3.4 Regla de la Cadena

Para encontrar la derivada de $F(x)=(x^3+1)^2$ es necesario desarrollar antes de derivar.

Expanda $F(x) = x^6 + 3x^2 + 1$

Derive $F'(x) = 6x^5 + 6x$

Factorice $F'(x) = 6x^2(x^3+1)$

$F(x)$ es una composición de funciones $y = f \circ g$ $\quad f(x) = (x)^2$ y $g(x) = x^3+1$

La derivada es el producto de las dos derivadas que conforman la composición $f'(g(x)) = 2(x^3+1)$ y $g'(x) = 3x^2$

$$y'(x) = 2(x^3+1)\,3x^2$$

Las derivadas de funciones con expansiones largas como $(x^4+x+4)^{20}$, funciones que no se pueden expander como $(x^4+xe^x)^{5/2}$ y funciones con triples composiciones como $\operatorname{sen}^5(x^2+x)$ se pueden encontrar calculando las derivadas de las funciones que conforman la composición

Regla de la Cadena

Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces $F = f \circ g$ es derivable

$$F'(x) = \underbrace{f'[g(x)]}_{\text{derivada externa}}\,\underbrace{g'(x)}_{\text{derivada interna}}$$

Forma Alternativa Regla de la Cadena

Sea $y = f(u)$ & $u = g(x)$, entonces $y = f[g(x)]$ y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$

$$y \xrightarrow{\text{derive}} u \xrightarrow{\text{derive}} x$$

Ejercicio 1: Derive las siguientes funciones.

a. $y(x) = [x^3 + x]^4$ Observe que $y(x) = f(g(x))$

Función externa: $f(x) = x^4$ $f'(x) = 4x^3$

Función Interna: $g(x) = x^3 + x$ $g'(x) = 3x^2 + 1$

Regla de la cadena: $y'(x) = f'(g)\, g' = \underbrace{4(x^3+x)^3}_{f'(g)} \underbrace{(3x^2+1)}_{g}$

b. $F(x) = [\underbrace{x^5 - 10x^4 + 10x^3 - 5x + 1{,}000}_{\text{interna}}]^{2003}$ externa $[\ ]^{2003}$

$F'(x) = 2003[x^5 - 10x^4 + 10x^3 - 5x + 1{,}000]^{2002} \cdot (5x^4 - 40x^3 + 30x^2 - 5)$

c. $H(x) = \dfrac{3}{(x^2+3)^3} = 3(x^2+3)^{-3}$

$H'(x) = -9(x^2+3)^{-4}\, 2x = \dfrac{-18x}{(x^2+3)^4}$

d. $s(t) = e^{t^2+3t+8}$ La función externa es e^u Interna t^2+3t+8

$s'(t) = e^{t^2+3t+8}(2t+3)$

e. $f(\theta) = e^{\sin\theta} + \sin(e^\theta)$ Sume dos reglas de la cadena

$f'(\theta) = \cos\theta\, e^{\sin\theta} + e^\theta \cos(e^\theta)$

f. $p(q) = \sqrt[5]{(3q^3 + 2q - q^{-1})^4} = (3q^3 + 2q - q^{-1})^{4/5}$ Reescriba Luego derive

$p'(q) = \frac{4}{5}\underbrace{(3q + 2 + q^{-2})}_{\text{derivada interna}} \underbrace{(3q^3 + 2q - q^{-1})^{-1/5}}_{\text{derivada externa}}$

Composición de dos o más funciones.

Derive $y = f(g[h(x)]) = (f \circ g \circ h)(x)$

La derivada $y'(x)$ es el producto de las tres funciones que conforman la composición.

$$y'(x) = \underbrace{f'(g[h(x)])}_{\text{derivada externa}} \underbrace{g'[h(x)]}_{\text{der. intermedia}} \underbrace{h'(x)}_{\text{der. interna}}$$

También se puede visualizar como $y = f(u)$ $u = g(w)$ $w = h(x)$.

