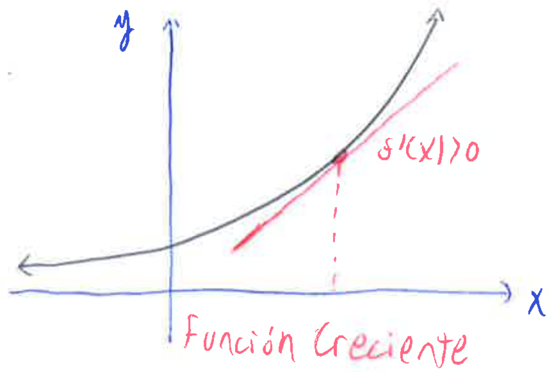
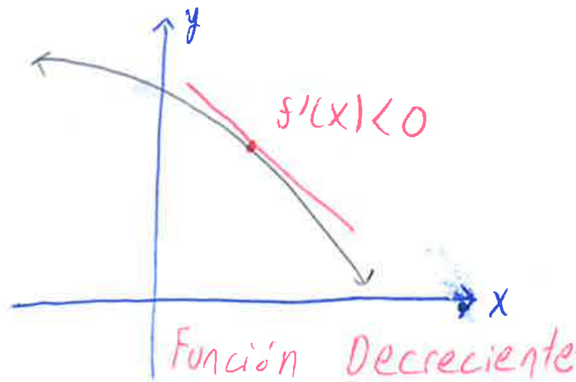
4.1 Extremos Relativos

a. Funciones Crecientes/Decrecientes

Una función es <u>creciente</u> si la gráfica de una función se eleva hacia la derecha, i.e, $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ (Mayor)





Una función es <u>decreciente</u> si la gráfica de la función cae hacia la derecha, i.e., $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ (menor)

Para una función diferenciable se puede analizar en qué intervalos f es creciente/decreciente.

Criterio Función Creciente/Decreciente.

- $f'(x) > 0$ en un intervalo $I \Rightarrow f(x)$ es creciente en I.
- $f'(x) < 0$ en $I \Rightarrow f(x)$ es decreciente en I.

Ejercicio 1: Encuentre donde $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ es creciente/dec.

Primero, encuentre donde $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$
$$= 3(x^2 - 2x - 3)$$
$$= 3(x-3)(x+1) = 0$$

$x = 3, -1$

Ahora, realice un diagrama de signos.

		-1		3	
$(x-3)$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+1)$	$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$

f es creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$

decreciente en $(-1, 3)$.

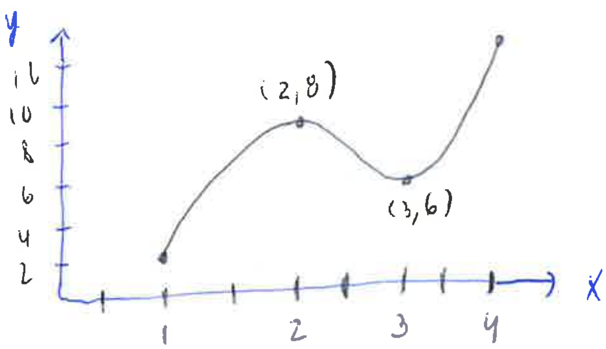
b. Extremos relativos/locales.

En la gráfica de $y = f(x)$ pueden haber puntos que son más altos que cualquier otro punto cercano a éste (se visualizan como $\cap$) y también pueden haber puntos que son más bajos que cualquier otro punto cercano (se visualizan como $\cup$).

Definición: Sea c un número en el dominio D de una función f, el valor $f(c)$ es un

- Valor máximo local/relativo si $f(c) \geq f(x)$ cuando x está cerca de c.
- valor mínimo local/relativo si $f(c) \leq f(x)$ cuando x está cerca de c.

Por ejemplo en la siguiente gráfica



$f(2) = 8$ es un MÁXIMO LOCAL

$f(3) = 6$ es un mínimo local

por inspección visual

Los extremos relativos también se pueden encontrar de manera algebraica al encontrar los números críticos de una función

Números críticos: un número crítico c en el dominio D de una función satisface $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

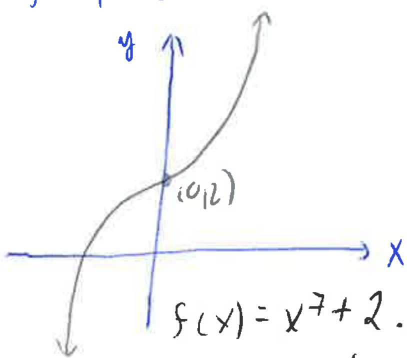
Teorema: Condiciones necesarias para un extremo local

Si f tiene un máximo o mínimo local en $x = c$, entonces c es un número crítico de f. ($f'(c) = 0$ ó no existe)

Observaciones.

