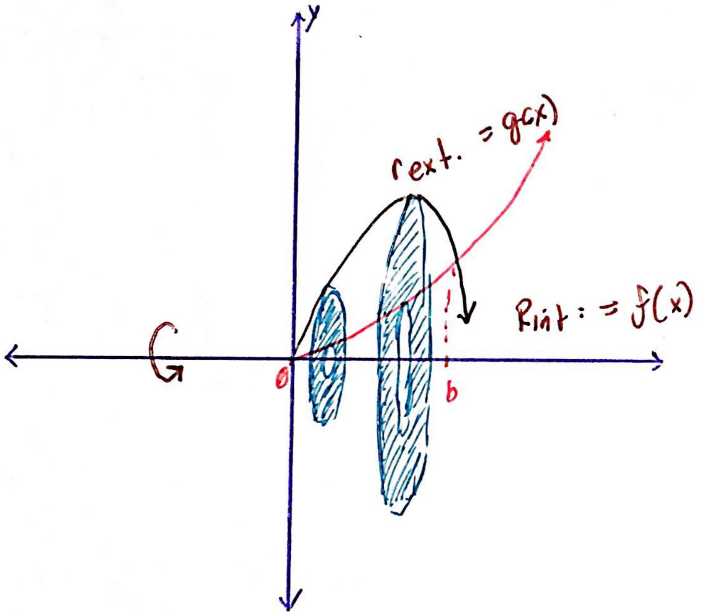
2019-09-17

Continuación de Volúmenes

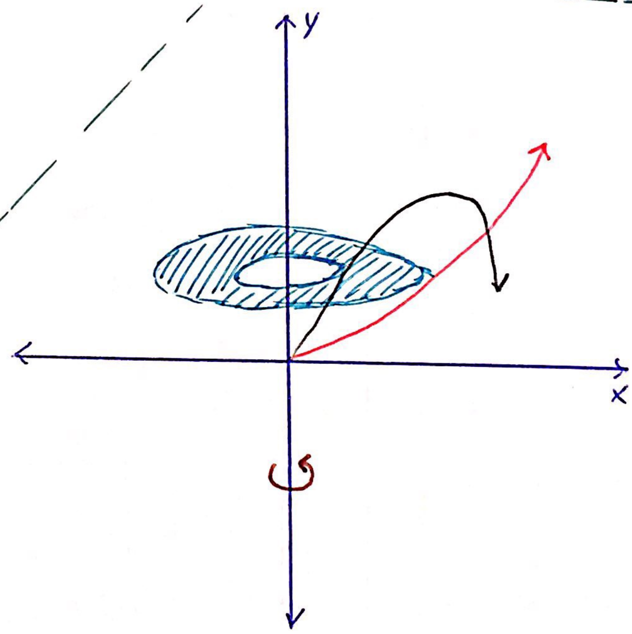
1. Región
2. Identificar la recta de rotación
3. Identificar las funciones de radio para cada anillo
4. Escoger la variable de integración.



