Cálculo Integral

Notas de clase

David Gabriel Corzo Mcmath

2019-09-20 08:07

Índice general

Parte I

Material de clase, Notas

Capítulo 1

Antiderivadas, integrales indefinidas, notación de integral, reglas básicas de integración, integrales definidas, Teorema fundamental del cálculo

Calculo Integral: Antiderivadas

23/07/2017

- **Integral indefinida:** es una función $F(x)$ cuya derivada es $f(x)$.

  ◦ La notación de integrales $\int \square \, dx$ es más cómodo ya que es más variable, se pueden integrar con respecto ~~a las variables~~ otras variables.

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

encontrar la integral de secante, cosecante, tan

Ejemplo = antiderive $f(x) = 14x^6$

$$F(x) = 2x^7 \longrightarrow F'(x) = 14x^6$$

- $F(x) = \underbrace{2 \cdot x^7 + \pi + \sqrt{12}}$

por que se puede cancelar cualquier constante

por esto se agrega la constante de integración.

$$\boxed{\text{Lo más general sería } F(x) = 2x^7 + C}$$

$$\underbrace{\int \square \, dx}_{\text{esto significa INTEGRE}} = F(x) + C$$

Sinónimos: Antiderivada = Integrar

$\int \_\_ \, dx$ diferencial, integre respecto a x.

Reglas de Integración Básicas ⇒

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$n \neq -1$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \underbrace{\ln|x| + C}_{\text{valor absoluto por que}}$$

$$\frac{d}{dx}\big(\ln(-x)\big) = \frac{1}{x}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Trigonometría

$\sin x \longleftrightarrow \cos x$

$\cos x \longleftrightarrow -\sin x$

$\tan x \longleftrightarrow \sec^2 x$

$\cot x \longleftrightarrow -\csc^2 x$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x\,dx = \csc x + C$$

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$$

Trigonometría Inversa

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

Suma o diferencia

$$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x) \pm \int g(x)$$

Multiplo constante

$$\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

Ejemplos pág 11

ⓐ $\int x^{50} + 2x^6 \, dx = \frac{x^{51}}{51} + \frac{2}{7}x^7 + C$

ⓑ $\int \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \, dx = \tan^{-1}x + \ln|x| + x^{-1} + C$

ⓒ $\int \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} \, dx = \int x^{1/2} + x^{-1/2} + x^{-3/5} \, dx$

$= \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + \frac{5}{2}x^{2/5} + C$

ⓓ $\int x^{\ln(2)} + x^{\sqrt{2}} + x^{\sin(2)} \, dx = \frac{x^{1+\ln(2)}}{1+\ln(2)} + \frac{x^{1+\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}} + \frac{x^{1+\sin(2)}}{1+\sin(2)}$

Ejercicios de libro de trabajo:

ⓐ $\int (\underbrace{x^e}_{\text{potencia}} + \underbrace{e^x}_{\text{exponencial}}) \, dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + e^x + C$

ⓑ $\int \left(8 \cdot 10^x - \frac{2}{x}\right) dx = \frac{8 \cdot 10^x}{\ln(10)} - 2\ln|x| + C$

ⓒ $\int (x-2)(x+2)(x^2+4) \, dx = \int (x^2-4)(x^2+4) \, dx =$

$\int (x^4 - 16) \, dx = \frac{1}{5}x^5 - 16x + C$

ⓓ $\int e^{-4x}\left(e^{4x} + e^{5x}\right) dx = \int (1+e^x) \, dx = x + e^x + C$

Integrales Definidas

Son integrales con límites de integración en $[x = a]$ y $[x = b]$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx} \qquad \int f(x)\,dx = F(x)$$

■ El teorema fundamental del calculo:

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

- Se utiliza la notación corchete

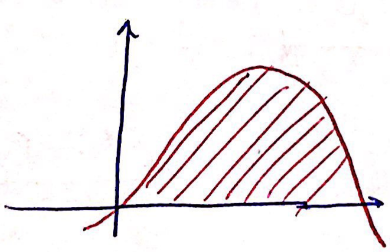
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} \text{ luego evalúa}$$

$$F(x) + c\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$$

Funciones Integrables si $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

Ejercicio 1 : Evalúe

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$



a) $\int_0^3 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{3} - 0 = 9$

b) $\int_1^{36} \sqrt{x}\,dx = \left.\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_9^{36} = \frac{2}{3}(\underbrace{36}_{(6^2)^{3/2}}{}^{3/2} - 9^{3/2})$

$= \frac{2}{3}(216 - 27) = 144 - 18$

$= 126$

c) $\int_0^2 \frac{1}{1-x^2}$ * esta función no existe en 1 y -1 es discontinua en el intervalo de evaluación se haría por fracciones parciales

d) $\int_1^4 \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{x^{-1/2}} + \underbrace{3\sqrt{x}}_{3(x^{1/2})}\right)dx = \left. 2 \cdot x^{1/2} + \frac{3 \cdot 2x^{3/2}}{3}\right]_1^4$

$= 2\sqrt{4} + 2(2^2)^{3/2} - (2 \cdot \sqrt{1} + 2 \cdot 1^{3/2})$

$4 + 16 - (2 + 2) = 16$

Teorema Fundamental del Cálculo Generalizado

Evalúe la siguiente expresión, integrando y luego derivando:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x^3}^{x^5} e^y\,dy\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{x^5} - e^{x^3}\right) = \underbrace{5x^4}_{b'(x)}\underbrace{e^{x^5}}_{e^{b(x)}} - \underbrace{3x^2}_{a'(x)}\underbrace{e^{x^3}}_{e^{a(x)}}$$

En este problema ambos límites de integración dependen de x y en la respuesta final se utilizaron dos reglas de la cadena por separado.

El último ejemplo nos indica como el uso del TFC y la regla de la cadena se puede extender para funciones donde los dos límites de integración dependen de x.

> Use regla de la cadena para el límite superior $b(x)$ y para el límite inferior $a(x)$
>
> $$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} F(t)\,dt\right) = F(\ b(x)\ )\,b'(x) - F(\ a(x)\ )\,a'(x)$$

Ejercicio 3: Evalúe las siguientes expresiones

a. $\displaystyle \frac{d}{dx}\left(\int_{\sin x}^{e^x} \sqrt[4]{10+4t^4}\,dt\right) = \sqrt[4]{10+4e^{4x}}\,e^x - \sqrt[4]{10+4\sin^4(x)}\,\cos x$

b. $\displaystyle \frac{d}{dx}\left(\int_{1/x}^{\ln x} \cosh\theta^3\,d\theta\right) = \cosh(\ln^3 x)\frac{1}{x} + \cosh(x^{-3})\frac{1}{x^2}$

Ejercicio 4: Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = 0$.

a. $\displaystyle f(x) = \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt.$

Coordenada-y:	$f(0) = \int_0^0 e^{-t^2/2}\,dt = 0$
Derivada:	$f'(x) = e^{-x^2/2}$
Pendiente:	$f'(0) = e^{-0/2} = 1$
Recta Tangente:	$y = f(0) + f'(0)(x-0) = x$

b. $\displaystyle f(x) = \int_0^x \cosh^2 t\,dt.$

Coordenada-y:	$f(0) = \int_0^0 \cosh^2 t\,dt = 0$
Derivada:	$f'(x) = \cosh^2 x$
Pendiente:	$f'(0) = (\cosh 0)^2 = 1$
Recta Tangente:	$y = f(0) + f'(0)(x-0) = x$

Capítulo 2

Área, desplazamiento y propiedades, sobre vuelo acerca de la regla de la integral definida (inversión de límites con signo negativo), propiedades de integrales definidas, fórmula de área & fórmula de desplazamiento.

Calculo Integral

25/07/2019

5.4 Área, Desplazamiento y Propiedades

Cómo se encontraba el área de una región

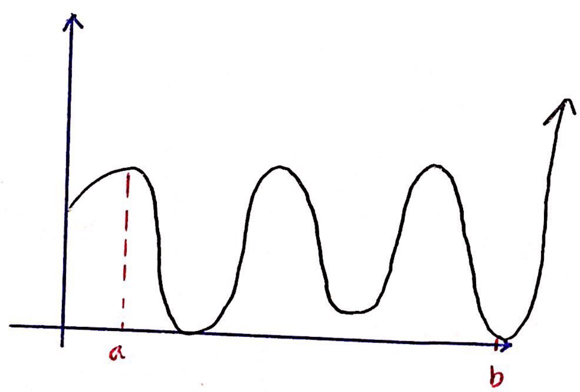
$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, dx$$

La integral definida de f en $[a,b]$ f es continua

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, dx$$

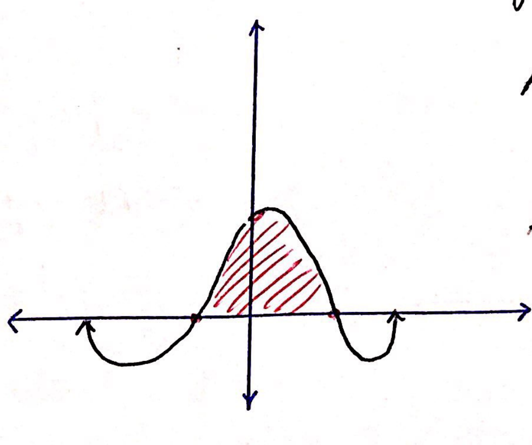
Interpretacion de integral definida

El area de la región bajo la curva $y = f(x)$, encima del eje $-x$ y entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ en la integral definida de f en $[a,b]$ $f > 0$



$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

Considere el área bajo $y = \cos x$ en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



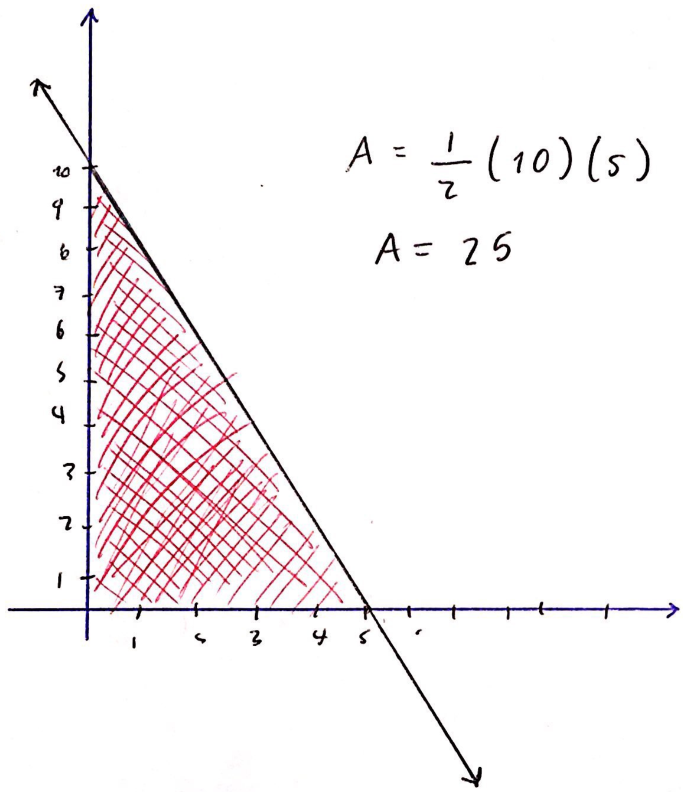
$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = 2$$

$$A = \sin x \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \sin\pi/2 - (-1) =$$

$$= 1 + 1 = 2$$

Ejercicio 2: Encuentre el área de las sigs. funciones bosqueje cada región

a) $f(x) = 10 - 2x$ $\quad f(x) \geq 0$ en $0 \leq x \leq 5$



$A = \frac{1}{2}(10)(5)$

$A = 25$

$A = \int_0^5 (10 - 2x)\,dx$

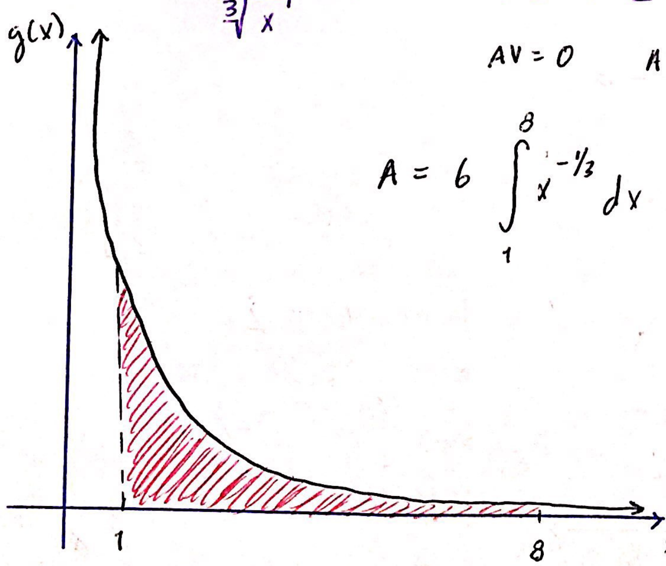
$A = 10x - x^2 \Big]_0^5$

$A = 10 \cdot 5^2 - (0 - 0)$

$A = 25$

b) $g(x) = \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}$ entre $1 \leq x \leq 8$

AV = 0 $\quad$ AH = 0



$A = 6 \int_1^8 x^{-1/3}\,dx = \dfrac{6 \cdot 3}{2} x^{2/3} \Big]_1^8$

$= 9\left(2^{3 \cdot 2/3} - 1^{2/3}\right)$

$= 9(4 - 1) = 27$

c) $h(x) = 2|x|$ entre $x=-2$ y $x=3$

$$A = 2\int_{-2}^{3} |x|\, dx$$

$$A = \int_{-2}^{0} -2x \, dx + \int_{0}^{3} 2x$$

$$A = -2\int_{-2}^{0} x\, dx + 2\int_{0}^{3} x$$

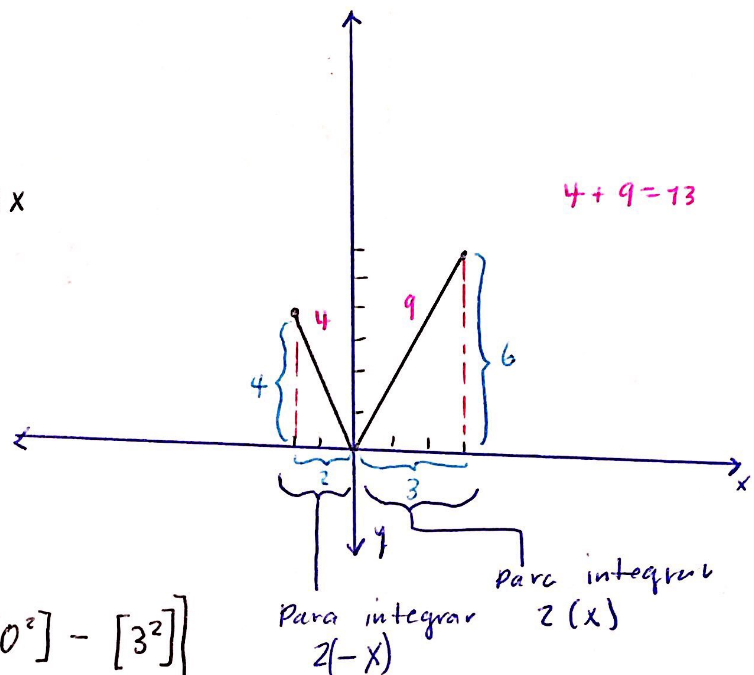
$$A = -2\left(\frac{x^2}{2}\right) + 2\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$A = -x^2\Big]_{-2}^{0} + x^2\Big]_{0}^{3}$$

$$A = \Big[[-(-2^2)] - [-0]\Big] + \Big[[0^2] - [3^2]\Big]$$

$$2^2 - 0 + 0 - 3^2$$

$$2^2 - 3^2 = 4 - 9 = \underline{13}$$



Regla de Integrales definidas

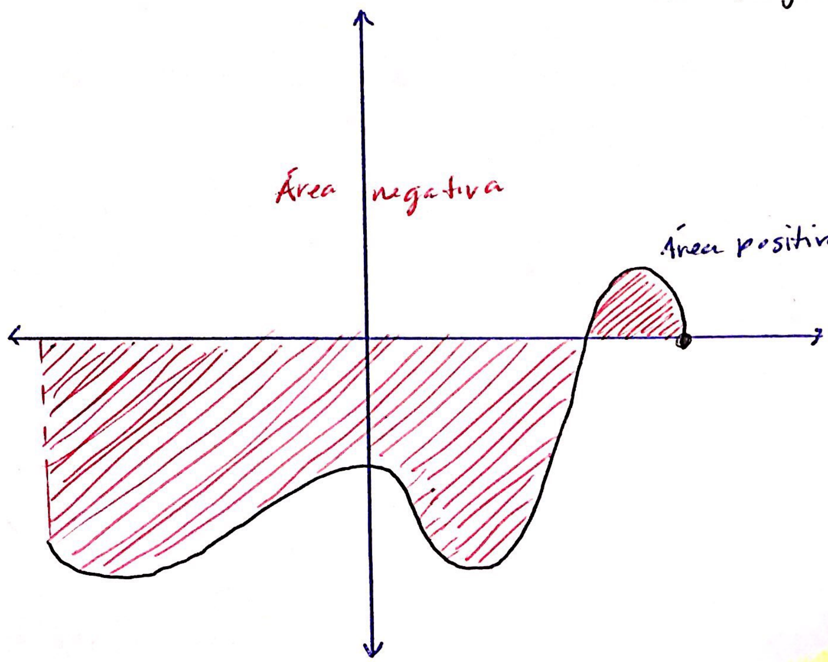
$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

ej. $\int_{-2}^{0} -2x\, dx = \int_{0}^{-2} 2x\, dx = x^2\Big]_{0}^{-2} = 4 - 0 = 4$

b) $\int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\int_{\pi}^{0} \sin x\, dx = \cos x\Big]_{\pi}^{0} = 1 - (-1) = \underline{2}$

ó $-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = \underline{2}$

¿Qué sucede cuando $f(x)$ es negativa?



Área de la región entre $f(x)$ a $y = 0$

$$\int_{-1}^{0} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big]_{-1}^{0} = 0 - 1/4$$

$$= -1/4$$

$$A \neq \int_a^c f(x)\,dx$$

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Ejercicio 3 : Pg 16 | considere

$f(x) = 4x^3 - 4$ en...

ⓐ Evalúe $\int_{-2}^{2} (4x^3 - 4)\,dx =$

$$= x^4 - 4x\Big]_{-2}^{2}$$

$$= (16 - 8) - (16 + 8)$$

$$= 8 - 24 = -16$$

esto no está correcto.

Definición más completa

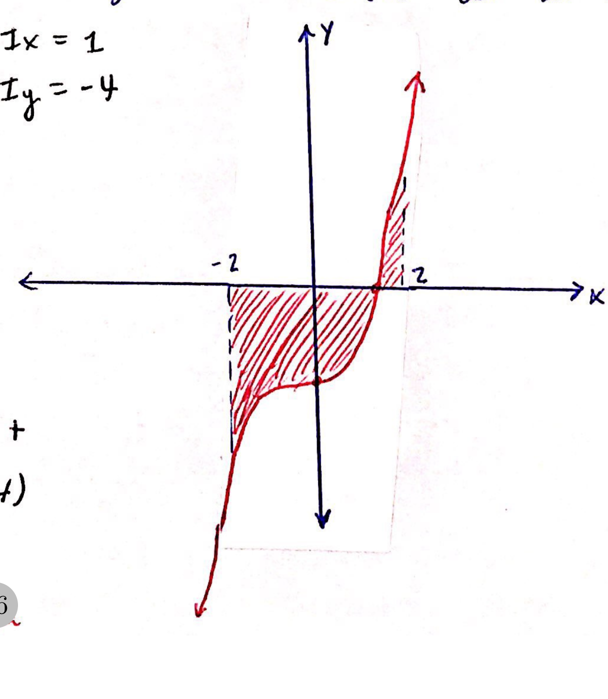
$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

ⓑ Bosqueje la región y explique si la integral definida es igual al área de la región

$I_x = 1$

$I_y = -4$

$$A \neq \int_{-2}^{2} f(x)\,dx$$



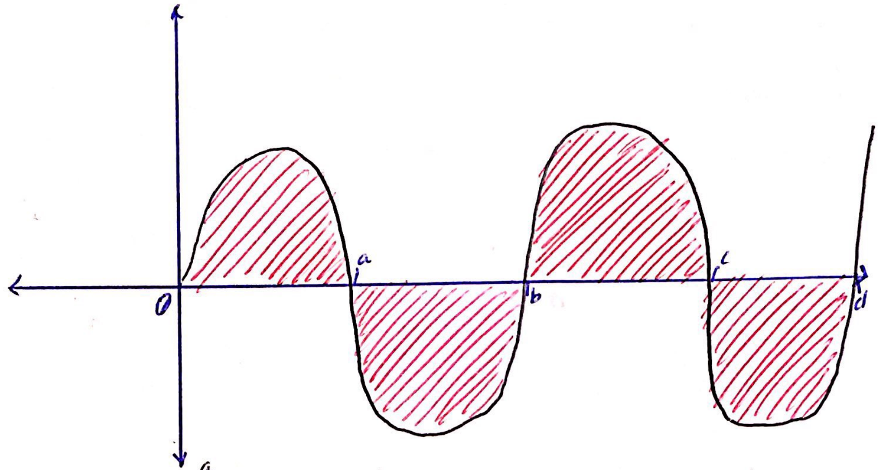
ⓒ encuentre el área de la región

$$A = \int_{2}^{1} (4 - 4x^3)\,dx + \int_1^2 (4x^3 - 4)\,dx$$

$$A = 4x - x^4\Big]_{-2}^{1} + x^4 - 4x\Big]_1^2 = (4 - 1) - (-8 - 16) + (16 - 8) - (1 - 4)$$

$$A = 3 + 24 + 8 + 3 = 27 + 11 = 38$$

esta es la respuesta



$$A = \int_0^a f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx$$

Propiedades Integrales definidas

①,② $$\int_a^b k_1 f(x) \pm k_2\, g(x)\, dx = k_1 \int_a^b f(x)\,dx \pm k_2 \int_a^b g(x)\,dx$$

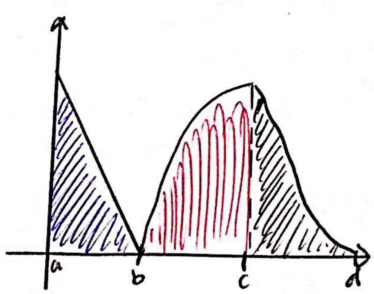
③ $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} e^{y^2 + \ln x + \sinh x}\, dx = 0$$

④ $$\int_a^b h\,dx = hx\Big]_a^b = h(b-a)$$

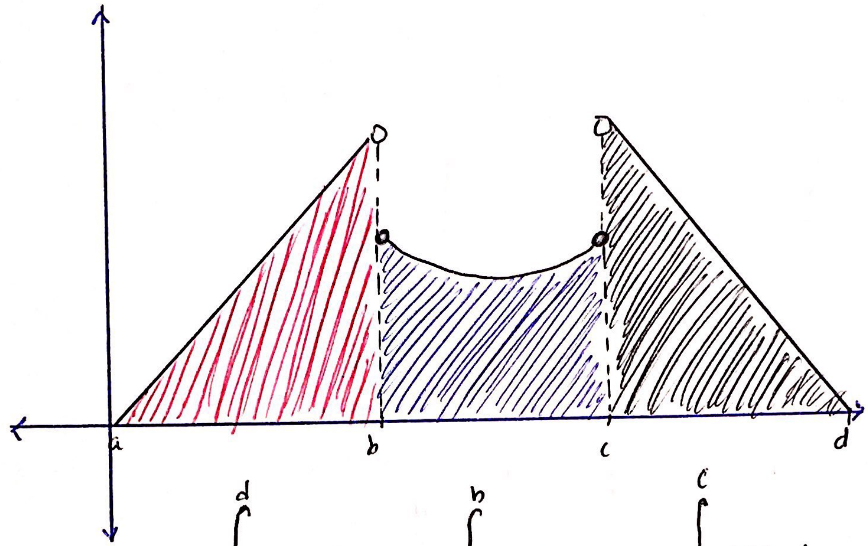
$$\int_e^{\sqrt{10}} \ln(10)\,dx = \ln(10)\left[\sqrt{10} - e\right]$$

⑤



$$\int_a^d f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$$

⑥ Continuidad por tramos, piecewise continuos



$$\int_a^d f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$$

Ejercicio 5: Evalué las sig. integrales definida.

$$\int_0^3 f(x)\,dx \qquad f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - 2x & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 6x - 12 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 2\,dx + \int_1^2 (4-2x)\,dx + \int_2^3 (6x-12)\,dx$$

$$= 2 + \left(4x - x^2\right)\Big]_1^2 + \left(3x^4 - 12x\right)\Big]_2^3$$

$$= 2 + (4-3) - (-9 - (-12))$$

$$= 2 + 1 + 3 = 6$$

Capítulo 3

Desplazamiento & Distancias, presencia de las integrales en la economía, aceleración, velocidad, desplazamiento a partir de una función integrable; propiedad de funciones pares e impares.

