1.6 Logaritmos

Las funciones exponenciales a^x son funciones uno a uno por lo que tienen funciones inversas conocidas como **funciones logarítmicas.**

Una **función logarítmica** tiene la forma

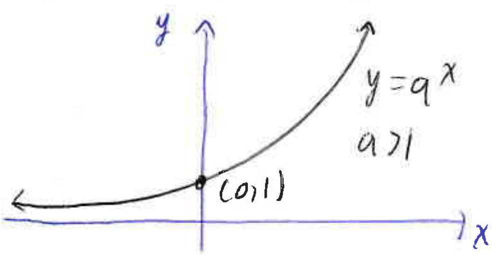
$$f(x) = \log_a x \qquad \text{la base } a \neq 1 \text{ es una constante.}$$

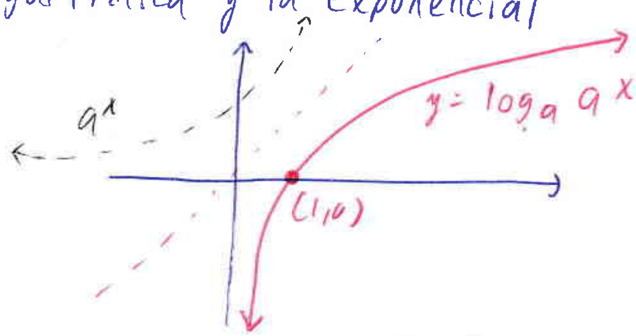
Se define como $\quad y = \log_a x \iff x = a^y \quad$ "y es el exponente"

Propiedades de cancelación: Como $f(x) = \log_a x$ y $f^{-1}(x) = a^x$ son inversas entre sí entonces $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$. Obtenemos las sigs. ecuaciones de cancelación.

$$\log_a a^x = x$$
$$a^{\log_a x} = x$$

Comparación entre la función logarítmica y la exponencial





Dominio $(-\infty, \infty)$	Dominio $(0, \infty)$ Rango $(-\infty, \infty)$
Rango $(0, \infty)$	
A.H en $y = 0$ $\quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ →	A.V en $x = 0$ $\quad \lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$
Intercepto-y $\quad (0,1)$	Intercepto-y $\quad$ ninguno
Intercepto-x $\quad$ ninguno	Intercepto-x $\quad (1,0)$
No es función par ni impar	No es función par ni impar.
$y(1) = a \quad (1,a)$ es punto de a^x	Su gráfica es un reflejo de a^x respecto a la recta $y = x$.
	$(a,1)$ es un punto de $\log_a x$, es decir $\log_a a = 1$.

Evaluación e interpretación de un logaritmo.

El logaritmo de un número $y = \log_a x$ es la potencia a la cual debe elevarse b para obtener el número x, $a^y = x$

Por ejemplo, evalúe las siguientes expresiones.

a) $y = \log_2 16$ Reescriba $2^y = 16 = 2^4$ iguale potencias $y = 4$

o utilice cancelación $y = \log_2 2^4 = 4$ recuerde que $\log_a a^{\square} = \square$

b) $y = \log_3 \frac{1}{9}$ Reescriba $3^y = \frac{1}{9} = 3^{-2} \Rightarrow y = -2.$

Una función logarítmica tiene dos formas

forma logarítmica $y = \log_a x$ forma Exponencial $a^y = x$.

Ejercicio 1: Evalúe las siguientes logaritmos y simplifique a un entero

o. $\log_2 0.125 = \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$ por ecs. cancelación

ó Reescriba $2^y = 2^{-3} \Rightarrow y = -3.$

a. $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$

b. $\log 0.01 = \log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2$

cuando no aparece una base, se refiere uno a la base 10 $\log_{10} y = \log y$.

El logaritmo de base e se conoce como el logaritmo natural y se denota como $\ln(\,)$ $\log_e y = \ln y$.

c. $\ln e^{\sqrt{4}} = y \Rightarrow e^y = e^{\sqrt{4}} \Rightarrow y = \sqrt{4} = 2$

d. $\log_{64} 8 + \log_{25} 5 = \log_{64} 64^{1/2} + \log_{25} 25^{1/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Logaritmos más comunes:

logaritmo común o base 10 $\log x = \log_{10} x$

logaritmo natural o de base e $\ln x = \log_e x$

4.3 Propiedades de los Logaritmos (Haussler)

1. Suma: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ viene de $a^x a^y = a^{x+y}$
2. Resta: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ viene de $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.
3. Potencia: $\log_a(x^r) = r\log_a x$ viene de $(a^x)^r = a^{rx}$
4. Logaritmo de 1: $\log_a 1 = \log_a a^0 = 0$
5. Logaritmo de a: $\log_a a = \log_a a^1 = 1$
6. Recíproco: $\log_a \frac{1}{x} = \cancel{\log_a 1}^{0} - \log_a x = -\log_a x$

Ejercicio 2: Simplifique las siguientes expresiones a un número entero.

