Notas de clase Cálculo integral
UFM
SECCIÓN A

Christiaan Ketelaar
Organizado por: David Corzo

2019-10-09

Índice general

Capítulo 1

La integral indefinida, notación de integral, Teorema de evalucación de integrales

5.4 La Integral Indefinida

Una antiderivada de f es una función $F(x)$ cuya derivada es $f(x)$.

$$F'(x) = f(x)$$

$f(x) = 10x^4$ una antiderivada. $F(x) = 2x^5$

$F'(x) = 10x^4$

$F(x) = 2x^5 + \pi$ $\quad$ $F(x) = 2x^5 - 1{,}215$

Antiderivada General: $F(x) = 2x^5 + \underline{C}.$

constante de integr.

La Integral Indefinida de $f(x)$ respecto a x, es la antiderivada más general de f.

$$\boxed{\int f(x)\, dx = F(x) + C} \qquad C \in \mathbb{R}.$$

sigma elongada $\int$ $\quad$ dx diferencial

integre respecto a x

$\int f(x, y)\, dx$ $\qquad$ $\int f(x, y)\, dy.$

$f(x, y) = 2x + y.$

$$\int (2x + y)\, dx = x^2 + yx + C.$$

$$\int (2x + y)\, dy = 2xy + \frac{y^2}{2} + C.$$

Integrar significa encontrar la antiderivada general de f $\quad \int dx.$

Integrales indefinidas Básicas.

Reescriba las reglas de Antiderivadas.
Voltear la tabla de derivación.

valor absoluto

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C.$$

$n \neq -1$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C.$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C. \qquad \int \tan x\,dx \quad ? \quad \int \sec x\,dx \quad ?$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C. \qquad \int \cot x\,dx. \quad ? \quad \int \cot x\,dx \quad ?$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C. \qquad \int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C.$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C.$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}(x) + C. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}(x) + C$$

$$\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = \cot^{-1}(x) + C \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1}(x) + C.$$

Suma: $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Constante: $\int K f(x)\,dx = K \int f(x)\,dx$ $\quad K$ es constante

Ejemplos.

a) $\int (5x^{10} + 2x^5)\,dx = \frac{5x^{11}}{11} + \frac{2x^6}{6} + C.$

b) $\int \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^{1/2}}\,dx = \int x^{-2} + x^{-1/2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C.$

b) Otra respuesta. $-\frac{1}{x} + 2\sqrt{x} + C.$

d. $\int x^{\pi} + x^{\sqrt{2}}\, dx. = \frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} + \frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + C.$

c. $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} + \sqrt[3]{x^2}\, dx$

$\int x^{-2/5} + x^{2/3}\, dx = \frac{5}{3}x^{3/5} + \frac{3}{5}x^{5/3} + C.$

Ejercicio 1: Evalúe.

$x^{-1} \rightarrow \frac{x^0}{0}$

a) $\int (\underbrace{x^e}_{\text{potencia}} + \underbrace{e^x}_{\text{exponencial.}})\, dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + e^x + C.$

$a^0 = \frac{a^1}{a^1} = 1$

b) $\int \left(8\cdot 10^x - \frac{2}{x}\right) dx = 8\cdot\frac{10^x}{\ln(10)} - 2\ln|x| + C$

c) $\int (x-2)(x+2)(x^2+4)\, dx = \int (x^2-4)(x^2+4)\, dx.$

$\int (x^4 - 16)\, dx = \frac{x^5}{5} - 16x + C.$

d) $\int \frac{e^{4x} + e^{5x}}{e^{4x}}\, dx = \int (1 + e^x)\, dx = x + e^x + C.$

Integral Definida.

Es una integral con límites de integración en $x=a$ & $x=b$.

$\int_a^b f(x)\, dx.$ $\qquad \int f(x)\, dx = F(x) + C$

Teorema de Evaluación:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$ es un número.

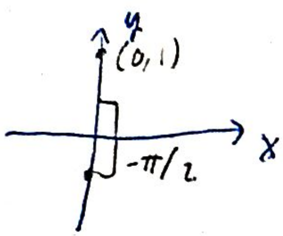
utilice la notación de corchete $\Big]_a^b$ para indicar que la antiderivada se está en ambos límites.

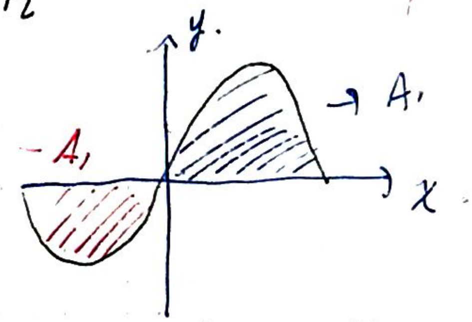
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} \qquad F(x)+C\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b)+\cancel{C'} - F(a) - \cancel{C}$$

Ejercicio 1: Evalúe los sigs. integrales definidas.

Pág. 12.

0. $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\,dx = -\cos x\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\overset{0}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \overset{0}{\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)} = 0$$ ✓✓





detalles

a. $$\int_0^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^3 = \frac{27}{3} - \frac{0}{3} = 9$$

Antiderive: Luego evalúe. álgebra.

b. $$\int_9^{36} \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_9^{36} = \frac{2}{3}\left(6^{2\cdot 3/2} - 3^{2\cdot 3/2}\right)$$

$x^{1/2}$

$$\frac{2}{3}\left(6^3 - 3^3\right) = \frac{2}{3}(216-27)$$

c. $$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{1-x^2}\,dx$$ capcioso, no existe porque $\frac{1}{1-x^2}$ se indefine en $x=\pm 1$!

y 1 en $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

5.

No hay regla para $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \frac{A}{1-x}\,dx + \int \frac{B}{1+x}\,dx$

d. $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\right) dx = 2\cdot x^{1/2} + \frac{6}{3} x^{3/2} \Big]_{x=1}^{x=4}$

indefin en $x=0$

$\int x^{-1/2} + 3x^{1/2}\,dx$

$= 2\sqrt{4} + 2\cdot 4^{3/2} - (2\sqrt{1} + 2\cdot 1^{3/2})$

$= 4 + 16 - (2 + 2)$

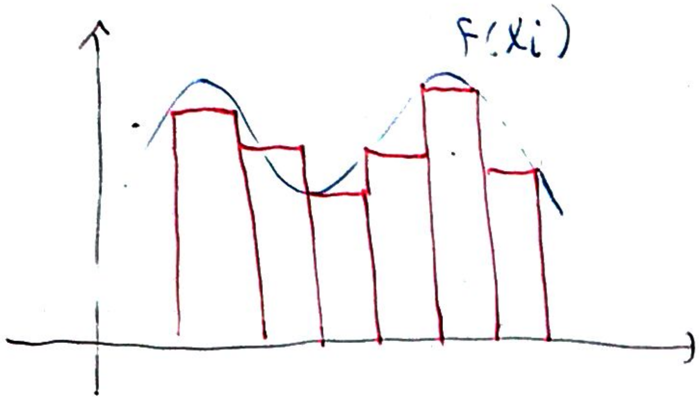
$= 20 - 4 = \underline{\underline{16}}$

Capítulo 2

5.4 Áreas y propiedades de la integral definida

utm.edu 9746 0065.

5.4 Áreas y Propiedades de la Integral Definida



Área

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

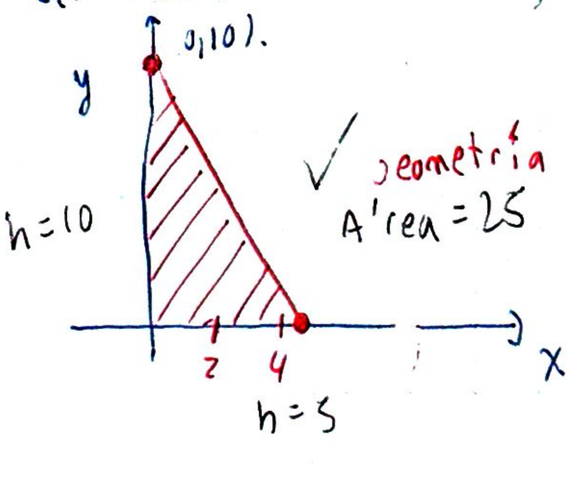
Si f es continua en $[a,b]$, la integral definida es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

La integral definida es el área de la región bajo la curva $y = f(x)$ en $[a,b]$. $f(x) \geq 0$.

Ejercicio 2: Encuentre el área de las sigs. regiones. Bosqueje cada región.

a. $f(x) = 10 - 2x$, $f(x) \geq 0$ en $0 \leq x \leq 5$.



$$A = \int_0^5 (10 - 2x)\,dx$$

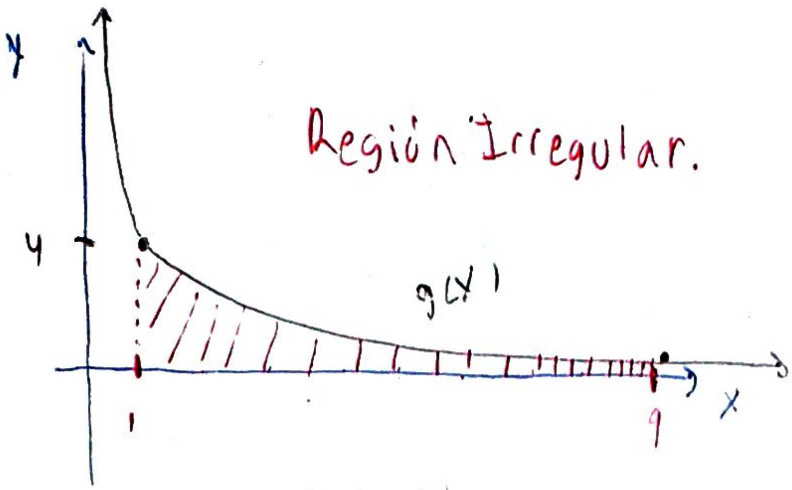
$$A = 10x - x^2 \Big]_0^5 = 50 - 25 - 0$$

$$A = 25.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

b. $g(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ entre $1 \leq x \leq 9$

AV en $x=0$
AH en $y=0$.



$$A = \int_1^9 4x^{-1/2}\,dx$$

$$A = 8x^{1/2}\Big]_1^9$$

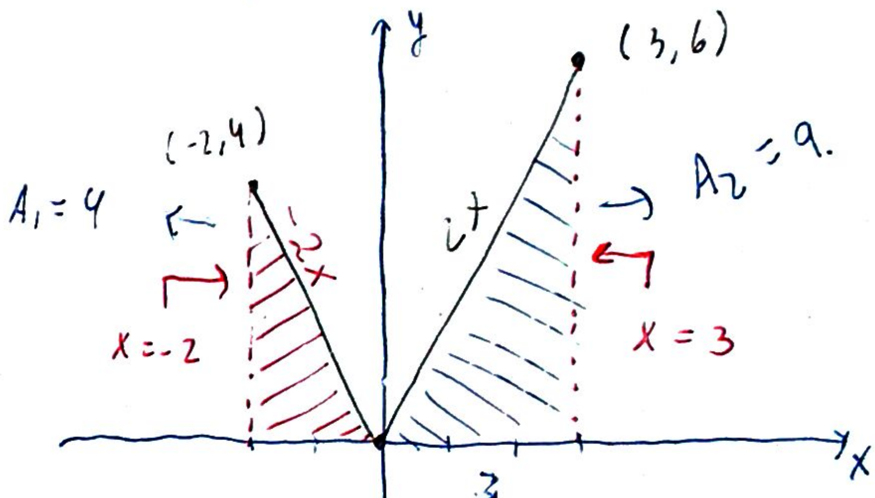
$$A = 8(\sqrt{9} - \sqrt{1}) = 8 \cdot 2 = 16.$$

abs(x)

c. $h(x) = 2|x|$ entre $x=-2$ y $x=3$.

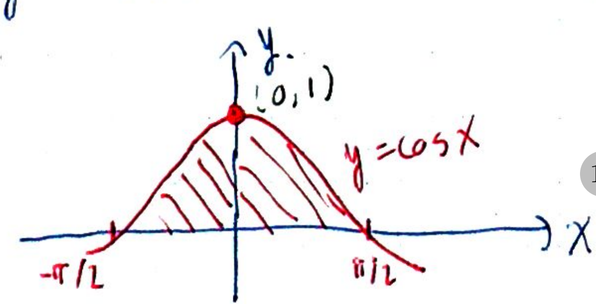
$$A = \int_{-2}^{3} 2|x|\,dx$$

$$A = \int_{-2}^{0} -2x\,dx + \int_0^3 2x\,dx$$



$$A = -x^2\Big]_{-2}^{0} + x^2\Big]_0^3 = -0-(-4) + 9 - 0 = 4+9 = 13.$$

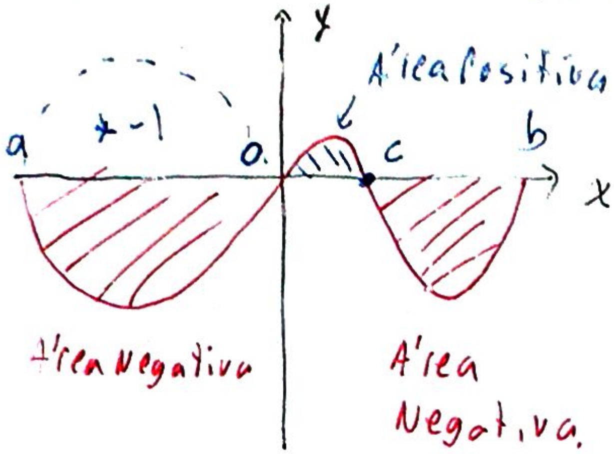
d. $y = \cos x$ entre $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$.



$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}.$$

$$A = 1 - (-1) = 2.$$

¿Qué sucede cuando $f(x) < 0$ en partes del intervalo?



Área de la región entre $f(x)$ y el eje-x.

$$A \neq \int_a^b f(x)\,dx$$

$$* \int x f(x)dx = x \int f(x)dx$$

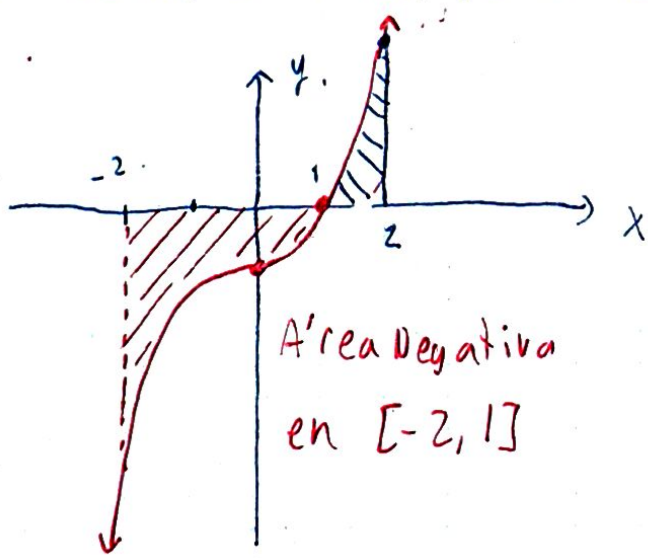
$$A = \int_a^0 -f(x)dx + \int_0^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

Pag 16. Ejercicio 3: Considere $f(x) = 4x^3 - 4$ en $-2 \leq x \leq 2$.

a. $\int_{-2}^{2} (4x^3 - 4)\,dx = x^4 - 4x \Big]_{-2}^{2} = (16 - 8) - (16 + 8)$

$4(x^3 - 1) = 0$ en $x = 2$ $8 - 24 = -16$

b. Bosqueje la región y explique si la integral definida representa el área de la región.



La integral definida no es el área de la región.

c. Encuentre el área de la región

$$A = \int_{-2}^{1} 4-4x^3 \, dx + \int_{1}^{2} (4x^3-4) \, dx.$$

$$A = \underbrace{4x - x^4 \Big]_{-2}^{1}}_{A_1} + \underbrace{x^4 - 4x \Big]_{1}^{2}}_{A_2} = \overbrace{(4-1)-(-8-16)}^{A_1} + \underbrace{(16-8)-(1-4)}_{A_2}$$

$$A = (3+24) + (8+3) = 27 + 11 = 38$$

Propiedades Integral Definida.

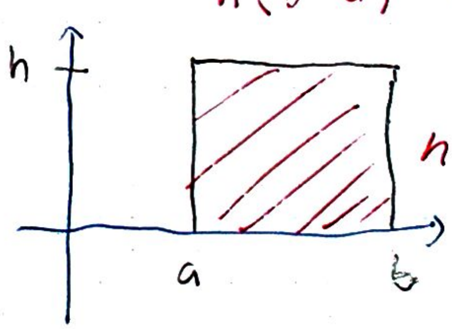
$$\int_a^b k_1 f(x) \pm k_2 g(x) \, dx = k_1 \int_a^b f(x) \, dx \pm k_2 \int_a^b g(x) \, dx$$

Otras Propiedades. $F(x)\Big]_a^a = F(a) - F(a) = 0$

Ejemplos: $\int_{\pi}^{\pi} \arctan(e^{x^2} + \log|x|) \, dx = 0$

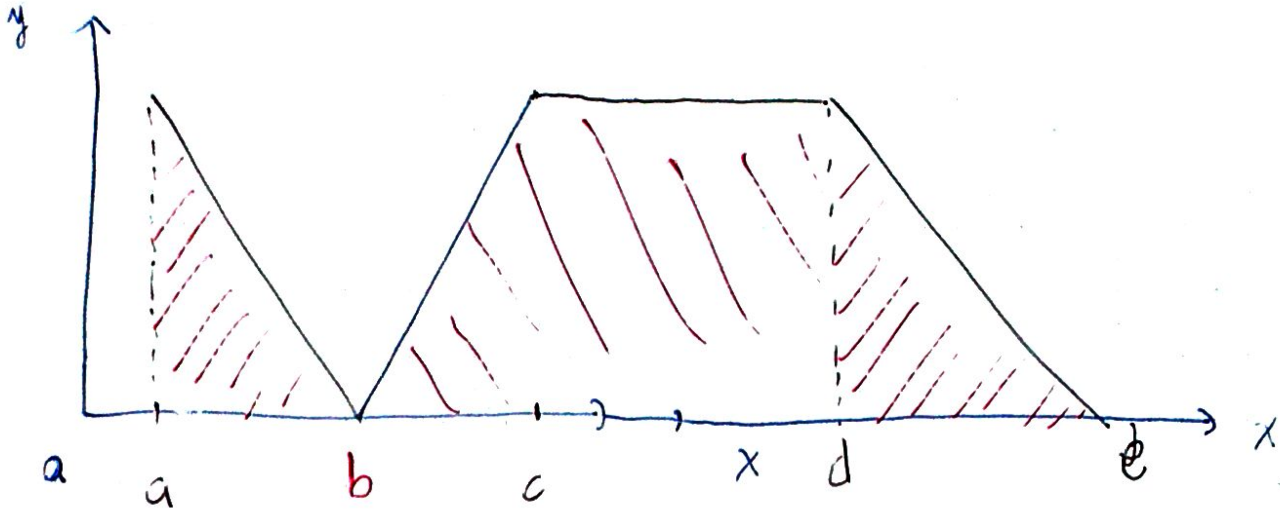
$$\int_a^a f(x) \, dx = 0$$

$h(b-a) = A.$



$$\int_a^b h \, dx = hx \Big]_a^b = h(b-a)$$

p.e. $\int_5^{1005} \sqrt{2} \, dx = \sqrt{2}(1005-5)$



7. $$\int_a^e f(x)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx + \int_c^d f\,dx + \int_c^e f\,dx.$$

8. Invertir el orden de integración.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a -f(x)\,dx.$$

$$F(b) - F(a) = (-F(b) + F(a))(-1) = \int_b^a -f(x)\,dx.$$

p.e. $$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big]_0^{\pi} = -\underbrace{\cos\pi}_{-1} - (-\underbrace{\cos 0}_{1})$$

$$= 1 + 1 = 2.$$

$$\int_{\pi}^{0} -\sin x\,dx = \cos x\Big]_{\pi}^{0} = \cos 0 - \cos\pi = 1 + 1 = 2.$$

Ejercicio 5: Evalúe la sig. integral definida.

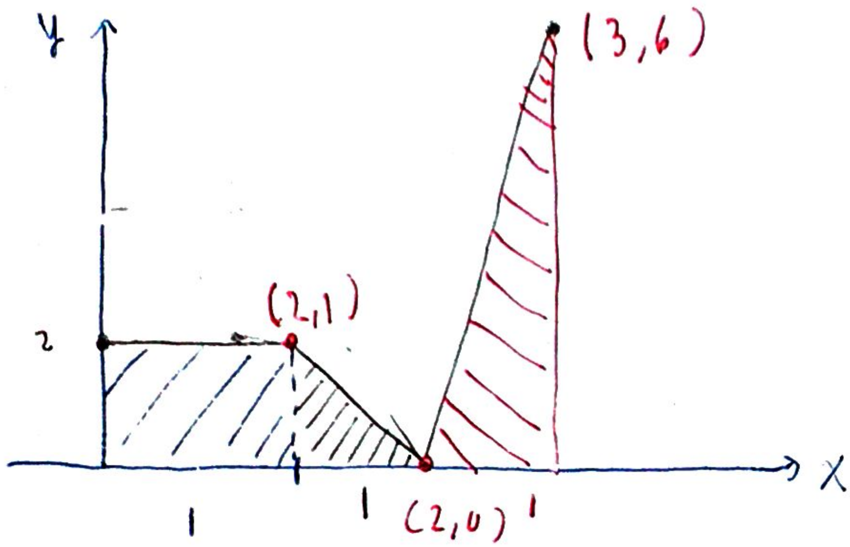
$$\int_0^3 f(x)\,dx \qquad \text{donde} \qquad f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-2x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 6x-12 & \text{si } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

$$\int_0^3 f\,dx = \int_0^1 2\,dx + \int_1^2 (4-2x)\,dx + \int_2^3 (6x-12)\,dx.$$

$$= 2x\Big]_0^1 + 4x - x^2\Big]_1^2 + 3x^2 - 12x\Big]_2^3$$

$$= 2. \quad + (8-4) - (4-1) + (27-36) - (12-24)$$

$$= 2 \quad + \quad 1 \quad + \quad 3 \quad = \quad 6.$$



$A_1 = 2 \cdot 1$ Rectángulo

$A_2 = \frac{1}{2}\, 2 \cdot 1$ triángulo

$A_3 = \frac{1}{2}\, 6 \cdot 1$ Triángulo

$A = 1 + 2 + 3 = 6$

Capítulo 3

Desplazamiento y distancias con integrales

5.4 Desplazamientos y Distancias

Antiderivada de $f'(x)$ es $f(x)+c$.

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(x)\Big]_a^b = \underbrace{f(b)-f(a)}_{\text{cambio neto.}}$$

La integral de la razón de cambio es el cambio neto.

Razón de cambio puede ser la velocidad $s'(t)$

costo marginal $c'(x)$.

cambio poblacional $p'(t)$

Desplazamiento: $s = \int_a^b s'(t)\,dt$ cambio neto en la posición.

Costo Neto: $c = \int_a^b c'(x)\,dx$

Población: $p = \int_a^b p'(t)\,dt$.

Ejemplo: velocidad $v(t) = \dfrac{2}{t^{4/3}}$, $t \geq 1$ m/s.

Encuentre el desplazamiento de la partícula entre 1 y 8 s.

$v(t)=s'(t)$ $\quad s = \int_1^8 2t^{-4/3}\,dt. = -6t^{-1/3}\Big]_1^8 = 6t^{-1/3}\Big]_8^1$

$$s = -6\left(\frac{1}{\sqrt[3]{8}} - \frac{1}{\sqrt[3]{1}}\right) = -6\left(\frac{1}{2}-1\right) = 6\cdot\frac{1}{2} = 3 \text{ m.}$$

Ejercicio 1: Velocidad $v(t) = 64 - 32t$ Encuentre el desplazamiento entre 1 y 3 segundos. v - p/s.

$$s = \int_1^3 (64 - 32t)\,dt = 64t - 16t^2\Big]_1^3 = 64\cdot 3 - 16\cdot 9 - (64 - 16)$$

$$= 64\cdot 2 - 16\cdot 4\cdot 2$$

$$128 - 128 = 0 \text{ pies.}$$

$$64t\Big]_1^3 - 16t^2\Big]_1^3$$

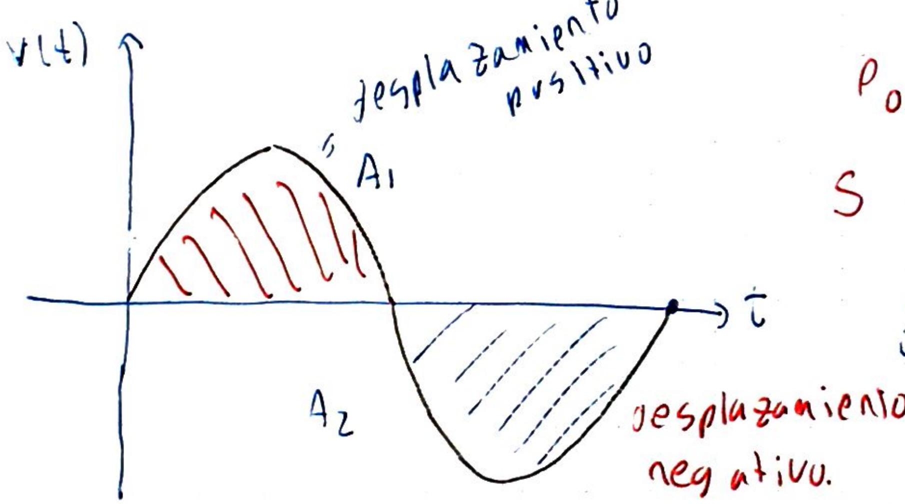
$$64\cdot 2 - 16(8)$$

Distancia vs. Desplazamiento.

$$s = a\hat{i} + b\hat{j}$$
$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

La distancia es la magnitud del desplazamiento.

$$d = \int_a^b |v(t)|\,dt. \text{ Área} \qquad s = \int_a^b v(t)\,dt. \text{ Cambio Neto.}$$

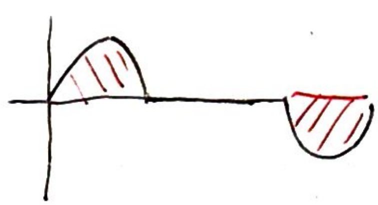


Posición relativa

$$S = A_1 + A_2 = 0$$

$$d = A_1 - A_2 > 0$$

positivo.



Rapidez $|v(t)|$ escalar

Velocidad vector.

Ejercicio 2: Un vehículo da vueltas en un circuito a una velocidad de $v(t) = 27 - 3t^2$ mph.

a. Encuentre la velocidad y rapidez del vehículo a las 5 horas.

velocidad: $v(5) = 27 - 3(25) = 27 - 75 = -48$ mph.

rapidez: $|v(5)| = |-48| = 48$ mph, speed.

b. Encuentre el desplazamiento en $0 \leq t \leq 4$

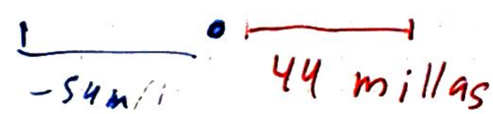
$$s = \int_0^4 (27 - 3t^2)\,dt = 27t\Big]_0^4 - t^3\Big]_0^4 = 27 \cdot 4 - 64$$

$$108 - 64 = 44 \text{ millas}$$

c. Encuentre el desplazamiento en $0 \leq t \leq 6$.

$$s = \int_0^6 (27 - 3t^2)\,dt = 27t\Big]_0^6 - t^3\Big]_0^6 = 27 \cdot 6 - 6^3$$

$$s = 162 - 216 = -54 \text{ mph.}$$



d. Encuentre la distancia recorrida durante las primeras seis horas. $0 \leq t \leq 6$.

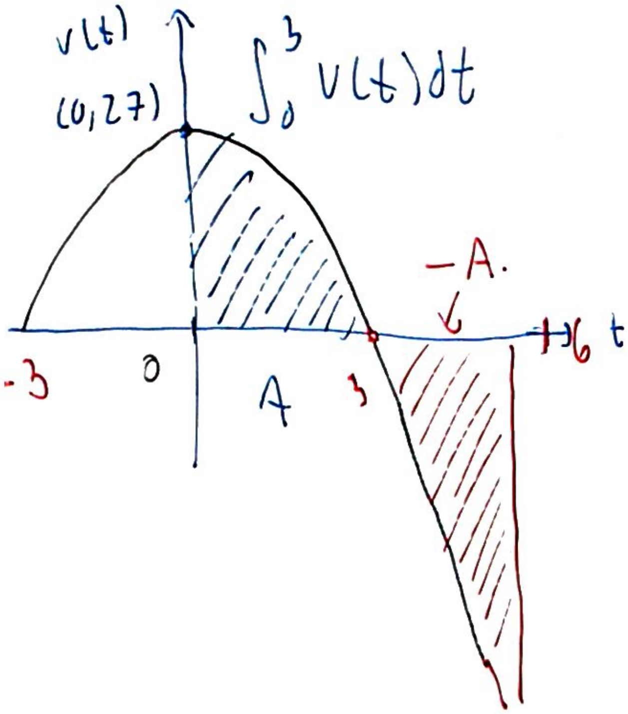
$$d = \int_0^6 |v(t)|\,dt \qquad d = \int_0^6 |27 - 3t^2|\,dt.$$

¿Cuándo $v(t) = 0$?

$$27 - 3t^2 = 0$$
$$3t^2 = 27 \Rightarrow t = \pm 3.$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & & -3 & & 3 & \\ 27 - 3t^2 & - & | & + & | & - \end{array}$$

4



$$d = \int_0^3 (27-3t^2)\,dt - \int_3^6 (27-3t^2)\,dt.$$

$$d = \left(27t - t^3\Big]_0^3\right) + \left(t^3 - 27t\Big]_3^6\right)$$

$$d = (81-27) + (\underbrace{216-162}_{54} \underbrace{-27+81}_{54})$$

$$d = 54 + (108) = 162 \text{ millas.}$$

$\int f(x)\,dx = F(x) + \underline{C}$

$\int_a^b f(x)\,dx$ es un número.

Integrales Indefinidas.

aceleración: $a(t)$

Función de velocidad: $v(t) = \int a(t)\,dt$ use $v(0) = V_0$. velocidad inicial.

función de desplazamiento: $s(t) = \int v(t)\,dt.$ use $s(0) = S_0$ posición inicial.

