Resolución de Corto 1/08/2019

5.3 Teorema Fundamental del Cálculo

Si $f(x)$ es continua en $[a, x]$ entonces

PARTE I: $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(t)$$

- Integral y la derivada se cancelan entre sí como la derivada de una antiderivada es la función original, entonces la $\int_a^x f(t)\,dt$ es la antiderivada de x.

- Variable temporal de integración
  $f(t)\,dt$

① Se integra respecto a t

② Se deriva respecto a x

ej. $$f(x) = \int_{10}^{x} 4t^3\,dt = t^4\Big]_{t=10}^{t=x} = \underbrace{x^4 - 10^4}_{d/dx}$$

$\downarrow$

$f'(x) = 4x^3$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_{10}^{x} 4t^3\,dt = 4x^3$$ Atajo

PARTE II

TFC2: $$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} \Rightarrow F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(w)\,dw = F(w)\Big]_{w=a}^{w=b} \Rightarrow F(b) - F(a)$$

- No importa qué variable use el resultado de una integral definida siempre es el mismo.

- Puedo encontrar variables definidas cambiando el nombre de la variable

Se pueden definir funciones por medio de integrales

▲ Distribución normal $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

$$P(x) = \int_0^x \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$$ no se puede integrar de manera explícita

$$\int e^t dt = e^t + C \qquad \int e^{t^2} t\, dt = \frac{1}{2} e^{t^2} + C$$

$$P'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Ejercicio 1 : Derivar las siguientes funciones

a) $h(x) = \int_a^x 3\sqrt{t+1}\, dt$ $\qquad h'(x) = 3\sqrt{x+1}$

$t \to x$

b) $S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right)$ $\qquad S'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)$

c) $H(w) = \int_{-5}^{w} \frac{t+4}{t^4+t^2+2}$ $\qquad H'(w) = \frac{w+4}{w^4+w^2+2}$

TFC parte 1 y la regla de la cadena

$$g(x) = \int_{100}^{x^5} e^t\, dt = e^t\Big]_{t=100}^{t=x^5} \Rightarrow e^{x^5} - e^{100} \stackrel{?}{=} \underbrace{e^{x^5} \cdot 5x^4}_{\text{Regla de cadena}} - 0$$

$h(x) = \sin(x^5 + x^2)$ $\qquad h'(x) = \cos(x^5+x^2)(5x^4+2x)$

$$f(x) = \int_a^{b(x)} g(t)\, dt \qquad f'(x) = g(b(x))\, b'(x)$$

$t \to b(x)$

Ejercicio 2: Deriva las siguientes funciones

a.) $g(x) = \int_{5}^{\ln x} \sqrt{t^2+1}\, dt$ $\qquad h(x) = \int_{5}^{x} \sqrt{t^2+1}\, dt$

$\overset{?}{=} \sqrt{x^2+1}$

$g'(x) = \sqrt{\ln(x)^2+1} \cdot \frac{1}{x}$

$t \Rightarrow \ln x$

b) $h(x) = \int_{\sec x}^{8} \tan^{-1}(t)\, dt = -\int_{8}^{\sec x} \tan^{-1}(t)\, dt$

$h'(x) = \underbrace{-\tan^{-1}(\sec x)}_{\text{remplaza } t \text{ por lim sup.}} \underbrace{\sec x \tan x}_{\text{derivada de } \sec x}$

c) $\frac{d}{dx}\left(\int_{1000}^{x^5+x^3} \ln(t)\, dt \right) = \ln(x^5+x^3)(5x^4+3x^2)$

$t \rightarrow x^5+x^3$

$t \rightarrow x^5+x^3 \cdot$ derivada de x^5+x^3

Funciones con ambos límites dependientes de x

$f(x) = \int_{\sinh x}^{\cosh x} \sec^2 t\, dt \Rightarrow f(x) = \tan(t)\Big]_{\sinh x}^{\cosh x} \longrightarrow \tan(\cosh x) - \tan(\sinh x)$

Derive = $f'(x) = \sec^2(\cosh x) \cdot \sinh x - \sec^2(\sinh x)\cosh x$

$f(x) = \frac{d}{dx}\int_{\tan x}^{\csc x} \sec^2 t\, dt = \sec^2(\csc x)(-\csc x \cot x) - \sec^2(\tan x)(\sec^2 x)$

entonces.. TFC Parte 1 y la regla de la cadena

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\, dt = f(b)\, b' - f(a)\, a'}$$

Ejercicio 3: Derive

a) $\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{e^x} \sqrt{10 + 4t^4}\, dt = \sqrt{10 + 4e^{4x}}\, e^x - \sqrt{10 - 4\sin^4 x} \cdot \cos x$

b) $\frac{d}{dx} \int_{\ln x}^{\sin^{-1} x} \cosh \theta^3\, d\theta = \cosh(\sin^{-1}x)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cosh(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{x}$

Ejercicio 4: Encuentra la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \int_0^x \cosh^2 t\, dt$ en $t = 0$

Ec. Recta tangente $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$

$f(0) = \int_0^0 \cos^2 t\, dt = 0$

$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \cosh^2 t\, dt = \cosh^2 x \cdot 1$

$f'(0) = (\cosh 0)^2 = 1^2 = 1$

entonces... La ecuación de la recta tangente

$y = 0 + 1(x - 0)$

$\boxed{y = x}$