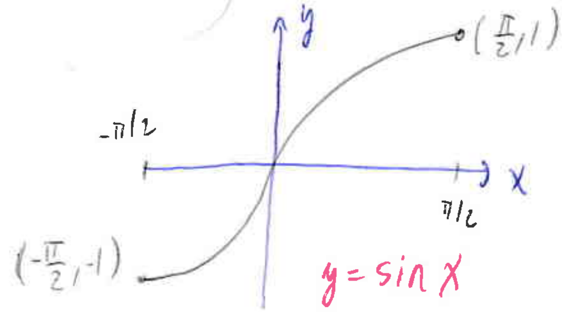
Funciones Trigonométricas Inversas

Seno Restringido y Seno Inverso

seno no es función uno a uno.

Lo es si su dominio se restringe a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



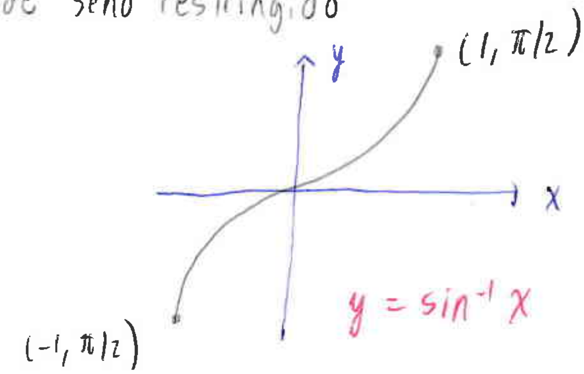
Seno Inverso, $y = \sin^{-1} x$ es la inversa de seno restringido

$y = \sin^{-1}(x) = \arcsin(x)$

Dominio: $[-1, 1]$

Rango: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

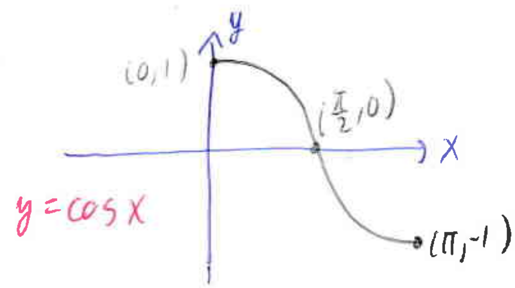
Interceptos $-x, y$: $(0,0)$



Función Coseno Restringido y coseno Inverso

Coseno no es función uno a uno.

Lo es si su dominio se restringe a $[0, \pi]$.



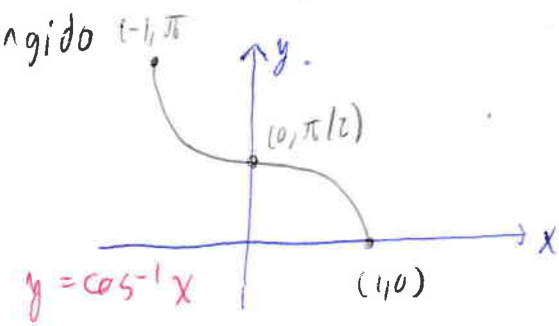
Coseno inverso es la inversa de coseno restringido

$y = \cos^{-1} x = \arccos x$

Dominio $[-1, 1]$

Rango $[0, \pi]$

Intersecto-x $(1,0)$ Intersecto-y $(0, \pi/2)$



Ecuaciones de Cancelación

$\sin^{-1}(\sin x) = x$ si $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ } Tome en cuenta la restricción de dominio

$\sin(\sin^{-1} x) = x$ si $-1 \leq x \leq 1$

$\cos^{-1}(\cos x) = x$ si $0 \leq x \leq \pi$

$\cos(\cos^{-1} x) = x$ si $-1 \leq x \leq 1$

$\tan^{-1}(\tan x) = x$ si $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$\tan(\tan^{-1} x) = x$ $x \in \mathbb{R}$

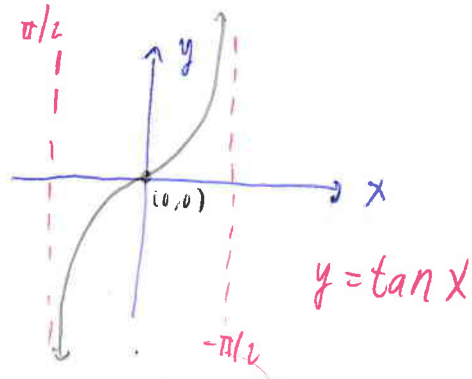
} también existen estas ecuaciones para tangente y tangente inverso.

