representa el volumen que cambia con el tiempo, entonces dV/dt es la razón, o cuán rápido cambia el volumen con respecto al tiempo t. Una razón de, por ejemplo, $dV/dt = 5$ pies^3/s significa que el volumen aumenta 5 pies cúbicos cada segundo. Vea la FIGURA 4.2.1. En forma semejante, si una persona camina *hacia* el poste mostrado en la FIGURA 4.2.2 a razón constante de 3 pies/s, entonces sabemos que $dx/dt = -3$ pies/s. Por otra parte, si la persona se *aleja* del poste, entonces $dx/dt = 3$ pies/s. Las razones negativa y positiva significan, por supuesto, que la distancia x de la persona al poste disminuye (3 pies cada segundo) y aumenta (3 pies cada segundo), respectivamente.

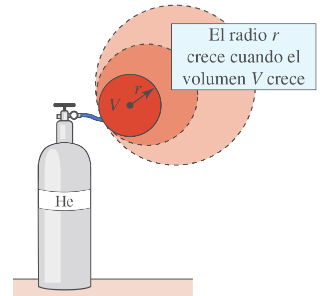

FIGURA 4.2.1 A medida que un globo esférico se llena con gas, su volumen, radio y área superficial cambian con el tiempo

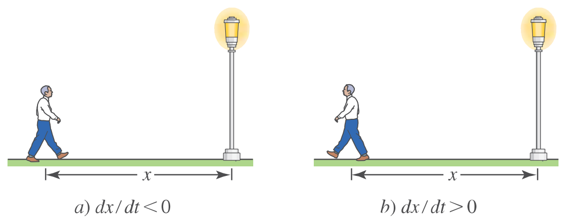

FIGURA 4.2.2 x decreciente en a); x creciente en b)

Regla de potencias para funciones Recuerde por (6) de la sección 3.6 que si y denota una función de x, entonces con la regla de potencias para funciones obtenemos

$$\frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}, \tag{1}$$

donde n es un número real. Por supuesto, (1) es aplicable a cualquier función; por ejemplo r, x o z, que dependa de la variable t:

$$\frac{d}{dt}r^n = nr^{n-1}\frac{dr}{dt}, \qquad \frac{d}{dt}x^n = nx^{n-1}\frac{dx}{dt}, \qquad \frac{d}{dt}z^n = nz^{n-1}\frac{dz}{dt}. \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Uso de (2)

Un globo esférico se expande con el tiempo. ¿Cómo se relaciona la razón a que aumenta el volumen con la razón a la que aumenta el radio?

Solución En el instante t, el volumen V de una esfera es una función del radio r; es decir, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Por tanto, obtenemos las razones relacionadas a partir de la derivada con respecto al tiempo de esta función. Con ayuda del primer resultado en (2), vemos que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{d}{dt}r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(3r^2\frac{dr}{dt}\right)$$

es lo mismo que

razones relacionadas

$$\underset{\downarrow}{\frac{dV}{dt}} = 4\pi r^2 \underset{\downarrow}{\frac{dr}{dt}}.$$

■

Debido a que los problemas de esta sección se describen con palabras, usted debe interpretar el planteamiento en términos de símbolos matemáticos. La clave para resolver problemas planteados en lenguaje coloquial consiste en la organización. A continuación se presentan algunas sugerencias.

Directrices para resolver problemas relacionados

i) Lea varias veces con cuidado el problema. Si le es posible, trace un esquema.
ii) Identifique con símbolos todas las cantidades que cambian con el tiempo.
iii) Escriba todas las razones que se **proporcionan**. Use notación de derivadas para escribir la razón que desea **encontrar**.
iv) Escriba una ecuación o una función que relacione todas las variables que haya introducido.
v) Diferencie con respecto al tiempo t la ecuación o la función encontrada en el paso *iv*). Este paso puede requerir el uso de diferenciación implícita. La ecuación resultante después de la diferenciación relaciona las razones de cambio con el tiempo de la variable.

EJEMPLO 2 Otro repaso al ejemplo 1

Un globo esférico se infla con aire a razón de 20 pies^3/min. ¿A qué razón cambia el radio cuando éste es de 3 pies?

