2019-10-02

8.5 Continuación Probabilidad

- Distribución de una variable continua, función de densidad de probabilidad $f(x)$.

(i) $f(x) \geq 0$ en $-\infty \leq x \leq \infty$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

- Probabilidad de que x acorta entre a y b.

$$\underbrace{P(a \leq x \leq b)}_{\text{Probabilidad}} = \int_a^b f(x)\,dx$$

- Distribución exponencial $f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}$ $x \geq 0$

Ejercicio: el tiempo de espera promedio para recibir una orden a domicilio de comida es de 0.5 h, y tiene una distribución exponencial:

a. Encuentre la probabilidad de que la comida se reciba después de 0.5 h. $\frac{1}{0.5} = 2$

$\mu = 0.5h$

$$f(x) = \frac{1}{0.5} e^{-x/0.5} = 2e^{-2x}$$

$$P(x \geq 0.5) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x}\, 2\, dx = -e^{-2x}\Big]_{0.5}^{\infty} =$$

$$u = -2x$$

$$du = -x$$

$$-du = x$$

$$P(x \geq 0.5) = \underbrace{-\lim_{x \to \infty}\left(e^{-2x}\right)}_{e^{-\infty} \to \emptyset} + e^{-2(0.5)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Probabilidad alta

$\approx 36.79\%$

(b.) Encuentre la probabilidad que la comida se recibe en 15 minutos.

$$P(x \leq 0.25) = \int_{-\infty}^{0.5} f(x)\, dx = f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x \geq \emptyset \\ \emptyset & x < \emptyset \end{cases} =$$

$$= \int_{\emptyset}^{0.25} e^{-2x}\, dx \cdot 2 = e^{-2x}\Big]_{\emptyset}^{0.25} = \left[\left\{-e^{-2(1/4)}\right\} - \left\{-e^{\emptyset}\right\}\right] =$$

$$= \left\{-e^{-1/2}\right\} - \left\{-e^{\emptyset}\right\} = -e^{-1/2} + 1$$

(c) El servicio se vuelve más eficiente y ahora la media para entregar el producto es de 20 minutos. ¿Cuál es la probabilidad que el producto se entregue después de 30 minutos?

$$\mathcal{U} = 20 \text{ min} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = 3e^{-3x} = P(x \geq 0.5) = \int_{0.5}^{\infty} e^{-3x}(3\,dx) =$$

$$= -e^{3x}\Big]_{0.5}^{\infty} = \left[\left\{-\lim_{x\to\infty}\left(e^{-3x}\right)\right\} - \left\{-e^{-3(0.5)}\right\}\right] =$$

$$= \left\{0 + e^{-\frac{3}{2}}\right\} = e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.22 \approx 22.31\%$$

Media o valor esperado

Variable discreta: media es un promedio ponderado.

$$\left.\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ P(x_1) & P(x_2) & & P(x_n) \end{array}\right\}$$ Pensar en pesas ó frecuencias

$$\mathcal{U} = x_1 P(x_1) + x_2 P(x_2) + \dots + x_n P(x_n)$$

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(x_i)$$

$$P(a \leq x \leq b) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)$$

[!] Si la variable es continua, μ se obtiene al integrar $x f(x)$.

$$\boxed{\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx}$$

$f(x)$ uniforme exponencial normal.

Varianza: Suma de las diferencias al cuadrado de cada X_i respecto a la media.

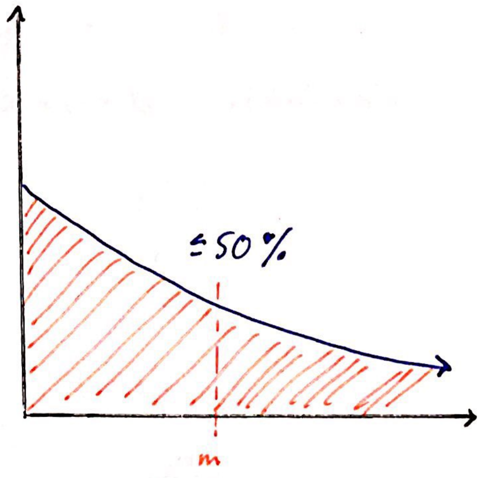
Discreta: $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 (pX_i) = \sigma^2$ desviación estándar

Continua: $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx$

Desviación estándar: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\text{varianza}}$

Mediana: el número m para el cual la probabilidad acumulada es igual al 50% ó 0.5

$$\int_{-\infty}^{m} f(x)\, dx = 0.5$$



Ejercicio 3: Considere la función exponencial.

