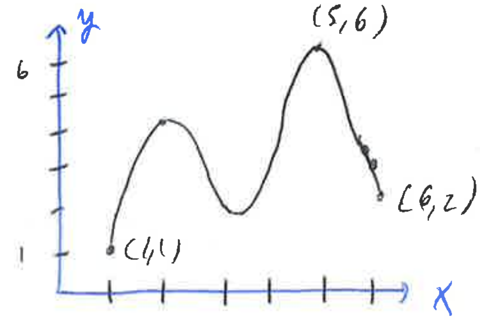
4.1.2 Extremos Absolutos.

Valor Máximo Absoluto $f(c) \geq f(x)$ para todo x en el dominio $\mathbb{D}$ de f.

Valor mínimo absoluto: $f(c) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{D}$.

Los extremos absolutos se pueden encontrar inspeccionando la gráfica de f.



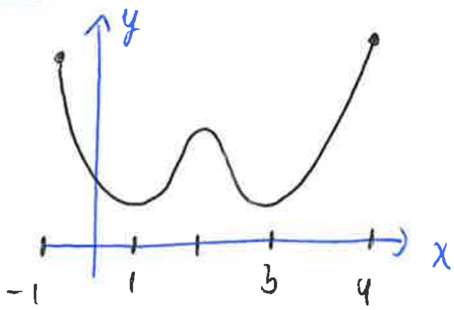
$f(5)=6$ es el máximo absoluto de f.

$f(1)=1$ es el mínimo absoluto de f.

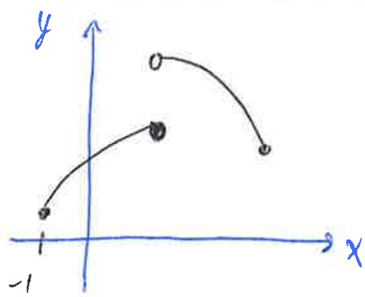
Teorema del Valor Extremo

Para que existan extremos absolutos de f es necesario que.

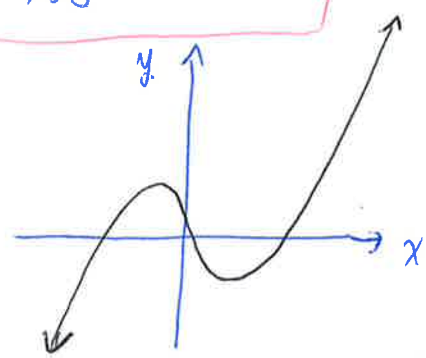
1. f sea continua.
2. f esté definida en un intervalo cerrado $[a,b]$



max abs en $x=-1, 4$
min abs en $x=1,3$



min absoluto en $x=-1$
No hay máximo absoluto



No hay extremos absolutos
el intervalo no es cerrado

Los extremos absolutos son i) números críticos de f.
ii) extremos del intervalo $x=a$ ó $x=b$

p.176. Método del intervalo cerrado: Considere una función continua en $[a,b]$.

1. Encuentre los números críticos de f y sus valores funcionales $f(c)$
2. Halle los valores funcionales en cada extremo del intervalo $f(a)$ y $f(b)$
3. El Máximo Absoluto es el más grande entre todos estos valores
4. El mínimo absoluto es el más pequeño entre todos estos valores.

Ejercicio 3: Pag 177 Encuentre los extremos absolutos de las sigs. funciones

a) $f(x) = x^4 - 2x^2$ en $-2 \leq x \leq 2$.

Derivada: $f'(x) = 4x^3 - 4x$

Números críticos: $f'(x) = 4x(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1$

Valores funcionales en los extremos y números críticos.

