8.5 Probabilidad

Variable continua, función de densidad de probabilidad $f(x)$

i. $f(x) \geq 0$ en $-\infty \leq x \leq \infty$.

ii $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ 100% probabilidad.

Probabilidad de que x ocurra entre a y b.

$$\underset{\text{probabilidad}}{P}(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Distribución Exponencial, $f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}$. $x \geq 0$.

μ = media.

Ejercicio 2: El tiempo de espera promedio para recibir una orden a domicilio de comida es de 0.5 h y tiene una distribución exponencial.

a. Encuentre la probabilidad de que la comida se reciba después de 0.5 hora.

$$\frac{1}{0.5} = 2.$$

$$\mu = 0.5 \qquad f(x) = \frac{1}{0.5} e^{-x/0.5} = 2e^{-2x}$$

$$P(x \geq 0.5) = \int_{0.5}^{\infty} e^{-2x} \underbrace{2\,dx}_{-du} = -e^{-2x}\Big]_{0.5}^{\infty}$$

$u = -2x \qquad du = -2dx$

$$P(X \geq 0.5) = -\lim_{x\to\infty} e^{-2x} + e^{-2(0.5)} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$e^{-\infty} \to 0$

36.79 %.

Probabilidad Alta.

b. Encuentre la probabilidad de que la comida se reciba en menos de 15 min ó 0.25 horas.

$$P(X \leq 0.25) = \int_{-\infty}^{0.25} f(x)dx = \int_{0}^{0.25} e^{-2x}(2dx)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x \geq 0. \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

$$-e^{-2x}\Big]_0^{0.25} = -e^{-2(0.25)} + e^{-0}$$

$$= 1 - e^{-0.5}$$

$$\approx 39.34\%.$$

c. El servicio a domicilio se vuelve más eficiente y ahora la media para entregar el producto es de 20 min. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto se entregue después de 30 minutos. ó 0.5 h

$$\mu = 20 \text{ min} = \frac{20}{60} \text{ hr} = \frac{1}{3} \text{ h} \qquad f(x) = 3e^{-3x}$$

$$P(X \geq 0.5) = \int_{0.5}^{\infty} e^{-3x}(3dx) = -e^{-3x}\Big]_{0.5}^{\infty}$$

$$= -\lim_{x\to\infty} \cancel{e^{-3x}} + e^{-3(0.5)}$$

$e^{-\infty} \to 0$

$$= e^{-1.5} \approx 0.2231 \text{ ó } 22.31\%$$

Media o Valor Esperado. (μ)

Variable discreta: media es un promedio ponderado.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & & p(x_n) \end{array} \rightarrow \text{pesos, frecuencias}$$

$$\mu = x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \cdots x_n p(x_n)$$

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p(x_i) \qquad p(a \leq x \leq b) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)$$

Si la variable es continua, μ se obtiene al integrar $x\,f(x)$.

$$\boxed{\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx}$$

$f(x)$ uniforme
exponencial
normal.

Varianza: Suma de las diferencias al cuadrado de cada x_i respecto a la media μ.

Discreta. $$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \, p(x_i) = \sigma^2$$

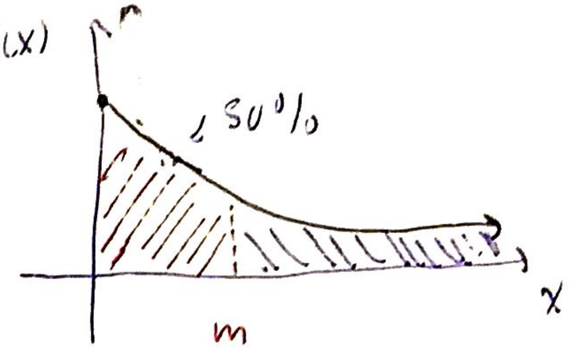
σ sigma s
μ mu. $\bar{X}$

continua: $$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx$$

Desviación Estándar: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\text{Varianza}}$

Mediana: el número m para el cual la probabilidad acumulada es igual al 50% ó a 0.5.

$$\int_{-\infty}^{m} f(x)\,dx = 0.5$$



Ejercicio 3: Considere la función exponencial

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}, \quad x \geq 0. \qquad \text{parámetro } \mu.$$

a. Encuentre la media de f(x). media vs. mediana.

