1.5 funciones Exponenciales

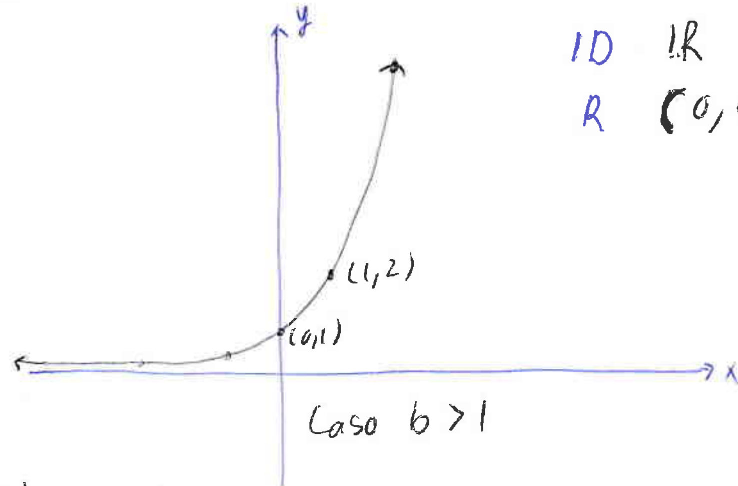
Forma General $f(x) = b^x$ $b \neq 1$ es una constante

Ejemplos de funciones exponenciales $2^x, 4^x, 10^x, \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $\left(\frac{1}{8}\right)^x$

Si la base es mayor que 1, $b > 1$, la función asciende de izquierda a derecha.

Algunos de los valores de $f(x) = 2^x$ son:

x	$f(x)$
$-\infty$	$2^{-\infty} \to 0$
-10	$\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \approx 0.001$
-5	$\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$
-1	$\frac{1}{2} = 0.5$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
5	$2^5 = 32$
2^{10}	$2^{10} = 1024$
∞	$2^{\infty} \to +\infty$



ID $\mathbb{R}$
R $(0, \infty)$

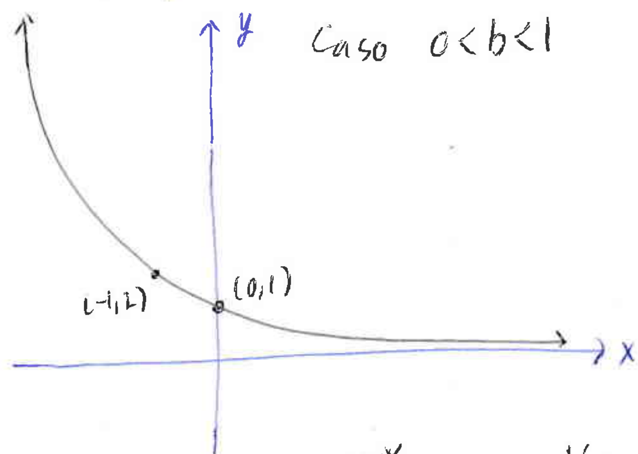
si $b>1$
Observe que $\lim\limits_{x \to -\infty} b^x = 0$ y $\lim\limits_{x \to \infty} b^x = \infty$

$b^{-\infty} \to 0$ $b^{\infty} \to \infty$

Si la base es menor que 1, $0 < b < 1$, la función desciende de izquierda a derecha

Por ejemplo, en la función $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ reescríbala con exponente negativo.

x	$g(x)$
$-\infty$	$2^{\infty} \to \infty$
-10	$2^{10} \Rightarrow 1{,}024$
-5	$2^5 \Rightarrow 32$
-1	$2^1 = 2$
0	$2^0 = 1$
1	$2^{-1} = 1/2$
2	$2^{-2} = 1/4$
10	$2^{-10} = 1/1024$
$+\infty$	$2^{-\infty} \to 0$



ID $\mathbb{R}$
R $(0, \infty)$

Si $b>1$ $\lim\limits_{x \to -\infty} b^{-x} = \infty$ $\lim\limits_{x \to \infty} b^{-x} = 0$

$b^{\infty} \to \infty$ $b^{-\infty} \to 0$

Esta función es siempre positiva.

