2.8 La derivada y sus interpretaciones

La derivada proporciona la pendiente de la recta tangente a $y=f(x)$ en $x=a$.

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Velocidades

Un objeto o partícula se mueve a lo largo de una línea recta.

Desplazamiento del objeto: $s=f(t)$ en el tiempo t.

Velocidad Promedio: cambio en la posición $\Delta s = f(a+h) - f(a)$ sobre el cambio en t $\Delta t = a+h-a = h$.

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Velocidad Instantánea: límite de la velocidad promedio cuando $h \to 0$.

$$\bar{v} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

La derivada del desplazamiento: $v = s'(t)$

Ejercicio 1: La función de posición de una partícula es $s(t) = t^2 - 4t + 16$ m a los t segundos.

a. Calcule la velocidad promedio de la partícula desde $t=1$ hasta $t=4$ s.

$$\bar{v} = \frac{s(4)-s(1)}{4-1} = \frac{\overbrace{(16-16+16)}^{16} - \overbrace{(1-4+16)}^{13}}{3} = \frac{16-13}{3} = 1 \text{ m/s}$$

b. Encuentre la velocidad instantánea a los 2 y a los 4 segundos

Velocidad $v(t) = s'(t) = 2t - 4$

$v(2) = 4 - 4 = 0$ m/s

$v(4) = 8 - 4 = 4$ m/s.

Razones de Cambio:

La tasa promedio de cambio es el cambio en y, Δy, sobre el cambio en x, Δx. Dados dos puntos $(x, f(x))$ y $(a, f(a))$.

Tasa Promedio de cambio entre x y a: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

A medida que x se acerca a a, la diferencia en x tiende a cero $\Delta x \to 0$, en el límite se obtiene la tasa instántanea de cambio.

Tasa Instantánea de Cambio. $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

La derivada $y'(x)$ es la razón instánea de cambio de y respecto a x.

Ejercicio 2: La velocidad del flujo sanguíneo a través de una capilar es:

$$V(r) = 5(16 - r^2) \quad 0 \leq r \leq 4. \quad \text{mL/mm.}$$

Encuentre la razón instantánea de cambio de V respecto a r cuando $r = 3$mm.

Derive y evalúe en $r = 3$mm.

$V'(r) = -10r \qquad V'(3) = -30 \quad \text{mL/mm}^2$

Ejercicio b: El costo (en Q) de producir x toneladas de cierto artículo es:

$$C(x) = 2{,}000 + 5x + x^3$$

a. Encuentre la razón de cambio promedio del costo respecto a x cuando el nivel de producción cambia de 2 a 4 toneladas.

$C(4) = 2{,}000 + 20 + 64 = 2{,}084$

$C(2) = 2{,}000 + 10 + 8 = 2{,}018$

Razón de Cambio Promedio $\dfrac{\Delta C}{\Delta x} = \dfrac{C(4) - C(2)}{4 - 2} = \dfrac{66}{2} = Q\ 33/\text{ton}$

b. Halle la razón de cambio instantáneo del costo en $x=2$.

Derive y evalúe en $x=2$.

$c'(x) = 5 + 3x^2$ $\qquad$ $c'(2) = 5 + 12 = 17$ ¢/ton.

Aplicaciones de la razón de cambio a la economía.

Se q la cantidad o peso de unidades producidas.

Las funciones de costo, ingreso, demanda y utilidad dependen del nivel de producción q y del precio p.

Costo $\quad C(q)$

Ingreso $\quad I(q) = pq$ $\qquad$ Utilidad $\quad U(q) = I - C$.

El costo marginal es el incremento en el costo al producir 1 ud. adicional.

Se encuentra al derivar la función de Costo C respecto a la producción q.

Costo Marginal: $CM = C'(q)$

Ingreso Marginal: $IM = I'(q)$

Utilidad Marginal: $UM = U'(q) = IM - CM$

Ejercicio 4: La función de costo de un fabricante de acero es:

$$C = q^2 + 100q + 1{,}000{,}000.$$

q está en ton, C en \$

a. Encuentre la función de costo marginal. $\quad CM = C'(q) = 2q + 100$

b. Encuentre el costo marginal cuando $q = 50$.

