5.3 Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)

Si $f(x)$ es continua en $[a, x]$ entonces

Parte 1: $$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt.\right) = f(x). \qquad F^{-1}[F(x)] = x$$

La integración y la derivación son procesos inversos entre sí.

La antiderivada de la derivada es la función original

$$\int \frac{df}{dx}\,dx = f(x) + C.$$

La derivada de la integral es la función original.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Parte 2: $$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}.$$ Ya se había visto

Ejemplo: derive la siguiente función $f(x) = \int_a^x t^2\,dt$

Método 1: Integrar y luego derivar

$$f(x) = \frac{t^3}{3}\Big]_{t=a}^{t=x} = \frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3} \qquad \boxed{f'(x) = x^2} + 0$$

Método 2: Use TFC parte 1: $$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x t^2\,dt\right) = x^2.$$

$t \to x$

t es una variable temporal de integración.

$$\int_a^x t^2\,dt = \left.\frac{t^3}{3}\right]_a^x \qquad \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(x)\,dx$$

$\times$ $\int_a^x x^2\,dx$ Forma incorrecta de escribirla.

Varias funciones se definen por medio de integrales que no se pueden evaluar.

$$\int e^t\,dt = e^t + c$$

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt. \qquad 5.5\ \int e^{t^2}\,t\,dt = \frac{1}{2}e^{t^2} + C.$$

Distribución normal media cero y varianza 1.

$$P'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}.$$

Ejercicio 1: Derive las siguientes funciones.

a. $h(x) = \int_a^x 3\sqrt{t}\,dt.$ $\qquad h'(x) = 3\sqrt{x}$

$t \to x$

b. $S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt.$ $\qquad S'(x) = \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$

c. $H(w) = \int_{-5}^{w} \frac{t+4}{t^4+t^2+2}\,dt$ $\qquad H'(w) = \frac{w+4}{w^4+w^2+2}.$

Derivadas de Funciones Compuestas y definidas por integrales.

$$f(x) = \int_{100}^{x^5} e^t \, dt. = e^t \Big]_{t=100}^{t=x^5} = e^{x^5} - e^{100}.$$

$$f'(x) = e^{x^5} 5x^4 + 0$$ por la regla de la cadena.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{100}^{x^5} e^t \, dt\right) = \frac{d}{dx}\int_{100}^{u} e^t \, dt. = e^u \frac{du}{dx}$$

$u(x) = x^5$

$$= e^{x^5} \cdot 5x^4$$

TFC parte I y la regla de la cadena.

$$\frac{d}{dx}\int_a^{b(x)} f(t)\,dt = f(b(x))\, b'(x)$$

$t \to b(x)$

$$\int_1^{\ln x} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big]_1^{\ln x} = \frac{(\ln x)^2}{2} - 1$$

Ejercicio 2: Derive.

a. $g(x) = \int_5^{\ln x} \sqrt{t^2+1}\, dt.$ $\quad g'(x) = \sqrt{(\ln x)^2 + 1} \cdot \frac{1}{x}$

$t \to \ln x$

b. $h(x) = \int_{\sec x}^{4} \tan^{-1} t \, dt. \; - \int_4^{\sec x} \tan^{-1} t \, dt.$

$$h'(x) = \tan^{-1}(\sec x) \sec x \tan x$$

Generalizaciones del TFC.

Derive $\displaystyle\int_{x^5}^{x^{10}} \cos t\, dt = \sin t \Big]_{t=x^5}^{t=x^{10}} = \sin(x^{10}) - \sin(x^5)$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x^5}^{x^{10}} \cos t\, dt \right) = \cos(x^{10})\, 10x^9 - \cos(x^5)\, 5x^4.$$

Ejercicio 3: Derive las sigs. expresiones.

a. $\displaystyle f(x) = \int_{\sin x}^{e^x} \sqrt{10+4t^4}\, dt.$

$$f(x) = \underbrace{\sqrt{10+4e^{4x}}}_{t \to e^x} \cdot e^x - \underbrace{\sqrt{10+4\sin^4 x}}_{t \to \sin x} \cos x$$

b. $\displaystyle g(x) = \int_{1/x}^{\cosh x} \sinh(\theta^3)\, d\theta$

$$g'(x) = \sinh(\cosh^3 x) \cdot \sinh x - \sinh\left(\frac{1}{x^3}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = \underbrace{f(b(x))}_{t \to b(x)}\, b'(x) - \underbrace{f(a(x))}_{t \to a(x)}\, a'(x).$$

Ejercicio 4: Encuentre la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt.$ en $x=0.$

Ec. Recta Tangente   pendiente $f'(0)$
punto sobre recta $f(0)$

$$y = f(0) + f'(0)(x-0).$$

$$f(0) = \int_0^0 e^{-t^2/2}\,dt. = 0.$$

$$f'(x) = e^{-x^2/2} \qquad f'(0) = e^{-0^2} = 1.$$

Ec. Recta Tangente. $y = 0 + x = x$

$$\boxed{y = x}$$