
$(-2,0)$ y $(2,0)$

No es uno a uno por la prueba de la RM.

Algebraicamente, encuentre un contraejemplo $f(-2) = f(2) = 0$

entonces no es función uno a uno.

c. $h(x) = 4 + 4x^3$.



Grafique $4x^3$

luego traslade 4 uds. hacia arriba

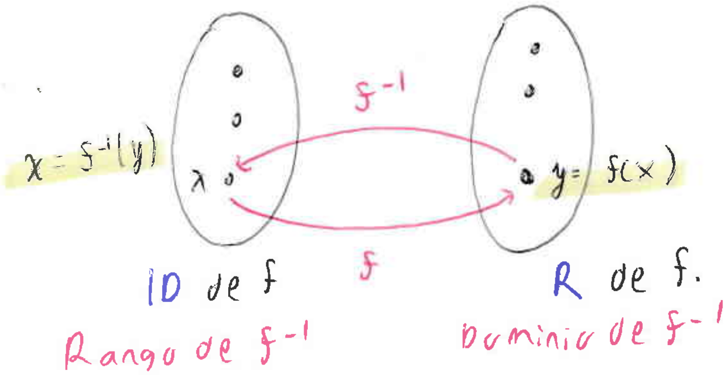
intersecto-x en $4x^3 = -4$

$x = -1$

Como la RM no corta $h(x)$ en más de un punto, $h(x)$ es una función uno a uno.

Inversa de una función.

Ilustración por medio de un diagrama de flechas



Asuma que f es una función uno a uno.

empezamos en x, continuamos en $y = f(x)$ al aplicar la inversa regresamos a x: $f^{-1}(y) = x$.

Definición Función Inversa: Sea f una función uno a uno con dominio ID y rango R. La función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A y se define como

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

Observaciones:

- La función inversa intercambia las variables, en este caso y es la variable independiente y x es la independiente $x = f^{-1}(y)$
- La inversa también intercambia el dominio y rango de $f(x)$

  El dominio de f^{-1} es el rango de f.

  El rango de f^{-1} es el dominio de f.

- Además En $x = f^{-1}(y)$ como $y = f(x)$, entonces.

  $x = f^{-1}(f(x))$ f y f^{-1} se cancelan entre sí.

Obtenemos las siguientes ecuaciones de cancelación

$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \\ f(f^{-1}(x)) &= x \end{aligned}}$$

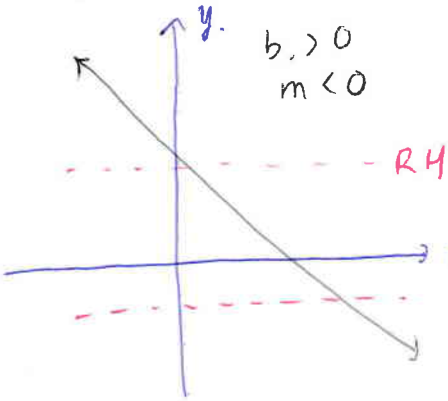
→ se utilizan para comprobar que f^{-1} es la inversa de f.

- La inversa de la inversa es la función original $(f^{-1})^{-1} = f$.

Procedimiento para encontrar la inversa de una función.

1. Verifique que la función sea uno a uno.
2. Resuelva esta ecuación para x en términos de y (si es posible)
3. Intercambie x por y para escribir f^{-1} como $y = f^{-1}(x)$

Ejercicio 2: Encuentre la inversa de la función $f(x) = mx + b$.



1. La función es uno a uno por la prueba RH.
2. Resuelva para x.

$y = mx + b$.

$y - b = mx \Rightarrow x = \dfrac{y-b}{m}$

3. Intercambie x por y. $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{m}$

La inversa tiene pendiente $1/m$.

Observaciones: si $m = 0$, $f(x) = b$ es una recta horizontal y esta función no tiene inversa (No satisface la prueba RH por ser RH).

Ejercicio 3: Considere la función $f(x) = x^5 + 32$.

a) Encuentre la inversa de f.

Es una función uno-a-uno, resuelva para x

$y - 32 = x^5 \Rightarrow x = (y-32)^{1/5} \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-32)^{1/5}$

b. Encuentre el dominio y rango de $f^{-1}(x)$.

D de f	$\mathbb{R}$		D de f^{-1}	$\mathbb{R}$
R de f	$\mathbb{R}$		R de f^{-1}	$\mathbb{R}$

intercambie dominio y rango.

c. Verifique que f^{-1} es la inversa de f usando las ecs. de cancelación

$f(f^{-1}(x)) = f((x-32)^{1/5}) = (x-32)^{5/5} + 32 = x - 32 + 32 = x$ ✓

$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^5+32) = (x^5 - 32 + 32)^{1/5} = (x^5)^{1/5} = x^1 = x$ ✓

Como f es uno a uno y se satisfacen estas ecuaciones, f^{-1} es la inversa de f.