Derivando. $v(t) = s'(t)$ y $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

Ejercicio 3: Un cohete despega con una aceleración vertical $a(t) = t^2\left(\frac{72}{t} - 36\right)$, con una posición inicial de 0 pies, y velocidad inicial de 400 pies/s.

a) Encuentre la posición del cohete en cualquier tiempo.

Velocidad: $v(t) = \int a(t)\,dt = \int (72t - 36t^2)\,dt.$

Use $\quad v(t) = 36t^2 - 12t^3 + \cancel{C}.$ 400.

$v(0) = 400$: $\quad v(0) = 0 - 0 + C = 400$

Posición: $\quad s(t) = \int v(t)\,dt = \int (36t^2 - 12t^3 + 400)\,dt.$

$s(t) = 12t^3 - 3t^4 + 400t + C_2.$

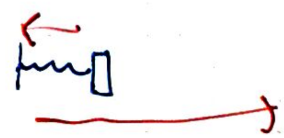
Use $s(0) = 0$: $\quad s(0) = 0 + C_2 = 0$

Posición $\quad \boxed{s(t) = 12t^3 - 3t^4 + 400t}$

b) Velocidad y rapidez del cohete a los 10s.

$v(10) = 36(100) - 12(1000) = 3{,}600 - 12{,}000 = -8{,}400$ p/s.

Rapidez: $\quad |v(10)| = 8{,}400$ pies/s.



Ejercicio 4: Un resorte $\quad a(t) = 4\cos t - 3\sin t.$

Encuentre la velocidad y desplazamiento del resorte si parte del reposo y su posición inicial es cero.

velocidad: $\quad v(t) = \int a(t)\,dt = 4\sin t + 3\cos t + C_1$

$v(0) = 0.$ $\quad v(0) = 0 + 3 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -3.$

desplazamiento: $\quad s(t) = \int v(t)\,dt = -4\cos t + 3\sin t - 3t + C_2.$

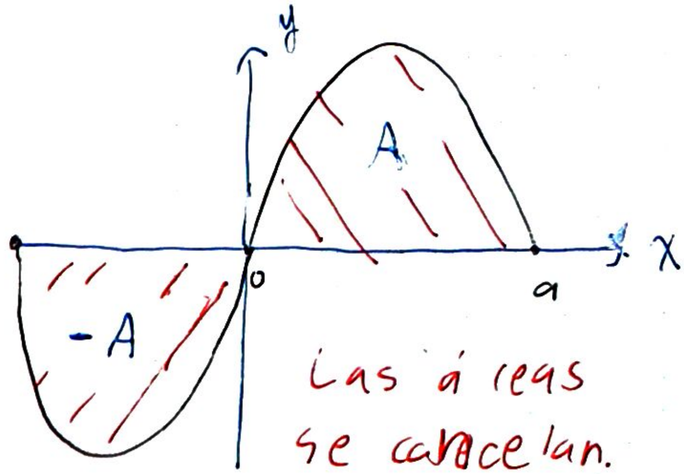
$s(0) = 0$ $\quad s(0) = -4 + 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 4.$

$v(t) = 4\sin t + 3\cos t - 3$

$s(t) = -4\cos t + 3\sin t - 3t + 4.$

Integrales Definidas para funciones Impares en intervalos simétricos.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$



$f(x)$ es impar.

$f(-x) = -f(x)$

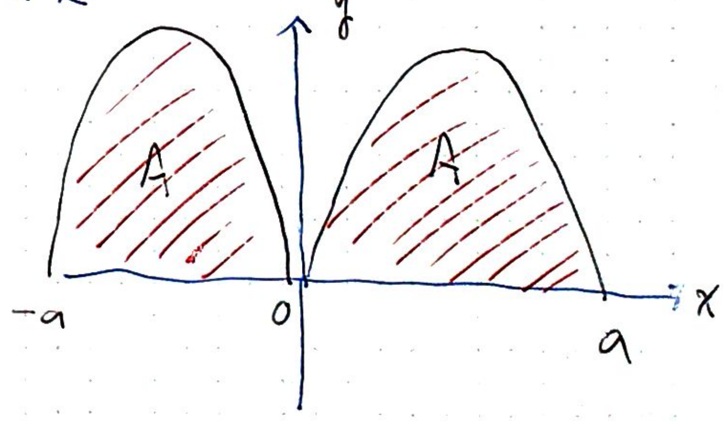
Las áreas se cancelan.

$$\int_{-50}^{50}\Big(\underbrace{x^3 + \sinh^5 x + \tan\frac{x}{200}}_{\text{es impar}}\Big)^9 dx = 0$$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\quad \dfrac{\text{IMPAR}}{\text{PAR}} = \text{impar}$ $\quad \tan(-x) = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

Integral Definida Función PAR

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$



$f(-x) = f(x)$

Capítulo 4

Teorema fundamental del cálculo, parte I & II, derivadas de funciones compuestas y definidas para integrales, generalizaciones de TFC

5.3 Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)

Si $f(x)$ es continua en $[a, x]$ entonces

Parte 1: $$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt.\right) = f(x). \checkmark \qquad F^{-1}[F(x)] = X$$

La integración y la derivación son procesos inversos entre sí.

La antiderivada de la derivada es la función original

$$\int \frac{df}{dx}\,dx = f(x) + C.$$

La derivada de la integral es la función original.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Parte 2: $$\int_a^b f(x)\,dx = F(X)\Big]_{x=a}^{x=b.} \checkmark$$ Ya se había visto

Ejemplo: derive la siguiente función $f(x) = \int_a^x t^2\,dt$

Método 1: Integrar y luego derivar

$$f(x) = \frac{t^3}{3}\Big]_{t=a}^{t=x} = \frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3} \qquad \boxed{f'(x) = X^2} + 0$$

Método 2: Use TFC parte 1: $$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x t^2\,dt\right) = x^2.$$ $t \to x$

t es una variable temporal de integración.

$$\int_a^x t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big]_a^x \qquad \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\cancel{\int_a^x x^2\,dx}$$ forma incorrecta de escribirla.

Varias funciones se definen por medio de integrales que no se pueden evaluar.

$$\int e^t\,dt = e^t + c$$

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt.$$

$$5.5 \int e^{t^2}\,t\,dt = \frac{1}{2}e^{t^2} + C.$$

Distribución normal media cero y varianza 1.

$$P'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}.$$

Ejercicio 1: Derive las siguientes funciones.

a. $h(x) = \int_a^x 3\sqrt{t}\,dt.$ $\qquad h'(x) = 3\sqrt{x}$

$t \to x$

b. $S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt.$ $\qquad S'(x) = \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$

c. $H(w) = \int_{-5}^{w} \frac{t+4}{t^4+t^2+2}\,dt$ $\qquad H'(w) = \frac{w+4}{w^4+w^2+2}.$

Derivadas de Funciones Compuestas y definidas por integrales.

$$f(x) = \int_{100}^{x^5} e^t \, dt. = e^t \Big]_{t=100}^{t=x^5} = e^{x^5} - e^{100}.$$

$$f'(x) = e^{x^5} 5x^4 + 0$$ por la regla de la cadena.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{100}^{x^5} e^t \, dt\right) = \frac{d}{dx}\int_{100}^{u} e^t \, dt. = e^u \frac{du}{dx}$$

$$u(x) = x^5 \qquad = e^{x^5} \cdot 5x^4$$

TFC parte I y la regla de la cadena.

$$\frac{d}{dx}\int_a^{b(x)} f(t)\,dt = f(b(x))\, b'(x)$$

$$t \to b(x)$$

$$\int_1^{\ln x} t \, dt = \frac{t^2}{2}\Big]_1^{\ln x} = \frac{(\ln x)^2}{2} - 1$$

Ejercicio 2: Derive.

a. $g(x) = \displaystyle\int_5^{\ln x} \sqrt{t^2+1}\, dt.$ $\quad g'(x) = \sqrt{(\ln x)^2 + 1} \cdot \dfrac{1}{x}$

$$t \to \ln x$$

b. $h(x) = \displaystyle\int_{\sec x}^{4} \tan^{-1} t \, dt. - \int_4^{\sec x} \tan^{-1} t \, dt.$

$$h'(x) = \tan^{-1}(\sec x)\, \sec x \tan x$$

u.

Generalizaciones del TFC.

Derive $\displaystyle\int_{x^5}^{x^{10}} \cos t\, dt = \sin t \Big]_{t=x^5}^{t=x^{10}} = \sin(x^{10}) - \sin(x^5)$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x^5}^{x^{10}} \cos t\, dt\right) = \cos(x^{10})\, 10x^9 - \cos(x^5)\, 5x^4$$

Ejercicio 3: Derive las sigs. expresiones.

a. $\displaystyle f(x) = \int_{\sin x}^{e^x} \sqrt{10+4t^4}\, dt.$

$$f(x) = \underbrace{\sqrt{10+4e^{4x}}}_{t\to e^x} \cdot e^x - \underbrace{\sqrt{10+4\sin^4 x}}_{t\to \sin x}\, \cos x$$

b. $\displaystyle g(x) = \int_{1/x}^{\cosh x} \sinh(\theta^3)\, d\theta$

$$g'(x) = \sinh(\cosh^3 x)\cdot \sinh x - \sinh\left(\frac{1}{x^3}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt. = \underbrace{f(b(x))}_{t\to b(x)}\, b'(x) - \underbrace{f(a(x))}_{t\to a(x)}\, a'(x).$$

Ejercicio 4: Encuentre la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt.$ en $x = 0.$

Ec. Recta Tangente   pendiente $f'(0)$
punto sobre recta $f(0)$

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0).$$

$$f(0) = \int_0^0 e^{-t^2/2}\,dt. = 0.$$

$$f'(x) = e^{-x^2/2} \qquad f'(0) = e^{-0^2} = 1.$$

Ec. Recta Tangente. $y = 0 + x = x$

$$\boxed{y = x}$$

Capítulo 5

Técnica de integración por sustitución, para integrales definidas e indefinidas

1

5.5 Regla de la Sustitución.

a. $\int 3(x+2)^2\, dx = \int (3x^2 + 12x + 12)\, dx$

$x^3 + 6x^2 + 12x + C.$

$= (x+2)^3 + C$

b. $\int 5(x+2)^4\, dx = (x+2)^5 + C.$

Reglas de Integración para funciones compuestas

$f(g(x)) \longrightarrow F(g(x)) + C.$

Regla de la Potencia para derivadas.

$$\frac{d}{dx}\left([g(x)]^{n+1}\right) = (n+1)[g(x)]^n g'(x).$$

$$\int [g(x)]^n g'(x)\, dx = \frac{1}{n+1}[g(x)]^{n+1} + C.$$

Nueva variable $u = g(x)$ $\quad du = g'(x)\, dx$

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

$$\text{ó } \ln|u| + C \qquad \text{si } n = -1.$$

Ejercicio 1: Integre

a. $\int 5(\overbrace{x+2}^{u})^4\, dx = \int 5u^4\, du = u^5 + C$

$= \boxed{(x+2)^5 + C.}$

$u = x+2 \qquad du = dx$

2

20. $\int \overbrace{(x^2+3)}^{u}{}^{5}\,\overbrace{2x\,dx}^{du} = \int u^5\,du = \frac{u^6}{6} + C.$

$u = x^2+3 \qquad du = 2x\,dx \qquad \frac{(x^2+3)^6}{6} + C.$

a. $\int \underbrace{(y^3+3y^2+11)^{2/3}}_{u^{2/3}}\,\underbrace{(3y^2+6y)\,dy}_{du} = \int u^{2/3}\,du$

$= \frac{3}{5}u^{5/3} + C.$

$u = y^3+3y^2+11 \qquad du = (3y^2+6y)\,dy.$

$= \frac{3}{5}(y^3+3y^2+11)^{5/3} + C.$

b. $\int (10w^3-8)^{15}\,\underbrace{w^2\,dw}_{du/30} = \int \frac{u^{15}}{30}\,du$

sólo en términos de u.

$u = 10w^3-8$

$\frac{du}{30} = w^2\,dw \qquad dw = \frac{du}{30w^2}$

$\int (10w^3-8)^{15} w^2\,dw = \int u^{15}\,\frac{du}{30} = \frac{u^{16}}{30\cdot 16} + C.$

$= \frac{(10w^3-8)^{16}}{480} + C.$

c. $\int 8x^3\sqrt{8+x^4}\,dx = \int 8\cancel{x^3}\,u^{1/2}\,\frac{du}{4\cancel{x^3}} = \int 2u^{1/2}\,du.$

$u = 8+x^4 \qquad du = 4x^3\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{4x^3}$

$\int 2\underbrace{\sqrt{8+x^4}}_{u}\,\underbrace{4x^3\,dx}_{du} = \int 2u^{1/2}\,du = \frac{4}{3}u^{3/2} + C.$

$= \frac{4}{3}(8+x^4)^{3/2} + C$

d. $\int (\underbrace{4x^3+x}_{u})^2\,dx = \int (16x^6 + 8x^4 + x^2)\,dx$

$= \frac{16}{7}x^7 + \frac{8}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C.$

Regla de la cadena. $\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = f'(g(x))\,g'(x)$

Regla de la Sustitución: si $g(x)$ es derivable entonces.

$$\int f'(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du = f(u) + C.$$

$$f(g(x)) + C.$$

$u = g(x) \qquad du = g'(x)\,dx$

Ejercicio 2: Integre.

$$\text{o. } \int \frac{\overbrace{(2+4x+12x^2)\,dx}^{2\cdot du}}{x+x^2+2x^3} = \int \frac{2du}{u} = 2\ln|u| + C.$$

$u = x + x^2 + 2x^3 \qquad du = (1+2x+6x^2)\,dx$

$2du = (2+4x+12x^2)\,dx$

La integral es $2\ln|x+x^2+2x^3| + C$

$$\text{a1. } \int e^{x^8}\,\overbrace{x^7\,dx}^{du/8} = \int e^u \frac{du}{8} = \frac{e^u}{8} + C = \frac{e^{x^8}}{8} + C$$

$u = x^8 \qquad du = 8x^7\,dx.$

$$\text{a2 } \int e^{x^8}\,\underbrace{x^6}_{\neq x^7}\,dx$$ No se puede integrar

$$\text{b. } \int (x^4+3)^2 \sin(x^4+3)^3 x^3\,dx = \int u^2 \sin u^3 \frac{du}{4}.$$

$u = x^4+3 \qquad du = 4x^3\,dx$

4

$$\int u^2 \sin u^3 \frac{du}{4} = \int \sin w \frac{dw}{12} = \frac{-\cos(w)}{12} + C$$

$w = u^3 \quad dw = 3u^2 du$

$u^2 du = \frac{dw}{3}$

$$= -\frac{1}{12}\cos(u^3) + C$$

$$= -\frac{1}{12}\cos(x^4+3)^3 + C.$$

c. $\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C.$

$= \ln|\sin x| + C.$

$u = \sin x, \; du = \cos x \, dx$

d. $\int \sec^2(\ln x) \frac{1}{x} dx = \int \sec^2 u \, du = \tan u + C$

$= \tan(\ln x) + C.$

$u = \ln x, \; du = \frac{dx}{x}$

e $\int (1000x + 2{,}000)^{1000} dx = \frac{1}{1000} \frac{(1000x + 2000)^{1001}}{1001} + C.$

$\int e^{x^2} 2x \, dx = e^{x^2} + C.$

Sustitución incompleta.

$x = u - 3.$

f. $\int 28x(x+3)^{1/3} dx. = \int 28x \, u^{1/3} du.$

$u = x+3 \quad du = dx$

$= \int 28(u-3) u^{1/3} du.$

$= \int 28 u^{4/3} - 28 \cdot 3 u^{1/3} du.$

$= \frac{28 \cdot 3}{7} u^{7/3} - 28 \cdot \frac{3 \cdot 3}{4} u^{4/3} + C.$

$= 12 u^{7/3} - 63 u^{4/3} + C.$

$= 12(x+3)^{7/3} - 63(x+3)^{4/3} + C.$

Regla de la Sustitución para Integrales Definidas

por ejemplo. Integre respecto a u.

$$\int_0^{1/2} \cos(\pi x)\,\underbrace{dx}_{du/\pi} = \int_0^{\pi/2} \cos u \,\frac{du}{\pi} = \frac{1}{\pi}\sin u\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{1}{\pi}.$$

$u = \pi x$ $\qquad u(1/2) = \pi/2$

$du = \pi\,dx$ $\qquad u(0) = 0$

Regla de la Sustitución

$$\boxed{\int_a^b f(\underbrace{g(x)}_{u})\,\underbrace{g'(x)\,dx}_{du} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.}$$

Ejercicio 3: Evalúe

a. $$\int_{-4}^{0} \frac{1}{3x-2}\,dx = \int_{-14}^{-2} \frac{1}{3}\frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u|\Big]_{-14}^{-2} = \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\ln 14.$$

$u = 3x-2$, $du = 3\,dx$ $\qquad u(0) = -2 \quad u(-4) = -14$

b. $$\int_0^1 \frac{8\sin^{-1}t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^{\pi/2} 8u\,du. = 4u^2\Big]_0^{\pi/2} = 4\frac{\pi^2}{4} = \pi^2.$$

$u = \sin^{-1} t$ $\qquad u(1) = \sin^{-1}(1) = \pi/2$

$du = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$ $\qquad u(0) = \sin^{-1}(0) = 0$

Capítulo 6

Técnica de integación por partes, para integrales definidas e indefinidas

7.1 Integración por partes (Pág 39)

La regla de sustitución no se puede usar para integrar

$$\int \ln x \, dx \qquad \int x^n e^x \, dx \qquad \int x^n \sin x \, dx \qquad \int \sin^{-1} x \, dx$$

Regla del Producto para la Diferenciación.

$(fg)' = f'g + fg'$

$(fg)' - f'g = fg'$ Integre respecto a x.

$$\int fg' \, dx = \int (fg)' \, dx - \int f'g \, dx$$

$$\boxed{\int fg' \, dx = fg - \int f'g \, dx}$$ Regla del Producto para Integración

Objetivo: Pasar de una integral compleja $\int fg' \, dx$ a una más sencilla $\int f'g \, dx$

Integración por partes. IPP.

$$\int f(x)\overbrace{g'(x)\,dx}^{dv} = uv - \int v \, du \Rightarrow \boxed{\int u \, dv = uv - \int v \, du.}$$

sea $u = f(x)$ $\quad dv = g'(x)\,dx$

$du = f'(x)\,dx$ $\quad v = g(x)$

ILATE.
derivar

I = inversas $\sin^{-1} x$, $\tan^{-1} x$.

L = logaritmos. $\ln x$, $\log_a x$.

A = algebraicas, potencias x^2, x^n, x^r

T = trigonométricas $\sin x$, $\cos x$. E = exponenciales e^x

Ejercicio 1: Integre $\int x e^x dx$

$u = x \quad dv = e^x dx$

$du = dx \quad v = e^x$

$u = e^x \quad dv = x' dx$

$du = e^x dx \quad v = \frac{x^2}{2}$, $\int v du$ No es el adecuado

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} = \underbrace{x e^x}_{u \cdot v} - \underbrace{\int e^x dx}_{v \cdot du} = \boxed{x e^x - e^x + C.}$$

Compruebe: $(x e^x - e^x)' = e^x + x e^x - \cancel{e^x} = x e^x$

Ejercicio 2: Integre (Pág 40.)

Int. $2x^3$
Der. $12x$.

a $\int \underbrace{6x^2}_{dv} \underbrace{\ln x}_{u} dx = (\ln x) 2x^3 - \int 2x^3 \frac{dx}{x}$

$u = \ln x \quad dv = 6x^2 dx$

$du = \frac{dx}{x} \quad v = 2x^3$

$$= 2x^3 \ln x - \int 2x^2 dx$$

$$= 2x^3 \ln x - \frac{2}{3} x^3 + C.$$

En Resumen $\int u dv = uv - \int v du$ más fácil

b. $\int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{dx}_{dv.} = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx$

$$= x \ln x - x + C.$$

$u = \ln x \quad dv = dx$

$du = \frac{dx}{x} \quad v = x$

4.

c. $\int \underbrace{\sin^{-1}x}_{u} \, \underbrace{dx}_{dv.}$

b2. $\int (1+x)\underbrace{\left(x+\frac{1}{2}x^2\right)^4}\, dx = \int u^4 du = \frac{1}{5}u^5 + c.$

$u' = 1+x \qquad u = x+\frac{1}{2}x^2$

c. $\int \underbrace{\sin^{-1}x}_{u} \, \underbrace{dx}_{dv.} = x\sin^{-1}x - \int \frac{\overbrace{x \quad}^{-du/2.}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

$u = 1-x^2$
$du = -2x\,dx$
$\frac{du}{-2} = x\,dx$
$\frac{1}{\sqrt{u}} = u^{-1/2}.$

$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, v = x \qquad = x\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\int u^{-1/2}du$

$= x\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\cdot 2\, u^{1/2} + C$

$= \boxed{x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + C.}$

ILATE (b)

d. $\int x^2\cos x\, dx = x^2\sin x - \int 2x\sin x\, dx$

utilice IPP otra vez.

$u = x^2 \qquad dv = \cos x\, dx$
$du = 2x\,dx \qquad v = \sin x$

$\int 2x\sin x\, dx = -2x\cos x + \int 2\cos x\, dx = -2x\cos x + 2\sin x + C_1$

$u = 2x \qquad dv = \sin x\, dx$
$du = 2 \qquad v = -\cos x$

$\int x^2\cos x\, dx = \boxed{x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x - C}$

IPP

Integrales Definidas

$$\int_a^b u\,dv = vu\Big]_a^b - \int_a^b v\,du$$

Pág 41.

Ejercicio 3: Evalúe.

$x\ln x - x$ derive. ILATE

a. $$\int_1^e \sqrt{x}\ln x^9\,dx = \int_1^e 9x^{1/2}\cdot \ln x\,dx$$

$\ln(x^9) = 9\ln x$

$u = \ln x \qquad dv = 9x^{1/2}\,dx$

$du = x^{-1}dx \qquad v = 6\,x^{3/2}$

$uv - \int v\,du$

$$= 6x^{3/2}\ln x\Big]_1^e - \int_1^e 6x^{3/2}x^{-1}\,dx$$

$$= 6e^{3/2}\cancel{\ln e} - 6\cdot 1^{3/2}\cancel{\ln 1} - \int_1^e 6x^{1/2}\,dx$$

$$= 6e^{3/2} - 6\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_1^e = 6e^{3/2} - 4e^{3/2} + 4\cdot 1^{3/2}$$

$$= \boxed{2e^{3/2} + 4}$$

Integre $\int e^x \cos x\,dx$ Pág. 44

$u = \cos x \qquad dv = e^x\,dx$

$du = -\sin x\,dx \qquad v = e^x$

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\cos x + \int e^x \sin x\,dx.$$

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx$$

$u = \sin x \qquad dv = e^x\,dx$

$du = \cos x\,dx \qquad v = e^x$

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx$$

$$2\int e^x\cos x\,dx = e^x\cos x + e^x\sin x$$

$$\int e^x\cos x\,dx = \boxed{\tfrac{1}{2}(e^x\cos x + e^x\sin x) + C.}$$

Capítulo 7

Integrales trigonométrias, manipulación con identidades trigonométricas de la forma

1) $\int \sin^n(x)\cos(x)^m dx$

2) $\int \tan^n(x)\sec(x)^m dx$

3) $\int \cot^n(x)\sec^m(x) dx$

7.2 Integrales Trigonométricas.

Algunas integrales requieren el uso de identidades trigonométricas.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\div \cos^2 x \quad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \Rightarrow \tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$\div \sin^2 x \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x \Rightarrow \cot^2 x = \csc^2 x - 1$

I. Forma $\int \sin^n x \cos^m x \, dx$.

II. Forma $\int \tan^n x \sec^m x \, dx$

III. Forma $\int \cot^n x \sec^m x \, dx$

Ia) Potencias Impares de Seno y Coseno.

$\int \sin^3 x \, dx. = \int \sin^4 x \sin x \, dx$ $\qquad u = \cos x$, $du = -\sin x \, dx$

$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = (1 - \cos^2 x)^2$

Sustitución. $u = \cos x$, $du = -\sin x \, dx$

$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \, dx$

$= \int (1 - u^2)^2 (-du)$

$\cos^3 x = \cos x^3$

$= -\int (1 - 2u^2 + u^4) \, du.$

$= -\left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right) + C.$

$$\boxed{= -\cos x + \frac{2}{3}(\cos x)^3 - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.}$$

2

Ejercicio 1: Evalúe Pág. 46.

a. $\int \cos^3 x \sin^6 x \, dx$

$\int \cos^2 x \sin^6 x \cos x \, dx$ ó $\int \cos^3 x \sin^5 x \sin x \, dx$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ $\quad u = \sin x \quad du = \cos x \, dx$

$$\int \cos^2 x \sin^6 x \cos x \, dx = \int (1-\sin^2 x) \sin^6 x \cos x \, dx$$

$$= \int (1-u^2) u^6 \, du.$$

$$= \int (u^6 - u^8) \, du.$$

$$= \frac{1}{7} u^7 - \frac{1}{9} u^9 + C.$$

$$= \frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{1}{9} \sin^9 x + C.$$

b. $\int \cos^3 x \sin^3 x \, dx$

$\int \cos^2 x \sin^3 x \cos x \, dx$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\int (1-\sin^2 x) \sin^3 x \cos x \, dx$

$u = \sin x \quad du = \cos x \, dx$

$\int (1-u^2) u^3 \, du.$

$\int (u^3 - u^5) \, du$

$\frac{1}{4} u^4 - \frac{1}{6} u^6 + C.$

$\frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{6} \sin^6 x + C.$

ó $\int \cos^3 x \sin^2 x \sin x \, dx$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\int \cos^3 x (1-\cos^2 x) \sin x \, dx$

$u = \cos x \quad du = -\sin x \, dx$

$-\int u^3 (1-u^2) \, du.$

$\int -u^3 + u^5 \, du$

$-\frac{1}{4} u^4 + \frac{1}{6} u^6 + C.$

$-\frac{1}{4} \cos^4 x + \frac{1}{6} \cos^6 x + C.$

siempre y cuando haya un término impar de seno y coseno.

(1b) Potencias Pares de seno y Coseno.

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + C.$$

Utilice las identidades de doble ángulo.

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\cos(x+x) = -\sin x \sin x + \cos x \cos x$$
$$\cos 2x = -\sin^2 x + \cos^2 x.$$
$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$
$$1+\cos(2x) = 2\cos^2 x.$$

Ejercicio 2: Evalúe.

$(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)$

a. $$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)\,dx$$

Vuelva a utilizarla

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\underbrace{1-\frac{1}{2}}_{1/2} + \frac{1}{2}\cos(4x)\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2\cdot 4}\sin(4x) + C\right)$$

$$= \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{C}{4}$$

b. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 x \, dx = 2\int_0^{\pi/4} \sin^2 x \, dx$

PAR.

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$$= \int_0^{\pi/4} (1-\cos 2x)\,dx$$

$$= x - \frac{1}{2}\sin 2x \Big]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\overset{1}{\cancel{\sin\frac{\pi}{2}}} - 0 + \frac{1}{2}\overset{0}{\cancel{\sin 0}}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.}$$

II. Integrales de la forma $\int \sec^m x \tan^n x \, dx$

$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \, dx$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

$\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ $\qquad$ $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

Aparte $\sec^2 x$ ó $\sec x \tan x$

Utilice las identidades: $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$

ó $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

Ejercicio 3: Evalúe las sigs. integrales.

a. $\int \tan^6 x \sec^4 x \, dx = \int \tan^6 x \overset{\downarrow}{\sec^2 x}(\sec^2 x\,dx)$

$\int \tan^6 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx$ ✓ ¿ $\int \tan^5 x \sec^5 x \, \overline{\sec x \tan x \, dx}$ X

Use $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$

$\int \tan^6 x\,(\tan^2 x + 1)\,(\sec^2 x\, dx)$

$u = \tan x \qquad du = \sec^2 x\, dx$

$\int u^6 (u^2+1)\, du = \int u^8 + u^6\, du$

$= \frac{1}{9} u^9 + \frac{1}{7} u^7 + C.$

$= \frac{1}{9} \tan^9 x + \frac{1}{7} \tan^7 x + C.$

b. $\int \tan^5 x \sec^6 x\, dx$

$\int \tan^5 x \underbrace{\sec^4 x}\, (\sec^2 x\, dx)$ ¿ $\int \tan^4 x \sec^5 x\, (\sec x \tan x\, dx)$

$(\sec^2 x)^2 = (1+\tan^2 x)^2 \qquad (\tan^2 x)^2 = (\sec^2 x - 1)^2$

$\int \underbrace{\tan^5 x}_{u=\tan x}\, (1+\tan^2 x)^2\, \underbrace{(\sec^2 x\, dx)}_{du = \sec^2 x\, dx}$

$\int u^5 (1+u^2)^2\, du = \int u^5 (1 + 2u^2 + u^4)\, du$

$= \int (u^5 + 2u^7 + u^9)\, du.$

$= \frac{1}{6} u^6 + \frac{2}{8} u^8 + \frac{1}{10} u^{10} + C.$

$= \frac{1}{6} \tan^6 x + \frac{1}{4} \tan^8 x + \frac{1}{10} \tan^{10} x + C.$

c. $\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x\, (\sec x \tan x\, dx)$

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 \qquad = \int (\sec^2 x - 1) \sec^2 x\, (\sec x \tan x\, dx)$

$u = \sec x$

$du = \sec x \tan x\, dx \qquad = \int (u^2 - 1)\, u^2\, du.$

$$= \int (u^4 - u^2)\, du.$$
$$= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + C.$$
$$= \boxed{\frac{1}{5}\sec^5 x - \frac{1}{3}\sec^3 x + C.}$$

$-\ln a = \ln(a^{-1})$

Casos especiales $\int \sec^n x\, dx$ $\int \tan^n x\, dx$

a. $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C.$

$u = \cos x$ $du = -\sin x\, dx$ $= -\ln|\cos x| + C.$

$= \ln|\sec x| + C.$

b. $\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x \overbrace{(\sec x + \tan x)}^{1}}{\tan x + \sec x}\, dx$

$\int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\tan x + \sec x}\, dx$

$u = \tan x + \sec x$ $du = (\sec^2 x + \sec x \tan x)\, dx$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$
$$= \boxed{\ln|\tan x + \sec x| + C.}$$

c. $\int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \boxed{\tan x - x + C.}$

d. $\int \sec^2 x\, dx = \boxed{\tan x + C.}$

e. $\int \tan^3 x\, dx = \int \tan x (\tan^2 x)\, dx$; $\int f - g\, dx$

$= \int \tan x (\sec^2 x - 1)\, dx$ $\int f\, dx - \int g\, dx$

7.

$$= \int \underbrace{\tan x}_{u} \underbrace{\sec^2 x\, dx}_{du} - \int \tan x\, dx \qquad \frac{\sin}{\cos}$$

$w = \cos x$

$$= \frac{1}{2} u^2 \qquad + \ln|w| + c$$

$$= \frac{1}{2} \tan^2 x \qquad + \ln|\cos x| + C.$$

Integral de $\sec^3 x$

$$\int \sec x \sec^2 x\, dx = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\, dx$$

IPP.

