3.8 Modelos de Crecimiento Exponencial

En muchos fenómenos naturales y sociales, las cantidades crecen o decrecen en una cantidad proporcional a su tamaño

Ley de Crecimiento Natural: $\dfrac{dy}{dt} = Ky, \quad y(0) = y_0$ $\quad y_0$ cantidad inicial

K es la tasa relativa de crecimiento la cual se mide en 1/uds. tiempo.

Crecimiento: $K > 0$ Sin crecimiento: $K = 0$

Decrecimiento: $K < 0$

Modelo de Crecimiento Exponencial $y(t) = y_0 e^{Kt}$

satisface $\dfrac{dy}{dt} = K \underbrace{y_0 e^{Kt}}_{y} = Ky$ esta ley.

a. Crecimiento Poblacional

P número de habitantes en una ciudad, país o población de un organismo

Si la tasa relativa de crecimiento es constante, el modelo que describe la evolución de la población es

Crecimiento Poblacional Exponencial: $P(t) = P_0 e^{Kt}$.

K usualmente se exprese como un porcentaje.

Por ejemplo, $K = 0.02 \dfrac{1}{\text{año}}$ significa que la población crece a una tasa anual del 2%.

Para encontrar K es necesario realizar mediciones de la población en dos tiempos diferentes por medio de censos o conteos.

Ejercicio 1: Un cultivo de bacterias crece a una tasa relativa constante. Al principio, hay 100 millones de bacterias y 10 horas después hay 150 millones de bacterias.

a. Determine la tasa de crecimiento relativa. Indique las unidades de K.

Modelo Exponencial: $P(t) = 100e^{Kt}$

Use $P(10)=150$: $P(10) = 100e^{10K} = 150 \Rightarrow e^{10K} = 1.5$

Tome ln's: $10K = \ln(1.5) \Rightarrow K = \frac{1}{10}\ln(1.5)$ 1/hora

b. Escriba la ecuación que describe la evolución de la población.

$$P(t) = 100e^{\frac{t}{10}\ln(1.5)} = 100e^{\ln(1.5)^{t/10}} = 100(1.5)^{t/10}$$

c. Encuentre la población después de 20 horas.

$$P(20) = 100(1.5)^2 = 100(2.25) = 225$$

d. ¿En cuánto tiempo la población de bacterias se cuadruplica?

Resuelva: $100e^{Kt} = 400$

$e^{Kt} = 4$

Tome ln's $Kt = \ln 4$

Resuelva para t: $t = \frac{\ln 4}{K} = 10 \cdot \frac{\ln(4)}{\ln(1.5)} \approx 34.19$ horas.

b. Decaimiento Radioactivo

Sea m_0 cantidad inicial de una sustancia radioactiva.

m cantidad que queda de la sustancia en un tiempo t.

Modelo de Decaimiento Radioactivo: $m(t) = m_0 e^{kt}$

k es la tasa relativa de decaimiento y es negativa.

Cuando $t \to \infty$, toda la sustancia decae en su totalidad $m(t) \to 0$

$$m_0 \lim_{t \to \infty} \underbrace{e^{kt}}_{e^{-\infty} \to 0} = 0$$

Tiempo de Vida Media: el tiempo que se requiere para que la mitad de cualquier sustancia se desintegre, es decir,

$$m(T_{1/2}) = \frac{m_0}{2}.$$

Ejercicio 3: La vida media del níquel-63 es de 100 años

a. Encuentre la tasa relativa de decaimiento.

Modelo decaimiento: $m(t) = m_0 e^{kt}$

Use $m(100) = 0.5 m_0$: $m(100) = m_0 e^{100k} = 0.5 m_0$

$$e^{100k} = \frac{1}{2}.$$

Tome ln's: $100k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$

Resuelva para K: $K = \frac{-\ln 2}{100} \; \frac{1}{\text{año}}$ ó -0.7% por año

b. Encuentre la masa de la sustancia en t si la cantidad inicial es de 600 mg.

$$m(t) = 600 e^{-t/100 \ln 2} = 600 \underbrace{e^{\ln 2^{-t/100}}}_{\text{inversas:}} = 600 \cdot 2^{-t/100} \text{ mg.}$$

vida media.

En General Ec. Alternativa Decaimiento Radioactivo $m(t) = m_0 2^{-t/T_{1/2}}$

$T_{1/2}$ vida media.

c. Encuentre la masa restante del níquel-63 después de 300 años.

Evalúe $m(300)$: $m(300) = 600 \cdot 2^{-300/100} = 600 \cdot 2^{-3} = \frac{600}{8} = 75$ mg.

d. ¿Cuándo la masa de la sustancia se reduce a 15 mg?

Resuelva $m(t) = 15$ $\quad 600 \cdot 2^{-t/100} = 15$

$$2^{-t/100} = \frac{15}{600} = \frac{1}{40}$$

Tome $\log_2$ [ ]: $\quad -\frac{t}{100} = \log_2 \frac{1}{40} = -\log_2 40$

Resuelva para t: $\quad t = 100 \log_2 40 \approx 532$ años.