- Que $x=c$ sea un número crítico de f no garantiza que haya un extremo local.
- Aunque $f'(c)$ no exista, puede existir un extremo local.

Ejemplos de funciones donde $f'(c)=0$ y no hay extremo local

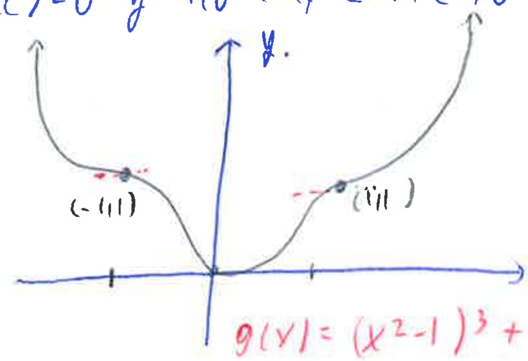


$f(x)=x^7+2.$

$f'(x)=7x^6=0$

$x=0$ es un número crítico

PERO No hay extremo local en $x=0$



$g(x)=(x^2-1)^3+1$

$g'(x)=6x(x^2-1)^2=0$

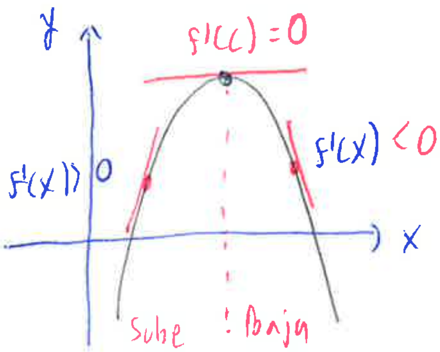
números críticos $x=0,\pm 1$

PERO no hay extremos locales en $x=\pm 1$.

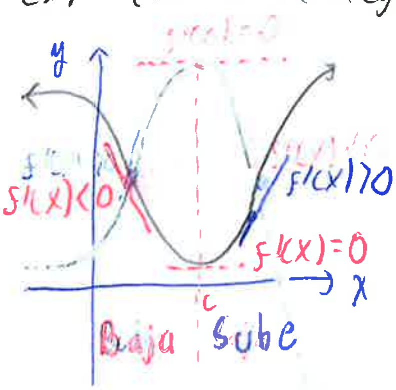
Condiciones Suficientes para extremos Relativos.

Sea c un número crítico de f, el valor funcional $f(c)$ es un.

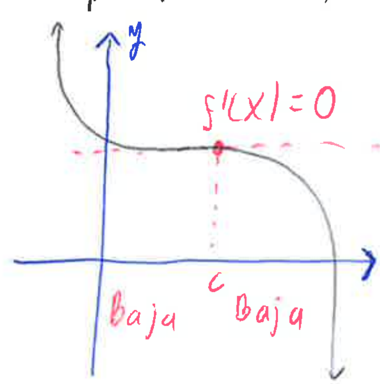
- MÁXIMO LOCAL: si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en c.
- mínimo local: si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c.



Máximo local.



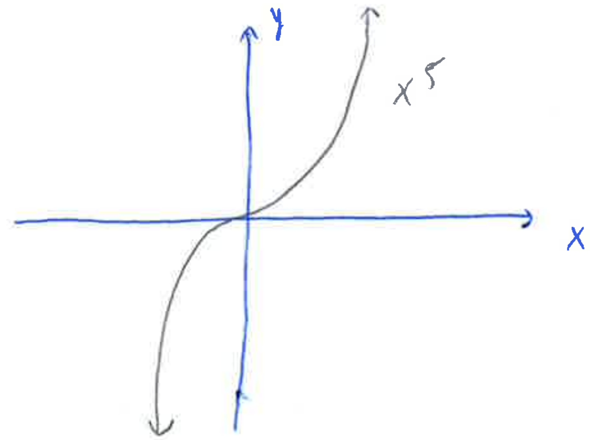
mínimo local



Ni máximo ni mínimo.