Solución Como se muestra en la figura 4.2.1, denotamos el radio del globo con r y su volumen con V. Ahora, las interpretaciones de "Un globo esférico se infla … a razón de 20 pies^3/min" y "¿A qué razón cambia el radio cuando es de 3 pies?" son, respectivamente, la razón que tenemos

$$\textbf{Dado}: \frac{dV}{dt} = 20 \text{ pies}^3/\text{min}$$

y la razón que se busca

$$\textbf{Encontrar}: \left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=3}.$$

Debido a que por el ejemplo 1 ya sabemos que

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

es posible sustituir la razón constante $dV/dt = 20$; es decir, $20 = 4\pi r^2(dr/dt)$. Al despejar dr/dt en la última ecuación obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{20}{4\pi r^2} = \frac{5}{\pi r^2}.$$

Por tanto, $$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=3} = \frac{5}{9\pi} \text{ pies/min} \approx 0.18 \text{ pies/min}$$ ■

EJEMPLO 3 Uso del teorema de Pitágoras

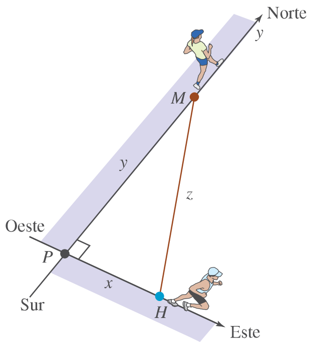

FIGURA 4.2.3 Corredores en el ejemplo 3

Una mujer que corre a razón constante de 10 km/h cruza un punto P en dirección al norte. Diez minutos después, un hombre que corre a razón constante de 9 km/h cruza por el mismo punto P en dirección al este. ¿Cuán rápido cambia la distancia entre los corredores 20 minutos después de que el hombre cruza por el punto P?

Solución Sea el tiempo t medido en horas desde el instante en que el hombre cruza el punto P. Como se muestra en la FIGURA 4.2.3, a $t > 0$ sean el hombre H y la mujer M que están en x y y km, respectivamente, a partir del punto P. Sea z la distancia correspondiente entre los dos corredores. Así, dos razones son

$$\textbf{Dado}: \frac{dx}{dt} = 9 \text{ km/h} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = 10 \text{ km/h} \tag{3}$$

y se busca

$$\textbf{Encontrar}: \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1/3} \quad \leftarrow 20 \text{ min} = \tfrac{1}{3}\text{h}$$

En la figura 4.2.3 vemos que el triángulo HPM es un triángulo rectángulo, así que por el teorema de Pitágoras, las variables x, y y z están relacionadas por

$$z^2 = x^2 + y^2. \tag{4}$$

Al diferenciar (4) con respecto a t,

$$\frac{d}{dt}z^2 = \frac{d}{dt}x^2 + \frac{d}{dt}y^2 \quad \text{proporciona} \quad 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}. \tag{5}$$

Al usar las dos razones proporcionadas en (3), entonces con la última ecuación de (5) obtenemos

$$z\frac{dz}{dt} = 9x + 10y.$$

Cuando $t = \frac{1}{3}$h usamos *distancia* = *razón* × *tiempo* para obtener la distancia que ha corrido el hombre: $x = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 3$ km. Debido a que la mujer ha corrido $\frac{1}{6}$h (10 min) más, la distancia que ella ha recorrido es $y = 10 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = 5$ km. En $t = \frac{1}{3}$ h, se concluye que $z = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ km. Por último,

$$\sqrt{34}\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1/3} = 9 \cdot 3 + 10 \cdot 5 \quad \text{o bien,} \quad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1/3} = \frac{77}{\sqrt{34}} \approx 13.21 \text{ km/h}.$$ ■

EJEMPLO 4 Uso de trigonometría

Un faro está situado en una isla pequeña a 2 mi de la costa. La baliza del faro gira a razón constante de 6 grados/s. ¿Cuán rápido se mueve el haz del faro a lo largo de la costa en un punto a 3 mi del punto sobre la costa que es el más próximo al faro?

