1.3.2 Combinación de funciones.

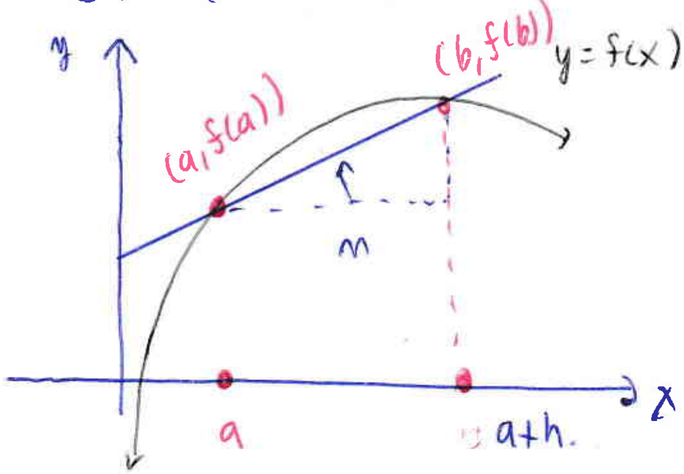
Suma $f + g$

Producto fg

Cociente $\frac{f}{g}$

Composición $f \circ g = f(g(x))$

Diferencia de Cocientes



Pendiente entre los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pendiente entre $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$

$$m = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Diferencia de cocientes.

Pendiente entre dos puntos.

Razón de cambia relativa $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Ejercicio 1: Encuentre la diferencia de cocientes para las siguientes funciones.

a) $f(x) = 4 + 2x - x^2$, $\frac{f(3+h) - f(3)}{h}$.

$f(3+h) = 4 + 2(3+h) - (3+h)^2 = 4 + 6 + 2h - 9 - 6h - h^2$

$(3+h)^2 = 9 + 6h + h^2$ $\quad = +1 - 4h - h^2$.

$f(3) = 4 + 6 - 9 = 1$

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{\cancel{1}-4h-h^2-\cancel{1}}{h} = \frac{-h(4+h)}{h} = -(4+h)$$

$$= -4-h.$$

$h \neq 0$ (dos puntos)

Si $h=0$ $\quad \underline{m=-4}$

pendiente de la recta tangente.

$$f(x) = 4+2x-x^2$$

$$f'(x) = 2-2x \qquad f'(3) = 2-6 = -4$$

b) $g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ $\qquad \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[g(x+h)-g(x)\right]$

$$g(x+h) = \frac{1}{x+h} \qquad \frac{a}{b} = \frac{1}{b}(a) \qquad 3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{h}\left[g(x+h)-g(x)\right] = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{h}\left[\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{h}}\left[\frac{-\cancel{h}^{1}}{(x+h)x}\right] = \frac{-1}{x(x+h)}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d} = \frac{ad-cb}{bd}.$$

$$D.C. = \frac{-1}{x(x+h)} \qquad h=0 \qquad D.C = -\frac{1}{x^2}.$$

$$g(x) = x^{-1}$$

$$g'(x) = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Triple Composición de Funciones

$$(f\circ g\circ h)(x) = f(g[h(x)]) \qquad f'(g(h))\,g'(h)\,h'$$

Ej: $f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad g(x) = \frac{x}{x+1}$ $\qquad h(x) = x^2+x$

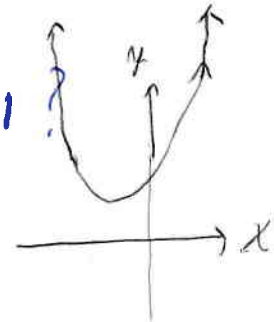
a) $(f\circ g\circ h)(x) = f\left(g[x^2+x]\right) = f\left(\frac{x^2+x}{x^2+x+1}\right)$ $\qquad = \frac{0}{1}$

$$= \sqrt{\frac{x^2+x}{x^2+x+1}}$$

$$(g\circ f\circ h)(x) = g\left(f(x^2+x)\right) = g\left(\sqrt{x^2+x}\right) = \frac{\sqrt{x^2+x}}{1+\sqrt{x^2+x}}$$

¿Es $\left(\sqrt{x^2+x}\right)+1 \neq \sqrt{x^2+x+1}$?

¿Tiene interceptos en x la parábola x^2+x+1 ?



$x^2+x+1 = \emptyset$ $f(x)$ $\qquad ax^2+bx+c=0$

Ec. Cuadrática. $\qquad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

i) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ no hay solución $\sqrt{-3}$ y no tiene interceptos en-x

ii) $x^2 + x + \frac{1}{4} = -1 + \frac{1}{4}$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \Rightarrow x + \frac{1}{2} = \cancel{\sqrt{-\frac{3}{4}}}$ no existe no hay solución

vértice está en $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ $\qquad f(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

Ejercicio 3: Exprese las sigs. funciones como una composición de funciones. DESÁRMELAS

a) $p(x) = \sqrt[3]{x^3-8x}$

Externa. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\qquad f\circ g = p$.

Interna: $g(x) = x^3 - 8x$

$h(x) = 10$

h(ü X) = 10

b) $K(t) = \sqrt[4]{\left(\frac{4+t}{4-t}\right)^4 + \left(\frac{4+t}{4-t}\right)^2 + 8}$

Externa. $f(x) = \sqrt[4]{x}$

Intermedia. $g(x) = x^4 + x^2 + 8$.

Interna $h(t) = \dfrac{4+t}{4-t}$.