El reflejo en eje-x

$$A = \pi r_{ext.}^2 - \pi r_{int.}^2$$

$$A = \pi \int_0^b r^2_{ext} - r^2_{int} \, dx$$



El reflejo en eje-y

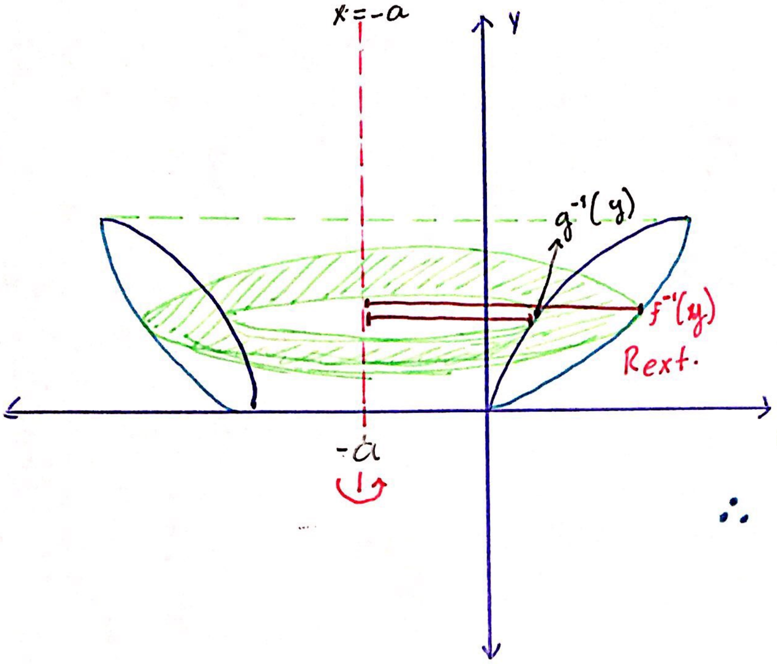
$$0 \leq y \leq y_{máximo}$$

$$R_{int.} = x = g^{-1}(y)$$

$$R_{ext} = x = f^{-1}(y)$$

$$\text{Volumen} = \pi \int_0^{y_{max}} r^2_{max.} - r^2_{int.} \, dy = \pi \int_0^{y_{máx}} (f^{-1}(y))^2 - (g^{-1}(y))^2 \, dy$$

Rectas de rotación



$$R_{int} = a + g^{-1}(y)$$
$$R_{ext} = a + f^{-1}(y)$$

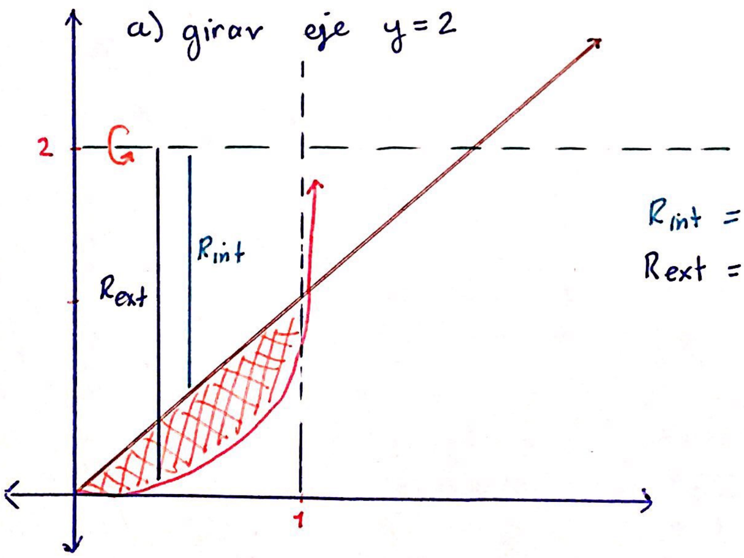
$$0 \leq y \leq y_{máx}.$$

$$\therefore V = \pi \int_0^{y_{max}} (R_{ext.})^2 - (R_{int})^2 \, dy$$

$$\boxed{= \pi \int_0^{y_{max}} (a + f^{-1}(y))^2 - (a + g^{-1}(y)) \, dy}$$

Ej: Considere la región entre $f(x) = x$ & $g(x) = x^3$ en el 1er cuadrante.

a) girar eje $y = 2$



$$x^3 = x$$
$$x^3 - x = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0$$
$$x = 0 \quad x = \pm\sqrt{1}$$
$$x = 0, \; x = 1$$

$$R_{int} = 2 - x$$
$$R_{ext} = 2 - x^3$$

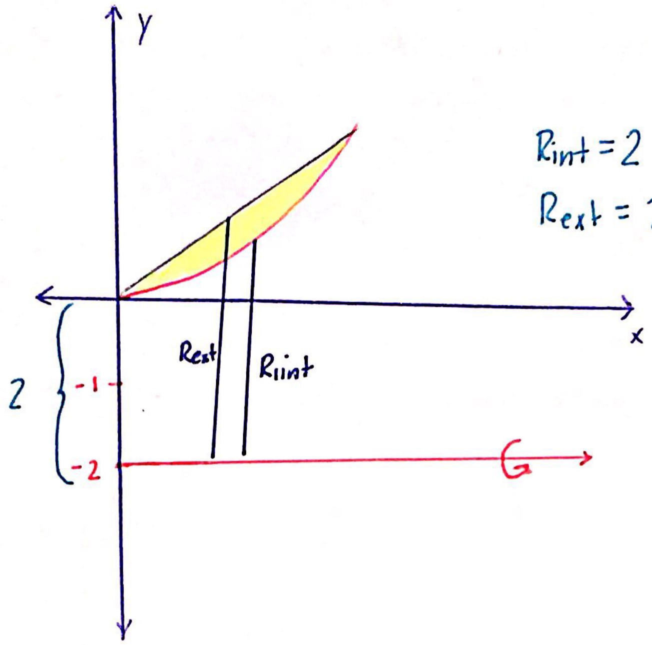
$$A = \pi \left[R_{ext}^2 - R_{int}^2 \right]$$

$$V = \pi \int_0^1 (2 - x^3)^2 - (2 - x)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 x^6 - 4x^3 - x^2 + 4x \, dx$$

$$= \frac{17\pi}{21}$$

b) Plantee la integral de volúmen del sólido que se obtiene al girar la región respecto a $y = -2$