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \quad , x \geq 0 \qquad \text{variable } \mu$$

a) Encuentre la media de $f(x)$.

$$\int_0^\infty x\, f(x)\, dx = \int_0^\infty \frac{x}{\mu} e^{-x/\mu}\, dx = -xe^{-x/\mu} - \int_0^\infty -e^{-x/\mu}\, dx$$

IPP

$u = x \qquad dv = \frac{e^{-x/\mu}}{\mu} dx$

$du = dx \qquad v = -e^{-x/\mu}$

$\boxed{!}$ μ es un parámetro

$$= -xe^{-x/\mu} + e^{-x/\mu} + C \Big]_0^\infty$$

$$= \left\{ -\underbrace{\lim_{x\to\infty} \left(x e^{-x/\mu} \right)}_{\text{L'H}} + \lim_{x\to\infty} \left(e^{-x/\mu} \right) \right\} - \left\{ \cancel{-0 e^{-0/\mu}}^{0} + \cancel{e^{-0/\mu}}^{0} \right\}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{e^{x/\mu}} \right) \overset{LH}{=} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{e^{x/\mu} \cdot \frac{1}{\mu}} \right) = \frac{1}{e^{\infty/\mu} \cdot \frac{1}{\mu}} = \frac{1}{\infty} \to 0$$

Media distribución exponencial

$$\int_0^\infty \frac{x}{\mu} e^{-x/\mu}\, dx = \mu$$

(b) Encuentre la mediana de $f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}$

Encuentre m tal que $\int_0^m f(x)\,dx = 0.5$

$$\int_0^m \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}\,dx = -e^{-x/\mu}\Big]_0^m = -e^{-m/\mu} + 1$$

¿Cuándo es 0.5?

$$-e^{-m/\mu} + 1 = 0.5$$

$$-e^{-m/\mu} = \frac{1}{2} - 1$$

$$e^{-m/\mu} = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{m}{\mu} = \ln(0.5)$$

$$m = -\mu \ln(0.5)$$

$$m \approx 0.70\mu$$

Integrar $\underbrace{\int (x-\mu)^2 e^{-x/\mu} d\mu}_{}$ $= \sigma^2$

Para integrar una encuentra la varianza.

Ejercicio 4: Encuentre la media, mediana, varianza y desviación estándar de la distribución uniforme.

$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b$ para $b = 6$ & $a = 0$

Específico $f(x) = \frac{1}{6} \quad 0 \leq x \leq 6$

Probabilidad $P(x_0 \leq x \leq x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{6} dx$

- Media: $\mu = \int_0^6 x f(x) dx = \int_0^6 x \cdot \frac{1}{6} dx = \frac{1}{12} \cdot x^2 \Big]_0^6 =$

$= \{\frac{36}{12}\} - \{0\} = 3$

- Mediana: $\int_0^m \frac{1}{6} dx = 0.5$; $\int_0^m \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6} x \Big]_0^m = \ldots$

$\ldots = \{\frac{m}{6}\} - \{0\} = \frac{m}{6} = 0.5$

$m = (0.5)6$

$m = 3$

• Variación y desviación estándar: $\mu = 3$ $f(x) = \frac{1}{6}$

$$\sigma^2 = \int_0^6 (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \frac{1}{6}\int_0^6 (x-3)^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}(x-3)^3\Big]_0^6 = \frac{1}{18}\left[\{(6-3)^3\} - \{(0-3)^3\}\right] =$$

$$= \frac{1}{18}\left[27-(-27)\right] = \frac{1}{18}\left[54\right] = \frac{54}{18} = 3$$

$\therefore$ La desviación estándar es $\sqrt{\sigma^2}$

por ende $\sqrt{3}$