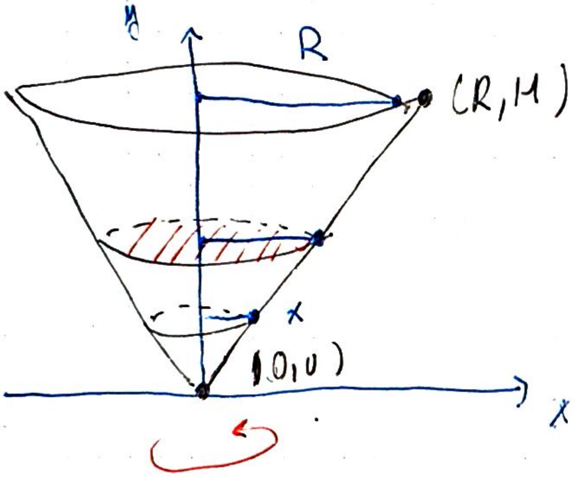
Volúmenes:

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

A(x) es el área de la sección transversal del sólido.

Ejemplo: Encuentre el volumen de un cono de altura H y base circular de radio R.



Rebanando el cono.
Círculos de radio x.

Área $\pi r^2(y)$

$$V = \int_0^H \pi x^2\, dy.$$

Ec. Recta $y = mx + b$

$$m = \frac{H-0}{R-0} = \frac{H}{R}$$

$$0 = 0 + b \Rightarrow b = 0$$

$$\boxed{y = \frac{H}{R} x}$$

$$x = \frac{Ry}{H}$$

$$V = \int_0^H \pi x^2\, dy.$$

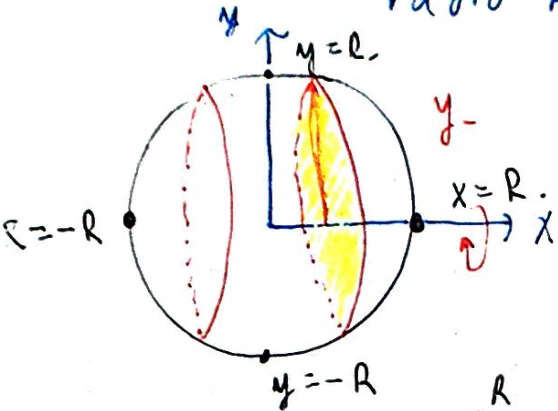
$$V = \int_0^H \pi \frac{R^2 y^2}{H^2}\, dy. = \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H y^2\, dy.$$

$$\pi \frac{R^2}{H^2} \left. \frac{y^3}{3} \right]_0^H = \frac{\pi R^2}{H^2} \frac{H^3}{3}.$$

Pág. 88

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.}$$

Ejercicio 1: Encuentre el volumen de una esfera de radio R.



Ec. esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Rebananando la esfera, se obtiene un círculo de radio de radio y.

Ec. circulo $x^2+y^2=R^2$.

Volumen: $V=\int_{-R}^{R} A(x)\,dx = \int_{-R}^{R} \pi y^2\,dx$

$-R \leq x \leq R.$

$y=0 \quad x^2=R^2.$

$y^2=R^2-x^2.$

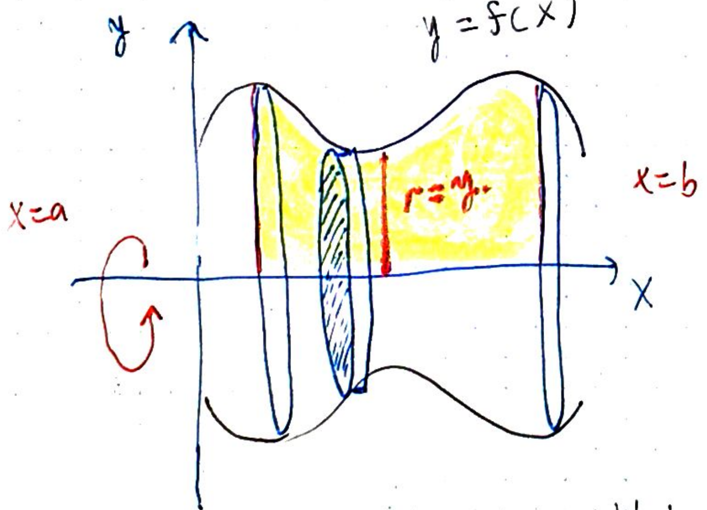
$$V=\int_{-R}^{R}\pi(R^2-x^2)\,dx. = 2\pi\int_0^R (R^2-x^2)\,dx$$