$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x\, dx \qquad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$du = \sec x \tan x\, dx \qquad v = \tan x$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x\, dx$$

$$\underline{\int \sec^3 x\, dx} = \sec x \tan x - \underline{\int \sec^3 x\, dx} + \int \sec x\, dx$$

cíclica.

$$2 \int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \int \sec x\, dx$$

$$2 \int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

$$= \frac{1}{2} \text{derivada}(\sec) + \frac{1}{2} \text{integral}(\sec)$$

Capítulo 8

Integrales trigonométricas (continuación), forma

1) $\int \sin^n(x)\cos(x)^m dx$

2) $\int sec^n(x) tan^m(x) dx$

3) $\int \csc^n(x)\cot^m(x) dx$

Lunes 26 de agosto Simulacro Parcial
Lunes 3 de septiembre Parcial 1, capítulos 5 y 7.
Libro Págs. 9-70.

Integrales Trigonométricas.

Forma $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \, dx$

$\int \sec^n x \tan^m x \, dx$

$\int \csc^n x \cot^m x \, dx$

$D(\csc x) = -\csc x \cot x$ aparte $\csc x \cot x$. Pág 50.

$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ $u = \csc x$ $du = -\csc x \cot x$.

$D(\cot x) = -\csc^2 x$

$\csc^2 x = \cot^2 x + 1$ $u = \cot x$, $du = -\csc^2 x$.
$\sec^2 x = \tan^2 x + 1$

Ejercicio 4: Integre. $\cot x \csc x$ ó $\csc^2 x$

a $\int \cot^2 x \csc^4 x \, dx = \int \cot^2 x \csc^2 x \csc^2 x \, dx$.

$\csc^2 x = \cot^2 x + 1$ $= \int \cot^2 x (\cot^2 x + 1) \csc^2 x \, dx$

$u = \cot x$, $du = -\csc^2 x \, dx$ $= -\int u^2 (u^2+1) \, du$

$= \int (-u^4 - u^2) \, du.$

$= -\frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{3} u^3 + C.$

$= -\frac{1}{5} \cot^5 x - \frac{1}{3} \cot^3 x + C.$

2

b. $\int \csc^3 x \cot^3 x \, dx = \int \csc^2 x \cot^2 x (\csc x \cot x \, dx)$

$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ $\quad = \int \csc^2 x (\csc^2 x - 1)(\csc x \cot x \, dx)$

$u = \csc x,\ du = -\csc x \cot x \, dx$ $\quad = -\int u^2 (u^2 - 1)\, du.$

$= -\int (u^4 - u^2)\, du.$

$= -\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + c \right)$

$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C.$ $\quad \boxed{= -\frac{\csc^5 x}{5} + \frac{\csc^3 x}{3} - C.}$

c. $\int \csc x \, dx = \int \frac{\csc x (\csc x + \cot x)}{\cot x + \csc x} dx$

$= \int \frac{\csc^2 x + \csc x \cot x}{\cot x + \csc x} dx$

$u = \cot x + \csc x \qquad du = -(\csc^2 x + \csc x \cot x)\, dx$

$= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C.$

$= -\ln|\cot x + \csc x| + C.$

$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} d(\sec x) + \frac{1}{2} \int \sec x \, dx$

$= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + C.$

$\int \csc^3 x \, dx = \frac{1}{2} d(\csc x) + \frac{1}{2} \int \csc x \, dx$

$= -\frac{1}{2} \csc x \cot x \cdot \frac{1}{2} \ln|\cot x + \csc x| + C.$

Integrales de la forma $\int \sin(mx)\cos(px)\,dx$ utilice la identidad trigonométrica apropiada.

$$\sin(mx)\cos(px) = \frac{1}{2}[\sin(m-p)x + \sin(m+p)x].$$

$$\sin(mx)\sin(px) = \frac{1}{2}[\cos(m-p)x - \cos(m+p)x]$$

$$\cos(mx)\cos(px) = \frac{1}{2}[\underline{\cos(m-p)x + \cos(m+p)x}].$$

se pueden integrar.

Ejercicio 5: Evalúe. Pág 51.

a. $$\int_0^{\pi/4} \sin 8x \cos 4x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(\sin 4x + \sin 12x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cos 4x\Big]_{\pi/4}^{0} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\cos(12x)\Big]_{\pi/4}^{0}$$

$$= \frac{1}{8}(\overset{1}{\cos 0} - \overset{+1}{\cancel{\cos \pi}}) + \frac{1}{24}(\overset{1}{\cos 0} - \overset{+1}{\cancel{\cos 3\pi}})$$

$$= \frac{2}{8} + \frac{2}{24} = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

b. $$\int_{-\pi}^{\pi} \overset{\text{PAR}}{\cos mx}\,\overset{\text{PAR.}}{\cos nx}\,dx = 2\int_0^{\pi}\cos mx\,\cos nx\,dx$$

$$= \int_0^{\pi}\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\,dx$$

m, n son enteros diferentes

$$= \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x + \frac{\sin(m+n)}{m+n}x\Big]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{m-n}(\overset{0}{\cancel{\sin(m-n)\pi}} - \overset{0}{\cancel{\sin 0}}) + \frac{1}{m+n}(\overset{0}{\cancel{\sin(m+n)\pi}} - \overset{0}{\cancel{\sin 0}})$$

$\sin k\pi = 0$ múltiplos de $180°$ son iguales a cero

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0.$$

si $m=n$ $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos mx \, dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos^2 mx \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} 1 + \cos(2mx) \, dx$$

$$x + \frac{\sin(2mx)}{2m}\Bigg]_0^{\pi} = \pi + \frac{\sin(2m\pi)}{2m} - 0 - 0$$

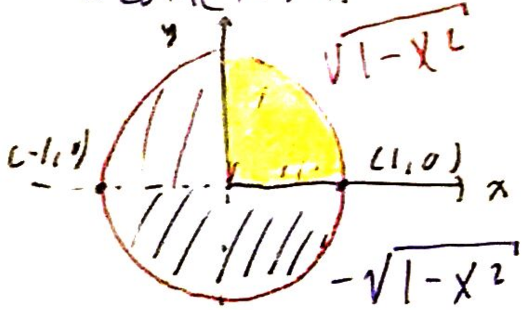
$360°$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \pi.$$

Pág 51. $$\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin 8x}_{\text{impar}} \overbrace{\underbrace{\cos 4x}_{\text{par}}}^{\text{impar.}} \, dx = 0$$

impar * par

A'rea de un Circulo de Unitario sin utilizar Geometría.



$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - x^2.$$

$$y = \pm\sqrt{1-x^2} \quad \text{en } [-1,1]$$

$$A = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx - \int_{-1}^{1} -\sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$A = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$u = 1 - x^2$ $\quad du = -2x\,dx$ } No sustitución

$u = \sqrt{1-x^2}$ $\quad dv = dx$

$du = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad v = x$ } No IPP

$$A = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \qquad x = \sin\theta \qquad dx = \cos\theta\,d\theta.$$

$$1 - x^2 = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta.$$

$$A = 4\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2\theta}}_{\cos\theta.}\,\cos\theta\,d\theta = \boxed{4\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta.}$$

$\sin\theta = x$ $\qquad \sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = \sin^{-1}(1) = \pi/2.$

$\qquad\qquad \sin\theta = 0 \qquad \theta = 0$

$$A = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{4}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)\,d\theta.$$

$$A = 2\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\,\Big]_0^{\pi/2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cancel{\sin\pi}^{\,0} - 0 - 0\right)$$

$$A = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$ ✓ consistente con la geometría $\quad A = \pi(1)^2$

7.3 Sustitución Trigonométrica o Sustitución Inversa.

$$\int f(x)\,dx = \int \overbrace{f(u(\theta))}\,u'(\theta)\,d\theta.$$

$x = u(\theta)$ $\qquad dx = u'(\theta)\,d\theta$ $\qquad$ utilice identidades o triángulos para simp. $f(u(\theta))$.

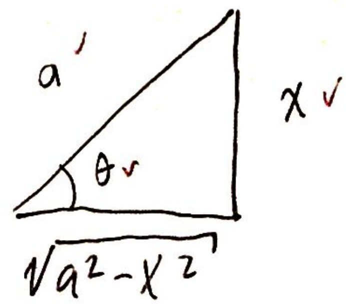
$u = \sin\theta,\ \tan\theta,\ \sec\theta.$

Forma $\sqrt{a^2-x^2}$

Hipotenusa: a

Cateto O: $x = a\sin\theta.$

Cateto A: $\sqrt{a^2-x^2} = a\cdot\cos\theta.$



$\sin\theta = \frac{C.O}{H}$

$\sin\theta = \frac{x}{a}.$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}.$

sustitución $x = a\sin\theta.$

Diferencial $dx = a\cos\theta\, d\theta.$

sustituya. $\sqrt{a^2-x^2} = a\cdot\cos\theta.$

$$\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta} - \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\cdot\cos\theta.$$

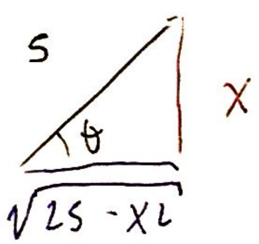
Ejercicio 1: Evalúe.

$$a.\int \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\,dx = \int \frac{5\sin\theta}{\cancel{5\cos\theta}}\,5\cancel{\cos\theta}\, d\theta. = 5\int \sin\theta\, d\theta.$$

$$= -5\cos\theta + C.$$

Método 1: Sustitución. Trig.

$$= -\sqrt{25-x^2} + C.$$



$x = 5\sin\theta.$ $\quad dx = 5\cos\theta\, d\theta$

$\sqrt{25-x^2} = 5\cos\theta.$

Método 2: Regla de la sustitución.

$u = 25-x^2$

$du = -2x\, dx$

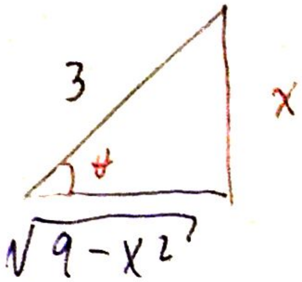
$$\int \frac{-du/2}{u^{1/2}} = -\frac{1}{2}\int u^{-1/2}\, du.$$

$$= -\frac{2}{2}u^{1/2} + C.$$

$$= -\sqrt{25-x^2} + C.$$

7.

a. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{27\sin^3\theta \cdot 3\cancel{\cos\theta}\,d\theta}{3\cancel{\cos\theta}} = \int 27\sin^3\theta\,d\theta.$



$\sin\theta = \dfrac{x}{3} \Rightarrow x = 3\sin\theta, \quad dx = 3\cos\theta\,d\theta$

$3\cos\theta = \sqrt{9-x^2}$

$$\int 27\sin^2\theta\,\sin\theta\,d\theta = 27\int (1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta.$$

$1-\cos^2\theta = \sin^2\theta,$ $\quad \boxed{u = \cos\theta}, \quad du = -\sin\theta\,d\theta.$

$$= -27\int 1-u^2\,du$$

$$= -27u + \frac{27}{3}u^3 + C$$

u

$\downarrow$ θ $\quad \cos\theta = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{3}$

x

$$= -27\cos\theta + 9\cos^3\theta + C.$$

$$= -9\sqrt{9-x^2} + \frac{1}{3}(9-x^2)^{3/2} + C.$$

b. $\displaystyle\int \frac{u}{\sqrt{4-u^2}}\,du = -\frac{1}{2}\int w^{-1/2}\,dw = -\frac{2}{2}w^{1/2} + C$

$= -\sqrt{4-u^2} + C.$

sólo sustitución $\quad w = 4-u^2$

$dw = -2u\,du$

PRACTIQUE $\quad u = 2\sin\theta.$

Capítulo 9

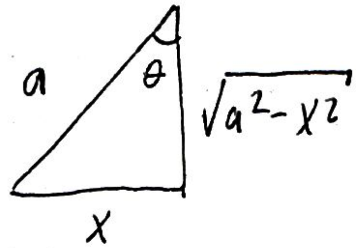
Sustitución trigonométrica por medio del triángulo pitagórico

Sustitución Trigonométrica.

Forma $\sqrt{a^2-x^2}$

$H = a$

$C.O. = x$



$\sin\theta = \dfrac{x}{a}$

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$

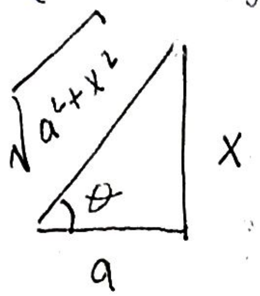
$x = a\cdot\sin\theta \qquad dx = a\cdot\cos\theta\, d\theta \qquad \sqrt{a^2-x^2} = a\cdot\cos\theta.$

Forma $\sqrt{a^2+x^2}$ Pág. 58.

$H: \sqrt{a^2+x^2}$

$C.O. = x$

$C.A. = a.$



$\tan\theta = \dfrac{x}{a} \Rightarrow x = a\cdot\tan\theta.$

$dx = a\cdot\sec^2\theta\, d\theta.$

$a\cdot\sec\theta = \sqrt{a^2+x^2}$

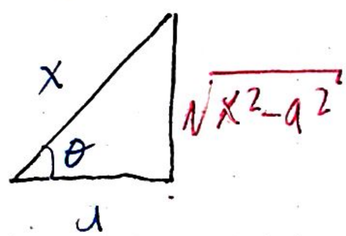
$\sec\theta = \dfrac{H}{C.A.}$

Forma $\sqrt{x^2-a^2}$

$H = x$

$C.O. =$

$C.A. = a$



$\dfrac{x}{a} = \sec\theta.$

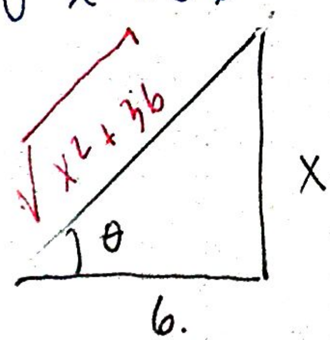
$x = a\cdot\sec\theta.$

$dx = a\cdot\sec\theta\tan\theta\, d\theta.$

$\sqrt{x^2-a^2} = a\cdot\tan\theta.$

Ejercicio 2 y 3.

a. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+36}\, dx. = \int \frac{6\sec^2\theta\, d\theta}{36\tan^2\theta + 36} = \frac{6}{36}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}\, d\theta.$



$\dfrac{x}{6} = \tan\theta. \qquad x = 6\cdot\tan\theta.$

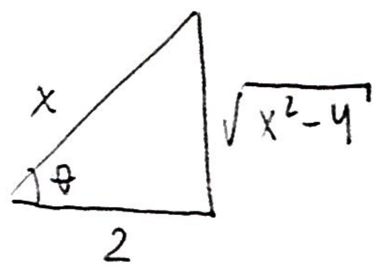
$dx = 6\sec^2\theta\, d\theta.$

$\dfrac{\sqrt{x^2+36}}{6} = \sec\theta \Rightarrow x^2+36 = 36\sec^2\theta.$

$$\frac{1}{6}\int d\theta = \frac{1}{6}\theta + C. = \boxed{\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{x}{6}\right) + C.}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{6}\right) = \theta.$$

3 a. $$\int \frac{(x^2-4)^{3/2}}{x^6}\,dx = \int \frac{2^3\tan^3\theta.}{2^6 \cdot \sec^6\theta.}\, 2\cdot\sec\theta\tan\theta\, d\theta.$$



$$\frac{2}{x} = \cos\theta. \rightarrow x = \frac{2}{\cos\theta} = 2\sec\theta.$$

$$dx = 2\sec\theta\tan\theta\, d\theta.$$

$$\sqrt{x^2-4} = 2\tan\theta.$$

$$\left[(x^2-4)^{1/2}\right]^3 = 8\tan^3\theta.$$

$$\frac{1}{2^2}\int \frac{\tan^4\theta.}{\sec^5\theta.}\, d\theta. = \frac{1}{4}\int \frac{\sin^4\theta}{\cos^4\theta.}\cos^5\theta\, d\theta.$$

$u = \sin\theta \quad du = \cos\theta\, d\theta$

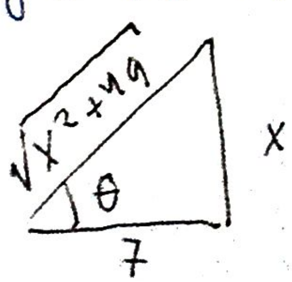
$\frac{1}{4}\int u^4 du.$

$$= \frac{1}{4}\int \underbrace{\sin^4\theta}_{u^4}\, \underbrace{\cos\theta\, d\theta}_{du}. = \boxed{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\sin^5\theta + C.}$$

Regrese a la variable x $\quad \sin\theta = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$, $\quad \sin^5\theta = \frac{(x^2-4)^{5/2}}{x^5}$

$$\int \frac{(x^2-4)^{3/2}}{x^6}\,dx = \boxed{\frac{1}{20}\,\frac{(x^2-4)^{5/2}}{x^5} + C.}$$

2 a $$\int \frac{49}{x^2\sqrt{x^2+49}}\,dx = \int \frac{49\;\cancel{7}\sec^2\theta}{49\tan^2\theta.\;\cancel{7}\sec\theta.}\, d\theta. = \int \frac{\sec\theta}{\underbrace{\tan^2\theta}_{\sec^2\theta - 1}}\, d\theta.$$



$$\frac{x}{7} = \tan\theta \qquad x = 7\tan\theta.$$

$$dx = 7\sec^2\theta\, d\theta.$$

$$\frac{H}{C.A.} = \sec\theta. \qquad \sqrt{x^2+49} = 7\sec\theta.$$

3. $\int \sec^m\theta \tan\theta^n x \, dx$ No está disponible.

$$\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\, d\theta = \int \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \int \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\, \frac{1}{\sin\theta}\, d\theta$$

$$= \int \cot\theta \csc\theta \, d\theta$$

$$= -\csc\theta + C.$$

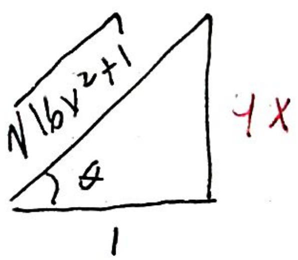
$$\csc\theta = \frac{H}{C.O.} = \frac{\sqrt{x^2+49}}{x}$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+49}}{x} + C.$$

$$* \int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2} du = \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{\sin\theta} + C.$$

$u = \sin\theta$, $du = \cos\theta \, d\theta$.

b. $$\int \frac{1}{x\sqrt{16x^2+1}}\, dx = \int \frac{0.25 \sec^2\theta \, d\theta}{0.25 \tan\theta \cdot \sec\theta} = \int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\, d\theta.$$



$\tan\theta = 4x \rightarrow x = \frac{1}{4}\tan\theta \, d\theta.$

$dx = \frac{1}{4}\sec^2\theta \, d\theta.$

$$\frac{\sqrt{16x^2+1}}{1} = \sec\theta.$$

Reescriba la integral.

$$\int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\, d\theta = \int \frac{1}{\cos\theta}\, \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\, d\theta = \int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \int \csc\theta \, d\theta.$$

$$= -\ln|\csc\theta + \cot\theta| + C.$$

$$\csc\theta = \frac{H}{C.O.} = \frac{\sqrt{16x^2+1}}{4x} \qquad \cot\theta = \frac{1}{4x}.$$

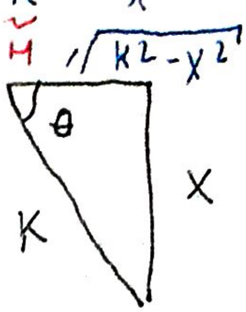
$$= -\ln\left|\frac{\sqrt{16x^2+1}}{4x} + \frac{1}{4x}\right| + C.$$

7.3 Sustitución Trigonométrica

Forma $\sqrt{K^2 - x^2}$

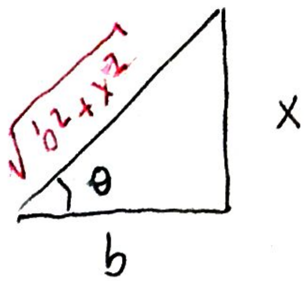
$H = K$

$C.O = x$



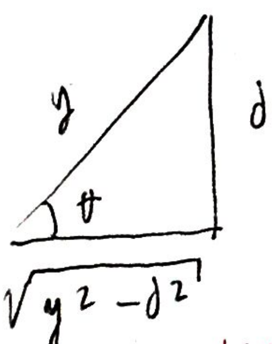
$$\frac{C.O}{H} = \sin\theta = \frac{x}{K} \Rightarrow x = K\sin\theta.$$
$$dx = K\cos\theta\, d\theta.$$
$$\frac{\sqrt{K^2-x^2}}{K} = \cos\theta \Rightarrow \sqrt{K^2-x^2} = K\cdot\cos\theta.$$

Forma $\sqrt{b^2 + x^2}$



$$\frac{x}{b} = \tan\theta. \Rightarrow x = b\cdot\tan\theta.$$
$$dx = b\cdot\sec^2\theta\, d\theta.$$
$$\frac{\sqrt{b^2+x^2}}{b.} = \sec\theta \Rightarrow \sqrt{b^2+x^2} = b\sec\theta.$$

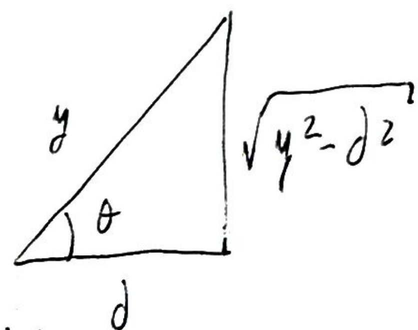
Forma $\sqrt{y^2 - d^2}$.



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{d}{y}$$
$$y = d\cdot\csc\theta.$$
$$dy = -d\cdot\csc\theta\cot\theta.$$

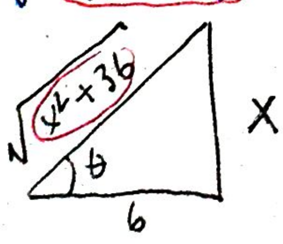
tiene signos negativos.

$$\frac{y}{d} = \sec\theta.$$
$$y = d\sec\theta.$$
$$dy = d\cdot\sec\theta\tan\theta.$$
$$\sqrt{y^2-d^2} = d\tan\theta.$$



Ejercicios 2 y 3 Pág 58 y 59.

20) $$\int \frac{1}{x^2+36}\,dx = \int \frac{6\sec^2\theta\, d\theta}{36\sec^2\theta} = \int \frac{d\theta}{6} = \frac{\theta}{6} + C$$



$$x = 6\cdot\tan\theta.$$
$$dx = 6\sec^2\theta\, d\theta.$$
$$x^2 + 36 = 36(\tan^2\theta + 36) = 36\sec^2\theta$$

Capítulo 10

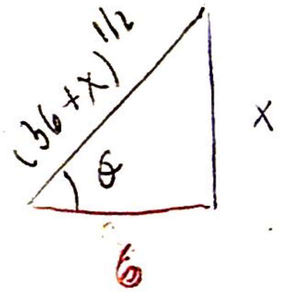
Más problemas de integración por sustitución trigonométrica

Parcial lunes 2:30 D-504

Corto 4 1 Problema Sustitución Trigonométrica.

Práctica Problemas Integración. Pág 59.

2a) $\displaystyle\int_0^6 \frac{72}{(36+x^2)^{3/2}}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{72\cdot 6\sec^2\theta\,d\theta}{36\cdot 6\sec^3\theta} = 2\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\sec\theta}\,d\theta.$



$x = 6\tan\theta.$ $\qquad \dfrac{x}{6} = \tan\theta$

$dx = 6\sec^2\theta\,d\theta.$ $\qquad \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{6}\right)$

$(36+x)^{1/2} = 6\sec\theta$

$(36+x)^{3/2} = 6^3\sec^3\theta$ $\qquad \theta = \tan^{-1}(1) = \dfrac{\pi}{4}$

$\theta = \tan^{-1}(0) = 0$

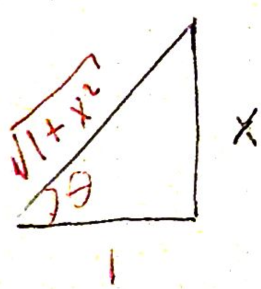
$\displaystyle 2\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\sec\theta}\,d\theta = 2\int_0^{\pi/4}\cos\theta\,d\theta. = 2\sin\theta\Big]_0^{\pi/4} = 2\sin\frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{2}. = \sqrt{2}$

2c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \int_1^2 u^{-2}\,du = -\frac{1}{u}\Big]_1^2 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{1} = \frac{1}{2}.$

$u = 1+x$ $\qquad u(1) = 2.$

$du = dx$ $\qquad u(0) = 1$

2c1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_0^{\pi/4}\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{(1+\tan^2\theta)^2} = \int_0^{\pi/4}\frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi/4}\frac{1}{\sec^2\theta}\,d\theta.$



$x = \tan\theta.$ $\qquad dx = \sec^2\theta\,d\theta.$

$1 = \tan\theta.$ $\Rightarrow$ $\theta = \pi/4$

$0 = \tan\theta$ $\qquad \theta = 0$

$\displaystyle\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\pi/4}\right)$

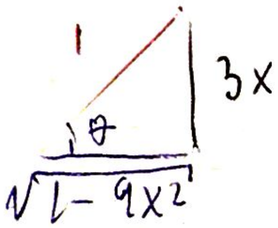
doble ángulo

2.

$$\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}^{1}-0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$$

3c) $$\int_0^{1/3} 3^6 x^5\sqrt{\underset{H}{1}-9x^2}\,dX = \int_0^{\pi/2}\frac{3^6}{3^5}\sin^5\theta\cos\theta\,\frac{1}{3}\cos\theta\,d\theta.$$

Pág 61.



$\sin\theta = 3X$

$\cos\theta\,d\theta = 3\,dX$

$\sqrt{1-9x^2} = \cos\theta.$

$\Rightarrow x = \frac{1}{3}\sin\theta.$

$dx = \frac{1}{3}\cos\theta\,d\theta.$

$x^5 = \frac{1}{3^5}\sin^5\theta.$

$\sin\theta = 1$

$\theta = \pi/2$

$\sin\theta = 0$

$\theta = 0$

$$\frac{3^6}{3^6}\int_0^{\pi/2}\sin^5\theta.\cos^2\theta\,d\theta. = \int_0^{\pi/2}\underbrace{\sin^4\theta}_{(\sin^2\theta)^2 = (1-\cos^2\theta)^2}\cos^2\theta\,(\sin\theta\,d\theta)$$

$(\sin^2\theta)^2 = (1-\cos^2\theta)^2\cos^2\theta.$

$$\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)^2\cos^2\theta\,(\underbrace{\sin\theta\,d\theta}_{-du}) = -\int_1^0(1-u^2)^2u^2\,du.$$

$u = \cos\theta$

$du = -\sin\theta\,d\theta$

$u = \cos\pi/2 = 0$

$u = \cos 0 = 1$

$$= \int_0^1(1-2u^2+u^4)\,u^2\,du.$$

$$= \int_0^1 u^2-2u^4+u^6\,du.$$

$$= \left.\frac{1}{3}u^3-\frac{2}{5}u^5+\frac{1}{7}u^7\right]_0^1 \leftarrow$$

$$= \frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}.$$

$$-\int_b^a f\,dx = \int_a^b f\,dx$$

$$\int 3^6x^5\sqrt{1-9x^2}\,dX$$

$$\frac{1}{3}u^3-\frac{2}{5}u^5+\frac{1}{7}u^7+C.$$

$\cos\theta = \sqrt{1-9x^2}$

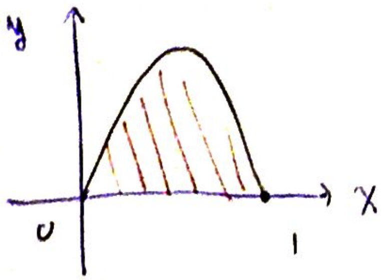
$$\frac{1}{3}\cos^3\theta-\frac{2}{5}\cos^5\theta+\frac{1}{7}\cos^7\theta+C.$$

$$\frac{1}{3}(1-9x^2)^{3/2}-\frac{2}{5}(1-9x^2)^{3/2}+\frac{1}{7}(1-9x^2)^{7/2}+C$$

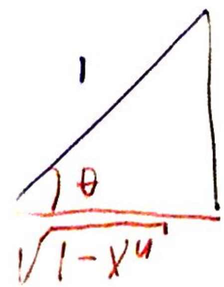
Triángulos "Interesantes"

Ejercicio 4.