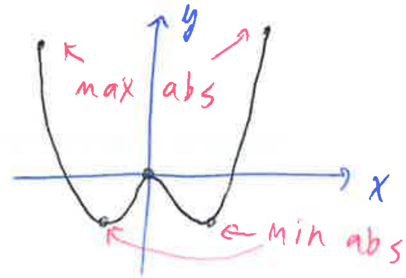
$f(-2) = 16 - 2\cdot 4 = 8$ ← MAX ABS

$f(-1) = +1 - 2 = -1$ ← min abs

$f(0) = 0 - 0 = 0$

$f(1) = 1 - 2 = -1$ ← min abs

$f(2) = 16 - 2\cdot 4 = 8$ ← MAX ABS



Un extremo absoluto puede ocurrir en varios puntos.

b) $g(x) = \sin(2x)$ en $[0, 2\pi]$

$\cos(\theta) = 0$ cuando $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \ldots$

Derivada: $g'(x) = 2\cos(2x) = 0$

Números críticos. $2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ seleccione sólo valores entre 0 y 2π.

Comparativo entre candidatos.

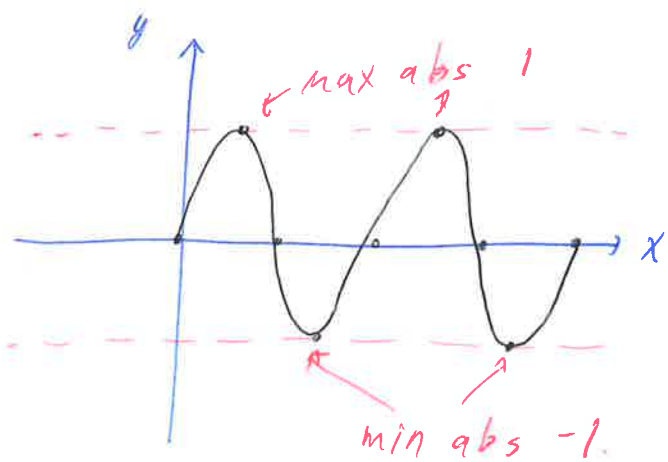
$g(0) = \sin(0) = 0$, $g(2\pi) = 0$

$g(\pi/4) = \sin(\pi/2) = 1$

$g(3\pi/4) = \sin(3\pi/2) = -1$

$g(5\pi/4) = \sin(5\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1$

$g(7\pi/4) = \sin(7\pi/2) = \sin(3\pi/2) = -1$



MAX ABS. $g(c) = 1$ en $c = \pi/4, 5\pi/4$

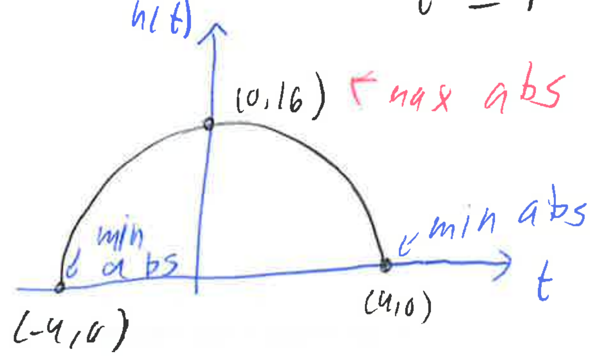
min abs $g(d) = -1$ en $d = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

c. $h(t) = \sqrt{16-t^2}$ El dominio de h es $[-4,4]$

$h'(t) = \dfrac{-t}{\sqrt{16-t^2}} = 0$ cuando $t=0$ y no existe cuando $16-t^2=0$
$t = \pm 4$

Los candidatos son $-4, 0$ y 4.

$h(-4) = \sqrt{16-16} = 0$ min abs
$h(0) = \sqrt{16-0} = 4$ MAX ABS
$h(4) = \sqrt{16-16} = 0$ min abs.



