

1.1 Funciones y Representaciones

Sean X, Y dos conjuntos.

La notación $x \in X$ se utiliza para denotar que x es un elemento del conjunto X .

Los conjuntos más utilizados son:

Números naturales o enteros positivos $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$

Números enteros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Números Racionales: $\mathbb{Q} = \{x = \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$ razón de dos números enteros

Números Reales: incluye los enteros, racionales, e irracionales como $\sqrt{5}, \ln 3, e^9, \dots$

Es el conjunto más comúnmente usado en cálculo \mathbb{R}

El Producto Cartesiano $X \times Y$ es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y)

$$X \times Y = \{(x, y) \mid \underset{\text{tal que}}{x \in X, y \in Y}\}$$

Hay dos formas de relacionar dos conjuntos por medio del producto cartesiano.

a) Funciones

b) Relaciones

Funciones y Relaciones

Una función $f: X \rightarrow Y$ es una regla que asigna a cada elemento $x \in X$, como MÁXIMO a un elemento de Y denotado por $f(x)$. "f de x"

Dominio de una función: consiste en todos los elementos de X para los cuales $f(x)$ está definida.

Rango de una función: conjunto de todos los valores posibles de $f(x) \in Y$ conforme x varía a través del dominio.

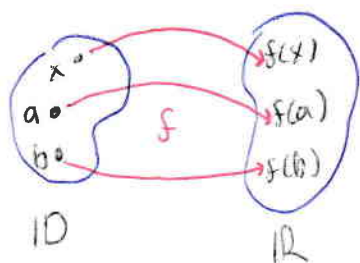
Para $y = f(x)$, x es la variable independiente $x \in \text{Dominio}$
 y es la variable dependiente $y \in \text{Rango}$

Formas de Representar una función

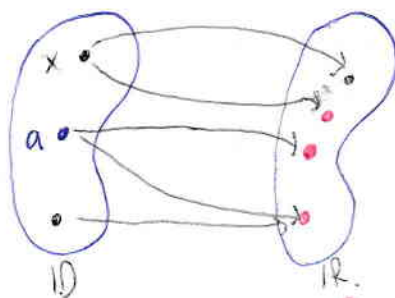
2

a) Diagrama de flechas: cada conjunto es un diagrama de Venn (región) cada elemento del conjunto por medio de un punto.

La función f se representa por medio de una flecha que relaciona x con $f(x)$.



función f .

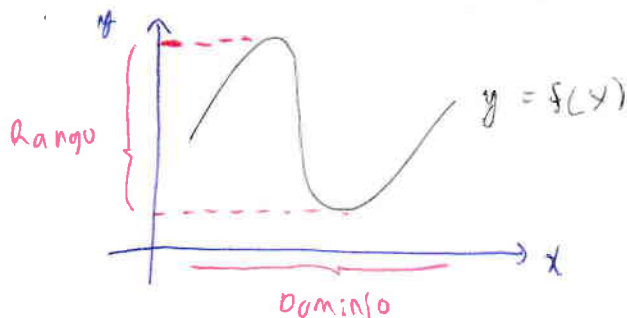


g no es una función
 x tiene dos valores asignados en el conjunto Y

b) Tabla de Valores: los valores de la variable independiente se colocan en la columna izquierda (ó superior) mientras que los valores de la variable dependiente se colocan en la columna derecha (ó inferior).

Var. Independiente Año		1995	2000	2005	2010	2015	2019
Var. Dependiente	Población Guatemalteca	10.408	11.650	13.096	14.630	16.252	17.577
	(en millones)						

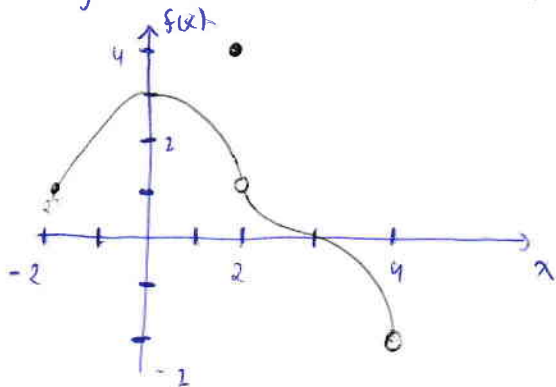
c) Gráfica: se representa por medio de una curva en el plano- xy .



d) Fórmula $y = f(x)$ como en $f(x) = x^3 + 10x^5$
 $g(w) = e^w + \ln w$

Ejercicio: Considere la gráfica de la sig. función.