$R_{int} = 2 + x^3$

$R_{ext} = 2 + x$

$$A = (R_{ext})^2 - (R_{int})^2$$

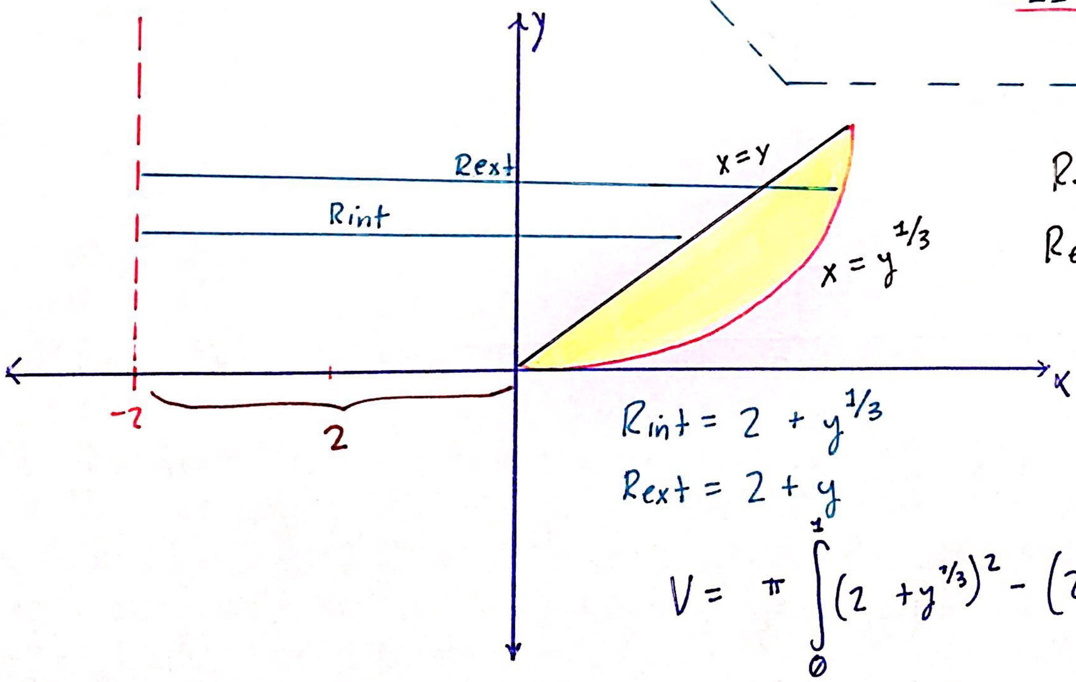
$$V = \pi \int_0^1 R_{ext}^2 - R_{int}^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_0^1 2 + x - 2 - x^3 \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 x - x^3 \, dx$$