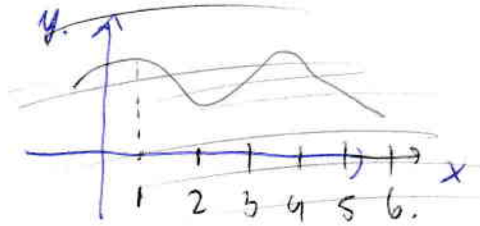
$f\circ g\circ h = K$.

externa → interna

$f\circ g\circ h$

Ejercicio 5: Pág 31. Evalúe las sigs. funciones

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3



a. $f(g(1)) = \overset{\text{3ra fila}}{f(6)} = 5$

b. $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(4) = 1$

c. $g(f(1)) = g(3) = 2$

d. $g(g(3)) = g(2) = 3$ ✓ $g(g(g(3))) = g(g(2)) = g(3) = 2$

e. $(f \circ g)(6) = f(g(6)) = f(3) = 4$

✓ f. $(g \circ f)(6) = g(f(6)) = g(5) = 2.$

orden importa

g. Dominio y Rango de f y g.

~~f: ID $[1,6]$ $f(2,5)$~~

f: ID $= \{1,2,3,4,5,6\}$

$R = \{1,2,3,4,5\}$

g: ID $= \{1,2,3,4,5,6\}$

$R = \{1,2,3,6\}$.

Dominio y Rango de $f \circ g$.

$f \circ g(1)$

$f \circ g(2)$

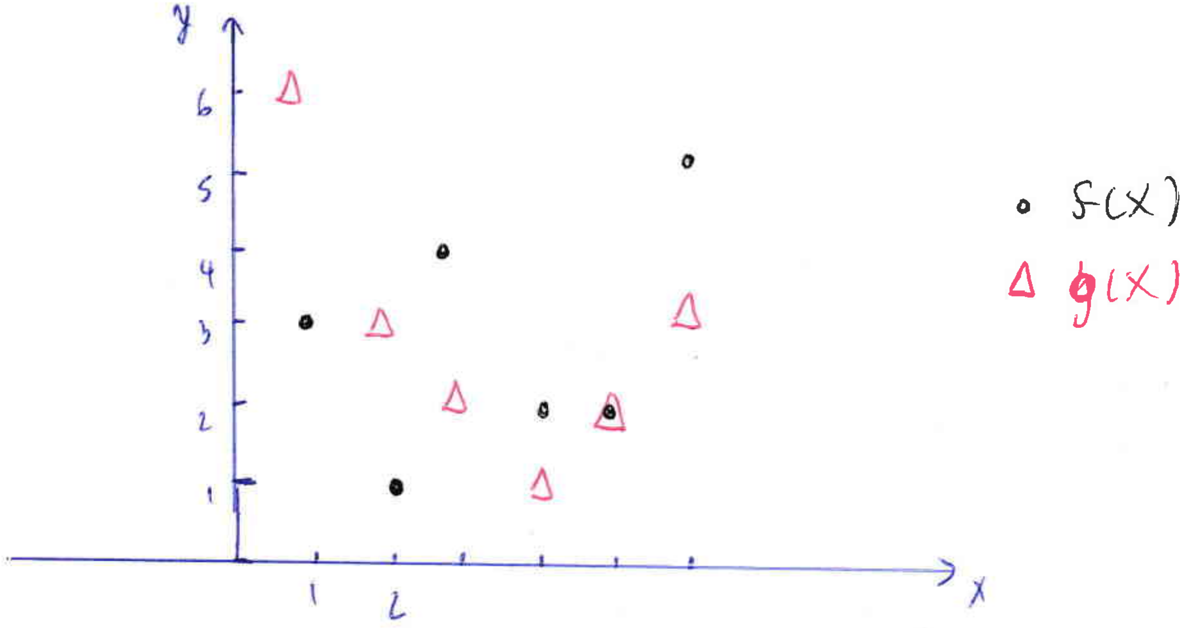
$f \circ g(3)$

$f \circ g(4)$

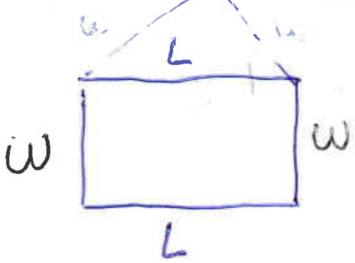
$f \circ g(5)$

$f \circ g(6)$

h. Gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.



Problema de Área de un Rectángulo.



Área Rectángulo $A = wL$ $\quad A(L)$

Largo o Perímetro del rectángulo 20

$$2w + 2L = 20$$

Resuelva para w: $2w = 20 - 2L$ $\quad w = 10 - L$.

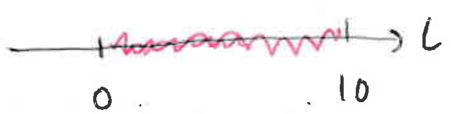
Sustituya en A: $A(L) = (10 - L)L$, $[0, 10]$.

"Conceptual" Matemáticamente ID : $\mathbb{R}$.

Dominio físico: $A > 0$ $\quad (10 - L)L > 0$ $\quad L > 0$.

$10 - L > 0$

$10 > L$ ó $L < 10$.



Dominio "quisquilloso" WA $(L > w)$

$(0, 10) \rightarrow (5, 10)$

$L = 5.001$ $\quad w = 4.999$

$A(L) = (10 - L)L$, $L > w$

$ID = (5, 10)$.