Desplazamientos y distancias

30/07/2019

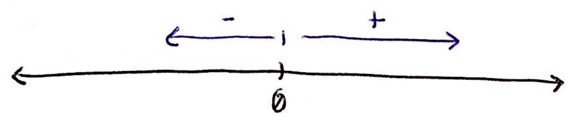
- El desplazamiento puede ser 0 pero la distancia siempre será positiva.

▲ La integral de la derivada $f'(x)$ es la función original

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(x)\Big]_a^b = \underbrace{f(b) - f(a)}_{\text{cambio neto}}$$

- Si se conoce ~~el~~ la razón de cambio de una función el cambio neto se obtiene integrando la razón de cambio.

– desplazamiento en una dimensión



$$s = \int_a^b v(t)\,dt$$

$$= \int_a^b s'(t)\,dt$$

Aplicaciones de economía

– costo marginal $c'(x)$

$$\text{costo neto} = \int_a^b c'(x)\,dx$$

– población

$$\text{Población neta} \int_a^b f'(x)\,dx$$

Ej.: una partícula tiene una velocidad de $v(t) = \frac{2}{t^{4/3}}$ cm/s encuentre el desplazamiento entre $t = 1$ y 8

$$\int_1^8 v(t)\,dt = 2\int_1^8 t^{-4/3}\,dt = -6t^{-1/3}\Big]_1^8 = 6t^{-1/3}\Big]_8^1$$

$$s = 6\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{8}}\right) = 6\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{3}\ \text{cm/s} \quad \text{Desplazamiento neto}$$

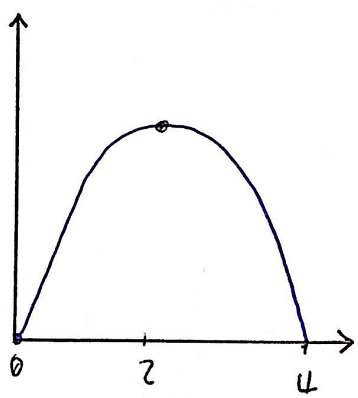
Ejercicio 1: Se lanza una pelota con una velocidad inicial de 64 pies/s, a nivel del suelo. Encuentre el desplazamiento de la pelota entre 1 y 3 s.

$$v(t) = 64 - 32t \qquad g = -32 \text{ pies/s}$$

$$s = \int_1^3 v(t)\,dt = 64t\Big]_1^3 - 16t^2\Big]_1^3$$

$$= 64(3-1) - 16(9-1) = 128 - 128 = 0$$

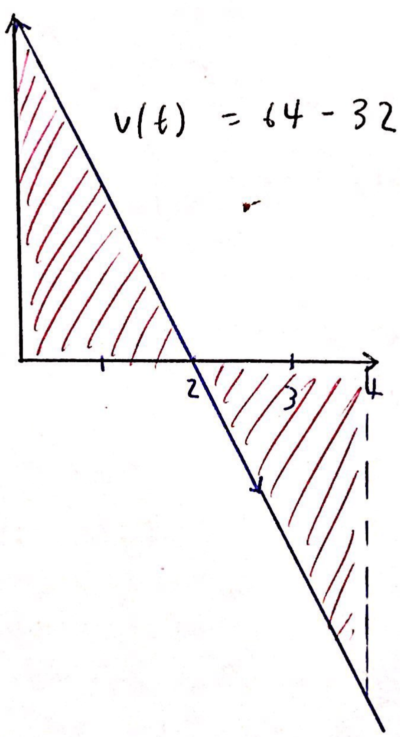
no hay cambio Neto en la posición



$$64 - 32t = 0$$

$$-32t = -64$$

$$t = \frac{-64}{-32} = 2 \text{ Pt. crit.}$$



$$\boxed{\text{Desplazamiento} \quad s = \int_a^b v(t)\,dt}$$

* Por eso se hace 0 entonces.

$$\boxed{\text{Distancia} \quad d = \int_a^b |v(t)|\,dt}$$

Rapidez $= |v(t)|$ número o escalar

velocidad es un vector

Para encontrar la distancia

$\cong 0$ A_2 es negativa

Desplazamiento $s = A_1 + A_2$

Distancia, $s = A_1 - A_2$

Procurar siempre ser positiva

Para el ejercicio 1, encuentre la distancia recorrida por la pelota 1, 3 s.

$$d = \int_1^3 |v(t)|\, dt = \int_1^3 (64 - 32t)\, dt$$

Dist.

$$d = \overbrace{\int_1^2 v(t)\, dt}^{A_1} - \overbrace{\int_2^3 v(t)\, dt}^{A_2}$$

*Se hace 0 en dos: Pts críticos

		2	
$64-32t$	$+$		$-$

$$d = \int_1^2 64 - 32t\, dt + \int_2^3 32t - 64\, dt$$

$$d = 64t - 16t^2\Big]_1^2 + 16t^2 - 64t\Big]_2^3$$

$$d = 64t - 16t^2\Big]_1^2 + 16t^2 - 64\Big]_2^3$$

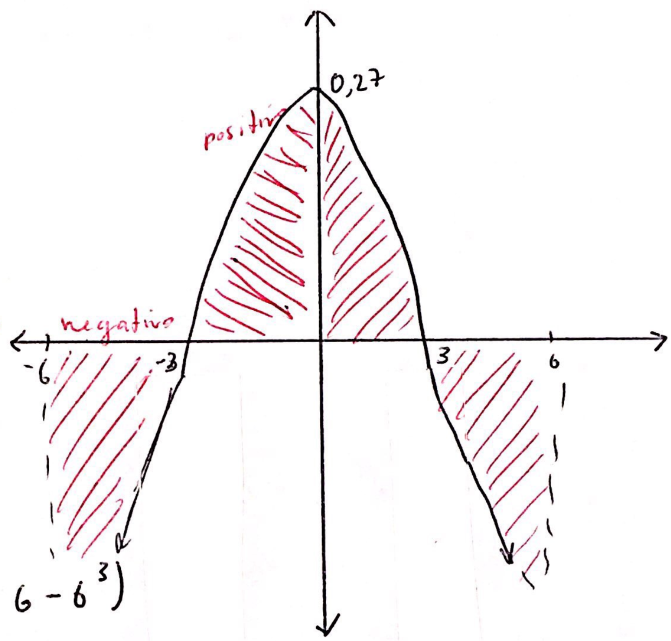
$$d = 128 - 64 - (64 - 16) + 16(9 - 4) - 64(3 - 2)$$

$$d = 64 - 48 + 80 - 64$$

Ejercicio 2: Un vehículo da vueltas alrededor de un circuito a una velocidad $v(t) = 27 - 3t^2$ millas/h.

a) Plantee la integral para encontrar el desplazamiento del vehículo entre -6 y 6 horas.

$$s = \int_{-6}^{6} (27 - 3t^2)\,dt$$



o es par entonces solo integremos un solo lado

$$\underbrace{f(-x) = f(x)}_{\text{par}}$$

$$s = 2\left(27t - t^3\Big]_0^6\right) = 2(27 \cdot 6 - 6^3)$$

$$= 2(-54) = \underbrace{-108 \text{ millas}}_{\text{es una magnitud negativa}}$$

---

b) Plantee para encontrar la distancia del vehículo entre -6 y 6 horas

$$d = -A_1 + A_2 - A_3$$

$$d = \int_{-6}^{6} v(t)\,dt$$

$$d = -\int_{-6}^{-3} v(t)\,dt$$

$$d = 2\int_{0}^{3} v(t)\,dt - 2\int_{3}^{6} v(t)\,dt$$

Por paridad

$$d = -\int_{-6}^{-3} (27 - 3t^2)\,dt + \int_{-3}^{3} (27 - 3t^2)\,dt + \int_{3}^{6} (3t^2 - 27)\,dt$$

Integrales indefinidas: desplazamiento, velocidad y aceleración

$$\int f(t)\,dt = F(t) + C \text{ , función}$$

- Dada la aceleración del objeto $a(t) = v'(t)$
- velocidad $= v(t) = \int a(t)\,dt + C_1$
- Velocidad inicial $v(0) = V_0$ reposo es que $V_0 = 0$

Posición $s(t) = \int v(t)\,dt + C_2$

Posición inicial $s(0) = S_0$ posición equilibrio $s(0) = 0$

Ejercicio 3: Un cohete despega con una aceleración vertical de $a(t) = t^2\left(\frac{72}{t} - 36\right)\ ft/s^2$

- La posición inicial es 0 pies ~~metros~~ sobre el nivel del mar y la velocidad inicial es de 400 ft/s.

a) Encuentre la posición vertical del cohete sobre el nivel del mar snm.

$$a(t) = 72t - 36t^2$$

velocidad $= \int (72t - 36t^2)\,dt$

$$v(t) = 36t^2 - 12t^3 + C_1$$

$$v(0) = C_1 = 400$$

Posición $s(t) = \int v(t)\,dt = 12t^3 - 3t^4 + 400t + C_2$

$$s(0) = 0 + 0 + C_2 = 0$$

b) Encuentra la rapidez y la velocidad a los 10 s.

$$v(0) = 36(100) - 12(1000) + 400$$
$$= 4800 - 12{,}000 = -8000 \text{ ps/s}$$

$$\text{rapidez} = |v(0)| = 8000 \text{ ps/s}$$

<u>Ejercicio 4</u>: Un resorte en reposo y en su punto de equilibrio tiene una aceleración de:

$$a(t) = 4\cos(t) - 3\sin(t)$$

velocidad y posición del resorte

$$v(t) = \int 4\cos t - 3\sin t \, dt = 4\sin t + 3\cos t + C_1$$

$$v(0) = 0 + 3 + C_1 = 0$$
$$C_1 = -3$$

$$v(t) = 4\sin t + 3\cos t - 3$$

Posición

$$s(t) = \int (4\sin t + 3\cos t - 3)\,dt$$

$$s(t) = -4\cos t + 3\sin t - 3t + C_2$$

$$s(0) = -4 + 0 + 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 4$$

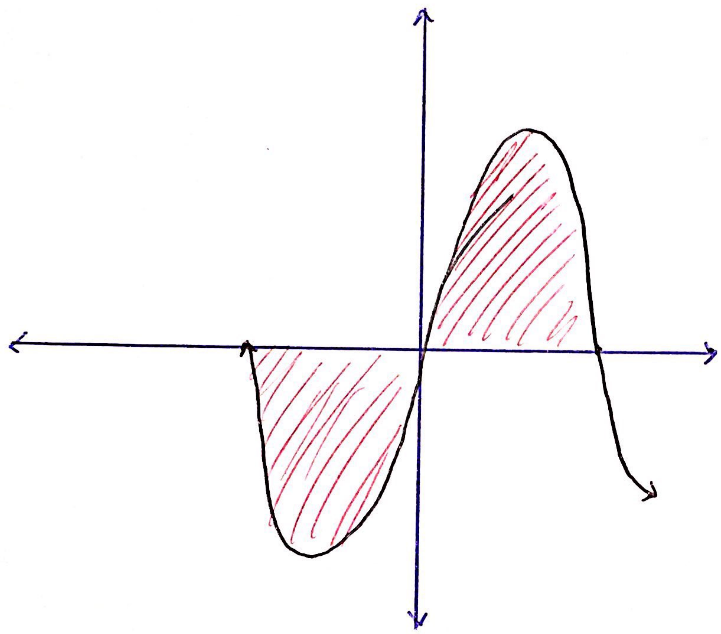
$$s(t) = -4\cos t + 3\sin t - 3t + 4$$

Funciones pares e impares

$$\int_{-100}^{100} \underbrace{\left(\sin x + x^3 + \tanh x\right)}_{\text{tres funciones impares}} dx$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$(-x)^3 = -x^3$$



Las áreas se cancelan entre sí

$$\int_{-a}^{a} f\,par(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f\,par(x)\,dx$$

$$= 0$$

$$\int_{-a}^{a} f\,par(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f\,par(x)\,dx$$

Capítulo 4

Teorema fundamental del cálculo parte I & parte II, ¿Cómo utilizo este teorema para derivar integrales con límites?

Resolución de Corto 1/08/2019

5.3 Teorema Fundamental del Cálculo

Si $f(x)$ es continua en $[a, x]$ entonces

PARTE I: $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(t)$$

- Integral y la derivada se cancelan entre sí como la derivada de una antiderivada es la función original, entonces la $\int_a^x f(t)\,dt$ es la antiderivada de x.

- Variable temporal de integración

$$f(t)\,dt$$

① Se integra respecto a t

② Se deriva respecto a x

ej. $$f(x) = \int_{10}^{x} 4t^3\,dt = t^4\Big]_{t=10}^{t=x} = \underbrace{x^4 - 10^4}_{d/dx}$$

$$\downarrow$$

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_{10}^{x} 4t^3\,dt = 4x^3$$ Atajo

PARTE II

TFC2: $$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} \Rightarrow F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(w)\,dw = F(w)\Big]_{w=a}^{w=b} \Rightarrow F(b) - F(a)$$

- No importa qué variable use el resultado de una integral definida siempre es el mismo.

- Puedo encontrar variables definidas cambiando el nombre de la variable

Se pueden definir funciones por medio de integrales

▲ Distribución normal $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

$$P(x) = \int_0^x \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dt$$

no se puede integrar de manera explícita

$$\int e^t\, dt = e^t + C \qquad \int e^{t^2} t\, dt = \frac{1}{2} e^{t^2} + C$$

$$P'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Ejercicio 1 : Derivar las siguientes funciones

a) $h(x) = \int_a^x 3\sqrt{t+1}\, dt$ $\qquad h'(x) = 3\sqrt{x+1}$

$t \to x$

b) $S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right)$ $\qquad S'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)$

c) $H(w) = \int_{-5}^{w} \frac{t+4}{t^4+t^2+2}$ $\qquad H'(w) = \frac{w+4}{w^4+w^2+2}$

TFC parte 1 y la regla de la cadena

$$g(x) = \int_{100}^{x^5} e^t\, dt = e^t\Big]_{t=100}^{t=x^5} \Rightarrow e^{x^5} - e^{100} \overset{\prime}{=} \underbrace{e^{x^5} \cdot 5x^4}_{\text{Regla de cadena}} - 0$$

$h(x) = \sin(x^5 + x^2)$ $\qquad h'(x) = \cos(x^5 + x^2)(5x^4 + 2x)$

$f(x) = \int_a^{b(x)} g(t)\, dt$ $\qquad f'(x) = g(b(x))\, b'(x)$

$t \to b(x)$

Ejercicio 2: Derivar las siguientes funciones

a.) $g(x) = \int_{5}^{\ln x} \sqrt{t^2+1}\, dt$ $\qquad h(x) = \int_{5}^{x} \sqrt{t^2+1}\, dt$

$\stackrel{?}{=} \sqrt{x^2+1}$

$g'(x) = \sqrt{\ln(x)^2+1} \cdot \frac{1}{x}$

$t \Rightarrow \ln x$

b) $h(x) = \int_{\sec x}^{8} \tan^{-1}(t)\, dt = -\int_{8}^{\sec x} \tan^{-1}(t)\, dt$

$h'(x) = \underbrace{-\tan^{-1}(\sec x)}_{\text{remplaza } t \text{ por lím sup.}} \underbrace{\sec x \tan x}_{\text{derivada de } \sec x}$

c) $\frac{d}{dx}\left(\int_{1000}^{x^5+x^3} \ln(t)\, dt\right) = \ln(x^5+x^3)(5x^4+3x^2)$

$t \rightarrow x^5+x^3$

$t \rightarrow x^5+x^3 \cdot$ derivada de x^5+x^3

Funciones con ambos límites dependientes de x

$f(x) = \int_{\sinh x}^{\cosh x} \sec^2 t\, dt \Rightarrow f(x) = \tan(t)\Big]_{\sinh x}^{\cosh x} \longrightarrow \tan(\cosh x) - \tan(\sinh x)$

Derive = $f'(x) = \sec^2(\cosh x) \cdot \sinh x - \sec^2(\sinh x)\cosh x$

$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\tan x}^{\csc x} \sec^2 t\, dt = \sec^2(\csc x)(-\csc x \cot x) - \sec^2(\tan x)(\sec^2 x)$

entonces... TFC Parte 1 y la regla de la cadena

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\, dt = f(b)\, b' - f(a)\, a'}$$

Ejercicio 3: Derive

a) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{e^x} \sqrt{10+4t^4}\,dt = \sqrt{10+4e^{4x}}\, e^x - \sqrt{10-4\sin^4 x}\cdot \cos x$

b) $\frac{d}{dx}\int_{\ln x}^{\sin^{-1} x} \cosh \theta^3\, d\theta = \cosh\left(\sin^{-1}x\right)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cosh\left(\ln^3 x\right)\cdot \frac{1}{x}$

Ejercicio 4: Encuentra la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \int_0^x \cosh^2 t\, dt$ en $t=0$

Ec. Recta tangente $\quad y = f(0) + f'(0)\,(x-0)$

$f(0) = \int_0^0 \cos^2 t\, dt = 0$

$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x \cosh^2 t\, dt = \cosh^2 x \cdot 1$

$f'(0) = (\cosh 0)^2 = 1^2 = 1$

entonces... La ecuación de la recta tangente

$y = 0 + 1(x-0)$

$\boxed{y = x}$

Capítulo 5

Regla de la sustitución, equivalente a la regla de la cadena en derivadas solo que con integración

5.5 Regla de la sustitución 2019/08/06

Objetivo: integre $f(g(x))$ funciones compuestas

a $$\int 3(x+2)^2\,dx = \int (3x^2+12x+12)\,dx$$
$$= x^3+6x^2+12x+C.$$

Conjeturando $\int 3(x+2)^2\,dx = (x+3)^3 + C$

b) $$\int 11\,(x-20)^{10}\,dx = (x-20)^{11} + C$$

Regla de potencia

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)\right]^{n+1} \xrightarrow{\text{derivar}} = (n+1)\,(f(x))^n\, f'(x) \xleftarrow{\text{integrar}}$$

Regla de la sustitución

- Regla de la sustitución

Funciones Potencia

$$\int \underbrace{[f(x)]^n}_{u=f(x)}\ \underbrace{f'(x)\,dx}_{du=f'(x)dx} = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

Ejercicio 1: evalúe las sig integrales

a) $$\int \underbrace{(11x-20)^{10}}_{u}\ \underbrace{11\,dx}_{du} = \int u^{10}\,du = \frac{u^{11}}{11}+C$$
$$= \frac{(11x-20)^{11}}{11}+C.$$

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

si $n \neq 1$

00. $\int \underbrace{(x^2+x+3)^5}_{u} \underbrace{(2x+1)\,dx}_{du}$

$$= \int u^5\,du = \frac{u^{5+1}}{5+1} + C = \frac{u^6}{6} + C$$

$$= \frac{(x^2+x+3)^6}{6} + C$$

---

b.) $\int \underbrace{[30w^3-8]^{19}}_{u} \underbrace{w^2\,dw}_{du}$

$u = 30w^3 - 8 \qquad du = 90w^2\,dw$

$\frac{du}{90} = w^2\,dw$

$$= \int u^{19}\frac{du}{90} = \frac{1}{90}\int u^{19}\,du = \frac{1}{90}\cdot\frac{u^{20}}{20} = \frac{u^{20}}{1800} = \frac{1}{1800}(30w^3-8) + C$$

c) $\int (30w^3-8)^{19} - 90w^3\,dw \qquad = \int u^{14}\,w\,du$

$u = 30w^3 - 8 \qquad du = 90w^2\,dw$

Solo se puede integrar por fuerza bruta

d. $\int \underbrace{8x^3}_{du} \underbrace{\sqrt{8+x^4}}_{u} \underbrace{dx}_{du}$

$u = 8 + x^4 \qquad du = 4x^3$

$2(du) = 2(4x^3)$

$2\,du = 8x^3$

$= 2\int \sqrt{u}\,du = 2 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C$

$= \frac{4}{3}(8 + x^4)^{3/2} + C$

---

e. $\int (10x^2 + 6x)^2\,dx =$ No se usa sustitución por que no hay du.

$\int 100x^4 + 2 \cdot 10x^2 \cdot 6x + 36x^2\,dx$

Expanda Luego integre

$= \frac{100x^5}{5} + \frac{120x^4}{4} + \frac{36x^3}{3}$

$= 20x^5 + 30x^4 + 12x^3 + C$

Regla de la cadena derivadas

$$\frac{d}{dx}\left[f(g(x))\right] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Regla de la sustitución

$$\int f'(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du = f(u) + C$$

$u = g(x) \qquad du = g'(x)\,dx$

$= f(g(x)) + C$

Ejercicio 2 : Integre   pg 32

0. $\int \frac{(8+16x+48x^2)}{x+x^2+2x^3} dx$

$u = x + x^2 + 2v^3$

$du = 1 + 2x + 6x^2 \, dx$

$8(du) = 8(1+2x+6x^2)\, dx$

$8du = 8 + 16x + 48x^2 \, dx$

$= \int \frac{8du}{u} = 8 \ln |u| + c$

$= 8 \ln |x| + C$

---

a.) $\int e^{\overbrace{x^{10}+\sqrt{2}}^{u}} \underbrace{x^9 dx}_{du} =$

$u = x^{10} + \sqrt{2}$

$du = 10x^9 + 0 \, dx$

$du = 10x^9 \, dx$

$\frac{du}{10} = x^9 \, dx$

$= \int e^u \frac{du}{10} = \frac{1}{10} e^u + C$

$= \frac{1}{2} e^{x^{10}+\sqrt{2}} + C$

b) $\int e^{x^{10}} \underbrace{x^8 \, dx}_{\neq du}$ $\int e^{x^{10}} dx$ $\neq du$!

no es integrable

c) $\int x^3 (x^4+3)^2 \sin (x^4+3)^3 \, dx = \int u^2 \sin u^3 \frac{du}{4}$

$u = (x^4+3)$ $du = 4x^3 \, dx$

$\frac{du}{4} = x^3 \, dx$

$\frac{1}{4} \int u^2 \sin(u^3) du \, du$

$t = u^3 \quad dt = 3u^2 du$

$\frac{1}{4} \int \sin t \frac{dt}{3} = -\frac{1}{12} \cos u^3 + C$

$= -\frac{1}{12} \cos (x^4+3)^3 + C$

Una sola sustitución

a) $\int \sin (x^4+3)^3 \left[(x^4+3)^2 x^3\right] dx$

$u = (x^4+3)^3 \qquad du = 3(x^4+3)^2\, 4x^3\, dx$

$\frac{du}{12} = (x^4+3)^2 x^3\, dx$

$= \int \sin(u) \frac{du}{12} = \frac{1}{2}$

b) $\int \cot x\, dx = \int \frac{\overbrace{\cos x}^{du}}{\underbrace{\sin x}_{u}} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

$= \ln|\sin x| + C$

c) $\int \sec^2(e^x+x)(e^x+1)\, dx = \int \sec^2 u\, du = \tan u + C$

$\tan(e^x+x) + C$

$u = e^x + x$

$du = e^x + 1\, dx$

e) $\int 28x\,(x+4)^{1/3}\, dx = \int 28x\, u^{1/3}\, du = \int 28\,(u-4)\, u^{1/3}\, du$

$u = x+4 \qquad du = dx$

$u - 4 = x$

$= \int 28 \cdot u^{4/3} - 4u^{1/3}\, du$

$= 28\left[\frac{\cdot 3}{7} u^{7/3} - \frac{4\cdot 3\, u^{4/3}}{4}\right] + C$

$28\left[\frac{3(x+4)^{7/3}}{7} - \frac{4\cdot 3(x+4)^{4/3}}{4}\right] + C$

Regla de la sustitución para integrales definidas

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

$u = g(x)$ = cambian también los límites.

