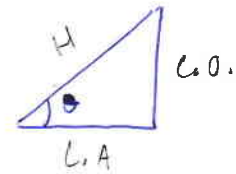
Funciones Trigonométricas.

Ángulos importantes de Seno y Coseno; considere el triángulo rectángulo

$$\text{Seno} = \frac{L.O.}{H} \qquad \text{Coseno} = \frac{L.A.}{H} \qquad \text{Tangente} = \frac{L.O}{L.A.}$$



L.O lado opuesto L.A. lado adyacente H hipotenusa

Los valores de seno, coseno y tangente se pueden encontrar utilizando unos triángulos especiales de 30°, 45° y 60°.

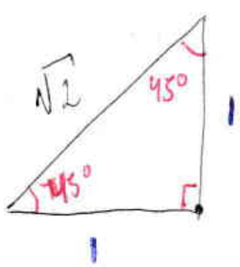
Considere el triángulo equilátero

El lado vertical es igual a $\sqrt{3}$

$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 60° = \frac{\operatorname{sen} 60°}{\cos 60°} = \sqrt{3}$, $\tan 30° = \frac{\operatorname{sen} 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Considere el triángulo isósceles de 45°, 45° y 90°



la hipotenusa es igual a $\sqrt{2}$

$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\tan 45° = \frac{\operatorname{sen} 45°}{\cos 45°} = 1$

Los anteriores valores se resumen en la siguiente tabla.

x	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$	
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	aumentan
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\frac{1}{2}$	0	disminuyen
$\tan x$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	no existe o $\pm\infty$.	

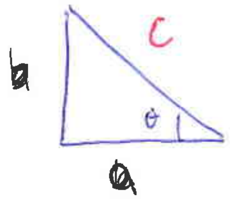
Utilice la regla de la mano para encontrar los valores

Los ángulos se miden también en radianes, donde 360° son 2π radianes, por lo que 30° es $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ radianes, 45° es $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ radianes y así sucesivamente.

La circunferencia unitaria.

Tiene radio 1 y centro en el origen, su ecuación es $x^2+y^2=1$.

Dado un triángulo rectángulo con L.O b, L.A a, e hipotenusa c



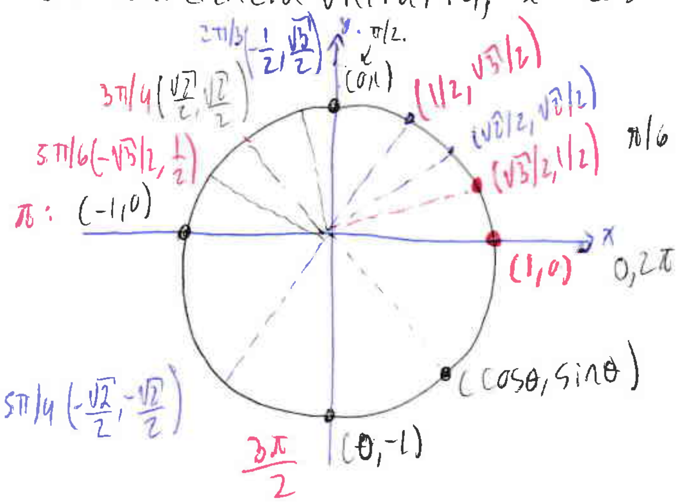
Teorema de Pitágoras $a^2+b^2=c^2$.

Divide por c^2: $\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$

Como $\sin\theta = a/c$ y $\cos\theta = b/c$, obtenemos que

Identidad Trigonométrica: $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

Lo anterior nos indica que los valores de $\cos\theta$ y $\sin\theta$ están sobre la circunferencia unitaria, $x=\cos\theta$ "la coordenada-x" y $-\sin\theta$ "coordenada-y"



De esta forma

$-1\leq\sin\theta\leq1$ $\quad -1\leq\cos\theta\leq1$

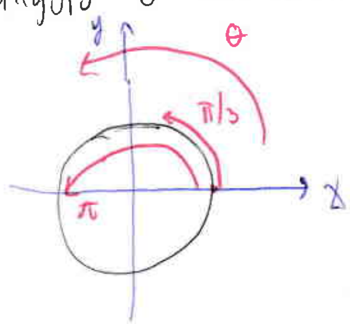
$\tan\theta$ se indefine cuando $\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$.

