2019-10-08

Continuación de Fracciones Parciales

- Fracciones parciales:
  - factores lineales:

$$\frac{P(x)}{(x+2)(x+3)(x+4)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+4} + \frac{D}{(x+4)^2}$$

Encuentre A, B, C, D

Ej: $$\int \frac{x^2+1}{\underbrace{(x+2)(x+1)^2}} dx =$$

¿Cuándo el denominador se hace 0?

$$\frac{x^2+1}{\cancel{(x+2)(x+1)^2}} = \frac{A}{\cancel{x+2}} + \frac{B}{\cancel{x+1}} + \frac{C}{\cancel{(x+1)^2}}$$

$$x^2+1 = A(x+1)^2 + B(x+2)(x+1) + C(x+2)$$

$$(x+2)(x+1)^2 = 0$$

$x = -2 \quad x = \pm 1$

$x = -1: \quad 2 = 0 + 0 + C \quad \Rightarrow C = 2$

$x = -2: \quad 5 = A + 0 + 0 \quad \Rightarrow A = 5$

Como ya conozco C & A encuentro B:

$x = 0$

$$1 = A + 2B + 2C$$

$$2B = 1 - A - 2C$$

$$B = 1 - 5 - 4 = \frac{-8}{2} = \underline{-4}$$

$$\int \frac{x^2+1}{(x+2)(x+1)^2}\,dx = \int \frac{5}{x+2}\,dx - 4\int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$= 5\ln|x+2| - 4\ln|x+1| - \frac{2}{(x+1)} + c$$

Caso 3: Factores cuadrático irreducible:

Ej: $\underbrace{x^2+4 \quad \& \quad x^2+x+1 \quad \& \text{ etc.}}_{\text{no son factorizables}}$

entonces:

$\underbrace{x^2 = -4}_{\text{no hay solución real}}$

Ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Bigg\}\ \text{no tiene solución real}$$

$$\frac{P(x)}{(x^2+4)(x^2+x+1)} = \frac{\overbrace{A+Bx}^{\substack{\text{Alterna}\\ Ax+B}}}{x^2+4} + \frac{\overbrace{Cx+D}^{\substack{\text{Alterna}\\ C+Dx}}}{x^2+x+1}$$

---

encuentre cuatro cohueficiente:

a) $\int \frac{A}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$ $\qquad \int \frac{Bx}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(|x^2+4|\right)$

b) $\int \frac{2x^2 - x - 4}{x^3 + 4x} dx$

no funcionara

$u = x^3 + 4x$

$du = (3x^2 + 4) dx$

$x^3 + 4x = x(x^2+4)$

$$\frac{2x^2 - x - 4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

$2x^2 - x - 4 = A(x^2+4) + Bx^2 + Cx$

$2x^2 - x - 4 = Ax^2 + A4 + Bx^2 + Cx$

Sistema de ecuaciones, agrupe términos:

$x^2 : \quad A + B = 2 \Rightarrow B = 2 - A = 3.$

$x : \quad C = -1 \Rightarrow C = -1$

$1 : \quad 4A = -4 \Rightarrow A = -1$

Entonces...

$$\int \frac{2x^2 - x - 4}{x^3 + 4x} dx = \int \frac{-dx}{x} + \int \frac{3x - 1}{x^2 + 4} dx$$

$$= -\ln|x| + 3\int \frac{x}{x^2+4} dx - 1 \int \frac{dx}{x^2 + 4}$$

$$= -\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x^2 + 4| - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Observación

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C =$$

$u = x^2 + a^x$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C$$

$du = 2x\,dx$

$\frac{du}{2} = x\,dx$

a)

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+1}\,dx \qquad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2} \Big\} \text{imaginario}$$

Factor cuadrático irreducible

$$\frac{x+3}{\cancel{x^2+2x+1}} = \frac{Ax+B}{\cancel{x^2+2x+10}}$$

$$\underbrace{\begin{aligned} x+3 &= Ax+B \\ x+3 &= (1)x+(3) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 3 \end{aligned}}_{\text{no nos sirvió}} \Big\} \text{ ya es una fracción parcial.}$$

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+1}\,dx = \overbrace{\int \frac{x+3}{(x+1)^2+9}\,dx}^{\text{usar completación al cuadrado}} = \int \frac{w+2}{w^2+2}\,dw$$

$w = x+1$

$w+2 = x+3$

$dw = dx$

$$= \int \frac{u}{u^2+9}\,du + 2\int \frac{du}{u^2+3^2} =$$

$$= \ln|u^2+9| + \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{u}{3}\right) + C$$

$$= \ln|(x+1)^2+9| + \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+3}{3}\right) + C$$

Caso 4: Factores cuadráticos repetidos (p.70)

$$\frac{P(x)}{(x^2+a^2)^3} = \frac{Ax+B}{(x^2+a^2)} + \frac{Cx+D}{(x^2+a^2)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+a^2)^3}$$

Resolver para A, B, C, D, E, F

$$\frac{P(x)}{x^3(x^2+a^2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+a^2} + \frac{Fx+G}{(x^2+a^2)^2}$$

Resolver para A, B, C, D, E, F, G

Ej:

Integre: $\displaystyle\int \frac{1}{\underbrace{x(x^2+4)^2}_{\text{ya está factorizado}}}\,dx =$

$$\frac{1}{x(x^2+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}$$

⌈ Recordar teorema fundamental del Álgebra, todos pueden ser representados por factores lineales y cuadráticos ⌋

$$1 = A(x^2+4)^2 + (Bx+C)x(x^2+4) + (Dx+E)x$$

$$= A(x^4 + 8x + 16) + (Bx^4 + Cx^3 + 4Bx^2 + C4x + Dx^2 + Ex$$

• 5 incógnitas, tenemos 5 ecuaciones.

Grado 4: $A + B = 0 \Longrightarrow B = -\frac{1}{16}$

Grado 3: $C = 0 \Longrightarrow C = 0$

Grado 2: $8A + 4B + D = 0 \Longrightarrow D = -\frac{1}{4}$

Grado 1: $1C + E = 0 \Longrightarrow E = 0$

Constantes: $16A = 1 \Longrightarrow A = \frac{1}{16}$

$$\frac{1}{x(x^2+4)^2} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{x} + \frac{-\frac{1}{16}x + 0}{x^2+4} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)x + 0}{(x^2+4)^2}$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2} = \frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{32}\ln(x^2+4) + \frac{1}{8}\frac{1}{(x^2+4)} + C$$

División Larga:

$$\int \frac{x^4+1}{x-1}\,dx \qquad\qquad \int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt$$

Antes de utilizar fracciones parciales, el grado del numerador debe ser menor al del denominador.

$$\overbrace{x^3 + x^2 + x + 1}^{\text{denominador}}$$

$$\underbrace{x-1}_{\text{numerador}} \;\big)\; x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1$$

$$\begin{array}{r}
-x^4 + x^3 \\
\hline
x^3 \\
-x^3 + x^2 \\
\hline
x^2 \\
-x^2 + x \\
\hline
x + 1 \\
-x + 1 \\
\hline
\underbrace{2}_{\text{residuo}}
\end{array}$$

$$\int \frac{x^4+1}{x-1} = \int x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{2}{x-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1|\cdot 2 + C$$