1. Derivada dy/dx

a. $$\frac{dy}{dx} = 7x^6 + 7^x \ln 7 + 0 + 7e^{7x}$$

b. Regla del Cociente: $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x^2+1}\cot x + \csc^2 x \tan^{-1} x}{\cot^2 x}.$$

c. 3 Reglas de la cadena: $$\frac{dy}{dx} = \frac{-\operatorname{sech}(10^{x^3+x^2})\tanh(10^{x^3+x^2})\,10^{x^3+x^2}(3x^2+2x)\ln 10}{\operatorname{sech}(10^{x^3+x^2})\qquad \ln 10}$$

d. Diferenciación Logarítmica

$$\ln y = (\tanh 3x + \operatorname{sech} 4x)\ln(\sinh x + \cosh 2x)$$

$$\frac{y'}{y} = (3\operatorname{sech}^2 3x - 4\operatorname{sech} 4x)\ln(\sinh x + \cosh 2x)$$
$$+ (\tanh 3x + \operatorname{sech} 4x)\cdot \frac{\cosh x + 2\sinh 2x}{\sinh x + \cosh 2x.}$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sinh x + \cosh 2x)^{\tanh 3x + \operatorname{sech} 4x}\left[(3\operatorname{sech}^2 3x - 4\operatorname{sech} 4x)\ln(\sinh x + \cosh 2x) + (\tanh 3x + \operatorname{sech} 4y)\frac{(\cosh x + 2\sinh 2x)}{\sinh x + \cos 2x}\right]$$

e. Diferenciación Implícita:

$$xy^{-2} + y^2x^{-1} = 5$$

$$1\cdot y^{-2} - 2xy^{-3}y' + 2yx^{-1}y' - y^2x^{-2} = 0$$

$$(2yx^{-1} - 2xy^{-3})y' = y^2x^{-2} - y^{-2}$$

$$y' = \frac{y^2x^{-2} - y^{-2}}{2yx^{-1} - 2xy^{-3}}$$

2. Simplifica, deriva.

a. $5^{\log_5 a(x)} = 8^{10\log_8(x^2+x+1)}$

$a(x) = 8^{\log_8(x^2+x+1)^{10}}$

$a(x) = (x^2+x+1)^{10}$ $\qquad a'(x) = 10(x^2+x+1)^9(2x+1)$

b. $b(x) = \dfrac{\log_{e^e} x^e}{4^{\log_4(1/x)}} = \dfrac{e \log_{e^e} x}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x\,\dfrac{e \cdot \ln x}{e} = x\ln x$

cambio de base $\log_{e^e} x = \dfrac{\ln x}{\ln e^e} = \dfrac{\ln x}{e\,\cancel{\ln e}}$

$b(x) = x\ln x$ $\qquad b'(x) = 1\cdot \ln x + 1$

3. Resonancia $\quad F_0 = 10,\ \omega = 0.5$

$y(t) = 20\sin\left(\frac{t}{2}\right) - 10t\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ $\quad m$

a. Velocidad del resorte a los $t = \pi$ s.

$y'(t) = 10\cos\left(\frac{t}{2}\right) - 10\cos\left(\frac{t}{2}\right) + 5t\sin\left(\frac{t}{2}\right) = 5t\sin\left(\frac{t}{2}\right)$

$y'(\pi) = 10\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{0} - 10\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{0} + 5\pi\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{1} = 5\pi$ $\quad m/s$

b. Aceleración del resorte a los $t = \pi$ s.

$y''(t) = 5\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{5}{2}t\cos\left(\frac{t}{2}\right)$

$y''(\pi) = 5\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{1} + \frac{5}{2}\pi\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{0} = 5 \ m/s^2$

4. Vida media carbono-14 5,730.

a. Tasa relativa de decaimiento.

$y = y_0 e^{kt}$. $\quad y(5730) = y_0 e^{5730k} = y_0/2$

$e^{5730k} = 0.5 \Rightarrow \boxed{k = \frac{\ln(0.5)}{5730}}$

b. Cantidad de carbono-14

$y = y_0 e^{\frac{t}{5730}\ln(0.5)} = y_0 e^{\ln(0.5)^{t/5730}} = y_0 \underbrace{0.5}_{1/2}{}^{t/5730}$

$\boxed{y(t) = y_0 2^{-t/5730}}$

c. Antigüedad del sudario Use $y(t) = 2^{-1/8} y_0$

$\cancel{y_0} 2^{-t/5730} = 2^{-1/8} \cancel{y_0} \Rightarrow \frac{-t}{5730} = -\frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{t = \frac{5730}{8} \text{ años}}$

5. Folio de Descartes $x^3 + y^3 - 2xy = 0$.

a. Derivada

$3x^2 + 3y^2 y' - 2y - 2xy' = 0$

$(3y^2 - 2x) y' = 2y - 3x^2 \Rightarrow \boxed{y' = \frac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x}}$

b. Recta tangente en $(1,1)$

Pendiente: $y'\big|_{(1,1)} = \frac{2-3}{3-2} = -1$ Recta tangente $\boxed{y = 1 - 1(x-1)}$

c. Tangente horizontal en $x = -1$.