Encuentre el área entre $f(x) = 4\pi x\sqrt{1-x^4}$, el eje x, y las rectas $x=0$ & $x=1$.



$$A = \int_0^1 f(x)\,dx = 2\pi\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\;\underbrace{2x\,dx}$$



$x^2 = \sin\theta.$

$2x\,dx = \cos\theta\,d\theta.$

$\sqrt{1-x^4} = \cos\theta.$

$\sin\theta = 1$

$\theta = \pi/2$

$\sin\theta = 0$

$\theta = 0$

$$A = 2\pi\int_0^{\pi/2} \cos\theta\cos\theta\,d\theta. = \frac{2\pi}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta.$$

$$A = \pi\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\Big]_0^{\pi/2}\right) = \pi\left(\frac{\pi}{2} + \cancel{\frac{\sin\pi}{2}}^{\,0} - 0 - \cancel{\frac{\sin 0}{2}}^{\,0}\right)$$

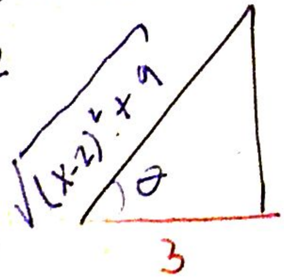
$$A = \pi\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\int \frac{(x-2)^3}{(x^2-4x+13)^{1/2}}\,dx. = \int\frac{(x-2)^3}{\sqrt{(x-2)^2+9}}\,dx = \int\frac{3^3\tan^3\theta}{3\sec\theta}\,3\sec^2\theta\,d\theta.$$

complete al cuadrado $(x^2-4x+4)+13-4 = (x-2)^2+9$

c. $x-2$

c. 3



$3\cdot\tan\theta = x-2$

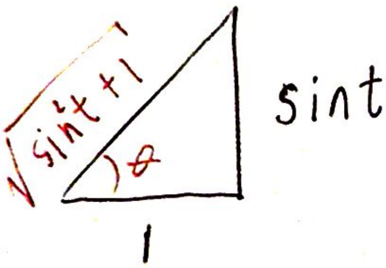
$3\sec^2\theta\,d\theta = dx.$

$\sqrt{(x-2)^2+9} = 3\sec\theta.$

$$3^3\int\tan^3\theta.\sec\theta\,d\theta. = 27\int\tan^2\theta\,(\tan\theta\sec\theta\,d\theta)$$

Problema 2 b) Simulacro.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin^2 t+1}}\,dt = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec\theta} = \int_0^{\pi/4} \sec\theta\, d\theta.$$



$\sin\theta$

$\tan\theta = \sin t.$

$\sec^2\theta\, d\theta = \cos t\, dt.$

$\sqrt{\sin^2 t+1} = \sec\theta.$

$\tan\theta = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\theta = \tan^{-1}(1) = \pi/4$

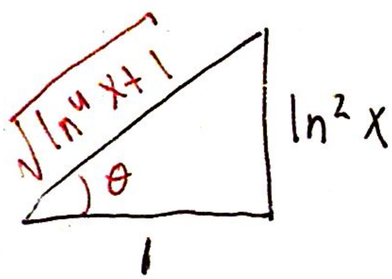
$\tan\theta = \sin 0 = 0$

$\theta = 0$

$$\int_0^{\pi/4} \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta|\Big]_0^{\pi/4} = \ln|\sec\pi/4 + \tan\pi/4) - \ln(\sec 0 + \tan 0)$$

$$= \ln(\sqrt{2}+1) - \cancel{\ln(1)}^{\,0} = \underline{\ln(\sqrt{2}+1)}$$

$$\int \frac{4}{\sqrt{\ln^4 x+1}}\, \frac{2(\ln x)}{x}\, dx = 4\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec\theta} = 4\int \sec\theta\, d\theta.$$



$\tan\theta = [\ln x]^2$

$\sec^2\theta\, d\theta = 2\ln x\, \frac{1}{x}\, dx.$

$\sqrt{\ln^4 x+1} = \sec\theta.$

$$4\int \sec\theta\, d\theta = 4\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C.$$

$$4\ln\left|\sqrt{\ln^4 x+1} + \ln^2 x\right| + C.$$

Capítulo 11

Simulacro de parcial # 1

Simulacro Parcial 1.

1. Evalúe

uv - ∫vdu. IPP.

a. $\int x \tan^{-1} x^2 \, dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}(x^2) - \int \frac{x^2}{2}\frac{2x}{1+x^4}\,dx$

$u = \tan^{-1}(x^2) \qquad dv = x\,dx$

$du = \frac{2x}{1+x^4} \qquad v = \frac{x^2}{2}.$

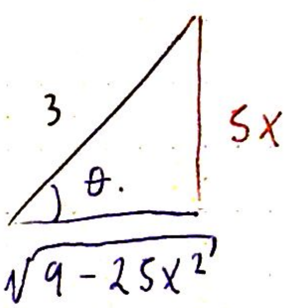
$w = 1 + x^4$

$\frac{x^2}{2}\tan^{-1}(x^2) - \int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx \qquad \frac{dw}{4} = x^3\,dx$

$\frac{1}{2}x^2\tan^{-1}(x^2) - \frac{1}{4}\int \frac{dw}{w} = \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}(x^2) - \frac{1}{4}\ln|w| + C.$

$= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}(x^2) - \frac{1}{4}\ln|1+x^4| + C.$

b. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-25x^2}}\,dx = \int \frac{(9/25)\sin^2\theta}{\cancel{3}\cos\theta}\,\frac{\cancel{3}}{5}\cos\theta\,d\theta.$



$\sin\theta = \frac{5x}{3} \qquad x = \frac{3}{5}\sin\theta., \qquad dx = \frac{3}{5}\cos\theta\,d\theta.$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{9-25x^2}}{3} \qquad \sqrt{9-25x^2} = 3\cdot\cos\theta.$

$\frac{9}{125}\int \sin^2\theta\,d\theta. = \frac{9}{250}\int(1-\cos 2\theta)\,d\theta. = \frac{9}{250}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + C$

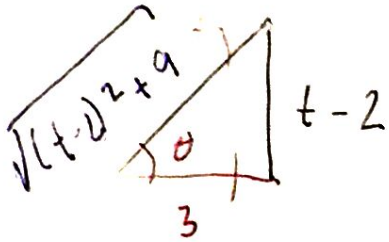
I Doble Ángulo.

$= \frac{9}{250}\left(\theta - \sin\theta\cos\theta\right) + C.$

$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{5x}{3}\right)$

$\boxed{= \frac{9}{250}\left(\sin^{-1}\left(\frac{5x}{3}\right) - \frac{5x\sqrt{9-25x^2}}{9}\right) + C.}$

i. $\int \frac{1}{\sqrt{(t-2)^2+9}}\, dt.$ ¿ $\int \frac{\sqrt{(t-2)^2+9}}{t^3}\, dt.$



$$\tan\theta = \frac{t-2}{3} \qquad (t-2) = 3\tan\theta.$$

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{(t-2)^2+9}}{3}. \qquad dt = 3\sec^2\theta\, d\theta.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(t-2)^2+9}}\, dt = \int \frac{3\sec^2\theta\, d\theta}{3\sec\theta.} = \int \sec\theta\, d\theta.$$

Regrese a la variable t.

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C.$$

$$\boxed{= \ln\left|\frac{\sqrt{(t-2)^2+9}}{3} + \frac{t-2}{3}\right| + C.}$$

j. $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2}\, dx$

3 funciones. $\int \frac{x}{(x+1)^2}\, dx.$ Derivada $\frac{x}{(x+1)^2}$ es larga

sigue siendo difícil

Derivar xe^x Integre $(x+1)^{-2}. \rightarrow -(x+1)^{-1}$

$$\int \frac{x\, e^x\, dx}{(x+1)^2} = -\frac{x}{x+1}e^x + \int \frac{e^x + xe^x}{x+1}\, dx$$

$u = xe^x$ $dv = (x+1)^{-2}dx$

$du = (e^x + xe^x)dx$ $v = \frac{-1}{(x+1)}$

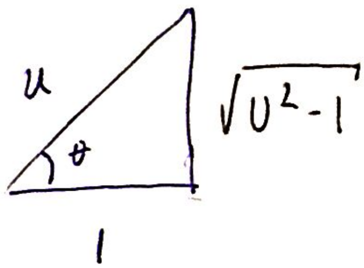
$$= -\frac{x}{x+1}e^x + \int \frac{e^x \cancel{(1+x)}}{\cancel{(x+1)}}\, dx$$

$$\boxed{= -\frac{x}{x+1}e^x + e^x + C.}$$

Miranda $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^{4x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = \int_1^2 \frac{u^3}{\sqrt{u^2-1}}\,du.$

$u = e^x \qquad u(\ln 2) = e^{\ln 2} = 2. \qquad u^3 = e^{3x}$

$du = e^x\,dx \qquad u(0) = e^0 = 1$



$u = \sec\theta.$

$du = \sec\theta\tan\theta\,d\theta.$

$\sqrt{u^2-1} = \tan\theta.$

$$\int \frac{u^3}{\sqrt{u^2-1}}\,du = \int \frac{\sec^3\theta}{\tan\theta}\cdot\sec\theta\tan\theta\,d\theta = \int \sec^4\theta\,d\theta.$$

$\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ aparte $\sec^2 x$ o $\sec x\tan x$.

$u = \tan\theta \qquad du = \sec^2\theta\,d\theta.$

$$\int \sec^2\theta\,\sec^2\theta\,d\theta = \int (\tan^2\theta + 1)\sec^2\theta\,d\theta.$$

$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$

$$= \frac{1}{3}\tan^3\theta + \theta + C.$$

$$= \frac{1}{3}(u^2-1)^{3/2} + \sec^{-1}(u) + C.$$

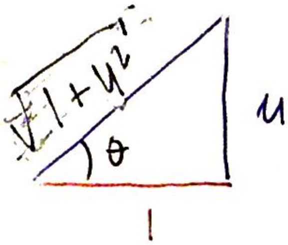
$$\int_1^2 \frac{u^3}{\sqrt{u^2-1}}\,du = \frac{1}{3}\left(3^{3/2} + \sec^{-1}(2) - \cancel{\tfrac{1}{3}0^{3/2}}^{\,0} + \cancel{\sec^{-1}(1)}^{\,0}\right)$$

$$= 3^{1/2} + \sec^{-1}(2).$$

2 b) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{1+\sin^2 t}}\, dt = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2\theta \, d\theta}{\sec\theta}.$$

$u = \sin t \qquad u(\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1$

$du = \cos t \, dt \qquad u(0) = \sin(0) = 0$



$u = \tan\theta \qquad du = \sec^2\theta \, d\theta.$

$\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \pi/4. \qquad \sqrt{1+u^2} = \sec\theta.$

$\tan\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$

$$\int_0^{\pi/4} \sec\theta \, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| \Big]_0^{\pi/4}$$

$$= \ln|\sec \pi/4 + \tan \pi/4| - \ln|\overset{1}{\sec 0} + \overset{0}{\tan 0}|$$

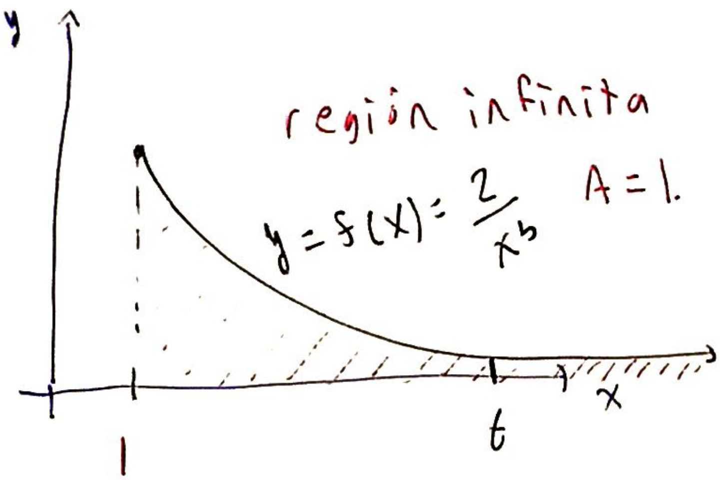
$$= \ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right| - \ln(1) = \ln(\sqrt{2}+1).$$

Capítulo 12

Integrales impropias

7.8 Integrales Impropias.

Considere la región bajo la curva $y = \frac{2}{x^3}$, encima del eje-x y a la derecha de la recta $x=1$.



$$A = \int_1^t 2x^{-3}\,dx.$$

$$A = \frac{2}{-2}x^{-2}\Big]_1^t$$

$$A = -\frac{1}{t^2} + \frac{2}{2}\frac{1}{1^2} = 1 - \frac{1}{t^2}.$$

A medida que t aumenta. $\frac{1}{t^2} \to 0$ $\quad \lim_{t\to\infty} A = \lim_{t\to\infty} 1 - \frac{1}{t^2} = 1$

Concluyendo $\int_1^\infty \frac{2}{x^3}\,dx = 1.$

Integral Impropia Tipo 1: (Pág 73.)

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

CONVERGENTE si el límite existe.

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\,dx$$

DIVERGENTE. si el límite no existe.

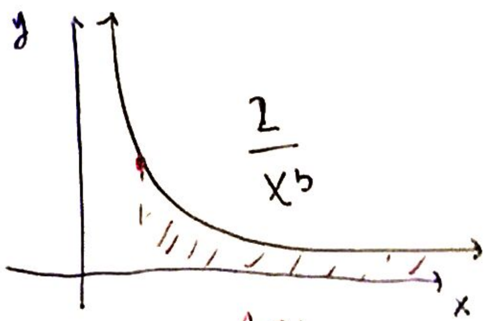
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

Ejercicio 1: Evalúe $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ y determine si la integral converge.

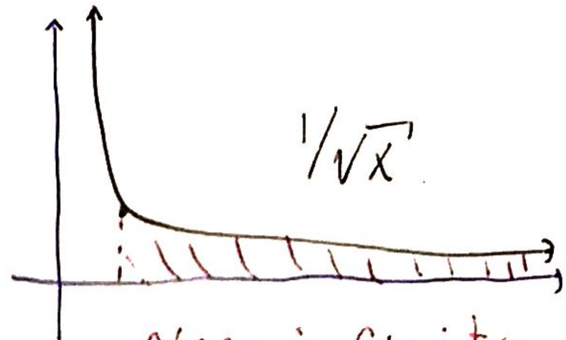
$$\int_1^\infty x^{-1/2}\,dx = 2x^{1/2}\Big]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} 2x^{1/2} - 2 = +\infty.$$

$\sqrt{\infty} \to \infty.$

DIVERGENTE



$4 = 1$



Área infinita.

$f(x) \to 0$ a medida que $x \to \infty$ $\quad \int_a^\infty f(x)\,dx$ es posible que no exista.

Ej2: Análisis de la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ (Pág. 79).

$$p=1 \quad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \underset{+\infty}{\ln x} - \overset{0}{\ln(1)} = +\infty.$$

DIVERGE.

$$p=0.99 \quad \int_1^\infty x^{-0.99}\,dx = \frac{x^{0.01}}{0.01}\Big|_1^\infty = \lim_{x\to\infty} x^{0.01} - \frac{1}{0.01} = +\infty.$$

DIVERGE.

Reglas Límites $\quad \lim_{x\to\infty} x^r = +\infty$, $r>0$. $\quad , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0.$

$$p=1.01 \quad \int_1^\infty x^{-1.01}\,dx = \frac{x^{-0.01}}{-0.01}\Big|_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{-0.01}\frac{1}{x^{0.01}} + \frac{1}{0.01} = \frac{1}{0.01}$$

$0 + \frac{1}{0.01}$

CONVERGE

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \text{DIVERGE} & \text{si } p \leq 1 \\ \text{CONVERGE} & \text{si } p > 1. \end{cases}$$

Ejercicio 3: Evalúe.

a. $$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} x\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^u \frac{du}{-2} = -\frac{1}{2} e^u \Big]_{-\infty}^{0} \qquad e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} \to 0$$

$u = -x^2$ $\qquad u(0) = 0^2$

$du = -2x\,dx$ $\qquad u(-\infty) = -\infty.$

$$= -\frac{1}{2} e^0 + \lim_{u \to -\infty} \cancel{\frac{1}{2} e^u}^{\,0}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}.$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} x\,dx = -\frac{1}{2} \quad \text{converge.}$$

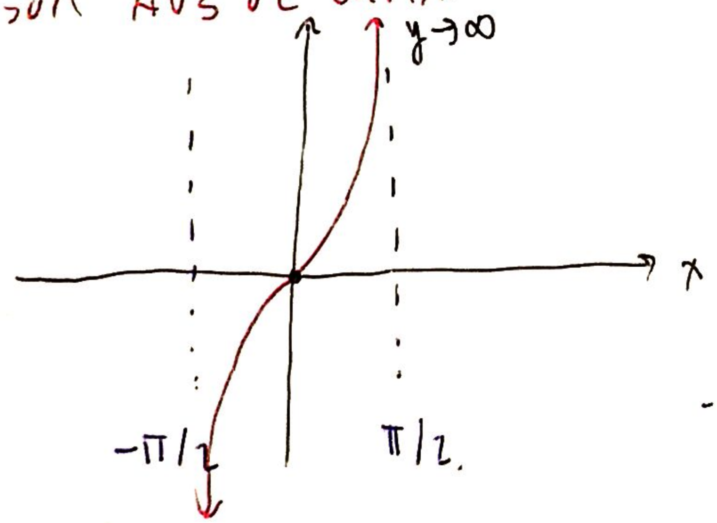
CONVERGE

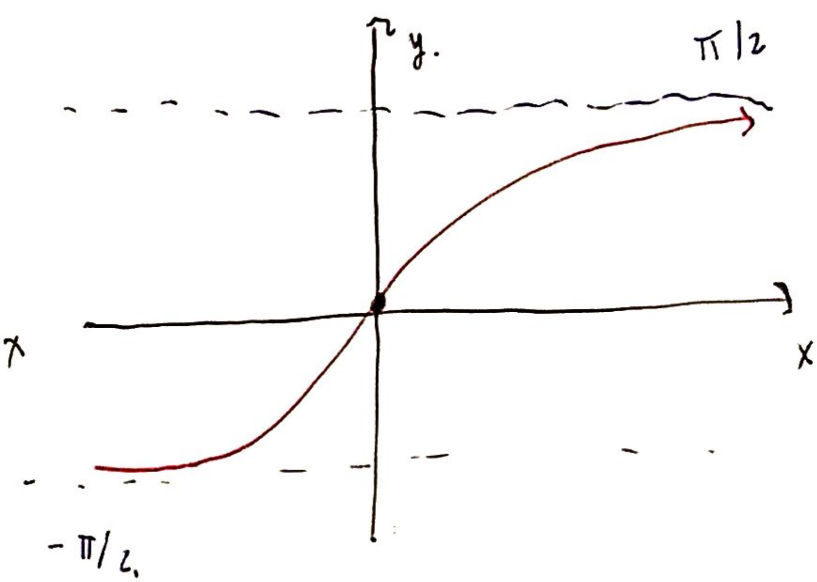
b. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx = 2\tan^{-1}(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} = \pi + \frac{2\pi}{2} = 2\pi.$$

$$= 2\lim_{x \to \infty} \underbrace{\tan^{-1}(x)}_{\pi/2} - 2\lim_{x \to -\infty} \underbrace{\tan^{-1}(x)}_{-\pi/2}.$$

AHs de $\tan^{-1}(x)$

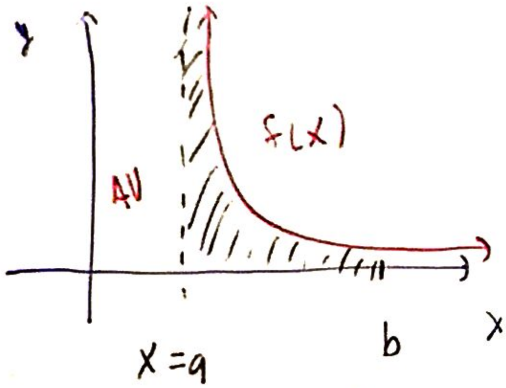
son AVs de $\tan x$.





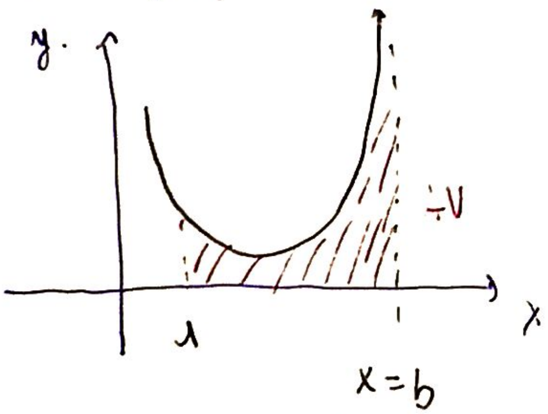
Integrales impropias Tipo 2.

Hay una A.V en $x = a$.

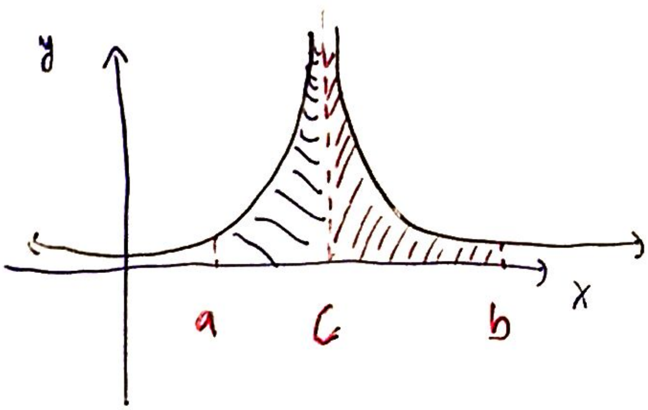


$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx.$$

existe, es CONVERGENTE.



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$



AV en $x = c$ y está en medio del intervalo.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

2 integrales impropias.

Ejercicio 4: Evalúe las sigs. integrales. Indique donde son discontinuas.

a. $$\int_1^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \int_0^8 u^{-1/3}\,du. = \frac{3}{2}u^{2/3}\Big]_{0^+}^{8} = \frac{3}{2}(8)^{2/3} - \lim_{u \to 0^+} \frac{3}{2}u^{2/3}$$

$u = x - 1$ $\quad u(9) = 8$

$du = dx$ $\quad u(1) = 0$

indefinida en $x = 0$

$\frac{1}{0}$ indefinido.

$$\frac{3}{2}(64)^{1/3} - \frac{3}{2}0^{2/3} = \frac{3}{2}\cdot 4 - 0 = 6. \text{ converge.}$$

b. $$\int_{-2}^{3} \frac{3}{x^4}\,dx = \int_{-2}^{0} 3x^{-4}\,dx + \int_{0}^{3} 3x^{-4}\,dx$$

$\frac{1}{0}$ indefinida en $x=0$.

$$\int_{-2}^{0} 3x^{-4}\,dx = -x^{-3}\Big]_{-2}^{0^-} = \underbrace{\lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{x^3}}_{+\infty.} + \frac{1}{(-2)^3}$$

No EXISTE.

DIVERGE.

DIVERGE $\to \pm\infty$.

CONVERGE $\to$ número, límite existe.

c. $$\int_0^1 \ln x\,dx$$

$\ln 1 = 0$

indefinida en $x=0$.

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = x$

$$\int_0^1 \ln x\,dx = x\ln x - x\Big]_{0^+}^{1} = 1\cdot\cancel{\ln(1)}^{0} - 1 - \lim_{x\to 0^+} x\ln x - \cancel{x}^{0}$$

$$= -1 - \lim_{x\to 0^+} \cancel{x\ln x}^{0.}$$

$0\cdot\infty$

Regla de L'Hospital $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} \underset{LH}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} -x = -0$$

$$\boxed{\int_0^1 \ln x\,dx = -1 \quad \text{CONVERGE}}$$

6

$0\cdot\infty \neq 0$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}e^{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{x}}{x} \underset{LH}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{x}}{1} = +\infty.$

$0\cdot\infty.$ $\qquad \infty/\infty$

Problema 2: $a(t) = 10t\cos\left(\frac{t}{2}\right)$

$$v(t) = \int 10t\cos\left(\frac{t}{2}\right)dt. = 20t\sin\frac{t}{2} - \int 20\sin\frac{t}{2}\,dt.$$

$u = 10\cdot t$ $\quad dv = \cos\left(\frac{t}{2}\right)dt.$ $\quad 20t\sin\frac{t}{2} + 40\cos\frac{t}{2} + C.$

$du = 10dt.$ $\quad v = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)$

a) Reposo $v(0) = 0.$ $\quad v(0) = 0 + 40 + C = 0$

$C = -40.$

b) $s(t) = \int\left(20t\sin\frac{t}{2} + 40\cos\frac{t}{2} - 40\right)dt.$

$s(0) = 5.$

Problema 6: $\displaystyle\int_1^e \frac{24\ln^2 x}{(\ln^6 x + 1)^2}\frac{dx}{x} = \int_0^1 \frac{24u^2}{(u^6+1)^2}\,du.$

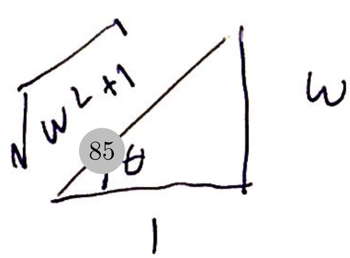
$u = \ln x$ $\quad u = \ln^3 x$ $\quad \ln^3 x = \tan\theta.$

$u^3 = \tan\theta.$

$du = \frac{dx}{x}$ $\quad u(e) = 1,\ u(1) = 0$

$w = u^3$ $\quad w(1) = 1$ $\quad \displaystyle\frac{24}{3}\int_0^1 \frac{1}{(w^2+1)^{4/2}}\frac{dw}{3}.$

$dw = 3u^2du$ $\quad w(0) = 0$



$w = \tan\theta.$

$dw = \sec^2\theta.d\theta.$

$\sqrt{w^2+1} = \sec\theta.$

2.

$$\frac{24}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2\theta \, d\theta}{\sec^4\theta} = 8\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/4} (1+\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= 4\left(\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/4} \right)$$

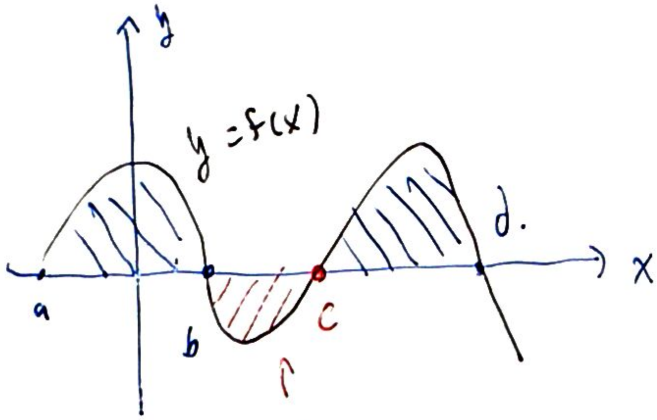
$$= \frac{4\pi}{4} + 2\sin\frac{\pi}{2} - 0 - 0$$

$$= \pi + 2.$$

Capítulo 13

6.1 Área entre curvas

6.1 Áreas entre Curvas (p 79).



Área Negativa

Área entre $y = f(x)$ y el eje-x

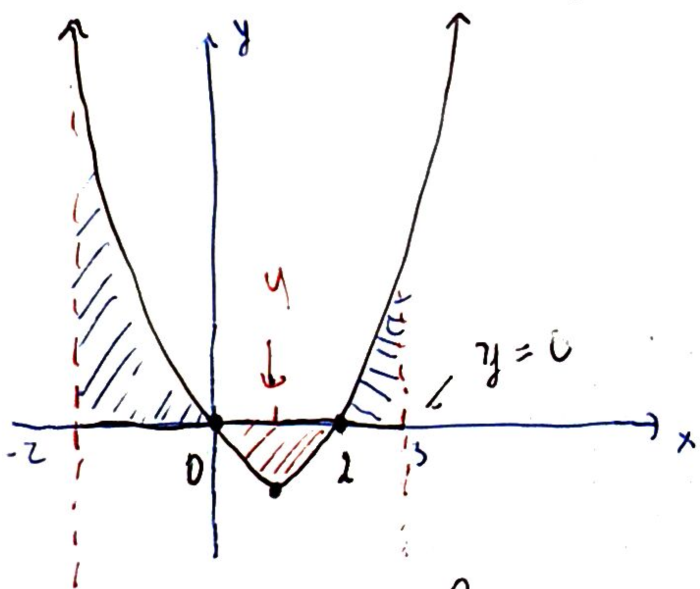
$$A = \int_a^d |f(x)|\,dx$$

$$A = \int_a^b f\,dx - \int_b^c f\,dx + \int_c^d f\,dx.$$

Ejercicio 1: Bosqueje y encuentre el área de la región delimitada por $y = 3x^2 - 6x$, $x = -2$, $x = 3$ y el eje-x.

Bosqueje la curva $y = 3x^2 - 6x$

interceptos-x: $y = 3x^2 - 6x = 0$ $\quad 3x(x-2) = 0$ $\quad x = 0, 2.$



$$A = \int_{-2}^{3} |3x^2 - 6x|\,dx$$

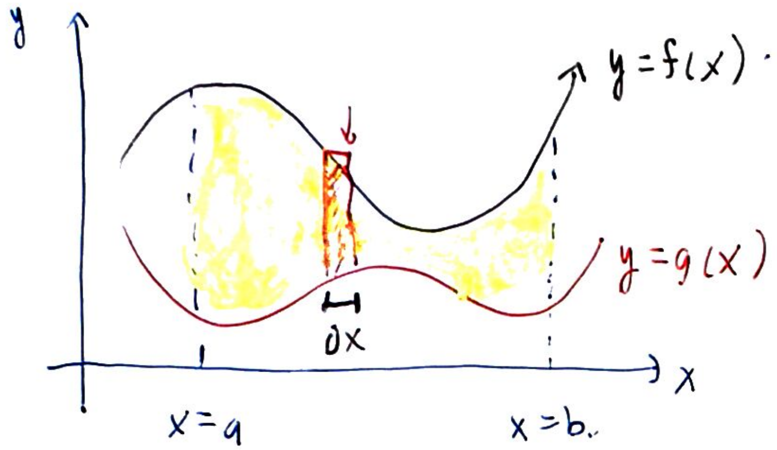
$$A = \int_{-2}^{0} 3x^2 - 6x\,dx - \int_0^2 3x^2 - 6x\,dx + \int_2^3 3x^2 - 6x\,dx.$$

$$A = x^3 - 3x^2\Big]_{-2}^{0} + 3x^2 - x^3\Big]_0^2 + x^3 - 3x^2\Big]_2^3$$

$$A = 0 - (-8 - 3(4)) + (12 - 8 - 0) + (27 - 27 - (8 - 12))$$

$$A = 20 \quad + 4 \quad + 4. \quad = 28$$

Área entre dos curvas (p. 80)



Región está entre las dos curvas $g(x) \leq y \leq f(x)$ y las rectas verticales $a \leq x \leq b$.