Solución Primero se introducen las variables θ y x como se muestra en la FIGURA 4.2.4. Además, se cambia la información sobre θ a radianes al recordar que 1° es equivalente a $\pi/180$ radianes. Así,

$$\textbf{Dado}: \frac{d\theta}{dt} = 6 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{30} \text{ rad/s} \qquad \textbf{Encontrar}: \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3}.$$

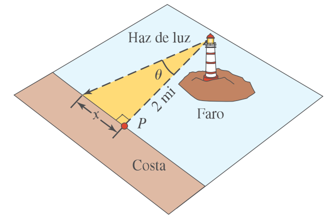

FIGURA 4.2.4 Faro en el ejemplo 4

A partir de la trigonometría de un triángulo rectángulo, por la figura vemos que

$$\frac{x}{2} = \tan\theta \qquad \text{o bien,} \qquad x = 2\tan\theta.$$

Al diferenciar la última ecuación con respecto a t y usar la razón dada obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = 2\sec^2\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{15}\sec^2\theta. \quad \leftarrow \text{Regla de la cadena: } \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

En el instante en que $x = 3$, $\tan\theta = \frac{3}{2}$, de modo que por la identidad trigonométrica $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ obtenemos $\sec^2\theta = \frac{13}{4}$. Por tanto,

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3} = \frac{\pi}{15} \cdot \frac{13}{4} = \frac{13\pi}{60} \text{ mi/s.} \qquad ■$$

En el siguiente ejemplo es necesario usar la fórmula para el volumen de un cono circular recto de altura H y radio en la base R:

$$V = \frac{\pi}{3}R^2H. \tag{6}$$

EJEMPLO 5 Uso de triángulos semejantes

Desde la parte superior del reloj de arena que se muestra en la FIGURA 4.2.5 la arena cae a razón constante de 4 cm^3/s. Exprese la razón a que crece la altura de la pila inferior en términos de la altura de la arena.

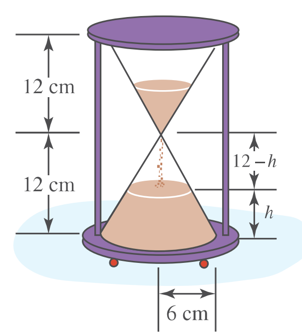

FIGURA 4.2.5 Reloj de arena en el ejemplo 5

Solución Primero, como sugiere la figura 4.2.5, se establece la hipótesis de que la pila de arena en la parte inferior del reloj de arena tiene la forma del *frustrum* de un cono. En el instante $t > 0$, sean V el volumen de la pila de arena, h su altura y r el radio de su superficie plana inferior. Así,

$$\textbf{Dado}: \frac{dV}{dt} = 4 \text{ cm}^3\text{/s} \qquad \textbf{Encontrar}: \frac{dh}{dt}.$$

Necesitamos encontrar el volumen V de la pila de arena en el instante $t > 0$. Esto puede lograrse como se muestra a continuación:

V = volumen de todo el cono inferior – volumen del cono que no es arena.

Al usar la figura 4.2.5 y (6) con $R = 6$ y $H = 12$,

$$V = \frac{1}{3}\pi 6^2(12) - \frac{1}{3}\pi r^2(12 - h)$$

o

$$V = \pi\left(144 - 4r^2 + \frac{1}{3}r^2h\right). \tag{7}$$

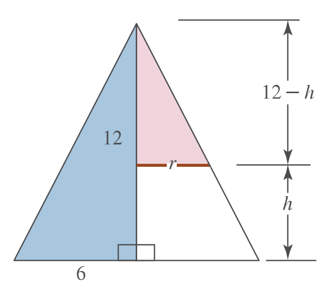

FIGURA 4.2.6 En sección transversal, el cono inferior del reloj de arena en el ejemplo 5 es un triángulo

Podemos eliminar la variable r de la última ecuación al usar triángulos semejantes. Como se muestra en la FIGURA 4.2.6, el triángulo rectángulo rojo claro es semejante al triángulo rectángulo azul, y así las proporciones de lados correspondientes son iguales:

$$\frac{12 - h}{r} = \frac{12}{6} \qquad \text{o bien,} \qquad r = 6 - \frac{h}{2}.$$

La última expresión se sustituye en (7) y se simplifica.

$$V = \pi\left(\frac{1}{12}h^3 - 3h^2 + 36h\right). \tag{8}$$

Al diferenciar (8) con respecto a t obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = \pi\left(\frac{1}{4}h^2\frac{dh}{dt} - 6h\frac{dh}{dt} + 36\frac{dh}{dt}\right) = \pi\left(\frac{1}{4}h^2 - 6h + 36\right)\frac{dh}{dt}.$$

Por último, al usar la razón dada $dV/dt = 4$ es posible despejar dh/dt:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{16}{\pi(h-12)^2}. \tag{9}$$ ■

Observe en (9) del ejemplo 5 que la altura de la pila de arena en el reloj de arena crece más rápido cuando la altura h de la pila está próxima a 12 cm.

