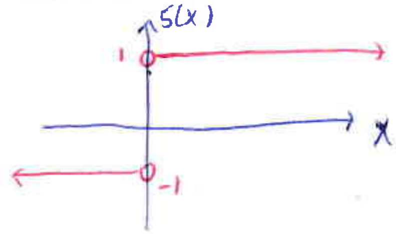
2.3 Límites (Continuación)

Límites Laterales

Considere la función signo, la cual devuelve sólo el signo de un número.

$$S(x) = \begin{cases} -1 & , \ x < 0 \\ 0 & , \ x = 0 \\ 1 & , \ x > 0 \end{cases}$$



Analice si $\lim_{x \to 0} s(x)$ existe o no existe

Si $x < 0$ $(x \to 0^-)$ $S(x)$ se aproxima a -1
Si $x > 0$ $(x \to 0^+)$ $S(x)$ se aproxima a $+1$

$S(x)$ se aproxima a dos números diferentes
$\lim_{x \to 0} S(x)$ NO EXISTE

Límite izquierdo de $f(x)$ cuando x se aproxima a por la izquierda

$x < a$ $\qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = L$

Límite derecho de $f(x)$ cuando x se aproxima a a por la derecha.

$x > a$ $\qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$

- Los límites de este tipo se conocen como límites laterales.
- $\lim_{x \to a} f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ ambos límites laterales son iguales.

Ejercicio 1: Evalúe los sigs. límites. Indique si existen.

a. $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$ existe.

b. $\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x}$ no existe la raíz cuadrada no está definida para números negativos.

c. $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$ curiosamente NO EXISTE
porque uno de los límites laterales $\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x}$ no existe.

d. $h(t) = \begin{cases} \sqrt{t+4} \;, & t < 2 \\ 4 - t \;, & t > 2 \end{cases}$

i) $\lim\limits_{t \to 0} h(t) = \lim\limits_{t \to 0} \sqrt{t+4} = \sqrt{0+4} = \sqrt{2}$ EXISTE

Utilice el primer tramo porque $0<2$

ii) $\lim\limits_{t \to 2} h(t)$ NO EXISTE.

Para $t<2$ utilice el primer tramo y para $t>2$ utilice el segundo.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{t \to 2^-} h(t) &= \lim_{t \to 2^-} \sqrt{t+4} = \sqrt{6} \\ \lim_{t \to 2^+} h(t) &= \lim_{t \to 2^+} 4 - t = 2 = \sqrt{4} \end{aligned}\right\}$$

los dos números no son iguales
el límite no existe.

e. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{8-x}{|8-x|}$ Note que en $x=8$, el numerador y denominador son 0.

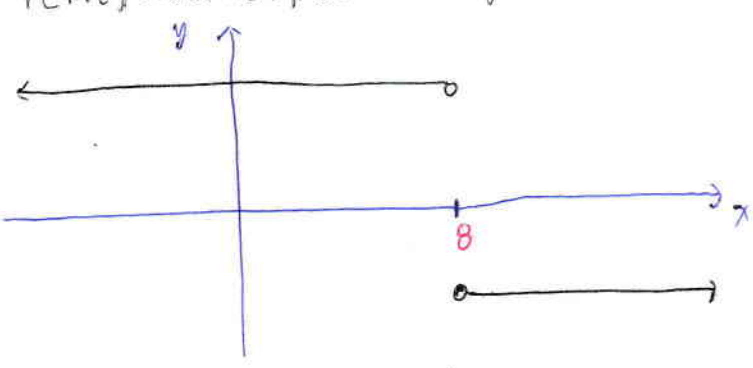
$|8-x|$ es una función por tramos $|8-x| = \begin{cases} 8 - x \;, & x < 8 \\ x - 8 \;, & x \geq 8 \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 8^-} \underbrace{\frac{8-x}{|8-x|}}_{\text{reemplace por } 8-x} &= \lim_{x \to 8^-} \frac{\cancel{8-x}^{\,1}}{\cancel{8-x}} = \lim_{x \to 8^-} 1 = 1 \\ \lim_{x \to 8^+} \frac{8-x}{|8-x|} &= \lim_{x \to 8^+} \frac{\cancel{8-x}^{\,1}}{-(\cancel{8-x})} = \lim_{x \to 8^+} -1 = -1 \end{aligned}\right\}$$

no son iguales.
$\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{8-x}{|8-x|}$ no existe.