Considere un rectángulo infinitesimal, ancho dx, altura $f(x) - g(x)$.

$$dA = [f(x) - g(x)]\,dx$$

Integrando en x desde $x = a$ hasta $x = b$.

$$\int dA = A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \underbrace{\int_a^b f\,dx}_{\text{amarillo + blanco}} - \underbrace{\int_a^b g\,dx}_{\text{blanco}}$$

Área entre dos curvas:

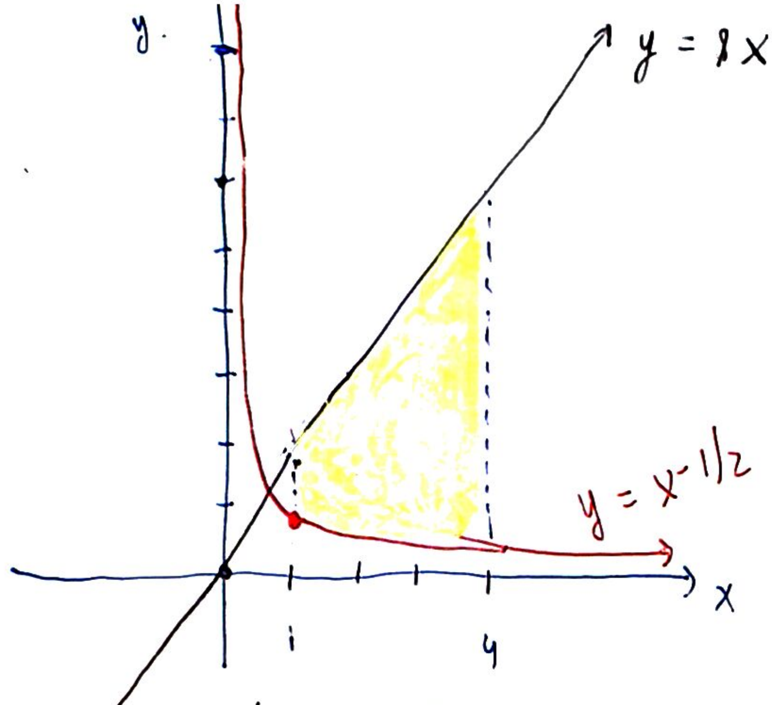
$$A = \int_a^b y_{sup} - y_{inf.}\,dx$$

$$(-2) - (-8) = -2 + 8 = 6.$$

Ejemplo: Bosqueje y encuentre el área de la región.

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y_2 = 8x \quad \text{en } [1, 4].$$

Realice los bosquejos de las curvas.



en $x = 1$

$y_1(1) = 1 \qquad y_2(1) = 8$

intersección ocurre fuera del intervalo $[1,4]$.

$y_1 = y_2$.

$x^{-1/2} = 8x$

$1 = 8x^{3/2}$.

$x^{3/2} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$

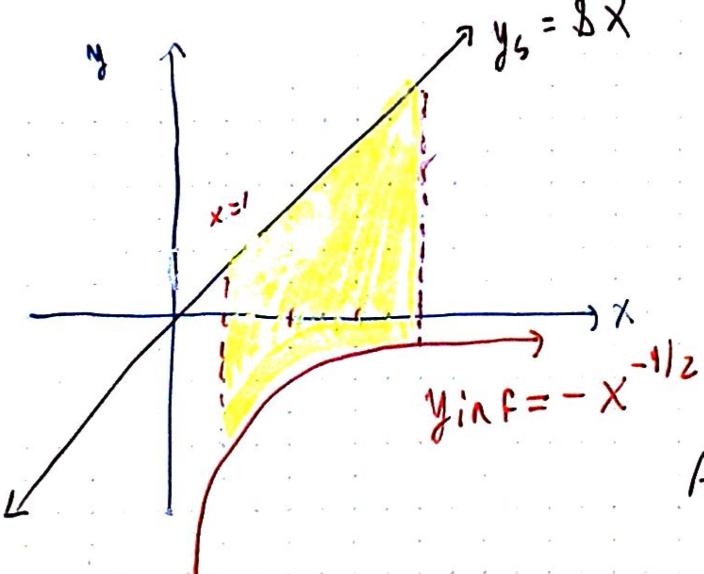
$x^{3/2} = 2^{-3}$

$x = (2^{-3})^{2/3} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$. intersectio. (no afecta el problema)

$$A = \int_1^4 (8x - x^{-1/2})\,dx = 4x^2 - 2x^{1/2}\Big]_1^4$$

$$A = 4^3 - 2\sqrt{4} - (4-2) = 64 - 4 - 2 = 58$$

Emilio: Área de la región entre $y_2 = 8x$ & $y_1 = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ en $[1,4]$.



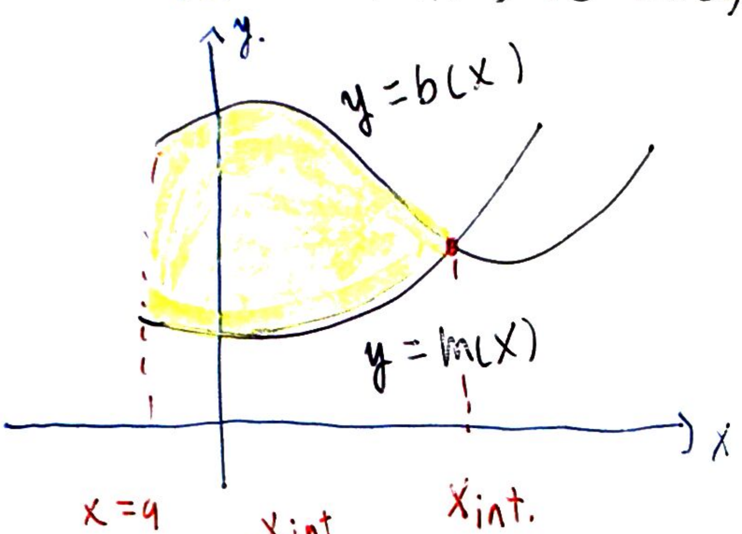
$$A = \int_1^4 y_s - y_{inf}\,dx$$

$$A = \int_1^4 8x + x^{-1/2}\,dx$$

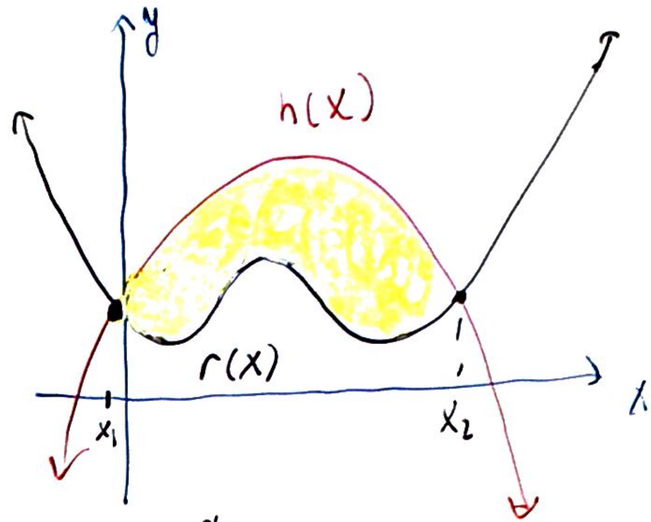
$$A = 4x^2 + 2x^{1/2}\Big]_1^4$$

$$A = 64 + 4 - 4 - 2 = 62.$$ más grande.

Regiones con puntos de intersección entre las curvas. Límites de integración no están explícitos.



$$A = \int_a^{x_{int}} b - m \, dx$$

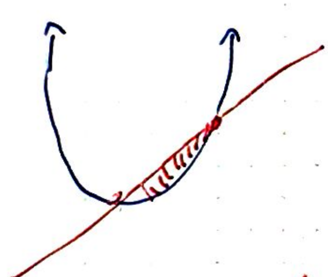


$$A = \int_{x_1}^{x_2} h - r \, dx$$

Es necesario encontrar las intersecciones entre las 2 curvas

Ejemplo: Encuentre el área de la región entre

$y_1 = 3x$ & $y_2 = 3x^2$.

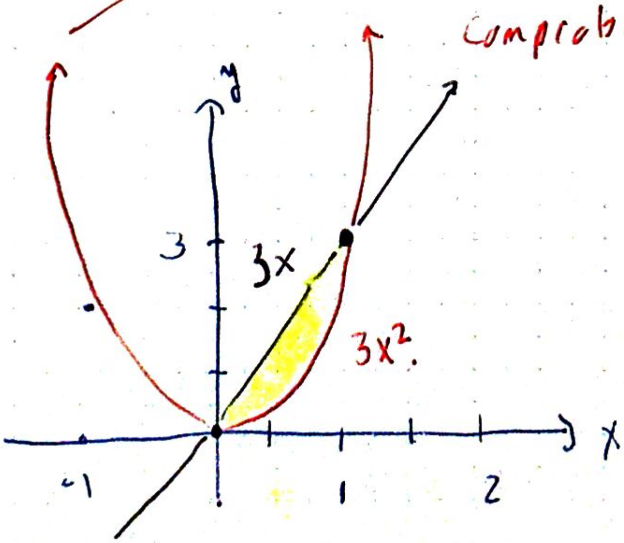


Intersecciones $y_2 = y_1$

$3x^2 = 3x \Rightarrow 3x^2 - 3x = 3x(x-1) = 0$

$x = 0, 1.$ $\quad y_1(0) = 0 \quad y_2(0) = 0$

comprobando. $\quad y_1(1) = 3 \quad y_2(1) = 3$



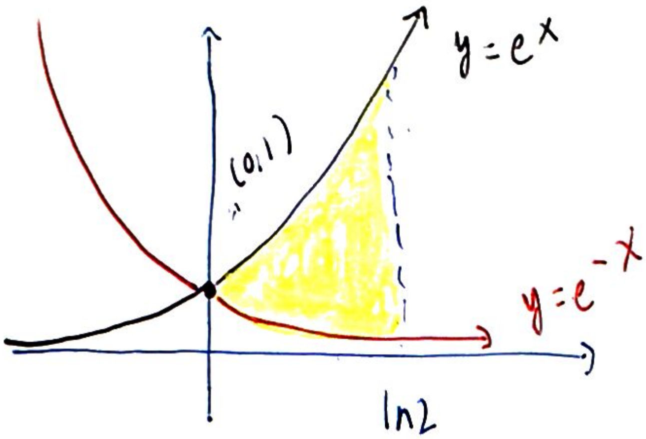
$$A = \int_0^1 3x - 3x^2 \, dx$$

$$A = \frac{3}{2}x^2 - x^3 \Big]_0^1$$

$$A = \frac{3}{2} - 1 = 0 = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 2: Bosqueje y encuentre de la región (P. 81)

a) $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $x = 0$ & $x = \ln 2$.



$$A = \int_0^{\ln 2} e^x - e^{-x}\,dx$$

$$A = e^x + e^{-x} \Big|_0^{\ln 2}$$

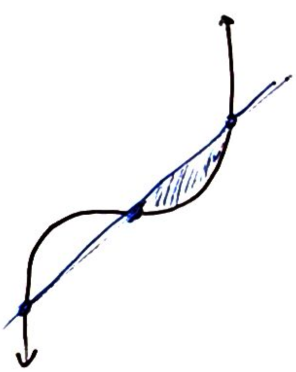
$$A = e^{\ln 2} + e^{-\ln 2} - (e^0 + e^{-0})$$

$$A = 2 + \frac{1}{2} - (1 + 1)$$

$$A = 2 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{e^{\ln 2}} = \frac{1}{2}$$

b.) $y_1 = x^3$ & $y_2 = 4x$.

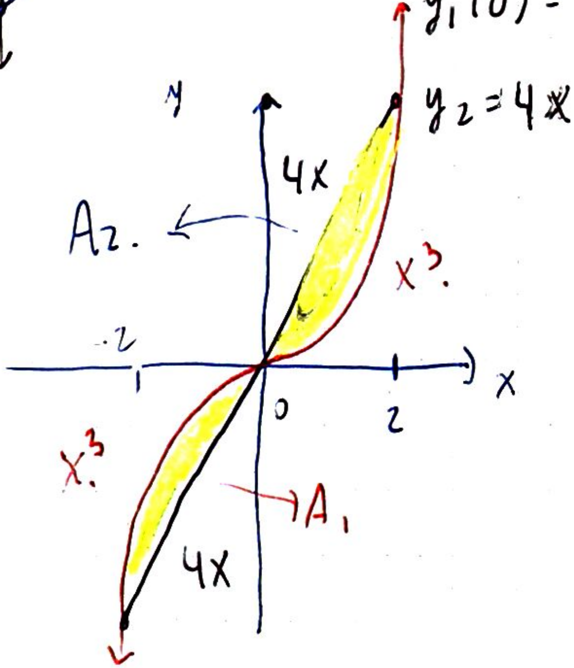


Intersecciones entre y_1 & y_2.

$x^3 = 4x$

$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = 0 \quad x = 0, \pm 2.$

$y_1(0) = y_2(0) = 0 \quad y_1(2) = 8 \quad y_2(2) = 8.$



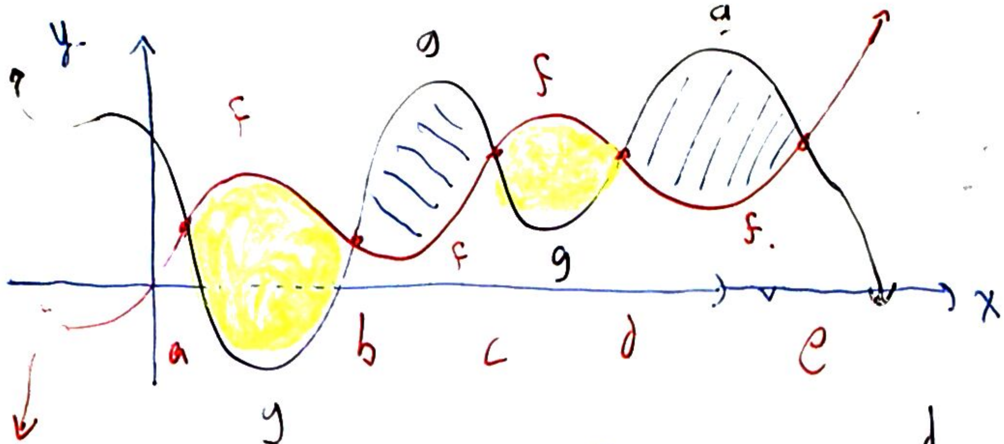
$$A = \underbrace{\int_{-2}^{0} x^3 - 4x\,dx}_{} + \underbrace{\int_0^2 4x - x^3\,dx}_{}$$

son iguales

$$A = 2\int_0^2 4x - x^3\,dx$$

$$A = 2\left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\Big]_0^2\right) = 2\left(8 - \frac{16}{4} - 0\right) = 2(4) = 8.$$

Regiones con dos curvas superiores diferentes.



Área entre estas dos curvas

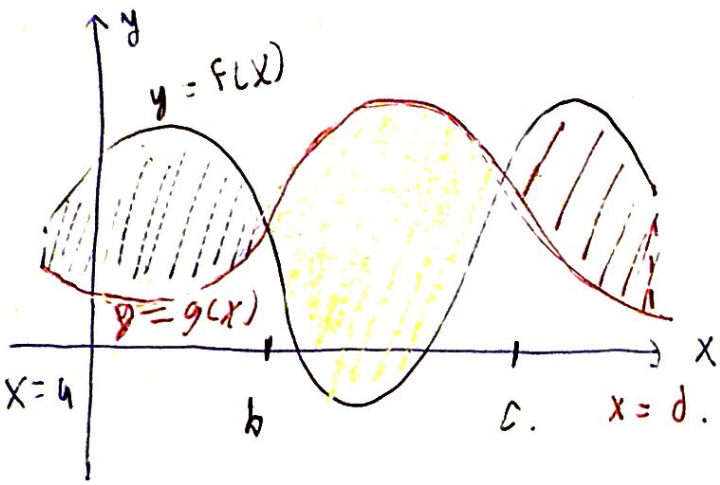
$$A = \int_a^b f - g\,dx + \int_b^c g - f\,dx + \int_c^d f - g\,dx + \int_d^e g - f\,dx.$$

$$A = \int_a^e |f - g|\,dx$$

Capítulo 14

Área entre curvas, integración respecto al eje-y, respecto al eje-x, introducción a volúmenes de sólidos, volúmen de un cilíndro

Áreas entre Curvas.



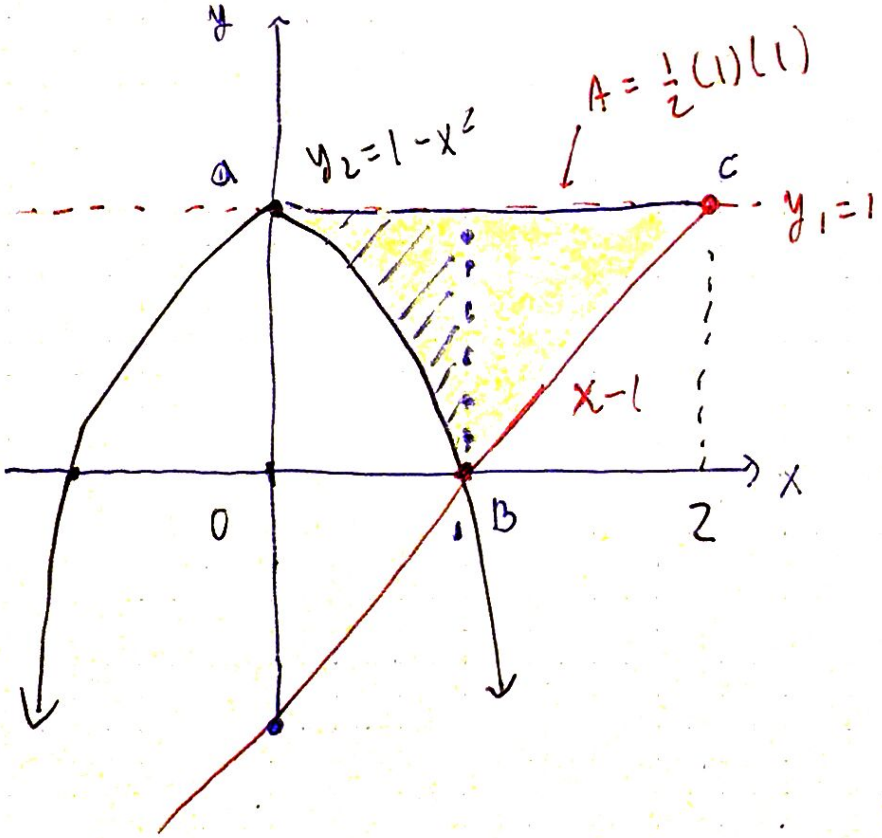
$$A = \int_a^b f-g\,dx + \int_b^c g-f\,dx$$

$$+ \int_c^d f-g\,dx$$

$$A = \int_a^b |f-g|\,dx \checkmark$$

Ejercicio 3: Encuentre el área de la región entre las curvas dadas.

b. $y_1 = 1$, $y_2 = 1 - x^2$, $y_3 = x - 1$. P (83)



a. $y_1 = y_2$

$1 = 1 - x^2$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

c. $y_1 = y_3$.

$1 = x - 1 \Rightarrow x = 2$.

o. $y_2 = y_3 \Rightarrow x = 1$

$1 - x^2 = x - 1$

$-x^2 - x + 2 = 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

$x = -2, \quad x = 1$

$$A = \int_0^1 1 - (1 - x^2)\,dx + \left.\int_1^2 1 - (x-1)\,dx \right\} 1/2.$$

$$A = \int_0^1 x^2\, dx + \int_1^2 2 - x \; dx$$

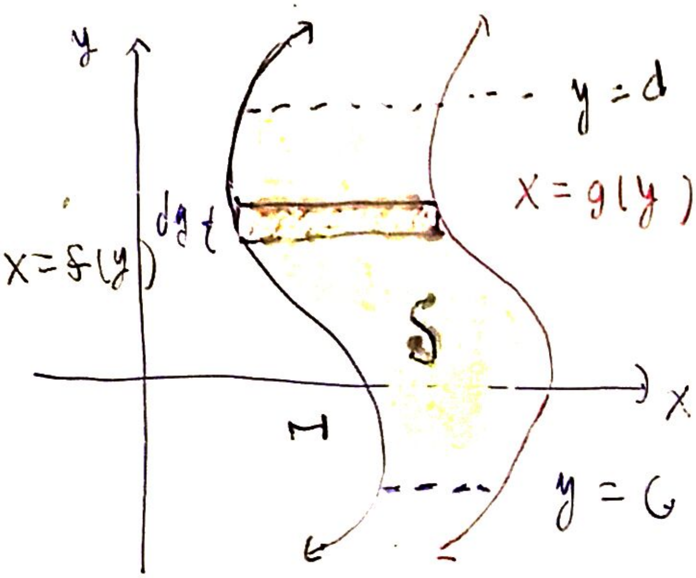
$$A = \frac{1}{3}x^3 \Big]_0^1 + 2x - \frac{x^2}{2} \Big]_1^2$$

$$A = \frac{1}{3} + 4 - 2 - \left(2 - \frac{1}{2}\right) \Big\} \ 1/2.$$

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

P(83)

Integración en el eje-y, franjas Horizontales.



Región S: $c \leq y \leq d.$

$f(y) \leq x \leq g(y)$

rectángulo. altura dy.

ancho $g(y) - f(y)$

$$dA = [g(y) - f(y)]\, dy.$$

$$\boxed{A = \int_c^d [g(y) - f(y)]\, dy.}$$

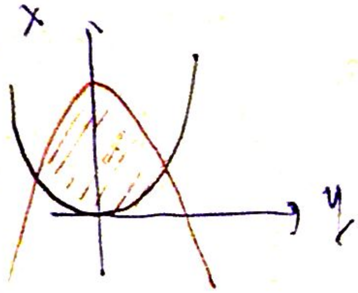
$$A = \int_a^b y_{arr} - y_{aba} \; dx$$

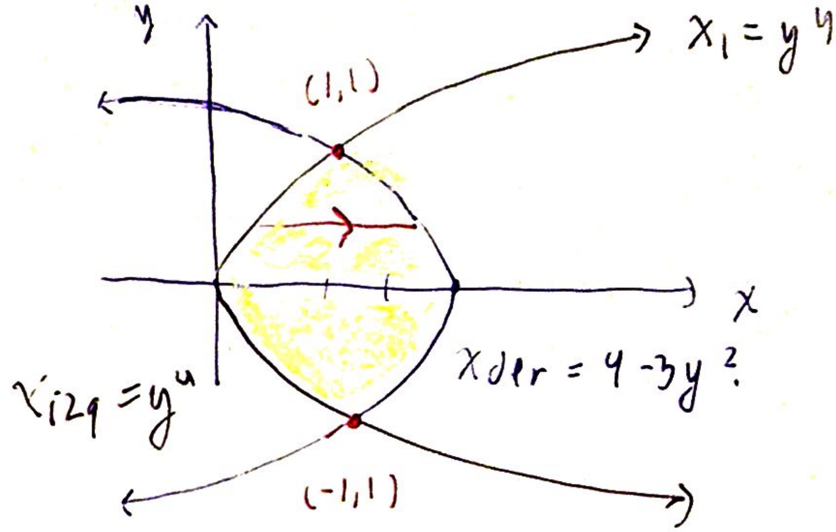
$$A = \int_c^d X_{der} - X_{izq} \;\; dy.$$

$$x = f(y) \Rightarrow y = f^{-1}(x)$$

evite las inversas.

Ejemplo: Encuentre el área entre $x_1 = y^4$ & $x_2 = 4-3y^2$.





$$A = \int_{-1}^{1} x_{der} - x_{izq}\, dy = \int_{-1}^{1} 4-3y^2-y^4\, dy.$$

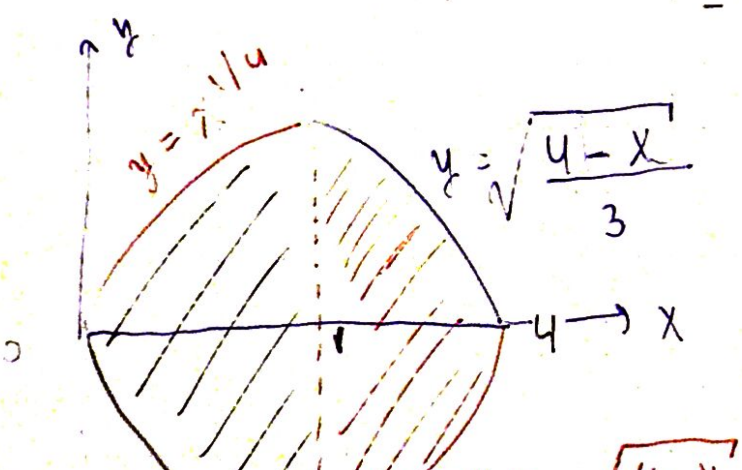
Intersecciones $\quad y^4 = 4-3y^2. \qquad y^4+3y^2-4=0$

$$\begin{aligned} y^2 \quad +4 &= 0 \\ y^2 \quad -1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{9+x^2}\, dx$$

$$y^2 \neq -4$$
$$y^2 = 1$$
$$y = \pm 1$$

$$A = 2\int_0^1 4-3y^2-y^4\, dy. = 2\left(4y - y^3 - \tfrac{1}{5}y^5\Big]_0^1\right)$$
$$= 2\left(4-1-\tfrac{1}{5}\right) = 2\left(\tfrac{15}{5} - \tfrac{1}{5}\right) = \tfrac{28}{5}.$$



$x = y^4$ Resuelva para x:

$$y = \pm \sqrt[4]{x}$$

$$x = 4-3y^2$$
$$3y^2 = 4-x$$
$$y^2 = \frac{4-x}{3} \qquad y = \pm\sqrt{\frac{4-x}{3}}$$

Área de la región

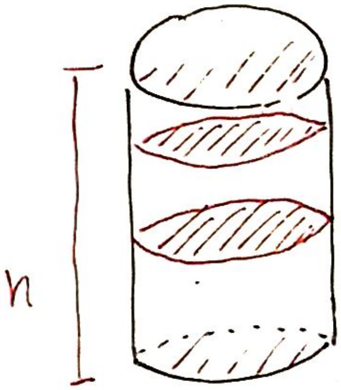
$$A = \int_0^1 x^{1/4} - (-x^{1/4})\,dx + \int_1^4 \sqrt{\frac{4-x}{3}} - \left(-\sqrt{\frac{4-x}{3}}\right) dx$$

$$A = 2\int_0^1 x^{1/4}\,dx + 2\int_1^4 \left(\frac{4-x}{3}\right)^{1/2} dx \Big\} = 28/5$$

< 40 2pts. P1 $\qquad > 60$ 1 pt. neto.

Volúmenes de Sólido. Encuentre el área, utilizando integrales.

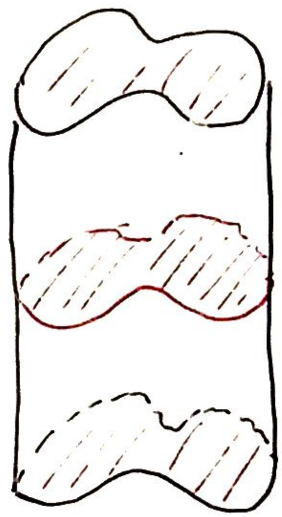
Volumen de un cilindro.



Área transversal πr^2.

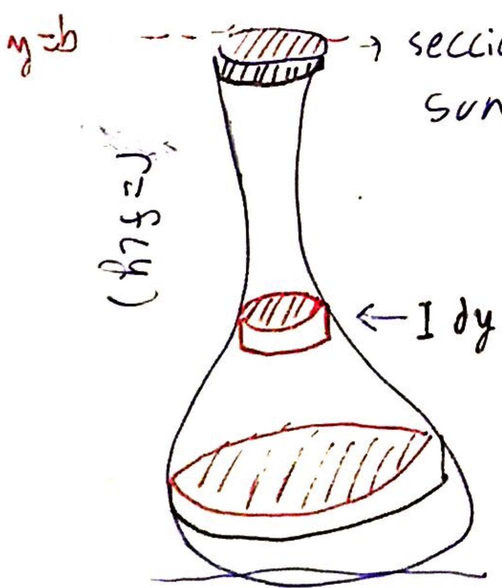
$$V = Ah = \pi r^2 h.$$

ilindro Circular



sección transversal

$$V = Ah.$$



→ secciones transversales son diferentes

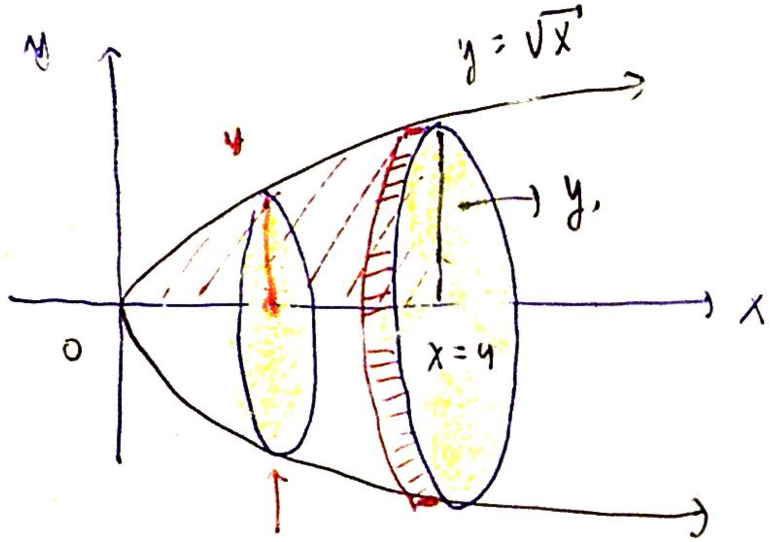
volumen de una sección infinitesimal, el cual es un cilindro con altura dy. y área A(y).

$$dV = A(y)\,dy$$

Integrando en $a \leq y \leq b$.

Volumen total del sólido $\boxed{V = \int_a^b A(y)\,dy.}$

Ejemplo: Considere la región $0 \leq y \leq \sqrt{x}$
$0 \leq x \leq 4$.



rote la región respecto al eje-x obtiene un sólido de revolución.

sección transversal círculo de radio y.