Ejercicios 4.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-14.

Fundamentos

En los siguientes problemas, una solución puede requerir una fórmula especial que usted tal vez no conozca. En caso de ser necesario, consulte la lista de fórmulas que se encuentra en las *Páginas de recursos*.

1. Un cubo se expande con el tiempo. ¿Cómo está relacionada la razón a la cual crece el volumen con la razón a la que aumenta la arista?
2. El volumen de una caja rectangular es $V = xyz$. Dado que cada lado se expande a una razón constante de 10 cm/min, encuentre la razón a la cual se expande el volumen cuando $x = 1$ cm, $y = 2$ cm y $z = 3$ cm.
3. Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo. La longitud de un lado aumenta a razón constante de 2 cm/h. ¿A qué razón crece el área cuando un lado mide 8 cm?
4. En el problema 3, ¿a qué razón crece el área en el instante en que el área es $\sqrt{75}$ cm^2?
5. Un rectángulo se expande con el tiempo. La diagonal del rectángulo aumenta a razón de 1 pulg/h y la longitud crece a razón de $\frac{1}{4}$ pulg/h. ¿Cuán rápido crece el ancho cuando éste mide 6 pulg y la longitud mide 8 pulg?
6. Las longitudes de las aristas de un cubo aumentan a razón de 5 cm/h. ¿A qué razón crece la longitud de la diagonal del cubo?
7. Un velero se dirige hacia el acantilado vertical mostrado en la FIGURA 4.2.7. ¿Cómo están relacionadas las razones a las que cambian x, s y θ?

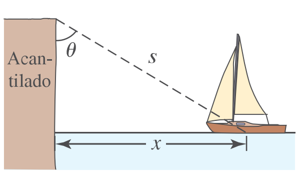

FIGURA 4.2.7 Velero en el problema 7

8. Un escarabajo se mueve a lo largo de la gráfica de $y = x^2 + 4x + 1$, donde x y y se miden en centímetros. Si la coordenada x de la posición del escarabajo (x, y) cambia a razón constante de 3 cm/min, ¿cuán rápido cambia la coordenada y cuando el escarabajo está en el punto (2, 13)? ¿Cuán rápido cambia la coordenada y cuando el escarabajo está 6 cm arriba del eje x?
9. Una partícula se mueve sobre la gráfica de $y^2 = x + 1$ de modo que $dx/dt = 4x + 4$. ¿Cuál es dy/dt cuando $x = 8$?
10. Una partícula en movimiento continuo se mueve sobre la gráfica de $4y = x^2 + x$. Encuentre el punto (x, y) sobre la gráfica en el que la razón de cambio de la coordenada x y la razón de cambio de la coordenada y son iguales.
11. La coordenada x del punto P mostrado en la FIGURA 4.2.8 aumenta a razón de $\frac{1}{3}$ cm/h. ¿Cuán rápido crece el área del triángulo rectángulo OPA cuando las coordenadas de P son (8, 2)?

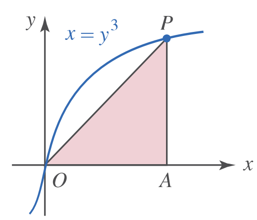

FIGURA 4.2.8 Triángulo en el problema 11

12. Una maleta está sobre la banda transportadora mostrada en la FIGURA 4.2.9 que se mueve a razón de 2 pies/s. ¿Cuán rápido aumenta la distancia vertical de la maleta a partir de la parte inferior de la banda?