Observación: esta función se simplifica como $\dfrac{8-x}{|8-x|} = \begin{cases} 1 & x < 8 \\ -1 & x > 8 \end{cases}$

la cual es la función signo desplazada 8 unidades a la derecha y reflejada respecto al eje-x.



Gráficamente

$\lim\limits_{x \to 8^-} \dfrac{8-x}{|8-x|} = 1$

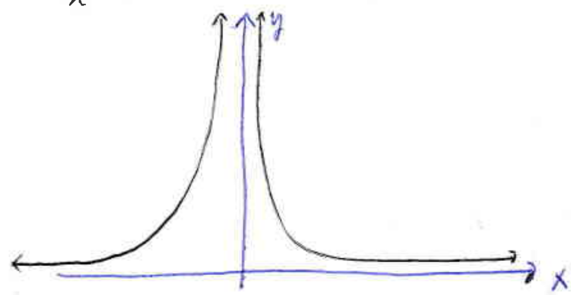
$\lim\limits_{x \to 8^+} \dfrac{8-x}{|8-x|} = -1$

el límite no existe en $x=8$, hay un salto.

Límites Infinitos.

Analice el comportamiento de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ a medida que $x \to 0$.

$x \to 0^+$	$f(x)$	x	$f(x)$
0.1	100	-0.1	100
0.01	10,000	-0.01	10,000
0.001	1,000,000	-0.001	1,000,000
$x \to 0^+$	$f(x) \to \infty$	$x \to 0^-$	$f(x) \to \infty$



A medida que $x \to 0$, los valores de $f(x)$ se hacen más y más grandes.

Por lo que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ NO EXISTE

Dividir 1 entre un número pequeño positivo (0^+) nos da un número más y más grande, para expresar este comportamiento utilice la siguiente notación.

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

la cual expresa que el límite no existe, porque los valores $f(x)$ se vuelven cada más grandes.

Del mismo modo, $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ significa que el límite no existe porque los valores $f(x)$ se vuelven "negativamente grandes."

Ejercicio 2: Encuentre los siguientes. Si no existen, explique por qué no existen.

a. $\lim_{x \to 3^-} \frac{4}{2x-6} = \lim_{x \to 3^-} \frac{4}{\underbrace{2(x-3)}_{0^-}} = -\infty$ $\quad \frac{1}{0^-}$ no existe los números se vuelven negativamente grandes

como 2.9

Si $x \to 3^-$, entonces $x-3<0$,

b. $\lim_{x \to 3^+} \frac{2}{x-3} = +\infty$ $\quad \frac{1}{0^+}$ no existe los valores se vuelven más grandes

como 3.1

c. $\lim_{x \to 3} \frac{2}{x-3}$: no existe hay diferentes tendencias $\pm\infty$ en cada límite lateral.

d. $\lim_{x\to -4} \frac{x+4}{x^2-16} = \lim_{x\to -4} \frac{\cancel{(x+4)}^{1}}{\cancel{(x+4)}(x-4)} = \lim_{x\to -4} \frac{1}{x-4} = \frac{1}{-8}$ existe