$A(y) = \pi y^2$. grosor/altura dx.

$$V = \int_0^4 \pi y^2\,dx = \int_0^4 \pi(\sqrt{x})^2\,dx = \pi\int_0^4 x\,dx$$

$$V = \frac{\pi}{2}\,x^2\Big]_0^4 = \frac{\pi}{2}\,16 = 8\pi.$$

Capítulo 15

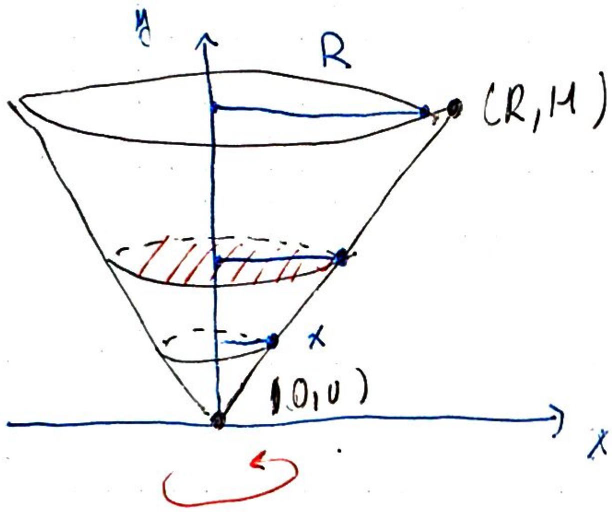
Volúmenes sólidos en revolución, introducción a arandelas

Volúmenes:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

$A(x)$ es el área de la sección transversal del sólido.

Ejemplo: Encuentre el volumen de un cono de altura H y base circular de radio R.



Rebanando el cono. Círculos de radio x.

Área $\pi r^2(y)$

$$V = \int_0^H \pi x^2\,dy.$$

Ec. Recta $y = mx + b$

$$m = \frac{H-0}{R-0} = \frac{H}{R}$$

$$0 = 0 + b \Rightarrow b = 0$$

$$\boxed{y = \frac{H}{R}x}$$

$$x = \frac{Ry}{H}$$

$$V = \int_0^H \pi x^2\,dy.$$

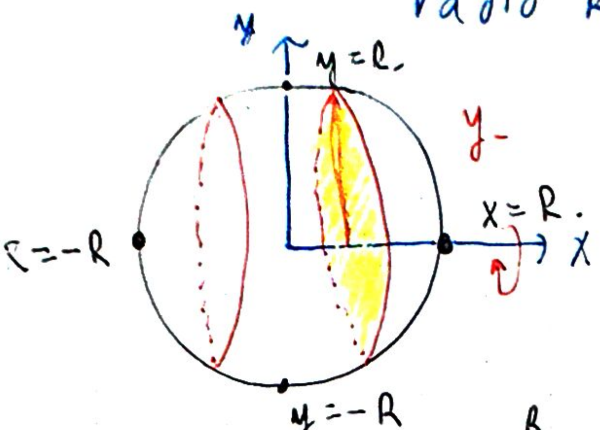
$$V = \int_0^H \pi \frac{R^2y^2}{H^2}\,dy. = \pi\frac{R^2}{H^2}\int_0^H y^2\,dy.$$

$$\pi\frac{R^2}{H^2}\left.\frac{y^3}{3}\right]_0^H = \frac{\pi R^2}{H^2}\,\frac{H^3}{3}.$$

Pág. 88

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.}$$

Ejercicio 1: Encuentre el volumen de una esfera de radio R.



Ec. esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Rebanando la esfera, se obtiene un círculo de radio de radio y.

Ec. círculo $x^2+y^2=R^2$.

Volumen: $V=\int_{-R}^{R} A(x)\,dx = \int_{-R}^{R} \pi y^2\,dx$

$-R \leq x \leq R$.

$y=0 \quad x^2=R^2$.

$y^2=R^2-x^2$.

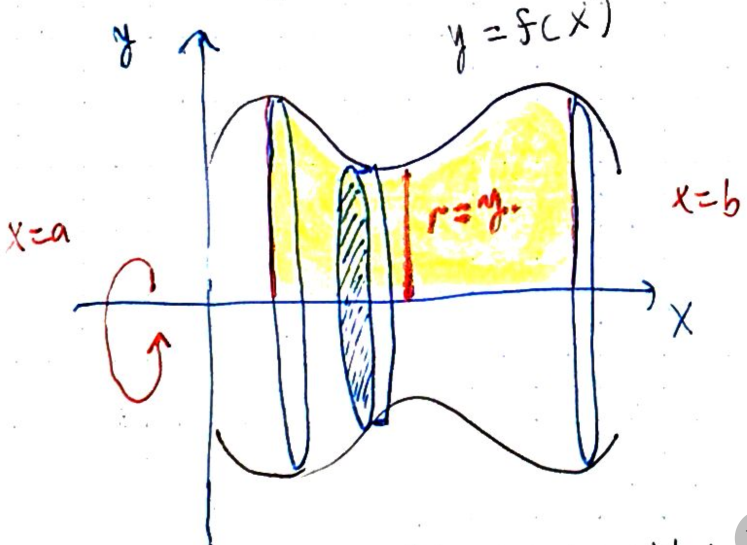
$$V=\int_{-R}^{R}\pi(R^2-x^2)\,dx = 2\pi\int_0^R (R^2-x^2)\,dx$$

R es constante

$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$$V=2\pi\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\Big]_0^R\right)=2\pi\left(R^3-\frac{1}{3}R^3\right)=2\pi\,\frac{2}{3}R^3$$

$$V=\frac{4\pi}{3}R^3$$



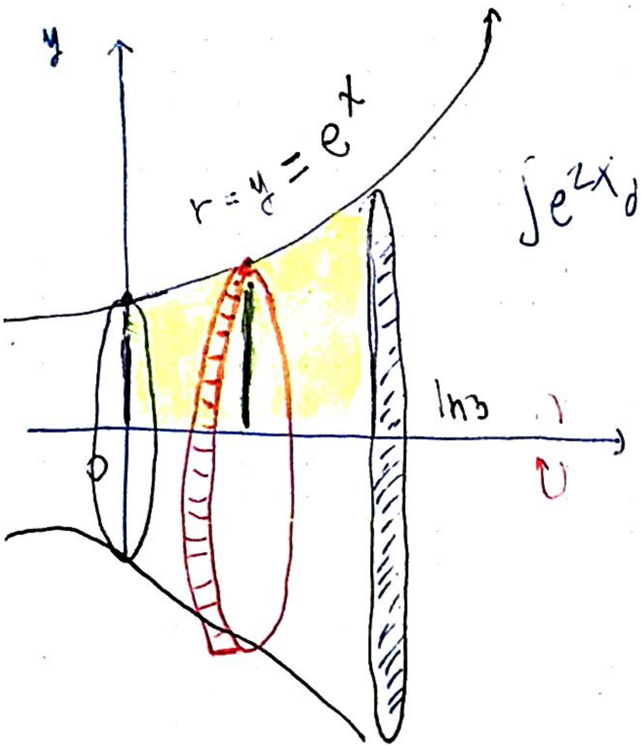
Sólidos rellenos discos (secciones transversales)

R: $a\leq x\leq b$.
$0\leq y\leq f(x)$

Área $=\pi y^2=\pi f^2(x)$.

Volumen $\boxed{V=\int_a^b \pi y^2\,dx}$

Ejercicio 2: (P 90) Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región $R: 0 \le x \le \ln 3,\ 0 \le y \le e^x$ respecto al eje-x.



$$\int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$V = \pi \int_a^b r^2\,dx$$

$a = 0,\ b = \ln 3,\ r = e^x$

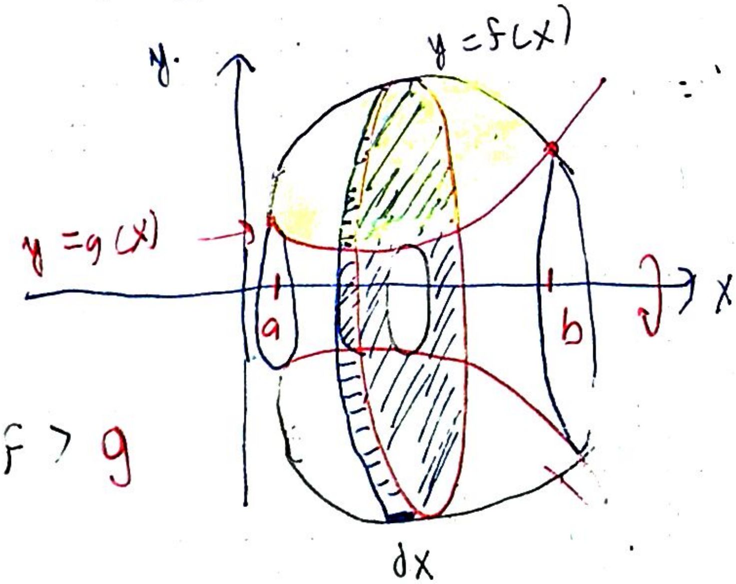
$$V = \pi \int_0^{\ln 3} e^x e^x\,dx$$

$$V = \pi \int_0^{\ln 3} e^{2x}\,dx$$

$$V = \frac{\pi}{2} e^{2x}\Big]_0^{\ln 3} = \frac{\pi}{2}\left(e^{\ln 3^2} - e^0\right)$$

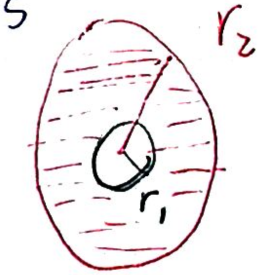
$$= \frac{\pi}{2}(9-1) = 4\pi.$$

Sólidos que se generan girando una región que está entre dos curvas. "Sólidos huecos"



$f > g$

∴ La sección de este sólido es un anillo con dos radios



reste el área del círculo hueco

$$A = \pi r_2^2 - \pi r_1^2.$$

El volumen de la sección transversal es

$r_{ext} = f(x) > r_{int} = g(x).$

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx$$

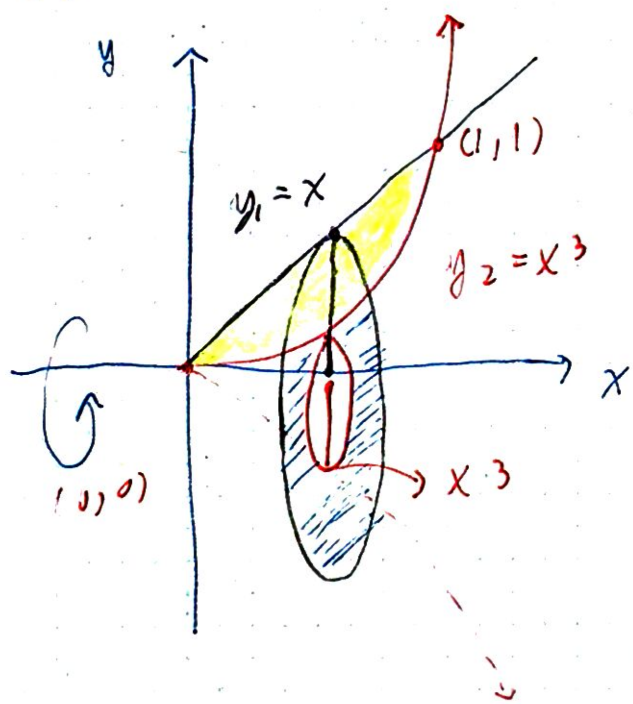
exterior² − interior²

Método de Arandelas $R: a \leq x \leq b.,\ g(x) \leq y \leq f(x).$

el volumen del sólido obtenido al girar R respecto al eje-x es:

$$V = \pi \int_a^b (f^2 - g^2)\,dx$$

Ejercicio 4: Calcule el volumen del sólido que se obtiene al girar la región encerrada por las curvas $y_1 = x$ & $y_2 = x^3$ respecto al eje-x. en el 1er cuadrante.



$V = V_{externa} - V_{interna}.$

Área Anillo.

$r_{ext} = x \qquad r_{int} = x^3.$

$$A = \pi r_{ext}^2 - \pi r_{int}^2$$

$$A = \pi x^2 - \pi x^6$$

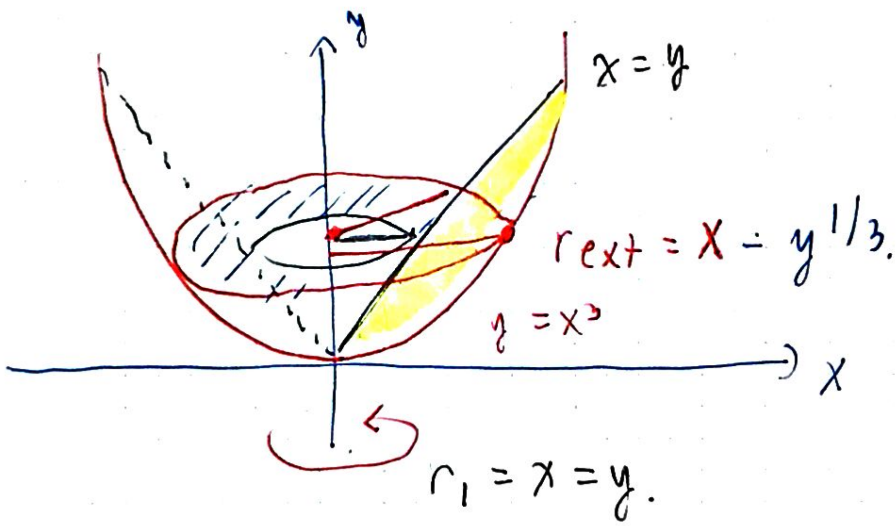
P. I's. $x^3 = x \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$

$x = 0, \pm 1$

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \pi\int_0^1 (x^2 - x^6)\,dx$$

$$V = \pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\Big]_0^1\right) = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right)$$

Ejercicio 5: Plantee la integral para encontrar el volumen del sólido que se obtiene al girar la región del ejercicio 4 respecto al eje- y.



$y = x^3$

$x = y^{1/3}$

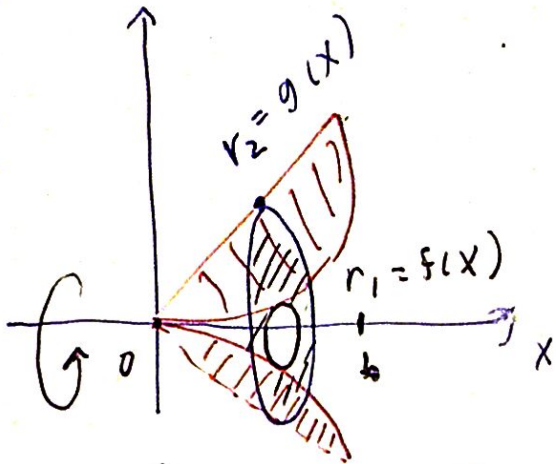
Área Anillo $\pi r_{ext}^2 - \pi r_{int}^2 = \pi y^{2/3} - \pi y^2$.

$$V = \int_0^1 A(y)\,dy = \int_0^1 (\pi y^{2/3} - \pi y^2)\,dy.$$

Capítulo 16

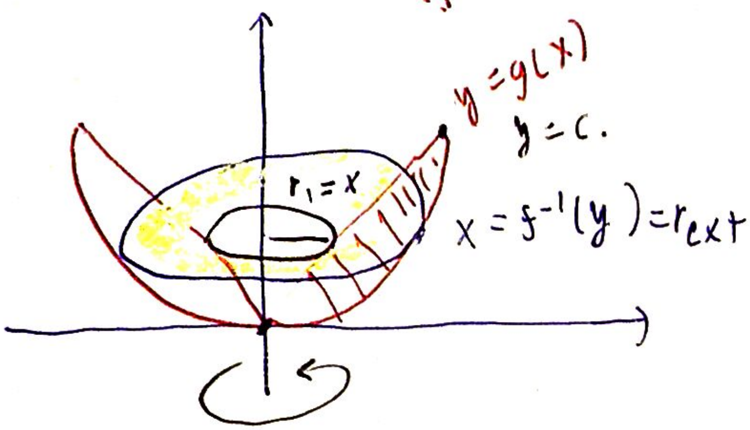
Volúmenes por arandelas y cascarones cilíndricos del cuadrado infinitesimal

Volúmenes



$$A = \pi r_2^2 - \pi r_1^2$$

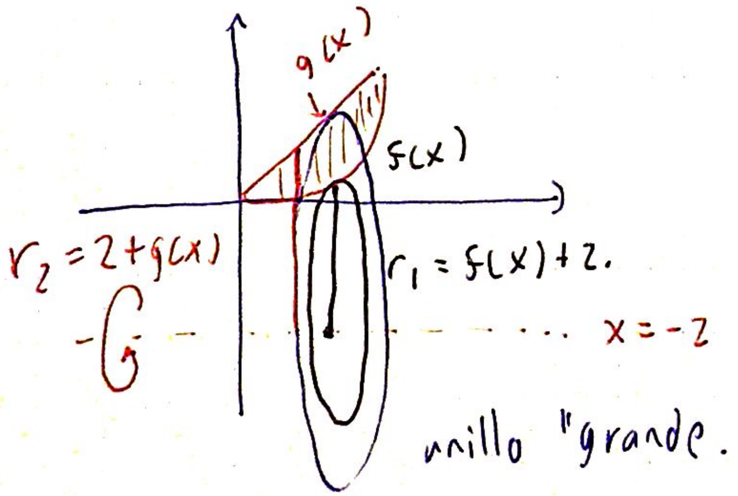
$$V = \pi \int_0^b r_2^2 - r_1^2 \, dx.$$



$$r_1 = g^{-1}(y)$$
$$r_2 = f^{-1}(y).$$

$$V = \pi \int_0^c r_2^2 - r_1^2 \, dy.$$

Rotación respecto a una recta horizontal o vertical (p 96).

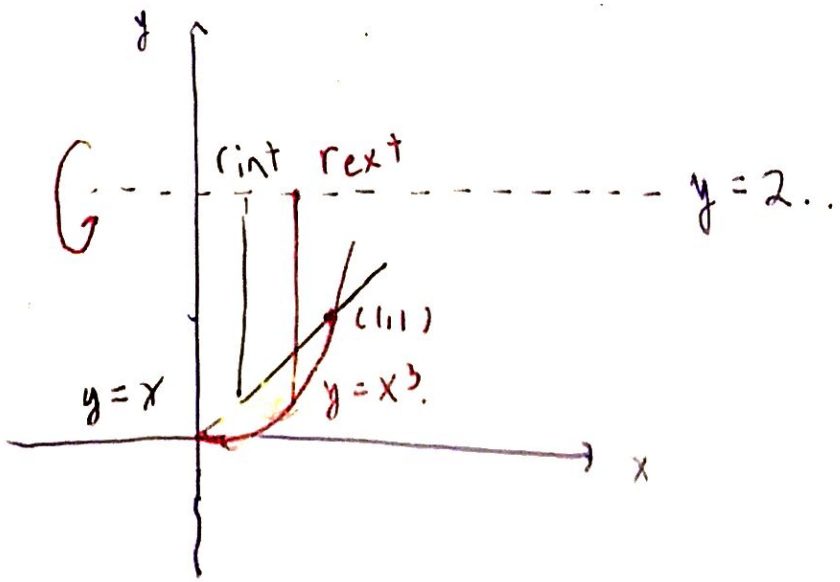


$$A = \pi r_2^2 - \pi r_1^2$$

$$V = \pi \int_0^b (2+g)^2 - (2+f)^2 \, dx.$$

Ejercicio 6: Considere la región entre $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$.

a. Plantee la integral para encontrar el volumen del sólido al girar la región respecto a $y = 2$. en el 1er cuadrante.



$$r_{ext} = 2 - g(x)$$
$$= 2 - x^3.$$

$$r_{int.} = 2 - f(x)$$
$$= 2 - x.$$

$f(x) = g(x)$

$x^3 = x \qquad x^3 - x = 0$

$x(x^2 - 1) = 0$

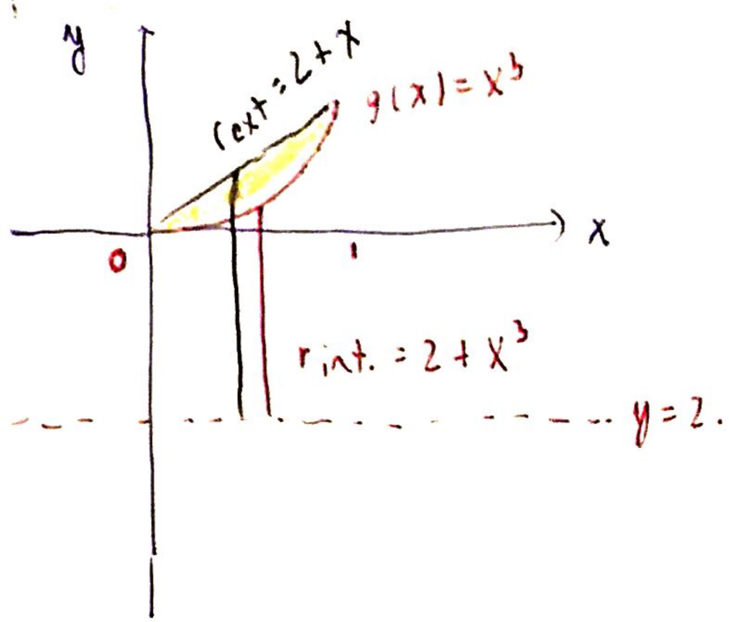
Límites $0 \leq x \leq 1 \qquad x = 0, 1$

Área Anillo: $\pi r_{ext}^2 - \pi r_{int}^2$

Volumen: $V = \pi \int_0^1 (2 - x^3)^2 - (2 - x)^2 \, dx.$

$$V = \pi \int_0^1 (x^6 - 4x^3 - x^2 + 4x) \, dx = \frac{17\pi}{21}$$

b. Encuentre el volumen obtenido al girar la región respecto a $y = -2$.



$r_{ext} = 2 + x$ ✓

$r_{int} = 2 + x^3$ ✓

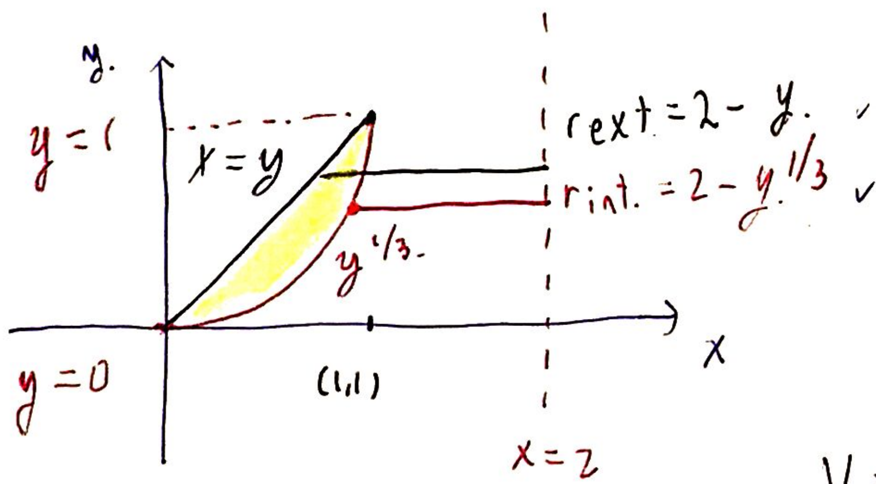
$0 \leq x \leq 1.$

$$V = \pi \int_0^1 r_{ext}^2 - r_{int}^2 \, dx.$$

$$V = \pi \int_0^1 (2+x)^2 - (2+x^3)^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (4x + x^2 - 4x^3 - x^6) \, dx = \frac{32\pi}{21}.$$

c. Plantee la integral del volumen del sólido girando la región alrededor de $x = 2$.

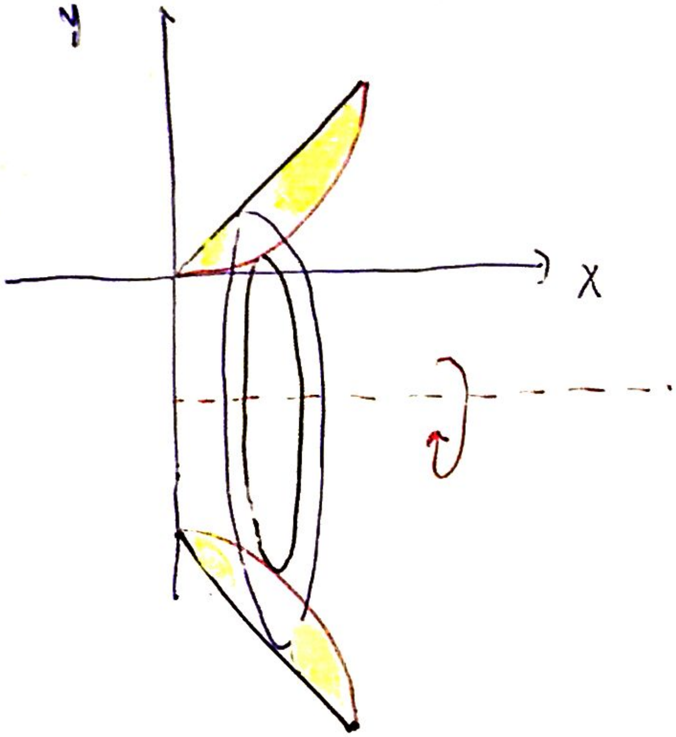


$y = x^3 \Rightarrow x = y^{1/3}.$

Límites $0 \leq y \leq 1.$

$$V = \pi \int_0^1 r_{ext}^2 - r_{int}^2 \, dy.$$

$$V = \pi \int_0^1 (2-y)^2 - (2-y^{1/3})^2 \, dy.$$

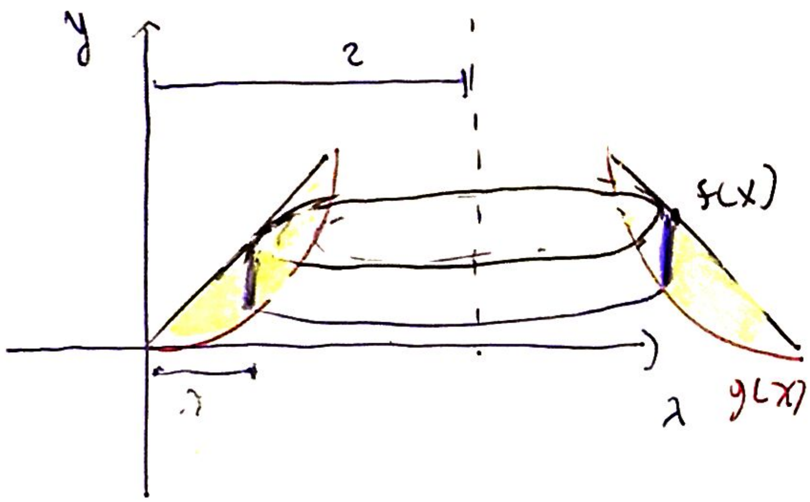


Girar respecto al eje-x o respecto a una recta horizontal.

Es preferible utilizar anillos o discos.

$r_2 = a + f(x)$

$r_1 = a + g(x)$.



anillos si gira respecto a una recta pero hay que encontrar las inversas de f & g.

Encuentre las dimensiones del cilindro.

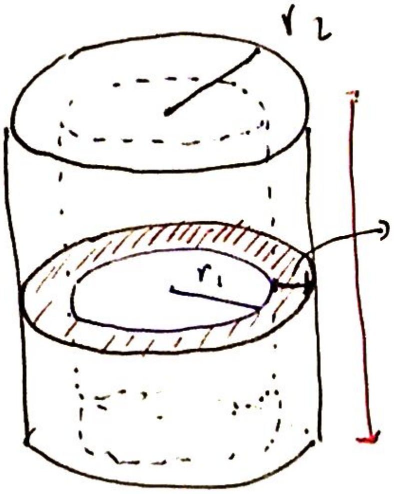
Altura $h = f(x) - g(x) = x - x^3$. $\quad 0 \le x \le 1$.

Radio $r = 2 - x$

Volumen: $V = 2\pi \int_0^1 hr \, dx$ $\quad$ Cascarones Cilíndricos.

$$V = 2\pi \int_0^1 (x - x^3)(2 - x)\, dx.$$

6.3 Volúmenes por medio de cascarones cilíndricos. (p 99) (lata).



Volumen Cascarón.

Sección transversal Anillo.

$r_{ext} = r_2 \qquad r_{int} = r_1.$

$$V = Ah = \pi(r_2^2 - r_1^2)h.$$

espesor de la lata.

$$V = \pi h (r_2 + r_1)(r_2 - r_1)$$

$dr = r_2 - r_1$

$r = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$

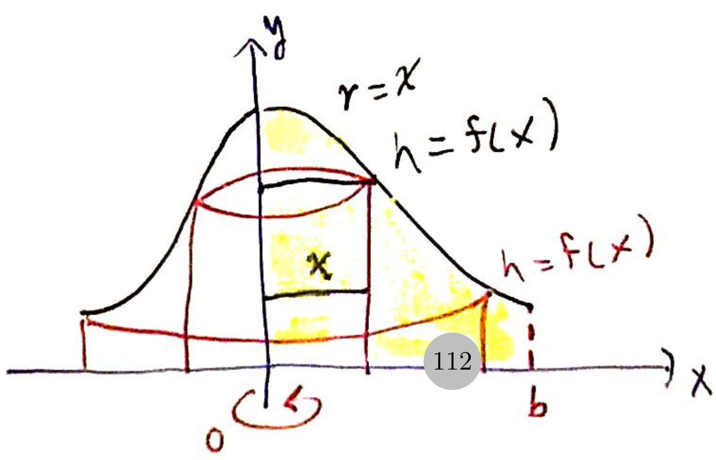
radio promedio r.

$$V = \pi h \, 2r \, dr$$

$$\boxed{V = 2\pi h r \, dr}$$ Volumen Cascarón Cilíndrico/Lata.

Si la región $R: a \le x \le b, \; 0 \le y \le f(x)$ se gira respecto al eje-y. el volumen del sólido es:

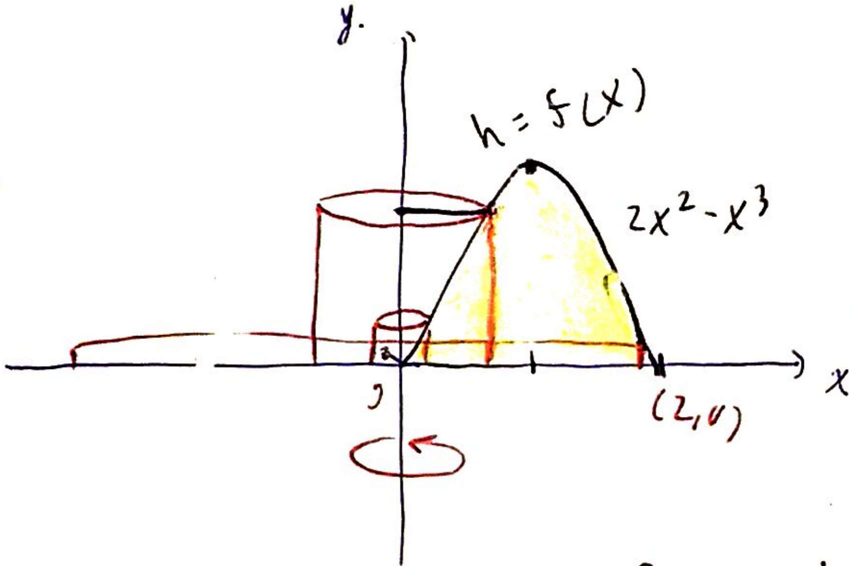
$$V = 2\pi \int_a^b r h \, dr = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx.$$



Evitar calcular la inversa de f(x) y de integrar en el eje-y.