3.



a) Encuentre $f(-2)$ y $f(2)$

$$f(-2) = 1$$

$f(2) = 4$ el punto $(2, 4)$ no es parte de la gráfica de f .

b) Dominio y rango de f .

Dominio $-2 \leq x \leq 2$ ó $[-2, 2]$

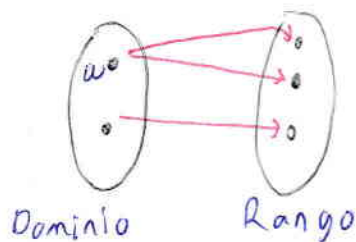
Rango $-2 \leq y \leq 3$, $y=4$ ó $[-2, 3] \cup \{4\}$

Diferencia entre funciones y relaciones.

Una relación es una regla que puede asignar a algunos elementos del dominio MA'S O E UN elemento del Rango.

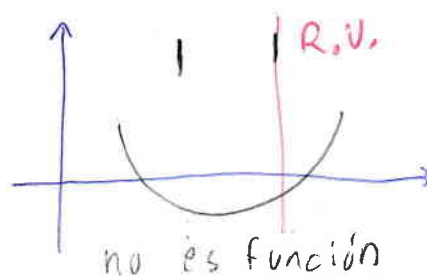
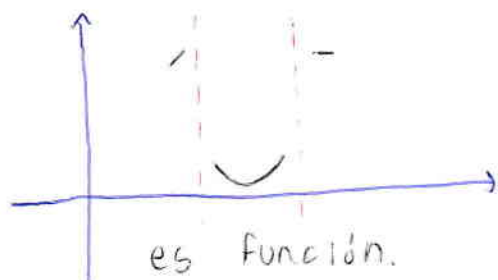
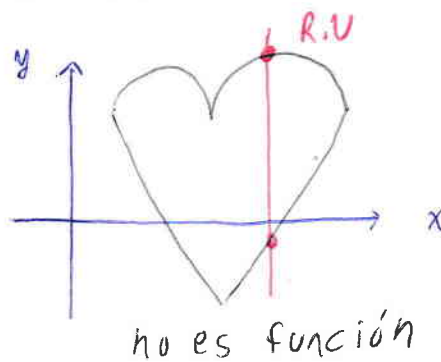
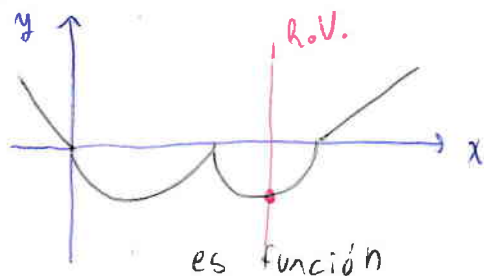
Visualización

Diagrama de Flechas



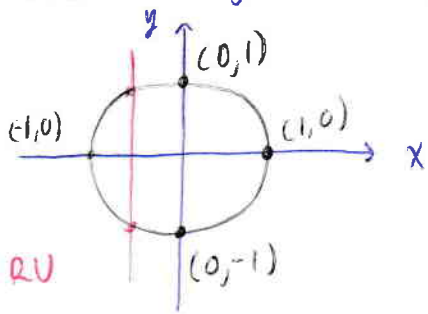
hay por lo menos un elemento del dominio w , que tiene más de un elemento en el rango

Prueba de la Recta Vertical: Una curva en el plano es la gráfica de una función de $x \Leftrightarrow$ No HAY una recta vertical que intercepte la curva más de una vez.



Ejercicio 2: Considere una circunferencia unitaria, $x^2 + y^2 = 1$.

a) Determine gráficamente si la ecuación describe una función en x .



no es una función porque no
satisface la prueba de la recta
vertical (R.V.)

b) Determine algebraicamente si esta ecuación describe a una función en x .