$du = g'(x)\, dx$

Ejercicio: Integre

a. $\int_{-4}^{0} \frac{1}{3x-2} dx$

$u = 3x - 2$

$du = 3\, dx$

$\frac{du}{3} = dx$

f es continua en este intervalo

$$= \int_{-14}^{-2} \frac{1}{u} \frac{du}{3} = \ln|u| \Big]_{-14}^{-2}$$

$$= (\ln|-2| - \ln|-14|)\frac{1}{3}$$

$$= [\ln|2| - \ln|-14|]\frac{1}{3}$$

$$= (-\ln|7|)\frac{1}{3}$$

b. $\int_0^1 \frac{8}{\pi} \cdot \frac{\sin^{-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi/2} u\, du = \frac{8}{\pi}\frac{u^2}{2} = \frac{4}{\pi}u^2 \Big]_0^{\pi/2} =$

$u = \sin^{-1}(t)$

$du = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$

$u = \pi/2 \quad u = 0$

$u(0) = \sin^{-1}(0) = 0$

$u(1) = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{4\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\pi} - 0 = \pi$$

Capítulo 6

Integración por partes (IPP), ILATE ó LIPET, IPP para definidas

Integración por partes 2019-08/08

IPP: Generalmente se utiliza para integrar productos

$$\int f(x)\, g(x) = ?$$

Regla del producto para derivadas

$$\frac{d}{dx}(fg) = f'g + fg'$$

$$\frac{d}{dx}(fg) - f'g = fg'$$ integre ésta expresión

$$\underbrace{\int \frac{d}{dx}(fg)}_{\text{función original}} - \int f'g = \int fg'$$

$$\boxed{\int fg' = fg - \int f'g}$$

Integre esta expresión f deriva y g' integra

≡

f deriva
g integra

$$\int \underbrace{f(x)}_{u}\, \underbrace{g(x)\, dx}_{dv} = uv - \int v\, du$$

$$\boxed{\int u\, du = uv - \int v\, du}$$

$u = f(x) \qquad dv = g(x)\, dx$

$du = f'(x)dx \qquad v = G(x)$

Ejercicio 1 Pag 39 integre $\int xe^x dx$

Opción 1:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ u' = dx & v = e^x \end{array}}$$

opción 2:

$$\cancel{\begin{array}{ll} u = e^x & dv = x \\ du = e^x dx & v = \frac{x^2}{2} \end{array}}$$

$$\int xe^x dx = \underbrace{xe^x}_{uv} - \int \underbrace{e^x dx}_{v\, du} = xe^x - e^x + C$$

derivar:

$$\cancel{e^x} + xe^x - \cancel{e^x} + \cancel{C'}$$

$$xe^x$$

a) $\int 6x^2 \ln x \, dx$

Integre $\int f g' = fg - \int f' g$

$f = \ln(x)$ $\quad g' = 6x^2 dx$

$f' = \frac{1}{x} dx$ $\quad g = 2x^3$

$$\therefore \int 6x^2 \ln x \, dx = \underbrace{(\ln x)}_{f} \underbrace{2x^3}_{g} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'} \underbrace{2x^3}_{g} dx$$

$$= 2x^3 \ln x - \int 2x^2 \, dx$$

$$= 2x^3 \ln x - 2\int \frac{x^{2+1}}{2+1} dx$$

$$= 2x^3 \ln x - \frac{2x^3}{3} + C$$

b) $\int \ln x \, dx$

$u = \ln x$ $\quad dv = 1\, dx$

$du = \frac{1}{x} dx$ $\quad v = x$

$$\ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$\ln x \cdot x - x + C$$

comprobemos

$$(x\ln x - x)\frac{d}{dx} = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

c) $\int \tan^{-1} x \, dx = \tan^{-1} x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$

$u = \tan^{-1} x$ $\quad dv = 1\, dx$

$du = \frac{1}{1+x^2} dx$ $\quad v = x$

sustitución de

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}$$

$u = 1 + x^2$

$du = (0 + 2x)\,dx$

$du = 2x\,dx$

$\frac{du}{2} = x\,dx$

$$= \frac{\ln(u)}{2} + C$$

$$= \frac{\ln|1+x^2|}{2} + C$$

$$\therefore \int \tan^{-1} x \, dx = \tan^{-1}(x) \cdot x - \frac{\ln|1+x^2|}{2} - C$$

d. $\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - \underbrace{\int \sin x \, 2x \, dx}_{2\ IPP}$

IPP 1 $\begin{cases} u = x^2 & dv = \cos x \, dx. \\ du = 2x \, dx & v = \sin x \end{cases}$

$u = 2x \quad dv = \sin x$

$du = 2\, dx \quad v = -\cos x$

$\int \sin x \, 2x \, dx = -2x \cos x + \int \cos x \, 2 dx$

$= x^2 \sin x - (-2x \cos x + 2 \sin x) + C$

$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$

Siempre dar prioridad de derivación a:

- **I**nversas trigonométricas — Mnemotecnia
- **L**ogarítmicas
- **A**lgebraicas
- **T**rigonométricas
- **E**xponensiales

IPP : Integrales Definidas $\boxed{\int_a^b u \, du = uv \Big]_a^b - \int_a^b v \, du}$

no cambian los límites de integración

Ejercicio 3 : Evalúe Pg. 41

b) $72 \int_1^2 \frac{\ln x}{x^4} dx = 72 \ln x \left(\frac{-1}{3x^3} \right) \Bigg]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^{-3}}{-3} x^{-1} dx$

$u = \ln(x) \qquad dv = x^{-4} dx$

$du = x^{-1} dx \qquad v = \frac{x^{-3}}{-3}$

evaluación $\longrightarrow$

$$72 \ln x \left(\frac{-1}{3x^3}\right)\Big]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{\frac{x^{-3}}{-3}\, x^{-1}}\, dx \rightarrow -\int_1^2 \frac{1}{-3x^3 \cdot x}\, dx \rightarrow -\int_1^2 \frac{1}{-3x^4} \rightarrow \int_1^2 -\frac{x^{-4}}{3}$$

$$= \frac{72 \ln(x)}{3x^3} - \frac{72}{9x^3}\Big]_1^2 \qquad \rightarrow -1 \cdot -\frac{1}{3}\int_1^2 x^{-4}$$

$$= -\frac{24 \ln(x)}{x^3} - \frac{8}{x^3}\Big]_1^2 = \left\{\frac{24\ln(2)}{2^3} - \frac{8}{2^3}\right\} - \left\{\frac{\cancel{24 \ln(1)}^{0}}{1^3} - \frac{8}{1^3}\right\} \rightarrow \frac{1}{3}\int_1^2 x^{-4}\, dx$$

$$= \{-3\ln(2) - 1\} - \{-8\} = -3\ln(2) + 7 \qquad \rightarrow \frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-3}}{3} = \frac{1}{9x^3}$$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \int \underbrace{e^x \sin x}_{\text{IPP 2}}\, dx$$

$u = \cos x \qquad dv = e^x dx$

$du = -\sin x \qquad v = e^x$

$u = \sin x \qquad dv = e^x\, dx$

$du = \cos x\, dx \qquad v = e^x$

$$\int e^x \sin x\, dx = \sin x\, e^x - \int e^x \cos x\, dx$$

$$\int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + \sin x e^x - \int e^x \cos x dx$$

$$\int e^x \cos x\, dx + \int e^x \cos x\, dx = -e^x \cos x + \sin x\, e^x$$

$$2\int e^x \cos x\, dx = -e^x \cos x + \sin x e^x$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{-e^x \cos x + \sin x e^x}{2} + C$$

Capítulo 7

Integrales trigonométricas, explorar las formas y los casos especiales

7.2. Integrales Trigonométricas

2019-08/13

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad \div \cos^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x \quad \div \sin^2 x$$

Integrales de la forma $\int \sin^n x \, \cos^m x \, dx$

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$u = \sin x$

$du = \cos x \, dx$

$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

$u = \cos x$

$du = -\sin x \, dx$

Primer Caso = se necesita una par y una impar

Evalúe $\int \cos^5 x \, dx = \int \cos^4 x \, (\cos x \, dx)$

Reescribir $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = (1 - \sin^2 x)^2$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\therefore \int \cos^5 x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 (\cos x \, dx)$$

$u = \sin x \qquad du = \cos x \, dx$

$$= \int (1 - u^2)^2 \, du$$

$$= \int (1 - 2u^2 + u^4) \, du = u - \frac{2}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5 + C$$

$$\therefore = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C \qquad \square$$

Aparte algún término $\sin x$ o $\cos x$.

a. Potencias impares de seno o coseno.

Evalúe

esto es un problema ↙ ↙ Preferimos potencias pares

$$\int \cos^3 x \sin^6 x \, dx =$$

$$\int \cos^2 x \sin^6 x \cos x \, dx \quad \text{ó} \quad \int \cos^3 x \sin^5 x \sin x \, dx$$

$$= \int \cos^2 x \sin^6 x (\cos x) dx = \int (1-\sin^2 x)\sin^6 x \, (\cos x \, dx)$$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$u = \sin x$

$du = \cos x \, dx$

$$= \int (1-u^2) u^6 \, du$$

$$= \int u^6 - u^8 \, du$$

$$= \frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{8}u^9 + C$$

$$\stackrel{\therefore}{=} \frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{1}{9}\sin^9 x + C$$

---

b. $\int \cos^5 x \sin^3 x \, dx =$

$$\int \cos^4 x \sin^3 x \cos x \, dx \quad \text{ó}$$

$$\int \cos^5 x \sin^2 x \sin x \, dx$$

$$= \int \cos^5 x (\sin^2 x) \sin x \, dx$$

$$= \int \cos^5 x (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$$

$u = \cos x \qquad du = -\sin x \, dx$

$$= -\int u^5 (1 - u^2) \, du$$

$$= -\frac{1}{6}u^6 + \frac{u^8}{8} + C$$

$$\therefore -\frac{1}{6}\cos^6 x + \frac{1}{8}\cos^8 x + C$$

b) Potencias pares de seno y coseno

$$\int \cos^2 x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)\, dx = \underline{\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C}$$

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x \quad (1)$$

$$+ \quad \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (2)$$

suma (1 y 2) $1 + \cos(2x) = 2\cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

Ejercicio potencias pares:

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

a. $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = 2\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{2}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx = x - \frac{1}{2}\sin 2x$$

si fuera impar sería 0

$u = 2x \quad du = 2dx$

$$= x - \frac{1}{2}\sin^2 x \Big]_0^{\pi} = \pi - \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\sin 2\pi} - 0 + \frac{\cancel{\sin 0}}{2}$$

$$= \pi$$

b. $$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$$= \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\, dx$$

diferencia de cuadrados

$$\frac{1}{4}\int (1 - \cos^2 2x)\, dx = \frac{1}{4}\int (1 - \cos^2 2x)\, dx$$

$$\cos^2(2x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x \, dx = \frac{1}{8}x + \underline{\frac{1}{8 \cdot 4}\sin 4x + C}$$

$$\int a f \, dx = aF + C$$

Forma $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$

$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ | $\sec x = \sec x \tan x$

$u = \tan x$ | $w = \sec x$

$\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ | $\tan^2 x = \sec^2 x + 1$

Ejercicio 3 Evalúe Pg. 48

1. $\int \tan^5 x \sec^4 x \, dx$

$\int \tan^5 x \sec^2 x (\sec^2 x \, dx)$ ó $\int \tan^4 x \sec^3 x (\tan x \sec x \, dx)$

$u = \tan x$ $\quad \tan^2 x + 1$ $\qquad w = \sec x$

$(\tan^2 x)^2 = (\sec^2 x - 1)^2$

$\int \tan^5 x \sec^2 x (\sec^2 x \, dx)$

$\int \tan^5 x (\tan^2 x + 1)(\sec^2 x \, dx)$

$u = \tan^2 x$

$du = 2 \tan x \sec^2 x$

$$\int u^5 (u^2 + 1) \, du = \int (u^7 + u^5) \, du = \frac{u^8}{8} + \frac{u^6}{6} + C$$

$$= \frac{1}{8} \tan^8 x + \frac{1}{6} \tan^6 x + C$$

b. $\int \tan^5 x \sec^5 x \, dx =$

$$\int \tan^4 x \sec^4 x (\sec x \tan x) dx \quad \text{ó} \quad \int \tan^5 x \sec^3 x (\sec^2 x \, dx)$$

$$\int (\tan^2 x)^2 \sec^4 x (\sec x \tan x \, dx) \qquad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$\int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^4 x (\sec x \tan x \, dx)$$

$u = \sec x \qquad du = \sec x \tan x \, dx$

$$\int (u^2 - 1)^2 u^4 \, du = \int (u^4 - 2u^2 + 1) u^4 \, du$$

$$= \int u^8 - 2u^6 + u^4$$

$$= \frac{u^9}{9} - \frac{2u^7}{7} + \frac{u^5}{5} + C$$

$$\frac{1}{9} \sec^9 x - \frac{2}{7} \sec^7 x + \frac{1}{5} \sec^5 x + C$$

c. $\int \tan^4 x \sec^4 x \, dx$

$$= \int \tan^4 x \underbrace{\sec^2 x}_{\tan x^2} \sec^2 x \, dx$$

$\sec^2 x = \tan^2 x + 1$

$$= \int \tan^4 x (\tan^2 x + 1) \sec^2 x \, dx$$

$u = \tan x \qquad du = \sec^2 x$

$$= \int u^4 (u^2 + 1) \, du$$

$$= \frac{1}{7} u^7 + \frac{1}{5} u^5 + C = \frac{1}{7} \tan^7 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + C$$

Casos especiales $\int \tan^m x\,dx \qquad \int \sec^n x$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C$$

$$= -\ln(\cos x) + C$$

$u = \cos x$

$du = -\sin x$

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}\,dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\tan x + \sec x}\,dx$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$= \ln|\tan x + \sec x| + C$$

$u = \tan x + \sec x$

$du = \sec^2 x + \sec x \tan x\;dx$

$$\int \csc x\,dx = -\ln|\csc + \cot x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

$$\int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \tan x - x + C$$

$$\int \tan^3 x\,dx = \int \tan^2 x \tan x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\tan x\,dx$$

$u = \tan x \quad du = \sec^2 x$

$$= \int \sec^2 x \tan x - \tan x\,dx$$

$$= \int \underset{u}{\tan x}\,\underset{du}{\sec^2 x\,dx} - \int \tan x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \int \sec^2 x \sec x\,dx$$

IPP

$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x\,dx$

$du = \sec x \tan x \qquad v = \tan x$

$$= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\,dx$$

$$= \int \tan^2 x \sec x\,dx = \int \sec^2 x - 1 \sec x\,dx$$

$$= \int \sec^3 x - \sec x\,dx$$

$$= \int \sec^3 x\,dx - \int \sec x\,dx$$

$$= \frac{\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C}{2}$$

Capítulo 8

Continuación de Integración trigonométricas, curioso: Área de un circulo unitario, introducción a sustitución trigonométrica

Continuación Integración Trigonométrica

- Lunes 26 de Agosto Simulacro Parcial 3 de septiembre parcial 1; capítulos 5 y 7 pg 11 - 70

Integrales de la forma $\int \cot^n x \csc^m dx$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x \qquad \cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

Ejercicio 4: Integre (pg. 50)

ⓐ $\int \cot^2(x) \csc^4(x)\, dx =$

$\therefore \cot^2 x \csc^2 x \csc^2 x$

$\therefore \cot x \csc^3 x (\csc x \cot x)$

$$= \int \cot^2 x \csc^2 x (\csc^2 x\, dx) = \int \cot^2 x (\cot^2 x + 1) \csc^2 x\, dx$$

sustitución

$u = \cot x \qquad du = -\csc^2 x\, dx$

$$= -\int u^2 (u^2 + 1)\, du$$

$$= -\int (u^4 + u^2)\, du$$

$$= -\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C$$

$$= -\frac{\cot^5 x}{5} - \frac{\cot^3 x}{3} + C$$

ⓑ $\int \cot^3 x \csc^3 x\, dx =$

$$= \int \cot^2 x \csc^2 x (\cot x \csc x\, dx)$$

$$= \int (\csc^2 x - 1) \csc^2 x (\cot x \csc x\, dx)$$

$u = \csc x \qquad du = -\csc x \cot x\, dx$

$$= -\int (u^2 - 1)(u^2)\, du$$

$$= -\int (u^4 - u^2)\, du = -\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \frac{-\csc^5 x}{5} + \frac{\csc^3 x}{3} + C$$

Casos especiales $\int \csc x \, dx \qquad \int \csc^3 x \, dx$

- $$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

- $$\int \csc x \frac{(\csc x + \cot x)}{\underbrace{(\cot x + \csc x)}_{1 \text{ especial}}} = \int \frac{\csc^2 x + \csc x \cot x}{\cot x + \csc x} \, dx$$

$u = \cot x + \csc x$

$-du = \csc^2 x + \csc x \cot x \, dx$

$$= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|\cot x + \csc x| + C$$

- $$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2}(\sec x)' + \frac{1}{2}\int \sec x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$$

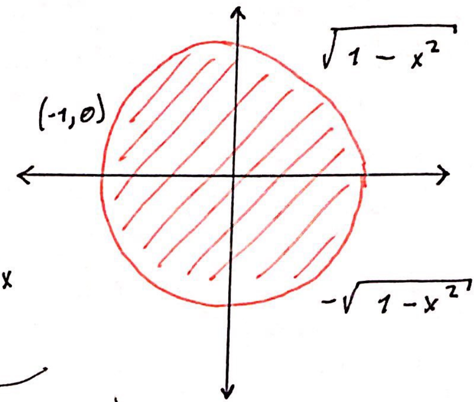
- $$\int \csc^3 x \, dx = \frac{1}{2}(\csc x)' + \frac{1}{2}\int \csc x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\csc x - \frac{1}{2}\ln|\csc x + \cot x| + C$$

Área de un círculo unitario sin utilizar Geometría

Ec. $x^2 + y^2 = 1$

Función: $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$



$$\text{Área} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx + \underbrace{\int_{-1}^{1} -\sqrt{1-x^2}\,dx}_{\text{por } -1}$$

área negativa

$$= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \quad * 2$$

$$= 4\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \quad * 4$$

ni sustitución, ni integración por partes

$\therefore\ 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$

$x = \sin\theta$

$dx = \cos\theta\, d\theta$

Para evaluación de la integral $\begin{cases} x = \sin\theta = 1 = \therefore \frac{\pi}{2} \\ x = \sin\theta = 0 = \therefore 0 \end{cases}$

$$\therefore A = 4\int_{0}^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2\theta}}_{\cos\theta}\ \cos\theta\, d\theta$$

$$A = 4\int_{0}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$A = \cos^2\theta = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\theta)\right)$$

$$A = \frac{4}{2}\int_{0}^{\pi/2} \left(1 + \cos(2\theta)\right) d\theta$$

$$A = 2\left(\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right)\Bigg]_{0}^{\pi/2}$$

$$A = 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi - 0 - \frac{1}{2}\sin 0\right)$$

$$= \frac{2}{2}\cdot\pi = \therefore \pi \quad \square$$

el área de un círculo de radio 1 es π

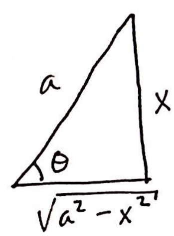
7.3. Sustitución Trigonométrica (pg. 54)

$$\int f(x)\,dx = \int \underbrace{f(g(\theta))}_{\text{simplifique si es posible.}} \; g'(\theta)\,d\theta$$

$$x = g(\theta) \qquad dx = g'(\theta)\,d\theta$$

$\sqrt{1-x^2}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\sqrt{\sec^2\theta - 1}$
$x = \sin\theta$	$x = \tan\theta$	$x = \sec\theta$	$\sqrt{\tan^2\theta}$
$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$		$\sqrt{x^2-1} = \tan\theta$
$\sqrt{1-x^2} = \cos\theta$	$\sqrt{1+x^2} = \sec\theta$		

forma más general $\sqrt{a^2 - x^2}$

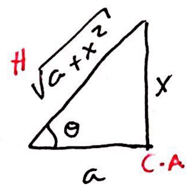


$$\sin(\theta) = \frac{C.O.}{H} = \frac{x}{a} \qquad x = a\sin\theta$$

$$dx = a\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$\cos(\theta) = \frac{C.A.}{H} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \qquad \sqrt{a^2-x^2} = a\cos\theta$$

forma $\sqrt{a^2 + x^2}$



$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \qquad \tan\theta = \frac{x}{a}$$

$$\frac{H}{C.A} = \sec\theta = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$$

$$x = a\cdot\tan\theta$$

$$dx = a\sec^2\theta\,d\theta \qquad \sqrt{a^2+x^2} = a\cdot\sec\theta$$

Ejercicio 1: Evalúe

$$\int \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\,dx = \int \frac{-1}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{2} = \int \frac{u^{-1/2}}{2}\,du = -\frac{2u^{1/2}}{2} + C$$

$u = 25 - x^2$

$du = -2x\,dx = \frac{du}{-2x}$

$$= -u^{1/2} + C$$

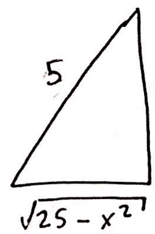
$$= -\sqrt{25-x^2} + C$$

Sustitución Trigonométrica

$H = 5$

$C.O. = x$

$C.A. = \sqrt{25-x^2}$



$x = 5\sin\theta$ ✓

$dx = 5\cos\theta\, d\theta$ ✓

$\sqrt{25-x^2} = 5\cos\theta$ ✓

$\frac{C.A.}{H}$

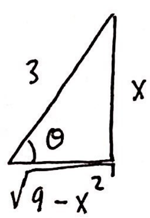
$$\int \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\,dx = \int \frac{5\sin\theta}{5\cos\theta}\cdot 5\cos\theta\, d\theta = 5\int \sin\theta\, d\theta$$

$$= -5\cos\theta + C$$

$$= \frac{-5}{5}\sqrt{25-x^2} + C$$

$$= -\sqrt{25-x^2} + C$$

ⓐ $$\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx =$$



$S = \frac{x}{3}$ $\quad C = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$

$3\sin\theta = x$ $\quad 3\cos\theta = \sqrt{9-x^2}$

$(3\sin\theta)^3 = x^3$ $\longrightarrow dx = 3\cos\theta\, d\theta$

sustituimos

$$= \int \frac{27\sin^3\theta}{\cancel{3\cos\theta}}\cdot \cancel{3\cos\theta}\, d\theta = \int 27\sin^3\theta\, d\theta$$

$$\longrightarrow \int 27\sin^3\theta \, d\theta = 27\int \sin^3\theta \, d\theta = 27\int \sin\theta\,(1-\cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= -27u + 9u^3 + C = -27\cos\theta + 9\cos^3\theta + C$$

$u = \cos\theta \qquad du = -\sin\theta \, d\theta$

sustituyo

$$= -27 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{9-x^2} + 9 \cdot \frac{1}{27}\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3 + C$$

Caso Integrales trigonométricas

- $\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left(\sin(m-n)x + \sin(m-n)x\right)$
- $\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m-n)x\right)$
- $\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right)$

Ejercicio 5: Evalúe (pg. 51)

ⓐ
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(8x)\cos(4x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin(4x) + \sin(12x)\right) dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(4x)}{4} - \frac{\cos(12x)}{12}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(4\pi)}{4} + \frac{\cos(-4\pi)}{4} - \frac{\cos(12\pi)}{12} + \frac{\cos(12\pi)}{12}\right)$$

$$= 0$$

Capítulo 9

Integración por sustitución trigonométrica

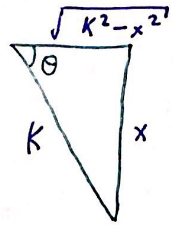
7.3. Sustitución Trigonométrica

2019-08/22

Forma $\sqrt{K^2-x^2}$

$H = K$

$C.O. = x$

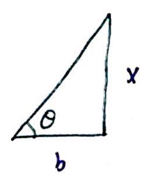


$\frac{C.O.}{H} = \sin\theta = \frac{x}{K} \Rightarrow x = K\sin\theta$

$dx = K\cos\theta \, d\theta$

$\frac{\sqrt{K^2-x^2}}{K} = \cos\theta$

Forma $\sqrt{b^2+x^2}$



$\frac{x}{b} = \tan\theta \Rightarrow x = b\cdot\tan\theta$

$dx = b\cdot\sec^2\theta \, d\theta$

$c^2 = x^2 + y^2$

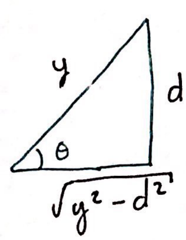
$\sqrt{c^2-y^2} = x$

$\sqrt{c^2-x^2} = y$

$\frac{b}{\sqrt{b^2+x^2}} = \cos\theta \Rightarrow \sqrt{b^2+x^2} = b\sec\theta$

$\frac{\sqrt{b^2+x^2}}{b} = \sec\theta$

Forma $\sqrt{y^2-d^2}$



$\sin\theta = \frac{d}{y}$

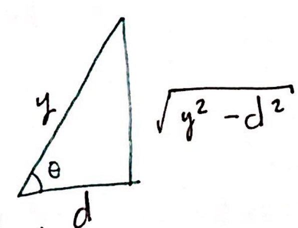
$y = d\cdot\csc\theta$

$dy = -d\csc\theta\cot\theta \, d\theta$

$\frac{y}{d} = \sec\theta$

$y = d\sec\theta$

$dy = d\sec\theta\tan\theta$



$\sqrt{y^2-d^2} = d\tan\theta$

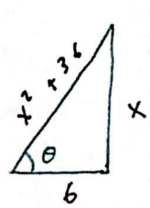
Ejercicio 2 y 6 Pág 58 y 59

(20) $\int \frac{1}{x^2+36}dx = \int \frac{6\sec^2\theta \, d\theta}{36\sec^2\theta} = \int \frac{d\theta}{6} = \frac{\theta}{6} + C$

