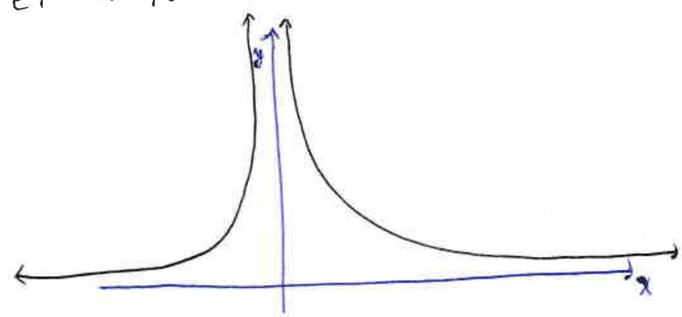
Límites al Infinito.

Considere $f(x) = \frac{1}{x^2}$ analice el comportamiento de f a medida que aumentan los valores de x.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
100	10^{-4}	-100	10^{-4}
10,000	10^{-8}	$-1{,}000$	10^{-8}
$x \to \infty$	$f(x) \to 0$	$x \to -\infty$	$f(x) \to 0$



La notación $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ indica que $f(x) \to 0$ conforme x se hace más y más grande.

En general $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ indica que $f(x)$ se acerca a L conforme x se hace más y más grande.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ indica que $f(x) \to L$ mientras x se hace "negativamente" grande.

Observe que si el exponente es un número positivo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad \text{Forma } \frac{1}{\infty} \to 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{x^n} = 1$$

Ejercicio 3: Encuentre los sigs. límites (si existen).

a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5}{x^8} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x^3} = 0$ $\quad \frac{3}{\infty} \to 0$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{x^2+8} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}(1+5/x)}{\cancel{x}(x+8/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\frac{3x}{x^2} \to 0$ a medida que $x \to \infty$.

Compare exponentes como $3x < x^2$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x}{x^2-x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2}\frac{(1+2/x^2)}{(1-1/x+5/x^2)} = \lim_{x\to\infty} x = +\infty$ no existe

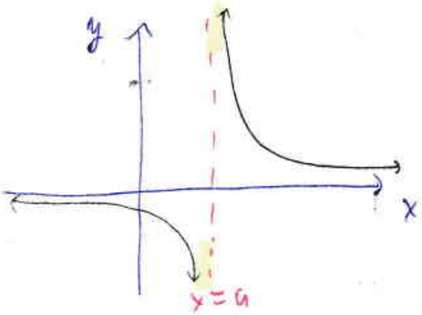
d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{50+x^4}{10x^4+100x-10} = \lim_{x\to-\infty} \frac{50/x^4+1}{10+100/x^3-10/x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{10} = \frac{1}{10}.$

Compare el denominador y el numerador, tienen la misma potencia.

Asíntotas Verticales.

La recta $x=a$ se llama Asíntota vertical (AV) de $y=f(x)$ si

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty \quad \lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty \quad \lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$$



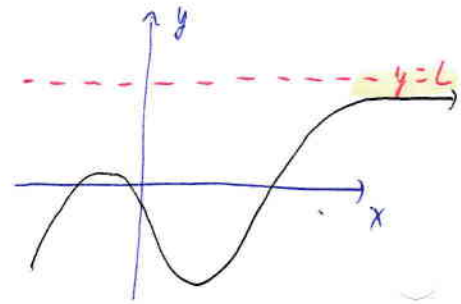
Observaciones.

- Corresponden a la forma $k/0$.
- Puede que haya un agujero si la forma es $\frac{0}{0}$.