Ejemplo: Encuentre el volumen del sólido al girar la región entre el eje x y la curva $f(x)=2x^2-x^3$ respecto al eje-y. (P 100).

Interceptos-x: $2x^2-x^3=0$ $\quad x^2(2-x)=0$ $\quad x=0,2.$



Dimensiones del cilindro.

Altura $h=2x^2-x^3$

radio $r=x$

Límites $0\le x\le 2.$

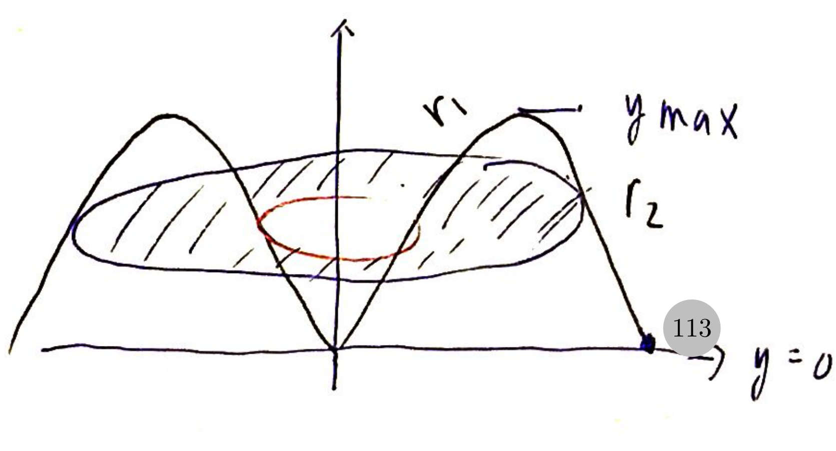
$$V=\int_0^2 2\pi h r\,dr.$$

V cilindro $\quad V=\pi h r^2. \qquad dV=\pi h\, 2r\,dr.$

$$V=\int_0^2 2\pi(2x^2-x^3)x\,dx = 2\pi\int_0^2 2x^3-x^4\,dx$$

$$V=2\pi\left(\frac{x^4}{2}-\frac{x^5}{5}\Big]_0^2\right)=2\pi\left(\frac{16}{2}-\frac{32}{5}\right)$$

Es dificil de plantear con arandelas.



$0\le y\le y_{max}.$

$r_1=f^{-1}_{izq}(y)$

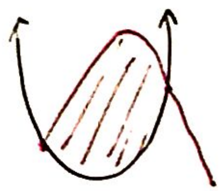
$r_2=f^{-1}_{der}(y)$

$$V=\pi\int_0^{y_{max}} r_2^2-r_1^2\,dy.$$

No se puede encontrar la inversa de $2x^2 - x^3 = y$.

Ejercicio 2: Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región entre $y_1 = x^2$ & $y_2 = 6x - 2x^2$ alrededor del eje-y.

$y_2 = 0$ cuando $x = 0, 3$

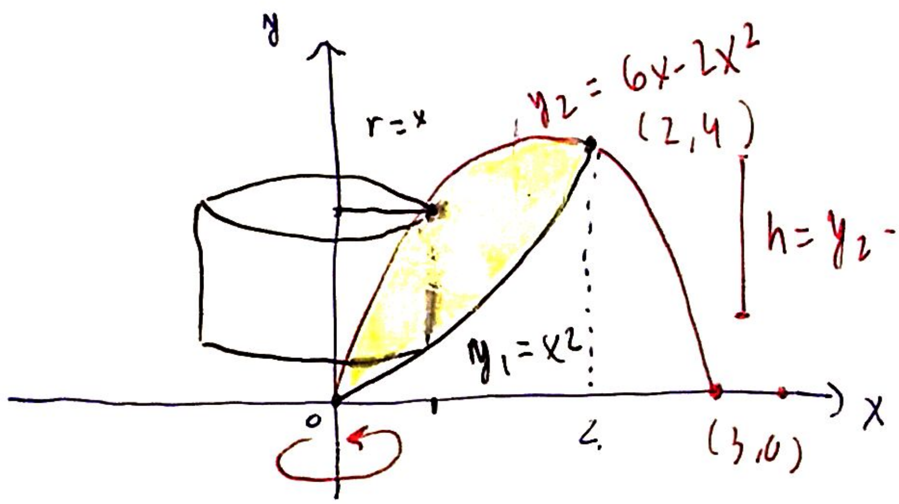


$y_1 = y_2$. $\quad x^2 = 6x - 2x^2$.

$3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0$

$x = 0, 2$.

$y_1(0) = 0 \qquad y_2(2) = 4$.



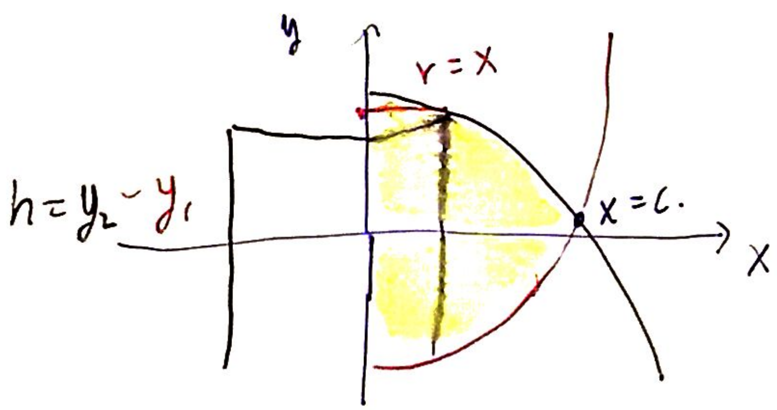
Altura

$h = y_2 - y_1$

$h = 6x - 2x^2 - x^2$.

radio $r = x$.

$0 \leq x \leq 2$.



$$V = \int_0^2 2\pi r h \, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^2 (6x - 3x^2)\, x \, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^2 (6x^2 - 3x^3)\, dx.$$

$$V = 2\pi \left(2x^3 - \frac{3}{4} x^4 \Big]_0^2 \right) = 2\pi (16 - 3 \cdot 4) = 8\pi$$

Capítulo 17

6.5 Valor promedio de una función

6.5 Valor Promedio de una función (P105 - P108)

El valor promedio de una función continua en un intervalo $[a,b]$ es igual a.

$$\boxed{f_{prom} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

✓

$$f_{prom} = \frac{f_1 + f_2 + \dots f_n}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_i)$$

Número infinitos y continuo de puntos, dividir el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \frac{\Delta x}{b-a} = \frac{1}{n}.$$

$$f_{prom} \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b-a} f(x_i)\,\Delta x$$

Para tener una respuesta $n \to \infty$, $\Delta x \to 0$.

$$f_{prom} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ejemplo: Encuentre el valor promedio de $f(x) = \csc^2 x$ en $[\pi/4, \pi/2]$.

$b = \frac{\pi}{2}$ $\quad a = \frac{\pi}{4}$ $\quad b - a = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ } Ancho del intervalo.

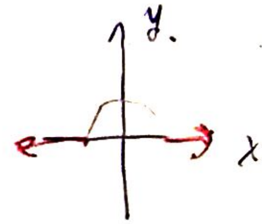
$$f_{prom} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2 x\,dx.$$

$$f_{prom} = \frac{4}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi/4} -\csc^2 x\,dx = \frac{4}{\pi}\cot x\Big]_{\pi/2}^{\pi/4} = \frac{4}{\pi}(1-0) = \frac{4}{\pi}$$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ $\quad \cot\frac{\pi}{4} = 1$ $\quad \cot\frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$

Ejercicio 6: Encuentre el valor promedio de promedio de las sigs. funciones en el intervalo dado.

a. $f(t) = \cos^4 t \sin t$ en $[0, \pi]$.



$$f_{prom} = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi} \cos^4 t\,\overbrace{\sin t\,dt}^{du}.$$

$u = \cos t$ $\quad u(\pi) = \cos\pi = -1$

$du = -\sin t\,dt.$ $\quad u(0) = \cos 0 = 1$

$$f_{prom} = \frac{-1}{\pi}\int_1^{-1} u^4\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} u^4\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^1 u^4\,du.$$

$$f_{prom} = \frac{2}{\pi}\frac{u^5}{5}\Big]_0^1 = \boxed{\frac{2}{5}\frac{1}{\pi}}$$

3.

b. $g(x) = \frac{1}{x}$ en $[e^4, e^{10}]$

$$g_{prom} = \frac{1}{e^{10}-e^4}\int_{e^4}^{e^{10}} \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{e^{10}-e^4}\ln|x|\Big]_{e^4}^{e^{10}}$$

$\ln(e^{10}) = 10 \quad \ln(e^4) = 4$

$$= \frac{1}{e^{10}-e^4}(10-4) = \frac{6}{e^{10}-e^4}$$

c. $h(x) = \frac{3}{(4+x)^{1/2}}$ en $[-4, 5]$ no es continua.

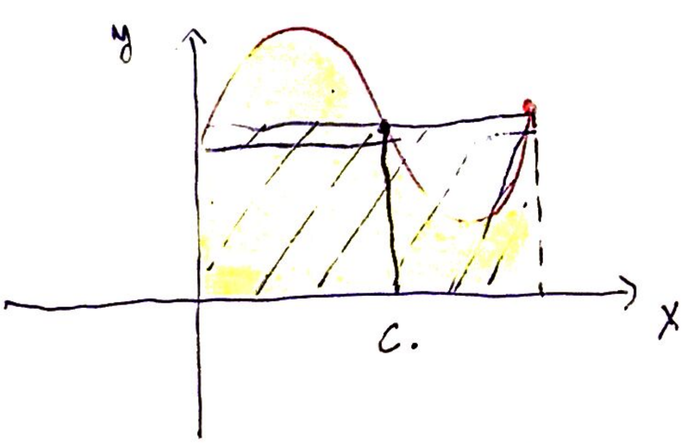
$h(-4) = \frac{3}{0}$ indefinido, integral impropia.

$$h_{prom} = \frac{3}{5-(-4)}\int_{-4}^{5}(4+x)^{-1/2}\,dx \qquad \frac{-1}{2}+1 = \frac{1}{2}.$$

$$h_{prom} = \frac{3}{9}\,2(4+x)^{1/2}\Big]_{-4}^{5} \qquad (4-4)^{1/2} = 0^{1/2} = 0$$

$$h_{prom} = \frac{6}{9}\left(9^{1/2} - \lim_{x\to -4^+}(4+x)^{1/2}\right) = \frac{6}{9}\cdot 3 = 2.$$

Relación entre el valor promedio y el área de una región



$$f_{prom} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\underbrace{f_{prom}}_{h}\,\underbrace{(b-a)}_{b.} = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Área Región}}$$

El área de la región es igual al área de un rectángulo  con altura f_{prom} y ancho $b-a$.

Teorema del Valor para Integrales.

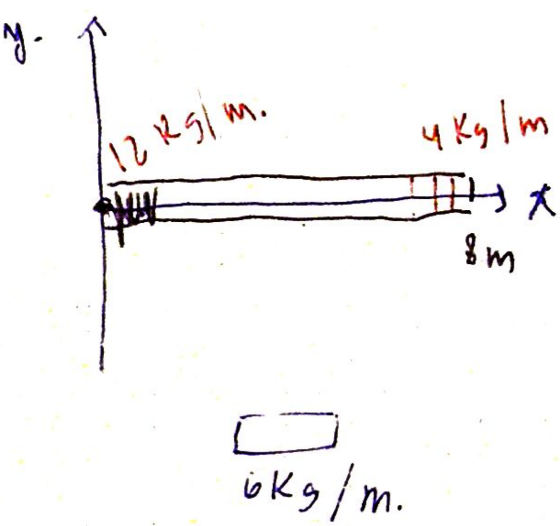
Si f es continua en $[a,b]$ entonces existe por lo menos un número c tal que

$$\boxed{f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\cdot dx}$$

c está entre a y b.

Ejercicio 2: La densidad lineal de una varilla de 8 m de longitud es $\rho = \frac{12}{\sqrt{x+1}}$ kg/m.

a. Encuentre la densidad promedio de la varilla.



$$\rho_{prom} = \frac{1}{8-0}\int_0^8 12\,(x+1)^{-1/2}\,dx$$

$$\rho_{prom} = \frac{12\cdot 2}{8}\,(x+1)^{1/2}\Big]_0^8$$

$$\rho_{prom} = 3\left(9^{1/2} - 1^{1/2}\right)$$

$$\rho_{prom} \quad 3(3-2) = 6,$$

x

b. Encuentre la posición de la varilla donde la densidad lineal es igual a la densidad promedio.

$$\rho(x) = \frac{12}{\sqrt{x+1}} \qquad \rho_{prom} = 6.$$

$$6 = \frac{12}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow \sqrt{x+1} = \frac{12}{6} = 2.$$

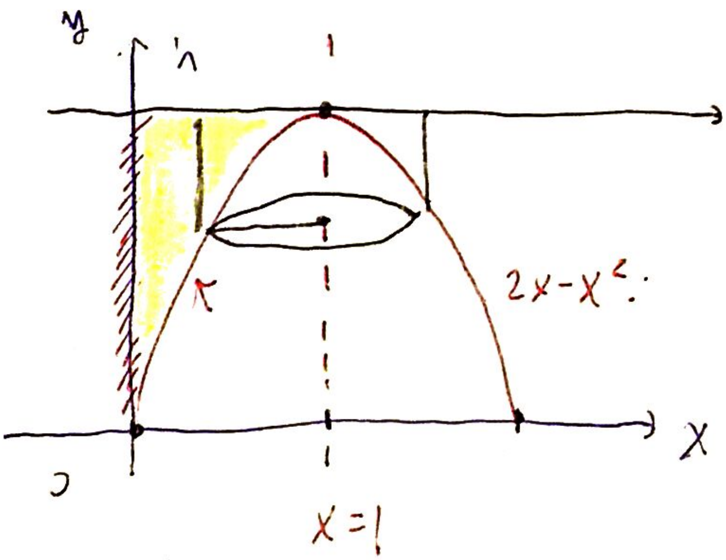
$$x+1 = 4 \Rightarrow x = 3.$$

Pág 103 Considere la región entre $y_1 = 2x - x^2$, $y_2 = 1$ & $x = 0.$

Encuentre el volumen al rotar la región respecto a la recta $x = 1.$

$y_1 = y_2$ $\quad 1 = 2x - x^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0.$

$$(x-1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1.$$



$y = 1$

Altura $h = 1 - (2x - x^2)$

Radio $r = 1 - x$

$$V = 2\pi \int_0^1 h\, r\, dx$$

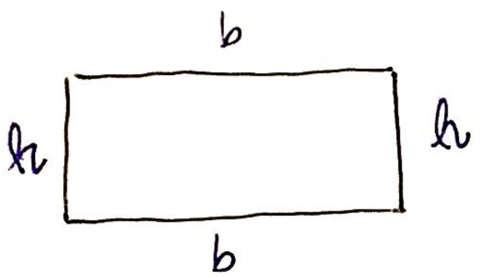
$$V = 2\pi \int_0^1 (1-x)(1-2x+x^2)\, dx$$

Capítulo 18

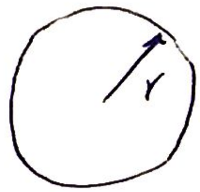
8.1 Longitud de arco

8.1 Longitud de una curva.

Geometría: longitud o perímetro



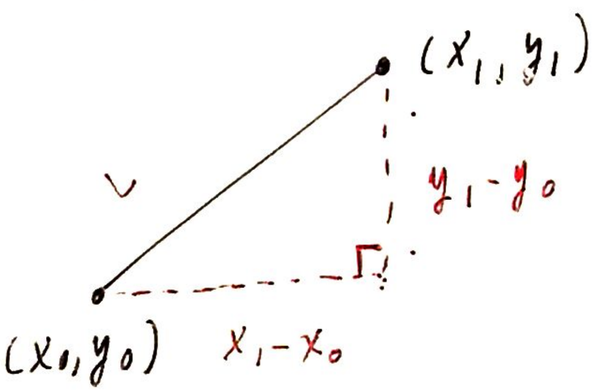
Rectángulo $L=2b+2h$



Circunferencia

$L=2\pi r$.

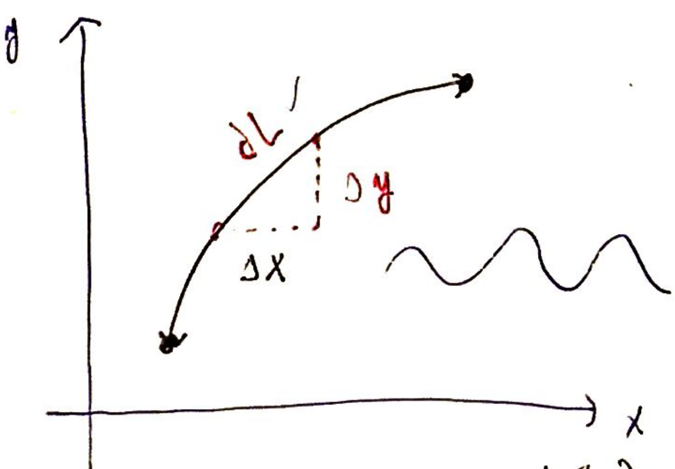
Segmento de recta



$$L=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$$

$$L=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

Longitud de una curva: longitud de arco.



curva $\mathcal{C}$: $y=f(x)$
$a\leq x\leq b$.

región $\mathcal{R}$ sólido S.

parte infinitesimal del arco.

$$dL=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

$$dx^2+dy^2=dx^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)$$

$$dL=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Longitud L: integre dL en $a\leq x\leq b$.

Longitud de Arco: $\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1+[y'(x)]^2}\, \underset{\text{dado.}}{dx.}}$ $\quad \frac{dy}{dx} = y'(x)$

Utilice sólo esta fórmula. (P 109.)

Ejemplo: Halle la longitud de la curva $\mathcal{C}: 0 \leq x \leq \frac{8}{9}$

$$y = 1 + 2x^{3/2}.$$

$$y'(x) = \frac{6}{2} x^{1/2} = 3x^{1/2}$$

$$1 + [y'(x)]^2 = 1 + (3x^{1/2})^2 = 1 + 9x.$$

Longitud de Arco: $L = \int_0^{8/9} \sqrt{1+(y')^2}\, dx$

$$L = \int_0^{8/9} \sqrt{1+9x}\, \underbrace{dx}_{du/9.}$$

$u = 1 + 9x$

$du = 9\, dx$

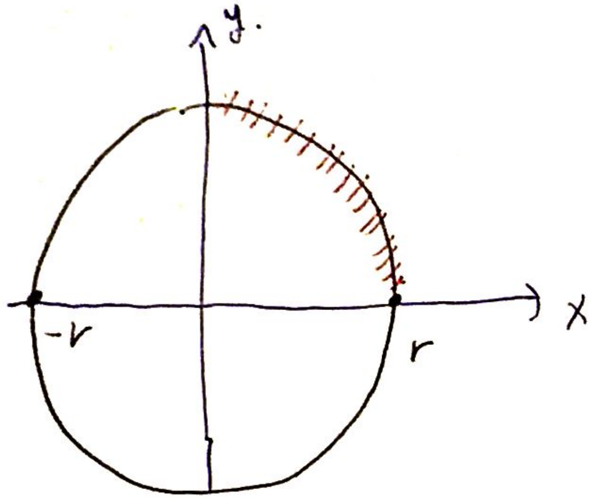
$u(8/9) = 1 + 8 = 9$

$u(0) = 1 + 0 = 1$

$$L = \int_1^9 u^{1/2} \frac{du}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9}\, u^{3/2} \Big]_1^9$$

$$L = \frac{2}{27}\left((3^2)^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{2}{27}(3^3 - 1) = \frac{2 \cdot 26}{27}.$$

Ejercicio 1: Encuentre la longitud (o perímetro) de una circunferencia de radio r.



$x^2 + y^2 = r^2$. Ec. Circunferencia.

$y^2 = r^2 - x^2$

$y = +\left(r^2 - x^2\right)^{1/2}$; ✓ Semi Circunferencia Superior.

$-r \leq x \leq r$.

$$L = 4 \int_0^r \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx.$$

$$y'(x) = \frac{1}{2}\left(r^2 - x^2\right)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$[y'(x)]^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}.$$

$$1 + [y'(x)]^2 = \frac{1}{1} + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

$$L = 4 \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 4r \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \qquad \sin^{-1}\left(\frac{x}{r}\right)$$

$$L = 4r \sin^{-1}\left(\frac{x}{r}\right)\Bigg]_0^r = 4r\left(\underbrace{\sin^{-1}(1)}_{\pi/2} - \underbrace{\sin^{-1}(0)}_{0}\right)$$

$$= 4r\,\frac{\pi}{2} = 2\pi r.$$

Indefine en $x = r$, integral impropia convergente.

Ejercicio 2: p 101. Un cable telefónico cuelga entre dos postes con posiciones horizontales en $x = \pm 25$. El cable toma la forma de una catenaria con ecuación

$$y = -5 + 25\cosh\left(\frac{x}{25}\right). \qquad \sqrt{1+(y')^2}$$

Halle la longitud del cable.

$$y'(x) = 25\sinh\left(\frac{x}{25}\right)\frac{1}{25} = \sinh\left(\frac{x}{25}\right)$$

$$1+[y'(x)]^2 = 1+\sinh^2\left(\frac{x}{25}\right) = \cosh^2\left(\frac{x}{25}\right)$$

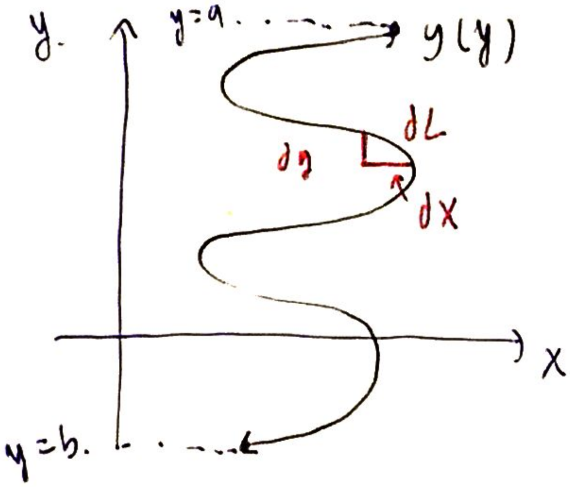
$$L = \int_{-25}^{25}\sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_{-25}^{25}\sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{25}\right)}\,dx$$

$$L = \int_{-25}^{25}\cosh\left(\frac{x}{25}\right)dx = 2\int_0^{25}\cosh\left(\frac{x}{25}\right)dx$$

$$L = 2\cdot 25\sinh\left(\frac{x}{25}\right)\Big]_0^{25} = 50(\sinh 1 - \sinh 0)$$

$$= 50\sinh 1 \approx 58.76.$$

Integración en el eje-y



curva $\mathcal{C}$: $a \leq y \leq b$, $x = g(y)$

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\ dy.$$

$$L = \int_a^b \sqrt{[g'(y)]^2 + 1}\ dy.$$

Ejercicio 3: Encuentre la longitud de arco para las curvas dadas. (P. 112).

a. $\mathcal{C}_1$: $x = \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2y}$ $\quad 1 \leq y \leq 2.$

$y^2 y^{-2} = 1$

$$x'(y) = \frac{3y^2}{6} - \frac{1}{2y^2} = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y^{-2} = \frac{1}{2}(y^2 - y^{-2})$$

$$[x'(y)]^2 = \frac{1}{4}(y^2 - y^{-2})^2 = \frac{1}{4}(y^4 - 2 + y^{-4})$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$1 + [x'(y)]^2 = 1 + \frac{1}{4}(y^4 - 2 + y^{-4})$$

$$= \frac{1}{4}(4 + y^4 - 2 + y^{-4})$$

$$= \frac{1}{4}(y^4 + 2 + y^{-4}) = \frac{1}{4}(y^2 + y^{-2})^2.$$

$$a^2 + 2a + 1 = (a+1)(a+1).$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{4}\left(y^2+y^{-2}\right)^2}\,dy = \sqrt{\frac{1}{4}}\int_1^2 \left(y^2+y^{-2}\right)dy.$$

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{1}{y}\Big]_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{1}\right) = \frac{17}{6\cdot 2}.$$

b. C_2 $\quad y = \ln(\csc\theta)$, $\quad \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$

$$L = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{1+(y')^2}\,d\theta.$$

$$y' = \frac{-\csc\theta\cot\theta}{\csc\theta} = -\cot\theta.$$

$$1+(y')^2 = 1+\cot^2\theta = \csc^2\theta.$$

$$L = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{\csc^2\theta}\,d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \csc\theta\,d\theta.$$

$$L = -\ln|\csc\theta+\cot\theta|\Big]_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$L = -\ln|\overset{1}{\cancel{\csc}}\,\pi/2 + \overset{0}{\cancel{\cot}}\,\pi/2| + \ln|\overset{2}{\cancel{\csc}}\,\pi/6 + \overset{\sqrt{3}}{\cancel{\cot}}\,\pi/6|.$$

$$\frac{1}{\sin\pi/2} = 1 \qquad \frac{\cos\pi/2}{\sin\pi/2} = 0 \qquad \frac{1}{\sin\pi/6} = 2. \qquad \frac{\cos\pi/6}{\sin\pi/6} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2}.$$

$$L = -\ln(1) + \ln(2+\sqrt{3})$$

$$L = \ln(2+\sqrt{3}).$$

Función longitud de arco: $a \leq x \leq t$.

$$S(t) = \int_a^t \sqrt{1 + [y']^2}\, dx$$

$$y = \ln(\sin t), \quad \frac{\pi}{2} \leq \cancel{t} \leq x.$$

$$L = \int_{\pi/2}^{x} \sqrt{1 + (y')^2}\, dt.$$

$$y' = \frac{-\cos t}{\sin t} = -\cot(t) \qquad 1 + (y')^2 = 1 + \cot^2(t)$$

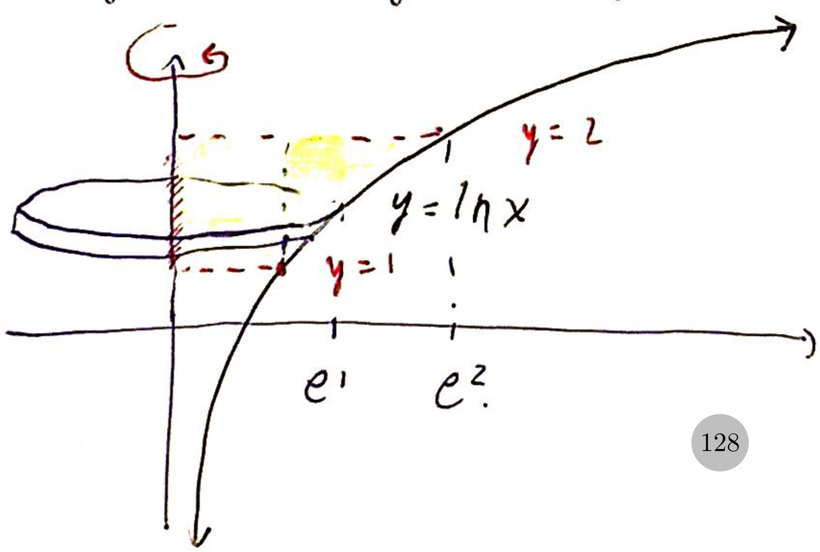
$$\csc^2(t).$$

$$L = \int_{\pi/2}^{x} \sqrt{\csc^2(t)}\, dt = \int_{\pi/2}^{x} \csc t\, dt.$$

$$L = -\ln|\csc t + \cot t|\Big]_{\pi/2}^{x} = -\ln|\csc x + \cot x| + \ln(1).$$

Laboratorio 8. Problema 2:

Región $1 \leq y \leq 2$, $y = \ln x$ & $x = 0$.



$y = \ln x$ DISCOS.

$$V = \pi \int_1^2 x^2\, dy.$$

$$x = e^y$$

$$V = \pi \int_1^2 e^{2y}\, dy.$$

Capítulo 19

8.5 Probabilidad

a) Distribución uniforme

b) Distribución exponencial

c) Distribución normal

1.

Simulacro lunes 5 oct. 2:30 PM. CES.
1-2:30 PM Resol Simulacro.

Parcial lunes 19 oct 2:30 PM. CES.
1-2:30 PM Resol. Dudas.

7.6 Integrales Impropias - 8.5 Probabilidad.
7.3 Integración Fracciones Parciales.

8.5 Probabilidad (p. 123).

Una variable aleatoria puede ser:

Discreta: el número de eventos es contable como el lanzamiento de una moneda, un dado, los números de la lotería.

Continua: mediciones como el peso, estatura, volumen. eventos no es contable o es un número real.

Probabilidad de que ocurra a. $P(X=a) = \dfrac{\#\text{ veces que ocurre } a}{\#\text{ total de eventos.}}$

1 dado, 6 eventos posibles. $P(X = \text{par}). = \dfrac{3}{6} = 50\%$.

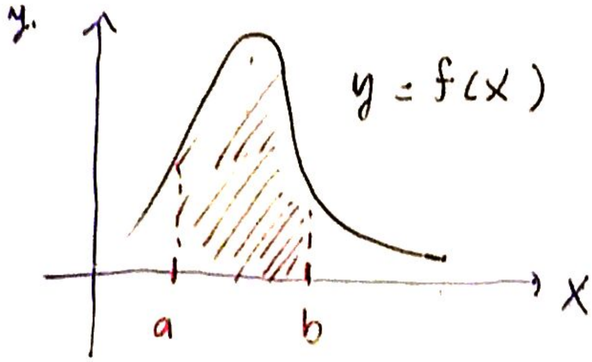
Probabilidad $P(X=a_1, a_2, \dots a_n) = \sum_{i=1}^{n} P(X_i).$

Var. Discreta

Variable continua: ¿Cuál es la probabilidad de que x ocurra entre a y b?

$$\boxed{P(a \leq x \leq b) \doteq \int_a^b f(x)\, dx}$$

encuentre el área bajo la curva de $y = f(x)$.