$x = 6\tan\theta$

$dx = 6\cdot\sec^2\theta \, d\theta$

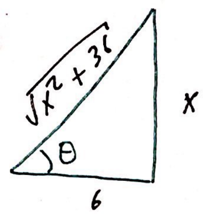
$x^2+36 = 36(\tan^2\theta + 1) = 36\sec^2\theta$



$$x = 6\tan\theta \Rightarrow \frac{x}{6}\tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{6}\right) = \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{x}{6}\right) + c$$

② $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+36}}\,dx = \int \frac{6\sec^2\theta}{6\sec\theta}\,d\theta = \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$$\therefore \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+36}}{6} + \frac{x}{6}\right| + C$$

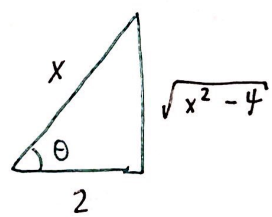


$$\frac{x}{6} = \tan\theta \qquad x = 6\cdot\tan\theta$$

$$dx = 6\sec^2\theta\,d\theta$$

$$\frac{\sqrt{x^2+36}}{6} = \sec\theta \qquad \sqrt{x^2+36} = 6\sec\theta$$

③ $$\int \frac{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^3}{x^6}\,dx = \int \frac{2^3\tan^3\theta}{2^6\sec^6\theta}\cdot 2\tan\theta\sec\theta\,d\theta =$$



$$\frac{x}{2} = \sec\theta \qquad x = 2\sec\theta$$

$$dx = 2\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

$$\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} = \tan\theta \qquad \sqrt{x^2-4} = 2\tan\theta$$

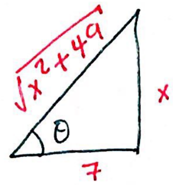
$$= \frac{2^4}{2^6}\int \frac{\tan^4\theta}{\sec^5\theta}\,d\theta = \frac{1}{2^2}\int \tan^4\theta\cos^5\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{\sin^4\theta}{\cancel{\cos^4\theta}}\cdot\cancel{\cos^5}\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^4\theta\cos\theta\,d\theta \Rightarrow \begin{matrix} w = \sin\theta \\ dw = \cos\theta \end{matrix} \Rightarrow \frac{1}{4}\int u^4\,du = \frac{1}{4}\left[\frac{w^5}{5}\right] + C$$

$$= \frac{\sin^5\theta}{20} + C = \frac{1}{20}\,\frac{(x^2-4)^{5/2}}{x^5} + C$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$$

(2a) $$\int \frac{49}{x^2\sqrt{x^2+49}}\,dx = \int \frac{-49 \cdot 7\csc^2\theta}{49\ \cot^2\theta\ 7\csc\theta}\,d\theta = -\int \frac{\csc\theta}{\cot^2\theta}\,d\theta$$



$$\cot\theta = \frac{x}{7} \implies x = 7\cot x$$
$$dx = -7\csc^2\theta\,d\theta$$

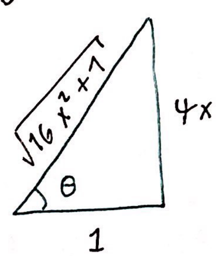
$x = 7\tan\theta$

$$\frac{\sqrt{x^2+49}}{7} = \csc\theta \implies \sqrt{x^2+49} = 7\csc\theta$$

$$= -\int \frac{\csc\theta}{\cot^2\theta}\,d\theta = -\int \frac{1}{\sin\theta}\ \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = -\int \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = -\int \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$$

$$= -\int \tan\theta\ \sec\theta\ d\theta = -\sec\theta + C = \frac{-\sqrt{x^2+49}}{x} + C$$

(3b) $$\int \frac{1}{x\sqrt{16x^2+1}}\,dx = \int \frac{(1/4)\sec^2\theta\ d\theta}{1/4\ \tan\theta \cdot \sec\theta} = \int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\,d\theta = \int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\,d\theta$$



$$\frac{4x}{1} = \tan\theta \implies x = \frac{\tan\theta}{4}$$

$$\sqrt{16x^2+1} = \sec\theta \qquad dx = \frac{1}{4}\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \int \left[\frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right] d\theta = \int \frac{\cancel{\cos\theta}}{\cancel{\cos\theta}\sin\theta}\,d\theta = \int \frac{1}{\sin\theta}\,d\theta = \int \csc\theta\,d\theta =$$

$$= -\ln|\csc\theta + \cot\theta| + C = -\ln\left|\frac{\sqrt{16x^2-1}}{4x} + \frac{1}{4x}\right| + C$$

Capítulo 10

Repaso de sustitución trigonométrica

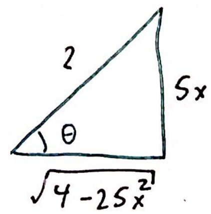
•Parcial 1 lunes 2 septiembre

2019-08-27

Repaso De Sustitución Trigonométrica

Lab # 5

① $$\int 5^8 x^7 \sqrt{4-25x^2}\, dx = 5^8 \int \frac{2^7}{5^7} \sin^7\theta \cdot 2\cos\theta \cdot \frac{2}{5} \cos\theta \, d\theta =$$



$$\sin\theta = \frac{5x}{2} \qquad x = \frac{2}{5}\sin\theta$$

$$dx = \frac{2}{5}\cos\theta \, d\theta$$

$$\sqrt{4-25x^2} = 2\cos\theta$$

$$= \frac{5^8}{5^8} \cdot 2^9 \int \sin^7\theta \, d\theta \cdot \cos^2\theta \, d\theta = 512 \int \sin^6\theta \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta$$

$$\sin^6\theta = (\sin^2\theta)^3 = (1-\cos^2\theta)^3$$

$$\therefore = 512 \int (1-\cos^2\theta)^6 \cos^2\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta$$

$$u = \cos\theta$$

$$du = -\sin\theta \, d\theta$$

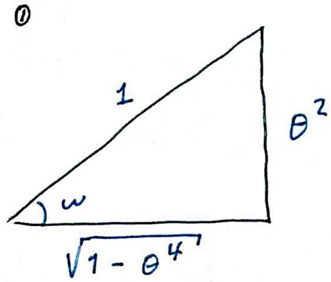
$$= 512 \int (1-u^2)^3 u^2 \, du$$

$$(1-u^2)^3 u^2 =$$

$$u^2 - 3u^4 + 3u^6 - u^8$$

$$= 512 \int u^2 - 3u^4 + 3u^6 - u^8 \, du$$

② $$\frac{4}{\pi}\int_0^1 \theta\sqrt{1-\theta^4}\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sqrt{1-\theta^4}\cdot\underbrace{2\theta\cdot d\theta}_{\text{especulando}} =$$



$$\sin(\omega) = \theta^2$$

$$\cos(\omega)\,d\omega = 2\theta\,d\theta$$

$$\sqrt{1-\theta^4} = \cos(\omega)$$

encontrar nuevos límites =>

$$\sin(\omega) = 1^2$$
$$\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\omega) = 0$$
$$\omega = 0$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^2(\omega)\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2\omega))\,d\omega$$

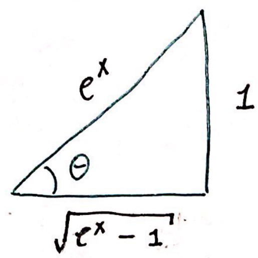
$$= \frac{1}{\pi}\left(\omega + \frac{1}{2}\sin(2\omega)\right)\Bigg]_0^{\pi/2} \doteq$$

$$\doteq \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin(2\cdot\pi/2)\right\} - \cancel{\frac{1}{\pi}\left\{0 + \frac{1}{2}\sin(2\cdot 0)\right\}}^{\,0}$$

$$\doteq \frac{1}{2} \quad \square$$

5

$$\int_0^{\ln(\sqrt{2})} \frac{e^{4x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = \int_0^{\ln(\sqrt{2})} \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\, e^x \cdot dx = \int_0^{\ln(\sqrt{2})} \frac{\sec^3\theta}{\tan\theta} \cdot \sec\theta \tan\theta \, d\theta$$



$e^x = \sec\theta \, d\theta$

$\sqrt{e^x - 1} = \tan\theta \, d\theta$

$e^x dx = \sec\theta \tan\theta \, d\theta$

$\sec\theta = e^{\ln(\sqrt{2})} = \sqrt{2}$

nuevo límite

$\sec\theta = e^0 = 1$

$\theta = 0$

$$= \int_0^{\ln(2)} \sec^4\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/4} \sec^2\theta \sec^2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2\theta) \sec^2\theta \, d\theta = \int_0^{1} (1 + w^2) \, dw =$$

$w = \tan\theta$

$dw = \sec^2\theta \, d\theta$

$$= w + \frac{w^3}{3} \Big]_0^1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \quad \square$$

FORMA ALTERNA

⑤
$$\int_0^{\ln(\sqrt{2})} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} \cdot e^{2x}\, dx = \int_0^{\ln(\sqrt{2})} \frac{e^{x}}{\sqrt{u}}\, du =$$

$u = e^{2x} - 1$ $\qquad u(\ln(\sqrt{2})) = e^{2(\ln(\sqrt{2}))} - 1 = 2 - 1 = 1$

$du = 2e^{2x}\, dx$ $\qquad u(0) = e^{0} - 1 = 0$

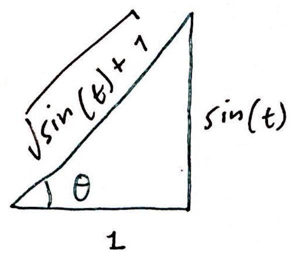
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u+1}{u^{1/2}}\, du = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(u^{1/2} + u^{-1/2}\right) du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{3/2} + 2u^{1/2}\right)\Bigg]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{6}{3}\right) = \frac{4}{3} \quad \square$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{1/2} + u^{-1/2}\, du = \frac{1}{3}\left(e^{2x}-1\right)^{3/2} + \left(e^{2x}-1\right)^{1/2}\Bigg]_0^{\ln(\sqrt{2})}$$

Problema 2b simulacro:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin^2(t)+1}}\, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sec\theta \, d\theta$$



$\tan\theta = \sin(t)$

$\sec^2\theta \, d\theta = \cos(t)\, dt$

$\sqrt{\sin^2 t + 1} = \sec\theta$

$\tan\theta = \sin(\pi/2) = 1$

$\theta = \tan^{-1}(1) = \pi/4$

$\tan\theta = \sin(0) = 0$

$\theta = 0$

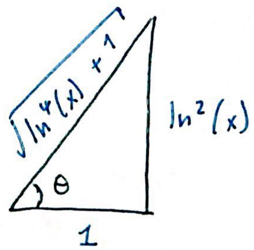
$$\therefore \int_0^{\pi/4} \sec\theta \, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= \left\{ \ln\left| \overset{\sqrt{2}}{\cancel{\sec(\pi/4)}} + \tan(\pi/4) \right| \right\} - \left\{ \ln\left| \sec(0) + \tan(0) \right| \right\}$$

$$= \ln|\sqrt{2}+1| - \overset{0}{\cancel{\ln|1|}} - \ln|\sqrt{2}+1|$$

$$= \underline{\underline{\ln|\sqrt{2}+1| - \ln|\sqrt{2}+1|}} \quad \square$$

Problema curioso = $\displaystyle\int \frac{8}{\sqrt{\ln^4 x + 1}} \, \frac{\ln(x)}{x} \, dx = \int \frac{4 \cdot 2}{\sqrt{\ln^4(x) + 1}} \cdot \frac{\ln(x)}{x} \, dx =$



$$\tan\theta = \frac{\ln^2(x)}{1} = \ln^2(x)$$

$$\sec^2\theta \, d\theta = 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{2\ln(x)}{x}$$

$$\sqrt{\ln^4(x) + 1} = \sec\theta$$

$$= 4\int \sec\theta \, d\theta = 4 \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$$\therefore = 4 \cdot \ln\left|\sqrt{\ln^4(x) + 1} + \ln^2(x)\right| + C \quad \square$$

$$\int \frac{(x-2)^3}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}} \, dx =$$

completar al cuadrado

$(x^2 - 4x + 4) + 13 - 4$

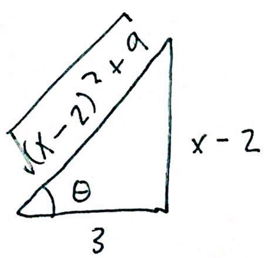
$(x-2)^2 + 9$

$u = x^2 - 4x + 13$

$du = 2x - 4 = 2(x-2) \, dx$

no está

$$\therefore = \int \frac{(x-2)^3}{\sqrt{(x-2)^2 + 9}} \, dx$$



$$3\tan\theta = x - 2$$

$$3\sec^2\theta \, d\theta = dx$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + 9} = 3\sec\theta$$

$$(x-2)^3 = 3^3 \sec^3\theta$$

$$= \int \frac{(x-2)^3}{\sqrt{(x-2) + 9}} \, dx = \int \frac{3^3 \tan^3\theta}{3\sec\theta} \cdot 3\sec^2\theta \, d\theta = 3^3 \int \tan^3\theta \sec\theta \, d\theta$$

$$= 27 \int \tan^2\theta \, (\tan\theta \sec\theta \, d\theta)$$

$$= 27 \int \tan^2\theta \, (\tan\theta\sec\theta)\, d\theta = 27 \int (\sec^2\theta - 1)(\tan\theta \sec\theta) d\theta$$

$u = \sec\theta$

$du = \sec\theta \tan\theta \, d\theta$

$$= 27 \int (u^2 - 1)\, du = 9u^3 - 27u + C$$

$$= 9\sec^3\theta - 27\sec\theta + C$$

$$= \frac{9}{27}(x^2 - 4x + 13)^{3/2} - \frac{27}{3}(x^2 - 4x + 13)^{1/2} + C$$

Capítulo 11

Repaso del parcial simulacro

Repaso Simulacro Parcial

2019-08-29
20190432

a) $\int x \tan^{-1}(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int \tan^{-1}(y)\, dy =$

$y = x^2$
$dy = 2x\, dx$

IPP: $u = \tan^{-1} y$ $\quad dv = dy$

$du = \frac{1}{x^2+1}$ $\quad v = y$

$= \frac{1}{2}\tan^{-1}(y)\, y - \frac{1}{2}\int y \frac{1}{y^2+1}\, dy$ $\quad w = 1 + y^2$, $dw = 2y\, dy$

$= \frac{1}{2} y \tan^{-1} y - \frac{1}{4}\int \frac{dw}{w}$

$= \frac{1}{2} y \tan^{-1} y - \frac{1}{4}\ln|w| + C$

$= \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \tan^{-1}(x^2) - \frac{1}{4}\ln|1 + x^4| + C$

b) $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2}\, dx =$ $\quad u = x e^x$ $\quad dv = (x+1)^{-2}$

tres funciones

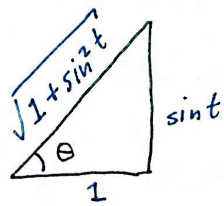
$du = e^x + x e^x$ $\quad v = \frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{(x+1)}$

$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2}\, dx = -\frac{x e^x}{(x+1)} + \int \frac{(e^x + x e^x)\, dx}{(x+1)}$

$= \frac{-x e^x}{(x+1)} + \int e^x\, dx = \frac{-x e^x}{(x+1)} + e^x + C$

2b

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sqrt{1+\sin^2 t}}\,dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big]_0^{\pi/4}$$



$\sin t = \tan\theta$

$\cos t\,dt = \sec^2\theta\,d\theta$

$\sqrt{1+\sin^2 t} = \sec\theta$

cambie límites de integración

$\tan\theta = \sin \pi/2 = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

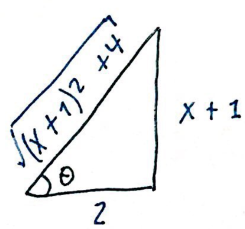
$\tan\theta = \sin 0 = 0 \rightarrow \theta = 0$

$$= \{\ln|\sec \pi/4 + \tan \pi/4|\} - \{\ln|\sec 0 + \tan 0|\}$$

$$= \ln|\sqrt{2}+1| - \ln|\sqrt{2}+1|$$

Corto 4a

$$\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}\,dx = \int \frac{1}{[(x+1)^2+4]^2}\,dx = \int \frac{1\cdot 2\sec^2\theta\,d\theta}{16\sec^4\theta}$$



$\tan\theta = \frac{x+1}{2}$

$x+1 = 2\tan\theta$

$dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$

$$(\sec\theta)^2 = \left(\frac{\sqrt{(x+1)^2+4}}{2}\right)^2$$

$$16\sec^2\theta = ((x+1)^2+4)^2$$

$$= \frac{1}{8}\int \cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{8}(\theta + \sin\theta\cos\theta) = \frac{\frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)}{16} + \frac{1}{16}\left(\frac{(x+1)\cdot 2}{(\sqrt{x^2+2x+5})^2}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}\sqrt{x^2+2x+5}}\right) + C$$

IPP:

2 $$\int (x-1)\sin \pi x \, dx =$$

$u = x - 1 \qquad dv = \sin \pi x \, dx$

$du = dx \qquad v = -\frac{1}{\pi}\cos \pi x$

$$= (x-1)\left(-{}^{1}/_{\pi} \cos \pi x\right) - \int \frac{1}{\pi}\cos \pi x \, dx$$

$$= -\frac{(x-1)}{\pi}\cos \pi x + \underline{\frac{1}{\pi^2}\sin \pi x + C}$$

Cíclico:

$$\int e^{-\theta}\cos(2\theta)\, d\theta = -\frac{1}{2}e^{-\theta}\sin(2\theta) - \frac{1}{2}\underbrace{\int e^{-\theta}\sin(2\theta)\, d\theta}$$

$u = e^{-\theta} \qquad dv = \cos 2\theta \, d\theta$

$du = -e^{-\theta}\, d\theta \qquad v = \frac{\sin 2\theta}{2}$

$$= \int e^{-\theta}\sin(2\theta)$$

$u = e^{-\theta} \qquad dv = \sin(2\theta)\, d\theta$

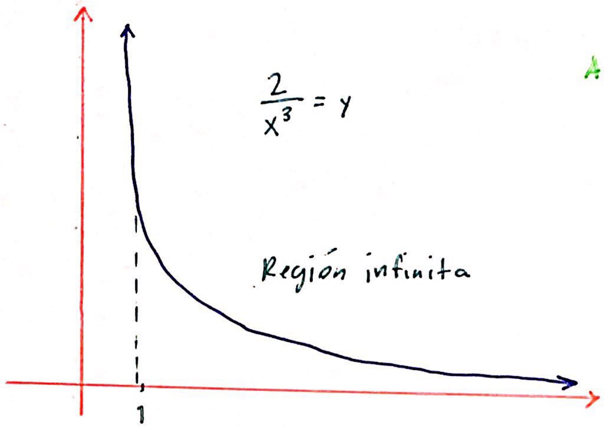
$du = -e^{-\theta}\, d\theta$

Capítulo 12

Integrales impropias, tipo uno & tipo dos

7.8. Integrales impropias 2019-09-03

Considere la región bajo la curva $y = \frac{2}{x^3}$ encima del eje-x y a la derecha de la recta $x = 1$



$$A = \int_1^t 2x^{-3}\, dx =$$

$$A = \frac{2}{-2} x^{-2} \Big]_1^t$$

$$A = -1 \cdot t^{-2} + 1 \cdot 1^{-2} = 1 - \frac{1}{t^2}$$

$$\lim_{t \to \infty} A = \lim \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) = 1$$

$$\boxed{\int_1^t \frac{2}{x^3}\, dx = 1}$$

Límites básicos

a) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^r}\right) = 0 \quad \left[\frac{1}{\infty}\right]$

b) $\lim_{x \to \infty} \left(e^x\right) = \infty \quad \left[e^{\infty}\right]$

c) $\lim_{x \to 0^+} \left(\ln x\right) = -\infty$

d) $\lim_{x \to \infty} \left(x^r\right) = \infty$

e) $\lim_{x \to -\infty} \left(e^x\right) = 0$

f) $\lim_{x \to \infty} \left(\ln x\right) = \infty$

Integrales impropias:

tipo 1: Intervalos infinitos $\pm\infty$

tipo 2: Funciones discontinuas (AVs, en $x = \pm a$)

Integrales Impropias tipo 1:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^{t} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^{a} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

- Convergente: se acerca a un número, el límite <u>existe</u>

Divergente: el límite <u>no existe</u>.

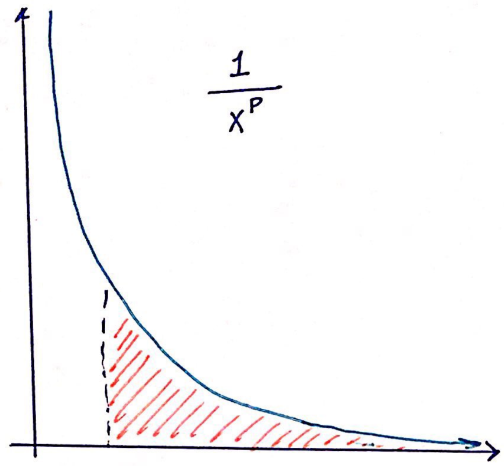
• <u>Ejercicio:</u> Evalúe

a) $$\int_1^{\infty} x^{-1/2}\,dx = 2x^{1/2}\Big]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(2\sqrt{x} - 2\right) = 2\sqrt{\infty} - 2 = \infty$$

Es una integral <u>divergente</u>.

b) $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_1^{\infty} = \lim_{t\to\infty}\left(\ln x - 0\right) = \infty$$

también es <u>divergente</u>.