R es constante

$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$$V=2\pi\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\Big]_0^R\right)=2\pi\left(R^3-\frac{1}{3}R^3\right)=2\pi\,\frac{2}{3}R^3$$

$$V=\frac{4\pi}{3}R^3$$



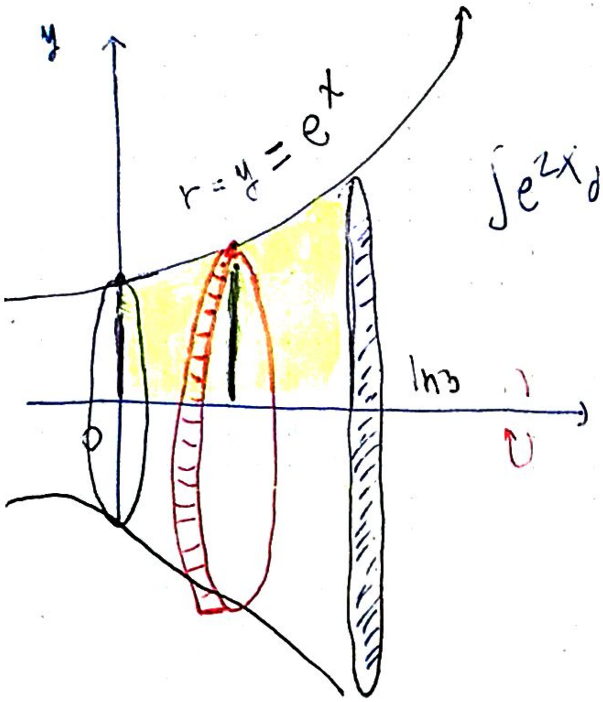
Sólidos rellenos discos (secciones transversales)

R: $a\leq x\leq b.$
$0\leq y\leq f(x)$

Área $=\pi y^2=\pi f^2(x).$

Volumen $\boxed{V=\int_a^b \pi y^2\,dx}$

Ejercicio 2: (P 90) Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región $R: 0 \le x \le \ln 3,\ 0 \le y \le e^x$ respecto al eje-x.



$$V = \pi \int_a^b r^2\,dx$$

$$\int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2} \qquad a=0,\ b=\ln 3,\ r=e^x$$

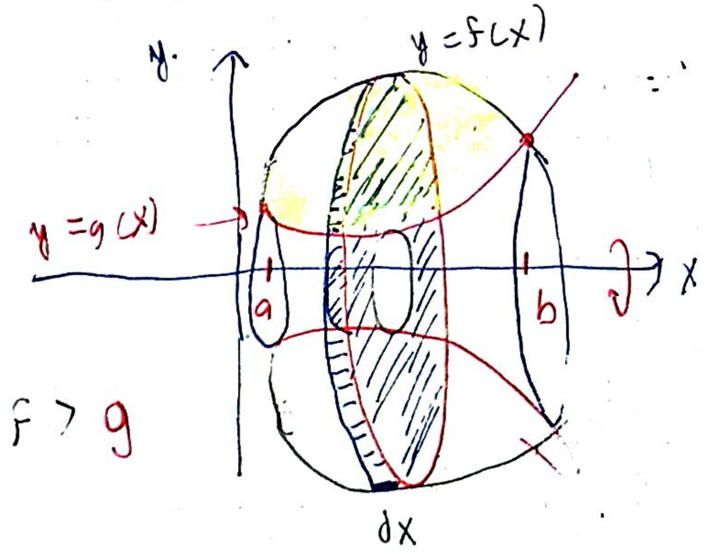
$$V = \pi \int_0^{\ln 3} e^x e^x\,dx$$

$$V = \pi \int_0^{\ln 3} e^{2x}\,dx$$

$$V = \frac{\pi}{2} e^{2x}\Big]_0^{\ln 3} = \frac{\pi}{2}\left(e^{\ln 3^2} - e^0\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}(9-1) = 4\pi.$$

Sólidos que se generan girando una región que está entre dos curvas. "Sólidos huecos"



La sección de este sólido es un anillo con dos radios

reste el área del círculo hueco

$$A = \pi r_2^2 - \pi r_1^2.$$

El volumen de la sección transversal es

$r_{ext} = f(x) > r_{int} = g(x)$.

