Fracciones Parciales.

Factores Lineales.

$$\frac{P(x)}{(x+2)(x+3)(x+4)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+4} + \frac{D}{(x+4)^2}$$

Encuentre A, B, C y D.

Ejemplo: $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+2)(x+1)^2}\, dx$ El Denominador es cero en -2 y -1

$$\frac{x^2+1}{(x+2)(x+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$x^2+1 = A(x+1)^2 + B(x+2)(x+1) + C(x+2)$$

$x=-1$: $2 = 0 + 0 + C \Rightarrow C = 2$

$x=-2$: $5 = A + 0 + 0 \Rightarrow A = 5$

$x=0$: $1 = A + 2B + 2C$ $\quad 2B = -8$

$2B = 1 - A - 2C = -4 - 4 = -8 \Rightarrow B = -4$

$$\int \frac{x^2+1}{(x+2)(x+1)^2}\, dx = \int \frac{5}{x+2}\, dx - 4\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$(x+1)^{-2}$

$$= 5\ln|x+2| - 4\ln|x+1| - \frac{2}{(x+1)} + C$$

Caso 3: $Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreducibles (p. 69).

x^2+4 y x^2+x+1

no se pueden factorizar, no tienen intersectos con el eje-x.

$x^2+4=0 \quad x^2=-4$ no tiene solución real.

$x^2+x+1=0$ Ec. $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\sqrt{-3}$ es imaginario $\quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ no tiene soluciones reales

$$\frac{P(x)}{(x^2+4)(x^2+x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

Encuentre cuatro coeficientes.

$$\int \frac{A}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C \qquad \int \frac{Bx}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C$$

Ejercicio 6: Integre las sigs. funciones.

b. $\int \frac{2x^2-x-4}{x^3+4x}\,dx$ $\qquad u \neq x^3+4x$

$\qquad du \neq (3x^2+4)\,dx$

$x^3+4x = x(x^2+4)$ $\qquad$ cero en $x=0$.

$$\frac{2x^2-x-4}{x^3+4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \qquad * \; x(x^2+4)$$

$$\underline{2x^2} - \underline{x} - 4 = \underline{Ax^2} + 4A + \underline{Bx^2} + \underline{Cx}.$$

Agrupe términos y resuelva el sig sistema

$$\begin{cases} A + B = 2. \Rightarrow B = 2 - A = 3. \\ C = -1 \\ 4A = -4 \Rightarrow A = -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{2x^2-x-4}{x^3+4x}\,dx = \int \frac{-dx}{x} + \int \frac{3x-1}{x^2+4}\,dx$$

$$= -\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{x}{x^2+4}\,dx - 1\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= -\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x^2+4| - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$u = x^2+a^2$

$du = 2x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

$x = a \cdot \tan\theta.$

1. $\int \frac{x+3}{x^2+2x+10}\,dx \qquad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2}$

Factor cuadrático irreducible.

$$\frac{x+3}{x^2+2x+10} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+10}.$$ Ya es una fracción parcial.

$$x+3 = Ax+B.$$ $A=1, \quad B=3$

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+1+9}\,dx = \int \frac{x+3}{(x+1)^2+9}\,dx$$

$u = x+1 \qquad du = 1 \cdot dx$

$u+2 = x+3.$

$$\int \frac{u+2}{u^2+9}\,du = \int \frac{u}{u^2+9}\,du + 2\int \frac{du}{u^2+3^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u^2+9) + \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{u}{3}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln((x+1)^2+9) + \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+3}{3}\right) + C.$$

Caso 4: Factores Cuadráticos Repetidos (P. 70)

$$\frac{p(x)}{(x^2+a^2)^3} = \frac{Ax+B}{(x^2+a^2)} + \frac{Cx+D}{(x^2+a^2)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+a^2)^3}.$$

Encuentre los A, B, C, D, E y F.

$$\frac{p(x)}{x^3(x^2+a^2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+a^2} + \frac{Fx+G}{(x^2+a^2)^2}$$

Ejercicio 7: Integre $\int \frac{1}{\underbrace{x(x^2+4)^2}_{}} dx$

$$(x^2+1)^2 = x^4+2x^2+1 = (x^2+1)^2$$

$$\frac{1}{x(x^2+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+4)} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}.$$ 1 grado menos

observación

$(x-3)(x+5)$ → $\frac{A}{x-9}$ Lineales

cuadráticos. x^2+10 x^2+x+9 $\frac{Ax+B}{x^2+10}.$

$$1 = A(x^2+4)^2 + (Bx+C)(x^3+4x) + (Dx+E)x$$

$$1 = A(x^4+8x^2+16) + Bx^4 + Cx^3 + 4Bx^2 + 4Cx + Dx^2 + Ex.$$

5 incógnitas y 5 ecuaciones. $1+0x+0x^2+0x^3$

Grado 4: $A+B=0.$ ⇒ $B=-1/16$

Grado 3: $C=0$ ✓ $C=0$

Grado 2: $8A+4B+D=0$ $D=-4B-8A. = \frac{4-8}{16}$

Grado 1: $4C+E=0$ ⇒ $E=-4C=0$

Constantes: $16A=1$ ✓ $A=1/16.$

$A=1/16,\ B=-1/16,\ C=0,\ D=-1/4,\ E=0$

$$\frac{1}{x(x^2+4)^2} = \frac{1}{16}\frac{1}{x} - \frac{1}{16}\frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+4)^2}$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2} = \frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{32}\ln(x^2+4) + \frac{1}{8}\frac{1}{(x^2+4)} + C.$$

$$-\frac{1}{4}\int \underbrace{(x^2+4)}_{u}{}^{-2}\,\underbrace{x\,dx}_{du/2} = \frac{1}{4\cdot 2}(x^2+4)^{-1}$$

División Larga.

$$\int \frac{x^4+1}{x-1}\,dx \qquad \int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt.$$

Antes de utilizar fracciones, el grado del numerador debe ser menor al del denominador.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3 + x^2 + x + 1 \quad \} \text{ cociente} \\
x-1 & x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \\
 & -x^4 + x^3 \\
 & \quad x^3 \\
 & \quad -x^3 + x^2 \\
 & \qquad x^2 \\
 & \qquad -x^2 + x \\
 & \qquad\quad x + 1 \\
 & \qquad\quad -x + 1 \\
 & \qquad\qquad 2 \quad \} R(x)
\end{array}$$

denominador.

división sintética

$$\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2
\end{array}$$

residuo

$$\int \frac{x^4+1}{x-1}\,dx = \int x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{2}{x-1}\,dx$$

$$\int \frac{x^4+1}{x-1} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + C.$$

b. $$\int \frac{t^2}{t^2-1}\, dt. = \int 1 + \frac{1}{t^2-1}\, dt.$$

$$t^2-1 \overline{\big)\, t^2}\quad 1$$
$$\underline{-t^2+1}$$
$$+1$$

$$= t + \int \frac{0.5}{t-1}\, dt + \int \frac{0.5}{t+1}\, dt.$$

$$t + \frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t+1| + C.$$

$$1 = A(t+1) + B(t-1)$$

$t=1$: $1 = 2A + 0$ → $A = 1/2$

$t=-1$: $1 = 0 - 2B$ → $B = -1/2$.

polynom