$\frac{1}{x^p}$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \text{no necesariamente existe}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} p \le 1 & \text{Diverge} \\ p > 1 & \text{converge} \end{cases}$$

- $p = 0.99$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{0.99}}\,dx = \left.\frac{x^{0.01}}{0.01}\right]_1^\infty = \lim_{x \to \infty}\left(x^{0.01} - \frac{1}{0.01}\right) = +\infty$$

Diverge

- $p = 1.001$

$$\int_1^\infty x^{-1.001}\,dx = \left.\frac{1}{x^{0.001}} \cdot \frac{1}{0.001}\right]_1^\infty = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{1000}{x^{0.001}} + \frac{1}{0.001}\right) =$$

$$= \left.\frac{1000}{x^{0.001}}\right]_\infty^1 = 1000 - \lim_{x \to \infty}\left(\frac{1000}{x^{0.001}}\right) = 1000$$

Diverge.

$$\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} \cdot x\,dx = \int_{-\infty}^0 e^u \frac{du}{-2} = -\frac{1}{2}e^u\Big]_{-\infty}^0 = -\frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{2}e^{-\infty} = -\frac{1}{2}$$

Converge

$u = -x^2$

$-\frac{du}{2} = x\,dx$

$u(0) = -0^2$

$u(-\infty) = -(-\infty)^2 = -\infty$

b.) $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}\tan^{-1}(\infty)\right\} - \left\{\frac{1}{2}\tan^{-1}(-\infty)\right\} = \frac{\pi}{2}$ Diverge

$\tan x \Rightarrow$ ID : $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

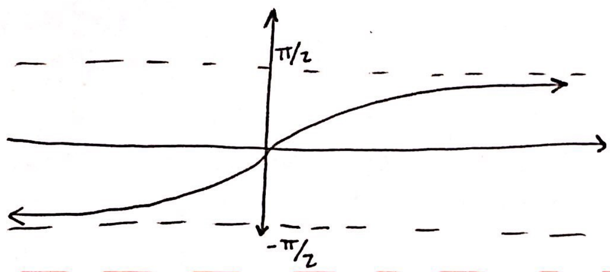
R : $(-\infty, \infty)$

AV: $x = -\pi/2 \, , \, \pi/2$

$= \tan^{-1}x$ ID $= (-\infty, \infty)$

R $= (-\pi/2 \, , \, \pi/2)$

A.H $= \pm \pi/2$



$= \tan^{-1}(\infty) = \pi/2$

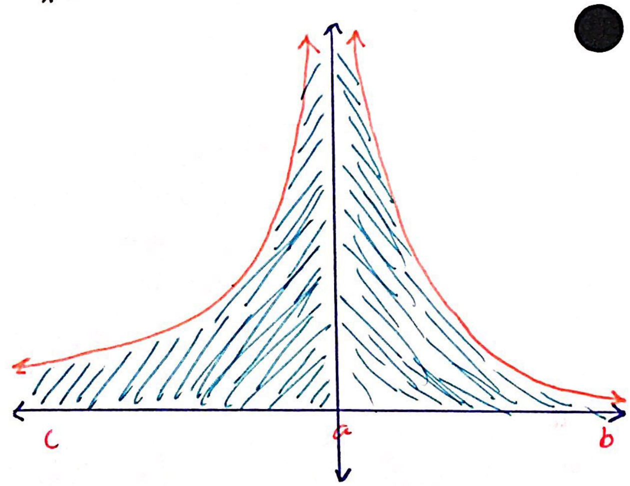
$= \tan^{-1}(-\infty) = -\pi/2$

Integrales impropias: Tipo 2

Hay una asíntota vertical en $x = a$:

$$\int_b^a f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

$$\int_c^a f(x)\,dx = \lim_{t \to a^-} \int_c^t f(x)\,dx$$



A.V. $x = a$ $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx = \int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$

Ejercicio 4: Evalúe. Indique donde es discontinua

a) $$\int_1^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \int_0^8 u^{-1/3}\,du = \frac{3}{2}u^{2/3}\Big]_{0^+}^{8} =$$

Discontinuidades: $x = 1$ denominador igual a $1/0$

$u = x - 1$ $\quad u(1) = 0$

$du = dx$ $\quad u(9) = 8$

$$= \frac{3}{2}(8^2)^{1/3} - \frac{3}{2}\lim_{u\to 0^+} u^{2/3} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{64} - 0 = \frac{3}{2}\cdot 4 = 6$$

$\square$

b) discontinua en 0

$$\int_{-2}^{3} \frac{3}{x^4}\,dx = \underbrace{\int_{-2}^{0} 3x^{-4}\,dx}_{(1)} + \underbrace{\int_0^3 3x^{-4}\,dx}_{(2)} = \infty \text{ diverge}$$

$$(1) = \frac{3x^{-3}}{-3}\Big]_{-2}^{0^-} = \underbrace{\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{x^3}\right)}_{\infty} + \frac{1}{-2^8} = +\infty$$

$$(2) = \int_0^3 3x^{-4}\,dx = -x^{-3}\Big]_0^3 = -\frac{1}{3^3} + \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3} = +\infty$$

c.) $$\int_0^1 \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int dx = x\ln x - x + C\Big]_{0^+}^{1} = \overbrace{1\cdot\ln(1)}^{0} - \overbrace{1 - \lim_{x\to 0} x\ln x}^{\infty}$$

$$= -1 - \underbrace{\lim_{x\to 0}(x\ln x)}$$

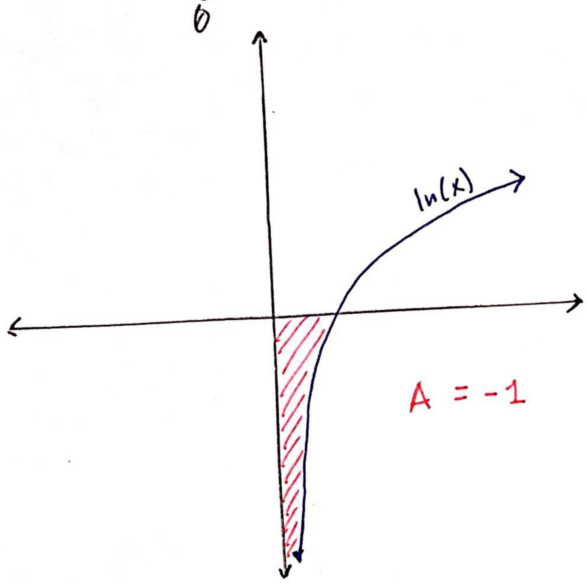
Regla de L'Hopital $\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln(x)\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(x)}{x^{-1}}\right) \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x(-x^{-2})}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{-x^{-1}}\right) = \cdots$$

$$\cdots = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{-x^{-1}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-x\right) = \underline{0}$$

$$\therefore \int_0^1 \ln(x)\,dx = -1 - \lim_{x\to 0} x\ln(x) = -1 + 0$$

converge



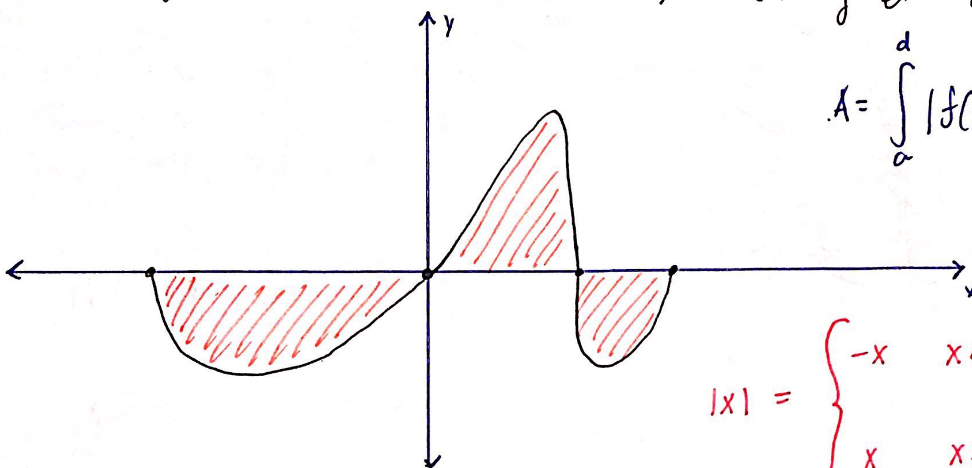
□

Capítulo 13

Área entre curvas, pasos para sacar área entre curvas irregulares

6.1. Área Entre Curvas   Pg. 79   2019-09-5

Región entre la curva $y = f(x)$ y el eje-x.



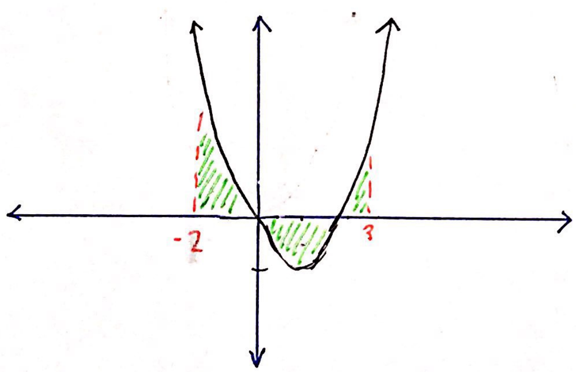
$$A = \int_a^d |f(x)|\, dx$$

$$|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

$$A = -\int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx - \int_c^d f\,dx$$

Intersecciones y bosquejos la curva y la región.

Ejercicio I: Bosqueje y encuentre el área de la región limitada por $y = 3x^2 - 6x$, $x = -2$, $x = 3$ & $y = 0$.



Ix

$$y = 3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x-2) = 0 \quad x = 2,\ x = 0$$

Sume el área de 3 subregiones:

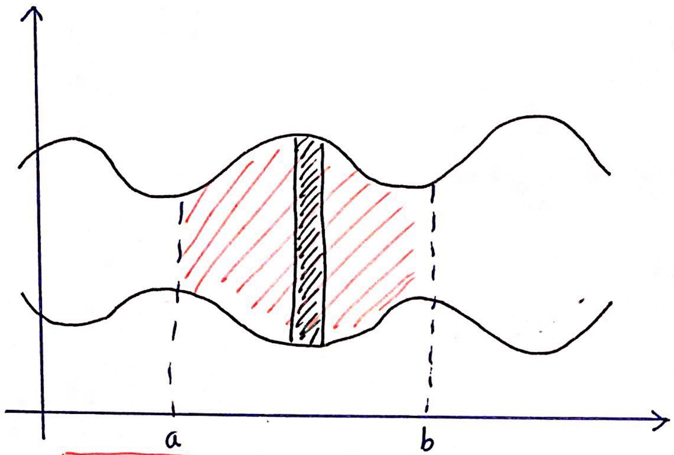
$$A = \int_{-2}^{0} 3x^2 - 6x\, dx - \int_0^2 3x^2 - 6x\, dx + \int_2^3 3x^2 - 6x\, dx$$

$$A = x^3 - 3x^2\Big]_{-2}^{0} + \left(-x^3 + 3x^2\Big]_0^2\right) + x^3 - 3x^2\Big]_2^3$$

$$A = 0 - (-8 - 12) + (-8 + 12) + (27 - 27 - 8$$

$$A = 28$$

¿Cuando hay una curva interior?



$y = f(x)$

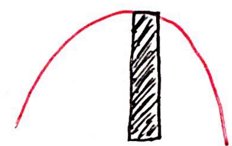
Región $= g(x) \leq y \leq f(x)$

$a \leq x \leq b$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

diferencia de áreas

$$\boxed{A = \int_a^b y\text{ arriba} - y\text{ abajo } dx}$$



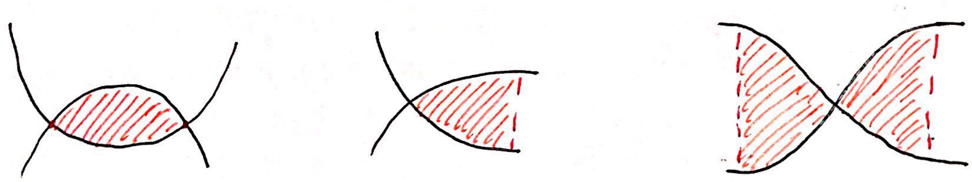
■ franja horizontal ó rectángulo infinitesimal
- def. pt más alto y más bajo
- ancho dx altura $f(x) - g(x)$

$$dA = (f(x) - g(x))\,dx$$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

■ Pasos:

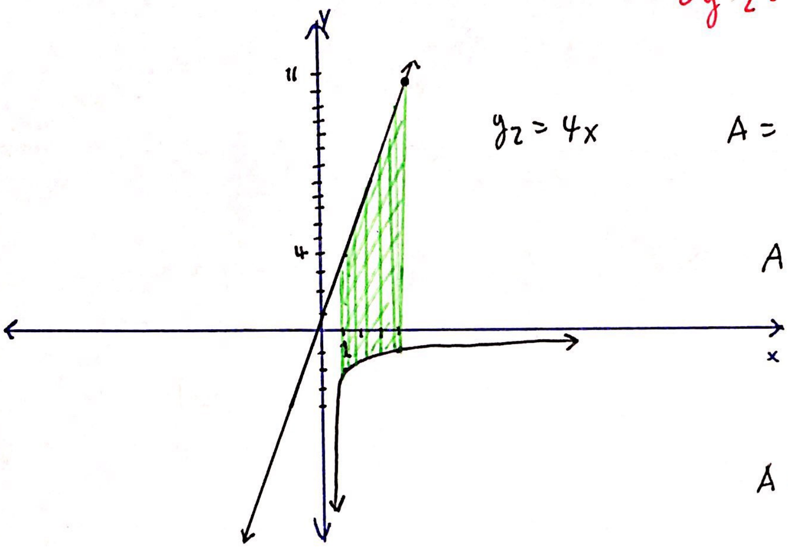
1. Bosqueje $g(x)$ & $f(x)$.
2. Ojo con intersecto ente $f(x)$ & $g(x)$.
3. Bosqueje la región.



Ejemplo: Bosqueje y encuentre el área entre:

$$y_1 = \frac{-2}{\sqrt{x}} \quad , \quad y_2 = 4x \quad \text{en} \quad 1 \leq x \leq 4$$

¿$y_2 > y_1$? ó ¿$y_2 > y_2$?



$y_2 = 4x$

$$A = \int_1^4 y_2 - y_1 \, dx$$

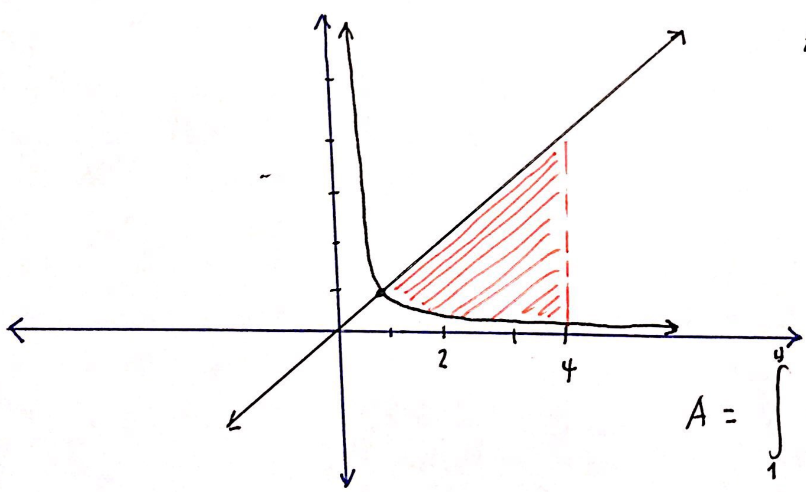
$$A = \int_1^4 4x - \left(-2x^{-1/2}\right) dx$$

$$A = 2x^2\Big]_1^4 + 4x^{1/2}\Big]_1^4$$

$$A = \{2 \cdot 16 + 4 \cdot 2\} - \{2 + 4\}$$

$$A = 32 + 8 - 6 = 34 ~~✗~~ \square$$

Variación $y_1 = \frac{4}{\sqrt{x}}$ & $y_2 = 4x$ y la recta $x = 4$.



$$A = \int^4 y_2 - y_1$$

Intersección y_1 & y_2

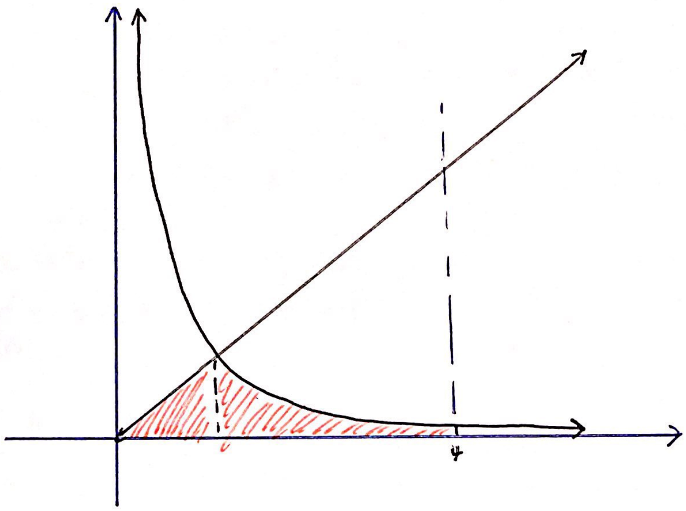
$$\frac{4}{x^{1/2}} = 4x$$

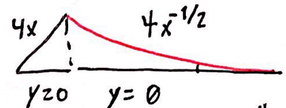
$$1 = x^{3/2} \Rightarrow x = 1$$

$$A = \int_1^4 4x - 4x^{-1/2} \, dx = 2x^2 - 8x^{1/2}\Big]_1^4 =$$

$$= 32 - 16 - (2 - 8) - 16 + 6 = 22$$

Variación C: Área de la región entre $y_1 = 4x^{-1/2}$ $y_2 = 4x$, $x = 4$, $x = 0$



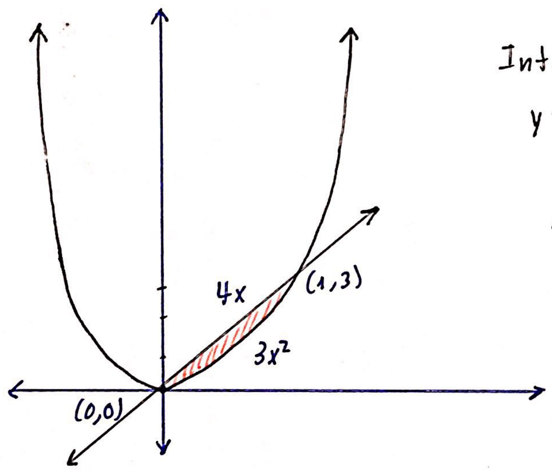


$$A = \int_0^1 4x\,dx + \int_1^4 4x^{-1/2}\,dx$$

$$A = 2x^2 \Big]_0^1 + 8x^{1/2}\Big]_1^4$$

$$A = 2 + 16 - 8 = 10$$

Ejemplo: Encuentre el área de la recta de la región entre las curvas $y_1 = 3x$ & $y_2 = 3x^2$.



Intersectos: $3x^2 = 3x$

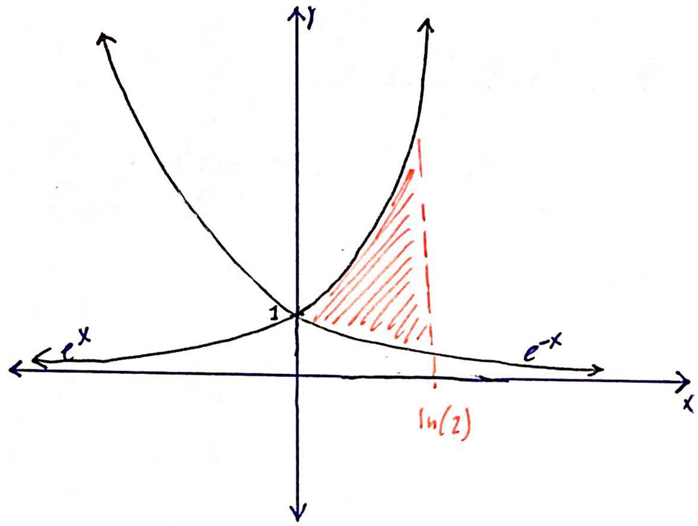
$y_2 = y_2$ $x = 1, x = 0$

$$A = \int_0^1 (3x - 3x^2)\,dx$$

$$A = \frac{3x^2}{2} - x^3\Big]_0^1 = \left\{\frac{3}{2} - 1\right\} - \left\{0\right\} = \frac{1}{2}$$ □

Ejercicio 2: Bosqueje y encuentre el área de la región entre las curvas.

a) $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $x = 0$, $x = \ln(2)$



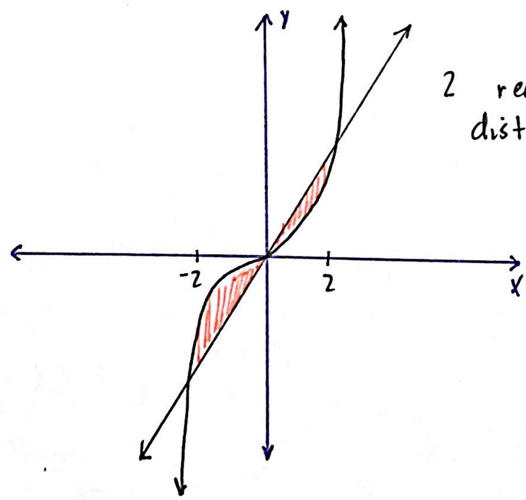
$$A = \int_0^{\ln(2)} (e^x - e^{-x})\,dx$$

$$A = e^x + e^{-x} \Big]_0^{\ln(2)}$$

$$A = \{2 + 2^{-1}\} - \{1 + 1\}$$

$$A = 2 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

b) $y_1 = x^3$, $y_2 = 4x$



2 regiones distintas

Intersectos

$y_1 = y_2$

$x^3 - 4x = 0$

$x(x^2 - 4) = 0$

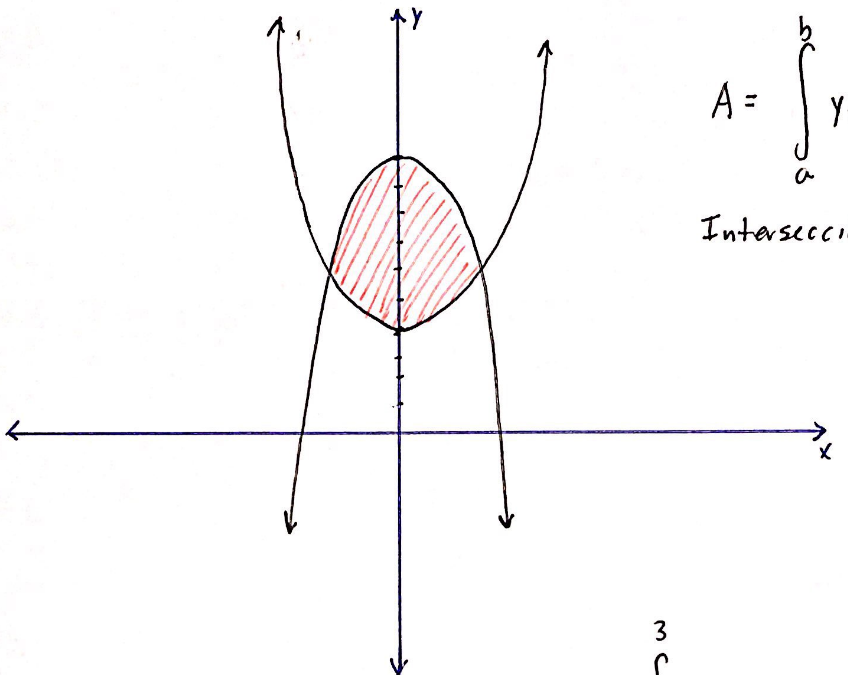
$x = 0$, $x = -2$, $x = 2$

$$A = 2\int_0^2 4x - x^3\,dx = 2\left\{2x^2 - \frac{x^4}{4}\Big]_0^2\right\} =$$

$$= 2\left[\left\{2(2)^2 - \frac{(2)^4}{4}\right\} - \{0\}\right] = 2\left(8 - \frac{16}{4}\right)$$

$$= 8$$

c) $y_1 = x^2 - 4x + 4$, $y_2 = 10 - x^2$



$$A = \int_a^b y_2 - y_1 \, dx$$

Intersecciones $y1 = y2$

$$x^2 - 4x + 4 = 10 - x$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$2(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$2(x-3)(x+1)$$

$$x = 3 \quad x = -1$$

$$A = \int_{-1}^{3} 10 - x^2 - (x^2 - 4x + 4)\, dx$$

$$A = \int_{-1}^{3} (10 - 2x^2 + 4x)\, dx =$$

$$= 6x - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \Big]_{-1}^{3} = 18 - 18 + 18 - (-6 + \frac{2}{3} + 2)$$

$$= 18 + 4 - \frac{2}{3} = 22 - \frac{2}{3}$$

Capítulo 14

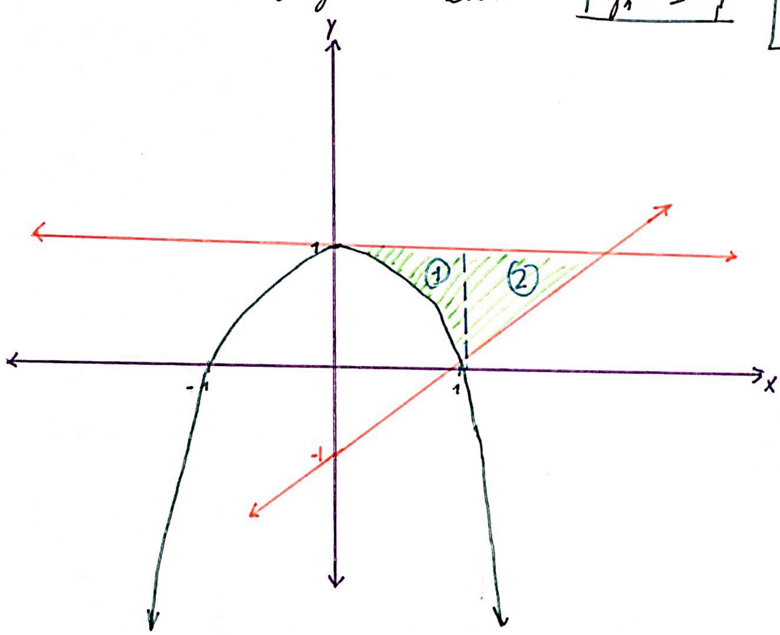
Aplicación de la integración, integración respecto a y para encontrar áreas entre curvas, integración respecto a x para encontrar áreas entre curvas, introducción a volúmenes