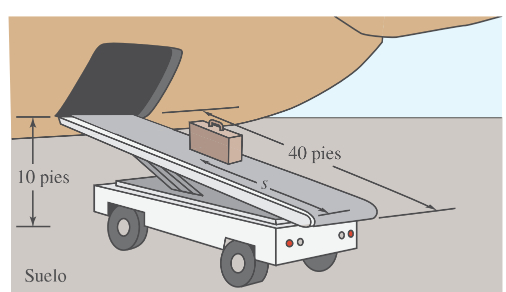

FIGURA 4.2.9 Banda transportadora en el problema 12

13. Una persona de 5 pies de estatura se aleja caminando de un poste de 20 pies de altura a razón constante de 3 pies/s. Vea la FIGURA 4.2.10.

a) ¿A qué razón crece la sombra de la persona?

b) ¿A qué razón se aleja la punta de la sombra desde la base del poste?

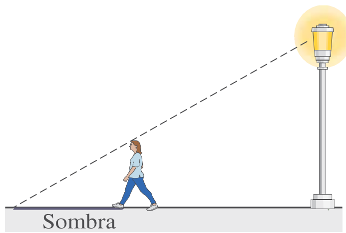

FIGURA 4.2.10 Sombra en el problema 13

14. Una roca arrojada a un estanque tranquilo provoca una onda circular. Suponga que el radio de la onda se expande a razón constante de 2 pies/s.

a) ¿Cuán rápido crece el diámetro de la onda circular?

b) ¿Cuán rápido crece la circunferencia de la onda circular?

c) ¿Cuán rápido se expande el área de la onda circular cuando el radio es de 3 pies?

d) ¿Cuán rápido se expande el área de la onda circular cuando el área es 8π pies^2?

15. Una escalera de 15 pies está apoyada contra el muro de una casa. La parte inferior de la escalera se aleja de la base del muro a razón constante de 2 pies/min. ¿A qué razón desciende la parte superior de la escalera en el instante en que la parte inferior de la escalera está a 5 pies del muro?

16. Una escalera de 20 pies está apoyada contra el muro de una casa. La parte superior de la escalera se desliza hacia abajo sobre el muro a razón constante de $\frac{1}{2}$ pie/min. ¿A qué razón se aleja del muro la parte inferior de la escalera en el instante en que la parte superior de la escalera está a 18 pies por arriba del suelo?

17. Considere la escalera cuya parte inferior se desliza alejándose de la base del muro vertical mostrado en la FIGURA 4.2.11. Demuestre que la razón a la cual crece θ_1 es la misma que la razón a la cual decrece θ_2.

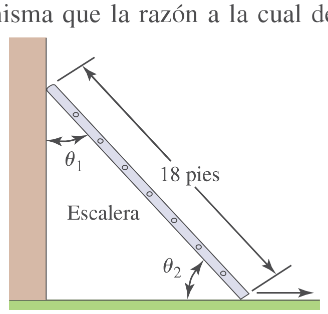

FIGURA 4.2.11 Escalera en el problema 17

18. La cuerda de un cometa se suelta a razón constante de 3 pies/s. Si el viento se lleva al cometa horizontalmente a una altitud de 200 pies, ¿cuán rápido se mueve el cometa cuando se han soltado 400 pies de cuerda?

19. Dos buques tanque zarpan de la misma terminal petrolera. Uno se dirige hacia el este a mediodía a una velocidad de 10 nudos. (1 nudo = 1 milla náutica/h. Una milla náutica mide 6 080 pies o 1.15 milla estándar.) El otro buque se dirige hacia el norte a la 1:00 p.m. a razón de 15 nudos. ¿A qué razón cambia la distancia entre los dos buques a las 2:00 p.m.?

20. A las 8:00 a.m., el barco S_1 está a 20 km dirección norte del barco S_2. El barco S_1 navega hacia el sur a razón de 9 km/h y el barco S_2 se dirige hacia el oeste a razón de 12 km/h. A las 9:20 a.m., ¿a qué razón cambia la distancia entre los dos barcos?

21. Una polea está asegurada a una orilla de un muelle situado a 15 pies por arriba de la superficie del agua. Un bote pequeño es jalado hacia el muelle por medio de una cuerda en la polea. La cuerda está unida a la proa del bote a 3 pies antes de la línea del agua. Vea la FIGURA 4.2.12. Si la cuerda se jala a razón constante de 1 pie/s, ¿cuán rápido se aproxima el bote al muelle cuando se encuentra a 16 pies de éste?

