3.5 Derivación Implícita Pág 112

Forma Explícita de una función: $y = f(x)$

La variable dependiente y está expresada en términos de la variable independiente.

Ejemplos: $y = 3x^5 + 5x^3$, $y = \sqrt{4-x^2} + e^{x^2} + \ln(x^3+1)$

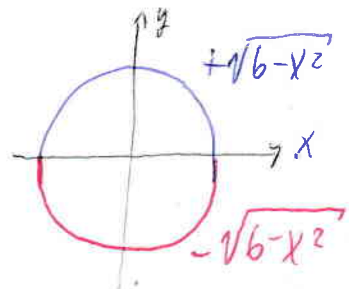
Forma implícita: $F(x,y) = \text{cte}$ ó $F(x,y) = G(x,y)$

La variable dependiente y no está sólo en términos de la variable independiente

Ejemplos: $x^2 + y^2 = 6$, $e^x + e^y = \ln(xy)$

En algunos casos es posible reescribir la forma implícita de una función $f(x,y) = 0$ como una forma explícita $y = f(x)$.

Ejercicio 1: Encuentre la pendiente de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 6$ en el punto $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$.



Encuentre una forma explícita para $x^2 + y^2 = 6$.

$y = \pm\sqrt{6-x^2}$ Considere la parte superior

$y = +\sqrt{6-x^2}$ $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ está en la parte superior

Derive: $y'(x) = -x(6-x^2)^{-1/2}$

Pendiente: $y'(\sqrt{3}) = \dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6-3}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -1$ $m_{tan} = -1$

Observación: La dificultad de derivar una forma implícita es que no siempre es posible resolver para y como en la ec. $e^x + e^y = \ln(xy)$

La idea de derivación implícita es encontrar $y'(x) = dy/dx$ sin necesidad de contar con una forma explícita

Procedimiento Derivación Implícita.

Encuentre la derivada del ejercicio anterior $x^2 + y^2(x) = 6$

Trate a y como una función de x y diferencie ambos lados de la ec. respecto a x.

Diferencie $\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2(x)\right) = \frac{d}{dx}(6)$

Regla de la Cadena: $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

Despeje dy/dx $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$ ó $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{6-x^2}}$ misma respuesta que derivando explícitamente.

Pasos de la Derivación Implícita.

1. DERIVE ambos lados de la ec. respecto a x
2. AGRUPE los términos que tienen y' ó $\frac{dy}{dx}$ en un lado de la ecuación y los demás términos en el otro lado.
3. Resuelva para $\frac{dy}{dx}$ ó $y'(x)$ tomando en cuenta su dominio.

Ejercicio 2: Considere la ec. $\ln y - x + y^2 + x^2 = 1$

a. Encuentre la derivada de y respecto a x

Derive $\frac{y'}{y} - 1 + 2yy' + 2x = 1$

Agrupe $\left(\underbrace{\frac{1}{y} + 2y}_{(1+2y^2)/y}\right) y' = 2 - 2x$ Resuelva $y' = \frac{y(2-2x)}{1+2y^2}$

b. Ecuación de la Tangente a la ec. en el punto (1, +1).

Pendiente: $y'(1) = \frac{1(2(1)-2)}{(1+2)^2} = 0$ Coordenada y: $y(1)$

$y'(1) = 0$

Ec. Tangente $y = y(1) + \cancel{y'(1)}^{\,0}(x-1)$

$y = 1$

Ejercicio 3: Encuentre la pendiente de la curva $(x^2+y^2)^2 = 4e^{xy}$ en $(0,2)$.

Derive respecto a x, recuerde utilizar la regla del producto y de la cadena.

$$2(x^2+y^2)(2x+2yy') = 4e^{xy}(y+xy')$$

La pendiente de la curva es $y'(1)$ podemos sustituir $x=0$, $y=2$ y luego resolver para y'

$$8(4y') = 4\cdot 1(2+0) \Rightarrow 32y' = 8 \Rightarrow y'(1) = \frac{1}{4}$$

Derivación Implícita de Orden Superior

1. Encuentre dy/dx utilizando derivación implícita.
2. Encuentre la segunda derivada.
3. Sustituya cualquier término $y'(y)$ o dy/dx por las variables x, y.
4. De ser posible simplifique aún más, expresando y'' sólo en términos de x ó y.

Ejemplo: Considere la ecuación $x^3+y^3=16$

a. Encuentre la primera derivada.

Derive: $3x^2 + 3y^2y' = 0$

Resuelva: $y' = -\dfrac{x^2}{y^2}$

b. Encuentre la segunda derivada $y''(y)$. Simplifique su respuesta.

Regla del Cociente: $y'' = \dfrac{-2xy^2 + 2yy'x^2}{y^4}$

Sustituya y': $y'' = \dfrac{-2xy^2 - 2yx^2y^{-2}x^2}{y^4} = \dfrac{-2xy^2 - 2x^4y^{-1}}{y^4}$

Factor común: $y'' = \dfrac{-2xy^{-1}(y^3+x^3)}{y^4}$

Sustituya $x^3+y^3=16$: $y'' = \dfrac{-32x}{y^5}$

c. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en $x=2$.

Sustituya $x=2$ en la ec. y resuelva para y

$$8+y^3=16 \Rightarrow y=\sqrt[3]{8}=2.$$

Pendiente Recta Tangente: $y'=-\dfrac{(2)^2}{(2)^2}=-1$

Ecuación Recta Tangente: $y=2-1(x-2)$

Ejercicio 5: Encuentre la segunda derivada $y''(x)$ en las sigs. ecuaciones. Simplifique y exprese y'' sólo en términos de la variable y.

a. $x^2-y^2=16.$

Derive: $2x-2y\,y'=0$

Resuelva: $y'=\dfrac{2x}{2y}=\dfrac{x}{y}.$ ó $y'=xy^{-1}$

2nda Derivada: $y''=\dfrac{1\cdot y-xy'}{y^2}=\dfrac{y-x^2y^{-1}}{y^2}=\dfrac{y^{-1}\overbrace{(y^2-x^2)}^{16}}{y^2}=\dfrac{16}{y^3}$

b. $e^{y}=y^2e^x$

Derive: $e^y y'=2y\,y'e^x+y^2e^x$

Resuelva: $(e^y-2y)y'=y^2e^x \Rightarrow y'=\dfrac{\overbrace{y^2e^x}^{e^y}}{e^y-2y}=\dfrac{e^y}{e^y-2y}$

Segunda Derivada: $y''=\dfrac{e^y(e^y-2y)-(e^y-2)e^y}{(e^y-2y)^2}\,y'$

$$y''=\frac{-2ye^y+2e^y}{(e^y-2y)^2}\cdot\frac{e^y}{e^y-2y}$$

$$y''=\frac{+2e^{2y}(1-y)}{(e^y-2y)^3}$$