10.2 Cálculo de ecuaciones paramétricas 2019-10-17

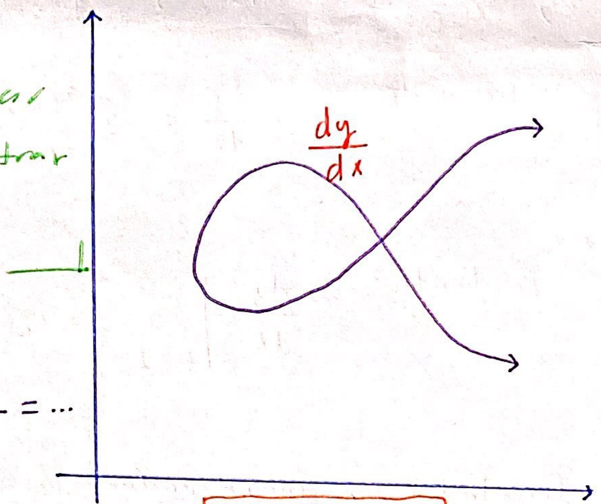
Pg. 135

a) Encontrar derivadas y rectas tangentes

Curva $\mathcal{C}$: $x = f(t)$ $a \le t \le b$

$y = g(t)$

A veces no se puede eliminar el parámetro t. Para encontrar y en función de x.



$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \ldots$$

$y \to x \to t$

en función de t. $\boxed{= \ldots \frac{y'(t)}{x'(t)}}$

- Pendiente recta tangente en $t = t_0$; $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_0}$

Ec. Recta tangente

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

$$y = y(t_0) + m(x - x(t_0))$$

Ejercicio 1: P.135

Encuentra la ec. de recta tangente a la curva $\mathcal{C}$: $x = 1 + 2t$; $y = 2 - 2t^3$

Solución 1:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-6t^2}{2} = -3t^2$$

Pendiente $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} \Big\} = -3(1)^2 = \boxed{-3}$

Solución 2: Elimine el parámetro t.

$2t = x - 1 \Rightarrow t = \frac{1}{2}(x-1)$ sustituir en y

$$y = 2 - \frac{2}{8}(x-1)^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}(x-1)^2 \Rightarrow m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} = \ldots$$

$x(1) = 1 + 2 = \boxed{3}$

$\ldots = -\frac{3}{4} \cdot 2^2 = \boxed{-3}$

Recta tangente: $x(1) = 1 + 2 = 3$

$y(1) = 2 - 2 = 0$

Ec. Recta tangente:

$$y = 0 - 3(x - 3) = \boxed{-3x + 9}$$

a) $x = 1 + 2\sqrt{t}$; $y = e^{t^2}$ en $t = 1$

Derivada: $$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t\,e^{t^2}}{t^{-\frac{1}{2}}} = \boxed{2\,t \cdot t^{1/2}\,e^{t^2}}$$

Pendiente: $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = 2 \cdot 1^{\frac{3}{2}}\,e^{1^2} = \boxed{2e}$$

Encontrar las coordenadas:

$x(1) = 1 + 2 = 3$

$y(1) = e^1 = e$

Ecuación de la recta tangente:

$$y = e + 2e(x - 3) = -5e + 2ex$$

Alterna solución:

Eliminar el parámetro t

$x - 1 = 2t^{1/2}$

$(x-1)^2 = 4t$

$t = \frac{1}{4}(x-1)^2$

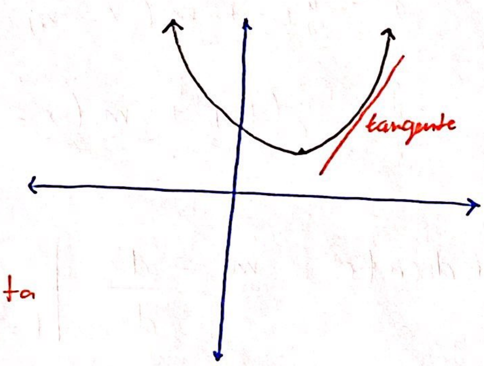
Sustituyo en y:

$$y = e^{\frac{1}{16}(x-1)^4}$$

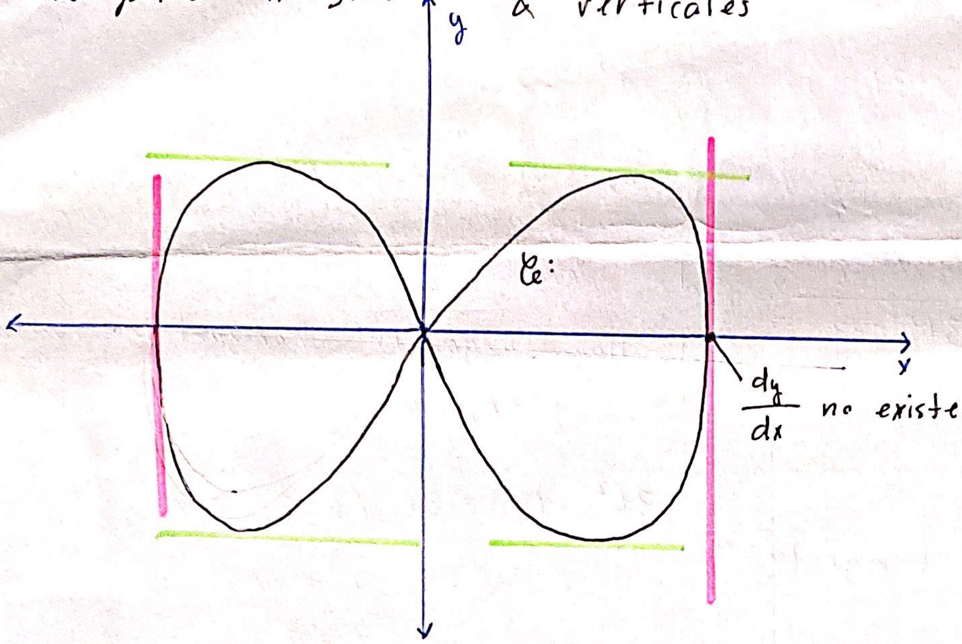
$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{1}{16}(x-1)^4} \cdot \frac{1}{4}(x-1)^3 \cdot 1$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} = e^{\frac{1}{16}(2^4)} \cdot \frac{1}{4}(2^3) = \boxed{2e}$$

misma respuesta



Tangentes horizontales & verticales



tangente horizontal: cuando $\frac{dy}{dx} = 0$

tangente vertical: cuando $\frac{dy}{dx}$ no existe

$\mathscr{C}: \; x = f(t) \; ; \quad y = g(t)$

$$\underbrace{\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = 0}_{\text{tangente horizontal}} \qquad \underbrace{\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \text{indef.}}_{\text{tangente vertical}}$$

En resumen, dada una curva $\mathscr{C}$ hay:

$$\underbrace{\begin{array}{lll} \text{tangentes horizontales} & y'(t) = 0 & \& \quad x'(t) \neq 0 \\ \text{tangentes verticales} & x'(t) = 0 & \& \quad y'(t) \neq 0 \end{array}}_{\text{para evitar } \frac{1}{0}}$$

Ejercicio 2: La curva $\mathcal{C}$ es definida por:

$$x = t^3 - 3t \quad ; \quad y = t^3 - 3t^2$$

a) encuentre $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 6t}{3t^2 - 3}$$

b) ¿En cuáles puntos (x, y) la tangente es horizontal a la curva $\mathcal{C}$?

