1.3 Combinaciones de funciones

Existen diferentes formas de combinar dos o más funciones para crear una nueva función

Suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Resta: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

Producto: $(fg)(x) = f(x)\,g(x)$

Cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

El dominio de estas nuevas funciones es la intersección de los dominios de f y g.
Para el cociente excluya los números x tales que $g(x) = 0$.

Una función se puede multiplicar por una constante $(cf)(x) = c\,f(x)$

Ejercicio 1: Sean $f(x) = \sqrt{x^2-9}$ y $g(x) = x^3 - 9x$

Encuentre las sigs. funciones y sus respectivos dominios.

a.) $(f+g)(x) = \sqrt{x^2-9} + x^3 - 9x$

Dominio de f: $x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 9 \Rightarrow x \leq -3$ ó $x \geq 3$ $\quad (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

Dominio de g: $\mathbb{R}$ $\quad$ g es un polinomio.

Dominio de $f+g$: $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ $\quad$ la intersección de ambos dominios

b.) $(fg)(x) = (x^3 - 9x)(x^2-9)^{1/2}$

Dominio de $f \cdot g$ $\quad (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ $\quad$ se indefine sólo cuando $x^2 < 9$

c) $\frac{f}{g}(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3-9x}$ $\quad$ se indefine cuando $x^2 < 9$
y cuando $x^3 - 9x = x(x^2-9) = 0 \Rightarrow x \neq 0, x \neq \pm 3$

$g(x) = 0$ cuando $x = 0, 3, -3$.

Dominio de $\frac{f}{g}$ $\quad (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

Composición de funciones.

Una función también se puede evaluar dentro de otra función.

Sea: $g(x) = x^3$ y $f(x) = 2x-4$

Evalúe: $g(2) = 8$ $\qquad 2 \xrightarrow{g} 8$

Ahora. $f(8) = 16-4 = 12$ $\qquad 8 \xrightarrow{f} 12.$

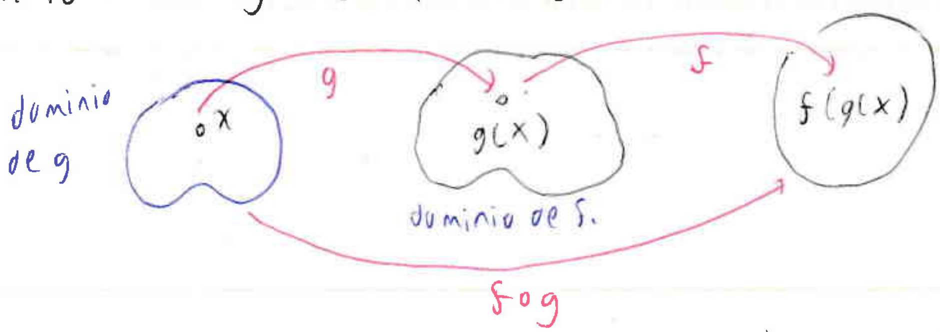
Resumiendo $\quad 2 \xrightarrow{g} 8 \xrightarrow{f} 12 \qquad x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} \underline{f(g(x))}$

La función $f(g(x))$ se conoce como la función compuesta de f con g.

Definición: Dadas dos funciones f y g, la composición de funciones de f con g es la función $f \circ g$ definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es la intersección del dominio de g y de $f(g(x))$.



En el ejemplo anterior, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = 2x^3 - 4$.

Función Identidad: es $I(x)$ tiene las sigs. propiedades

$$f(I(x)) = f(x)$$
$$I(f(x)) = f(x)$$
$$\Rightarrow f \circ I = I \circ f = f.$$

Ejercicio 2: Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^4 - x^2$.

a: Encuentre $f \circ g$ y $g \circ f$. $\qquad$ En General $f \circ g \neq g \circ f$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^4 - x^2) = \sqrt{x^4 - x^2}$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^4 \bullet (\sqrt{x})^2$$

b. Encuentre el dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$.

- $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^4 - x^2}$

El dominio de g es $\mathbb{R}$.

El dominio de $f(g(x)) = \sqrt{x^2(x^2-1)}$ es $x^2(x^2-1) \geq 0$

la función tiene ceros en $0, +1, -1$

	$-\infty$ a -1	-1 a 0	0 a 1	1 a ∞
x^2	+	+	+	+
$x+1$	−	+	+	+
$x-1$	−	−	−	+
x^4-x^2	+	−	−	+

El dominio es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

El dominio de $f \circ g$ es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

La intersección entre g y $f(g(x))$

- $(g \circ f)(x) = (\sqrt{x})^4 + (\sqrt{x})^2 = (x^{1/2})^4 + (x^{1/2})^2 = x^2 + x$

Dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$

Note que $(g \circ f)(x) = x^2 + x$ tiene como dominio $\mathbb{R}$.

