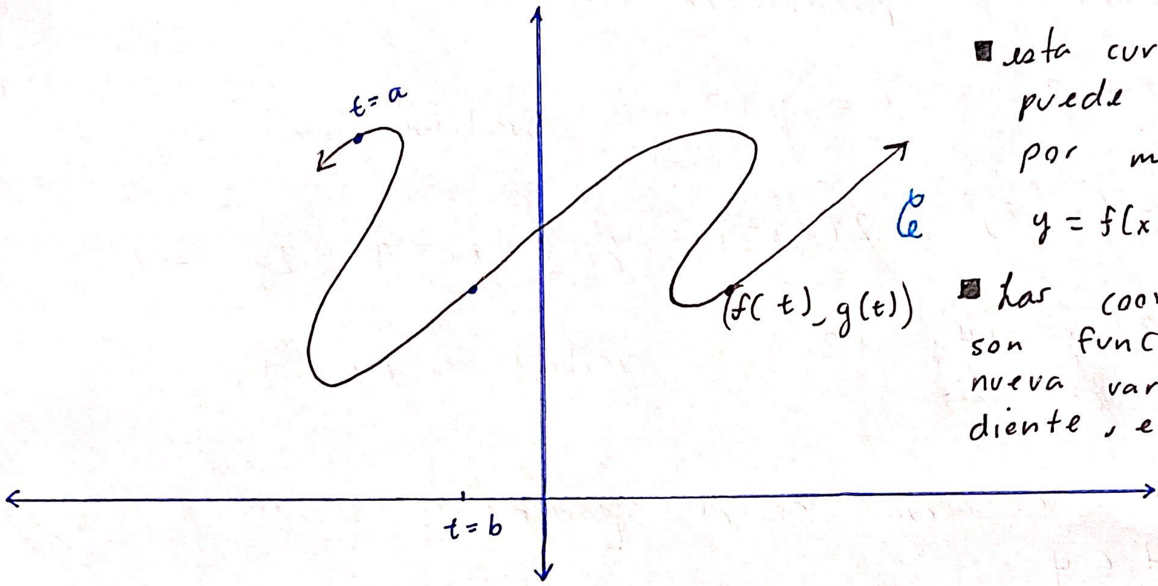
10.1 Ecuaciones Paramétricas



- esta curva no se puede representar por medio de $y = f(x)$ ó $x = f(y)$.
- Las coordenadas x & y son funciones de una nueva variable independiente, el parametro t

$$\mathscr{C}: \left.\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array}\right\} \text{Ecuaciones paramétricas}$$

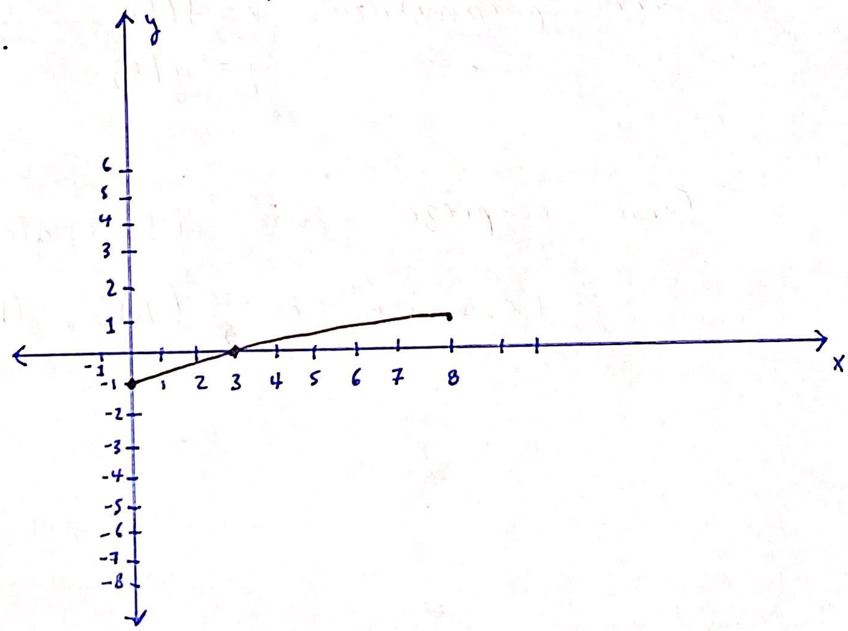
⌈La curva paramétrica se obtiene al trazar cada uno de los puntos utilizando las ecs. paramétricas.⌋