$$= \pi \frac{1}{2} x^2 - \pi \frac{1}{4} x^4 = \frac{32\pi}{21}$$

ⓒ Rote la región respecto a $x = -2$



$R_{int} = 2 + y_1^{-1}$

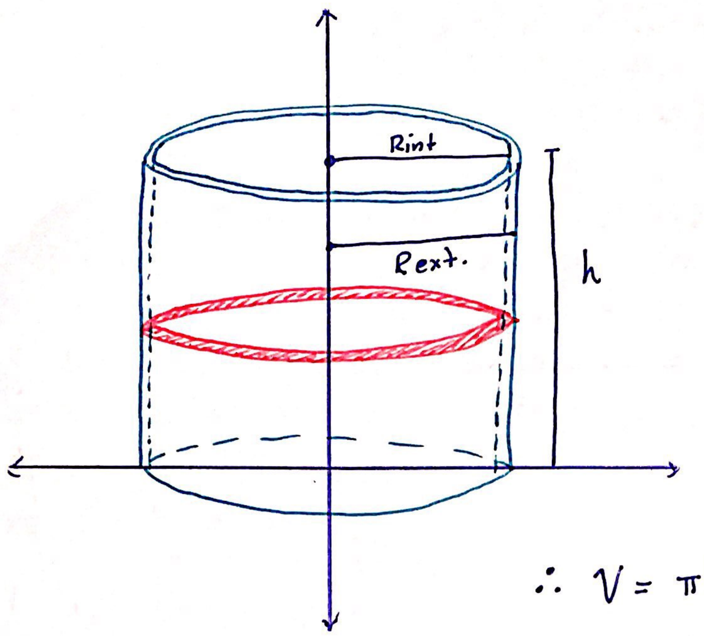
$R_{ext} = 2 + y_2^{-1}$

$R_{int} = 2 + y^{1/3}$

$R_{ext} = 2 + y$

$$V = \pi \int_0^1 (2 + y^{1/3})^2 - (2+y)^2 \, dy$$

6.3. Volúmenes con un cascarón cilíndrico (latas)



Área anillo =

$\pi r_{ext}^2 - \pi r_{int}^2$

Volúmen =

$\pi h \left(Rext^2 - R_{int}^2 \right)$

Grosor = $\Delta r = r_{ext} - r_{int} = dr$

$\therefore V = \pi h \left(R_{ext} + R_{int} \right) \left(R_{ext} - R_{int} \right) =$

- Volúmen de la expresión $= \pi h r^2$

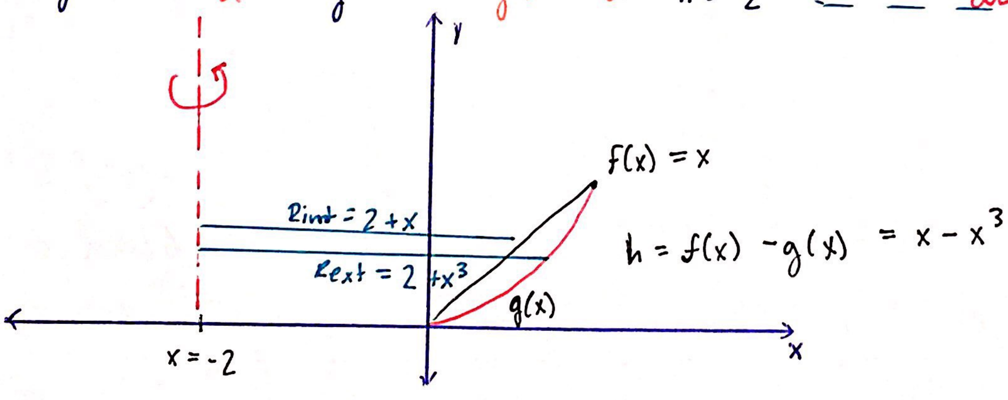
- Derive Respecto a r $dv = 2\pi h r \, dr$

$$\boxed{V = 2\pi \int_a^b h r \, dr}$$

el volumen de cascarones cilíndricos.

Redo inciso c.

$y = x^3$ & $y = x$ gire a $x = -2$



$h = x - x^3$; $r = 2 - x$ $\quad 0 \leq x \leq 1$

$$V = 2\pi \int_0^1 (x - x^3)(2 + x) \, dx$$

Ej: encuentre el volumen del sólido que se obtiene al girar la región entre el eje-x y la curva $f(x) = 2x^2 - x^3$ en el 1er cuadrante respecto al eje-y.