Hay tangentes horizontales cuando $y'(t) = 0$

$$3t^2 - 6t = 3t(t-2) = 0$$

$t = 0$

$t = 2$

$x'(0) = 0 - 3 \neq 0$ $\quad$ $x'(0) = 12 - 3 \neq 0$

Puntos: $x(0) = 0 - 0 = 0$

$x(2) = 8 - 6 = 2$

$(0,0)$

$y(0) = 0 - 0 = 0$

$y(2) = 8 - 12 = -4$

$(2,4)$

c) ¿Dónde hay tangentes verticales?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 6t}{3(t^2-1)}$$ se indefine en $t = \pm 1$

Puntos:

$x(1) = 1 - 3 = -2$

$x(-1) = -1 + 3 = 2$

$y(1) = 1 - 3 = -2$

$y(-1) = -1 - 3 = -4$

tangentes verticales en $(-2, 2)$ & $(-2, 4)$

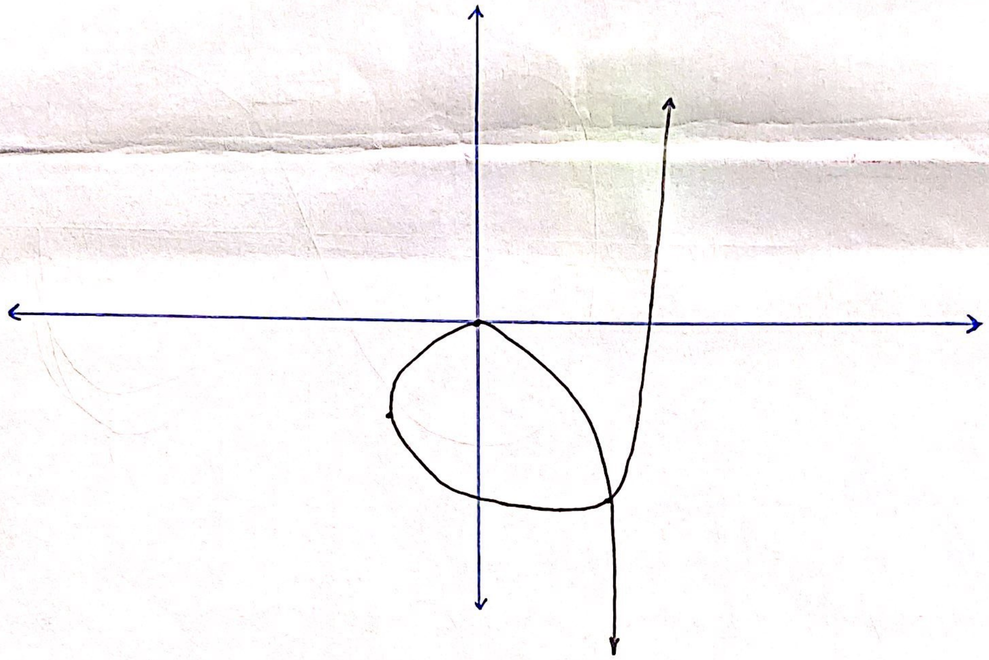
d) Bosqueje la curva utilizando sólo las tangentes horizontales y verticales

tangentes Horizontales $(0,0)$ y $(2,-4)$

Verticales $(-2,2)$ y $(2,-4)$

+

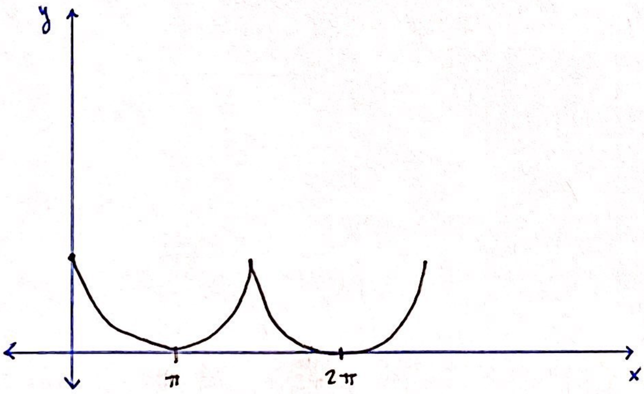
Se pasa por el origen 2 veces,



Ejercicio 3: Cicloide invertido

$x = r(\theta + \cos\theta)$

$y = r(1 + \sin\theta)$ $\qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$



a) encuentre la derivada r es constante:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{r(\cos\theta)}{r(1-\sin\theta)} = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

b)