$\sin 0=\sin 2\pi=0$, $\cos 0=\cos 2\pi=1$

Además, $\sin 0=\sin\pi=0$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\sin\frac{3\pi}{2}=-1$

$\cos\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{2}=0$, $\cos 0=1$, $\cos\pi=-1$

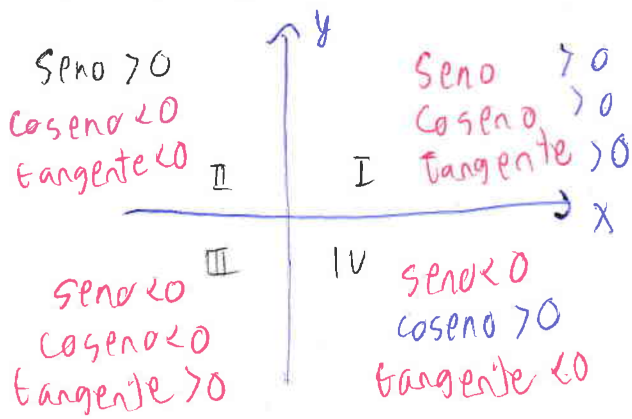
El ángulo θ tiene sentido antihorario, donde $\theta=0$ es el eje-x y $\theta=\frac{\pi}{2}$ es el eje y.



Utilizando el círculo unitario se puede determinar cuando seno, coseno y tangente tienen signos positivos o negativos

Cuatro cuadrantes

I, II, III y IV



I. toda

II. señorita

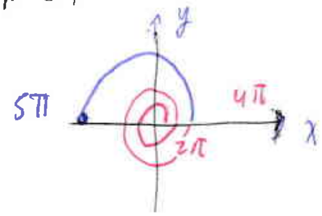
III. toma

IV café

Como el ángulo 2π (360°) termina en el eje-x (Ángulo 0), los valores de seno, coseno y tangente se repiten cada 2π ángulos.

Para encontrar $\sin\theta$, $\cos\theta$ donde $\theta > 2\pi$, encuentre el ángulo terminal equivalente para el ángulo.

Evalúe $\cos 5\pi$
$\sin 5\pi$



El ángulo terminal de 5π es $5\pi - 4\pi = \pi$, por lo que $\cos 5\theta = \cos\pi = -1$
$\sin 5\theta = \sin 5\pi = 0.$

$$\cos\frac{7\pi}{3} = \cos\left(\frac{7\pi}{3} - 2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{4\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Funciones Trigonométricas.

