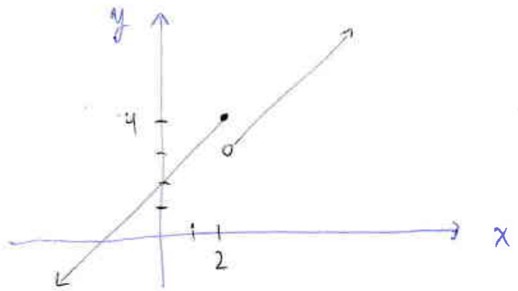
2.5. Continuidad

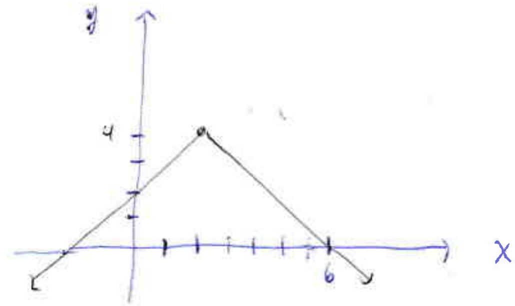
Muchas funciones presentan pausas o saltos en partes de sus gráficas.

Compare las sigs. funciones.

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & ; \quad x\leq 2 \\ x+1 & , \quad x>2 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x+2 & ; \quad x\leq 2 \\ 6-x & , \quad x>2. \end{cases}$$





La gráfica de f tiene un salto en $x=2$

La gráfica de g no tiene ningún salto.

Estudie el límite de ambas funciones a medida que $x \to 2$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x+2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x+1 = 3$$

$\lim_{x\to 2} f(x)$ NO EXISTE

Además, $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2) = 4$

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} x+2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} 6-x = 4$$

$\lim_{x\to 2} g(x) = 4$ SI EXISTE

Además, $\lim_{x\to 2} g(x) = g(2) = 4.$

La función g se va a conocer como una función continua en $x=2$.

La función f es una función discontinua en $x=2$ al tener un salto en este punto.

Continuidad: Una función es continua en $x=a$ si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Condiciones implícitas de la continuidad de f en $x=a$.

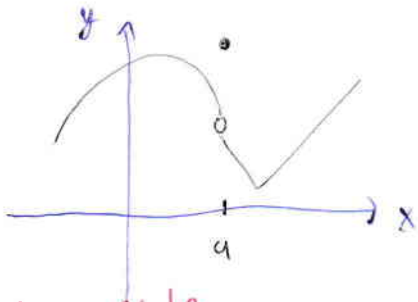
$f(a)$ existe

$\lim_{x\to a} f(a)$ existe

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

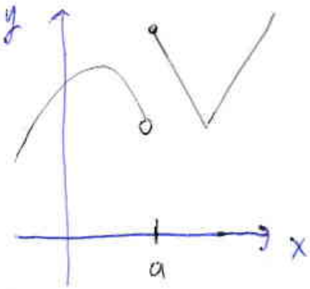
Si f no es continua en a, se dice que f es discontinua en a y se denomina punto de discontinuidad de f.

Tipos de Discontinuidades.



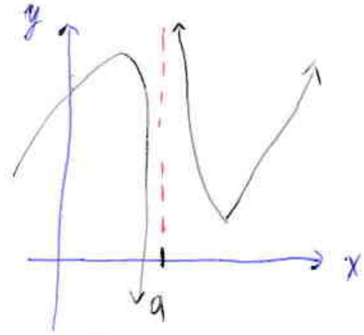
Removible.

$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$



Salto.