Tangente Restringido y Tangente Inverso

No es función uno a uno,

Lo es si se restringe su dominio a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Además tiene AVs en $x = \pm \frac{\pi}{2}$.



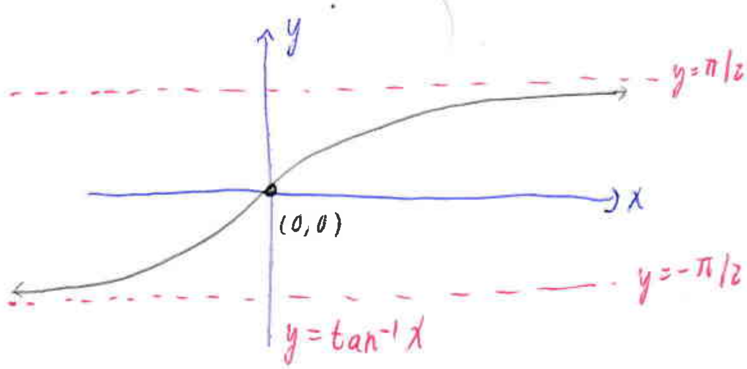
Tangente inverso $y = \tan^{-1} x$

Dominio: $\mathbb{R}$

Rango: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

AHs: $y = \pm \pi/2$.

Interceptos-x,y: sólo $(0,0)$



Ejercicio 1: Evalúe las sigs. expresiones

a) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ porque $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

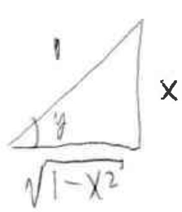
b) $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ porque $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

c.) $\cos(\cos^{-1}(0.5)) = 0.5$ ó $\cos(\cos^{-1}(0.5)) = \cos(\pi/3) = 0.5$

Ejercicio 2: Simplifique las sigs. expresiones utilice un triángulo apropiado.

a) $\cos(\sin^{-1} x) = \cos(y) = \sqrt{1-x^2}$

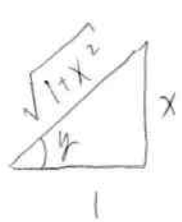
$x = \sin y$



El triángulo rectángulo tiene $C.O = x$, hipotenusa $= 1$, por lo que $C.A = \sqrt{1-x^2}$

b) $\cos(\tan^{-1} x) = \cos(y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$x = \tan y$



$C.O = x$, $C.A. = 1$ por lo que hipotenusa $= \sqrt{1+x^2}$

ó $y = \tan^{-1}(x)$

Derivadas de funciones Trigonométricas Inversas.

Las derivadas se encuentran por medio de derivación implícita, se resuelva para x utilizando trigonometría

Derivada de seno inverso

$$y = \sin^{-1} x$$

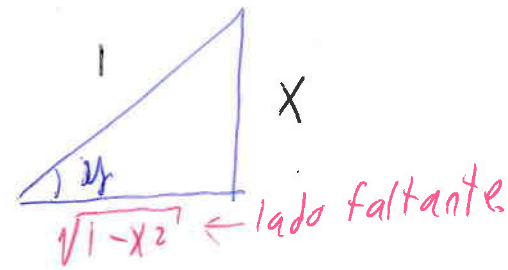
Aplique sin[ ]: $\sin y = x$

Derive resp. a x: $\cos y \dfrac{dy}{dx} = 1$

Resuelva para y': $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos y}$

Utilice el diagrama: $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

Trace el triángulo con ángulo $x = \sin y$.



Derivada de coseno inverso

$$y = \cos^{-1} x$$

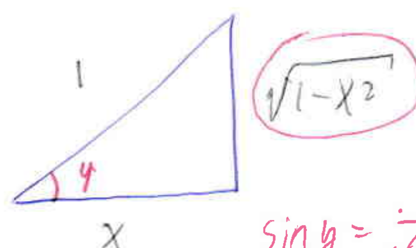
Aplique cos[ ]: $\cos y = x$

Derive respecto a x: $-\sin y \; y' = 1$

Resuelva para y': $y' = \dfrac{-1}{\sin y}$.

