Lunes 4 noviembre Lab 13
Coordenadas Polares, Derivadas y Áreas

Lunes 11 noviembre. Parcial 3
Mar 12 noviembre Parcial 3.

Final Jueves 21 de noviembre.

Corto 11 Jueves 31 Áreas y Longitud Arco
Jueves 6 Coordenadas Polares.

Curvas Polares $r = f(\theta)$ θ variable independiente
r variable dependiente.

(Identifique cada punto (r, θ) y luego se conectan por medio de una curva).

Curvas Polares comunes, circunferencias, cardioides, espirales y flores.

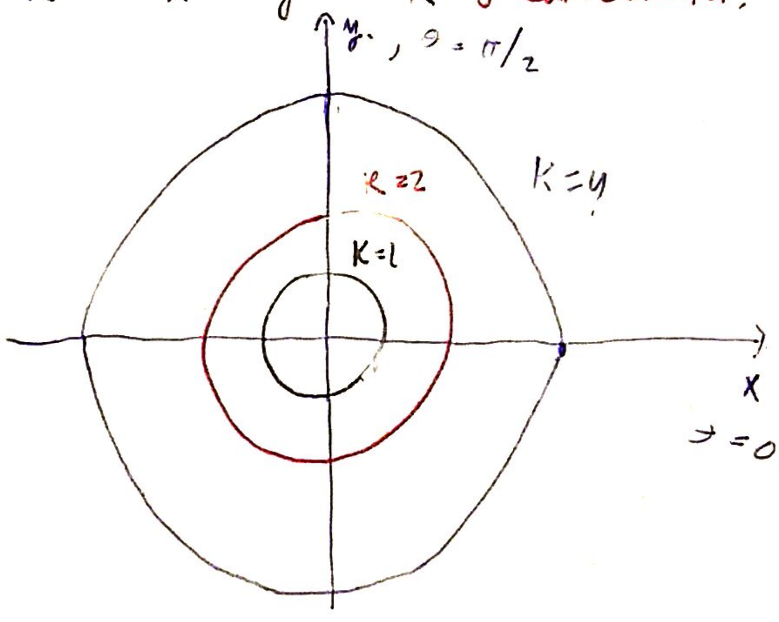
a. Circunferencia de radio K: $x^2 + y^2 = K^2$ } Ec. cartesiana.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$\boxed{r = K.}$

Circunferencia de radio K. centrada en el origen



b. Rayo: $\theta = \alpha$.

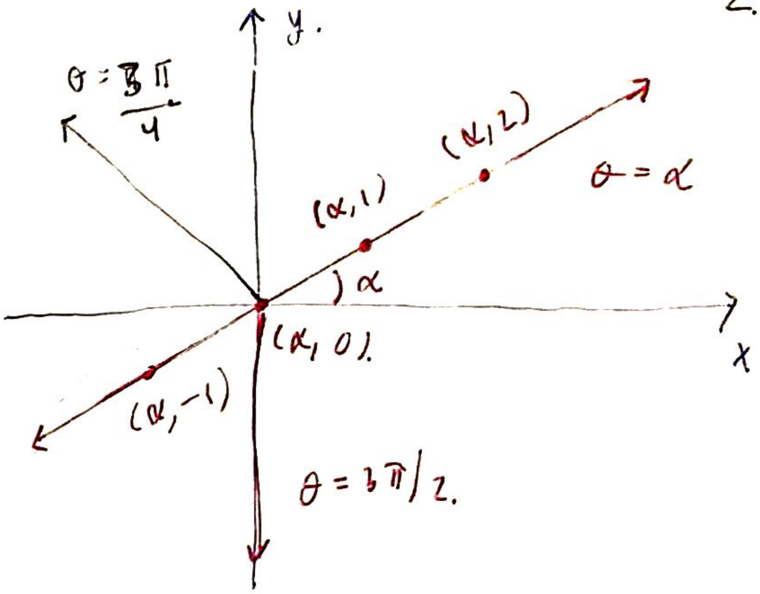
El ángulo α se mantiene constante.

