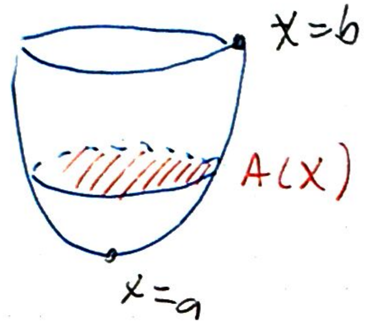
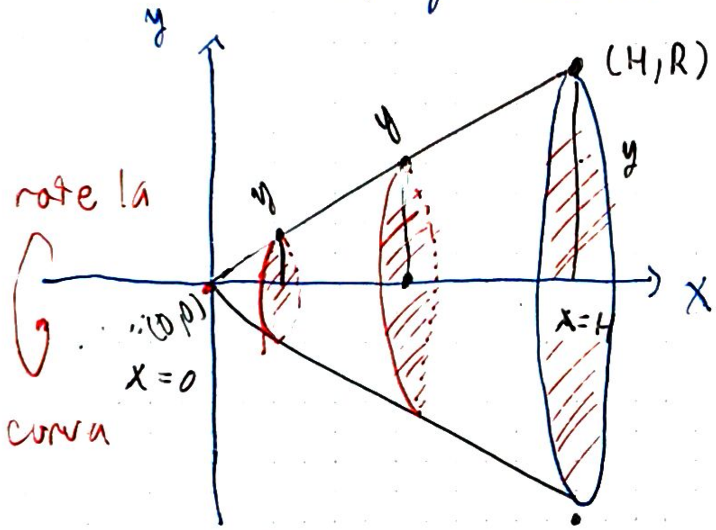
Volúmenes.



$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

área sección transversal.

Ejemplo: Encuentre el volumen de un cono de altura H y base circular de radio R.



las secciones transversales son círculos de radio $y(x)$.

$$A = \pi y^2$$

$$V = \int_0^H \pi y^2\,dx$$

$y(0) = 0 + b = 0$

$y = mx + b.$ $\qquad m = \dfrac{R-0}{H-0} = \dfrac{R}{H}$ $\qquad y = \dfrac{R}{H}x + \cancel{b}.$ $\qquad b = 0$

$(0,0)$ y (H,R)

$$V = \int_0^H \pi \frac{R^2 x^2}{H^2}\,dx = \frac{\pi R^2}{H^2}\int_0^H x^2\,dx$$

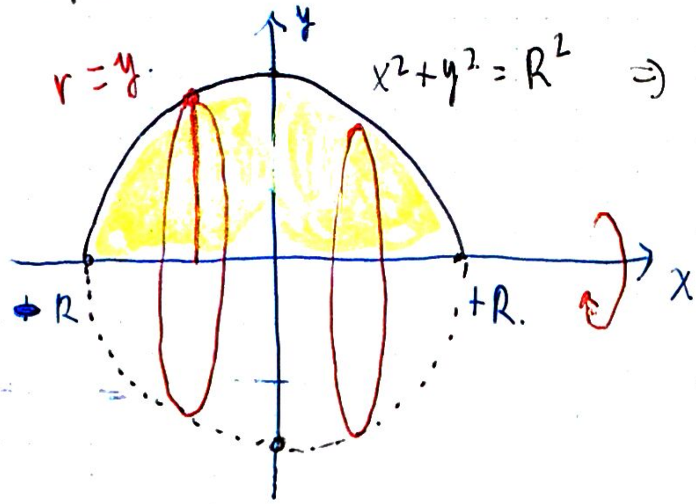
$$= \frac{\pi R^2}{H^2}\,\frac{x^3}{3}\Big]_0^H = \frac{\pi R^2}{H^2}\,\frac{H^3}{3}$$

P. 88.

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

Ejercicio 1: p. 89 Volumen de una Esfera de radio R.

La esfera se obtiene al girar el círculo $x^2 + y^2 \le R^2$ respecto al eje-x.



$\Rightarrow \; y^2 = R^2 - x^2.$ ID $-R \le x \le R.$

$y = \sqrt{R^2 - x^2}$

$x^2 = R^2 \quad x = \pm R.$

Sección transversal círculo de radio $y = r$

$A(x) = \pi y^2.$

$$V = \int_{-R}^{R} A(x)\,dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx = 2\pi \int_{0}^{R} (R^2 - x^2)\,dx$$

R es constante.

$$V = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \Big]_0^R \right) = 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = 2\pi R^3 \left(1 - \frac{1}{3} \right)$$

