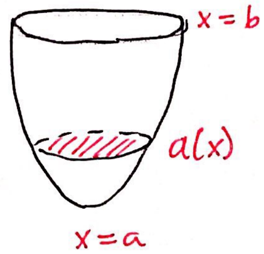
Volúmenes

en revolución

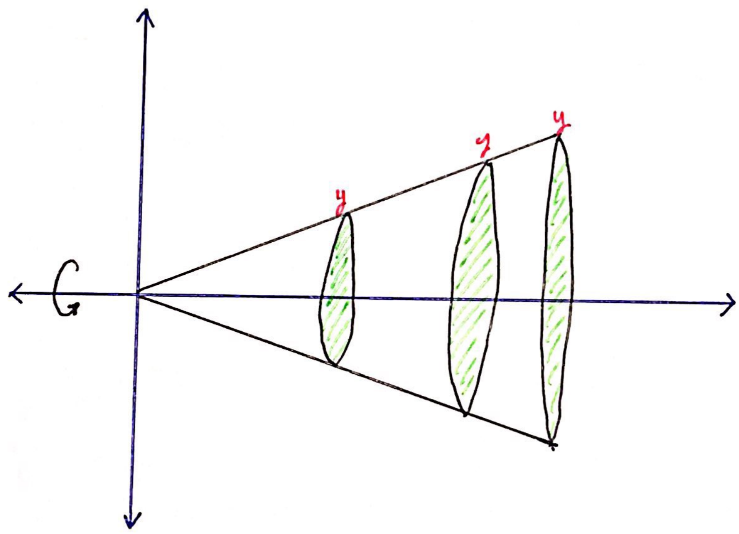
2019-09-12



$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

área de la sección transversal.

Ejemplo: Encuentre el volumen de una curva de altura H y base circular de radio R



Las seccions transversales son circulares del radio

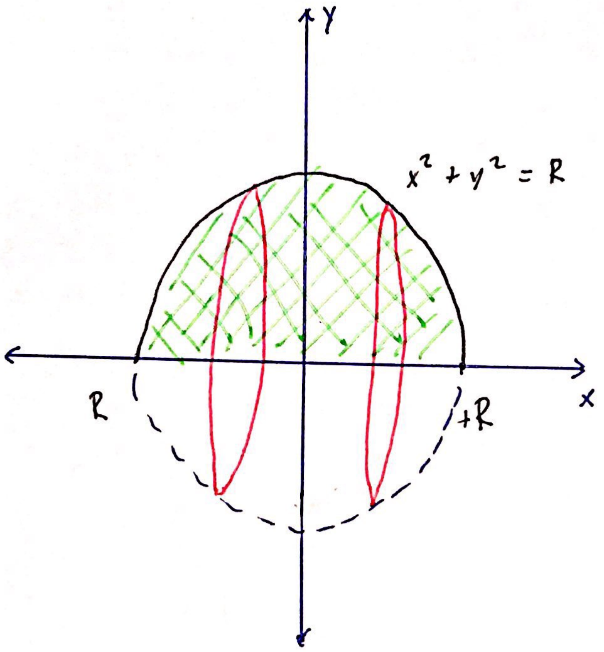
$y(x)$

$$A = \pi y^2$$

$$V = \int_0^4 \pi y^2 \, dx$$

Ejercicio 1: pg. 89 volúmen de una esfera

La esfera se obtiene al girar el círculo $x^2 + y^2 \leq R^2$ respecto al eje -x:



dominio =

$y^2 = R^2 - x^2$ $\quad$ ID→ $-R \leq \leq R^2$

$y = \sqrt{R^2 - x^2}$

$\underbrace{x^2 = R^2}_{0}$ $\quad x = \pm R$

Sección transversal círculo de radio y

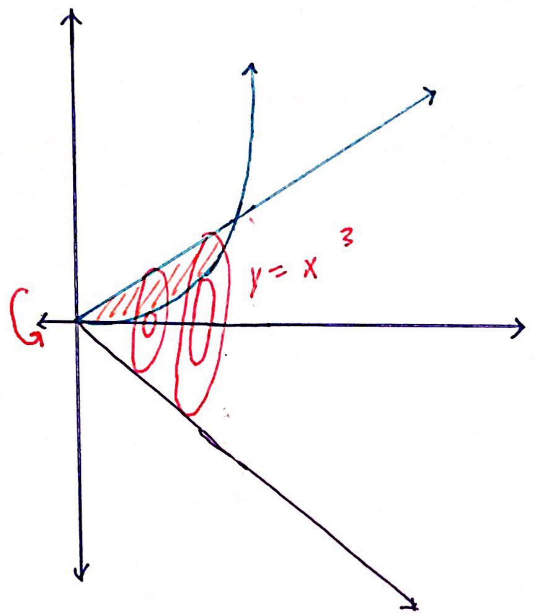
$f(x) = \pi y^2$

$$V = \pi \int_{-R}^{R} A(x)\,dx = 2\pi \int_{0}^{R} (R^2 - x^2) =$$

$$V = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^R\right) = 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) =$$

$$= 2\pi R^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} R^3$$

Encuentre el volúmen del sólido obtenido al girar la región entre las curvas $y = x$ & $y = x^3$ en el cuadrante respecto al eje-x.