$0/0$

Simplifique antes de evaluar

e. $\lim_{x\to 4} \frac{x+4}{x^2-16} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{x-4}$

tiene la forma $\frac{1}{0}$, analice la tendencia de cada límite lateral

$\lim_{x\to 4^-} \frac{1}{x-4} = -\infty$ $\quad \frac{1}{0^-}$

$\lim_{x\to 4^+} \frac{1}{x-4} = +\infty$ $\quad \frac{1}{0^+}$

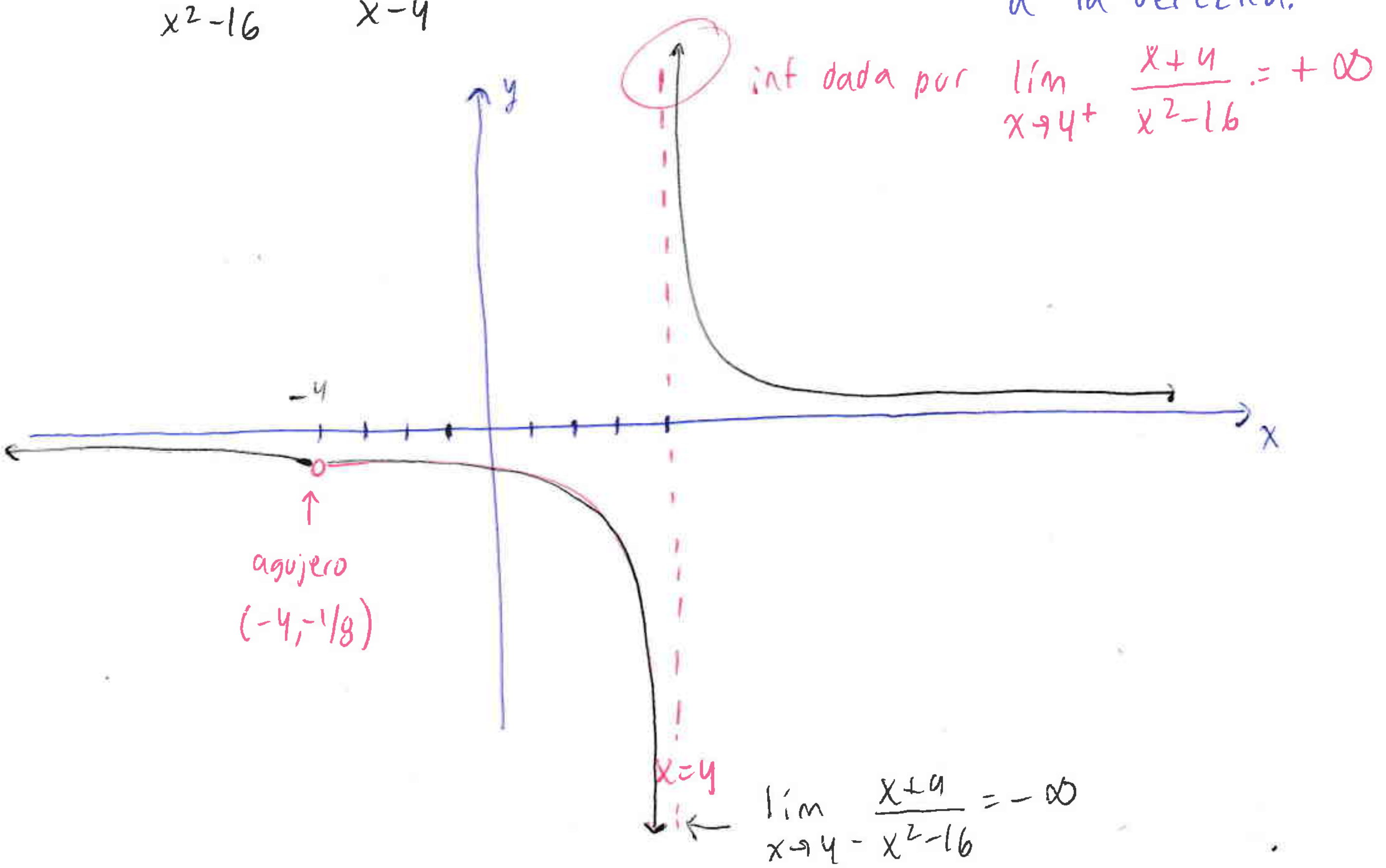
PERO $\lim_{x\to 4} \frac{x+4}{x^2-16} = \mp\infty$ ó no existe.