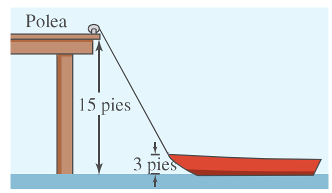

FIGURA 4.2.12 Bote y muelle en el problema 21

22. Un bote se jala hacia un muelle por medio de un cabrestante. El cabrestante está situado al final del muelle y se encuentra a 10 pies por arriba del nivel al que la cuerda de arrastre está atada a la proa del bote. La cuerda se jala a razón constante de 1 pie/s. Use una función trigonométrica inversa para determinar la razón a la cual cambia el ángulo de elevación entre la proa del bote y el final del muelle cuando se han soltado 30 pies de cuerda.

23. Un reflector en un bote patrulla que está a $\frac{1}{2}$ km de la costa sigue un buque de dunas de arena que se mueve en forma paralela al agua a lo largo de una playa recta. El buque se desplaza a razón constante de 15 km/h. Use una función trigonométrica inversa para determinar la razón a la cual gira el reflector cuando el buque está a $\frac{1}{2}$ km del punto sobre la playa más próximo al bote.

24. Un diamante de beisbol es un cuadrado de 90 pies por lado. Vea la FIGURA 4.2.13. Un jugador golpea la pelota y corre hacia la primera base a razón de 20 pies/s. ¿A qué razón cambia la distancia del corredor a segunda base en el instante en que el corredor está a 60 pies de *home*? ¿A qué razón cambia la distancia del corredor a tercera base en ese mismo instante?

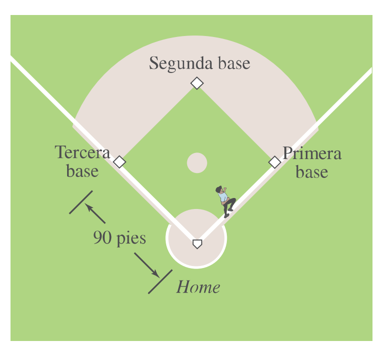

FIGURA 4.2.13 Diamante de beisbol en el problema 24

25. Un avión que se mueve en forma paralela al nivel del suelo a razón constante de 600 mi/h se aproxima a una estación de radar. Si la altitud del avión es de 2 mi, ¿cuán rápido disminuye la distancia entre el avión y la estación de radar cuando la distancia horizontal entre ambos es 1.5 mi? Vea la FIGURA 4.2.14.

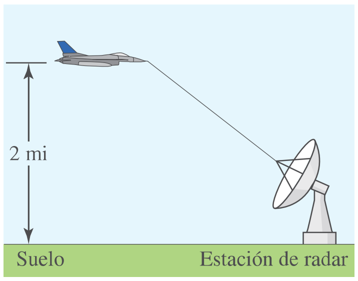

FIGURA 4.2.14 Avión en el problema 25

26. En el problema 25, en el punto directamente por arriba de la estación de radar, el avión asciende formando un ángulo de 30° sin aminorar su velocidad. ¿Cuán rápido aumenta la distancia entre el avión y la estación 1 minuto después? [*Sugerencia*: Use la ley de los cosenos.]

27. Un avión a una altitud de 4 km pasa directamente por arriba de un telescopio de rastreo ubicado en tierra. Cuando el ángulo de elevación es de 60°, se observa que el ángulo decrece a razón de 30 grados/min. ¿Cuán rápido se mueve el avión?

28. Una cámara de rastreo, ubicada a 1 200 pies del punto de lanzamiento, sigue a un globo de aire caliente con ascenso vertical. En el instante en que el ángulo de elevación θ de la cámara es $\pi/6$, el ángulo θ crece a razón de 0.1 rad/min. Vea la FIGURA 4.2.15. ¿A qué razón sube el globo en ese instante?

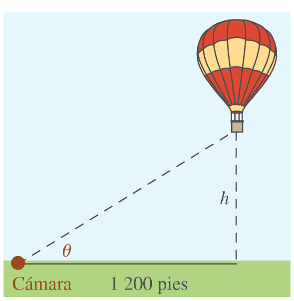

FIGURA 4.2.15 Globo en el problema 28

29. Un cohete se desplaza a razón constante de 1 000 mi/h a un ángulo de 60° con respecto a la horizontal. Vea la FIGURA 4.2.16.