Interceptos -x $\quad 2x^2 - x^3 = 0$

$$x^2(2 - x) = 0$$

$$x = 0 \qquad x = 2$$

$$4x - 3x^2 = 0$$

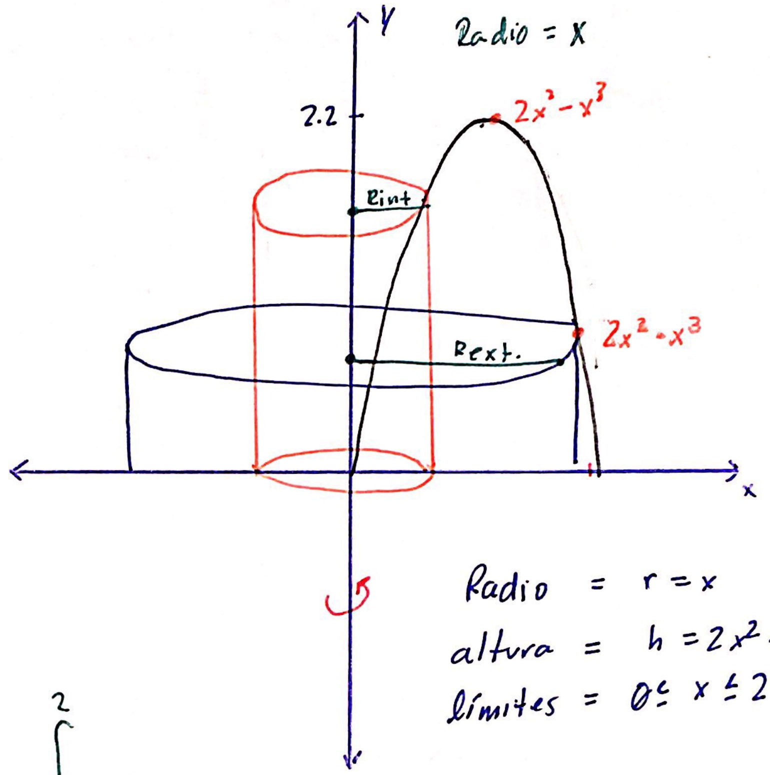
$$x(4 - 3x) = 0$$

$$x = 0 \qquad 4 - 3x = 0$$

$$-3x = -4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$f(4/3) = 2(16/9) - (4/3)$$



Radio = $r = x$

altura = $h = 2x^2 - x^3$

límites = $0 \leq x \leq 2$

$$V = 2\pi \int_0^2 h r \, dx =$$

$$= 2\pi \int_0^2 2x^3 - x^4 \, dx = 2\pi\left(8 - \frac{32}{5}\right)$$

$\boxed{!}$ Si estan rotando con un eje horizontal es recomendable usar anillos

$$V = \int_a^b \pi\left(r_{ext}^2 - r_{int}^2\right) dx$$

eje-x

$y = 0$

y = contante

$\boxed{!}$ Si está rotando un eje vertical usar cilíndros:

$$V = 2\pi \int_a^b h r \, dx$$

Ej: encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región entre $y_1 = x^2$ & $y_2 = 6x - 2x^2$ alrededor del eje-y.

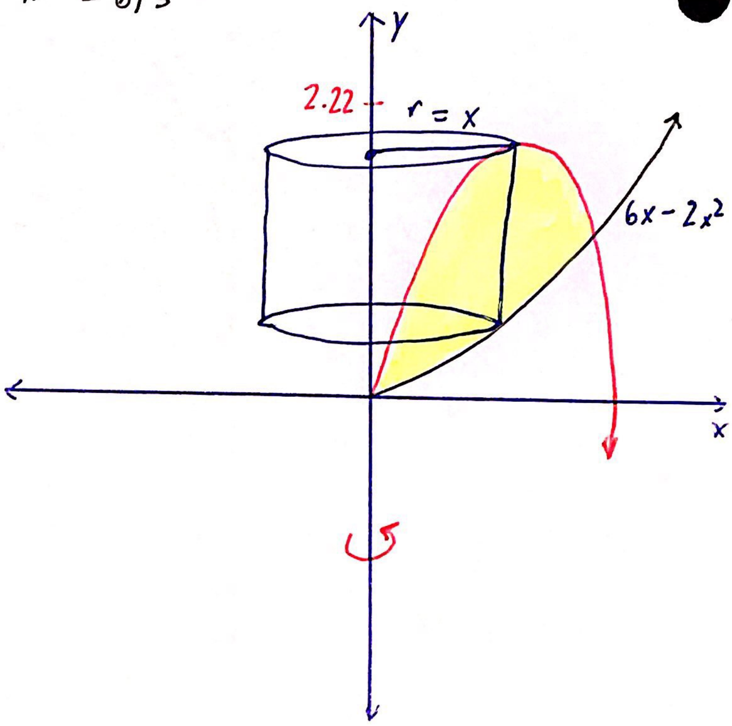
$y_2 = 0 \qquad 2x(3-x) = 0 \Rightarrow x = 0, 3$

$y_1 = y_2 \qquad x^2 = 6x - 2x^2$

$3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0$

$x = 0 \qquad x = 2$



altura $\Rightarrow h = y_2 - y_1$

$h = 6x - 3x^2$

Radio $\Rightarrow$ $r = x$

Límites $\Rightarrow$ $0 \leq x \leq 2$

$$V = 2\pi \int_0^2 h r \, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^2 6x^2 - 3x^3 \, dx = 2\pi \left(2x^3 - \frac{3}{4}x^4 \Big]_0^2 \right) = 8\pi$$