Utilice el diagrama: $\boxed{y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$

Trace el triángulo con $x = \cos y$



$\sin y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Derivada de Tangente Inverso $y = \tan^{-1} x$

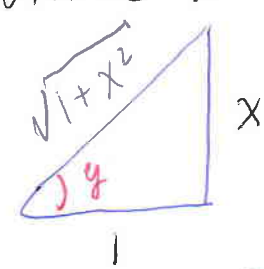
Aplique tan[ ]: $\tan y = x$

Derive: $\sec^2 y \; y' = 1$

Resuelva para y': $y' = \dfrac{1}{\sec^2 y} = \cos^2 y$

Utilice el diagrama: $\boxed{y' = \dfrac{1}{1+x^2}}$

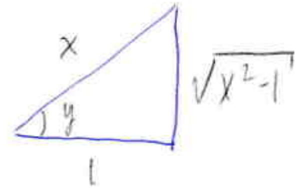
Utilice $x = \tan y = \dfrac{C.O}{C.A.}$



$\sec^2 y = \sqrt{1+x^2}/1$

Derivada de secante inverso $y = \sec^{-1} x$

$\sec y = \frac{x}{1} = \frac{H}{C.O.}$



$\sec y = x$
$\tan y = \sqrt{x^2-1}$

Aplique secante: $\sec y = x$

Derive: $\sec y \tan y \, y' = 1$

Resuelva para y': $y' = \frac{1}{\sec y \tan y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Derivadas de Funciones Trigonométricas Inversas

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{d}{dx} \csc^{-1} x = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{x^2+1} \qquad \frac{d}{dx} \cot^{-1} x = \frac{-1}{x^2+1}$$

Ejercicio 3: Derive las sigs. funciones

a. $y = x^3 \cos^{-1}(x)$ $\quad y' = 3x^2 \cos^{-1} x - \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$

b. $y = \sin^{-1}(e^{x^2})$ $\quad y' = \frac{2xe^{x^2}}{\sqrt{1-(e^{x^2})^2}}$

Regla de la cadena

c. $f(t) = \frac{1}{\arctan(t^5)} = [\arctan(t^5)]^{-1}$ $\quad f'(t) = \frac{-5t^4}{[\arctan(t^5)]^2} \cdot \frac{1}{1+(t^5)^2}$

d. $g(x) = \sec(x^4) + \sec^{-1}(x^4)$ $\quad g'(x) = 4x^3 \sec x^4 \tan x^4 + \frac{4x^3}{x^4\sqrt{x^8-1}}$

e. $h(t) = (1+t^2)\tan^{-1}(t)$ $\quad h'(t) = 2t\tan^{-1}(t) + \frac{\cancel{(1+t^2)}^{\,1}}{\cancel{1+t^2}}$

$$h'(t) = 2t\tan^{-1}(t) + 1$$

14.8 Multiplicadores de Lagrange.

Se pueden encontrar los máximos y mínimos relativos de una función a la cual se le imponen ciertas restricciones.

Ejemplo: encuentre los extremos relativos de $w = x^2+y^2+z^2$ S. A $2x+y-z=18$.

Sustituya la restricción $y = 18-2x+z$ en w para obtener una función de 2 variables

$$w(x,z) = x^2+(18-2x+z)^2+z^2.$$

Encuentre los puntos críticos de $w(x,z)$.

$$w_x = 2x - 4(18-2x+z) = 10x-4z-72 = 0 \qquad (1)$$

$$w_z = 2z + 2(18-2x+z) = -4x+4z+36 = 0 \qquad (2)$$

Sume las dos ecuaciones para obtener $6x-36=0 \Rightarrow x=6$.

Sustituya el valor de $x=6$ en la segunda fila y resuelva para z.

$$4z = 4x-36 = 24-36 = -12 \Rightarrow z=-3$$

Utilizando la restricción original se obtiene el valor de

$$y = 18-2(6)-3 = 18-15 = 3.$$

El único punto crítico es $(6,3,-3)$

Utilice la prueba de la segunda derivada para clasificar el punto crítico.

$$D(x,z) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xz} \\ f_{zz} & f_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 40-16 = 24 > 0$$

$f_{xx} = 10 > 0$

Hay un mínimo relativo en $(6,3,-3)$

El valor mínimo de w es: $w(6,3,-3) = 36+9+9 = 54$

Método de Multiplicadores de Lagrange.

En varios problemas no es posible expresar una de las variables de la restricción en función de las otras variables, el método de multiplicadores de Lagrange nos permite encontrar los puntos críticos sin necesidad de sustituir la restricción en la función objetivo.

Método de Multiplicadores de Lagrange.

Suponga que se tiene una función $f(x,y,z)$ sujeta a $g(x,y,z)=C$.