Ej 1: Considere las ecs. paramétricas.

$$x = t^2 - 2t \quad ; \quad y = t - 3 \qquad D\ t \in \mathbb{R}$$

a. Use una tabla de valores para bosquejar la curva paramétrica.

t	x	y
-3	15	-6
-2	8	-5
-1	3	-4
0	0	-3
1	-1	-2
2	0	-1
3	3	0
4	8	1



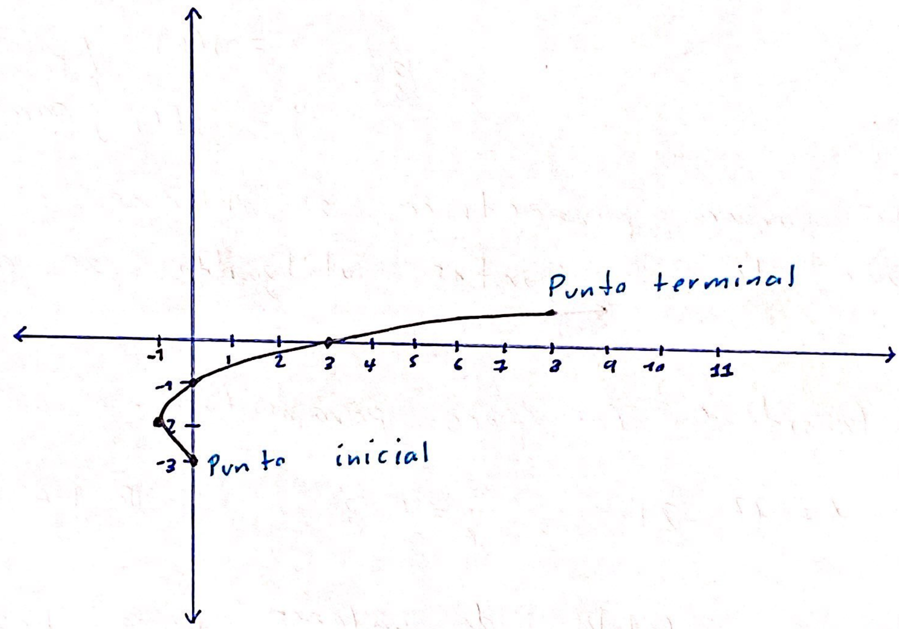
b) Encuentre la ecuación de la curva paramétrica eliminando el parámetro t:

$y = t - 3 \rightarrow t = y + 3$ Sustituir en x

$x = (y+3)^2 - 2(y+3) = y^2 + 6y + 9 - 2y - 6$

$x = y^2 + 4y + 3$ vertice en $(-1, -2)$

c) Grafique la curva si el parámetro se restringe a $0 \leq t \leq 4$



Curva parametrica $x = f(t)$ $a \leq t \leq b$
$y = g(t)$

Curva empieza en $(f(a), g(a)) \Rightarrow$ punto inicial
termina en $(f(b), g(b)) \Rightarrow$ punto terminal

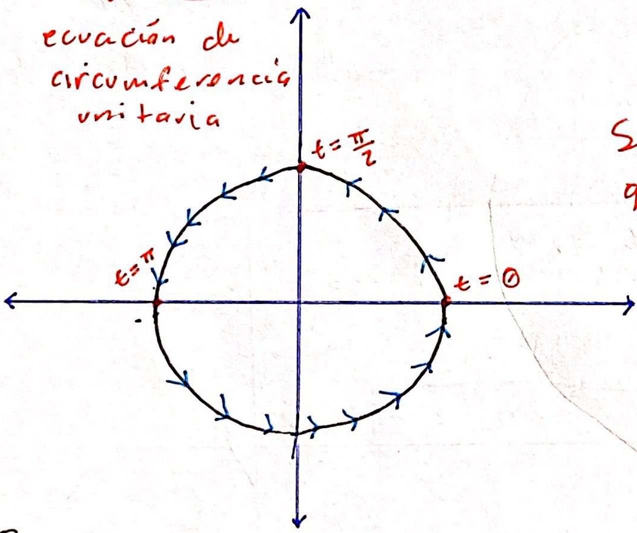
Ej 2: ¿Qué curva representan las siguientes ecuaciones paramétricas?

