5.3 Teorema Fundamental del Cálculo.

Si $f(x)$ es continua en $[a, x]$ entonces

PARTE 1: $\underline{\dfrac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt} = f(x)$ $\qquad \int_a^b$ $\quad \int$

Integral y la derivada se cancelan entre sí.

Como la derivada de una antiderivada es la función original, entonces la $\int_a^x f(t)\,dt$ es la antiderivada de $F(x)$

variable temporal de integración.

Se integra primero respecto t y se deriva respecto a x.

$$f(x) = \int_{10}^{x} 4t^3\,dt = t^4 \Big]_{t=10}^{t=x} = x^4 - 10^4.$$

$$y(t) = \int_0^t \sin(\omega)\,d\omega$$

$$f'(x) = 4x^3$$

$t \to x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_{10}^{x} 4t^3\,dt = 4x^3$$

ATAJO.

TFC parte 2: $\underline{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)}$

$$\int_a^b f(w)\,dw = F(w)\Big]_{w=a}^{w=b} = F(b) - F(a)$$

Se pueden definir funciones por medio de integrales.

Distribución normal $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

$$P(x) = \int_0^x \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt.$$ no se puede integrar de manera explícita.

$$\int e^t \, dt = e^t + C \qquad \int e^{t^2} t \, dt. = \frac{1}{2} e^{t^2} + C.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = 1$$

$$P'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Ejercicio 1: Derive las siguientes funciones. Pág 20.

a) $h(x) = \int_a^x 3\sqrt{t+1} \, dt.$ $\quad h'(x) = 3\sqrt{x+1}$

$t \to x$

b) $S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt$ $\quad S'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)$

$t \to w$

c) $H(w) = \int_{-5}^{w} \frac{t+4}{t^4+t^2+2} dt.$ $\quad H'(w) = \frac{w+4}{w^4+w^2+2}$

TFC parte 1 y la regla de la cadena.

$$g(x) = \int_{100}^{x^5} e^t \, dt = e^t \Big]_{t=100}^{t=x^5} = e^{x^5} - e^{100}$$

$$g'(x) = e^{x^5} \underbrace{5x^4}_{\text{Regla de la cadena.}} - 0$$

$h(x) = \sin(x^5 + x^2)$ $\quad$ $h'(x) = \cos(x^5 + x^2)(5x^4 + 2x)$

$$f(x) = \int_{a}^{b(x)} g(t)\, dt. \qquad f'(x) = g(b(x))\, b'(x)$$

a ← constante. $\qquad t \to b(x)$

Ejercicio 2: Derive las siguientes funciones.

a. $g(x) = \int_5^{\ln x} \sqrt{t^2+1}\, dt.$ $\qquad h(x) = \int_5^x \sqrt{t^2+1}\, dt.$

$$g'(x) = \sqrt{(\ln x)^2 + 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{d(\ln x)} \qquad h'(x) = \sqrt{x^2+1}$$

$t \to \ln x$

b. $h(x) = \int_{\sec x}^{8} \tan^{-1}(t)\, dt. = -\int_8^{\sec x} \tan^{-1}(t)\, dt.$

$$h'(x) = -\tan^{-1}(\sec x) \sec x \tan x$$

$t \to \sec x$

c. $\frac{d}{dx}\left(\int_{1000}^{x^5+x^3} \ln(t)\, dt. \right) = \ln(x^5 + x^3)(5x^4 + 3x^2)$

$t \to x^5 + x^3$ • derivada lím superior

Funciones con ambos límites dependiendo de x.

$$f(x) = \int_{\sinh x}^{\cosh x} \sec^2 t \, dt.$$

$$f(x) = \tan t \Big]_{\sinh x}^{\cosh x} = \tan(\cosh x) - \tan(\sinh x)$$

Derive: $f'(x) = \sec^2(\cosh x) \cdot \sinh x - \sec^2(\sinh x) \cosh x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_{\tan x}^{\csc x} \sec^2 t \, dt = \overset{t \to \csc x}{\sec^2(\csc x)(-\csc x \cot x)} - \sec^2(\tan x)(\sec^2 x)$$

TFC parte I y la Regla de la Cadena

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = f(b) b' - f(a) a'$$

Ejercicio 3: Derive

$$\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{e^x} \sqrt{10 + 4t^4} \, dt = \sqrt{10 + 4e^{4x}} \, e^x - \sqrt{10 + 4\sin^4 x} \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \int_{\ln x}^{\sin^{-1} x} \cosh \theta^3 \, d\theta = \cosh(\sin^{-1} x)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cosh(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{x}.$$

Ejercicio 4: Encuentre la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \int_0^x \cosh^2 t \, dt$ en $t=0$

Ec. Recta Tangente $y = \underline{f(0)} + \underline{f'(0)}(x-0)$

$f(0) = \int_0^0 \cosh^2 t \, dt = 0$

$\int_a^a f(y)\,dy = 0.$

$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x \cosh^2 t \, dt = \cosh^2 x \cdot 1$

$f'(0) = (\cosh 0)^2 = 1^2 = 1$

Ec. Recta Tangente $y = 0 + 1(x-0)$

$y = x$