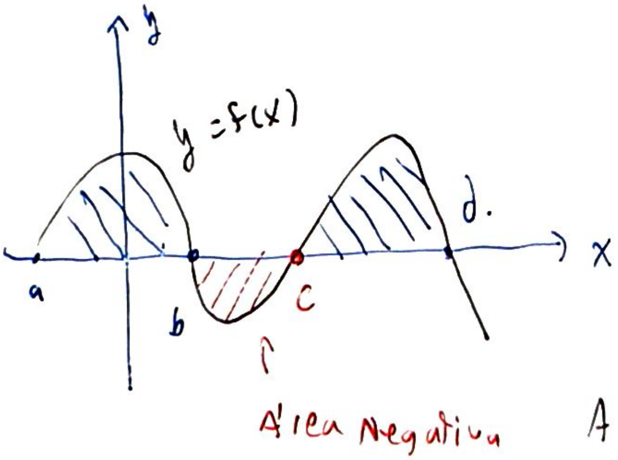
6.1 A'reas entre Curvas (p 79).



A'rea entre $y = f(x)$ y el eje-x

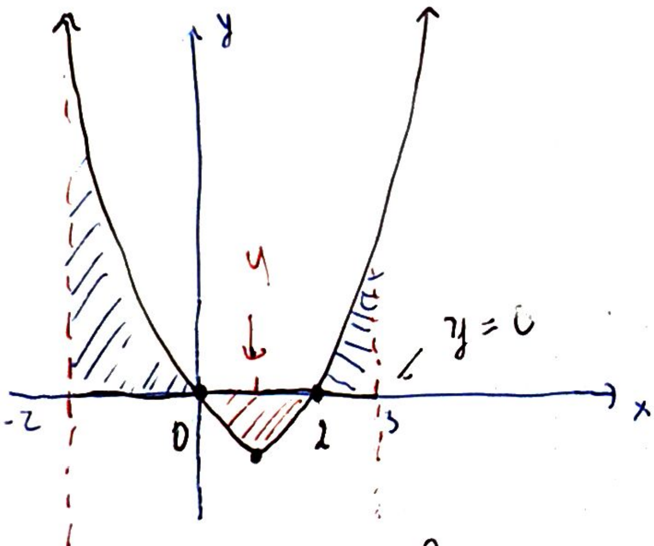
$$A = \int_a^d |f(x)|\,dx$$

$$A = \int_a^b f\,dx - \int_b^c f\,dx + \int_c^d f\,dx.$$

Ejercicio 1: Bosqueje y encuentre el área de la región delimitada por $y = 3x^2 - 6x$, $x = -2$, $x = 3$ y el eje-x.

Bosqueje la curva $y = 3x^2 - 6x$

interceptos -x: $y = 3x^2 - 6x = 0 \quad 3x(x-2) = 0 \quad x = 0, 2.$



$$A = \int_{-2}^{3} |3x^2 - 6x|\,dx$$

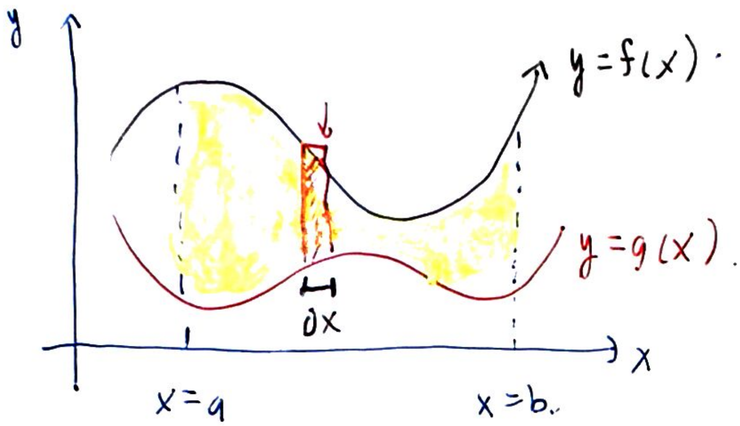
$$A = \int_{-2}^{0} 3x^2 - 6x\,dx - \int_0^2 3x^2 - 6x\,dx + \int_2^3 3x^2 - 6x\,dx.$$

$$A = x^3 - 3x^2\Big]_{-2}^{0} + 3x^2 - x^3\Big]_0^2 + x^3 - 3x^2\Big]_2^3$$

$$A = 0 - (-8 - 3(4)) + (12 - 8 - 0) + (27 - 27 - (8 - 12))$$

$$A = 20 \quad + 4 \quad + 4. \quad = 28$$

Área entre dos curvas (p. 80)



Región está entre las dos curvas $g(x) \leq y \leq f(x)$ y las rectas verticales $a \leq x \leq b$.