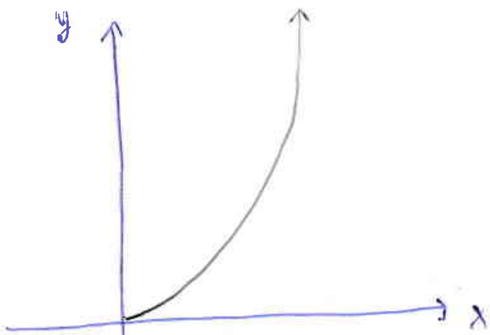
Inversas de Funciones con Dominio Restringido

Una función que no es uno a uno puede serlo si se restringe su dominio

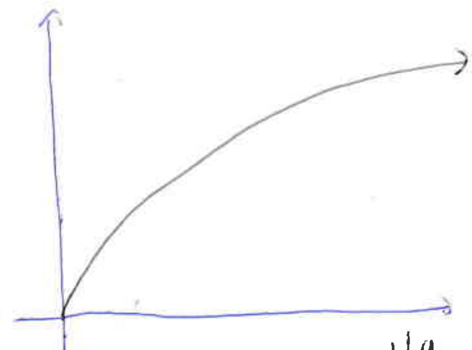
Por ejemplo, $f(x) = x^4$ no es uno a uno a uno, pero si lo es si se restringe su dominio en $[0, \infty)$

Resuelva para x: $y^{1/4} = x$

Función Inversa $f^{-1}(x) = x^{1/4}$.



Función $y = x^4$ "restringida"

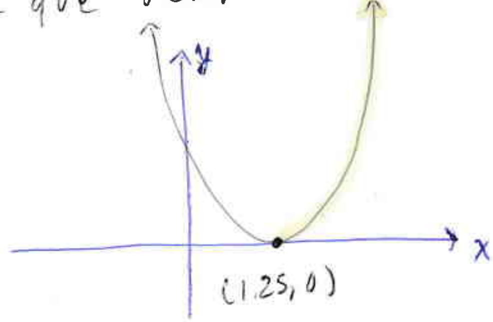


La inversa es $y = x^{1/4}$

Ejercicio 4: Resuelva cada ecuación utilizando una función inversa.

a. $(4x-5)^2 = 49$ si $x \geq 1.25$

Note que $f(x) = (4x-5)^2$ no es función uno a uno



Pero si se restringe su dominio a $[1.25, \infty)$ si lo es.

Encuentre la inversa de $f(x)$

$$y = (4x-5)^2$$

$$y^{1/2} = 4x - 5$$

$$(y^{1/2}+5) = 4x \Rightarrow x = \underbrace{\frac{1}{4}(y^{1/2}+5)}_{f^{-1}(y)}$$

Si $f(x) = 49$, la solución de esta ecuación es

$$x = f^{-1}(49) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{49} + 5\right) = \frac{1}{4}(7+5) = 3.$$

Ejercicio 5: Encuentre las inversas de las sigs. funciones.

a) $f(x) = 2x^3 + 2$. Note que f es uno a uno.

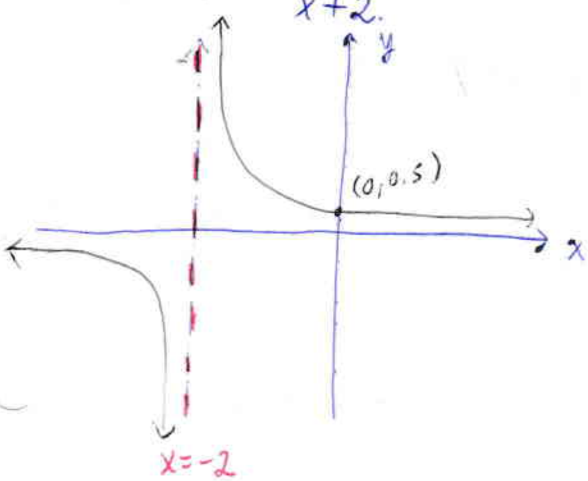
Resuelva para x: $y = 2x^3 + 2$

$$y - 2 = 2x^3$$

$$0.5y - 1 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{0.5y - 1}$$

La función inversa es $f^{-1}(x) = (0.5y - 1)^{1/3}$

b. $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$.



Esta función también es uno a uno en su dominio $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$.

Resuelva para x: $y = \dfrac{1}{x+2}$

$$x + 2 = \frac{1}{y}$$

$$x = -2 + \frac{1}{y}.$$

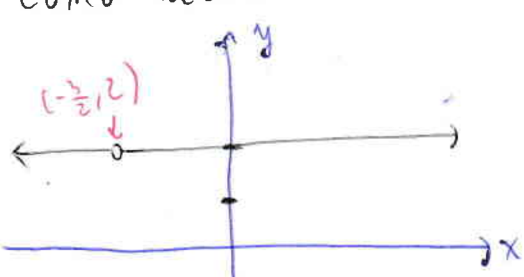
La inversa de la función es $g^{-1}(x) = \dfrac{1}{y} - 2$

Note que Dominio de g: $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ → Dominio de g^{-1} $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Rango de g: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ → Rango de g^{-1} $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$

c) $h(x) = \dfrac{4x+6}{2x+3} = \dfrac{2(2x+3)}{2x+3} = 2$ si $x \neq -\dfrac{3}{2}$.

Como $h(x)$ no es función uno a uno no tiene inversa



Gráfica de h(x)