Ec cartesiana Rayo

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \alpha$$

$$\frac{y}{x} = \tan\alpha.$$

$$y = x(\tan\alpha)$$

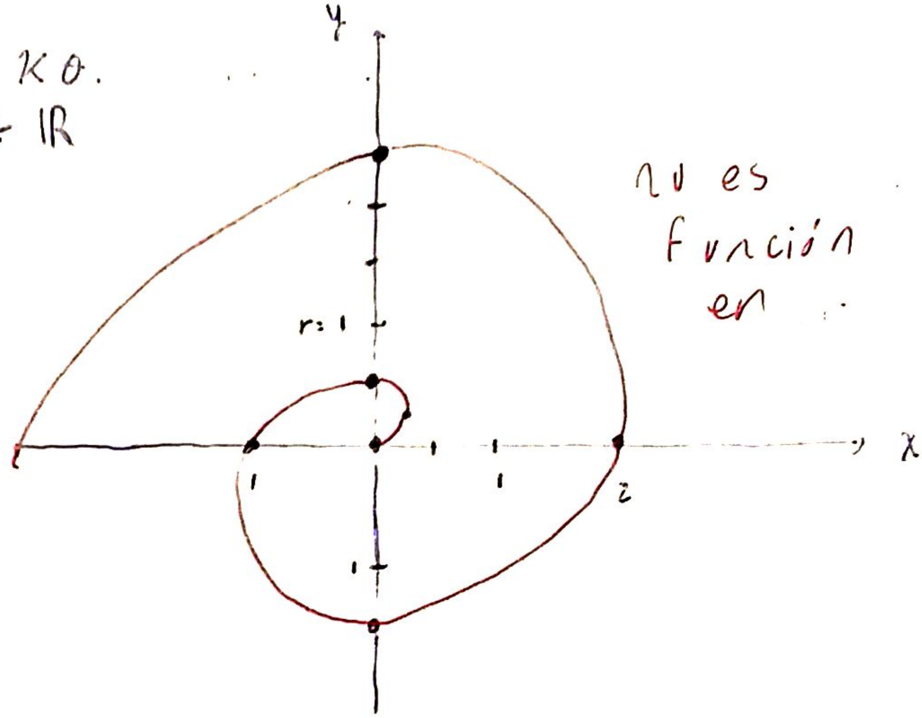


pendiente $\tan\alpha$ intercepto 0.

c. Espiral $r = K\theta$. $K \in \mathbb{R}$

$\rightarrow r = \theta/\pi$.

θ	r
0	0
$\pi/4$	$\pi/4/\pi = \frac{1}{4}$
$\pi/2$	$1/2$
π	1
$3\pi/2$	$3/2$
2π	2
$2\pi + \frac{\pi}{2}$	2,5



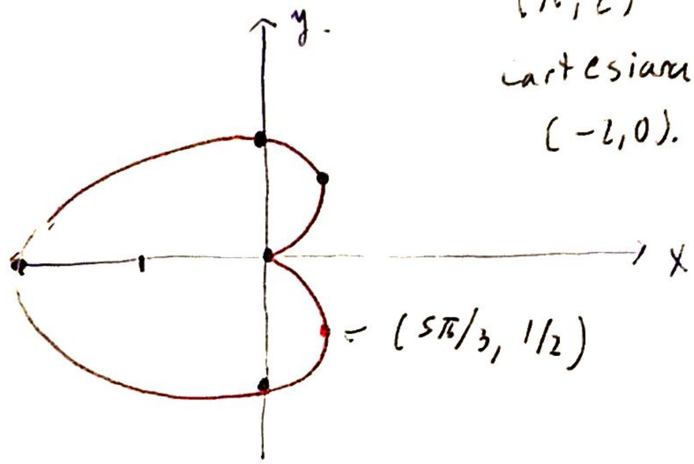
no es función en

Ec. Cartesiana de la espiral $\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

d. Cardioides $r = 1 \pm \sin\theta$ ó $r = 1 \pm \cos\theta$.

Grafique $r = 1 - \cos\theta$. $0 \le \theta \le 2\pi$

θ	r
0	$1-1=0$
$\pi/2$	$1-0=1$
π	$1-(-1)=2$.
$\pi/3$	$1-\frac{1}{2}=1/2$
$3\pi/2$	$1-0=1$
$-\pi/3$	$1-1/2=1/2$



Polares
$(\pi, 2)$
cartesianas
$(-2, 0)$.

Ecs. Cartesianas: Cardioide.

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$x = r\cos\theta$.