Considere un rectángulo infinitesimal, ancho dx altura $f(x)-g(x)$.

$$dA = [f(x)-g(x)]\,dx$$

Integrando en x desde $x=a$ hasta $x=b$.

$$\int dA = A = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \underbrace{\int_a^b f\,dx}_{\text{amarillo + blanco}} - \underbrace{\int_a^b g\,dx}_{\text{blanco}}$$

Área entre dos curvas:

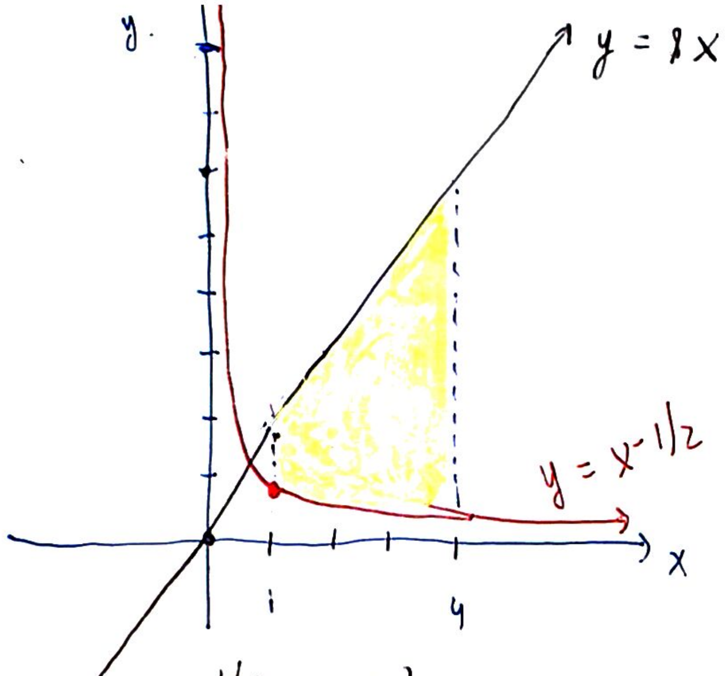
$$A = \int_a^b y_{sup} - y_{inf.}\,dx$$

$(-2)-(-8) = -2+8 = 6.$

Ejemplo: Bosqueje y encuentre el área de la región.

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y_2 = 8x \quad \text{en } [1,4].$$

Realice los bosquejos de las curvas.



en $x = 1$

$y_1(1) = 1 \qquad y_2(1) = 8$

intersección ocurre fuera del intervalo $[1, 4]$.

$y_1 = y_2$.

$x^{-1/2} = 8x$

$1 = 8x^{3/2}$.

$x^{3/2} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$

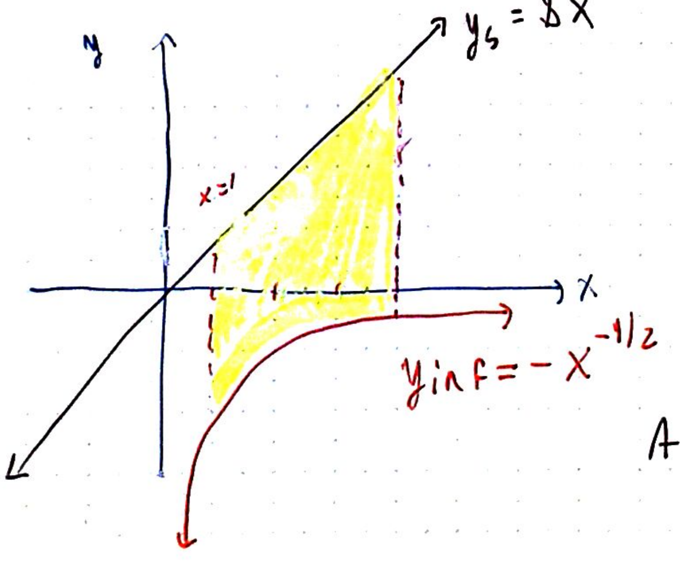
$x^{3/2} = 2^{-3}$

$x = (2^{-3})^{2/3} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$. intersecto. (no afecta el problema)

$$A = \int_1^4 (8x - x^{-1/2})\,dx = 4x^2 - 2x^{1/2}\Big]_1^4$$

$$A = 4^3 - 2\sqrt{4} - (4 - 2) = 64 - 4 - 2 = 58$$

Emilio: Área de la región entre $y_2 = 8x$ & $y_1 = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ en $[1, 4]$.