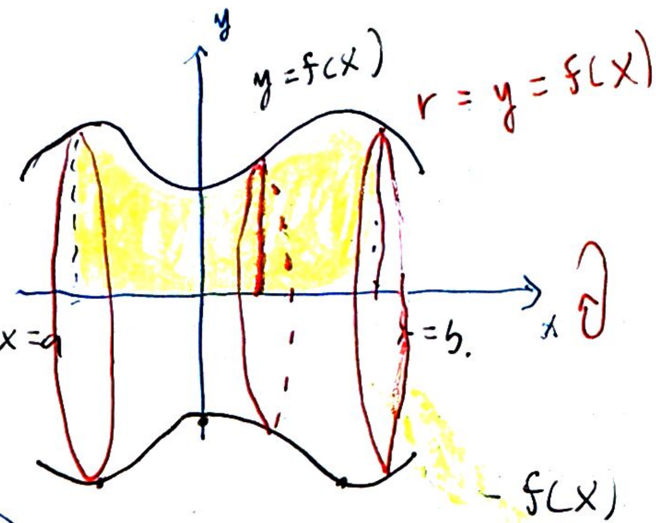
$$\boxed{V = \frac{4\pi}{3} R^3}$$

Sólidos de Revolución.

$\mathcal{R}: \; a \le x \le b.$

$\quad\; 0 \le y \le f(x)$

gire respecto al eje-x para obtener el sólido de revolución

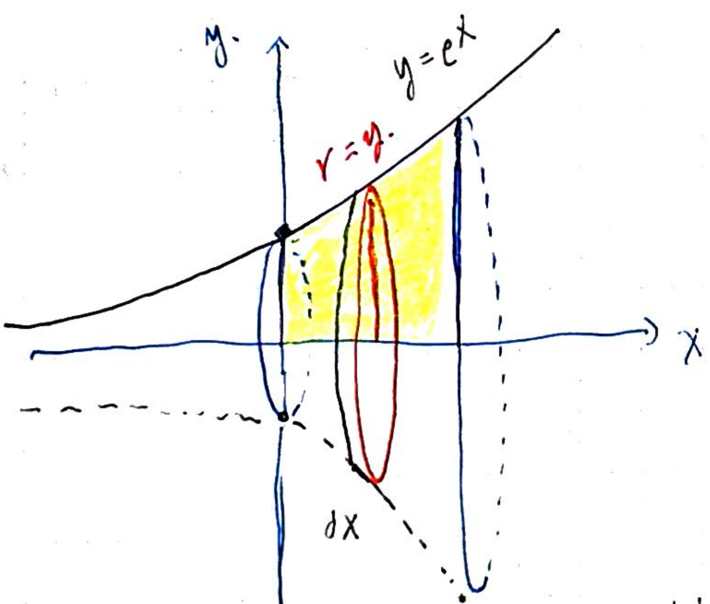


Área transversal : $\boxed{A = \pi y^2} = \pi f^2(x)$

$$V = \int_a^b \pi y^2 \, dx = \underline{\int_a^b \pi f^2(x) \, dx}$$

Ejercicio 4: Encuentre el Volumen del sólido que se obtiene al girar la región $\mathcal{R}: 0 \le x \le \ln 3 \;\; 0 \le y \le e^x$ respecto al eje-x. (Pag. 91)

$y = e^x$ curva.



$$e^{\ln[\;]} = [\;]$$

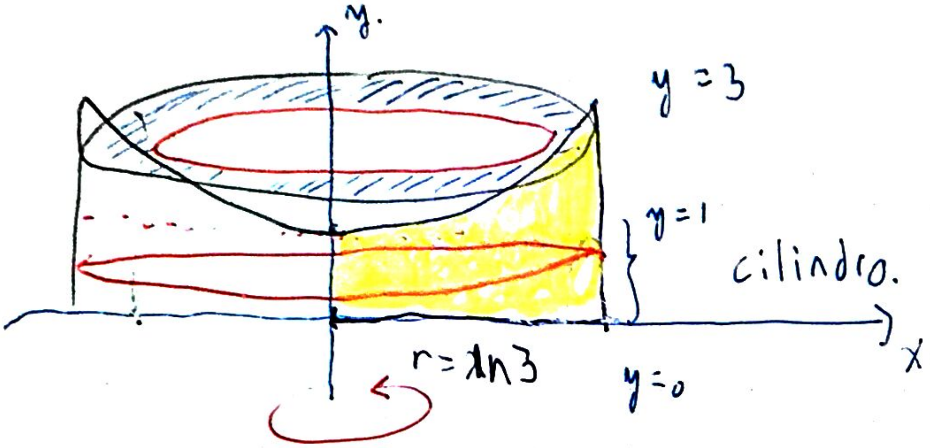
$$A = \pi y^2 = \pi e^{2x}$$

$$V = \int_0^{\ln 3} \pi e^{2x} \, dx$$

$$V = \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big]_0^{\ln 3} = 4\pi.$$

$$V = \frac{\pi}{2}\left(e^{\ln 3^2} - e^0\right) = \frac{\pi}{2}(9-1)$$

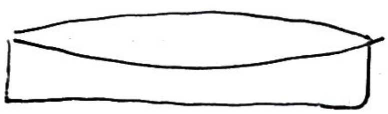
Girando la misma región respecto al eje - y.