0. $\log_{e^3-1}(e-1) + \log_{e^3-1}(e^2+e+1) = \log_{e^3-1}(e-1)(e^2+e+1)$
$= \log_{e^3-1}(e^3-1) = 1$

use $\log a + \log b = \log(ab)$

a. $\log 25 + \log 4 = \log 25\cdot 4 = \log 100 = \log 10^2 = 2\cdot 1 = 2.$

b. $\log_3 300 - \log_3 100 = \log_3 \frac{300}{100} = \log_3 3 = 1$

c. $\log_4(400) - \underbrace{2\log_4(5)}_{\log_4(5^2)} = \log_4\left(\frac{400}{25}\right) = \log_4(16) = \log_4(4^2) = 2.$

d. $e^{7\ln 2 - 3\ln 4} = e^{\ln 2^7 - \ln 4^3} = e^{\ln \frac{128}{64}} = e^{\ln 2} = 2$ e y ln se cancelan entre sí

Ejercicio 3: Escriba las sigs. expresiones sólo en términos de logaritmos de ln z, ln y, ln x.

0. $\ln\left(\frac{y^{10}}{z^5 x^{20}}\right)^{1/5} = \ln \frac{y^2}{z x^4} = \ln y^2 - \ln z - \ln x^4 = 2\ln y - \ln z - 4\ln x$

a. $\ln(xy^2z^3) = \ln x + \ln y^2 + \ln z^3 = \ln x + 2\ln y + 3\ln z$

b. $\ln\left(\sqrt{\frac{x^2 z^3}{y^5}}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln x^2 + \ln z^3 - \ln y^5\right) = \ln x + \frac{3}{2}\ln z - \frac{5}{2}\ln y.$

4

c. $\ln\left(\sqrt{7+e^3}+\sqrt{7}\right)+\ln\left(\sqrt{7+e^3}-\sqrt{7}\right)=y$ multiplique lns.

$$\ln\left[\underbrace{\left(\sqrt{7+e^3}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7+e^3}-\sqrt{7}\right)}_{\text{diferencia cuadrados.}}\right]=\ln\left(7+e^3-7\right)=\ln e^3=3.$$

d. $2^{2\log_2 x-4\log_2 y}$ Simplifique sólo en términos de x & y.

$$=2^{\log_2 x^2}/2^{\log_2 y^4}=\frac{x^2}{y^4}$$

Cambio de base: permite expresar logaritmos de una base en términos de otras bases.

$$\log_b x=\frac{\ln x}{\ln b}\qquad \log_b x=\frac{\log x}{\log y}$$

Ejemplos: $\log_4 11=\frac{\ln e^{11}}{\ln 4}=11$, $\log_{25} 5=\frac{\log_5 5}{\log_{25} 5}=\frac{1}{0.5}=2.$

Ecuaciones Logarítmicas y Exponenciales

Ec. Exponecial: tiene la forma $3^x=81$, el exponente es incógnita.

Ec. logarítmica: incluye logaritmos y tiene una incógnita $\log_3 y=3^3$.

Ejercicio 4: Resuelva para x.

0. $8\ln x-32=0 \Rightarrow \ln x=4$ eleve $e^{\ln[\,]}$ $\Rightarrow x=e^4$

a. $3^{8x-12}-81=0 \Rightarrow 3^{8x-12}=3^4$ iguale exps. $8x-12=4$ $8x=16$ $x=2.$

b. $\log 8-\log(x-1)=\log 4 \Rightarrow \log(x-1)=10^4 \Rightarrow e^4$

c. $5^{-2x}5^{4x}=625 \Rightarrow 5^{\ }=(625) \Rightarrow 5^{2x^2}=25^2=5^4$ Por microeconomía

$\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=+2$

$x-2$ se descarta

d. $\log_2(x-\sqrt{5})+\log_2(x+\sqrt{5})=2$ $\quad \log_2\left[(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})\right]=2$

Definidas sólo si $x>\sqrt{5}$

$\Rightarrow (x^2-5)=4 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=3$

descarte $x=-3$