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx$$

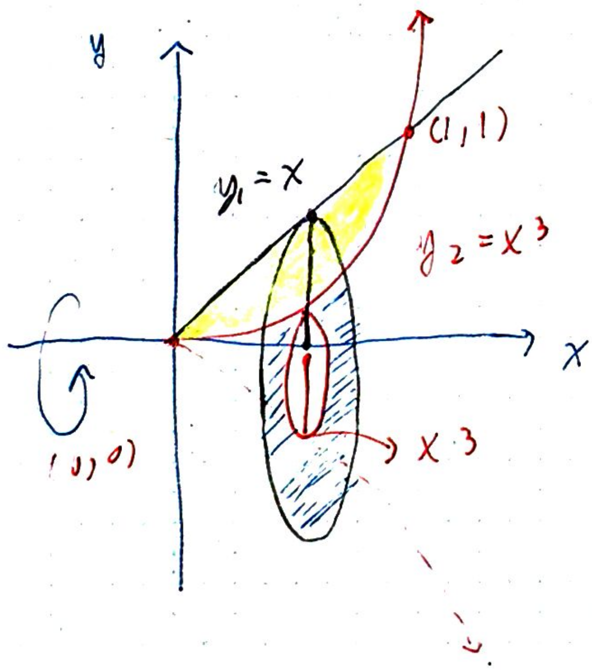
exterior^2 - interior^2

Método de Arandelas $R: a \le x \le b.,\ g(x) \le y \le f(x)$.

el volumen del sólido obtenido al girar R respecto al eje-x es:

$$V = \pi \int_a^b (f^2 - g^2)\,dx$$

Ejercicio 4: Calcule el volumen del sólido que se obtiene al girar la región encerrada por las curvas $y_1 = x$ & $y_2 = x^3$ respecto al eje-x en el 1er cuadrante.



$V = V_{externa} - V_{interna}$

Área Anillo.

$r_{ext} = x \qquad r_{int} = x^3$.

$A = \pi r_{ext.}^2 - \pi r_{int}^2$

$A = \pi x^2 - \pi x^6$

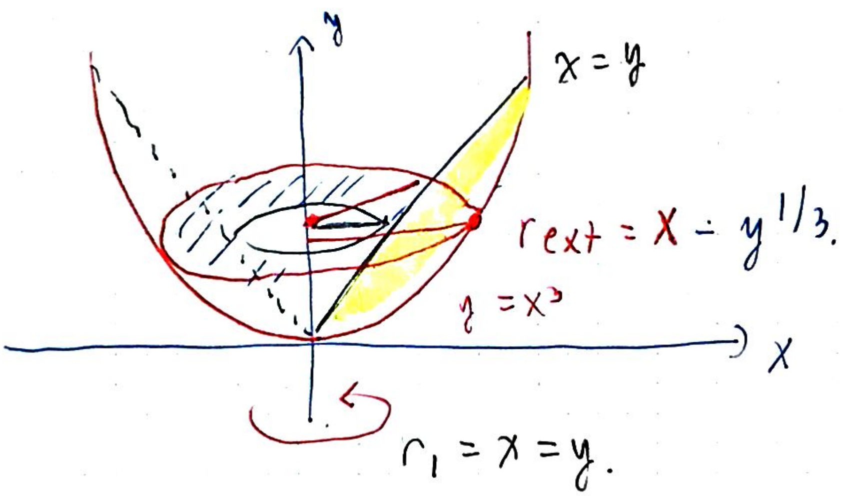
P. Is. $x^3 = x \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$

$x = 0, \pm 1$

$$V = \int_0^1 A(x)\,dX = \pi\int_0^1 (x^2 - x^6)\,dx$$

$$V = \pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\Big]_0^1\right) = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right)$$

Ejercicio 5: Plantee la integral para encontrar el volumen del sólido que se obtiene al girar la región del ejercicio 4 respecto al eje- y.



$y = x^3$

$x = y^{1/3}$

A'rea Anillo $\pi r_{ext}^2 - \pi r_{int}^2 = \pi y^{2/3} - \pi y^2$.

$$V = \int_0^1 A(y)\,dy. = \int_0^1 (\pi y^{2/3} - \pi y^2)\,dy.$$