UFM Universidad Francisco Marroquín — FACULTAD de CIENCIAS ECONÓMICAS

$p \to q$

si $p \wedge \neg q \Rightarrow (\to\leftarrow)$

CS041 Matemática Discreta Aplicada

Examen Parcial 1

Nombre: David Gabriel Corzo Mcmath 20190432

Resumen:

Ejercicio:	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Puntos:	20	20	20	10	10	5	5	10	100
Resultado:	12	2	13	10	5	0	2	8	49+3 = 52

Instrucciones: Resuelva los siguientes ejercicios de forma clara y ordenada, dejando constancia de todo su procedimiento.

1. (20 puntos) Utilice las leyes de la lógica y las reglas de inferencia para validar o refutar el siguiente argumento. Indique el nombre de cada ley y/o regla cuando las utilice.

Si Fred no malgasta su salario u obtiene el ascenso a gerente, entonces comprará un carro nuevo en enero. Si compra el carro, entonces deberá solicitar un crédito o deberá vender el carro viejo. Si vende el carro viejo, entonces obtendrá un ingreso extra. Fred no solicitó el crédito y tampoco obtuvo un ingreso extra. En conclusión, Fred no obtuvo el puesto de gerente.

Premisas:

F: fred no malgasta

A: fred asciende a gerente

C: Comprará el carro nuevo

H: solicita el crédito

V: Venta del carro viejo

I: ingreso extra

Proposiciones:

① $(F \vee A) \to C$

② $C \to (H \vee V)$

③ $V \to I$

$\Big\}\ (F \vee A) \to (H \vee V)$

faltan.

Ⅰ $(F \vee A) \to C \wedge C \to (H \vee V)$ Silogismo Hipotetico ①②

$\therefore (F \vee A) \to (H \vee V)$.

no es la manera de plantear y/o resolver el problema

Ⅱ $[(F \vee A) \to (H \vee V)] \wedge [V \to I]$

Sabemos que fred no solicitó el credito ni obtubo el ingreso extra, ni fue gerente.

$H = \emptyset \quad I = \emptyset \quad A = \emptyset$

$[(\underbrace{F \vee \emptyset}_{\text{Domination Law}}) \to (\underbrace{\emptyset \vee V}_{\text{identity laws}})] \wedge [V \to \emptyset]$

$[F \to V] \wedge [V \to \emptyset]$

Ⅲ $[F \to V] \wedge [V \to \emptyset]$

$(\to\leftarrow)$

Análisis: Si fred sí vende el carro por la implicación se contradice

Ⅱ $[F \to V] \wedge [V \to \emptyset]$ silogismo hipotético

¿?

$\therefore [F \to \emptyset]$

Conclusión: "Fred no malgasta" (F), no puede ser cierto, en conclusión Fred sí malgastó.

2. (a) 0 (10 puntos) Demuestre que n^3+n es par, con $n \in \mathbb{Z}^+$.

▪ Demostración por contradicción:

Si n^3+n ~~el resultado~~ es impar, ~~se niega por fines de contradicción~~

$n^3+n = 2(k)+1$

$n(n^2+1) = 2(k)+1$

$\underbrace{(n^2+1)}_{\text{impar}}$

¿por qué creés que es el mismo k?

$n(2k+1) = 2k+1$

$\frac{n(2k+1)}{2k+1} = 0$

$n = 0$

$(\rightarrow\leftarrow)$ 2

▪ Prueba directa (adicional):

$n = 1$

$(1)^3+1 = 2k$

$2 = 2k$

k tiene que ser uno en este caso

$2 = 2(1)$

$2 = 2$

si n es par: (2)

$n = 3$

$n^2 = 9$

$n^2+1 = 10$

Directa por casos:

$n^3+n = \underbrace{n}_{\text{par}}\underbrace{(n^2+1)}_{\text{impar}} = \text{par}$

si n es impar (3)

$n^3+n = \underbrace{n}_{\text{impar}}\underbrace{(n^2+1)}_{\text{par}} = \text{par}$ ▪

Para contradicción:

Si n^2-1 es impar y n es impar.

(b) 2 (10 puntos) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, si n^2-1 es impar, entonces n es par.

▪ n^2-1 es impar: Demostración por contradicción:

"$\underbrace{n^2-1 \text{ es par}}_{p}$ si $\underbrace{n \text{ es impar}}_{q}$" Alternativamente

$\neg(p \rightarrow q) \equiv$

$\equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q$

~~Prueba directa:~~

~~$(2k)^2-1 = 2k+1$~~

~~$4k^2-1 = 2k+1$~~

~~$4k^2-2 = 2k$~~

~~$2(2k^2-1) = 2k$~~

Si n^2-1 es impar $\boxed{y}$ n es impar entonces ¿qué?