Intersecte.

PERO, el dominio de $g \circ f$ es sólo $[0, \infty)$ La intersección entre f y $g(f(x))$.

c. Encuentre $f \circ f$ y $g \circ g$

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} =$ ó $(x^{1/2})^{1/2} = x^{1/4}$

$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x^4 - x^2) = (x^4 - x^2)^4 - (x^4 - x^2)^2$

Reemplace cada x por $x^4 - x^2$

Composición entre Tres funciones.

En este caso $(f \circ g \circ h)(x) = (f \circ g(h))(x) = f(g(h(x)))$

Hay seis combinaciones posibles de composiciones entre tres funciones

En algunos problemas es necesario expresar una función como una composición de varias funciones.

f es la función externa g es la función intermedia h es la función interna.

Ejercicio 3: Sean $F(x)=\sqrt{x}$, $G(x)=x^3-2$ y $H(x)=\frac{1}{x}$.

a. Encuentre $F\circ G\circ H$

Encuentre $(G\circ H)$: $G(H(x)) = G\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^3}-2$

Encuentre $F\circ G\circ H$ $\quad F(G[H(x)]) = F\left(\frac{1}{x^3}-2\right) = \underbrace{\sqrt{\frac{1}{x^3}-2}}_{F\circ G\circ H}$

b. Encuentre $H\circ F\circ G$

$$(H\circ F\circ G)(x) = H(F[G(x)]) = H(F[x^3-2]) = H\left(\sqrt{x^3-2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^3-2}}$$

Ejercicio 4: Exprese las siguientes funciones como una composición de funciones.

a. $p(x) = \sqrt[3]{\underbrace{x^3-8x}_{\text{interna.}}}\ \}$ externa $\sqrt[3]{\ }$.

Función interna: $g(x) = x^3-8x$

Función externa: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Composición: $p(x) = (f\circ g)(x)$

b. $K(t) = \sqrt[4]{\left(\underbrace{\frac{4+t}{4-t}}_{\text{interna.}}\right)^2+1}$

Función Interna: $h(x) = \frac{4+t}{4-t}$.

Función Intermedia: $g(x) = x^2+1$

Función Externa: $f(x) = \sqrt[4]{x}$

Composición: $K(t) = (f\circ g\circ h)(t)$

Ejercicio 5: Utilice la siguiente tabla para evaluar cada una de las sigs. expresiones

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

a. $f(g(1)) = f(6) = 5$

Primero encuentre $g(1)$ en la 2da fila, después $f(6)$ en la primera fila

b. $(g \circ f)(3) = g(\underline{f(3)}) = g(4) = 1$

Primero busque en la 1ra después en la 2da.

c. $g(f(1)) = g(3) = 2$

d. $g(g(3)) = g(2) = 3$ sólo busque en la 2da fila.

e. $(f \circ g)(6) = f(g(6)) = f(3) = 2.$

Ejercicio 6: Una parábola sin interceptos en el eje-x.

Sea $f(x) = -5 - 4x - x^2$

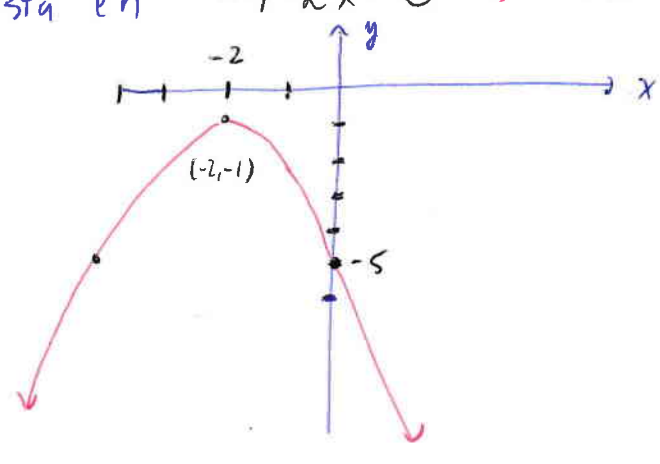
Intercepto-y: $f(0) = -5.$

Intercepto-x: $-(x^2+4x+5) = 0$ La ec. $x^2+4x+5 \neq 0$ no tiene solución.

Ec. Cuadrática: $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(5)}}{2} = -2 \pm \dfrac{\sqrt{-4}}{2}$ } no hay soluciones reales.

Vértice está en $-4 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$ $(-2,-1)$

Gráfica.



Dominio $(-\infty, \infty)$
Rango $(-\infty, -1)$