Sustituya en el folio $-1 + y^3 + 2y = 0$, $y \approx 0.45340$.

Como $y' = \frac{0.90 - 3}{0.6167 + 2} = -0.8025 \neq 0$ no hay tangente horizontal en $x = -1$.

Gráficamente, en el folio se observa que la pendiente del folio es negativa, por lo que no hay tangente horizontal en $x = -1$.

6. Función $f(x) = x^{1/4} + x^{1/2}$.

a. Aproximación lineal en $x = 16 = 2^4$

$$f(16) = \sqrt[4]{16} + \sqrt[2]{16} = 2 + 4 = 6.$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} x^{-3/4} + \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$f'(2^4) = \frac{1}{4}\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{32} + \frac{1}{8} = \frac{5}{32}$$

$$L(x) = f(16) + f'(16)(x-16) = 6 + \frac{5}{32}(x-16)$$

b. Estime el valor de $\sqrt[4]{20} + \sqrt[3]{20}$

$$\sqrt[4]{20} + \sqrt[2]{20} \approx L(20) = 6 + \frac{5}{32}(\overbrace{20-16}^{4}) = 6 + \frac{5}{8} = 6.625$$

7. Arista de un cubo mide 30 mm error $dx = \pm 0.5$ mm.

a. Diferencial del Volumen

$$V = x^3$$

$$dV = 3x^2\,dx$$

b. Error porcentual volumen del cubo.

$$\text{Error Porcentual} = \frac{dV}{V} \times 100\% =$$

$$V(30) = 30^3 \qquad dV = 3(30)^2\, 0.5$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{3(30^2)\,0.5}{30^3} \times 100\% = \frac{3 \times 50\%}{30} = \frac{50\%}{10} = 5\%$$

R/ El error porcentual es del 5% para calcular el volumen

8. Razones Relacionadas.

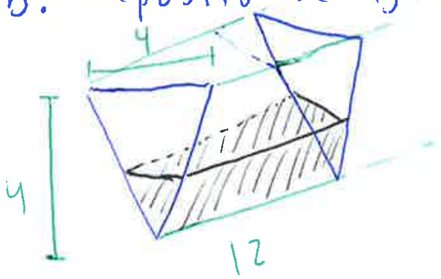
a. Volumen Cascarón Esférico: $V = \frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3)$

Información dada: $r_2 = 3$, $r_2' = 2$, $r_1 = 1$, $r_1' = -0.5$

Derive V resp. a t: $\frac{dV}{dt} = 4\pi(r_2 r_2' - r_1 r_1')$

Sustituya valores: $\frac{dV}{dt} = 4\pi\left(\overset{6}{3(2)} + \overset{0.5}{1(0.5)}\right) = 4\pi(6.5) = 26\pi\ m^3/hora$

b. Depósito de agua.

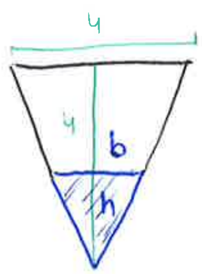


Volumen del Líquido. $V = \text{Área Cara} * \text{Largo}$

$V = \frac{1}{2} b h\,(12)$

Dada $h' = 0.3$ pulg/min, $h = 3$, incógnita $\frac{dV}{dt} = ?$

Utilice triángulos semejantes para encontrar una relación entre b y h



$\frac{h}{b} = \frac{4}{4} \Rightarrow h = b.$

El Volumen del Líquido en función sólo de h es.

$V = \frac{1}{2} h \cdot h\,(12) = 6h^2.$

Derive respecto a t: $\frac{dV}{dt} = 12h\frac{dh}{dt}.$

Sustituya valores: $\frac{dV}{dt} = 12(3)\,0.3 = 36(0.3) = 10.8\ pulg^3/min$

La cantidad de agua que entra en el recipiente es de $10.8\ pulg^3/min$

9. Regla de L'Hospital.

$\csc x = \frac{1}{\sin x}$

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cot 2x}{\cot x} \underset{\infty/\infty}{\overset{LH}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\csc 2x}{-\csc x} \underset{\text{Reescriba}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin x}{\sin 2x}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \cot x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} = +\infty \quad \frac{1}{0^+}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin x}{\sin(2x)} \underset{LH}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos x}{2\cos(2x)} = \frac{2\cdot\cos 0}{2\cdot\cos 0} = 1$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\ln(x+3x^2)} = 0$ Forma $\frac{0}{-\infty} \to 0$

No es necesario utilizar L'Hospital.

use $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$

c) $\displaystyle y = \lim_{x\to 2^+} (3-x^2)^{1/\sin(x-2)}$ forma 1^∞

$\displaystyle\ln y = \lim_{x\to 2^+} \frac{\overbrace{\ln(5-x^2)}^{\ln 1 = 0}}{x-2.} \underset{LH}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{-2x}{5-x^2}}{1} = \frac{-4}{5-4} = -4$

$\displaystyle y = \lim_{x\to 2^+} (5-x^2)^{1/\sin(x-2)} = e^{-4}$