Indique la dirección de la curva utilizando flechas.

a) $x = \cos(t)$ $y = \sin(t)$

$t = \cos^{-1}(x)$ $y = \sin(\cos^{-1}(x))$ Difícil de interpretar

$$\underbrace{x^2 + y^2}_{\text{ecuación de circunferencia unitaria}} = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$



Sentido antihorario que empieza en (1, 0)

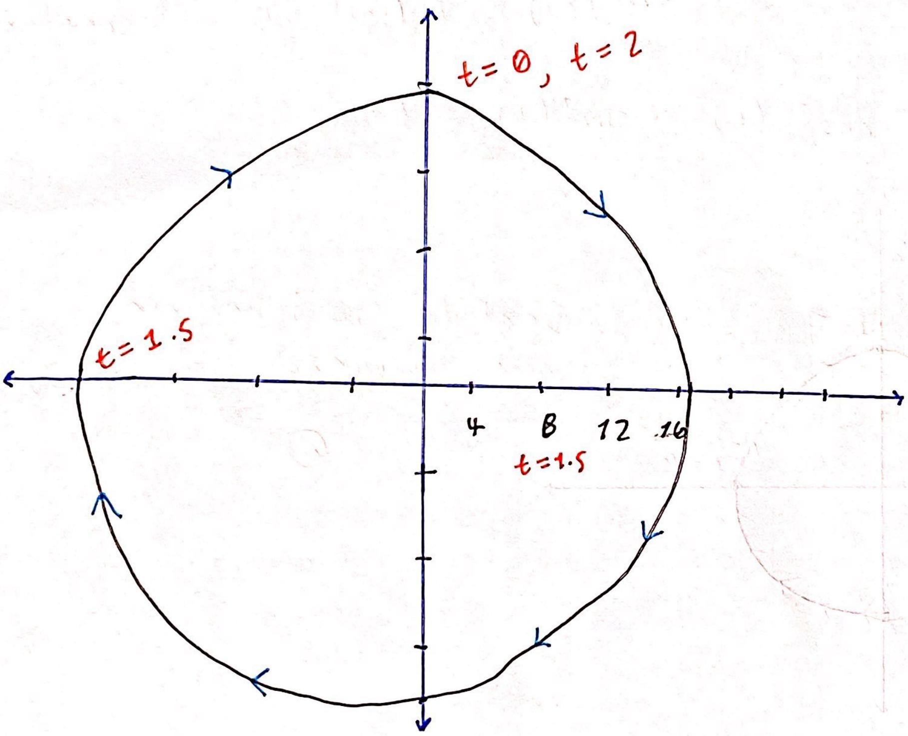
t	0	$\frac{\pi}{2}$	π
x	1	0	-1
y	0	1	0

b) $x = 4\sin(\pi t)$; $y = 4\cos(\pi t)$

• Elimine el parámetro t

$$x^2 + y^2 = 16\sin^2(\pi t) + 16\cos^2(\pi t) = 16$$

$$x^2 + y^2 = 16$$



Sentido horario
se da una vuelta
cada $t = 2$

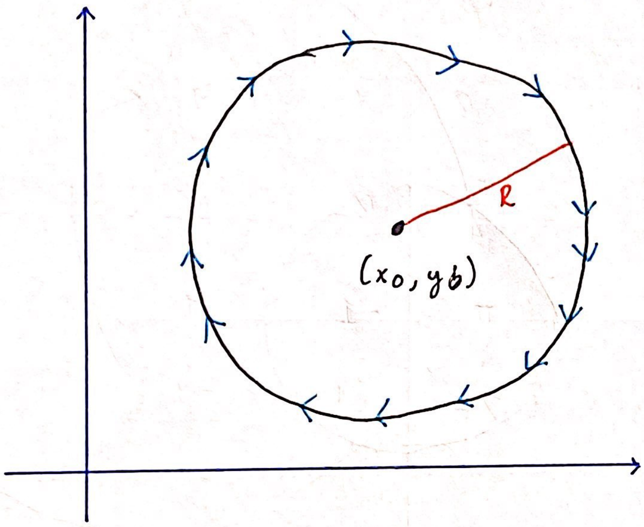
t	0	0.5	1	2
x	0	4	0	0
y	4	0	-4	4

Ejercicio 3: PG 131, encuentre unas ecuacións paramétricas que representen a una circumferencia con centro (x_0, y_1) y radio R.

[!] Hay varias Respuestas

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$



$$R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t = R^2$$

$$\underbrace{(x - x_0)^2}_{R\sin t} + \underbrace{(y - y_0)^2}_{R\cos t} = R^2$$

