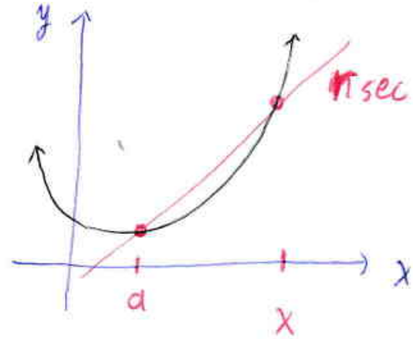
2.7 Derivadas

Rectas Secante y Tangente

Una recta secante es una línea que interseca a una curva en dos o más puntos.

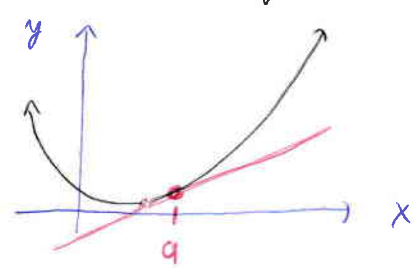


La pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(x, f(x))$ es:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

A medida que el punto $Q(x, f(x))$ se acerca al punto $P(a, f(a))$, la recta secante se vuelve una recta tangente en el límite cuando $x \to a$.

Definición: La pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es:



$$m_{tan} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

si este límite existe.

Ejercicio 1: Encuentre la pendiente de la recta tangente a $f(x) = x^3$ en el punto $(1, 1)$.

$f(1) = 1 \qquad f(x) = x^3$ Forma 0/0

$$m_{tan} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x-1)}}$$

$$m_{tan} = \lim_{x \to 1} x^2 + x + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$ La pendiente de la tangente es 3

Considere la diferencia entre ambos puntos $x - a = h$.

Por lo que $x = a + h$, y la pendiente de la recta secante se reescribe como

$$m_{sec} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a + h - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Pendiente de la recta tangente en $x=a$ (fórmula Alternativa)

$$m_{tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{si el límite existe.}$$

La ecuación de la recta tangente a $y=f(x)$ en $x=a$ es:

$$m_{tan} = \frac{y-f(a)}{x-a} \qquad y - f(a) = m_{tan}(x-a)$$

Ejercicio 2: Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $H(x)=\sqrt{2x-2}$ en $(3,2)$.

Punto $(a, H(a))$ $\quad a=3, \quad H(a)=\sqrt{6-2}=2$ $\quad$ Forma 0/0, Racionalice

Pendiente: $m_{tan} = \lim_{x\to 3} \frac{H(x)-H(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x-2}-2}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{2x-2}+2}{\sqrt{2x-2}+2}$.

$$m_{tan} = \lim_{x\to 3} \frac{2x-2-4}{(x-3)(\sqrt{2x-2}+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{2\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}} \frac{1}{(\sqrt{2x-2}+2)} = \frac{2}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2}$$

Recta Tangente: $y - H(3) = m_{tan}(x-3)$

$$y = 2 + \frac{1}{2}(x-3) \quad \text{ó} \quad y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x.$$

La derivada como un número.

La pendiente de la recta tangente es una clase de límite conocido como la derivada de f respecto a x en $x=a$

La derivada de una función f en un número $x=a$, denotada por $f'(a)$, es:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{o} \quad f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Si el límite existe

Observaciones.

- La función f es <u>derivable</u> en $x=a$ si $f'(a)$ existe
- La derivada de f en $x=a$ se denota como $f'(a)$.
- $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a $y=f(x)$ en $(a, f(a))$.

Otras dos formas para denotar la derivada de $y=f(x)$ en $x=a$ son:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \qquad y'(a)$$

Ejercicio 3: Encuentre la derivada de $f(x)=\frac{2x}{1+x}$ en $x=a$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2a+2h}{1+a+h}-\frac{2a}{1+a}}{h}$$

denominador común es $h(1+a)(1+a+h)$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{(2a+2h)(1+a)-2a(1+a+h)}{h(1+a+h)(1+a)}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{2a}+2a^2+2h+\cancel{2ha}-\cancel{2a}-\cancel{2a^2}-\cancel{2ah}}{h(1+a+h)(1+a)}$$

los términos sin h siempre se cancelan entre sí.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}(1+a+h)(1+a)}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{(1+a+\underset{0}{h})(1+a)}=\frac{2}{(1+a)^2}$$

La derivada es $f'(a)=\frac{2}{(1+a)^2}$

La derivada como una función.

Al reemplazarse el número a por la variable x, se obtiene la función llamada <u>derivada de f en X.</u>

La derivada de f es la función denotada como f' y definida como

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad ó \qquad f'(x)=\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

- El dominio de $f'(x)$ consiste de todos los números para los cuales $f'(x)$ está definida.
- El proceso de derivar f se conoce como diferenciación o derivación.