Si $x=0$ entonces $y^2=1$ cuyas soluciones son $y=\pm 1$

Como $x=0$ tiene dos elementos en el rango ± 1 , entonces la
ecuación no es una función.

c) Encuentre dos funciones de x que conforman la circunferencia.

Resuelva para y :

Tome la raíz Cuadrada

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - x^2$$

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

si x está entre -1 y 1

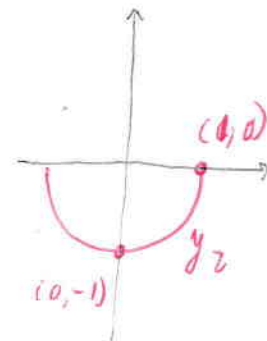
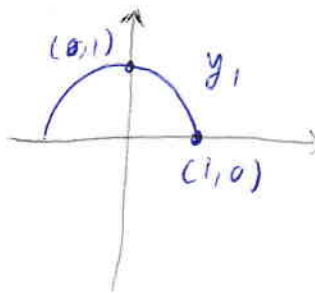
Semicircunferencia superior

$$y_1 = +\sqrt{1 - x^2}$$

Semicircunferencia inferior

$$y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$$

Domínio $D = [-1, 1]$



Dominio de una función.

Una fórmula, regla o ecuación se indefine cuando.

- Hay una división por cero. $\frac{1}{0}$ no existe.
- Se evalúa la raíz cuadrada o par de un número negativo $\sqrt{-a}$ no existe.
- Se evalúa el logaritmo de un número negativo o cero $\ln 0$ o $\log(-a)$ no existen)

Considere $p(q) = \frac{1,000}{q^2}$ la cual se indefine cuando $q = 0$.

El dominio de $p(q)$ se puede escribir utilizando las sigs. notaciones.

Conjunto: $ID = \{q \in \mathbb{R}, \mid q \neq 0\}$

Intervalo: $ID = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Diferencia de conjuntos: $ID = \mathbb{R} - \{0\}$.

Ejercicio 3: Encuentre el dominio de las sigs. funciones.

a. $f(x) = \frac{1}{x^4 - 16}$ se indefine cuando $x^4 - 16 = 0$
 $x^4 = 16 = 2^4$
 $x = \pm 2$. no son parte del dominio.

Dominio: $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$

b. $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ está definida sólo cuando $9 - x^2 \geq 0$
 $x^2 \leq 9$

Dominio $[-3, 3]$.

Puede utilizar un diagrama de signos para comprobar cuando g está definida

$g(x) = 0$ cuando $x = \pm 3$

Preber con

	-4	-3	0	3	4
$9 - x^2$	-		+		-
$g(x)$	Ind.		Def.		Ind.

$$c. h(x) = \frac{1}{\sqrt{x-48}}$$

h está definida sólo cuando $x-48 > 0$
 $x > 48$

Evite división por cero y raíz de un número negativo.

dominio $1D = (48, \infty)$

$$d. j(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{48-x}}$$

Si la potencia de la raíz es un número impar,
 la raíz de un número negativo si existe
 por ejemplo $\sqrt[3]{-8} = -2$ $\sqrt[3]{-1} = -1$

j(x) está definida cuando $48-x \neq 0$
 $x \neq 48$

dominio $(-\infty, 48) \cup (48, \infty)$

Igualdad de funciones:

Dos funciones f y g son iguales, denotado por $f=g$ si

1. Ambas funciones tienen el mismo dominio
2. Tienen la misma fórmula.

Por ejemplo, considere $f(x) = x-4$, $g(x) = \frac{x^2-16}{x+4}$, $h(x) = \begin{cases} x-4 & \text{si } x \neq 4 \\ 0 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

Los dominios de cada función son: $f: \mathbb{R}$

$g: (-\infty, -4) \cup (-4, \infty)$

$h: \mathbb{R}$

Aunque $g(x) = \frac{(x-4)(x+4)}{\cancel{x+4}} = x-4$ si $x \neq -4$

f y g no son iguales
 porque su dominio es
 diferente.

Ahora f y h son iguales tienen el mismo dominio \mathbb{R} , además $h(4) = f(4) = 0$
 y la misma fórmula

Gráficas
 de f y g.

