2019-09-18

Continuación

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

$48 = 2^4 \cdot 3$ $\qquad$ $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

$$mcd(48, 84) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Observación: Dados $a, b \in \mathbb{Z}^+$, tenemos (por TFA):

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r} \quad \& \quad b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\beta_r}$$

Entonces,

$$mcd(a, b) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot p_2^{\{\alpha_2, \beta_2\}} \cdot \ldots \cdot p_r^{\{\alpha_r, \beta_r\}}$$

Este procedimiento es muy complicado los numeros son grandes:

$$mcd(4517, 8633)$$

Para ello usaremos un método llamado "el algoritmo euclidano", el cual esta basado en la siguiente observación

Dados dos enteros $a, b \in \mathbb{Z}^+$, el algoritmo de la division de euclides dice que:

$$a = q \cdot b + r, \quad 0 \leq r \leq b$$

Resulta que se cumple lo siguiente:

$$mcd(a, b) = mcd(b, r)$$

Ej:

$$\underbrace{8}_{a} = 1 \cdot \underbrace{6}_{b} + \underbrace{2}_{r} \qquad \underbrace{6}_{a} = \underbrace{3}_{q} \cdot \underbrace{2}_{b} + \underbrace{0}_{r}$$

$$\text{mcd}(\underbrace{8}_{a},\underbrace{6}_{b}) = \text{mcd}(\underbrace{6}_{b},\underbrace{2}_{r}) = \text{mcd}\underbrace{(2,0)}_{\text{forma}} = 2$$

$\text{mcd}(\boxed{\text{algo}}, 0)$

"algo" es

[ojo siembre b es más grande

$\underbrace{b}_{} = qa + r$]

Ej: Calcular el mcd(4517, 8633) ≡ mcd(8633, 4517)

8633 = 1 · 4517 + 4116

⇒ mcd(4517, 4116)

4517 = 1 · 4116 + 401

⇒ mcd(4116, 401)

4116 = 10 · 401 + 106

⇒ mcd(401, 106)

401 = 3 · 106 + 83

⇒ mcd(106, 83)

106 = 1 · 83 + 23

⇒ mcd(83, 23)

83 = 3 · 23 + 14

⇒ mcd(23, 14)

23 = 1 · 14 + 9

⇒ mcd(14, 9)

14 = 1 · 9 + 5

⇒ mcd(9, 5)

9 = 1 · 5 + 2

⇒ mcd(5, 2)

5 = 2 · 2 + 1

⇒ mcd(2, 1)

2 = 1 · 1 + 1

⇒ mcd(1, 1)

1 = 1 · 1 + 0

⇒ mcd(1, 0)

HALT

! Cuando $mcd(a,b) = 1$ decimos que a y b son primos relativos (coprimos). Por ejemplo:

$$a = 14, \quad b = 15$$

$$mcd(14, 15)$$

$$15 = 1 \cdot 14 + 1$$

$$14 = 1 + 0$$

$$mcd(1, 0)$$

Mínimo Común Multiplo:

Def. MCM = Dados $a, b \in \mathbb{Z}^+$, decimos:

1) "d" es común multiplo de "a" y "b" si:

$$\boxed{a \mid d \quad \& \quad b \mid d}$$

! hay infinitos comunes multiplos.

2) "d" es el mínimo común multiplo de "a" y "b" si cualquier otro común multiplo "c" cumple

$$\boxed{d \mid c}$$

Entonces $d = mcd(a, d)$

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ & 2 \\ & 2 \\ & 2 \\ & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ & 2 \\ & 3 \\ & 7 \end{array}$$

• de potencia máxima

$$mcm(84, 48) = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$$

<u>Observación</u>: Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, por TFA:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_R^{\alpha_R} \ \& \ b = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_R^{\alpha_r}$$

Entonces,

$$\text{mcm}(a,b) = p_1^{\text{máx}\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot p_2^{\text{máx}\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \ldots \cdot p_r^{\text{máx}\{\alpha_r, \beta_R\}}$$

$\boxed{!}$ mcm(a,b) mcd(a,b)