$$\int_0^\infty x f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{x}{\mu} e^{-x/\mu}\,dx = uv - \int v\,du.$$

$u = x$ $\qquad dv = \frac{e^{-x/\mu}}{\mu}\,dx$

$du = dx$

$v = -e^{-x/\mu}$

$$\int \frac{x}{\mu} e^{-x/\mu}\,dx = -x e^{-x/\mu} + \int e^{-x/\mu}\,dx. \qquad (x+1)e^{-x/\mu}.$$

$$= -x e^{-x/\mu} - \mu e^{-x/\mu} + C.$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{\mu} e^{-x/\mu}\,dx = -\lim_{x\to\infty} x e^{-x/\mu} - \lim_{x\to\infty} \mu e^{-x/\mu} \qquad e^{-\infty} \to 0$$

$$+ 0 \cdot e^{-0} + \mu\, e^{-0}$$

$$= \mu - \lim_{x\to\infty} x e^{-x/\mu}. \qquad \infty \cdot 0$$

Regla LH $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x/\mu}} \underset{LH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\mu}e^{x/\mu}} = 0$

Media distribución exponencial: $\int_0^\infty \frac{x}{\mu} e^{-x/\mu}\,dx = \mu.$

b. Encuentre la mediana de $f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}.$

Encuentre m tal que $\int_0^m f(x)\,dx = 0.5.$

$$\int_0^m \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}\,dx = -e^{-x/\mu}\Big]_0^m = \boxed{-e^{-m/\mu} + 1}$$

$$-e^{-m/\mu} + 1 = 0.5$$ Incógnita m.

$$+e^{-m/\mu} = +0.5$$

$$-m/\mu = \ln(0.5)$$

$$-m = \mu \ln(0.5)$$

$$m = -\ln(0.5)\,\mu. \approx 0.70\,\mu.$$

Integrar $\int (x-\mu)^2 e^{-x/\mu}\,d\mu. = \sigma^2?$ $\mu = 1.$

Ejercicio 4: Encuentre la media, mediana, varianza y desviación estándar de la distribución uniforme.

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b. \quad \text{para } b = 6 \text{ y } a = 0.$$

Específico $f(x) = \frac{1}{6} \quad 0 \leq X \leq 6.$

Probabilidades $P(X_0 \leq X \leq X_1) = \int_{X_0}^{X_1} \frac{1}{6}\, dX$

Media: $\mu = \int_0^6 x\, f(x) = \int_0^6 \frac{x}{6}\, dx = \frac{1}{6} \frac{x^2}{2} \Big]_0^6 = \frac{1}{12} 36 = 3.$

Mediana $\int_0^m f(x)\, dx = 0.5.$

$$\int_0^m \frac{1}{6}\, dX = \frac{X}{6} \Big]_0^m = \frac{m}{6} = 0.5.$$

$$m = 6(0.5) = 3.$$

Media = Mediana $= \frac{1}{2}(b+a).$

Varianza y Desviación Estándar. $\mu = 3 \quad f(x) = \frac{1}{6}.$

$$\sigma^2 = \int_0^6 (X-\mu)^2 f(x)\, dx = \frac{1}{6} \int_0^6 (\overset{u}{X-3})^2 \underbrace{dX}_{du}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} (X-3)^3 \Big]_0^6$$

$$= \frac{1}{18} (3^3 - (-3)^3)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{18}(27+27) = \frac{54}{18} = 3.$$

Desviación Estándar. $\sigma = \sqrt{3}$.

Laboratorio 9:

$$f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad f(x) = \frac{9}{x^2}.$$

$1 \leq x \leq 3.$

a) $$f_{ave} = \frac{1}{2}\int_1^3 9x^{-2}\,dx = \frac{-1}{2}\frac{9}{x}\Big]_1^3$$

$$= -\frac{1}{2}3 + \frac{1}{2}9 = \frac{6}{2} = 3.$$

b) $f(c) = f_{ave}$ resuelva para c.

$$\frac{9}{c^2} = 3. \Rightarrow 3 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{3} \approx 1.73$$

c).