Lab Lunes 1-2:30 PM.
sim2 2:30 PM Centro Estudiantil.

7.4 Fracciones Parciales ✓

se utiliza para integrar funciones racionales.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = f(x)$$

P polinomio de grado n
Q polinomio de grado m.

condición: denominador > numerador. } ✓

En caso de que el grado del numerador sea mayor que o igual del denominador, realice la división larga

$$\frac{6}{x^2-9}, \quad \frac{x+3}{x^3-9x}, \quad \frac{1}{x^2+4}, \ \ldots,$$

denominador es el más grande

$$\left.\frac{x^2+3}{x^2-9}, \quad \frac{x^4+x^2+1}{x^3-4x}\right\}$$ división larga

simplifique la función en dos o más fracciones parciales.

$$\frac{6}{x^2-9} = \frac{6}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

no puede integrar

A, B dos coeficientes "desconocidos"

$$\frac{6}{x^2-9} = \frac{A(x+3) + B(x-3)}{x^2-9}.$$

Igualando los numeradores cero en $x=-3, 3.$

$$6 = A(x+3) + B(x-3)$$

$x=3$: $6 = 6A + 0 \Rightarrow A=1$

$x=-3$: $6 = 0 - 6B \Rightarrow B=-1$

$$\frac{6}{x^2-9} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}$$

$$\int \frac{6}{x^2-9}\,dx = \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x+3} = \ln|x-3| - \ln|x+3| + C.$$

Finalmente integre.

Caso 1: Factores lineales distintos.

$$\frac{p(x)}{(x^2-9)(x^2-4)} = \frac{p(x)}{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c.$$

Encuentre A, B, C y D.

Caso 2: Factores Lineales Repetidos.

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

$x+1$

Encuentre A, B y C.

$$\int F(x) = A\ln|x+1| - B(x+1)^{-1} - \frac{1}{2}C(x+1)^{-2} + K.$$

$$\int (x+a)^{-t}\,dx = \frac{(x+a)^{-t+1}}{1-t} + K,$$

Ejercicio 1: $\displaystyle\int \frac{18z}{2z^2+7z-4}\,dz$ P(64)

1. Factorice dem: $2z^2+7z-4 = (2z-1)(z+4)$.

$$\begin{array}{ccc} 2z & & -1 \\ z & & 4 \end{array} \qquad 2(z^2+3.5z+2)$$

2. Ceros Den. $2z-1=0 \Rightarrow z=0.5.$ $\;z+4=0 \Rightarrow z=-4$ $\Big\}$ lineales distintos.

$$\frac{18z}{2z^2+7z-4} = \frac{A}{2z-1} + \frac{B}{z+4}$$

¿A, B?

Multiplique por $(2z-1)(z+4)$

$$18z = A(z+4) + B(2z-1)$$

$z=0.5$: $\quad 9 = 4.5A + 0 \Rightarrow A = 9/4.5 = 2.$

$z=-4$: $\quad 18(-4) = 0 - 9B \Rightarrow B = \frac{-18}{-9}(4) = 8$

$$\int \frac{18z}{2z^2+7z-4} = \int \frac{2}{2z-1}\,dz + 8\int \frac{dz}{z+4}$$

$$= \frac{2}{2}\ln|2z-1| + 8\ln|z+4| + C.$$

Ejercicio 2: Integre las sigs. funciones.

a) $\displaystyle\int \frac{4x+2}{x^2+2x+1}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx$

a) $x^2+2x+1 = (x+1)^2$. Factor lineal repetido.

$$\frac{4x+2}{x^2+2x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$ ¿A, B?

Multiplique por $(x+1)^2$ denominador se hace cero en $x=-1$

$$4x+2 = A(x+1) + B.$$

$x=-1$: $-2 = 0 + B \Rightarrow B=-2.$

$x=0$: $2 = A + B. \Rightarrow A = 2 - B = 2+2 = 4.$

$$\int \frac{4x+2}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{4}{x+1}\,dx + \int -2(x+1)^{-2}\,dx$$

$$= 4\ln|x+1| + 2(x+1)^{-1} + C.$$

b) $\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx$ $\qquad x^3 - x = x(x^2-1)$

$$= x(x+1)(x-1)$$

ceros en $0, -1, 1$ (factores lineales distintos)

$$\frac{x^2+2x-1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

$$x^2+2x-1 = A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)$$

$x=0$: $\quad -1 = -A + 0 + 0 \Rightarrow A = 1$

$x=-1$: $\quad -2 = 0 + 2B + 0 \Rightarrow B = -1$

$x=1$: $\quad 2 = 0 + 0 + 2C \Rightarrow C = 1$

$$\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x-1}$$

$$= \ln|x| - \ln|x+1| + \ln|x-1| + C.$$