Asíntotas Horizontales:

La recta horizontal $y=L$ se llama Asíntota Horizontal (AH) de $y=f(x)$ si

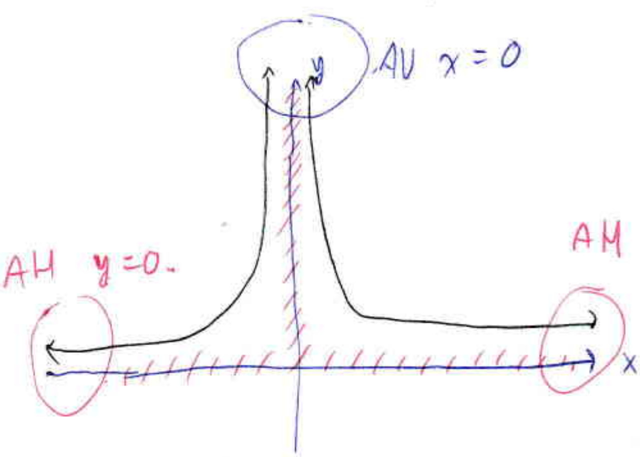
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+L$$



Ejercicio 1: dadas las sigs funciones.

Encuentre las asíntotas horizontales y verticales de $f(x)$.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$



AVs: f se indefine en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}=+\infty \qquad \frac{1}{0^+}\to\infty$$

hay una asíntota vertical en $x=0$

AHs:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}=0 \qquad \frac{1}{\infty}\to 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^4}=0 \qquad \frac{1}{\infty}\to 0$$

hay una asíntota horizontal en $y=0$

b. $g(x) = \dfrac{x+5}{x^2-25}$ Note que g se indefine en $x = \pm 5$.

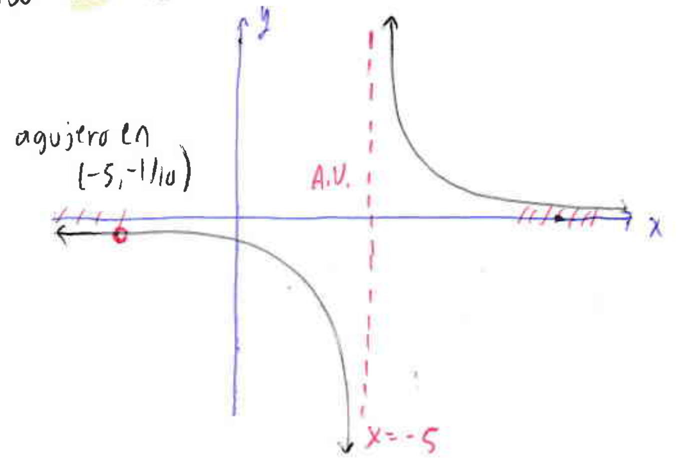
Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to 5^+} \frac{x+5}{(x+5)(x-5)} = \lim_{x\to 5^+} \frac{1}{x-5} = +\infty$ $\quad \frac{1}{0^+}$

$\displaystyle\lim_{x\to 5^-} \frac{1}{x-5} = -\infty$ $\quad \frac{1}{0^-}$

Hay una A.V en $x=5$

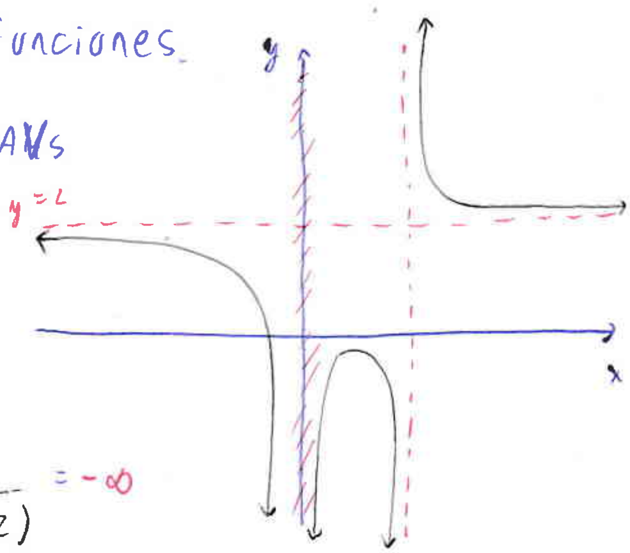
PERO $\displaystyle\lim_{x\to -5} \frac{x+5}{x^2-25} = \lim_{x\to -5} \frac{1}{x-5} = -\frac{1}{10}$ no hay AV en $x=-5$ sólo un agujero $(-5, -1/10)$