Se construye la sig. función objetivo nueva F de cuatro variables

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda[g(x,y,z) - c]$$

Los números críticos de F son también los números críticos de f, sujetos a $g=c$ y se encuentran al resolver el sig. sistema de ecs.

$$\left.\begin{aligned} F_x &= f_x - \lambda g_x = 0 \\ F_y &= f_y - \lambda g_y = 0 \\ F_z &= f_z - \lambda g_z = 0 \\ F_\lambda &= g - c = 0 \end{aligned}\right\}$$

ó brevemente

$$\nabla f = \lambda g \quad y \quad g(x,y,z) = C.$$

Observaciones:

- λ, Lambda es el multiplicador de Lagrange
- Para problemas con dos variables $F(x,y) = f(x,y) - \lambda[g(x,y) - c]$
- Para más variables, la F objetivo es similar $F = f - \lambda(g-c)$
- Pueden haber dos restricciones $g(x,y,z) = C$ y $h(x,y,z) = d$

En este caso $F = f - \lambda(g-c) - \mu(h-d)$ hay 2 multiplicadores

Los números críticos se obtienen al resolver $F_x = F_y = F_z = F_\lambda = F_\mu = 0$.

Ejercicio 1: Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones sujetas a las restricciones indicadas utilizando el método de Lagrange.

a. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ S.A. $g(x,y,z) = 2x+y-z = 18.$

Función objetivo: $F(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2 - \lambda(2x+y-z-18)$

Encuentre las derivadas parciales de F y resuelva el sig. sistema.

(1) $F_x = 2x - 2\lambda = 0$
(2) $F_y = 2y - \lambda = 0 \Rightarrow$ $x = \lambda$, $y = 0.5\lambda$, $z = -0.5\lambda$ Sustituya en la (4) ecuación y resuelva para λ
(3) $F_z = 2z + \lambda = 0$
(4) $F_\lambda = \underbrace{2x+y-z-18}_{\text{la restricción}} = 0 \Rightarrow 2\lambda + 0.5\lambda + 0.5\lambda = 18 \Rightarrow 3\lambda = 18 \Rightarrow \lambda = 6.$

El punto crítico es $(6,3,-3)$. y el valor es $f(6,3,-3) = 36+9+9 = 54$

b. $f(x,y,z) = x + y + z$ S. A. $xyz = 8$

Lagrangiano: $F(x,y,z,\lambda) = x+y+z - \lambda(xyz-8)$

Derivadas parciales y puntos críticos.

(1) $F_x = 1 - \lambda yz = 0 \Rightarrow \lambda yz = 1 \Rightarrow \lambda = 1/yz$ Sustituya en la ec. (2)
(2) $F_y = 1 - \lambda xz = 0 \Rightarrow \lambda xz = \frac{xz}{\cancel{z}y} = 1 \Rightarrow \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow x = y$ Sustituya en (4)
(3) $F_z = 1 - \lambda xy = 0 \Rightarrow \lambda xy = \frac{xy}{yz} = 1 \Rightarrow x = z$ Sustituya en (4)
(4) $F_\lambda = xyz - 8 = 0$

$x(x)(x) - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2$ & $z = 2$, $\lambda = 1/4.$

El punto crítico es $(2,2,2)$ y su valor es $f(2,2,2) = 6.$

Ejercicio 2: Encuentre tres números positivos cuya suma es 90 y cuyo producto es un máximo.

Objetivo max $P(x,y,z) = xyz$ Restricción $x+y+z=90$

Lagrangiano: $F(x,y,z) = xyz - \lambda(x+y+z-90)$

Derivadas parciales y puntos críticos

$(1)\ F_x = yz - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = yz$ sustituya en (2) y en (3)

$(2)\ F_y = xz - \lambda = 0 \Rightarrow xz = yz \Rightarrow x = y$ y $z \neq 0$

$(3)\ F_z = xy - \lambda = 0 \Rightarrow xy = yz \Rightarrow x = z$ y $y \neq 0$ } no se satisface $x+y+z=90$

$(4)\ F_\lambda = 0: \ x+y+z = 90$

Sustituya $y = x$ & $z = x$ en la restricción ec. (4)

$x+x+x = 3x = 90 \Rightarrow x = 30,\ y = 30,\ z = 30$ y $\lambda = (30)(30) = 900$

Los tres números son 30, 30, 30, el producto máximo es $(30)^3 = 27{,}000.$

Ejercicio 3: Determine las dimensiones de la caja rectangular con el mayor volumen si el área superficial total es de 48 cm²
"La caja tiene ambas tapas"

Volumen $V = xyz$ Área $A = 2xy + 2yz + 2xz = 48$

Lagrangiano $\mathcal{L} = xyz - 2\lambda(xy + yz + xz - 24)$

$\mathcal{L}_x = yz - 2\lambda y - 2\lambda z = 0 \Rightarrow (z - 2\lambda)y = 2\lambda z \Rightarrow y = x = \dfrac{2\lambda z}{z - 2\lambda}$