$$x = x_0 + R \sin t$$

$$y = y_0 + R\cos t$$

$$0 \leq t \leq 2t$$

La parametrización no es única

Sentido horario una vuelta

$$x = x_0 \pm R \cos t$$

$$y = y_0 \pm R \sin t$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

Sentido antihorario

$$x = x_0 + R \cos(4t)$$

$$y = y_0 - R \sin(4t)$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

sentido antihorario

4 vueltas a la circumferencia

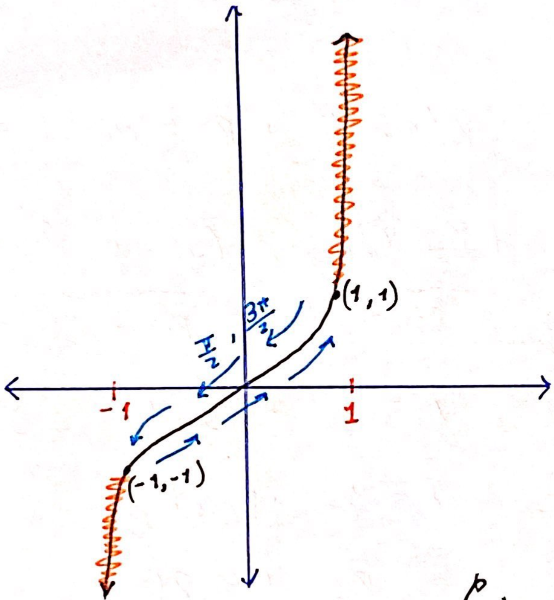
Observación aunque el valor del parámetro p no esté restringido la paramitrización puede llegar a sólo un segmento de la curva original

Ej 4: trace la curva paramétrica

$$x = \cos\theta \; ; \quad y = \cos^3\theta \qquad -1 \leq \cos\theta \leq 1$$

Elimine el parámetro t $\quad \cos\theta = x$

$$y = \cos\theta^{\,3} = x^3$$

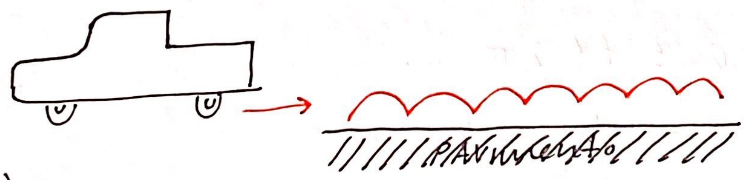


θ	x	y
0	1	1
$\frac{\pi}{2}$	0	0
π	-1	1
2π	1	1

$\mathcal{C}: \; y = x^3 \;, \quad -1 \leq x \leq 1$

Curvas paramétricas comúnes P. 132 :