AHs: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x^2-25} = 0$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x+5}{x^2-25} = 0$ $\quad$ AH: $y=0$



Encuentre las AHs de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \dfrac{9x^3+1}{3x^3-6x^2}$ También las AVs



AH $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{9x^3+1}{3x^3-6x^2} = 3$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{9x^3+1}{3x^3-6x^2} = 3$

$y=2$

f se indefine en $3x^2(x-2)=0$ $\quad x=0,2$

AVs: $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{9x^3+1}{3x^2(x-2)} = -\infty$ $\quad \frac{9}{0^+(-2)}$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{9x^3+1}{3x^2(x-2)} = -\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{9x^3+1}{3x^2\underbrace{(x-2)}_{0^-}} = -\infty$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{9x^3+1}{3x^2(x-2)} = +\infty$

AVs: $x=0, 2$

b. $g(x) = \dfrac{10x^5 + 4x^3 - 3x}{3x^5 + 5x^3 + 2}$ Como el numerador y el denominador tienen las mismas potencias

AH: $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \dfrac{10}{3}$ $\lim_{x \to \infty} g(x) = \dfrac{10}{3}$ $y = \dfrac{10}{3}$

c. $h(x) = e^{1/x}$ Como $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

AHs: $\lim_{x \to \infty} e^{1/x} = e^0 = 1$ $\lim_{x \to -\infty} e^{\overset{\to 0}{1/x}} = e^0 = 1$ $y = 1$

d. $k(t) = \tan\left(\dfrac{1}{t+3}\right)$

AH: $\lim_{t \to \infty} \tan\left(\dfrac{1}{t+3}\right) = \tan\left(\lim_{t \to \infty} \dfrac{1}{t+3}\right) = \tan 0 = 0$

$\lim_{t \to -\infty} \tan\left(\dfrac{1}{t+3}\right) = \tan 0 = 0$ AH: $y = 0$

Ejercicio 3: Considere $m(t) = \dfrac{\sqrt{4t^2+5}}{t+1}$ (Pág. 58)

a. Encuentre las AVs.

$m(t)$ se indefine en $t = -1$ Note que $\sqrt{4 \cdot 1 + 5} = \sqrt{9} = 3 > 0$

$\lim_{\underset{-1.1}{t \to -1^-}} \dfrac{\sqrt{4t^2+5}}{\underset{0^-}{t+1}} = -\infty$ $\dfrac{3}{0^-}$ $\lim_{t \to -1^+} \dfrac{\sqrt{4t^2+5}}{\underset{0^+}{t+1}} = +\infty$ AV. $t = -1$

b. Encuentre las AHs. Factorice t^2 de la raíz. $\sqrt{t^2} = \begin{cases} -t & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$

$\lim_{t \to \infty} \dfrac{\sqrt{t^2}\sqrt{4 + 5/t^2}}{t+1} = \lim_{t \to \infty} \dfrac{\sqrt{4}\, t}{t+1} = \sqrt{4} = 2$

$\lim_{t \to -\infty} \dfrac{\underbrace{\sqrt{t^2}}_{-t}\sqrt{4 + 5/t^2}}{t+1} = \lim_{t \to -\infty} \dfrac{-2t}{t+1} = -2$

AHs: $m \pm 2$.

Como $t < 0$ reemplace $\sqrt{t^2}$ por $-t$ para que este número sea positivo.

c. Encuentre los interceptos con los ejes de $m(t)$.

Intercepto-y: $m(0) = \frac{\sqrt{0+5}}{0+1} = \sqrt{5}$ el punto $(0, \sqrt{5})$