$f(x)$ es una función de densidad de probabilidad.

Más Alta del 100% → 1

Más Baja del 0% → 0.

Condiciones para que $f(x)$ sea función de densidad de probabilidad.

$f(x) \geq 0$ en todo su dominio $-\infty < x < \infty$.

No negatividad.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$ Probabilidad 1.

Distribuciones de Probabilidad comunes.

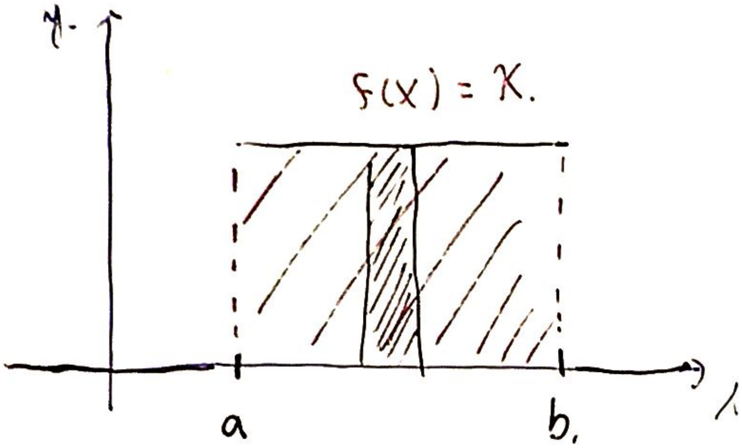
a. Distribución Uniforme.

b. Distribución Exponencial.

c. Distribución Normal

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

1. Distribución Uniforme.



Área Rectángulo

base = b - a.

altura = K.

Área = K(b-a) = 1

$K = \frac{1}{b-a}$

100%.

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b. \\ 0 & x < a \text{ o } x > b. \end{cases}$$

$U(-\infty) = 0$

$U(\infty) = 0.$

Si es función de densidad de probabilidad porque:

$U(x) \geq 0$ en $-\infty \le x \le \infty$. ✓

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(x)\,dx = 1 \qquad \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\,x\Big]_a^b$$

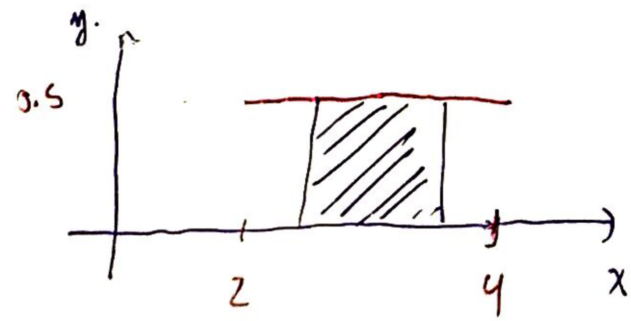
$$= \frac{1}{b-a}(b-a) = 1$$

Ejercicio 1: Un contenedor tiene mercancía cuyo peso tiene una distribución uniforme entre 2 y 4 tons.

$$U(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a \leq x \leq b.$$

a = número mínimo
b = número máximo.

a. Calcule la probabilidad de que un contenedor pese entre 2.5 y 3.5 toneladas.



$$U(x) = \frac{1}{2} \qquad 2 \leq x \leq 4$$

$$P(2.5 \leq x \leq 3.5) = \int_{2.5}^{3.5} U(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{2.5}^{3.5} dx = \frac{1}{2}\,x\Big]_{2.5}^{3.5} = \frac{1}{2}(1) = 50\%$$

b. Calcule la probabilidad de que un contenedor pese más de 1 tonelada.

$$P(x \geq 1) = \int_{1}^{\infty} U(x)\,dx = \overbrace{\cancel{\int_{1}^{2} U(x)\,dx}}^{0} + \int_{2}^{4} \frac{1}{2}\,dx + \overbrace{\cancel{\int_{4}^{\infty} U(x)\,dx}}^{0}$$

$$P(x \geq 1) = \int_{2}^{4} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}(4-2) = \frac{2}{2} = 100\%.$$

todos los contenedores pesan más de 2 toneladas.

c) Distribución Exponencial. 5.

$$f(t) = \frac{1}{\mu} e^{-t/\mu} \qquad 0 \leq t < \infty.$$

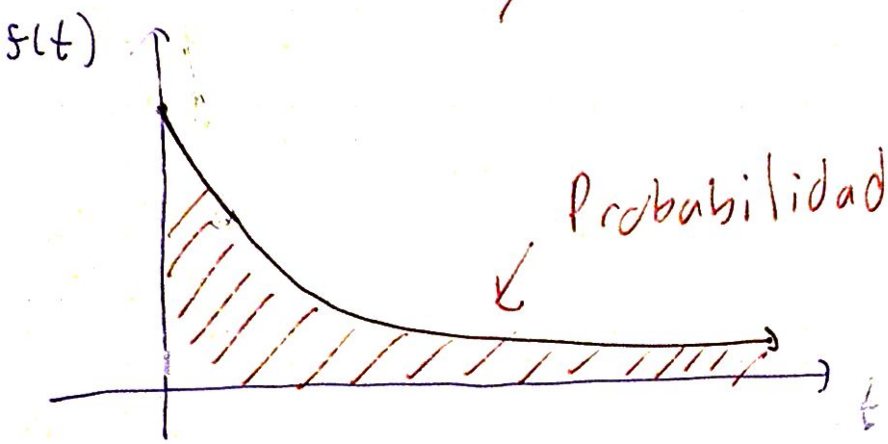
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{\mu} e^{-t/\mu}\,dt. \qquad u = -t/\mu \quad du = -dt/\mu.$$

$\mu =$ mu.

$$= \int_0^{-\infty} -e^u\,du. = -e^u \Big]_0^{-\infty}$$

$e^{-\infty} \to 0$

$$= \lim_{t \to -\infty} \cancel{-e^t} + e^0 = 1$$



Probabilidad 100%
A'rea igual a 1

Capítulo 20

8.5 Probabilidad, media, varianza, desviación estándar, mediana

8.5 Probabilidad

Variable continua, función de densidad de probabilidad $f(x)$

i. $f(x) \geq 0$ en $-\infty \leq x \leq \infty$.

ii $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ 100% probabilidad.

Probabilidad de que x ocurra entre a y b.

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

probabilidad.

Distribución Exponencial. $f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}$. $x \geq 0$.

μ = media.

Ejercicio 2: El tiempo de espera promedio para recibir una orden a domicilio de comida es de 0.5 h y tiene una distribución exponencial.

a. Encuentre la probabilidad de que la comida se reciba después de 0.5 hora.

$\frac{1}{0.5} = 2.$

$$\mu = 0.5 \qquad f(x) = \frac{1}{0.5} e^{-x/0.5} = 2e^{-2x}$$

$$P(X \geq 0.5) = \int_{0.5}^{\infty} e^{-2x}\, \overbrace{2\,dx}^{-du} = -e^{-2x}\Big]_{0.5}^{\infty}$$

$u = -2x \quad du = -2dx$

$$P(X \geq 0.5) = -\lim_{x \to \infty} e^{-2x} + e^{-2(0.5)} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$e^{-\infty} \to 0$

36.79 %.

Probabilidad Alta.

b. Encuentre la probabilidad de que la comida se reciba en menos de 15 min ó 0.25 horas.

$$P(X \leq 0.25) = \int_{-\infty}^{0.25} f(x)\,dx = \int_{0}^{0.25} e^{-2x}(2dx)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x \geq 0. \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

$$-e^{-2x}\Big]_0^{0.25} = -e^{-2(0.25)} + e^{-0}$$
$$= 1 - e^{-0.5}$$
$$\approx 39.34\%.$$

c. El servicio a domicilio se vuelve más eficiente y ahora la media para entregar el producto es de 20 min. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto se entregue después de 30 minutos. ó 0.5 h

$$\mu = 20 \text{ min} = \frac{20}{60} \text{ hr} = \frac{1}{3} \text{ h} \qquad f(x) = 3e^{-3x}$$

$$P(X \geq 0.5) = \int_{0.5}^{\infty} e^{-3x}(3dx) = -e^{-3x}\Big]_{0.5}^{\infty}$$

$$= -\lim_{x\to\infty} \cancel{e^{-3x}}^{\,0} + e^{-3(0.5)}$$

$e^{-\infty} \to 0$

$$= e^{-1.5} \approx 0.2231 \text{ ó } 22.31\%$$

Media o Valor Esperado. (μ)

Variable discreta: media es un promedio ponderado.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & & p(x_n) \end{array} \rightarrow \text{pesos, frecuencias}$$

$$\mu = x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \cdots x_n p(x_n)$$

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p(x_i) \qquad p(a \leq x \leq b) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)$$

Si la variable es continua, μ se obtiene al integrar $x\,f(x)$.

$$\boxed{\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx}$$

$f(x)$ uniforme
exponencial
normal.

Varianza: Suma de las diferencias al cuadrado de cada x_i respecto a la media μ.

Discreta. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \, p(x_i) = \sigma^2$

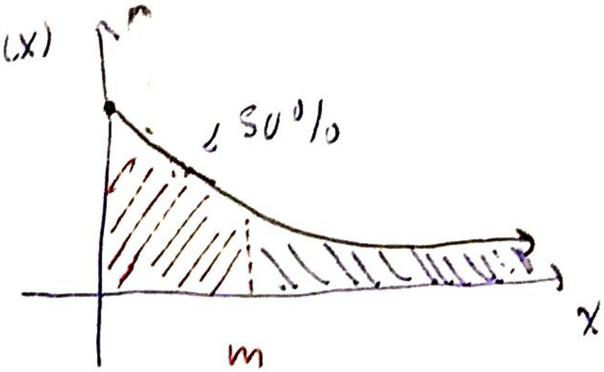
σ sigma S
μ mu. $\bar{X}$

continua: $\sigma^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx$

Desviación Estándar: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\text{varianza}}$

Mediana: el número m para el cual la probabilidad acumulada es igual al 50% ó a 0.5.

$$\int_{-\infty}^{m} f(x)\,dx = 0.5$$



Ejercicio 3: Considere la función exponencial

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}, \quad x \geq 0. \qquad \text{parámetro } \mu.$$

a. Encuentre la media de $f(x)$. media vs. mediana.

$$\int_0^\infty x f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{x}{\mu} e^{-x/\mu}\,dx = uv - \int v\,du.$$

$u = x$

$du = dx$

$dv = \dfrac{e^{-x/\mu}}{\mu}\,dx$

$v = -e^{-x/\mu}$

$$\int \frac{x}{\mu} e^{-x/\mu}\,dx = -xe^{-x/\mu} + \int e^{-x/\mu}\,dx.$$

$$= -xe^{-x/\mu} - \mu e^{-x/\mu} + C. \qquad (x+1)e^{-x/\mu}.$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{\mu} e^{-x/\mu}\,dx = -\lim_{x\to\infty} xe^{-x/\mu} - \lim_{x\to\infty} \mu e^{-x/\mu} \qquad e^{-\infty} \to 0$$

$$+\, 0 \cdot e^{-0} + \mu e^{-0}$$

$$= \mu - \lim_{x\to\infty} xe^{-x/\mu}. \qquad \infty \cdot 0$$

Regla LH $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x/\mu}} \underset{LH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\mu}e^{x/\mu}} = 0$

Media distribución exponencial: $\int_0^\infty \frac{x}{\mu} e^{-x/\mu}\, dx = \mu.$

b. Encuentre la mediana de $f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}.$

Encuentre m tal que $\int_0^m f(x)\,dx = 0.5.$

$$\int_0^m \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}\, dx = -e^{-x/\mu}\Big]_0^m = \boxed{-e^{-m/\mu} + 1}$$

$$-e^{-m/\mu} + 1 = 0.5 \qquad \text{Incógnita } m.$$

$$+e^{-m/\mu} = +0.5$$

$$-m/\mu = \ln(0.5)$$

$$-m = \mu \ln(0.5)$$

$$m = -\ln(0.5)\,\mu. \approx 0.70\mu.$$

Integrar $\int (x-\mu)^2 e^{-x/\mu}\, d\mu. = \sigma^2$ $\mu = 1.$

Ejercicio 4: Encuentre la media, mediana, varianza y desviación estándar de la distribución uniforme.

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b. \quad \text{para } b = 6 \text{ y } a = 0.$$

Específico $f(x) = \frac{1}{6} \quad 0 \leq X \leq 6.$

Probabilidades $P(X_0 \leq X \leq X_1) = \int_{X_0}^{X_1} \frac{1}{6}\,dX$

Media: $\mu = \int_0^6 x\, f(x) = \int_0^6 \frac{x}{6}\,dx = \frac{1}{6}\,\frac{x^2}{2}\Big]_0^6 = \frac{1}{12}\,36 = 3.$

Mediana $\int_0^m f(x)\,dx = 0.5.$

$$\int_0^m \frac{1}{6}\,dX = \frac{X}{6}\Big]_0^m = \frac{m}{6} = 0.5.$$

$$m = 6(0.5) = 3.$$

Media = Mediana $= \frac{1}{2}(b+a).$

Varianza y Desviación Estándar. $\mu = 3 \quad f(x) = \frac{1}{6}.$

$$\sigma^2 = \int_0^6 (X-\mu)^2 f(x)\,dx = \frac{1}{6}\int_0^6 (X-\overset{u}{3})^2\,\underbrace{dX}_{du}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}(X-3)^3\Big]_0^6$$

$$= \frac{1}{18}\left(3^3 - (-3)^3\right)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{18}(27+27) = \frac{54}{18} = 3.$$

Desviación Estándar. $\sigma = \sqrt{3}$.

Laboratorio 9:

$$f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad f(x) = \frac{9}{x^2}.$$

$$1 \leq x \leq 3.$$

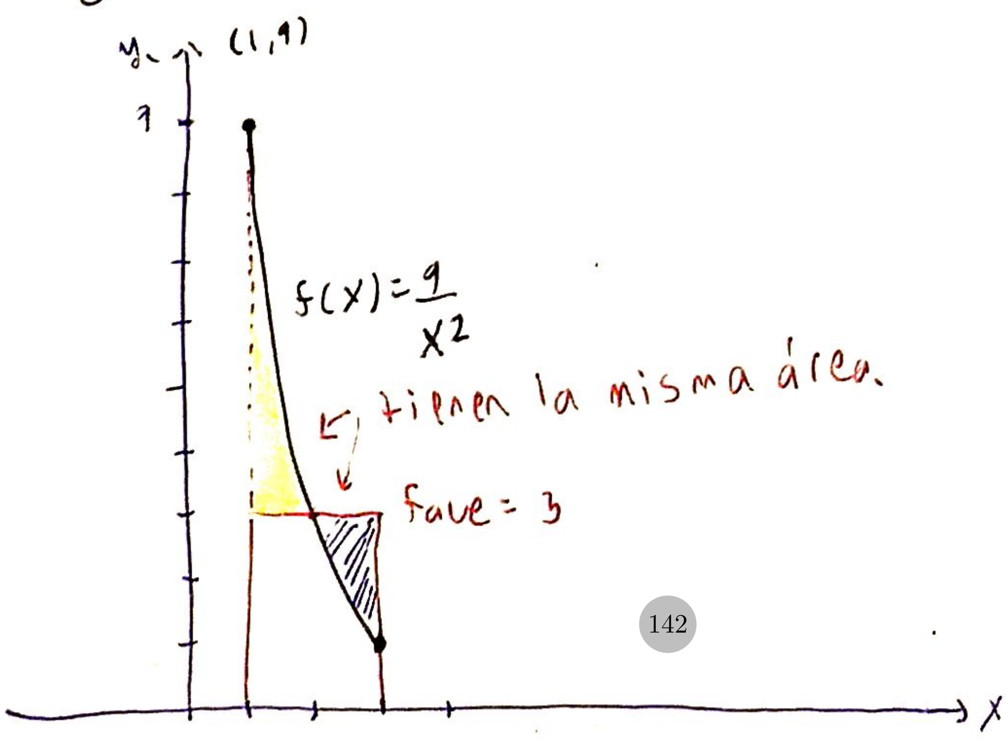
a) $$f_{ave} = \frac{1}{2}\int_1^3 9x^{-2}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{9}{x}\Big]_1^3$$

$$= -\frac{1}{2}3 + \frac{1}{2}9 = \frac{6}{2} = 3.$$

b) $f(c) = f_{ave}$ resuelva para c.

$$\frac{9}{c^2} = 3. \Rightarrow 3 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{3} \approx 1.73$$

c).



Capítulo 21

7.4 Fracciones parciales
Caso 1: Factores lineales distintos
Caso 2: Factores lineales repetidos

1.4 Fracciones Parciales (P 64).

Función Racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

P y Q son polinomios de grado m y n.

Factorice $Q(x) = (x+a)(x+b)(x+c)$

$$\underbrace{\frac{P(x)}{(x+a)(x+b)(x+c)}}_{\text{No se puede integrar}} = \underbrace{\frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c}.}_{\text{si se pueden}}$$

A, B y C son constantes.

$$\int \frac{1}{x+x_0}\,dx = \ln|x+x_0| + C.$$

simplifique la función racional en fracciones más simples (fracciones parciales) y luego utilizar reglas de integración conocidas.

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

1. Objetivo: Encuentre los coeficientes A, B, ... C.

Adicional

2. Condición: grado $P(x)$ < grado $Q(x)$

$$\frac{6}{x^2-9} \qquad \frac{9z}{2z^2+7z-4}, \qquad \frac{x^2+1}{x^4+x^2}$$

Utilice la división larga si $P(x)$ tiene un grado igual o mayor a $Q(x)$.

$$\frac{x^2+1}{x^2-9}, \cdots \quad \frac{x^3+x^2+1}{x^2+4}, \cdots;$$

Polinomio: $(x-3)(x-2) = x^2-5x+6.$ Factores Lineal

x^2+4 Factores Cuadráticos.

$(x-3)^2(x^2+4)^2$ Factores Repetidos.

Caso 1: Factores Lineales Distintos.

Caso 2: Factores Lineales Repetidos.

Caso 3: Factores Cuadráticos Distintos

Caso 4: Factores Cuadráticos Repetidos.

$x^3-x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1).$

Ejercicio 1: $\displaystyle\int \frac{9z}{2z^2+7z-4}\,dz.$ $u \neq 2z^2+7z-4.$

p. 65

Factorice el denominador. $2z^2+7z-4. = (2z-1)(z+4)$

$$\begin{array}{cc} 2z & -1 \\ z & 4 \end{array}$$

Los ceros del denominador. $2z-1=0$, $z+4=0$ $\boxed{\begin{array}{l} z=1/2. \\ z=-4 \end{array}}$

$$\frac{9z}{(2z-1)(z+4)} = \frac{A}{2z-1} + \frac{B}{z+4} = \frac{A(z+4)+B(2z-1)}{(2z-1)(z+4)}.$$

Encuentre A y B. multiplique por $(2z-1)(z+4)$

$$\underline{A}(z+4) + \underline{B}(2z-1) = 9z + 0.$$

$$\underline{Az} + \underline{4A} + \underline{2Bz} - \underline{B} = \underline{9z} + 0.$$

Igualando términos del mismo grado.

$$\begin{aligned} z:&\ (A+2B) = 9 &\Rightarrow&\ A + 2\cdot 4A = 9A = 9 &\Rightarrow&\ A = 1 \\ 0:&\ 4A - B = 0 &\Rightarrow&\ B = 4A &\Rightarrow&\ B = 4. \end{aligned}$$

Atajo: evalúe la ecuación en los valores de z donde el denominador se hace cero. -4 y $1/2$

$$A(z+4) + B(2z-1) = 9z.$$

$$\begin{aligned} z=-4:&\quad 0 - 9B = -36. &\Rightarrow&\quad B = 4. \\ z=1/2:&\quad 4.5A + 0 = 4.5 &\Rightarrow&\quad A = 1 \end{aligned}$$

finalmente, integre.

$$\int \frac{9z}{(2z-1)(z+4)}\,dz = \int \frac{dz}{2z-1} + \int \frac{4\,dz}{z+4}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\ln|2z-1| + 4\ln|z+4| + C.}$$

Ejercicio 2: Evalúe las sigs. integrales (P 65)

a) $\int \frac{5x+13}{x^2+5x+6}\,dx$ $\qquad x^2+5x+6 = (x+3)(x+2)$

$x=-3,-2$ } números clave.

$$\frac{5x+13}{\underbrace{x^2+5x+6}_{(x+3)(x+2)}} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+2)}$$

Factores lineales distintos.

Multiplique por $(x+3)(x+2)$

$$5x+13 = A(x+2) + B(x+3)$$

$x=-3: \quad -2 = -A + 0 \Rightarrow A=2.$

$x=-2: \quad 3 = 0 + B \Rightarrow B=3.$

$$\int \frac{5x+13}{(x+2)(x+3)}\,dx = \int \frac{2}{x+3}\,dx + 3\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= 2\ln|x+3| + 3\ln|x+2| + C.$$

b) $\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx$ $\qquad x^3-x = x(x^2-1)$

$= x(x+1)(x-1)$

3 factores lineales distintos, 3 fracciones parciales.

$$\frac{x^2+2x-1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

Multiplique por $x^3 - x = x(x^2-1)$

$$x^2+2x-1 = A(x^2-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)$$

El denominador tiene ceros en $x = 0, 1, -1$.

$x=0: \quad -1 = -A + 0 + 0 \Rightarrow A = 1$

$x=1: \quad 2 = 0 + 0 + 2C \Rightarrow C = 1$

$x=-1: \quad -2 = 0 - B(-2) + 0 \Rightarrow B = \frac{-2}{2} = -1$

$$\int \frac{x^2+2x-1}{x(x-1)(x+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x-1}$$

$$= \ln|x| - \ln|x+1| + \ln|x-1| + C.$$

Caso 2: Factores Lineales Repetidos

$$\frac{P(x)}{(x+b)^n} = \frac{A_1}{(x+b)} + \frac{A_2}{(x+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x+b)^n}$$

n factores cada uno con su respectiva potencia el valor de los n coeficientes $A_1, \dots, A_n$.

Ejercicio 5: Evalúe.

Repetido 2 veces.

u. $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x+3)^2}\,dx \qquad \frac{x+2}{(x+3)^2} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+3)^2}$

Multiplique por $(x+3)^2$:

$$(x+2) = A(x+3) + B.$$

Agrupe términos.

$$x + 2 = Ax + 3A + B$$

$$\int u^{-2}\,du = \frac{u^{-1}}{-1}$$

$$x = Ax \Rightarrow A = x/x = 1$$

$$2 = 3A + B. \Rightarrow 2 = 3 + B \Rightarrow B = -1.$$

$$\int \frac{x+2}{(x+3)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)}\,dx - 1\int (x+3)^{-2}\,dx$$

$$= \ln|x+3| - \frac{1}{-1}(x+3)^{-1} + C.$$

$$= \ln|x+3| + \frac{1}{(x+3)} + C.$$

Capítulo 22

7.4 Fracciones parciales
Caso 3: Factores cuadráticos irreducibles
Caso 4: Factores cuadráticos repetidos

Fracciones Parciales.

Factores Lineales.

$$\frac{P(x)}{(x+2)(x+3)(x+4)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+4} + \frac{D}{(x+4)^2}$$

Encuentre A, B, C y D.

Ejemplo: $\int \frac{x^2+1}{(x+2)(x+1)^2}\,dx$ El Denominador es cero en -2 y -1

$$\frac{x^2+1}{(x+2)(x+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$x^2+1 = A(x+1)^2 + B(x+2)(x+1) + C(x+2)$$

$x=-1$: $2 = 0 + 0 + C \Rightarrow C = 2.$

$x=-2$: $5 = A + 0 + 0 \Rightarrow A = 5.$

$x=0$: $1 = A + 2B + 2C$ $\quad 2B = -8$

$2B = 1 - A - 2C = -4 - 4 = -8 \Rightarrow B = -4.$

$$\int \frac{x^2+1}{(x+2)(x+1)^2}\,dx = \int \frac{5}{x+2}\,dx - 4\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$(x+1)^{-2}$

$$= 5\ln|x+2| - 4\ln|x+1| - \frac{2}{(x+1)} + C$$

Caso 3: $Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreducibles (p. 69).

x^2+4 y x^2+x+1

no se pueden factorizar, no tienen interceptos con el eje-x.

$x^2+4=0 \qquad x^2=-4$ no tiene solución real.

$x^2+x+1=0$ Ec. $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\sqrt{-3}$ es imaginario $\qquad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$ no tiene soluciones reales

$$\frac{P(x)}{(x^2+4)(x^2+x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

Encuentre cuatro coeficientes.

$$\int\frac{A}{x^2+4}\,dx=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C \qquad \int\frac{Bx}{x^2+4}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C.$$

Ejercicio 6: Integre las sigs. funciones.

b. $\int \frac{2x^2-x-4}{x^3+4x}\,dx$ $\quad u \neq x^3+4x$

$du \neq (3x^2+4)\,dx$

$x^3+4x = x(x^2+4)$ $\quad$ cero en $x=0$.

$$\frac{2x^2-x-4}{x^3+4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \quad * \, x(x^2+4)$$

$$2x^2 - x - 4 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx.$$

Agrupe términos y resuelva el sig sistema

$$\begin{cases} A + B = 2. \Rightarrow B = 2 - A = 3. \\ C = -1 \\ 4A = -4 \Rightarrow A = -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{2x^2-x-4}{x^3+4x}\,dx = \int \frac{-dx}{x} + \int \frac{3x-1}{x^2+4}\,dx$$

$$= -\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{x}{x^2+4}\,dx - 1\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= -\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x^2+4| - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

$\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C$

$= \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C$

$u = x^2+a^2$

$du = 2x\,dx$

$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$

$x = a \cdot \tan\theta.$

1. $\int \frac{x+3}{x^2+2x+10}\,dx \qquad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2}$

Factor cuadrático irreducible.

$$\frac{x+3}{x^2+2x+10} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+10}.$$ Ya es una fracción parcial.

$$x+3 = Ax+B. \qquad A=1, \quad B=3$$

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+1+9}\,dx = \int \frac{x+3}{(x+1)^2+9}\,dx$$

$u = x+1 \qquad du = 1 \cdot dx$

$u+2 = x+3.$

$$\int \frac{u+2}{u^2+9}\,du. = \int \frac{u}{u^2+9}\,du + 2\int \frac{du}{u^2+3^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u^2+9) + \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{u}{3}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln((x+1)^2+9) + \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+3}{3}\right) + C.$$

Caso 4: Factores Cuadráticos Repetidos (P. 70)

$$\frac{P(x)}{(x^2+a^2)^3} = \frac{Ax+B}{(x^2+a^2)} + \frac{Cx+D}{(x^2+a^2)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+a^2)^3}.$$

Encuentre los A, B, C, D, E y F.

$$\frac{P(x)}{x^3(x^2+a^2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+a^2} + \frac{Fx+G}{(x^2+a^2)^2}$$

Ejercicio 7: Integre $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+4)^2}\,dx$

$$(x^2+1)^2 = x^4+2x^2+1 = (x^2+1)^2$$

$$\frac{1}{x(x^2+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+4)} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}$$

1 grado menos

Observación

$(x-3)(x+5)$ → $\dfrac{A}{x-9}$

Lineales

cuadráticos.

x^2+10

x^2+x+9

$\dfrac{Ax+B}{x^2+10}$.

$$1 = A(x^2+4)^2 + (Bx+C)(x^3+4x) + (Dx+E)x$$

$$1 = A(x^4+8x^2+16) + Bx^4 + Cx^3 + 4Bx^2 + 4Cx + Dx^2 + Ex.$$

5 incógnitas y 5 ecuaciones. $1+0x+0x^2+0x^3$

Grado 4:	$A+B=0.$	$\Rightarrow$	$B=-1/16$
Grado 3:	$C=0$	✓	$C=0$
Grado 2:	$8A+4B+D=0$		$D=-4B-8A.=\dfrac{4-8}{16}$
Grado 1:	$4C+E=0$	$\Rightarrow$	$E=-4C=0$
Constantes:	$16A=1$	✓	$A=1/16.$

$A=1/16,\ B=-1/16,\ C=0,\ D=-1/4,\ E=0$

$$\frac{1}{x(x^2+4)^2} = \frac{1}{16}\frac{1}{x} - \frac{1}{16}\frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+4)^2}$$

6.

$$\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2} = \frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{32}\ln(x^2+4) + \frac{1}{8}\frac{1}{(x^2+4)} + C.$$

$$-\frac{1}{4}\int \underbrace{(x^2+4)}_{u}{}^{-2}\underbrace{x\,dx}_{du/2} = \frac{1}{4\cdot 2}(x^2+4)^{-1}$$

División Larga.

$$\int \frac{x^4+1}{x-1}\,dx \qquad\qquad \int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt.$$

Antes de utilizar fracciones, el grado del numerador debe ser menor al del denominador.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3 + x^2 + x + 1 \quad \} \text{ cociente.} \\
\hline
x-1 & x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \\
\text{denominador.} & -x^4 + x^3 \\
 & \quad x^3 \\
 & \quad -x^3 + x^2 \\
 & \qquad x^2 \\
 & \qquad -x^2 + x \\
 & \qquad\quad x + 1 \\
 & \qquad\quad -x + 1 \\
 & \qquad\qquad 2 \quad \} R(x)
\end{array}$$

división sintética

$$\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2
\end{array}$$

residuo

$$\int \frac{x^4+1}{x-1}\,dx = \int x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{2}{x-1}\,dx$$

7

$$\int \frac{x^4+1}{x-1} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + C.$$

b. $\int \frac{t^2}{t^2-1}\, dt. = \int 1 + \frac{1}{t^2-1}\, dt.$

$$t^2-1 \,\overline{\smash{)}\, t^2}\quad 1$$

$$-t^2+1$$

$$+1.$$

$$= t + \int \frac{0.5}{t-1}\, dt + \int \frac{0.5}{t+1}\, dt.$$

$$t + \frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t+1| + C.$$

$$1 = A(t+1) + B(t-1)$$

$t=1$: $1 = 2A + 0$ $\rightarrow$ $A = 1/2$

$t=-1$: $1 = 0 - 2B.$ $B = -1/2.$

polynom