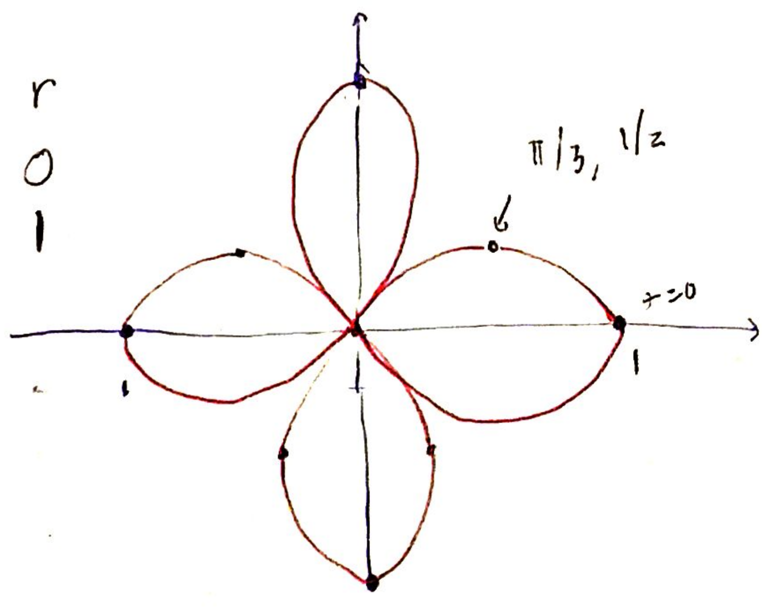
e. Rosa de n pétalos $r = \cos n\theta$ $n \geq 2$.
$r = \sin n\theta$.

$r = \cos 2\theta$. Múltiplos de $\pi/4$.

$r(\pi/4) = \cos(2\pi/4) = \cos(\pi/2) = 0$

θ	r
0	$\cos 0 = 1$
$\pi/4$	$\cos \pi/2 = 0$
$\pi/2$	$\cos\pi = -1$
$3\pi/4$	0
π	1
$5\pi/4$	0
$3\pi/2$	-1

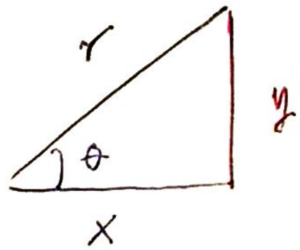
θ	r
$7\pi/4$	0
2π	1



Ejercicio 4: Sea $r = 2\sin\theta$.

a. Encuentre una ecuación cartesiana para la curva.

Elimine r & θ y exprese en términos de x & y.



$y = r\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{r}$

$x = r\cos\theta$.

$r^2 = x^2 + y^2$.

$r = 2\sin\theta = \frac{2y}{r} \Rightarrow r^2 = 2y$.

$x^2 + y^2 = 2y$. Ec. Cartesiana.

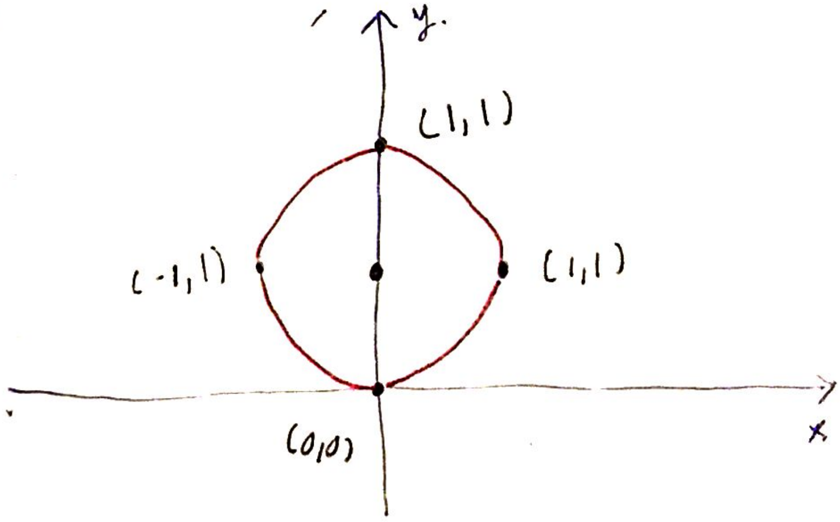
b. Identifique y grafique la curva

Ec. circunferencia centrada (a,b) y radio r $\quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0 + 1$ $\quad$ Complete el cuadrado $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}$

$x^2 + (y-1)^2 = 1$

circunferencia radio 1 centrada en $(0,1)$.