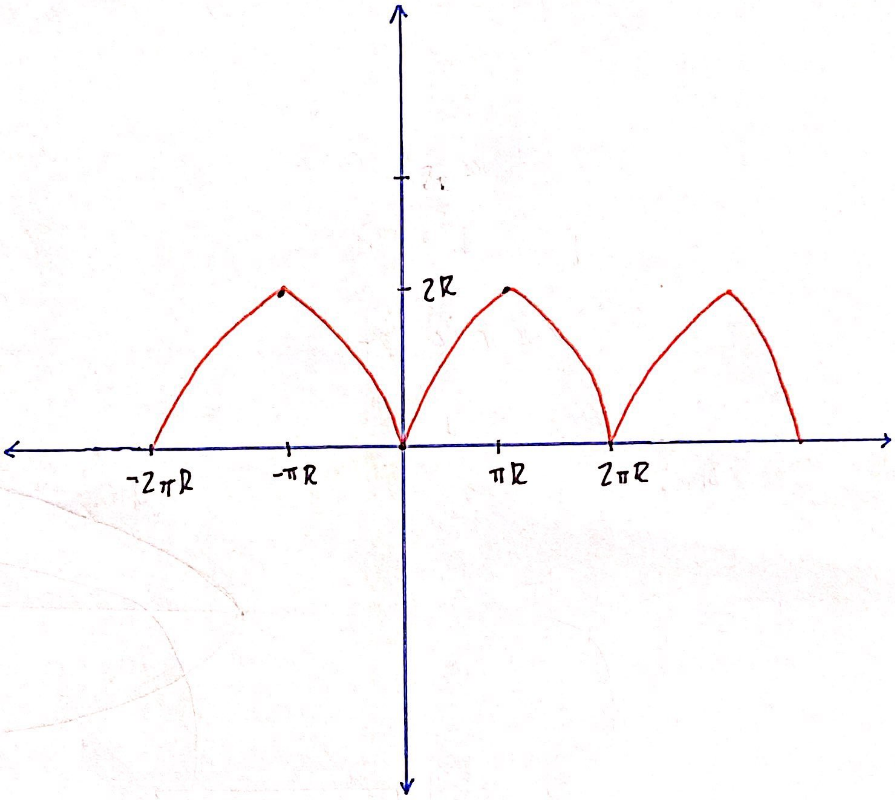
La cicloide



$$x = R(\theta - \sin\theta)$$

$$y = R(1 - \cos\theta)$$

θ	x	y
-2π	$-2\pi R$	0
$-\pi$	$-\pi R$	$2R$
0	0	0
π	πR	$2R$
2π	$2\pi R$	0



$$y = R - R\cos\theta$$

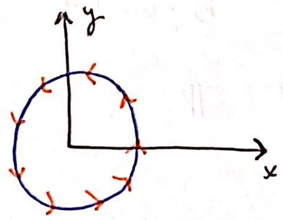
$$\frac{y - R}{-R} = \cos\theta$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{y}{R}\right)$$

$$x = \underbrace{R\left(\cos^{-1}\left(1 - \frac{y}{R}\right)\right) - \sin\left(\cos^{-1}\left(1 - \frac{y}{R}\right)\right)}_{\text{ecuación cartesiana}}$$

Circumferencia de Radio R & centro (0,0).

Ec. Cartesiana $x^2 + y^2 = R^2$

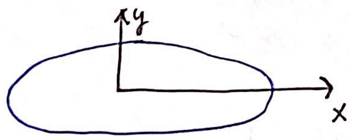


$$x = R\cos\theta$$

$$y = R\sin\theta$$

$$0 \leq x \leq 2\pi$$

Elipse con centro (0,0)



Ec. Cartesiana:

$\downarrow$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad \frac{a^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{b^2\sin^2\theta}{b^2} = 1$$