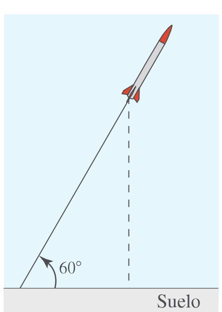

FIGURA 4.2.16 Cohete en el problema 29

a) ¿A qué razón crece su altitud?
b) ¿Cuál es la velocidad del cohete con respecto a tierra?

30. Un tanque de agua en forma de cilindro circular recto de 40 pies de diámetro se drena de modo que el nivel del agua disminuye a razón constante de $\frac{3}{2}$ pies/min. ¿Cuán rápido decrece el volumen del agua?

31. Un tanque de aceite en forma de cilindro circular recto de 8 m de radio se llena a razón constante de 10 m^3/min. ¿Cuán rápido sube el volumen del aceite?

32. Como se muestra en la FIGURA 4.2.17, un tanque rectangular de agua de 5 pies de ancho está dividido en dos tanques por medio de una separación que se mueve en la dirección indicada a razón de 1 pulg/min cuando al tanque frontal se bombea agua a razón de 1 pie^3/min.

a) ¿A qué razón cambia el nivel del agua cuando el volumen de agua en el tanque frontal es de 40 pies^3 y $x = 4$ pies?
b) En ese instante, el nivel del agua ¿sube o baja?

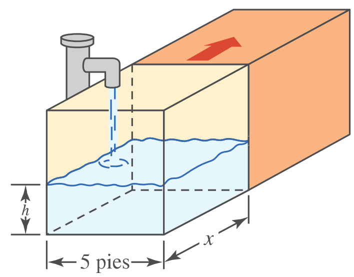

FIGURA 4.2.17 Tanque en el problema 32

33. Por la parte inferior de un tanque cónico se fuga agua a razón de 1 pie^3/min, como se muestra en la FIGURA 4.2.18.

a) ¿A qué razón cambia el nivel del agua cuando el agua tiene 6 pies de profundidad?
b) ¿A qué razón cambia el radio del agua cuando el agua tiene 6 pies de profundidad?
c) Suponga que el tanque estaba lleno en $t = 0$. ¿A qué razón cambia el nivel del agua en $t = 6$ min?

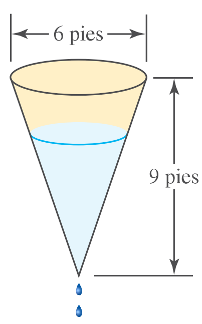

FIGURA 4.2.18 Tanque en el problema 33

34. Un canal de agua con extremos verticales en forma de trapezoides isósceles tiene las dimensiones mostradas en la FIGURA 4.2.19. Si se bombea agua a razón constante de $\frac{1}{2}$ m^3/s, ¿cuán rápido sube el nivel del agua cuando la profundidad del agua es de $\frac{1}{4}$ m?

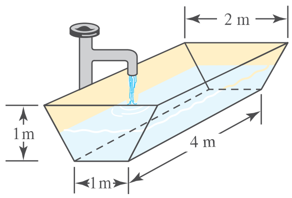

FIGURA 4.2.19 Tanque en el problema 34

35. Cada uno de los extremos verticales de un canal de agua de 20 pies de longitud es un triángulo equilátero con el vértice hacia abajo. Se bombea agua a razón constante de 4 pies^3/min.

a) ¿Cuán rápido sube el nivel h del agua cuando la profundidad del agua es de 1 pie?

b) Si h_0 es la profundidad inicial del agua en el canal, demuestre que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{10}\left(h_0^2 + \frac{\sqrt{3}}{5}t\right)^{-1/2}.$$

[*Sugerencia*: Considere la diferencia de volumen después de t minutos.]

c) Si $h_0 = \frac{1}{2}$ pie y la altura del extremo triangular es 5 pies, determine el instante en el que el canal está lleno. ¿Cuán rápido sube el nivel del agua cuando el canal está lleno?