d. $s(t) = t^3 - 3t^2 + 4$ en $[-1,4]$

$s'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t-2) = 0$

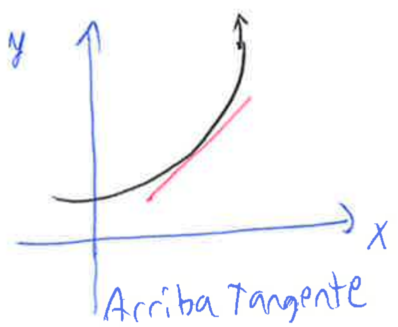
números críticos $t = 0, 2$

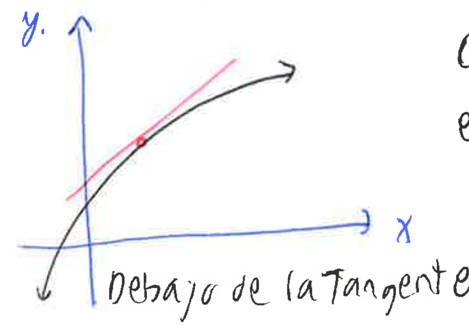
Los candidatos son $-1, 0, 2, 4$

$s(-1) = -1-3+4 = 0$
$s(0) = 0-0+4 = 4$
$s(2) = 8-12+4 = 0$
min absoluto
$s(4) = 64-48+4 = 20$ MAX ABS

Información Proporcionada por la Segunda Derivada

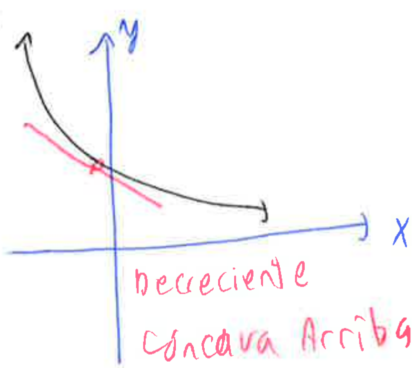
Considere las gráficas de las siguientes funciones crecientes

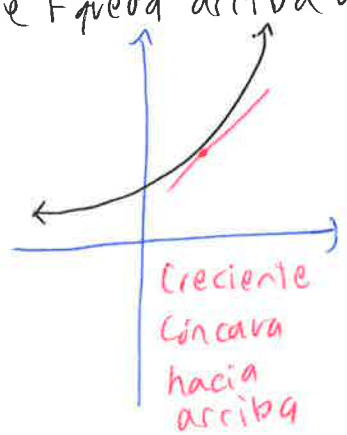


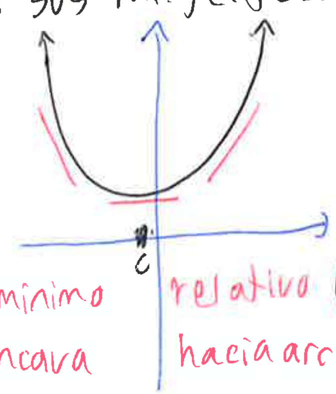


Cada gráfica se "dobla" en diferentes direcciones.

Concavidad hacia Arriba: f es cóncava hacia arriba si la gráfica de f queda arriba de todas sus tangentes.

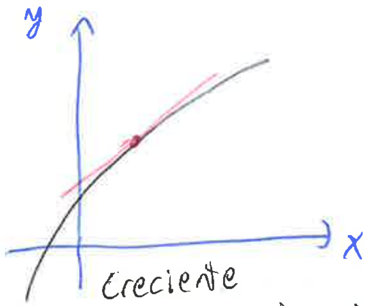




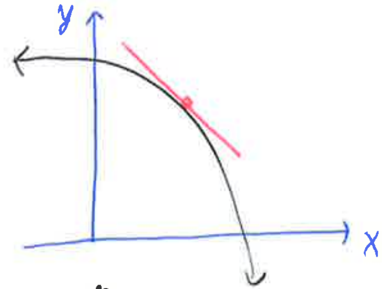


mínimo relativo en $x=c$ y cóncava hacia arriba.