Ejercicio 1: Encuentre los extremos locales de las sigs. funciones

a. $f(x) = x^5$



Derivada: $f'(x) = 5x^4$

Números críticos $f'(x) = 5x^4 = 0$

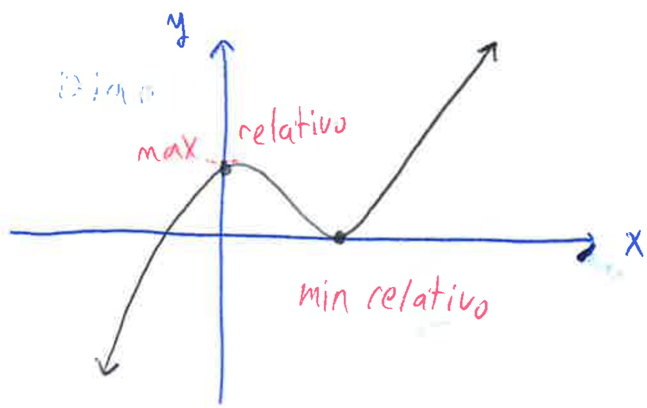
sólo $x = 0$.

Diagrama de signos

		0	
$5x^4$	+		+
$f'(x)$	creciente		creciente

No hay extremos relativos porque $f'(x)$ no cambia de signo.

b. $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$



Derivada: $g'(x) = x^2 - 4x + 3$

Números críticos $g'(x) = 0$

$(x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1, 3$

Diagrama de Signos.

		1		3	
$x-1$	$-$	0	+		+
$x-3$	$-$		$-$	0	+
$(x-1)(x-3)$	+		$-$		+

max min

Máximo relativo en $x=1$
$(1, 4/3)$

mínimo relativo en $x=3$
$(3, 0)$

c. $h(x) = (2x-4)^{1/2}$.

$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$

$h'(x) \neq 0$ pero
$h'(x)$ no existe en $x=2$.

El dominio de h es $[2, \infty)$

único número crítico $x = 2$.

	2	
$\sqrt{2x-4}$		+

$(2,0)$ es un mínimo relativo que ocurre en la esquina izquierda del dominio de h.

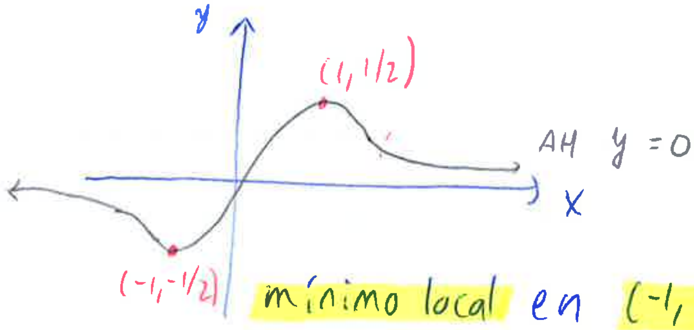
Ejercicio 2: Encuentre los extremos locales de $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Derivada: $g'(x) = \frac{x^2+1 - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0$

números críticos $g'(x)=0$ sólo cuando $1-x^2=0 \Rightarrow x = \pm 1$

Diagrama de Signos

		-1		1	
$(1-x^2)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$(x^2+1)^2$	$+$		$+$		$+$
$g'(x)$	$-$		$+$		$-$
		min		MAX	



mínimo local en $(-1, -1/2)$

Máximo local en $(1, 1/2)$

Ejercicio 3: Para las siguientes funciones.