2019-09-16

Aplicación de la integraciones

- Planteamiento
- Gráfica de una región → área / → volúmen solidos en revolución

Ej: Encuentre la región entre $\boxed{y_1 = 1}$ $\boxed{y_2 = 1 - x^2}$ & $\boxed{y_3 = x - 1}$



$y_1 = y_2$ $(0, 1)$

$y1 = y3$

$1 = x - 1$

$x = 2$ $(2, 1)$

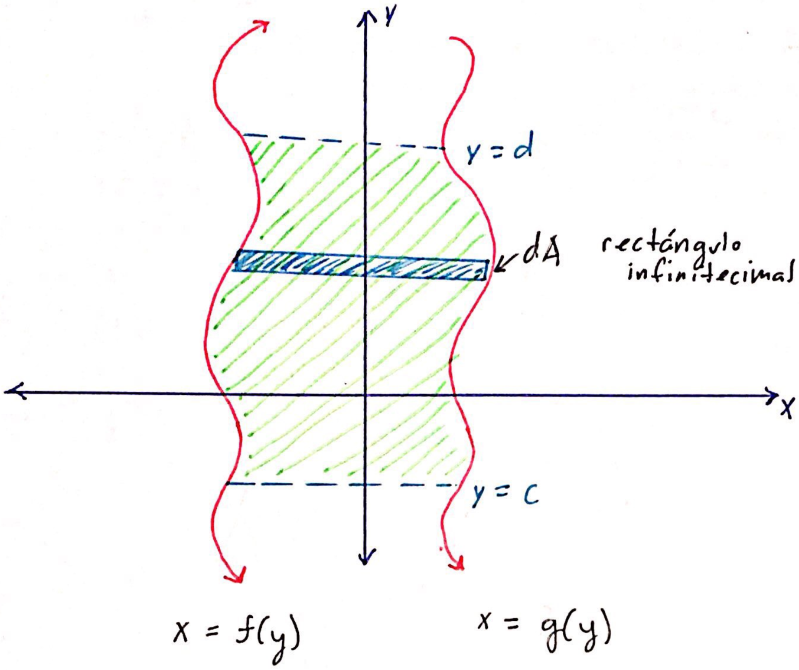
$$A = \overset{①}{\int_0^1 1 - (1 - x^2)\, dx} + \overset{②}{\int_1^2 1 - (x + 1)\, dx}$$

$$= \int_0^1 0 + x^2\, dx + \int_1^2 2 - x\, dx$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left. 2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{3} + 4 - \frac{4}{2} - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

Integración en el eje-y : Franjas horizontales derecha - izquierda



Derecha - izquierda

Región S: $f(y) \le x \le g(y)$

$c \le x \le d$

altura = dy

ancho = $g(y) - f(y)$

$dA = [g(y) - f(y)]\,dy$

$$A = \int_c^d [(g(y) - f(y)]\,dy$$

$$A = \int_c^d x_{der.} - x_{izq.}\,dy$$

$x_{der.} = g(y)$

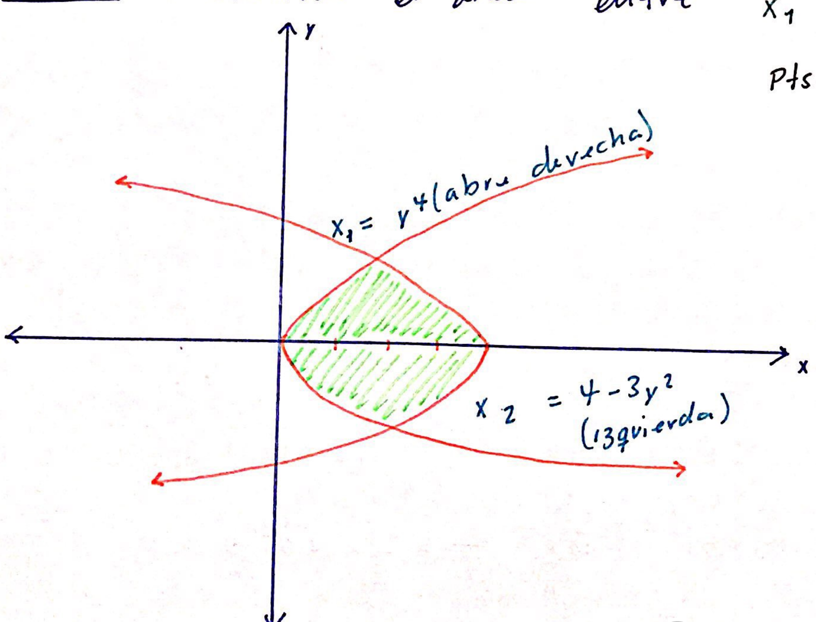
$x_{izq.} = f(y)$

$$A = \int_a^b y_{arriba} - y_{abajo}\,dx$$

$y_{arriba} = f(x)$

$y_{abajo} = g(x)$

<u>Ejercicio:</u> encuentre el área entre $x_1 = y^4$ & $x_2 = 4 - 3y^2$ &



Pts. Intersección $x_1 = x_2$

$y^4 = 4 - 3y^2$

$y^4 + 3y^2 - 4 = 0$

$(y^2 + 4)(y^2 - 1)$

$y = \sqrt{-4}$ imaginario

$y = \sqrt{1}$

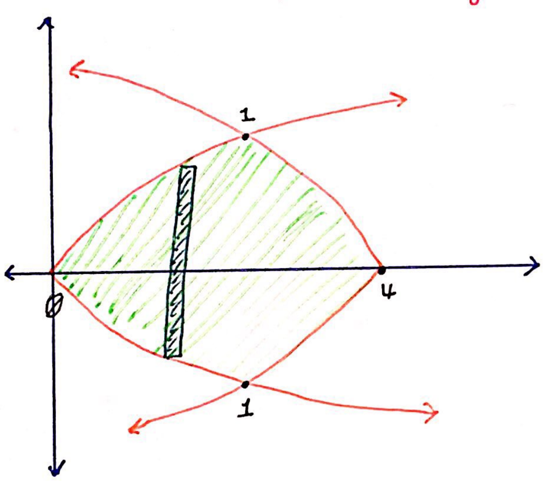
$y = \pm 1$

$$A = \int_{-1}^{1} X_{derecha} - X_{izquierda}\, dy =$$

$$= 2\int_{0}^{1} 4 - 3y^2 - y^4\, dy = 2\left(4y - y^3 - \frac{y^5}{5}\Big]_0^1\right)$$

$$= 2\left(3 - \frac{1}{5}\right) = 2\left(\frac{15}{5} - \frac{1}{5}\right) = \underline{\frac{28}{5}}\ *$$

ahora lo mismo pero integrando respecto a eje-x.



$$\int f(x) - g(x)\, dx$$

$x = y^4$ $\quad$ $x = 4 - 3y^2$

¡Resolver para x!

$a^2 = b \Rightarrow a = \pm\sqrt{b}$

$$2\int_{0}^{1} f - g\ dx + \int_{1}^{4} h - i\ dx$$

Sacar la inversa: $x = y^4$ & $x = 4 - 3y^2$

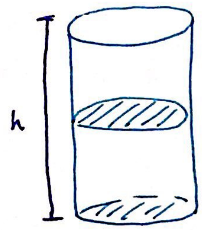
$$y = \pm\sqrt[4]{x}$$

$$x = 4 - 3y^2 \Rightarrow x - 4 = 3y^2$$

$$\pm\sqrt{\frac{x-4}{3}} = y$$

$$A = 2\int_{0}^{1} x^{1/4}\, dx + 2\int_{1}^{4} \left(\frac{4-x}{3}\right)^{1/2} dx = \frac{28}{5}$$

Volúmenes



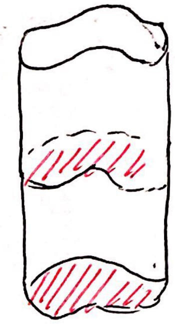
(rebanado)

Sección transversal

$A = \pi r^2$

$V = Ah$

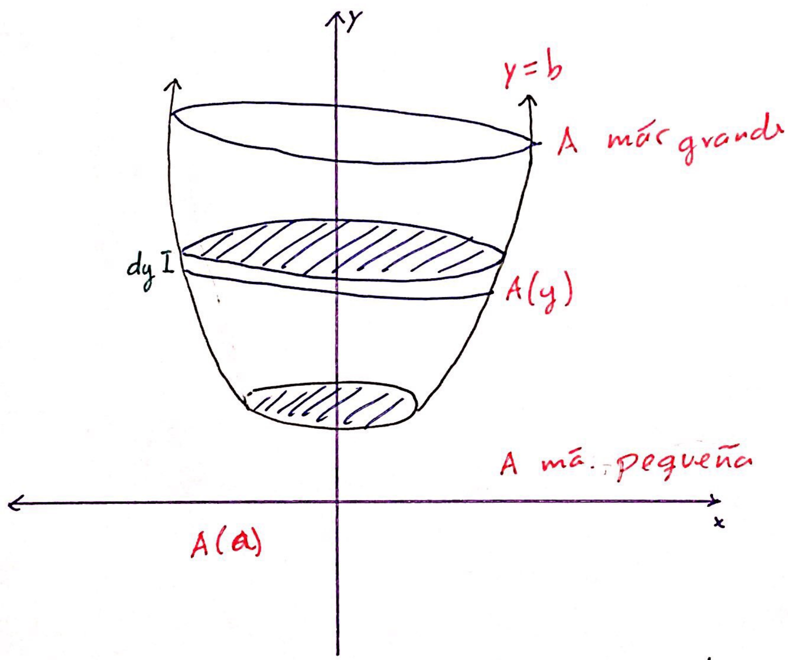
$V = \pi r^2 h$



Área sección transversal

$V = Ah$

Volúmen de un sólido S.



Parte infinitecimal de este sólido

cilíndro

Área transversal $A(y)$

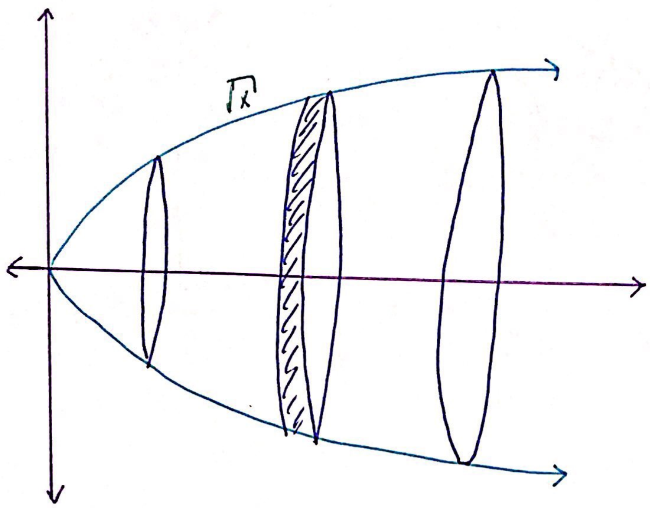
Altura dy

$dv = A(y)\,dy$

Integrando $V = \int_a^b dv = \int_a^b A(y)\,dy$

¿cuál es el área transversal

Ejemplo: Considere la región $0 \leq y \leq \sqrt{x}$



Volumen del solido es la sección transversal es un cilíndro disco de radio $r = \sqrt{x}$

$$dv = \pi r^2 \, dx = \pi x \, dx$$

$$V = \int_0^4 \pi r^2 \, dx = \pi \int_0^4 x \, dx = \left.\frac{\pi x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{16\pi}{2} = 8\pi$$

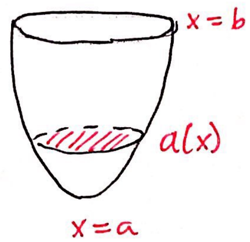
Capítulo 15

Volúmenes, sólidos en revolución, cilíndros & solidos huecos

Volúmenes

en revolución

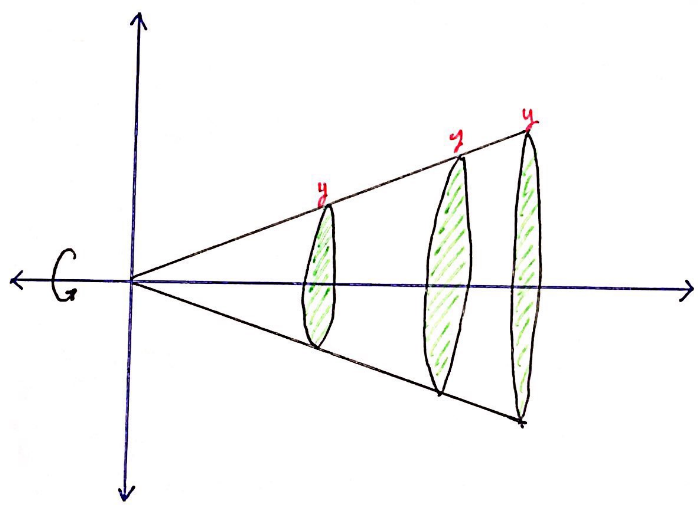
2019-09-12



$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

área de la sección transversal.

Ejemplo: Encuentre el volumen de una curva de altura H y base circular de radio R



Las seccions transversales son circulares del radio

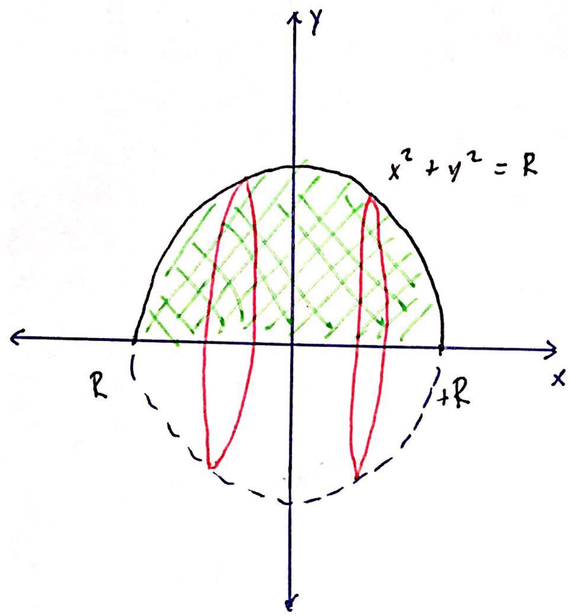
$y(x)$

$$A = \pi y^2$$

$$V = \int_0^4 \pi y^2 \, dx$$

Ejercicio 1: pg. 89 volúmen de una esfera

La esfera se obtiene al girar el círculo $x^2 + y^2 \leq R^2$ respecto al eje -x:



dominio =

$y^2 = R^2 - x^2$ $D \to -R \leq \leq R^2$

$y = \sqrt{R^2 - x^2}$

$\underbrace{x^2 = R^2}_{\emptyset}$ $x = \pm R$

Sección transrversal círculo de radio y

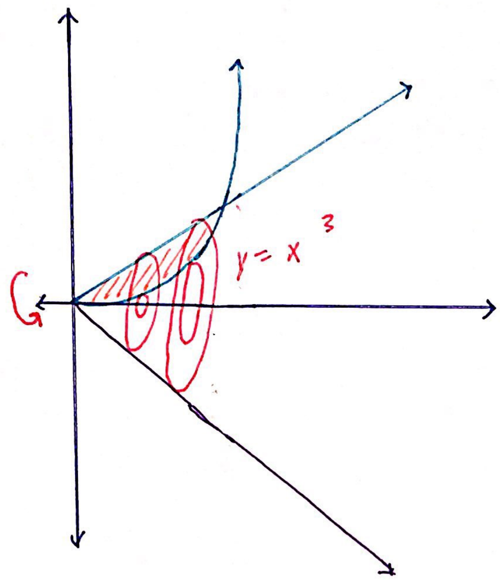
$f(x) = \pi y^2$

$$V = \pi \int_{-R}^{R} A(x)\,dx = 2\pi \int_{0}^{R} (R^2 - x^2) =$$

$$V = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \Big]_0^R \right) = 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) =$$

$$= 2\pi R^3 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4\pi}{3} R^3$$

Encuentre el volúmen del sólido obtenido al girar la región entre las curvas $y = x$ & $y = x^3$ en el cuadrante respecto al eje-x.



V = Vexterna − Vinterna

Área Anillo

$r_{ext} = x \qquad r_{int} = x^3$

$$A = \pi r_{ext.}^2 - \pi r_{int.}^2$$

$$A = \pi x^2 - \pi x^6$$

Volumen $\displaystyle V = \int_0^1 A\,dx = \int_0^1 (\pi x^2 - \pi x^6)\,dx$

$$V = \frac{\pi}{3}x^3 - \frac{\pi}{7}x^7 \Big]_0^1 =$$

$$= \left\{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{7}\right\} - \{0\}$$

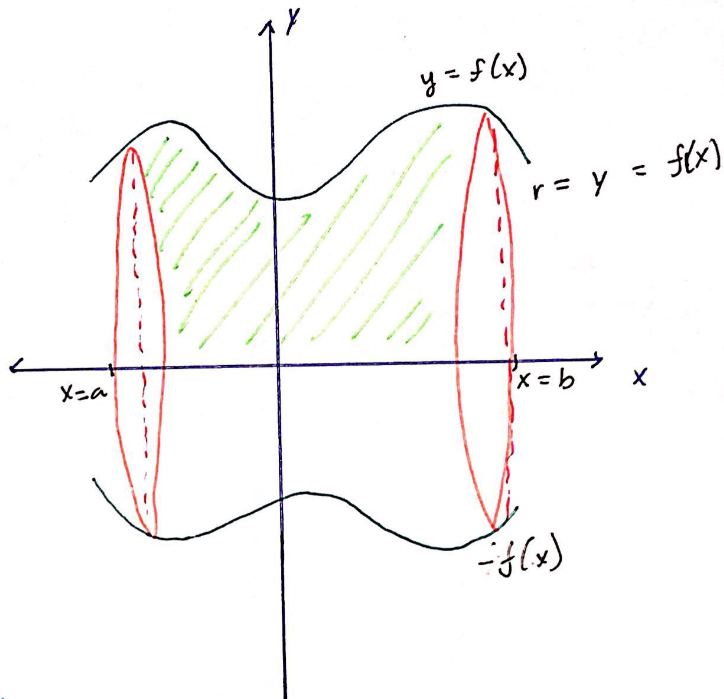
$$= \frac{7\pi - 3\pi}{3\cdot 7} = \frac{4\pi}{21} \quad \square$$

Sólidos en revolución

$\mathbb{R}: a \leq x \leq b$

$0 \leq y \leq f(x)$

- gire respecto a x

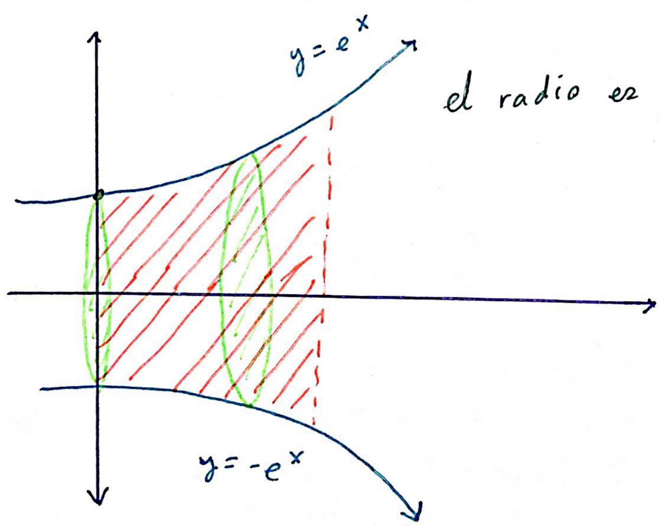


Área transversal:

$A = \pi y^2$

$$V = \int_a^b \pi y^2 \, dx = \underline{\int_a^b \pi f^2(x) \, dx}$$

Ej 4: encuentre el volumen del sólido que se obtiene al girar la región $R: 0 \leq x \leq \ln(3)$; $0 \leq y \leq e^x$ respecto al eje-x Pg 93.



el radio es $\underline{y}$

$A = \pi r^2$

$A = \pi y^2$

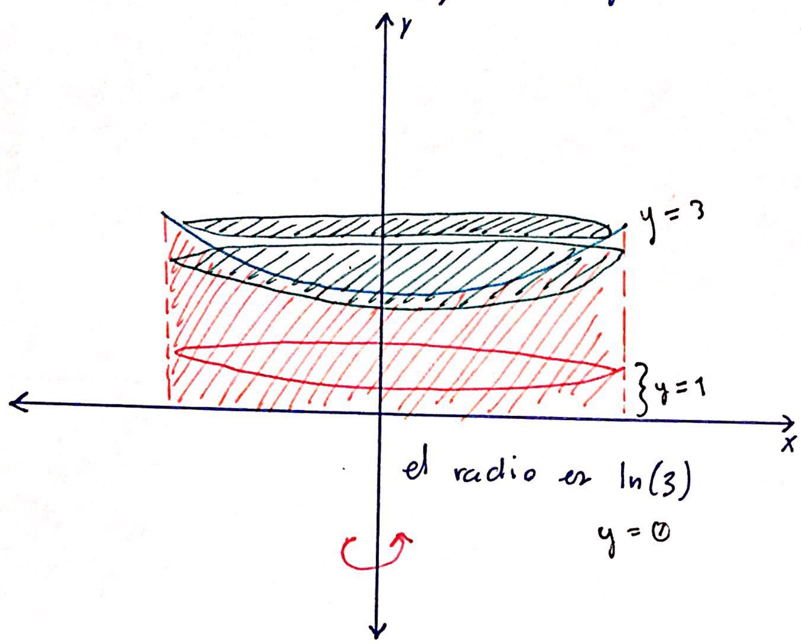
$$\therefore \int A = \int_0^{\ln(3)} \pi e^{2x} \, dx$$

$$V = \pi \int_0^{\ln(3)} e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big]_0^{\ln(3)}$$

$$= \left\{\frac{\pi}{2} e^{2\ln(3)}\right\} - \left\{\frac{\pi}{2} \cancel{e^{2(0)}}^{1}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} 3^2 - \frac{\pi}{2} = \underline{\frac{\pi}{2}(9-1)} \quad \square$$

Girando la misma región respecto al eje-x al eje-y.



$f(0) = 1$

$f(\ln(3)) = 3$

el radio es $\ln(3)$

$y = 0$

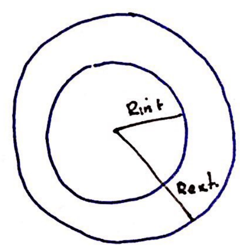
$V = V_1 - V_2$

Por casos:

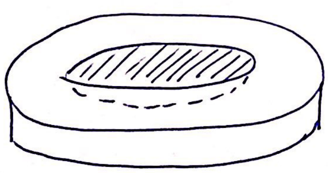
caso 1 el cilíndro

$V_1 =$ cilíndro

$V_1 = \pi r^2 h = \pi \ln^2(3)$

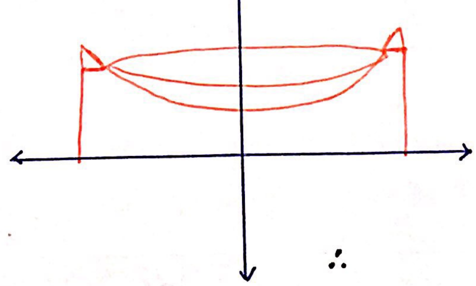


caso 2: Sólido hueco



$A = \pi r^2_{ext.} - \pi r^2_{int.}$

$A = \pi(\ln(3))^2 - \pi \ln(y)^2$



$\therefore$

$$V_2 = \int_1^3 \pi \ln(3)^2 - \pi \ln(y)^2 \, dy$$

Capítulo 16

Continuación de volúmenes, volúmenes con un cascarón cilíndrico.