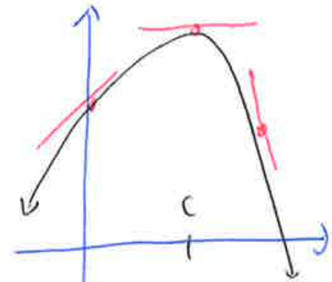
Una función es cóncava hacia abajo si la gráfica de f queda debajo de todas sus tangentes



Creciente
cóncava hacia abajo



Decreciente
cóncava hacia abajo

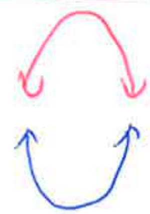


máximo relativo en $x=c$
cóncava hacia abajo

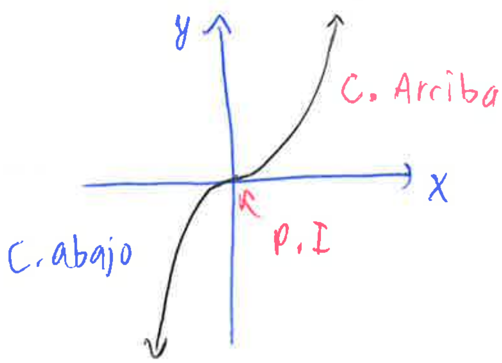
Criterio de concavidad (Pág 182)

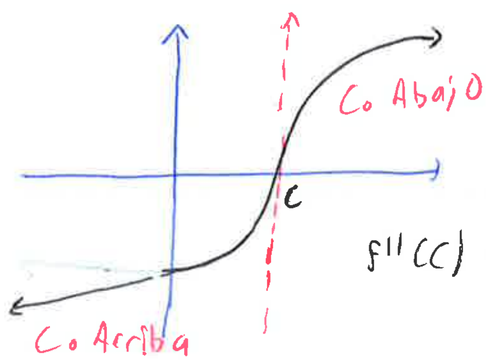
Cóncava hacia abajo: $f''(x) < 0$

Cóncava hacia arriba: $f''(x) > 0$



Un punto P sobre $y=f(x)$ se conoce como punto de inflexión de f. si f es continua y la curva cambia de concavidad en este punto.





$f''(c)$ no existe

$f''(0)=0$

Potenciales puntos de inflexión cuando $f''(x)=0$ ó no existe.

Prueba 2nda Derivada extremos relativos (Pág 183)

Sea c un número crítico de f y que $f''(x)$ es continua, $f(c)$ es

- Máximo relativo si $f''(c) < 0$  cóncava hacia abajo
- mínimo relativo si $f''(c) > 0$  cóncava hacia arriba

Ejercicio 3: Considere $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$. Pág 183

a) Determine donde y es creciente/decreciente.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x+2)(x-1) = 0$$

números críticos: $x = -2$, $x = 1$

		-2		1	
$6(x+2)$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$

Creciente en $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

Decreciente en $(-2, 1)$

max relativo en $x = 2$.

min relativo en $x = 1$

b. Utilice la prueba de la 2ada derivada para identificar los extremos relativos y puntos de inflexión.

$f''(x) = 12x + 6$

$f''(-2) = -24 + 6 = -18 < 0$ $\cap$ max relativo en $x = -2$

$f''(1) = 12 + 6 = 18 > 0$ $\cup$ min relativo en $x = 1$.

Los resultados obtenidos con la 1ra y 2da derivada son consistentes

Ejercicio 4: Considere $g(x) = x^4 - 18x^2$. Pág 184

a. Encuentre los extremos relativos e intervalos de crecimiento.

$g'(x) = 4x^3 - 36x = 4x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 3$ números críticos

		-3		0		3	
$4x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-9	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

creciente en $(-3, 0) \cup (3, \infty)$

decreciente en $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$

máximos relativos en $x = 0$.

mínimos relativos en $x = \pm 3$

b. Encuentre los puntos de inflexión e intervalos de concavidad.

$g''(x) = 12x^2 - 36$

$g''(x) = 12(x^2 - 3) = 0$

$x = \pm\sqrt{3}$

		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
$12(x^2-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
	$\cup$		$\cap$		$\cup$

Pts. de inflexión en $x = \pm\sqrt{3}$

cóncava hacia arriba en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

Conc. hacia abajo en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$