Intercepto-t: $m(t) = 0$ $\quad \frac{\sqrt{4t^2+5}}{t+1} = 0 \Rightarrow \sqrt{4t^2+5} = 0$

como $4t^2+5 > 0$

entonces $\sqrt{4t^2+5} \neq 0$ No hay interceptos con el eje horizontal

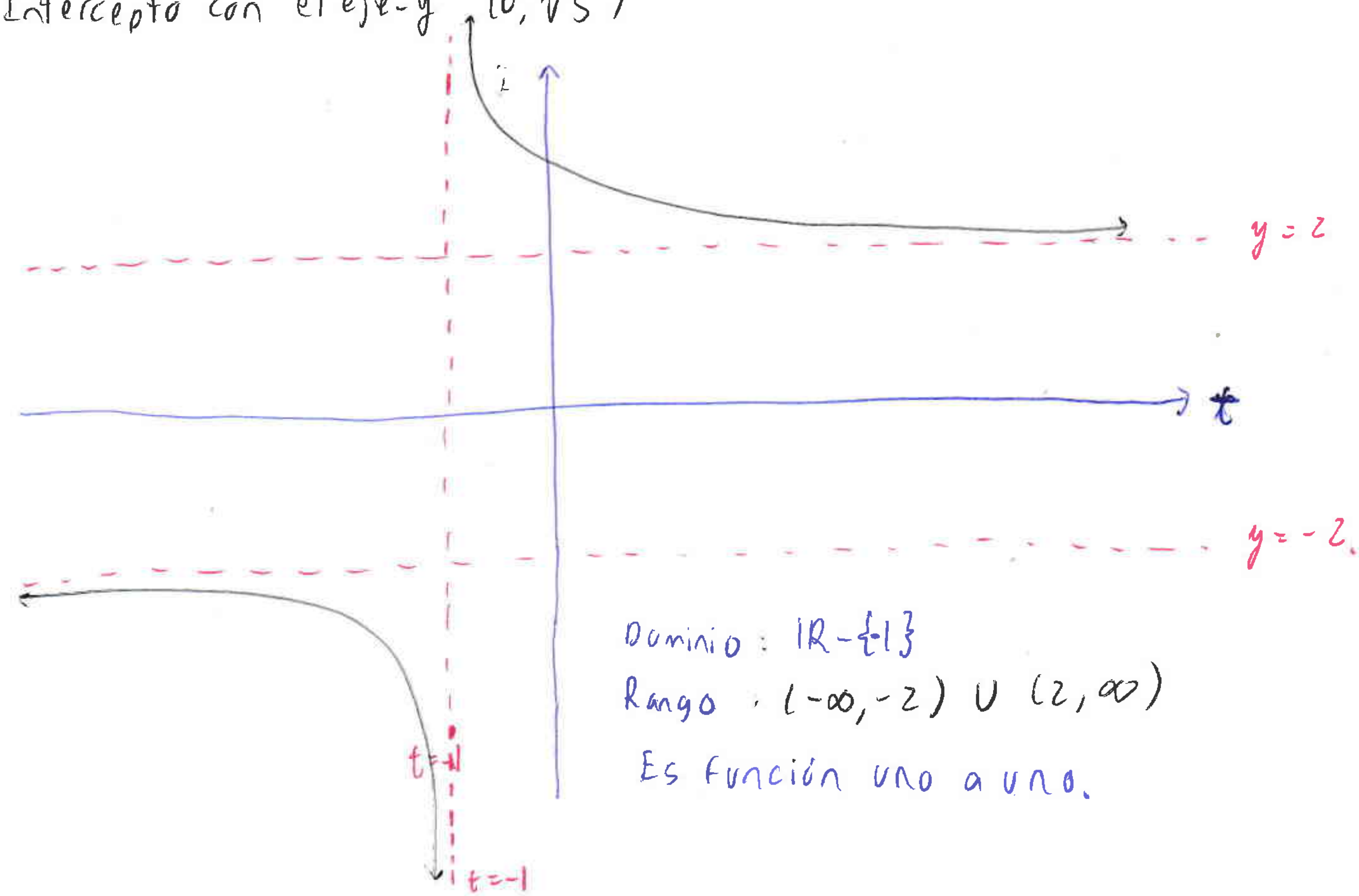
d. Grafique la función utilizando la información anterior.

El dominio de $m(t)$ es $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

Hay AV en $t = -1$ ($-\infty$ a la izq y $+\infty$ a la dere de $t = -1$)

AHs: $y = \pm 2$.

Intercepto con el eje-y $(0, \sqrt{5})$



Dominio: $\mathbb{R} - \{-1\}$

Rango: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

Es función uno a uno.