36. El volumen V entre dos esferas concéntricas está en expansión. El radio de la esfera exterior crece a razón constante de 2 m/h, mientras el radio de la esfera interior disminuye a razón constante $\frac{1}{2}$ m/h. ¿A qué razón cambia V cuando el radio exterior es 3 m y el radio interior es 1 m?

37. Muchos objetos esféricos como las gotas de lluvia, las bolas de nieve y las bolas de naftalina se evaporan a una razón proporcional a su área superficial. En este caso, demuestre cómo el radio del objeto decrece a razón constante.

38. Si la razón a la cual cambia el volumen de una esfera es constante, demuestre que la razón a la cual cambia su área superficial es inversamente proporcional al radio.

39. Suponga que un cubo de hielo se derrite de modo que siempre conserva su forma cúbica. Si el volumen del cubo decrece a razón de $\frac{1}{4}$ pulg^3/min, ¿cuán rápido cambia el área superficial del cubo cuando el área superficial es de 54 pulg^2?

40. La rueda de la fortuna mostrada en la FIGURA 4.2.20 gira una vuelta completa en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj cada 2 minutos. ¿Cuán rápido sube una pasajera en el instante en que está 64 pies por arriba del suelo? ¿Cuán rápido se mueve horizontalmente en el mismo instante?

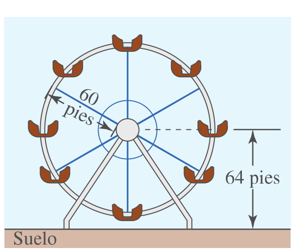

FIGURA 4.2.20 Rueda de la fortuna en el problema 40

41. Suponga que la rueda de la fortuna en el problema 40 está equipada con reflectores de colores fijos situados en varios puntos a lo largo de su circunferencia. Considere el reflector ubicado en el punto P en la FIGURA 4.2.21. Si los haces de luz son tangentes a la rueda en el punto P, ¿a qué razón se aleja el reflector en Q en tierra del punto R en el instante en que $\theta = \pi/4$?

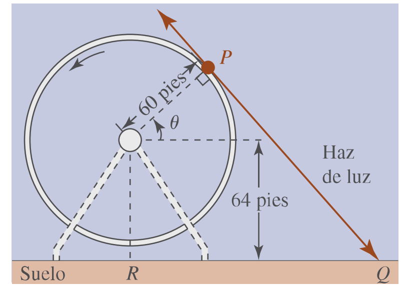

FIGURA 4.2.21 Rueda de la fortuna en el problema 41

42. Un clavadista salta desde una plataforma elevada con velocidad inicial hacia abajo de 1 pie/s hacia el centro de un gran tanque circular de agua. Vea la FIGURA 4.2.22. Por física, la altura del clavadista por arriba del nivel del suelo está dada por $s(t) = -16t^2 - t + 200$, donde $t \geq 0$ es el tiempo medido en segundos.

a) Use una función trigonométrica inversa para expresar θ en términos de s.

b) Encuentre la razón a la cual el ángulo θ subtendido por el tanque circular, según lo ve el clavadista, crece en $t = 3$ s.

c) ¿Cuál es el valor de θ cuando el clavadista golpea el agua?

d) ¿Cuál es la razón de cambio de θ cuando el clavadista golpea el agua?

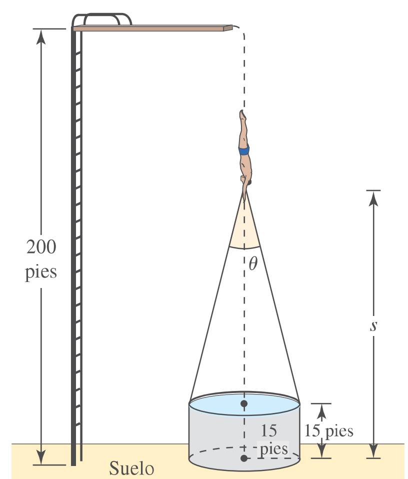

FIGURA 4.2.22 Clavadista en el problema 42

≡ Modelos matemáticos

43. Resistencia La resistencia total R en un circuito paralelo que contiene dos resistores de resistencias R_1 y R_2 está dada por $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$. Si cada resistencia cambia con el tiempo t, entonces ¿cómo están relacionadas dR/dt, dR_1/dt y dR_2/dt?