a) Determine su dominio

b) Intervalos de crecimiento/Deccecimiento

c) Extremos Relativos

d) AVs y AHs

e) Bosquejo preliminar de la gráfica

a. $f(x) = 3x^3 - 36x$

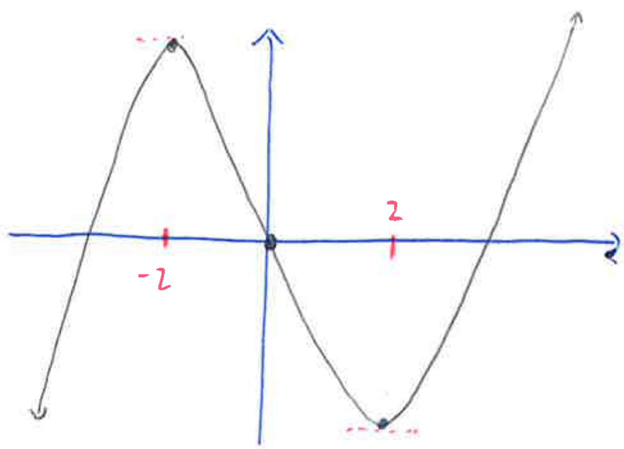
Dominio: $\mathbb{R}$

Asíntotas: NO HAY

Intervalos crecimiento/deccecimiento

$f'(x) = 9x^2 - 36 = 0$

$9(x^2-4) = 0 \Rightarrow x = \pm 2.$



D. Signos

		-2		2	
$9(x^2-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$

máximo relativo en $(-2, 58)$

mínimo relativo en $(2, -58)$

creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ Dec en $(-2, 2)$

b. $g(x) = \dfrac{2}{(x+1)^4}$

Dominio: $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$

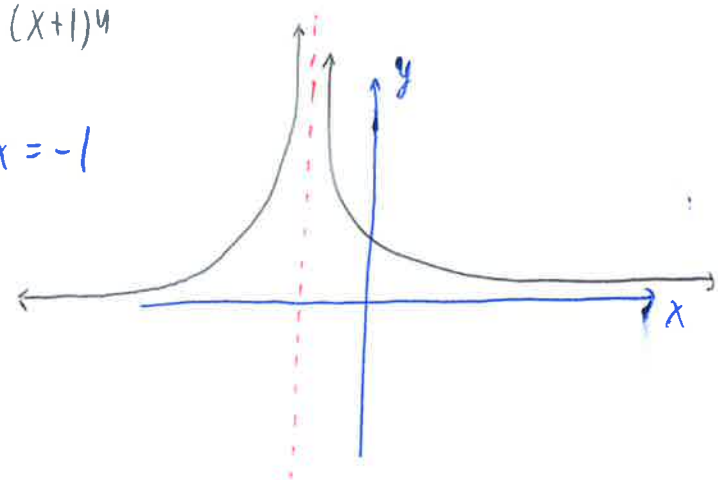
AHs: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{(x+1)^4} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{(x+1)^4} = 0$ $\quad \dfrac{2}{\infty} \to 0$ $\quad y = 0$ A.H.

AVs: $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{2}{\underbrace{(x+1)}_{0^+}{}^4} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{2}{(x+1)^4} = -\infty$ $\quad x = -1$ A.V.

$g'(x) = \dfrac{-8}{(x+1)^5}$ no existe en $x = -1$

D. Signos

		-1	
$-8(x+1)^{-5}$	+		−
$g'(x)$	+		−



No hay

No hay extremos relativos, creciente en $(-\infty,-1)$,
decreciente en $(-1,\infty)$

c. $k(x) = x^3 e^x$

Dominio: $\mathbb{R}$

AVs: Ninguna

AHs: $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 e^x = +\infty$ $\quad \infty\cdot\infty$ $\quad$ PERO

Aplique LH 3 veces

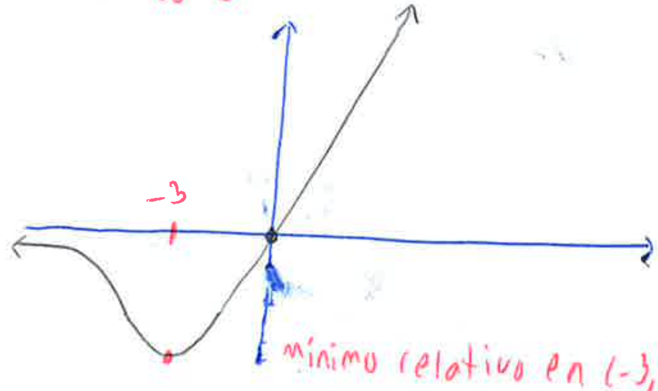
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{e^{-x}} = 0$ $\quad \infty\cdot 0$

$k'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x$:

$x^2 e^x (3+x) = 0$

Número crítico $x = -3$

		-3	
$3+x$	−	0	+
x^2	+		+
e^x	+		+
$k'(x)$	−		+



-3

mínimo relativo en $(-3,-27e^{-3})$

decreciente en $(-\infty,-3)$

creciente en $(-3,\infty)$