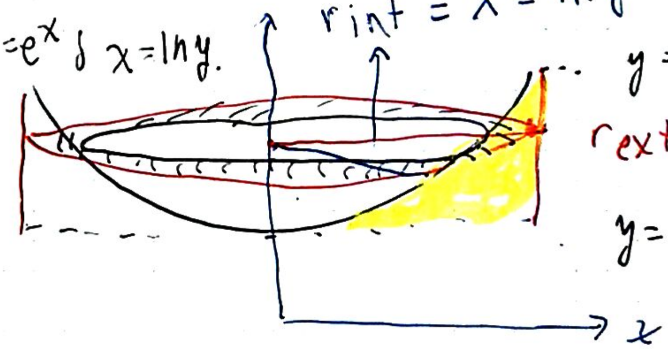
$f(0) = 1$
$f(\ln 3) = 3$
Difícil
de Visualizar.

Volumen = $V_1 + V_2$

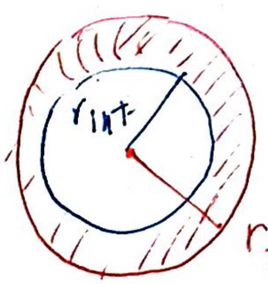
V_1 = cilindro
$V_1 = \pi r^2 h = \pi \ln^2 3.$



V_2 sólido hueco:



Área transversal

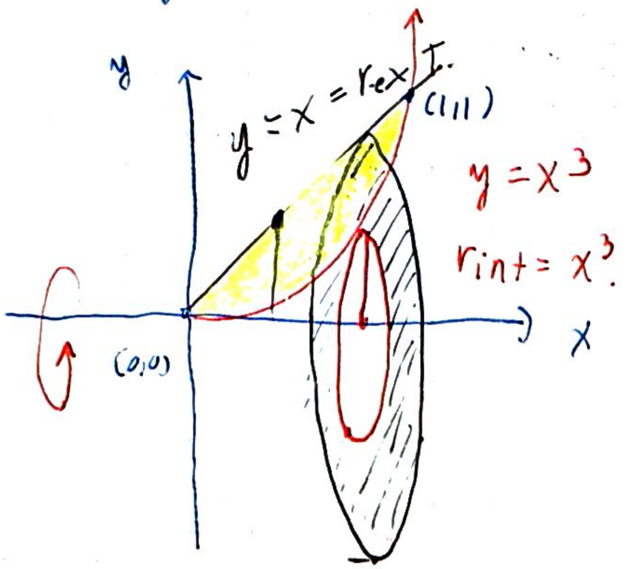


$$A = \pi r_{ext.}^2 - \pi r_{int}^2$$

$$A = \pi (\ln 3)^2 - \pi (\ln y)^2$$

$$V_2 = \int_1^3 \pi (\ln 3)^2 - \pi (\ln y)^2 \, dy.$$

Ejercicio 5: Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región entre las curvas $y = x$ & $y = x^3$ en el 1er cuadrante respecto al eje- x.



Área Anillo.

círculo grande - Cir pequeño.

$r_{ext} = x$ $\quad r_{int} = x^3.$

$A = \pi r_{ext}^2 - \pi r_{int}^2$

A [illegible] $^2 - \pi x^6.$

Volumen $V = \int_0^1 A\,dx = \int_0^1 (\pi x^2 - \pi x^6)\,dx$

$V = \pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\Big]_0^1\right) = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right)$

Transformadas Laplace.

$$\int_0^{\infty} f(x)\, e^{-st}\, dt$$

$$f(t) = e^t \quad = \int_0^{\infty} e^t e^{-st}\, dt. = \frac{-1}{1-s} = \frac{1}{s-1}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{(1-s)t}\, dt.$$

$$\left.\frac{e^{(1-s)t}}{1-s}\right]_0^{\infty} = \cancel{\lim_{t\to\infty} \frac{e^{(1-s)t}}{1-s}} - \frac{e^0}{1-s}$$

0

$\lim_{t\to\infty} e^{\widetilde{(1-s)}t} = 0$ se necesita que $1-s<0.$

$1<s$

$s>1.$

$e^{-\infty} \to 0.$

$$\int_0^{\infty} t\, e^{-st} = -\frac{t}{s} e^{-st}\Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{s}\, dt. \qquad \text{IPP.}$$

$s>0.$

$$= \underbrace{\frac{-1}{s} \lim_{t\to\infty} t e^{-st}}_{\text{corto } s \ 0.} + \frac{0 e^0}{s} + \left.\frac{e^{-st}}{s(-s)}\right]_0^{\infty}$$

0

$$= 0 - \frac{1}{s^2} \cancel{\lim_{t\to\infty} e^{-st}} - \frac{e^0}{-s^2} = \frac{-1}{-s^2} = \frac{1}{s^2}.$$