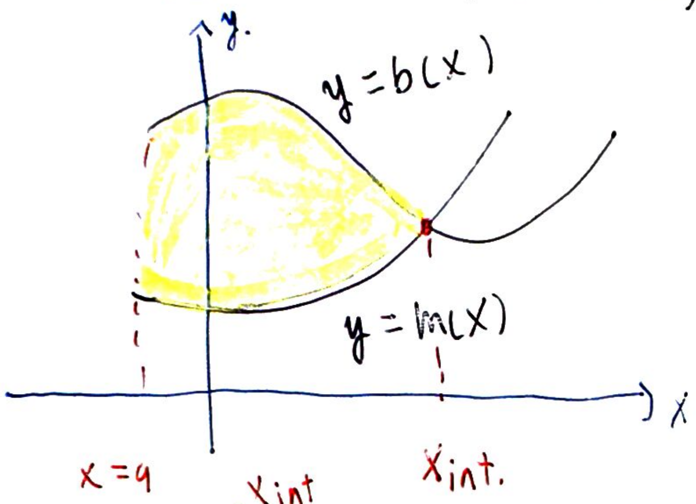
$$A = \int_1^4 y_s - y_{inf}\,dx$$

$$A = \int_1^4 8x + x^{-1/2}\,dx$$

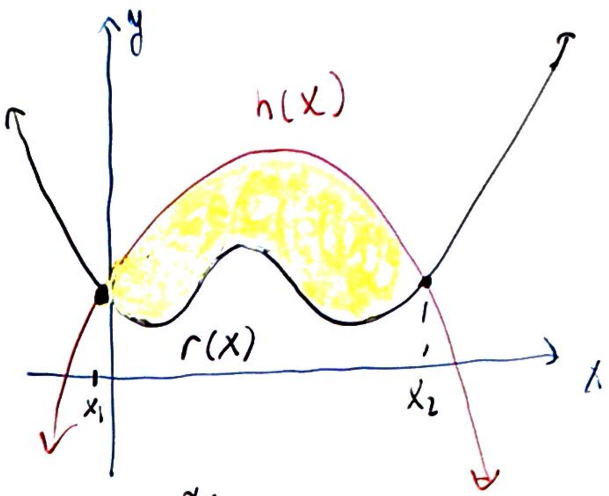
$$A = 4x^2 + 2x^{1/2}\Big]_1^4$$

$$A = 64 + 4 - 4 - 2 = 62.$$ más grande.

Regiones con puntos de intersección entre las curvas. Límites de integración no están explícitos.



$$A = \int_a^{x_{int}} b - m \; dx$$



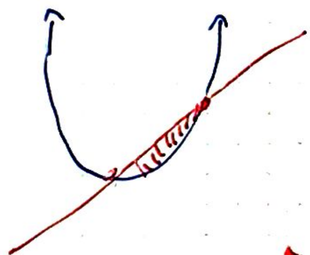
$$A = \int_{x_1}^{x_2} h - r \; dx$$

Es necesario encontrar las intersecciones entre las 2 curvas

Ejemplo: Encuentre el área de la región entre

$y_1 = 3x$ & $y_2 = 3x^2$.

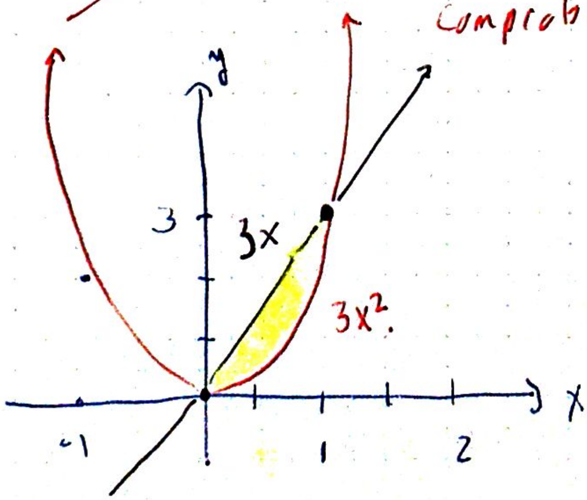
Intersecciones $y_2 = y_1$



$3x^2 = 3x \Rightarrow 3x^2 - 3x = 3x(x-1) = 0$

$x = 0, 1.$ $\quad y_1(0) = 0$ $\quad y_2(0) = 0$

Comprobando. $\quad y_1(1) = 3$ $\quad y_2(1) = 3$



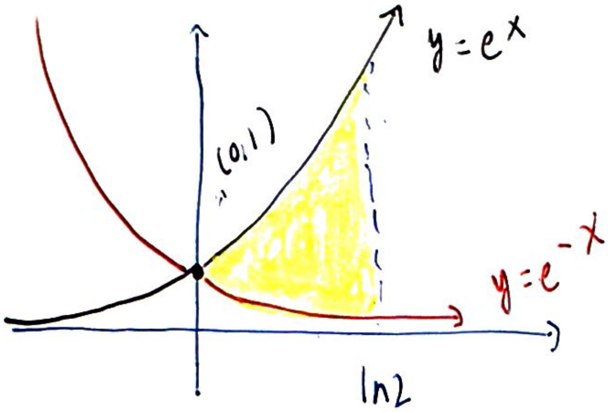
$$A = \int_0^1 3x - 3x^2 \; dx$$

$$A = \frac{3}{2}x^2 - x^3 \Big]_0^1$$

$$A = \frac{3}{2} - 1 = 0 = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 2: Bosqueje y encuentre de la región (p. 81)

a) $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $x = 0$ & $x = \ln 2$.