Ec. Circunferencia. $r = A\sin\theta + B\cos\theta$.

A, B cualquier constante. centro fuera del origen.

Derivadas de Funciones Polares:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \qquad y = f(t) \quad x = g(t).$$

Dada una función polar $r = f(\theta)$ $\quad r'(\theta)$

Reescriba en coordenadas cartesianas

$y = r\sin\theta. = f(\theta)\sin\theta$

$x = r\cos\theta. = f(\theta)\cos\theta.$

θ es el parámetro.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}.}$$

Ejercicio 5: Considere el cardioide $r = 1 - \cos\theta$

a. Encuentre dy/dx.

$y = r\sin\theta = \sin\theta - \sin\theta\cos\theta. = \sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta.$

$x = r\cos\theta. = \cos\theta - \cos^2\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{\cos\theta - \cos 2\theta.}{-\sin\theta + 2\sin 2\theta.}$$

b. Encuentre la ec. de la recta tangente en $\theta = \pi/2$.

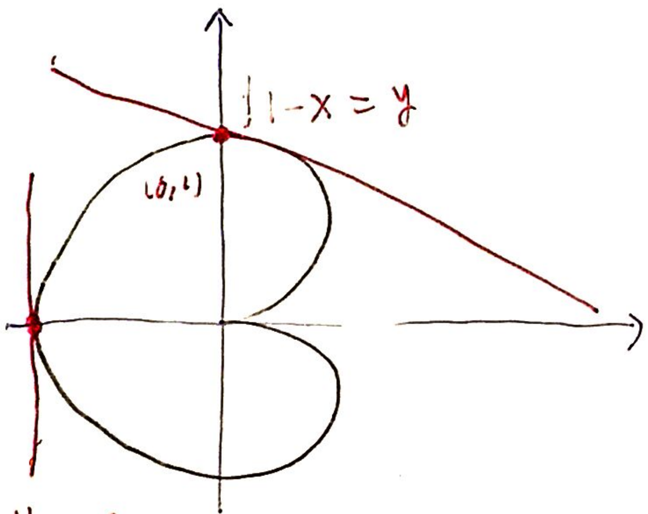
$x(\pi/2) = \cos\pi/2 - (\cos\pi/2)^2 = 0$ $\quad (0,1)$

$y(\pi/2) = \sin\pi/2 - \frac{1}{2}\sin\pi = 1$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/2} = \frac{\overbrace{\cos\pi/2}^{0} - \cos\pi}{-\sin\pi/2 + \underbrace{2\sin\pi}_{0}} = \frac{+1}{-1} = -1$$

Ec. Recta Tangente: $y = y(\pi/2) + m(x - \overbrace{x(\pi/2)}^{0})$

$$\boxed{y = 1 - x}$$



T.V $x = 2$.

c. Encuentre la ecuación de la recta tangente en $\theta = \pi$.

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi} = \frac{\overbrace{\cos\pi}^{-1} - \cos 2\pi}{-\sin\pi + 2\sin 2\pi} = \frac{-2}{0}$$

Hay una tangente vertical $\quad \boxed{x = -2}$

$x(\pi) = \cos\pi - (\cos\pi)^2 = -1 - 1 = -2.$

$y(\pi) = 0$

Ejercicio 6: Considere la ec. polar $r = 2\sin\theta$.

círculo de radio 1 centrado en $(0,1)$

a. Encuentre la derivada dy/dx.

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad x^2+y^2 = 2y.$$

$$x^2+y^2-2y+1 = 1 \qquad x^2+(y-1)^2 = 1$$

$$y = r\sin\theta. = 2\sin^2\theta.$$

$$x = r\cos\theta = \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{4\sin\theta\cos\theta}{\cos 2\theta.} = 2\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \boxed{2\tan 2\theta.}$$

b. Encuentre la tangente a la curva en $\theta = \pi/6$.

$$y(\pi/6) = 2(\sin\pi/6)^2 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

$$x(\pi/6) = \frac{1}{2}\sin\pi/3 = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/6} = 2\tan\pi/3. = 2\,\frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = 2\sqrt{3}$$

Ec. Recta Tangente: $\boxed{y = \frac{1}{2} + 2\sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}$