Ejercicio 4: Encuentre la función derivada de las funciones dadas.

a. $g(x) = \frac{6}{x}$

Forma 0/0

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\underbrace{\frac{6}{x+h} - \frac{6}{x}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{6x} - \cancel{6x} - 6h}{h(x+h)x}$$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-6\cancel{h}}{\cancel{h}(x+h)x} = \lim_{h \to 0} \frac{-6}{(x+h)x} = -\frac{6}{x^2}$$

b. $h(x) = x^{3/2}$

Racionalice

Sume exponentes $x^{3/2}x^{3/2} = x^{6/2} = x^3$

$$h'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^{3/2} - x^{3/2}}{h} \cdot \frac{(x+h)^{3/2} + x^{3/2}}{((x+h)^{3/2} + x^{3/2})} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^{3/2}}{h((x+h)^{3/2} + x^{3/2})}$$

expanda $(x+h)^3$

Cuidado $(x+h)^{3/2} \neq x^{3/2} + h^{3/2}$

$$h'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h[(x+h)^{3/2} + x^{3/2}]}$$

Factor común $\frac{h}{h}$ se cancela entre sí.

$$h'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 3x\cancel{h}^{0} + \cancel{h^2}^{0}}{(x+\cancel{h}^{0})^{3/2} + x^{3/2}} = \frac{3x^2}{2x^{3/2}} = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$x^2 x^{-3/2} = x^{1/2}$

La derivada de $h(x) = x^{3/2}$ es $h'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$.

Las notaciones comúnmente utilizadas para denotar la derivada de $y = f(x)$ en x son: $\frac{dy}{dx}$ $\frac{d}{dx}[f(x)]$ $f'(x)$.

Relación entre funciones derivables y funciones continuas

Una función f es derivable en un intervalo I si $f'(x)$ está definida en en el intervalo I.

Una función que es derivable en $x=a$ también es continua en $x=a$.

PERO una función que es continua en $x=a$ NO ES NECESARIAMENTE DIFERENCIABLE en $x=a$ como se observará en los sigs. ejemplos.

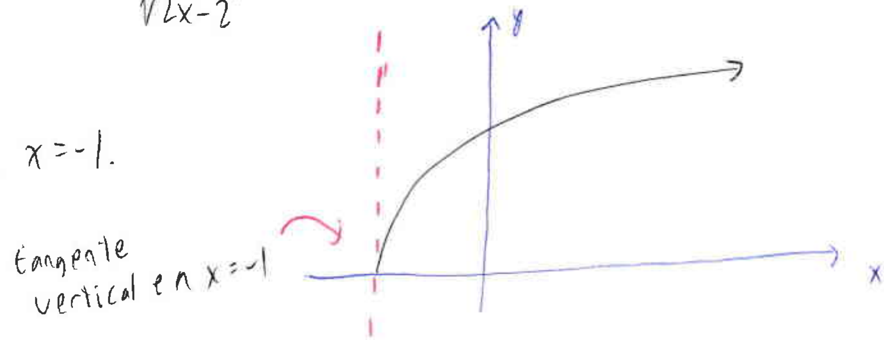
Recta Tangente Vertical

La función $H(x) = \sqrt{2x-2}$ es continua para $x \geq -1$,

pero su derivada $H'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-2}}$ sólo está definida para $x > -1$

Como $H'(1)$ no existe

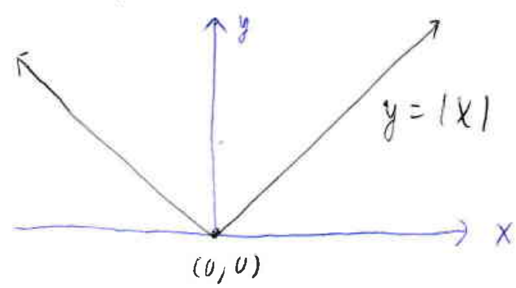
$H(x)$ no es derivable en $x=-1$.



Esquinas, Picos o cambios Abruptos.

Considere la función valor absoluto $|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

El valor absoluto es continuo en todo su dominio, pero no es derivable en $x=0$.



La derivada en $x=0$ NO existe porque

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

este límite no existe
los límites laterales son diferentes

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

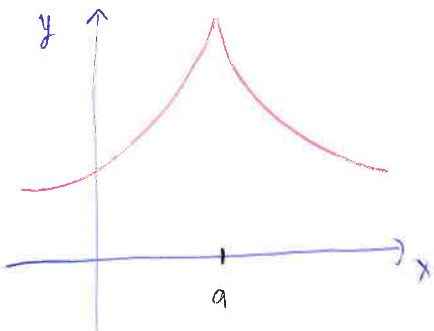
La función valor absoluto tiene una esquina en $x=0$

¿Cuándo una función $f(x)$ no es derivable en $x=a$?

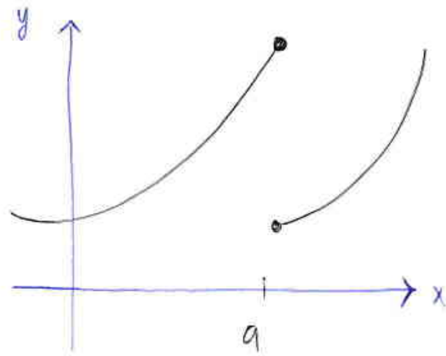
a. $f(x)$ tiene un pico o esquina en $x=a$.

b. $f(x)$ es discontinua en $x=a$ (saltos o AVs)

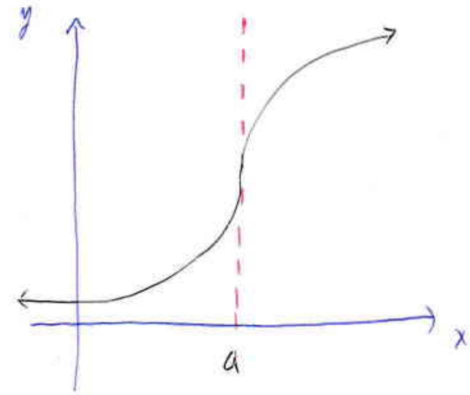
c. $f(x)$ tiene una recta tangente vertical.



Esquina o Pico



Discontinuidad



Tangente vertical.