$$A = \int_0^{\ln 2} e^x - e^{-x} \, dx$$

$$A = e^x + e^{-x} \Big|_0^{\ln 2}$$

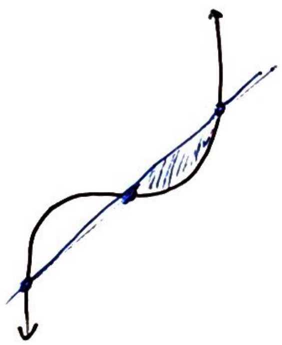
$$A = e^{\ln 2} + e^{-\ln 2} - (e^0 + e^{-0})$$

$$A = 2 + \frac{1}{2} - (1 + 1)$$

$$A = 2 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{e^{\ln 2}} = \frac{1}{2}$$

b.) $y_1 = x^3$ & $y_2 = 4x$.

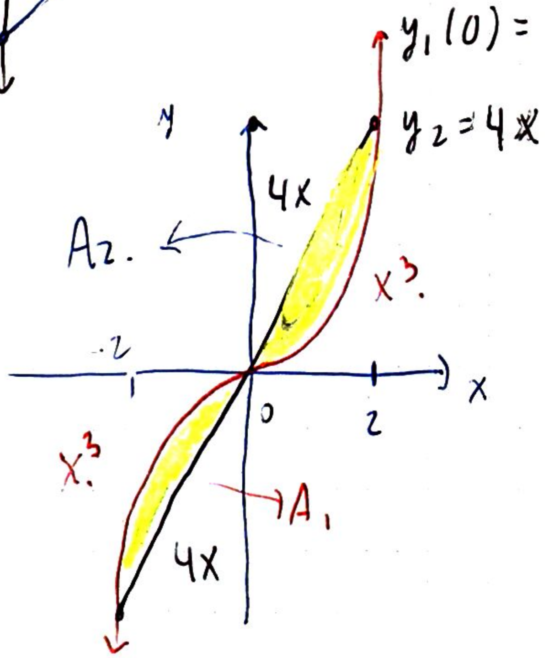


Intersecciones entre y_1 & y_2.

$x^3 = 4x$

$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = 0 \quad x = 0, \pm 2.$

$y_1(0) = y_2(0) = 0 \quad y_1(2) = 8 \quad y_2(2) = 8.$



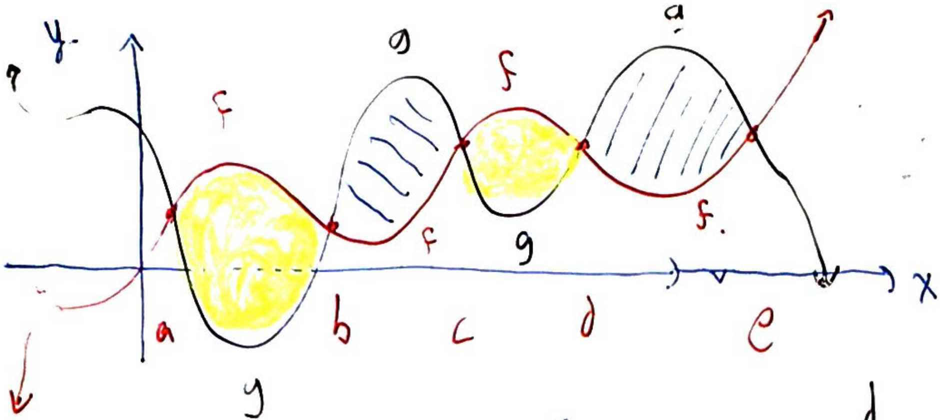
$$A = \underbrace{\int_{-2}^{0} x^3 - 4x \, dx}_{} + \underbrace{\int_0^2 4x - x^3 \, dx}_{}$$

son iguales.

$$A = 2\int_0^2 4x - x^3 \, dx$$

$$A = 2\left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\Big]_0^2\right) = 2\left(8 - \frac{16}{4} - 0\right) = 2(4) = 8.$$

Regiones con dos curvas superiores diferentes.



Área entre estas dos curvas

$$A = \int_a^b f - g\,dx + \int_b^c g - f\,dx + \int_c^d f - g\,dx + \int_d^e g - f\,dx.$$

$$A = \int_a^e |f - g|\,dx$$