$\mathcal{L}_y = xz - 2\lambda x - 2\lambda z = 0 \Rightarrow (z - 2\lambda)x = 2\lambda z$

$\mathcal{L}_z = xy - 2\lambda \cancel{x} - 2\lambda y = 0$ Note que $x = y$ sustituya en $\mathcal{L}_z = 0$

$\mathcal{L}_\lambda = 0: \ xy + yz + xz = 48$

$x^2 - 2\lambda x - 2\lambda x = x(x - 4\lambda) = 0 \Rightarrow x = 4\lambda$, $y = 4\lambda$

Siistema No Lineal

Como $x=4\lambda$, $y=4\lambda$ encuentre el valor de z sustituyendo en $\mathcal{L}_x=0$.

$4\lambda z-8\lambda^2-2\lambda z = 2\lambda z-8\lambda^2 = 2\lambda(z-4\lambda)=0 \Rightarrow z=4\lambda$

Como $x=y=z=4\lambda$, encuentre el valor de λ sustituyendo en $\mathcal{L}_\lambda=0$.

$16\lambda^2+16\lambda^2+16\lambda^2 = 48\lambda^2=48 \Rightarrow \lambda^2=1 \Rightarrow \lambda=1$, descarte $\lambda\neq-1$

Por lo que las dimensiones de la caja son $x=y=z=4$, el volumen máximo es de $64\ cm^3$

Ejercicio 4: Para surtir una orden de 100 uds. de un producto, una empresa desea distribuir la producción entre sus dos plantas. La función de costo total es $C(x,y)=0.1x^2+7x+15y+1{,}000$.

¿Cómo se debe distribuir la producción para minimizar los costos?

Lagrangiano: $F(x,y)=0.1x^2+7x+15y+1{,}000+\lambda(100-x-y)$

$F_x = 0.2x+7-\lambda=0 \Rightarrow 0.2x=\lambda-7=8 \Rightarrow x=\frac{8}{0.2}=40$

$F_y = 15-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=15$

$F_\lambda = 100-x-y=0 \Rightarrow y=100-x=100-40=60.$

Punto crítico es $(40,60)$, se debe producir 40 uds. en la planta 1 y 60 unidades en la planta 2, el costo mínimo es

$C(40,60)=160+280+900+1{,}000 = 2{,}340.$

Se verifica que es mínimo, encontrando la segunda derivada de

$C(x)=0.1x^2+7x+15(100-x)=0.1x^2-8x+1500$

$C'(x)=0.2x-8$

$C''(x)=0.2>0$ mínimo absoluto, cóncava hacia arriba $\cup$.

Ejercicio 5: función de producción

$$Q(L,K) = 12L + 20K - L^2 - 2K^2$$

El costo de L y K para la compañía son de \$4 y \$8 mil, resp.

Si la compañía tiene sólo un presupuesto de \$88 mil, encuentra la producción máxima posible.

Restricción: $4L + 8K = 88 \Rightarrow L + 2K = 22$

Función objetivo: $F(L, K, \lambda) = 12L + 20K - L^2 - 2K^2 + \lambda(22 - L - 2K)$

$F_L = 12 - 2L - \lambda = 0 \Rightarrow 2L = 12 - \lambda$ ó $\lambda = 12 - 2L$

$F_K = 20 - 4K - 2\lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda = 20 - 4K$ $\quad \lambda = 10 - 2K$ } iguale.

$F_\lambda = 0: \quad L + 2K = 22$

$12 - 2L = 10 - 2K.$

$2 + 2K = 2L$

$1 + K = L.$

Reemplace $L = 1 + K$ en la restricción.

$$1 + K + 2K = 22 \Rightarrow 3K = 21 \Rightarrow K = 7 \text{ y } L = 8, \lambda = -4$$

La producción máxima posible sujeta a la restricción es

$$Q(8,7) = 96 + 140 - 64 - 98 = 140 - 66 = 74$$

Sin la restricción se produce más y a un menor costo.

$Q_L = 12 - 2L = 0 \Rightarrow L = 6$ $\quad$ se gasta sólo $4(6) + 8(5) = \$64$ mil

$Q_K = 20 - 4K = 0 \Rightarrow K = 5$ $\quad$ pero la producción máxima es:

$$Q(6,5) = 72 + 100 - 36 - 50 = 172 - 86 = 86$$

mucho mayor que cuando se utiliza un mayor presupuesto