$\lim_{x\to a} f(x)$ no existe



Infinita

$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Una función es continua por la derecha si $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

Una función es continua por la izquierda si $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

Por ejemplo $f(x) = \sqrt{x}$ es continua por la derecha en $x=0$ porque

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0 = f(0)$$

PERO no es continua por la izquierda en $x=0$ porque

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x} \text{ no existe.}$$

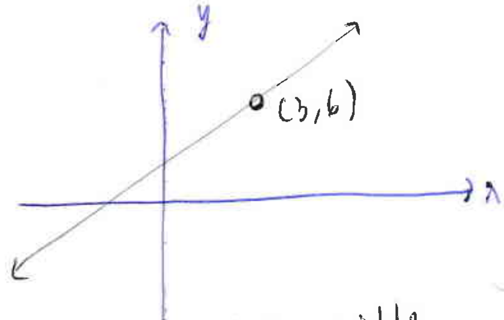
Ejercicio 1: Determine si la función dada es continua en el punto dado. En caso de ser discontinua clasifique la discontinuidad.

a) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ en $x=3$

$\lim_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3} x+3 = 6$ existe

PERO $f(3)$ indefinida

f no es continua en $x=3$



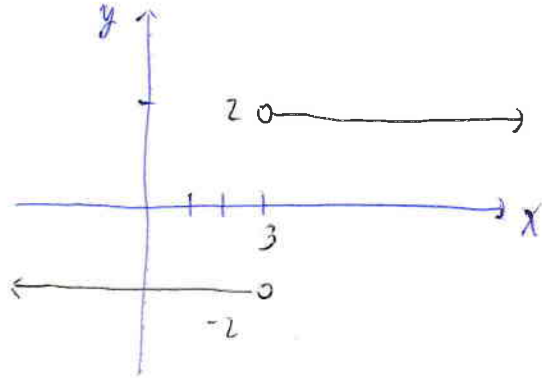
discontinuidad removible en $x=3$.

b. $g(x) = \dfrac{|2x-6|}{x-3}$ en $x=3$.

$g(3)$ está indefinida

ADEMÁS $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|2x-6|}{x-3}$ no existe

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 3^-} \frac{-(2x-6)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} -2 = -2 \\ &(2x-6<0) \\ &\lim_{x\to 3^+} \frac{(2x-6)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} 2 = 2 \end{aligned}\right\} \text{diferentes}$$



g no es continua en $x=3$

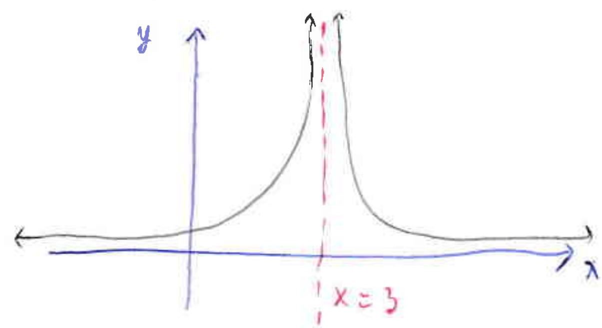
discontinuidad de salto en $x=3$

c. $h(x) = \dfrac{1}{(x-3)^4}$ en $x=3$.

$\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{(x-3)^4} = +\infty$ $\qquad \dfrac{1}{0^+}$

$\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{(x-3)^4} = +\infty$ $\qquad \dfrac{1}{0^+}$

Además $h(3)$ no existe



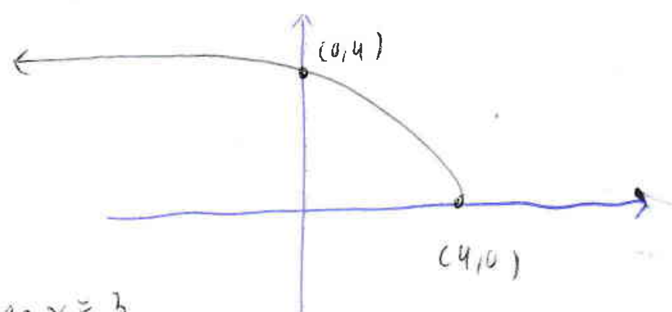
h no es continua en $x=3$.

discontinuidad infinita en $x=3$.

d. $i(x) = \sqrt{16-4x}$ en $x=3$.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 3} \sqrt{16-4x} = \sqrt{4} = 2 \\ &i(3) = \sqrt{16-12} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}\right\} \text{Iguales}$$

como $i(3) = \lim\limits_{x\to 3} \sqrt{16-4x} = 2$ $\quad$ i es continua en $x=3$



e. $j(x) = \begin{cases} x+3, & x<1 \\ 9-x^2, & 1\le x\le 3 \\ x^3-27, & 3<x \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} &j(3) = 9-9 = 0 \quad \text{(2do Tramo)} \\ &\lim_{x\to 3^-} 9-x^2 = 0 \\ &\lim_{x\to 3^+} x^3-27 = 0 \end{aligned}\right\} \text{Iguales}$$

Como $\lim\limits_{x\to 3} j(x) = j(3) = 0$

j es continua en $x=3$.