$C'(50) = 100 + 100 = \$200/\text{ton}$. $\quad$ Producir la tonelada 51 aumenta el costo en \$ 200.

c. Si el precio de venta del acero es de \$800/tonelada. Recomienda aumentar la producción a 51 ton

Como el ingreso adicional de vender (\$ 800) es mayor que el costo adicional (\$200) de producirla, se recomienda aumentar la producción a 51 ton

La utilidad aumentaría en \$600.

2.8 Segundas Derivadas

La derivada de una función $y = f(x)$ es en sí misma una función $f'(x)$.

Si se deriva $f'(x)$ se obtiene la ~~se obtiene~~ la segunda derivada de f con respecto a x, $f''(x)$. "f doble prima de x"

La derivada de la segunda Derivada es la tercera derivada.

Notaciones para las Derivadas

Primera $f'(x) = y'(x) = \frac{dy}{dx}$

Segunda $f''(x) = y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$

Tercera $f'''(x) = y'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$

Cuarta $f^{(4)}(x) = y^{(4)}(x) = \frac{d^4y}{dx^4}$

Ejercicio 1: Encuentre todas las derivadas de orden superior para las siguientes funciones.

a. $f(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

$f'(x) = 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

$f''(x) = 20x^3 - 12x^2 - 6x + 2$

$f'''(x) = 60x^2 - 24x - 6$

$f^{(4)}(x) = 120x - 24$

$f^{(5)}(x) = 120$

$f^{(6)}(x) = 0$

A partir de la sexta derivada.

$f^{(k)}(x) = 0$ si $k \geq 6$.

b. $g(x) = 4x^3 + 24x^2 - 10x + 1{,}000$

$g'(x) = 12x^2 + 48x - 10$

$g''(x) = 24x + 48$

$g'''(x) = 24$

$g^{(4)}(x) = 0$

A partir de la cuarta derivada.

$g^{(k)} = 0$ si $k \geq 4$.

Observación: Para todo polinomio de grado n, la n-ésima y ~~subs~~ subsecuentes derivadas son iguales a la función cero.

Interpretación de la Segunda Derivada

En un problema de desplazamiento de un objeto en 1-D, $s(t)$.

Velocidad: $v(t) = s'(t)$ — Derivada del desplazamiento

Aceleración: $a(t) = v'(t) = s''(t)$ — 2da Derivada del desplazamiento.

Ejercicio 2: Una pelota se lanza al aire, su altura a los t segundos es $h(t) = 16t - t^2$; h está en pies.

a. Encuentre la velocidad y la aceleración de la pelota en cualquier momento.

Velocidad: $h'(t) = 16 - 2t.$ pie/s

Aceleración: $a(t) = h''(t) = -2.$ pie/s^2.

b. Encuentre cuando la velocidad es igual a cero.

Resuelva $v(t) = 16 - 2t = 0 \Rightarrow t = 8$ s.

c. Determine la altura de la pelota cuando la velocidad es cero.

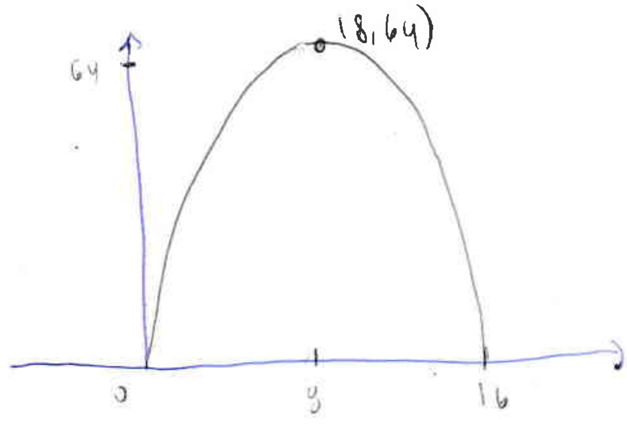
$h(8) = 16 \cdot 8 - 64 = 128 - 64 = 64$ pies. (Es la altura máxima).

d. En qué momentos la pelota hace contacto con el suelo. Encuentre la velocidad en estos momentos. A los 0 y 16 s.

Resuelva $h(t) = t(16 - t) = 0$ $t = 0, t = 16$.

velocidades. $v(0) = 16 - 0 = 16$ p/s. $v(16) = 16 - 32 = -16$ pies/s

e y f. Grafique la altura de la pelota. Encuentre su dominio y rango físico



Físicamente

D: $[0, 16]$ comienza en el suelo termina en el suelo

R: $[0, 64]$

suelo a altura máxima