2019-09-17

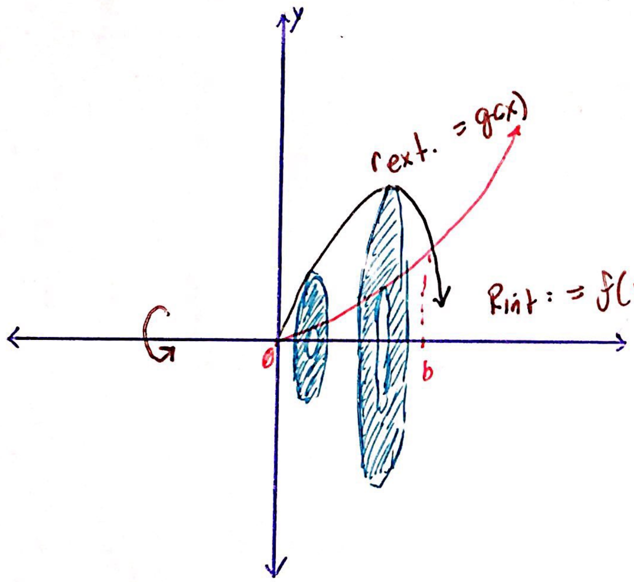
Continuación de Volúmenes

① Región

② Identificar la recta de rotación

③ Identificar las funciones de radio para cada anillo

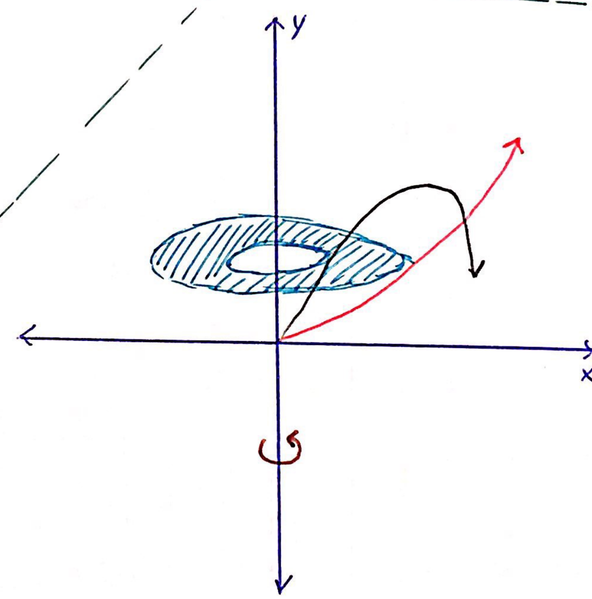
④ Escoger la variable de integración.



El reflejo en eje-x

$$A = \pi r_{ext.}^2 - \pi r_{int.}^2$$

$$A = \pi \int_0^b r^2_{ext} - r^2_{int} \, dx$$



El reflejo en eje-y

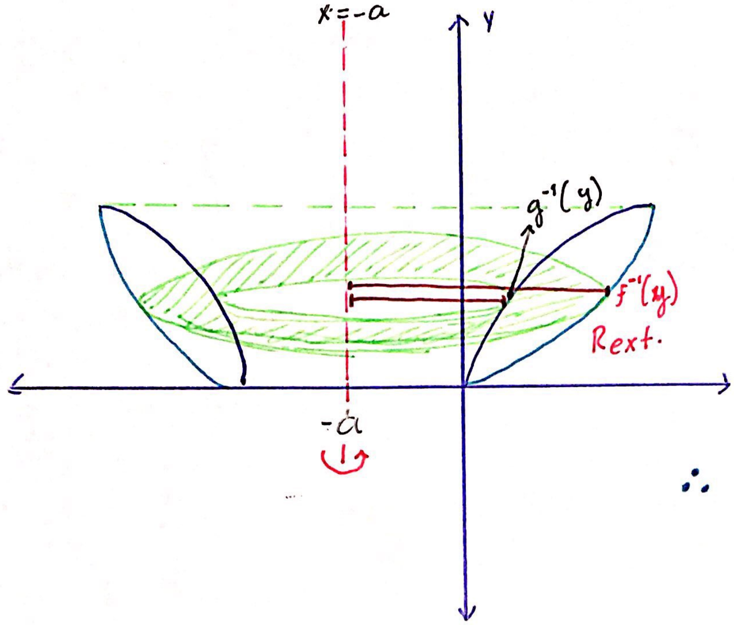
$$0 \leq y \leq y_{máximo}$$

$$R_{int.} = x = g^{-1}(y)$$

$$R_{ext} = x = f^{-1}(y)$$

$$\text{Volumen} = \pi \int_0^{y\,max} r^2_{max.} - r^2_{int.} \, dy = \pi \int_0^{y_{máx}} (f^{-1}(y))^2 - (g^{-1}(y))^2 \, dy$$

Rectas de rotación



$R_{int} = a + g^{-1}(y)$

$R_{ext} = a + f^{-1}(y)$

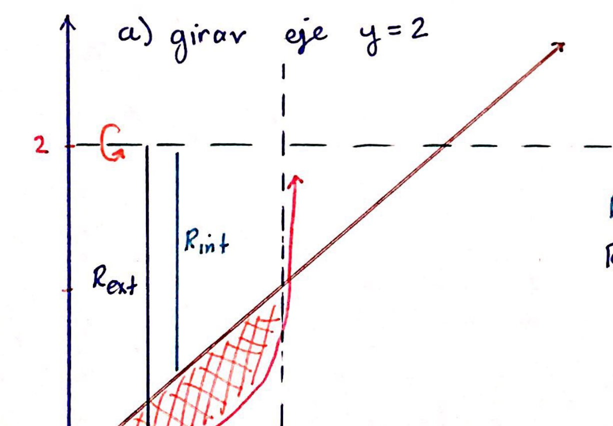
$0 \leq y \leq y_{máx}.$

$$\therefore \; V = \pi \int_{0}^{y_{max}} (R_{ext})^2 - (R_{int})^2 \, dy$$

$$\boxed{= \pi \int_{0}^{y_{max}} (a + f^{-1}(y))^2 - (a + g^{-1}(y)) \, dy}$$

Ej: Considere la región entre $f(x) = x$ & $g(x) = x^3$ en el 1er cuadrante.

a) girar eje $y = 2$



$x^3 = x$

$x^3 - x = 0$

$x(x^2 - 1) = 0$

$x = 0 \quad x = \pm\sqrt{1}$

$x = 0, \; x = 1$

$R_{int} = 2 - x$

$R_{ext} = 2 - x^3$

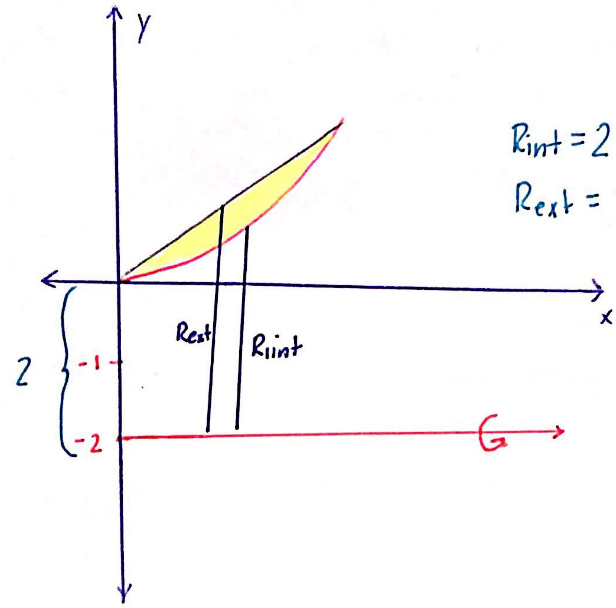
$$A = \pi \left[R_{ext}^2 - R_{int}^2 \right]$$

$$V = \pi \int_{0}^{1} (2 - x^3)^2 - (2 - x)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{0}^{1} x^6 - 4x^3 - x^2 + 4x \, dx$$

$$= \frac{17\pi}{21}$$

b) Plantee la integral de volumen del sólido que se obtiene al girar la región respecto a $y = -2$



$R_{int} = 2 + x^3$

$R_{ext} = 2 + x$

$$A = (R_{ext})^2 - (R_{int})^2$$

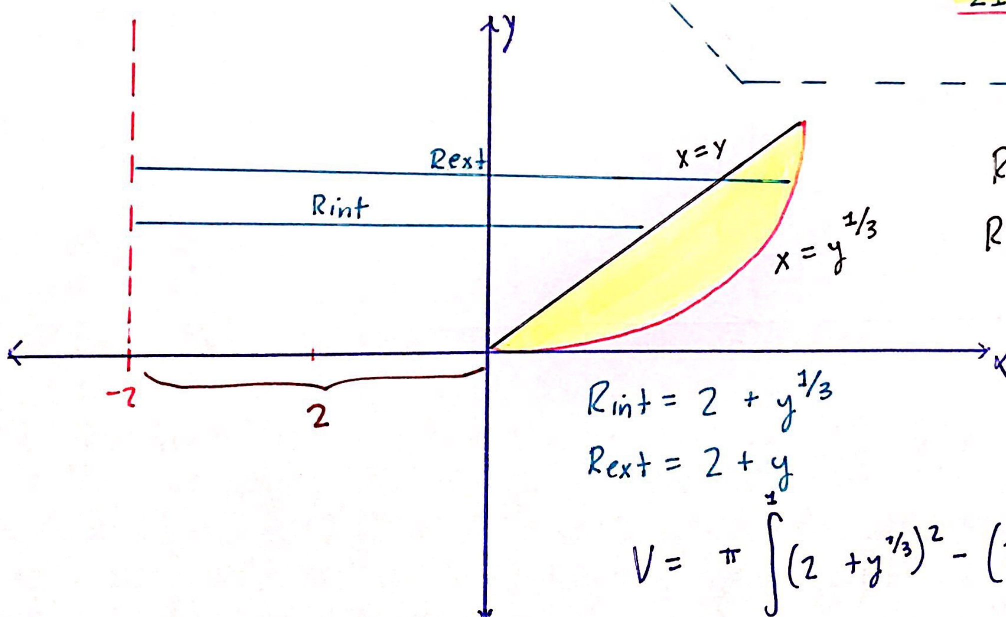
$$V = \pi \int_0^1 R_{ext}^2 - R_{int}^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_0^1 2 + x - 2 - x^3 \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 x - x^3 \, dx$$

$$= \pi \frac{1}{2} x^2 - \pi \frac{1}{4} x^4 = \frac{32}{21}\pi$$

ⓒ Rote la región respecto a $x = -2$



$R_{int} = 2 + y_1^{-1}$

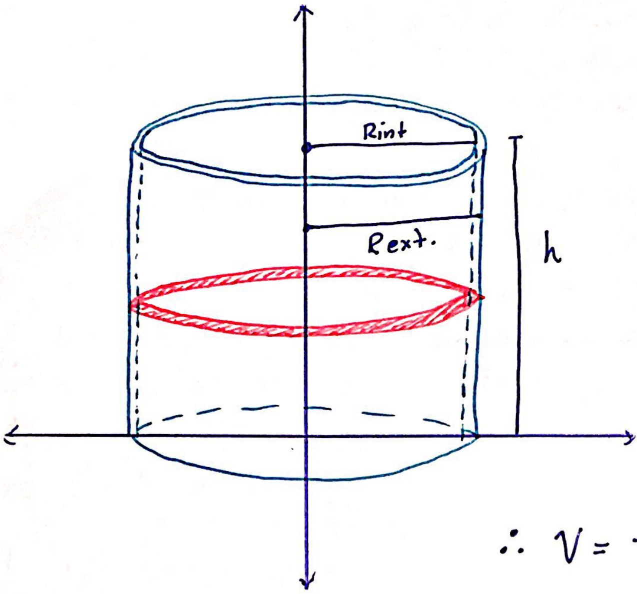
$R_{ext} = 2 + y_2^{-1}$

$R_{int} = 2 + y^{1/3}$

$R_{ext} = 2 + y$

$$V = \pi \int_0^1 (2 + y^{1/3})^2 - (2 + y)^2 \, dy$$

6.3. Volúmenes con un cascarón cilíndrico (latas)



Área anillo =

$\pi r_{ext}^2 - \pi r_{int}^2$

Volúmen =

$\pi h \left(R_{ext}^2 - R_{int}^2 \right)$

Grosor = $\Delta r = r_{ext} - r_{int} = dr$

$\therefore V = \pi h \left(R_{ext} + R_{int} \right) \left(R_{ext} - R_{int} \right) =$

- Volúmen de la expresión $= \pi h r^2$

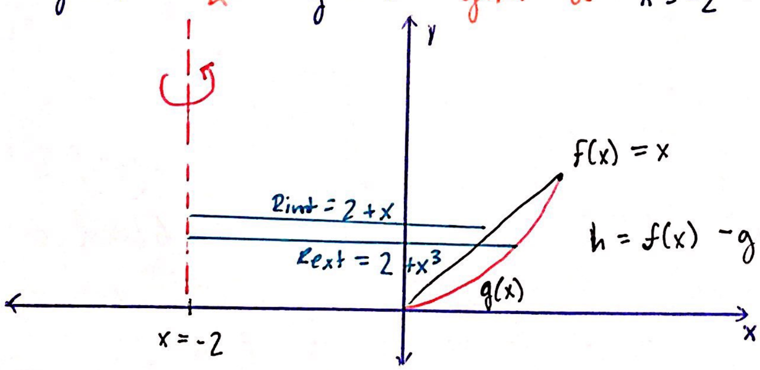
- Derive Respecto a r $dv = 2\pi h r \, dr$

$$\boxed{V = 2\pi \int_a^b h r \, dr}$$

el volumen de cascarones cilíndricos.

Redo inciso c.

$y = x^3$ & $y = x$ gire a $x = -2$



$h = f(x) - g(x) = x - x^3$

$h = x - x^3$; $r = 2 - x$ $\quad 0 \leq x \leq 1$

$$V = 2\pi \int_0^1 (x - x^3)(2 + x) \, dx$$

Ej: encuentre el volumen del sólido que se obtiene al girar la región entre el eje-x y la curva $f(x) = 2x^2 - x^3$ en el 1er cuadrante respecto al eje-y.

Interceptos-x $\quad 2x^2 - x^3 = 0$

$$x^2(2 - x) = 0$$

$$x = 0 \qquad x = 2$$

$$4x - 3x^2 = 0$$

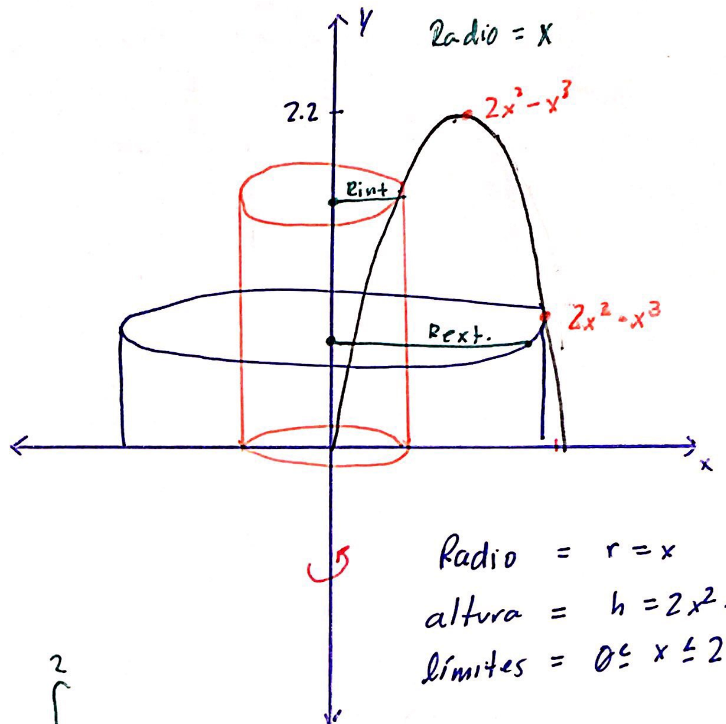
$$x(4 - 3x) = 0$$

$$x = 0 \qquad 4 - 3x = 0$$

$$-3x = -4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$f(4/3) = 2(16/9) - (4/3)$$



Radio = $r = x$

altura = $h = 2x^2 - x^3$

límites = $0 \leq x \leq 2$

$$V = 2\pi \int_0^2 hr\,dx =$$

$$= 2\pi \int_0^2 2x^3 - x^4\,dx = 2\pi\left(8 - \frac{32}{5}\right)$$

⚠ Si estan rotando con un eje horizontal es recomendable usar anillos

$$V = \int_a^b \pi\left(r_{ext}^2 - r_{int}^2\right) dx$$

eje-x

$y = 0$

$y =$ contante

⚠ Si está rotando un eje vertical usar cilíndros:

$$V = 2\pi \int_a^b hr\,dx$$

Ej: encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región entre $y_1 = x^2$ & $y_2 = 6x - 2x^2$ alrededor del eje-y.

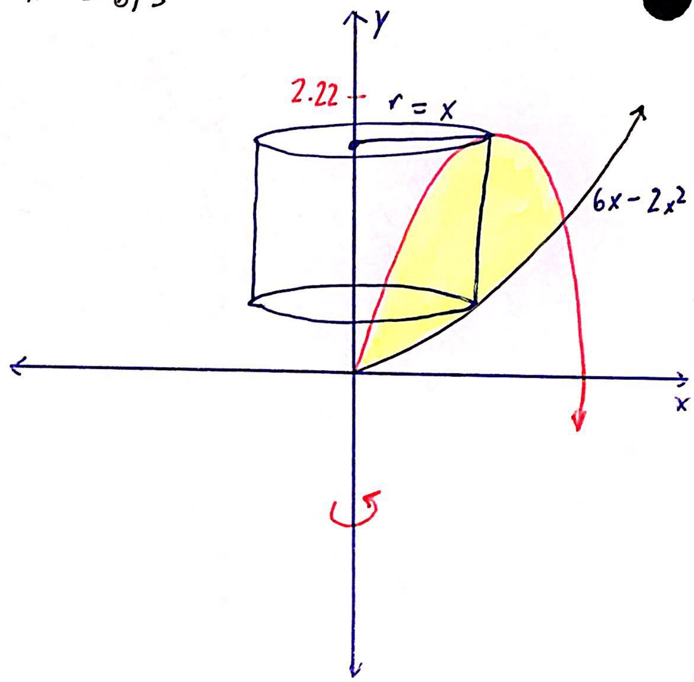
$y_2 = \emptyset \quad 2x(3-x) = \emptyset \Rightarrow x = 0, 3$

$y_1 = y_2 \quad x^2 = 6x - 2x^2$

$3x^2 - 6x = \emptyset$

$3x(x-2) = 0$

$x = \emptyset \quad x = 2$



altura $\Rightarrow h = y_2 - y_1$

$h = 6x - 3x^2$

Radio $\Rightarrow r = x$

Límites $\Rightarrow \emptyset \leq x \leq 2$

$$V = 2\pi \int_{\emptyset}^{2} h\, r\, dx$$

$$V = 2\pi \int_{\emptyset}^{2} 6x^2 - 3x^3\, dx = 2\pi \left(2x^3 - \frac{3}{4}x^4 \Big]_{\emptyset}^{2} \right) = 8\pi$$

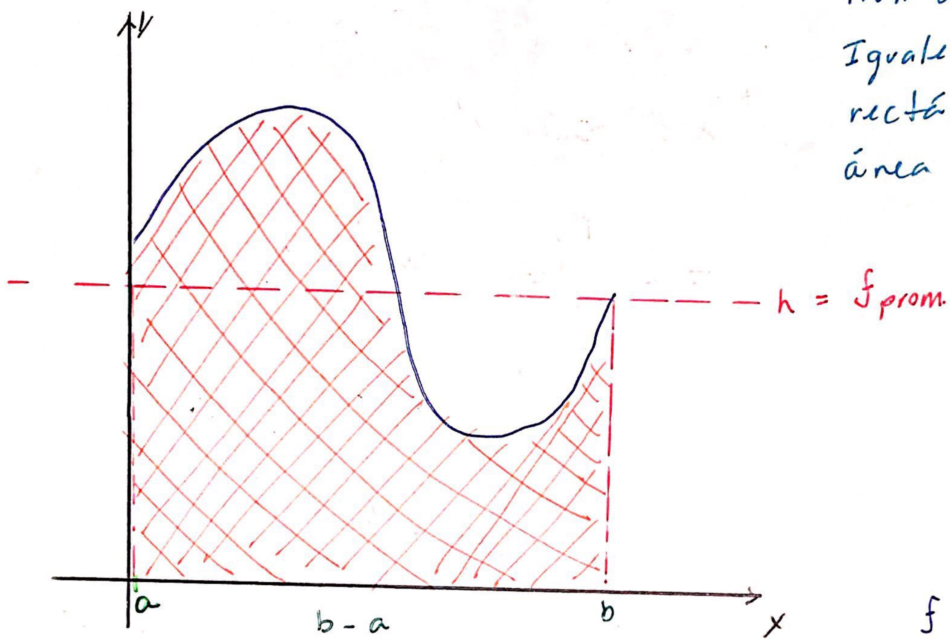
Capítulo 17

Valor promedio de una función

2019-09-19

6.5 Valor promedio de una función

- al inicio resolución de corto



- Promedio altura y Iguale el área del rectángulo con el área de la región

f (x) sea continua

ancho $b-a$

altura f promedio

Área $f_{promedio}(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$

$\therefore$

$$\boxed{f_{prom} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

Ejemplo: Encuentre el valor promedio de $f(x) = \csc^4(x)$ en $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

$b - a = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ $\qquad \frac{4}{\pi} = \frac{1}{b-a}$

$$f_{prom} = \frac{4}{\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2(x)\,dx = -\frac{4}{\pi}\cot(x)\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{4}{\pi}$$

Ej:

a) $f(t) = \cos^4(t)\sin(t)\,dt$ en $[0,\pi]$

$$f_{prom} = \int_0^{\pi} \cos^4 t \sin t = \int_0^{\pi} u^4\,du = \left.\frac{u^5}{5}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \left.\frac{-\cos^5(t)}{5}\right]_0^{\pi} = \left\{\frac{1}{5}\right\} - \left\{-\frac{1}{5}\right\} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{5}$$

---

b) $g(x) = \frac{1}{x}$ en $[e^4, e^{10}]$

$e^{10} - e^4 =$ ancho

$$P = \frac{1}{e^{10}-e^4}\int_{e^4}^{e^{10}} \frac{1}{x}\,dx$$

$$P = \frac{1}{e^{10}-e^4} \left.\ln|x|\right]_{e^4}^{e^{10}}$$

$$P = \left\{\frac{10}{e^{10}-e^4}\right\} - \left\{\frac{4}{e^{10}-e^4}\right\}$$

$$P = \frac{6}{e^{10}-e^4}$$

observación:

Valor promedio de F en $0 \le x \le 1$

$$\left.\ln x\right]_0^1 = -\lim_{x\to 0^+} \ln(x) =$$

$= +\infty$

en este caso no hay valor promedio

---

c) $h(x) = \frac{3}{(4+x)^{1/2}}$

en $[-4, 5]$

$$h_{prom} = \frac{1}{5-(-4)}\int_{-4}^{5} 3(4+x)^{-1/2}\,dx$$

$$= \left.\frac{2\cdot 3(4+x)^{1/2}}{5+4}\right]_{-4}^{5} = \left\{\frac{2}{3}(4+5)^{1/2}\right\} - \{0\}$$

$$= \frac{2}{3}(4+5)^{1/2} = 2$$

Ej: 2: Densidad lineal $p = 12(x+1)^{-1/2}$ la varilla tiene 8 m de longitud.

a) encuentre la densidad promedio de la varilla.

$$P_{prom} = \frac{1}{8-0}\int_0^8 12(x+1)^{-1/2}\,dx = \frac{12}{8}\int_0^8 (x+1)^{-1/2}\,dx =$$

$$= \frac{12}{8}(x+1)^{1/2}\Big]_0^8 = 3\left(9^{1/2} - 1^{1/2}\right) = 3(3-1) = 6\ \text{Kg/m}$$

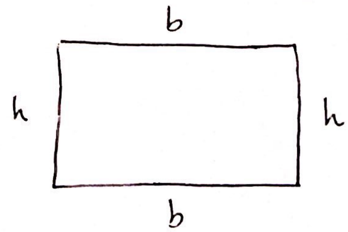
Capítulo 18

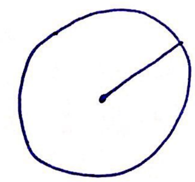
Longitud de arco

8.1 Longitud del arco

2019-09-24

Con geometría podemos encontrar la longitud ó perímetro.