Al observar la gráfica de cada caso se encuentra que:

- Dominio $\mathbb{R}$ Rango $\mathbb{R}^+$
- Intercepto-y: $(0,1)$ Intercepto-x: ninguno
- Son funciones uno a uno.
- No son ni pares ni impares.
- Tienen una AH en $y = 0$ (pero sólo de un lado)

Reglas de los exponentes.

Suma de Exponentes: $b^x b^y = b^{x+y}$, $8^3 8^5 = 8^8$

Resta de Exponentes: $\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$ $\dfrac{\pi^7}{\pi^4} = \pi^3$

Multiplicación: $(b^x)^y = b^{xy}$ $(5^3)^{2/3} = 5^2$

Distributivas: $(bc)^x = b^x c^x$ $(3\cdot x)^3 = 3^3 x^3 = 27x^3$

$\left(\dfrac{b}{c}\right)^x = \dfrac{b^x}{c^x}$ $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)^2 = \dfrac{(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6})^2} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Exponente 1: $b^1 = b$ $10002^1 = 10{,}002$

Exponente 0: $b^0 = 1$ $5^0 = \dfrac{5^1}{5^1} = 1$

Exponentes Recíprocos: $b^{-x} = \dfrac{1}{b^x}$ $10^{-8} = \dfrac{1}{10^8}$

Ejercicio 1: Grafique las siguientes funciones. Encuentre los interceptos y las asíntotas horizontales

a) $f(x) = 4^x - 4$

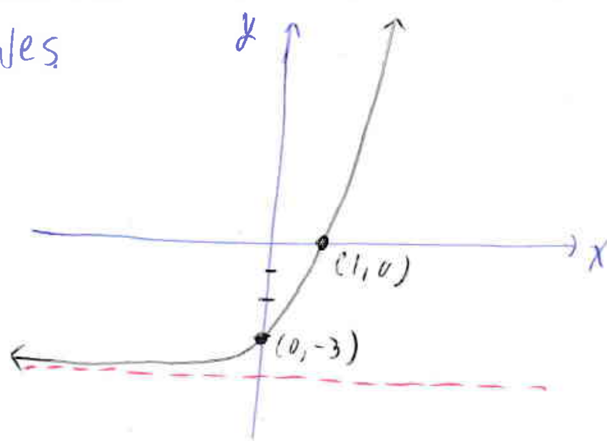
Dominio: $\mathbb{R}$

Intercepto-y $f(0) = 1 - 4 = -3$, $(0,-3)$

Intercepto-x $4^x - 4^1 = 0 \Rightarrow x = 1$, $(1,0)$

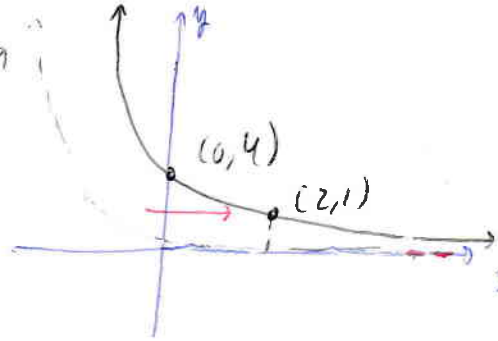
A.Hs $\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{4^x}_{0} - 4 = 0 - 4 = -4$

$4^\infty \to 4$ $\lim\limits_{x\to\infty} 4^x - 4 = +\infty$ $y = -4$



Desplaze 4^x 4 uds. hacia abajo.

b. $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ La gráfica de $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ se desplaza dos unidades hacia la derecha.



Dominio $\mathbb{R}$

Intercepto-y: $g(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$

el punto $(0,4)$.

Intercepto-x como $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} > 0$

No hay ningún intercepto.

AHS: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = 0$ $\quad 2^{-\infty} \to 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} (2)^{\overbrace{2-x}^{+\infty}} = +\infty$ $\quad 2^{\infty} \to \infty.$

como $0 < \frac{1}{2} < 1$

Derivadas de funciones Exponenciales.

La función exponencial más utilizada es la función exponencial natural

$y = e^x$ donde $e \approx 2.71825$

Utilice la definición de la derivada para encontrar la derivada de $y = e^x$

$$y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \underbrace{\left(\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} \right)}_{1} = e^x$$

El límite anterior es igual a uno y es la definición del número e.