5. Grafique $\frac{x+4}{x^2-16}$ utilizando información sobre límites.

El Dominio de la función es $(-\infty,-4)\cup(-4,4)\cup(4,\infty)$

Como $\lim_{x\to -4} \frac{x+4}{x^2-16} = -\frac{1}{8}$ la función tiene un agujero en $(-4,-1/8)$

Como $\frac{x+4}{x^2-16} = \frac{1}{x-4}$ si $x \neq -4$ Grafique $1/x$ desplazada 4 unidades a la derecha.



Límites al Infinito

La notación $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

se utiliza para indicar que $f(x) \to L$ conforme x se hace más y más grande.

Del mismo modo $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

Significa que $f(x)$ se acerca a L conforme x se vuelve negativamente grande.

Tienen la forma $\frac{K}{\pm\infty} \to 0$ y son frecuentes en funciones racionales

Si el exponente n es un entero o real positivo $n \in \mathbb{R}^+$

- $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\quad \frac{1}{\infty} \to 0$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\quad \frac{1}{-\infty} \to 0$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{x^n} = 1$

Los límites al infinito de funciones racionales $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se pueden determinar al comparar las potencias principales del numerador y del denominador.

- Si la potencia más alta del numerador es menor que la más alta del denominador.

$$n < m \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0} = 0 \qquad \text{como en } \frac{x^3+1}{x^5+1} \to 0 \text{ si } x \to \infty$$

- Si ambas potencias son iguales.

$$n = m \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n}{b_n} \qquad \text{como en } \frac{2x^3+1}{4x^3+2} \to \frac{2}{4}$$

- Si la potencia del numerador es mayor que la del denominador.

$$n > m \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0} = \pm\infty \qquad \text{como en } \frac{x^5+1}{-x^3+x} \to -\infty.$$

El signo $\pm\infty$ depende de los signos de a_n y b_n.

Ejercicio 3: Encuentre los sigs. límites (si existen)

a. $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^5}{x^7} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x^2} = 0$ $\quad \frac{1}{\infty} \to 0$

potencia mayor que cero.

b. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x + 6}{x^{1/2} + 8} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^{1/2}(x^{1/2} + 6/x^{1/2})}{x^{1/2}(1 + 8/x^{1/2})} = \lim_{x \to \infty} x^{1/2} = +\infty$

Factorice $x^{1/2}$

c. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x}{x^2 - x + 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2(x + 2/x)}{x^2(1 - 1/x + 5/x^2)} = \lim_{x \to \infty} x = +\infty.$

no existe.

ó como $x^3 > x^2$ $\quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x}{x^2 - x + 5} = +\infty$

numerador > denominador

d. $\lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2 + 8)^3}{(x^2 + 2)^4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2)^3(1 + 8/x^2)^3}{(x^2)^4(1 + 2/x^2)^4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^6(1+0)}{x^8(1+0)} = 0$

denominador > numerador.

en vez de expandir, factorice use $(ab)^n = a^n b^n$

e. $\lim_{x \to \infty} \frac{50 + 24x + 100x^2 - 4x^3 + x^4}{10x^4 + 100x^3 - 10x^2 + 100x - 10} = \lim_{x \to \infty} \frac{0 + x^4}{10x^4 + 0} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

Compare las potencias principales, como son iguales

f. $\lim_{x \to \infty} x^5 - 3x^3 = \lim_{x \to \infty} \frac{x^5 - 3x^3}{1} = +\infty.$

$x^5 > 1$

Observación: en estos problemas hay que revisar el signo para $+\infty$ ó $-\infty$

Por ejemplo $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 5x^5}{1} = -\infty$ $\quad$ porque $-5x^5$ es negativo y el denominador es positivo

Ahora en $\lim_{x \to \infty} \frac{8 - 2x^3}{-x - 5} = +\infty.$ $\quad$ porque $-2x^3$ es negativo y $-x$ es negativo.