Utilice la circunferencia unitaria

Seno: $f(x) = \sin x$

Dominio: $\mathbb{R}$

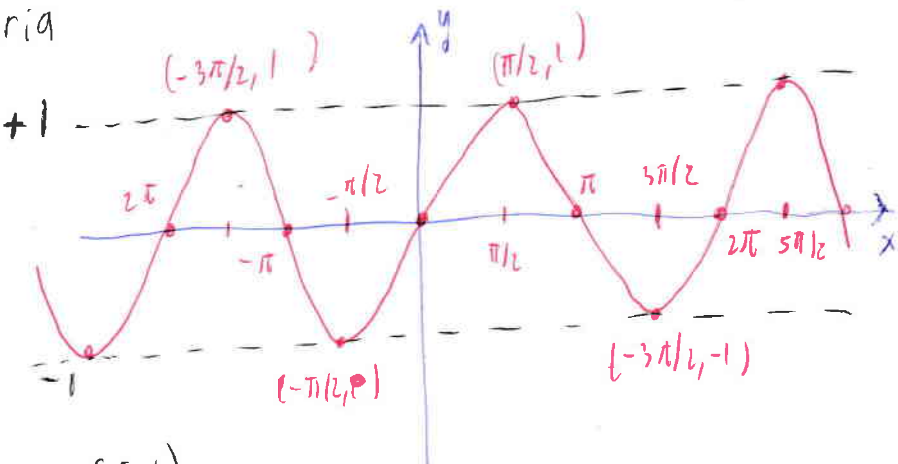
Rango: $[-1, 1]$

Intersecto-y: $(0,0)$

Intersectos-x: $(0,0), (\pi,0) (2,\pi)$

Cada múltiplo de π $n\pi, n \in \mathbb{Z}$

Función impar $f(-x) = -\sin x = -f(x)$



Coseno: $f(x) = \cos x$

Dominio: $\mathbb{R}$ Rango $[-1, 1]$

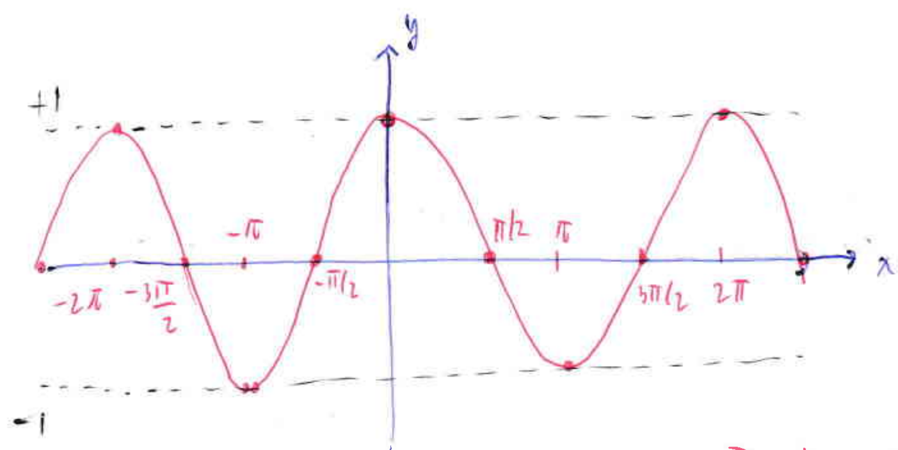
Intersecto-y: $(0,1)$

Intersectos-x: $\frac{\pi}{2} \pm n\pi$ $n \in \mathbb{Z}$

Función Par: $\cos(-x) = \cos x$

se repite cada 2π radianes

$\cos(x + 2\pi) = \cos x$



coseno es seno desplazado $\frac{\pi}{2}$ a la izq.

$\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$

Función Tangente $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Definida cuando $\cos x \neq 0$ $\quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$

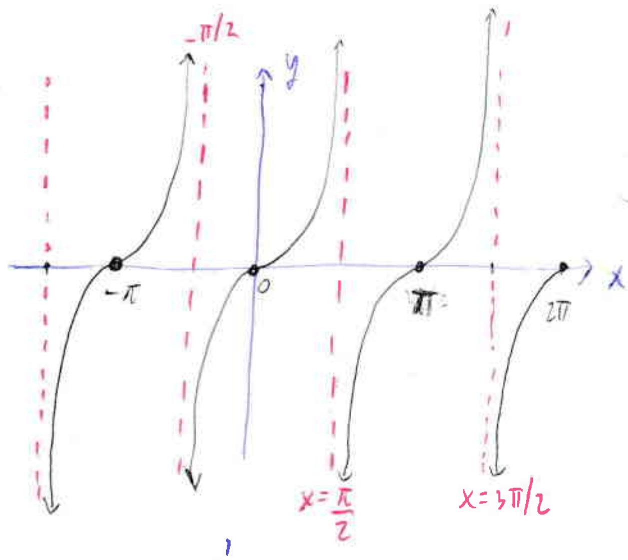
Dominio: $\mathbb{R} - \{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \}$

Rango: $(-\infty, \infty)$

Intersecto-y $\quad f(0) = \tan 0 = 0 \quad (0,0)$

Intersectos-x: múltipos de π $\quad (n\pi, 0)$

Función impar $\quad \tan(-x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$.



AVs: en $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ $\quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\overbrace{\sin x}^{1}}{\underbrace{\cos x}_{0^+}} = +\infty \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\overbrace{\sin x}^{1}}{\underbrace{\cos x}_{0^-}} = -\infty$.

Funciones Secante, cosecante y cotangente

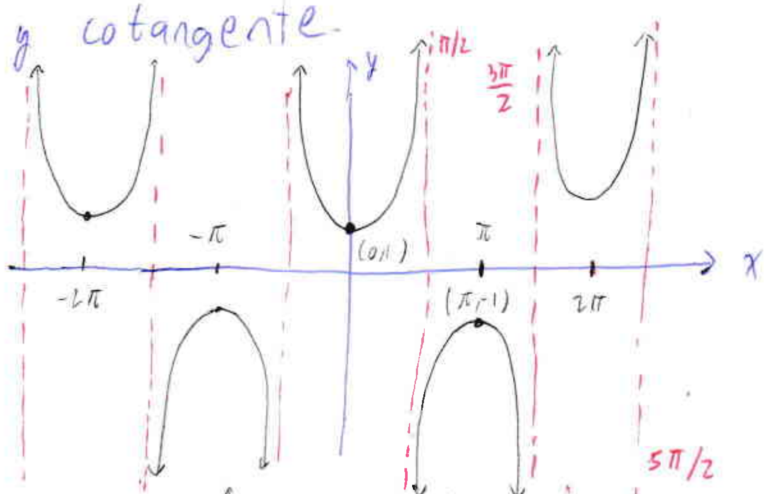
$\sec x = \frac{1}{\cos x}$

Dominio: $\mathbb{R} - \{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \}$