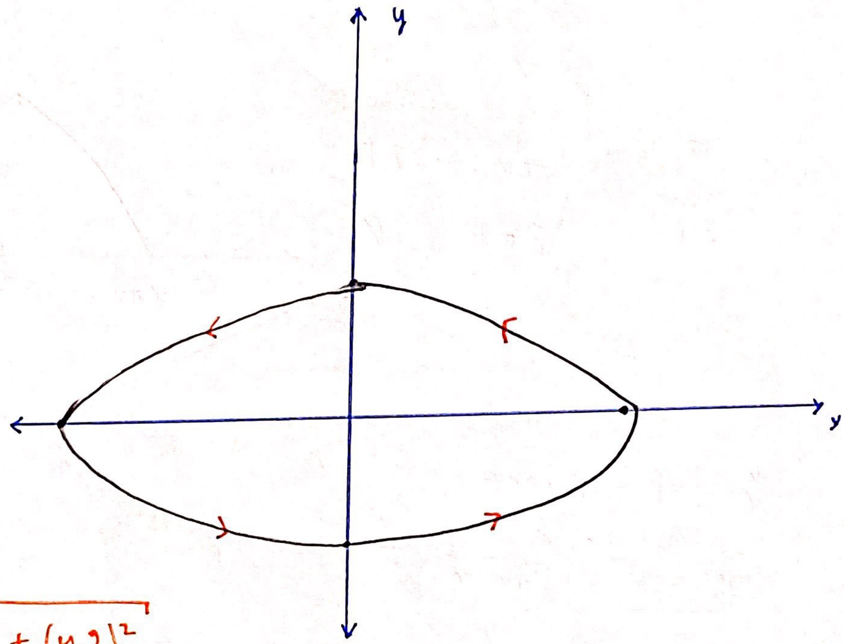
$$x = a \cdot \cos\theta$$

$$y = b \cdot \sin\theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$a = 4$$

$$b = 2$$



$$L = \int \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$$

Longitud de arco

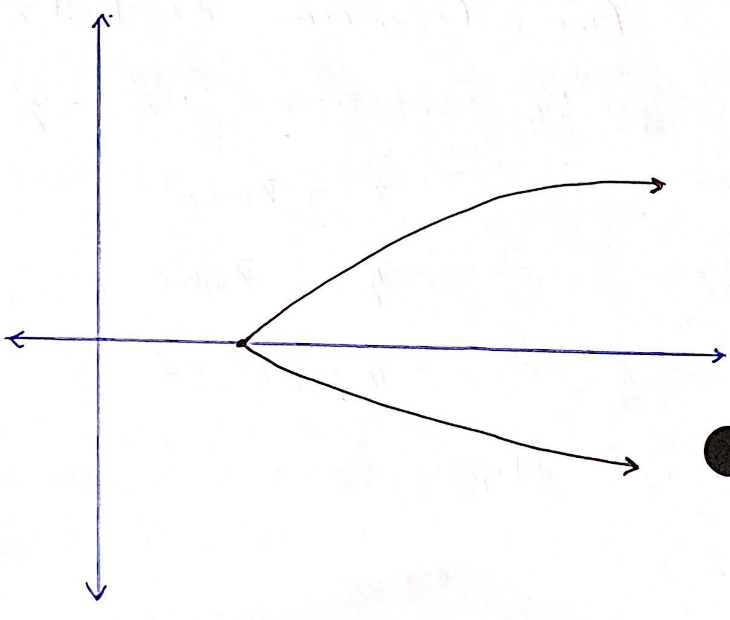
Hiperbola $\quad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$ Identidad hiperbólica

$$x = a \cdot \cosh t$$

$$y = b \cdot \sinh t$$

$$t \in \mathbb{R}$$



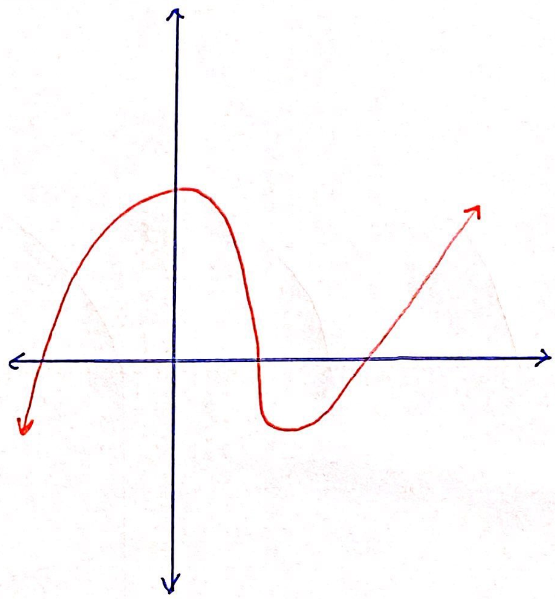
t	x	y
-2	++	--
-1	+	-
0	a	0
1	+	++
2	++	++

¿Como parametrizar $y = f(x)$?

$x = t$

$y = f(t)$

$t \in ID$



x ~~es~~ el parámetro t.