Fechamiento de Antigüedades o Fósiles.

Las técnicas más comunes utilizan el carbono-14 (cuya vida media es de alrededor de 5,730 años) o Argono-39 (vida media de alrededor de 269 años).

Ejercicio 4: Determine que tan antiguo es un fósil si por medio de una medición de radiocarbono se encontró que sólo contiene 1/16 de la cantidad original de carbono-14.

Modelo Exponencial: $\quad m(t) = m_0 e^{kt}$.

Use $m(5730)$ para encontrar K: $\quad m(5{,}730) = \cancel{m_0} e^{k5730} = 0.5 \cancel{m_0}$

Tome ln's: $\quad k\,5{,}730 = \ln(0.5) \Rightarrow k = \frac{\ln(0.5)}{5{,}730} = -\frac{\ln 2}{5{,}730}$

Resuelva para t: $\quad m(t) = \cancel{m_0} e^{\underline{k}t} = \frac{1}{16} \cancel{m_0}$ $\quad$ K es conocido.

Tome ln's: $\quad kt = \ln\left(\frac{1}{16}\right) = \ln(2^{-4}) = -4\ln 2$

Resuelva para t: $\quad t = \frac{-4\cancel{\ln 2} * 5730}{-\cancel{\ln 2}} = 4 * 5{,}730 = 22{,}920$ años

R/ La antigüedad del fósil es de alrededor de 22,920 años.

C. Interés Compuesto Continuamente

Una cantidad P_0 se invierte a una tasa de interés r compuesta anualmente.

Valor de la inversión

Valor de la inversión	$t = 1$ años	$P(1) = P_0(1+r)$
	$t = 2$	$P(2) = P_0(1+r)(1+r) = P_0(1+r)^2$
	$t = 3$	$P(3) = P_0(1+r)^3$
	t años	$P(t) = P_0(1+r)^t$

La tasa de interés r usualmente se expresa en porcentajes, $r = 6\% = 0.06$.

El interés se puede componer con más frecuencia durante un año. Si la tasa se componen n veces al año se tiene una tasa periódica de $\frac{r}{n}$ y hay nt períodos.

Valor de la inversión para n períodos, tasa anual r y un plazo de t años:
$$P = P_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Por simplicidad, determinemos el valor de $P_0 = 1$, invertida a una tasa de interés anual del 100% ($r = 1$) en un plazo de un año y para n períodos.

$$P_n(1) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Composición Anual:	$n = 1$	$P_1(1) = (1+1/1)^1 = 2$
Semestral:	$n = 2$	$P_2(1) = (1+1/2)^2 = 2.25$
Trimestral:	$n = 4$	$P_4(1) = (1+1/4)^4 = 2.44140625$
Mensual:	$n = 12$	$P_{12}(1) = (1+1/12)^{12} \approx 2.61303529$
Diaria:	$n = 365$	$P_{365}(1) = (1+1/365)^{365} \approx 2.71819961$
Hora:	$n = 365 * 24$	$P_{hora} = (1+1/8760)^{8760} \approx 2.71819961$
Segundo:	$n \approx 3\times 10^8$	$P_{segundo} = \left(1+\frac{1}{3\times 10^8}\right)^{3\times 10^8} \approx 2.71829961$

Si la tasa de interés se compone de manera continua ($n \to \infty$) y tiende al número e.

Definición Número e
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Modelo de Interés Compuesto de manera continua.

Para un monto inicial P_0, tasa de interés nominal anual r compuesta continuamente, el valor de la inversión a los t años es:

$$P(t) = P_0 \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = P_0 e^{rt}$$

Ejercicio 5: Se invierten \$1,000 a una tasa anual del 5% compuesta continuamente.

a) Determine el valor de la inversión después de 20 años.

Modelo exponencial: $P_0 = 1{,}000$, $r = 0.05$ $\quad P = 1000\, e^{0.05t}$

Monto a los 20 años: $\quad P = 1000\, e^{0.05(20)} = 1000\, e \approx \$2{,}718.30$

Interés Compuesto: Diferencia Inversión y la Inversión Inicial $P - P_0$.

$$I.C. = 1000e - 1000 = 1000(e-1) \approx \$1{,}718.30$$

b ¿En cuánto tiempo se duplica la inversión?

Resuelva $\quad P = 1000\, e^{0.05t} = 2{,}000 \Rightarrow e^{0.05t} = 2$

Tome ln's: $\quad \underset{*20}{0.05t} = \underset{*20}{\ln 2} \Rightarrow t = 20 \underbrace{\ln 2}_{0.7} \approx 14$ años

c. Encuentre la tasa de interés anual necesaria para que la inversión se duplique en 5 años.

Encuentre una nueva r. $\quad P = 1000\, e^{rt}$ use $t = 5$

Resuelva $\quad 1000\, e^{5r} = 2{,}000 \Rightarrow e^{5r} = 2$

Tome ln's: $\quad 5r = \ln 2 \Rightarrow r = 0.2 \underbrace{\ln 2}_{0.7} \approx 0.14$ ó 14%

Se necesita una tasa de interés anual del 14%.