Rango $\quad (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Función par

AVs en $\quad x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$

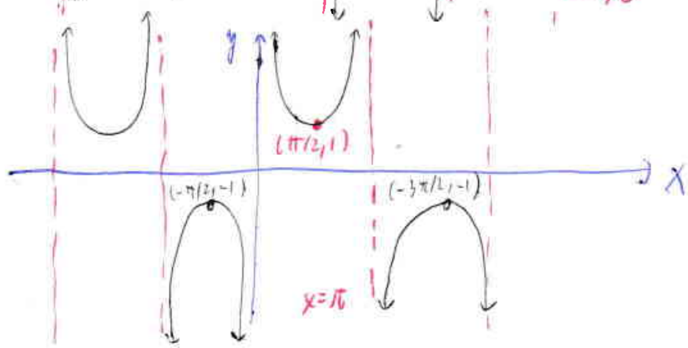


cosecante $\quad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

Dominio: $\mathbb{R} - \{ \pi + n\pi, n \in \mathbb{Z} \}$.

Función impar $\quad$ AVs en $x = 0, \pi, \pm 2\pi$

csc desplazada $\frac{\pi}{2}$ a la derecha.



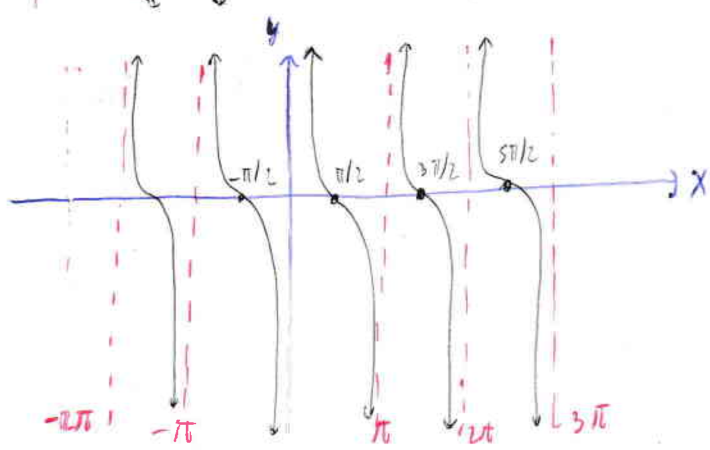
cotangente $\quad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Dominio: $\mathbb{R} - \{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \}$

Rango. $\quad (-\infty, \infty)$

Función impar

tan desplazada $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda
reflejada respecto al eje-x



Identidades Trigonométricas Básicas

Teorema de Pitagóras: $x = L.A$ $\quad y = L.O \quad 1 = H$, entonces

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \\ 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta. \\ \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta. \end{array}}$$

Como $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$:

Divida por $\cos^2\theta$:

Divida por $\sin^2\theta$:

Suma de Ángulos:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Por medio de estas propiedades se comprueba que $\sin x$ y $\cos x$ se repiten cada 2π radianes ($360°$ grados)

$$\sin(x+2\pi) = \sin x \overset{1}{\cancel{\cos 2\pi}} + \overset{0}{\cancel{\sin 2\pi}} \cos x = \sin x \Rightarrow \sin(x+2\pi) = \sin x$$
$$\cos(x+2\pi) = \cos x \overset{1}{\cancel{\cos 2\pi}} - \sin x \overset{0}{\cancel{\sin 2\pi}} = \cos x \Rightarrow \cos(x+2\pi) = \cos x$$

También con ellas se comprueba que $\sin x$ y $\cos x$ están desplazados $\frac{\pi}{2}$ rads.

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \overset{0}{\cancel{\cos \frac{\pi}{2}}} + \sin x \overset{1}{\cancel{\sin \frac{\pi}{2}}} = \sin x$$

$\frac{\pi}{2}$ a la derecha de $\cos x$

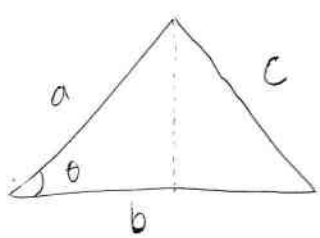
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \overset{0}{\cancel{\cos \frac{\pi}{2}}} + \overset{1}{\cancel{\sin \frac{\pi}{2}}} \cos x = \cos x$$

$\frac{\pi}{2}$ a la izquierda de $\sin x$

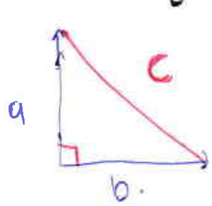
Otras Identidades: Ley de Cosenos.

Cuando el triángulo no es rectángulo

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$



Cuando $\theta = \pi/2$, obtenemos el teorema de Pitágoras $\cos\frac{\pi}{2} = 0$



$$c^2 = a^2 + b^2$$