$n = 2k+1$

$n^2-1 =$

$\boxed{n = 2k+1}$

$n^2-1 = \overbrace{2k+1}^{\text{impar}}$ asumo el resultado impar.

$(2k+1)^2-1 = 2k+1$

$2^2k^2+2\cdot 2k\cdot 1+1^2-1-1 = 2k$

$\underbrace{4k^2+4k+1}_{\text{entero } m}-2 = 2k$

$m-2 = 2k$

$m = 2k+2$

$m = 2(\underbrace{k+1}_{\text{entero } q})$

$m = 2q$ $(\rightarrow\leftarrow)$

No usés contradicción, primero aprender a plantear la contradicción, segundo contradicción no es necesaria para este ejercicio.

debido al entero resultante ser par contradice la premisa del resultado ser impar es falsa por ende se puede concluir que la negación de la premisa negada es verdadera.

3. (a) 8 (10 puntos) Pruebe usando inducción matemática que:

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},\ n \geq 1$$

Paso base

$n = k$

$$\sum_{i=1}^{k} i(i+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

¿cómo así?

$n = 2$

$$\sum_{i=1}^{2} 8 = \frac{1(2)(3)}{3} + \frac{2(3)(4)}{3}$$

Paso inductivo:

$n = k+1$

objetivo

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1) = \left[\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}\right] = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+1)$$

$$= (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3} + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{k+3}{3}\right)(k+1)(k+2) =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \quad \square$$

(b) 4 (10 puntos) Pruebe usando inducción matemática que si $n \geq 1$, entonces $n^3 - n$ es un múltiplo de 3.

$n^3 - n = 3k$

Paso base:

$n = k$

$k^3 - k = 3m$

$n = 1$

$1 - 1 = 3 \cdot 0$

$0 = 0$

$$\sum_{i=1}^{1} 8 =$$

$$\sum_{i=1}^{2} 8 = 8 + 8 = 16.$$

Paso inductivo:

$n = k+1$

$(k+1)^3 - (k+1) = \cancel{3m}$

$k^3 + 3k^2 + 3 + \cancel{1} - k - \cancel{1} = 3m$

¿por qué?

$$\sum_{i=1}^{2} i(i+1) = 1(1+1) + 2(2+1) = 2 + 6 = 8$$

4. En una clase de 10 alumnos van a distribuirse 4 premios. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto si:

(a) (5 puntos) los premios son diferentes?

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ el orden importa por ser diferente.

me inclino por permutaciones.

$A_1 + P_1$

$A_1 + P_2$

$\vdots$

$A_{10} + P_4$

$${}^{10}_{4}P = \frac{(10)!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 5040$$

(b) (5 puntos) los premios son iguales?

- no importa el orden $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$
- era diferente en la anterior recibir el regalo 1 que el dos pero como ahora es lo mismo recibir el uno o el dos conté de más.
- me inclino por combinatoria.

$${}^{10}_{4}C = 210$$

5. Calcule el número de cadenas de 12 bits que satisfacen los siguientes requerimientos:

(a) (5 puntos) contienen exactamente 5 unos.

$${}^{12}_{5}C = 792$$

$\underset{1}{1}\ \underset{2}{1}\ \underset{3}{1}\ \underset{4}{1}\ \underset{5}{1}\ \underset{6}{0}\ \underset{7}{0}\ \underset{8}{0}\ \underset{9}{0}\ \underset{10}{0}\ \underset{11}{0}\ \underset{12}{0}$ es lo mismo que

10 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0

- entonces me inclino por combinatoria.
- debo repartir 5 unos entre de 12.

(b) (5 puntos) contienen más unos que ceros. para fracasado, contienen más de seis unos repartir 6 dentro de 12

111 111 000000 lo mismo que 000000 111111

- me inclino por combinatoria.

$${}^{12}_{6}C = 924$$

6.0 (5 puntos) Una popular tienda de dulces cuenta con 4 distintas presentaciones para elegir: chocolates, bombones, paletas y gomitas. Al momento de escoger Ud. nota lo siguiente:

- de los chocolates, bombones y gomitas hay por lo menos 20 de cada uno
- solo hay 10 paletas

Si hubiese 20 de c/u: $_{4}^{20}C - 4\,_{4}^{1}C - 4\,_{3}^{1}C - 4\,_{3}^{2}C - 4\,_{3}^{1}C - 4\,_{3}^{2}C - 4\,_{3}^{1}C$

Si Ud. debe escoger al menos un dulce de cada tipo, ¿de cuántas maneras es posible elegir 20 de ellos?