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} 1 \Rightarrow \lim_{h \to 0} e^h - 1 = \lim_{h \to 0} h$$

$$\lim_{h \to 0} e^h = \lim_{h \to 0} 1 + h$$

$$\lim_{h \to 0} e = \lim_{h \to 0} (1+h)^{1/h}.$$

Derivada de e^x $\qquad \frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$

Ejemplo: Calcule la primera, segunda y tercera derivada de $h(t) = 4e^t - 4t^2$ respecto a t.

$h'(t) = 4e^t - 8t$

$h''(t) = 4e^t - 8$

$h'''(t) = 4e^t$

Ejercicio 1: Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = e^x + 4x + x^2$ en $x = 0$

Derivada: $y'(x) = e^x + 4 + 2x$

Pendiente: $y'(0) = 1 + 4 + 0 = 5$

Coordenada-y: $y(0) = 1 + 0 + 0 = 1$

Recta Tangente: $y = y(0) + y'(0)(x - 0)$ $\quad y = 1 + 5x$

3.2 Regla del Producto

Encuentre la derivada de $F(x) = (x^4 + x^2)(2x^5 + 5)$

Por el momento sólo se puede simplificar la expresión y después utilizar la regla de la potencia para cada término

$$F(x) = 2x^9 + 5x^4 + 2x^7 + 5x^2$$
$$F'(x) = 18x^8 + 20x^3 + 14x^6 + 10x$$

En muchos problemas la multiplicación es extensa como en $(x^3+x^2+x)(x^4-x^2+8)$, ó en $(x+1)^{10}(x-5)^9$ o no es posible simplificar la función como en x^2e^x, $x^3\ln x$, $\sqrt{x}\sin x$.

La regla del producto.

Si f y g son dos funciones diferenciables, entonces el producto fg es diferenciable y $(fg)' = f'g + fg'$

Ejercicio 1: Derive las siguientes funciones.

a. $F(x) = \underbrace{(x^4+x^2)}_{u}\underbrace{(2x^5+5)}_{w}$ $\qquad F'(x) = \underbrace{(4x^3+2x)}_{u'}\underbrace{(2x^5+5)}_{w} + \underbrace{(x^4+x^2)}_{u}\underbrace{10x^4}_{w'}$

$F'(x) = 8x^8 + 20x^3 + 4x^6 + 10x + 10x^8 + 10x^6 = \underbrace{18x^8 + 20x^3 + 14x^6 + 10x}_{\text{la misma respuesta}}$

b. $G(x) = (\sqrt{x} + x - 2)(\sqrt{x} - x)$ no simplifique.

$G'(x) = \left(\frac{1}{2}x^{-1/2} + 1\right)(x^{1/2} - x) + (x^{1/2} + x - 2)\left(\frac{1}{2}x^{-1/2} - 1\right)$

c. $H(x) = e^x(x^5 + e^x + x^3)$

$H'(x) = e^x(x^5 + e^x + x^3) + e^x(5x^4 + e^x + 3x^2)$

En algunos problemas es preferible simplificar la expresión antes que derivar.

$d(x) = x^{1/2}(2x^{1/2} + 8x^{-1/2})$

$d(x) = 2x + 8$ SIMPLIFIQUE

$d'(x) = 2$ Derive.

Si se utiliza la regla del producto de primero, la simplificación es más extensa.

Derive: $d'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}(2x^{1/2} + 8x^{-1/2}) + x^{1/2}(x^{-1/2} - 4x^{-3/2})$

Simplifique: $d'(x) = 1 + \cancel{4x^{-1}} + 1 - \cancel{4x^{-1}} = 2$ misma respuesta.

$e(x) = x^{-4}x^{1012}$ Sume exponentes y luego derive.

$e(x) = x^{1008}$ $e'(x) = 1008x^{1007}$

$f(x) = (x^{3/2} - 4)(x^{3/2} + 4)$ Diferencia de cuadrados.

$f(x) = x^3 - 16.$ $f'(x) = 3x^2$

$g(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$ Suma de cubos

$g(x) = x^3 + 8$ $g'(x) = 3x^2$

Si no se simplifica $g(x)$, la derivación y simplificación es más extensa.

$g'(x) = 1(x^2 - 2x + 4) + (x+2)(2x-2)$

$g'(x) = x^2 - 2x + \cancel{4} + 2x^2 - 2x + 4x - \cancel{4} = 3x^2 - 4x + 4x = 3x^2$