Derive y respecto a u, u respecto a w, w respecto a x.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dw}\frac{dw}{dx}$$

Ejercicio 2: Derive las sigs. funciones.

externa $[\ ]^4$
intermedia $sen(\ )$
interna $x^{1/2}$.

a. $w(x) = sen^4(\sqrt{x})$ $\qquad w(x) = [sen(x^{1/2})]^4$

$$w'(x) = 4[sen(x^{1/2})]^3 \cos(x^{1/2}) \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{x}} sen^3(\sqrt{x})\cos(\sqrt{x})$$

b. $y(x) = \sqrt{(2x^2+1)^4 - 2(2x^2+1)^2}$

$$y'(x) = \frac{1}{2}\left((2x^2+1)^4 - 2(2x^2+1)^2\right)^{-1/2}\left(4(2x^2+1)^3 - 4(2x^2+1)\right)4x$$

$$y'(x) = \frac{8x\left[(2x^2+1)^3 - (2x^2+1)\right]}{\sqrt{(2x^2+1)^4 - (2x^2+1)^2}}$$

c. $z(x) = \tan\left(e^{x^2+x}\right)$

$$z'(x) = \sec^2\left(e^{x^2+x}\right) e^{x^2+x}(2x+1)$$

La regla de la Cadena se puede combinar con otras reglas de derivación, en especial con la regla del producto y del cociente.

Ej 3: Derive las siguientes funciones

a) $f(x) = e^{t^3+4t^{3/2}} \sin\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)$ $\}g$ Regla del Producto y Cadena

$$f'(x) = (3t^2 + 6t^{1/2}) e^{t^3+4t^{3/2}} \sin(t^{-1}+t^{-2}) + e^{t^3+4t^{3/2}} \cos(t^{-1}+t^{-2})(-t^{-2}-2t^{-3})$$

b) $z(s) = \left(\frac{3s^2+1}{4s-4}\right)^5$ Regla de la Potencia y la Cadena.

$$z'(s) = 5\left(\frac{3s^2+1}{4s-4}\right)^4 \left(\frac{6s(4s-4)-4(3s^2+1)}{(4s-4)^2}\right) = \frac{5(8s^2-24s-4)(3s^2+1)^4}{(4s-4)^6}$$

Ejercicio 4: Encuentre la ec. de la recta tangente a $y = x\sqrt{17-x^2}$ en $x=4$.

Coordenada-y: $y(4) = 4\sqrt{17-16} = 4$

Derivada: $y'(x) = 1\sqrt{17-x^2} + x(-2x)\frac{1}{2}(\sqrt{17-x^2})$

$y'(x) = \sqrt{17-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{17-x^2}}$

Pendiente: $y'(4) = 1 - \frac{16}{1} = -15$

Ec. Recta Tangente: $y(x) = 4 - 15(x-4)$ ó $y(x) = 64 - 15x$

Derivada de la función exponencial con base a.

Encuentre la derivada de $y = a^x$.

Como $u = e^{\ln u}$ $\quad a^x = e^{\ln a^x} = \underbrace{e^{x\ln a}}_{} = y$

Derive $y'(x) = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a$ Derivada: $(a^x)' = a^x \ln a$

La Regla de la cadena se utiliza para encontrar las derivadas de funciones como $a^{u(x)}$.

Ejercicio 5: Derive las siguientes funciones.

a. $y(x) = 5^{\sin(x^2)}$ derive primero $5^{(\,)}$ luego el exponente $\sin(x^2)$

$y'(x) = 5^{\sin(x^2)} \ln(5) \cos(x^2)\, 2x$

b. $g(u) = 10^{2u\sqrt{u+1}}$

$g'(u) = 10^{2u\sqrt{u+1}} \ln(10) \left[2\sqrt{u+1} + 2u\, 0.5 (u+1)^{-1/2} \right]$

c. $h(x) = e^{2} e^{x^2} e^{-2x^3}$ reescriba como un sólo exponente para evitar la regla del producto

$h(x) = e^{2+x^2-2x^3}$

$h'(x) = (2x - 6x^2)\, e^{2+x^2-2x^3}$

Derivación de la Regla del Cociente con la Regla del Producto.

Derive $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)[g(x)]^{-1}$ derive con la regla del producto

$y'(x) = f'(x)[g(x)]^{-1} - [g(x)]^{-2} g'(x) f(x)$

$y'(x) = \dfrac{f'(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = \dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2}$ $\qquad \dfrac{A' \cdot B - B' A}{B^2}$