Respuesta: • debo escoger uno de 20 chocolates, uno de 20 gomitas

• si escojo uno de chocolate tengo 19 más de los

$_{4}^{16}C - _{3}^{5}C - _{3}^{4}C$ chicles $_{3}^{2}C$ $_{3}^{5}C$ bombones

$_{4}^{20}C - 4\,_{4}^{1}C - 12\,_{3}^{1}C - 8\,_{3}^{2}C$

descuento de opciones

Principio del producto:

$\underbrace{|19|}_{B} * \underbrace{|19|}_{g} * \underbrace{|19|}_{ch} * \cancel{\underbrace{|9|}_{P}} = 61731$

no importa el orden por ser así combinatoria

$B_1 + G_1 + Ch_1 + P_1 \ldots P$

20 20 20 20

| 1 | 1 | 1 | 17 |

$_{4}^{20}C - 4\,_{1}^{20}C - 4\,_{5}^{1}C -$

¿cómo poner 20 objetos en 4 casillas?

$_{4}^{20}C$

Si tomo 19 de una, hay $_{1}^{3}C$ formas distintas de tomar el faltante y de esta manera hay 4 formas.

$4\,_{1}^{3}C$

Hay $_{1}^{4}C$ maneras de tomar todos de una casilla, || 18 | 1 | 1 | $4\,_{2}^{3}C$ || 17 | 1 | 1 | 1 | $4\,_{1}^{3}C$ + | 16 | 2 | 1 | 1 | $4\,_{2}^{3}C$

7.2 (5 puntos) Calcule el número de palabras diferentes que pueden formarse usando todas las letras de la palabra MISSISSIPPI.

m	I_1	S_1	S_2	I_2	S_3	S_4	I	P_1	P_2	I_3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

26 * 26 * 26 * ... 26

4 I
3 I
2 P
1 M
4 S

Permutación generalizada.

$$P(26,26) = \frac{26!}{0! * 3! * 2! * 1! * 4!} = \frac{26!}{12 * 24}$$

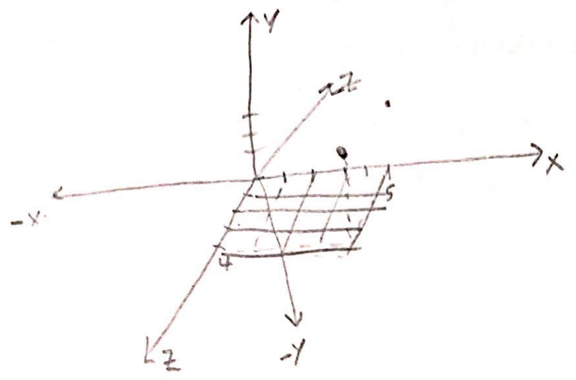
cuento como que si fuesen indistinguibles y descuento las repeticiones

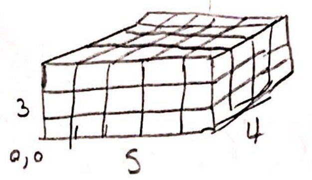
$6 * 2 * 1$ = 12

$4*3 = 12*2 = 24*1 = 24$

12 * 24

8. (a) (5 puntos) Calcule el número de caminos en el espacio xyz desde el origen hasta el punto $(5, 3, 4)$, tales que cada camino está formado por una serie de pasos, y cada paso es bien un movimiento en la dirección positiva del eje x, uno en la dirección positiva del eje y, o bien, uno en la dirección positiva del eje z (no están permitidos los movimientos en las direcciones negativas de los 3 ejes).





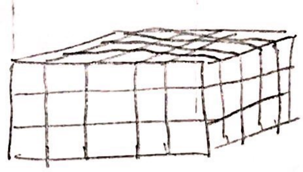
12 movimientos en total

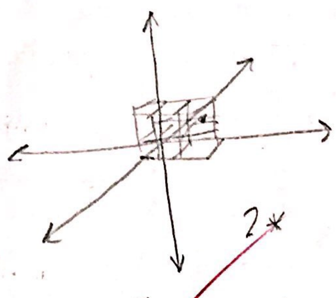
, veces

$$\frac{12!}{0!} = 12.$$

~~479001600 formas~~ del origen a $(5,3,4)$

(b) (5 puntos) ¿Cuántos de los caminos del inciso anterior no pasan por el punto $(2, 2, 1)$?





2*

~~$[(5-2),(3-2),(4-1)]$~~

~~$[3, 1, 3]$~~

7 movimientos en total

$P(7,7) = 5040$