V = Vexterna − Vinterna

Área Anillo

$r_{ext} = x \qquad r_{int} = x^3$

$$A = \pi r_{ext.}^2 - \pi r_{int.}^2$$

$$A = \pi x^2 - \pi x^6$$

Volumen $V = \int_0^1 A\,dx = \int_0^1 (\pi x^2 - \pi x^6)\,dx$

$$V = \frac{\pi}{3}x^3 - \frac{\pi}{7}x^7 \Big]_0^1 =$$

$$= \left\{ \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{7} \right\} - \{0\}$$

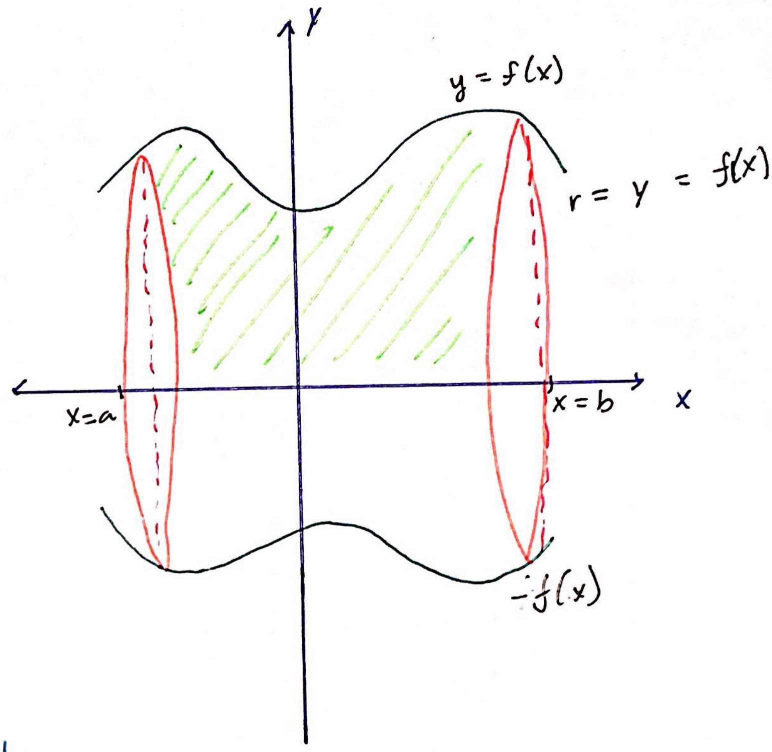
$$= \frac{7\pi - 3\pi}{3 \cdot 7} = \frac{4\pi}{21} \quad \square$$

Sólidos en revolución

$\mathbb{R}: a \leq x \leq b$

$0 \leq y \leq f(x)$

- gire respecto a x

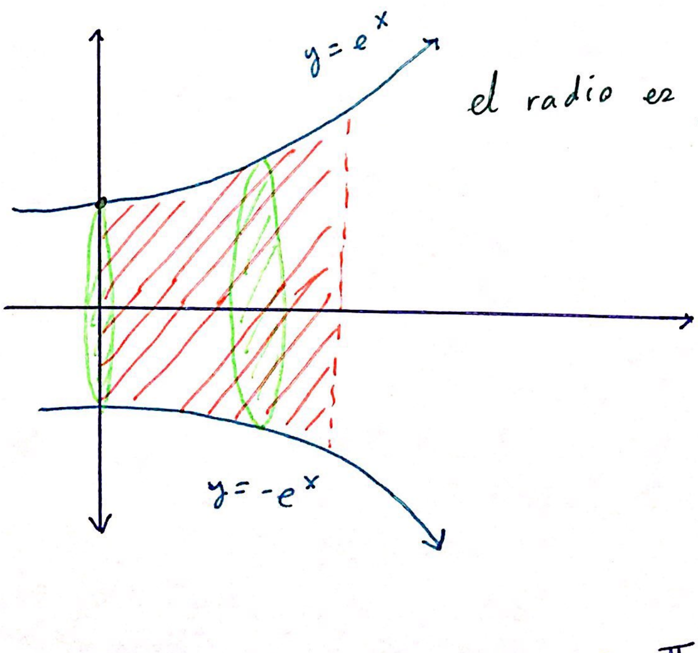


Área transversal:

$A = \pi y^2$

$$V = \int_a^b \pi y^2 \, dx = \int_a^b \pi f^2(x) \, dx$$

Ej 4: encuentra el volumen del sólido que se obtiene al girar la región $R: 0 \leq x \leq \ln(3)$; $0 \leq y \leq e^x$ respecto al eje-x Pg 93.



el radio es y

$A = \pi r^2$

$A = \pi y^2$

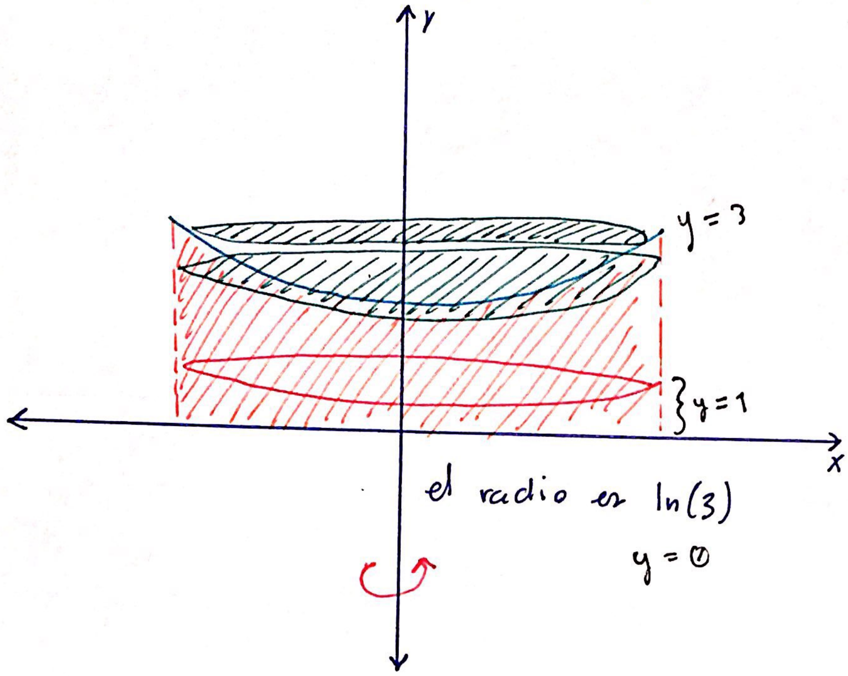
$$\therefore \int A = \int_0^{\ln(3)} \pi e^{2x} \, dx$$

$$V = \pi \int_0^{\ln(3)} e^{2x} \, dx = \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big]_0^{\ln(3)}$$

$$= \left\{ \frac{\pi}{2} e^{2\ln(3)} \right\} - \left\{ \frac{\pi}{2} \cancel{e^{2(0)}}^{1} \right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} 3^2 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(9-1) \quad \square$$

Girando la misma región respecto al eje-x al eje-y.



$f(0) = 1$

$f(\ln(3)) = 3$

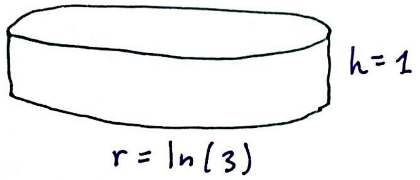
el radio es $\ln(3)$

$y = 0$

$$V = V_1 - V_2$$

Por casos:

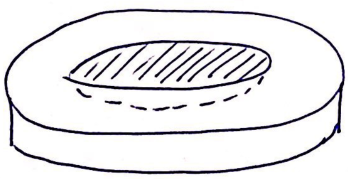
caso 1 el cilíndro



$v_1 =$ cilíndro

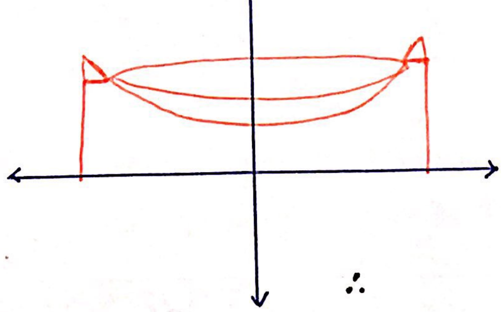
$v_1 = \pi r^2 h = \pi \ln^2(3)$

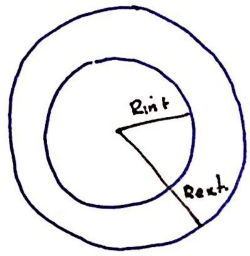
caso 2: sólido hueco



$A = \pi r^2_{ext.} - \pi r^2_{int.}$

$A = \pi(\ln(3))^2 - \pi \ln(y)^2$





$\therefore$

$$V_2 = \int_1^3 \pi \ln(3)^2 - \pi \ln(y)^2 \, dy$$