Continuidad de una función en un intervalo

Def: Una función f es continua sobre un intervalo si es continua en cada punto de ese intervalo

Por ejemplo, $f(x) = x^3$ es continua en $(-\infty, \infty)$ porque

si $a \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_{x \to a} x^3 = a^3 = f(a)$

Convención: Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es continua sólo por la derecha en $x = a$ y sólo por la izquierda en $x = b$.

Las siguientes funciones son continuas en sus dominios

- Polinomiales, potencias o raíces
- Racionales
- Exponenciales y Logarítmicas
- Trigonométricas y Trigonométricas Inversas.

Propiedades Continuidad.

Si f y g son continuas en un mismo intervalo, entonces las sigs. funciones también son continuas en el mismo intervalo (excluyendo el cociente)

Suma / Diferencia	$f \pm g$
Producto	fg
Multiplicación Constante	$c\, f$.
Cociente	$\frac{f}{g}$ excluya cuando $g(x) = 0$

Ejercicio 2: Encuentre dónde es continua cada función dada.

a) $f(x) = x^{4000} - 50x^{2000} - 104$

El dominio de f es $(-\infty, \infty)$; f es continua en $(-\infty, \infty)$

b) $g(x) = \dfrac{6x-18}{x^2-3x} = \dfrac{6(x-3)}{x(x-3)}$ se indefine en $x=0,3$

$g(x)$ es continua en $(-\infty,0)\cup(0,3)\cup(3,\infty)$

Hay una discontinuidad removible en $(3,2)$.

c. $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \leq 4 \\ x^2-15x-2, & x > 4 \end{cases}$

La primera función está definida en $(0,4)$. y la segunda en $(4,\infty)$

Ahora en $x=4$ $h(4) = \sqrt{4} = 2$ pero $\lim_{x\to 4} h(x)$ no existe.

$\lim_{x\to 4^-} \sqrt{x} = 2$ $\lim_{x\to 4^+} x^2-15x-2 = 16-60-2 = -46$

$h(x)$ es continua en $[0,\infty)$

d. $i(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{x+4}{x-4}$

$\sqrt{x+1}$ es continua en $[-1,\infty)$ $\dfrac{x+4}{x-4}$ es continua en $(-\infty,4)\cup(4,\infty)$

$i(x)$ es continua en $[-1,4)\cup(4,\infty)$

Continuidad y composición de funciones.

Si f y g son continuas, entonces $f \circ g$ también es continua.

Para encontrar $\lim_{x \to a} f(g(x))$ se evalúa primero el límite de $g(x)$ cuando $x = a$ y luego la función externa se evalúa en $f(b)$.

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(b)$$

Ejercicio 3: Evalúe en $\sqrt{\frac{x^2-4}{x-2}}$ el límite cuando $x \to 2$.

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^2-4}{x-2}} = \sqrt{\lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}} = \lim_{x \to 2} \sqrt{(x+2)} = \sqrt{4} = 2.$$

Ejercicio 4: Encuentre el valor de c que hacen que f sea continua en $(-\infty, \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + x + 2 & x < 1 \\ x^3 - cx + \sqrt{x-1} & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(1) = \sqrt{1 - c + 0} = \sqrt{1-c}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^3 - cx + \sqrt{x-1} = 1 - c + \sqrt{0} = 1 - c.$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} cx^2 + x + 2 = c + 3.$$

Para que f sea continua, entonces

$$1 - c = c + 3$$
$$-2 = 2c \Rightarrow c = -1$$

R/ f es continua en $(-\infty, \infty)$ si $c = -1$