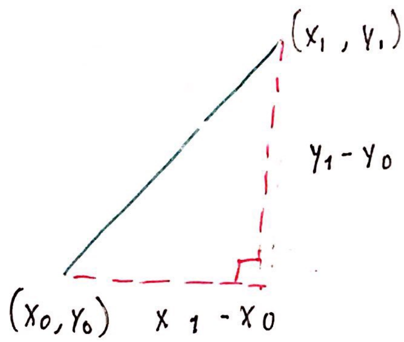


Circumferencia:

$L = 2\pi r$

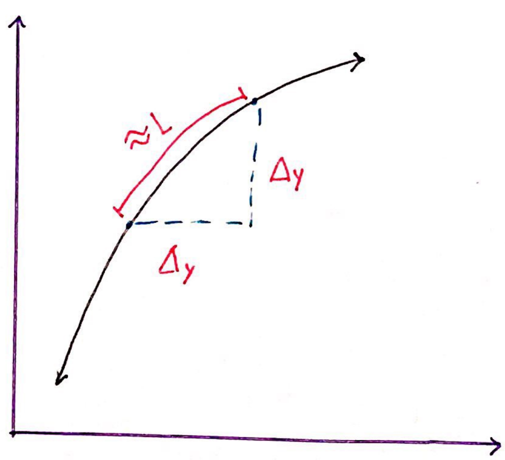
Rectángulo = $L = 2b + 2h$

- El segmento de recta:



$$L = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + \sqrt{y_1 - y_0}}$$

$$L = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$



curva $\mathcal{C}$: $y = f(x)$ $a \leq x \leq b$

Parte infinitesimal del arco:

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

factorizar:

$$dx^2 + dy^2 = dx^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) dx$$

Longitud de arco:

$$\boxed{\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = y'(x)$$

Ej: Halle la longitud de la curva $\mathcal{C}: \; 0 \leq x \leq \frac{8}{9}$

$$y = 1 + 2x^{3/2}$$

$$y'(x) = \frac{6}{2}x^{1/2} = 3x^{1/2} \qquad 1 + [y'(x)]^2 = 1 + 9x$$

$$\therefore L = \int_0^{8/9} \sqrt{1 + 9x}\, dx = \frac{1}{9}\int_0^{8/9} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{9}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_0^{8/9}$$

$u = 1 + 4x$

$du = 9\,dx$

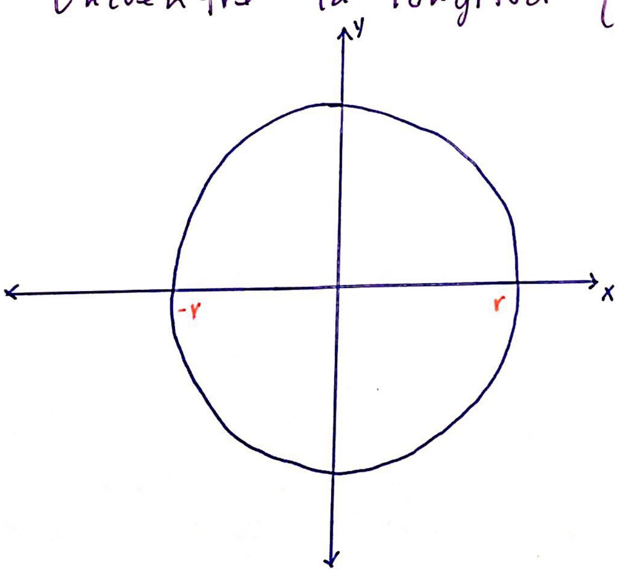
$\frac{du}{9} = dx$

$u(0) = 1 \qquad u(8/9) = 9$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}\left((\sqrt{u})^3\right)\Big|_1^9$$

$$= \frac{2}{27}\left((3^2)^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{2}{27}(3^3 - 1)$$

Ej: Encuentre la longitud (ó perímetro) de una circunferencia



$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$y = +\sqrt{r^2 - x^2}$$

límites: $(-r, r)$

$$L = 4\int_0^r \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx =$$

$$L = 4\int_0^r \frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = 4r\sin^{-1}(x)\Big|_0^r = \longrightarrow$$

$$y' = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-1/2}\cdot(-2x)$$

$$(y')^2 = \left[\frac{x}{(r^2 - x^2)}\right]^2 = 1 + [y'(x)]^2 = \frac{1}{1} + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2 - x^2 + 1}{r^2 - x^2}$$

$= 4r\{\sin^{-1}(\underbrace{\tfrac{r}{r}}_{1})\} - \cancel{\{\sin^{-1}(0)\}}^{0} = 4r\{\sin^{-1}(1)\} = 4r\left(\frac{\pi}{2}\right)$

se indefine en $x = r$ es impropia convergente

Ejercicio: p. 101. un cable teléfono cuelga entre dos postes con posiciones horizontales en $x = \pm 25$. El cable toma la forma de una catenaria con ecuación:

$$y = -5 + 25\cosh\left(\frac{x}{25}\right)$$

Hallar la longitud:

$$y'(x) = \cancel{25}\sinh\left(\frac{x}{25}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{25}} = \left[\sinh\left(\frac{x}{25}\right)\right]^2 = [y'(x)]^2$$

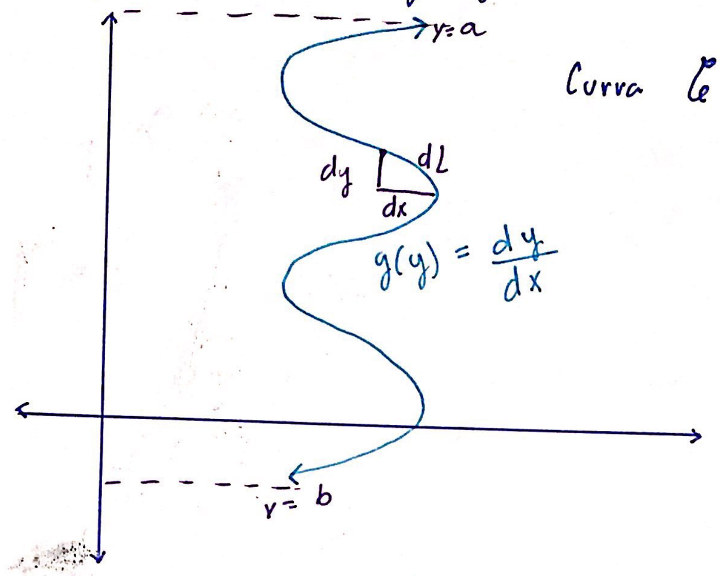
$$\underbrace{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{25}\right)}_{\text{utilizar identidad pitagórica } 1 = \sin^2 x + \cos^2 x} =$$

$\cosh^2(x/25)$

$$L = 2\int_0^{25}\sqrt{\cosh^2(x/25)}\,dx = 2\int_0^{25}\cosh(x/25)\,dx = 2\sinh(x/25)\cdot 25\Big]_0^{25} =$$

$$= 50\sin^{-1}(x/25)\Big]_0^{25} = \{50\sin^{-1}(1)\} - \cancel{\{50\sin^{-1}(0)\}}^{0} = 50\sin^{-1}(1)$$

Integración en el eje-y:



Curva $\mathcal{C} = a \leq y \leq b$

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\; dy$$

$$L = \int_a^b \sqrt{[g'(x)]^2 + 1}\; dy$$

Ejercicio 3: encuentre la longitud de arco para las curvas dadas.

a.) $\mathcal{C} : x = \dfrac{y^3}{6} + \dfrac{1}{2y} \qquad 1 \leq y \leq 2$

$$x'(y) = \frac{3y^2}{6} + \frac{1}{2y^2} = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2y^2} = \frac{1}{2}\left(y^2 - \frac{1}{y^{-2}}\right)$$

$$[x'(y)]^2 = \frac{1}{4}\left(y^4 - 2\cancel{y^2}\cdot\frac{1}{\cancel{y^2}} + \frac{1}{y^4}\right)$$

$$1 + [x'(y)]^2 = \frac{1}{4}\left(4 + y^2 - 2 + y^{-4}\right) + 1$$

$$= \frac{1}{4}\left(4 + y^4 - 2 + y^{-4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\underbrace{\left(y^4 + 2y + y^{-4}\right)}_{\substack{\left(\sqrt{y^4} + \sqrt{\frac{1}{y^4}}\right)^2 \\ \text{factorización}}} = \frac{1}{4}\left(y^2 + y^{-2}\right)^2$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{(y^2 + y^{-2})^2}\, dy = \frac{1}{2}\int_1^2 (y^2 + y^{-2})\, dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{-1}y^{-1}\right)\Bigg]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left\{\frac{8}{3} - \frac{1}{2}\right\} - \left\{\frac{1}{3} - 1\right\}\right) = \frac{17}{12}$$

b.) $\mathcal{C}_2: \ y = \ln(\csc\theta) \qquad \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$$L = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{1 + [y'(\theta)]^2}$$

$$y' = \frac{1}{\cancel{\csc\theta}} \cdot - \cancel{\csc\theta} \cdot \cot\theta = -\cot\theta$$

$$1 + [y'(x)]^2 = \underbrace{1 + \cot^2\theta}_{\text{Identidad pitagórica}} = \csc\theta$$

$$L = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \csc\theta \, d\theta = -\ln|\csc\theta + \cot\theta|\Bigg]_{\pi/6}^{\pi/2} = -\ln(1) + \ln(2 + \sqrt{3})$$

$$L = \ln(2 + \sqrt{3})$$

ángulos especiales:

$$\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2})} = 1 \qquad \frac{\cos(\pi/2)}{\sin(\pi/2)} = 0$$

$$\frac{1}{\sin(\pi/6)} = 2 \qquad \frac{\cos(\pi/6)}{\sin(\pi/6)} = \frac{\sqrt{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{3}$$

Función longitud de arco:

$a \leq x \leq t$

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{1 + [y'(x)]^2}$$

$y = \ln(\sin t)$, $\pi/2 \leq t \leq x$

$$L = \int_{\pi/2}^{x} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \int_{\pi/2}^{x} \csc x \, dx = -\ln|\csc t + \cot t| \Big]_{\pi/2}^{x}$$

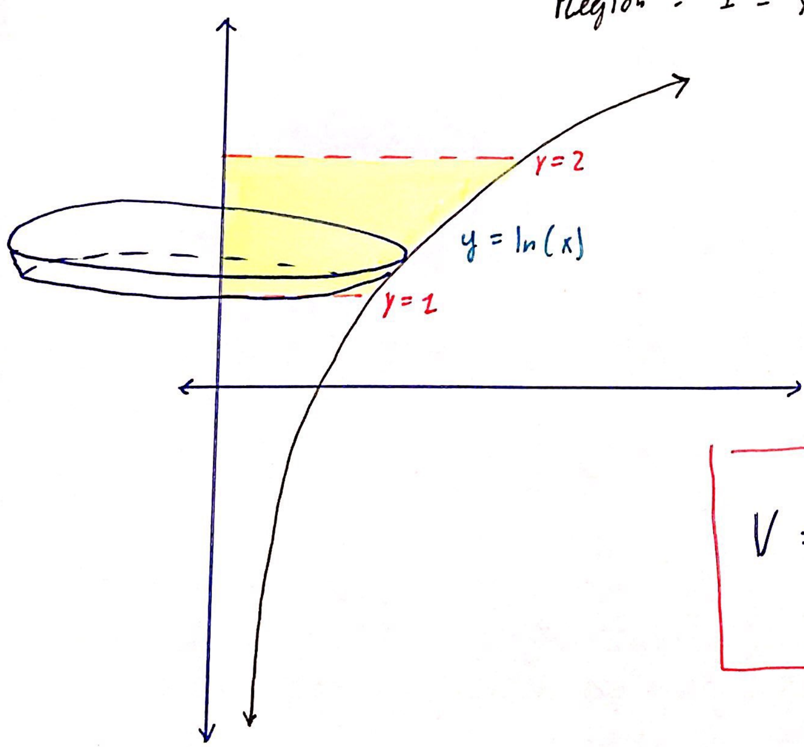
$$= -\ln|\csc x + \cot x| \underline{+ \ln(1)}$$

$y' = -\cot x$

$(y')^2 = \cot^2 x$ $\qquad \underbrace{1 + \cot^2}_{\csc\theta}$

Laboratorio 8: 2:

Región: $1 \leq y \leq 2$, $y = \ln(x)$ & $x = 0$



$y = \ln(x)$ Discos

$$V = \pi \int_1^2 x^2 \, dy$$

$x = e^y$

$$\boxed{V = \pi \int_1^2 e^{2y} \, dy}$$

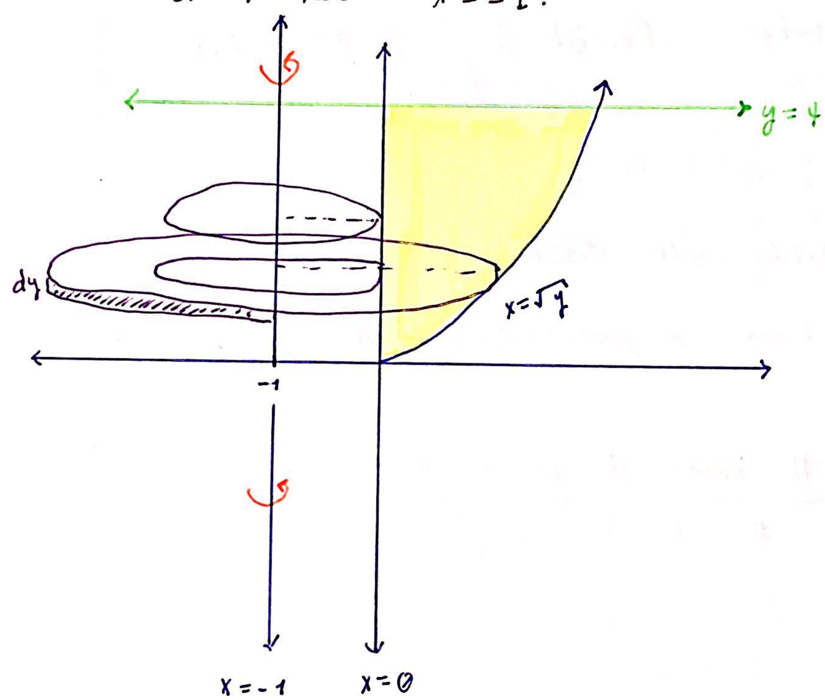
Capítulo 19

Probabilidades, función de densidad, distribuciones de probabilidad comunes(tipo uniforme, tipo normal, tipo exponencial)

2019-09-26

Corto #7 - Resolución apriori

El sólido se obtiene al girar $x_1 = \sqrt{y}$, $x_2 = 0$, & $y_1 = 4$ alrededor de la recta $x = -1$.



b) $R_{int} = 1$ $R_{ext} = 1 + \sqrt{y}$ Límites $0 \leq y \leq 4$

$$V = \pi \int_0^4 R_{ext}^2 - R_{int}^2 \, dy = \pi \int_0^4 (1 + y^{1/2})^2 - 1 \, dy$$

$$V = \pi \int_0^4 (2y^{1/2} + y) \, dy$$

Simulacro Lunes 7 de octubre 2:30 PM C.E.S

7.8 Integrales impropias 7.6. 128 8.5. Probabilidades

Lunes 14 de octubre Parcial 2 2:30 C.E.S.

Probabilidades (P. 123)

Un evento puede ser discreto o continuo.

<u>Def</u>: Discreto: hay un número finito y contable de eventos.

$$\text{Probabilidad} = \frac{\#\text{ veces de que ocurra un evento}}{\#\text{ total de eventos}}$$

Dado:

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Probabilidad $P(x \geq 5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

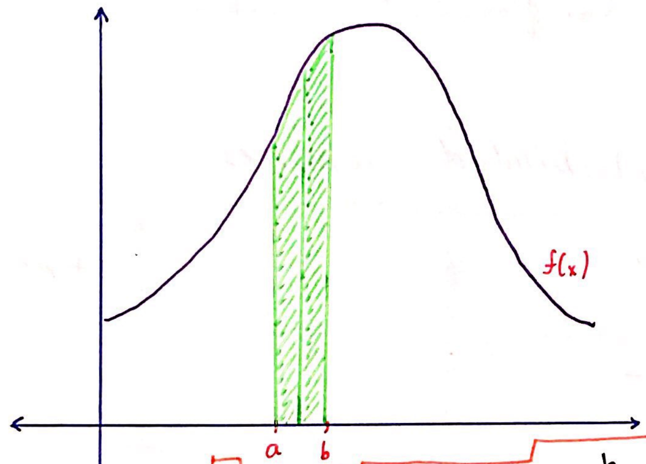
$\boxed{!}$ Probabilidad que ocurran cualquier evento esta entre 0 & 1. $0 \leq P(x) \leq 1$

Probabilidad de ocurra todos eventos:

$$\sum_{i=1}^{n} P(X_i)$$

$\boxed{!}$ enfoque en estadística & mate discreta.

Continuo: el número de eventos no es contable, el dominio de los eventos son los $\mathbb{Z}^+$.



mediciones de cantidades como pesos, alturas, tiempo, volúmenes, áreas.

La probabilidad de que ocurra un evento a y b es el área bajo la curva.

$$\boxed{P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

- **Función de densidad de probabilidad $f(x)$:**

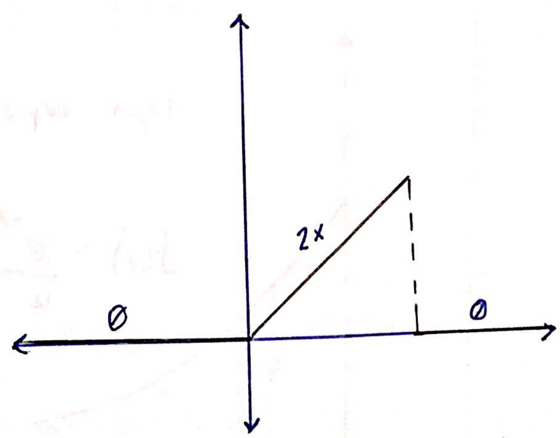
Condiciones:

i. $f(x) \geq 0$ en $-\infty \leq x \leq \infty$

ii. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ La probabilidad tiene que ser del 100%

Ej:

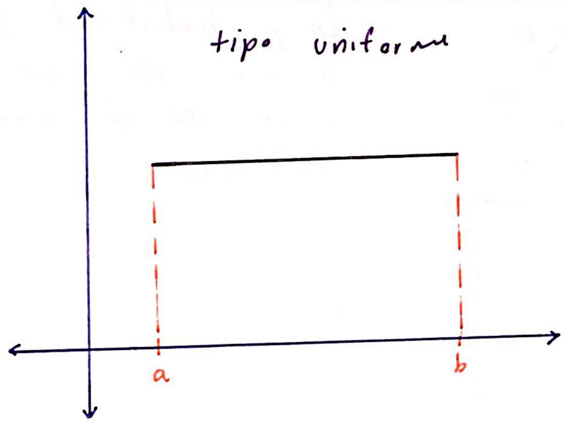
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx = x^2\Big]_0^1 = \underline{1}$$

3. Distribuciones de probabilidad comunes:

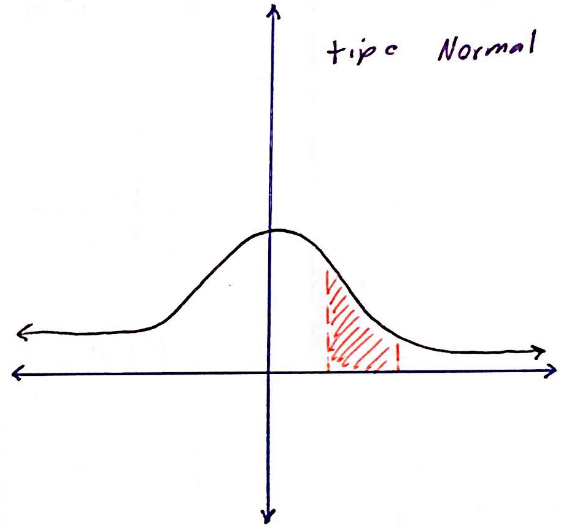
tipo uniforme



$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} u(x)}$$

tipo Normal

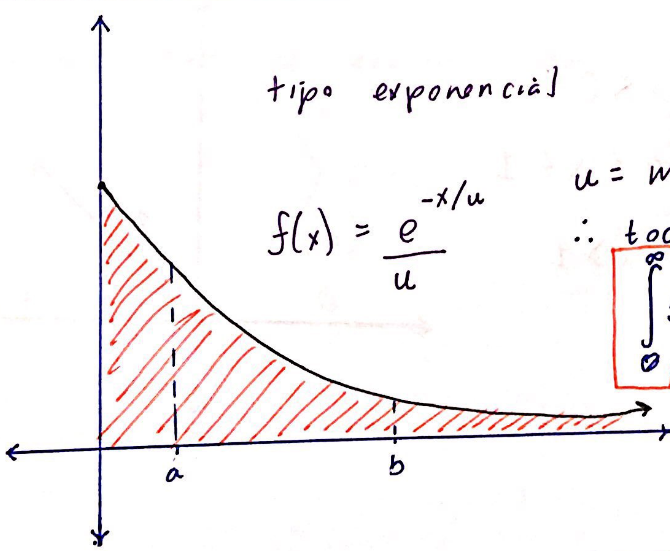


$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} u(x)}$$

Normal, media 0 y desviación estándar de 1

tipo exponencial



$$f(x) = \frac{e^{-x/u}}{u}$$

u = media

∴ todos los eventos

$$\boxed{\int_0^{\infty} f(x)\,dx = 1}$$

medición, tiempo, pesos

Ejercicio: Compruebe de que la distribución uniforme y la distribución exponencial son fracciones de densidad.

$$U(x) = \frac{1}{b-a} \quad a$$

$$P(-\infty \leq x \leq \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x)\,dx = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dx = \left.\frac{x}{b-a}\right]_{a}^{b} =$$

$$= \frac{b-a}{b-a} = 1$$

$U(x) \geq 0$ en $\mathbb{R}$ es una función de densidad

Exponencial:

$$P(0 \leq x \leq \infty) = \int_{0}^{\infty} e^{-x/u} \frac{dx}{u}$$

u es el tiempo promedio

$$w = \frac{-x}{u} \qquad dw = \frac{-dx}{du} \qquad \begin{array}{l} w(\infty) = -\infty \\ w(0) = 0 \end{array}$$

Capítulo 20

Continuación Probabilidad

2019-10-01

8.5 Continuación Probabilidad

- Distribución de una variable continua, función de densidad de probabilidad $f(x)$.

(i) $f(x) \geq 0$ en $-\infty \leq x \leq \infty$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$

- Probabilidad de que x acorta entre a y b.

$$\underbrace{P(a \leq x \leq b)}_{\text{Probabilidad}} = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

- Distribución exponencial $f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}$ $x \geq 0$

▲ **Ejercicio**: el tiempo de espera promedio para recibir una orden a domicilio de comida es de 0.5 h, y tiene una distribución exponencial:

a. Encuentre la probabilidad de que la comida se reciba después de 0.5 h. $\frac{1}{0.5} = 2$

$\mu = 0.5h$

$$f(x) = \frac{1}{0.5} e^{-x/0.5} = 2e^{-2x}$$

$$P(x \geq 0.5) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x} \, 2 \, dx = -e^{-2x} \Big]_{0.5}^{\infty} =$$

$$u = -2x$$

$$du = -x$$

$$-du = x$$

$$P(x \geq 0.5) = \underbrace{-\lim_{x \to \infty} \left(e^{-2x} \right)}_{e^{-\infty} \to 0} + e^{-2(0.5)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Probabilidad alta

$\approx 36.79\%$

(b.) Encuentre la probabilidad que la comida se recibe en 15 minutos.

$$P(x \leq 0.25) = \int_{-\infty}^{0.5} f(x)\,dx = f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} =$$

$$= \int_{0}^{0.25} e^{-2x} \, dx \cdot 2 = e^{-2x} \Big]_{0}^{0.25} = \left[\left\{ -e^{-2(1/4)} \right\} - \left\{ -e^{0} \right\} \right] =$$

$$= \left\{ e^{-1/2} \right\} - \left\{ -e^{0} \right\} = -e^{-1/2} + 1$$

Ⓒ El servicio se vuelve más eficiente y ahora la media para entregar el producto es de 20 minutos. ¿Cual es la probabilidad que el producto se entregue después de 30 minutos?

$\mu = 20 \text{ min} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$

$$f(x) = 3e^{-3x} = P(x \geq 0.5) = \int_{0.5}^{\infty} e^{-3x}(3\,dx) =$$

$$= -e^{3x}\Big]_{0.5}^{\infty} = \left[\left\{-\lim_{x\to\infty}\left(e^{-3x}\right)\right\} - \left\{-e^{-3(0.5)}\right\}\right] =$$

$$= \left\{0 + e^{-\frac{3}{2}}\right\} = e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.22 \approx 22.31\%$$

Media o valor esperado

Variable discreta: media es un promedio ponderado.

$$\left.\begin{matrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ P(X_1) & P(X_2) & & P(X_n) \end{matrix}\right\} \text{Pensar en pesos ó frecuencias}$$

$$\mu = X_1 P(X_1) + X_2 P(X_2) + \dots + X_n P(X_n)$$

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} X_i \, P(X_i) \qquad P(a \leq x \leq b) = \sum_{i=1}^{n} P(X_i)$$

[!] Si la variable es continua, μ se obtiene al integrar $x f(x)$.

$$\boxed{\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx}$$

$f(x)$ uniforme exponencial normal.

Varianza: Suma de las diferencias al cuadrado de cada X_i respecto a la media.

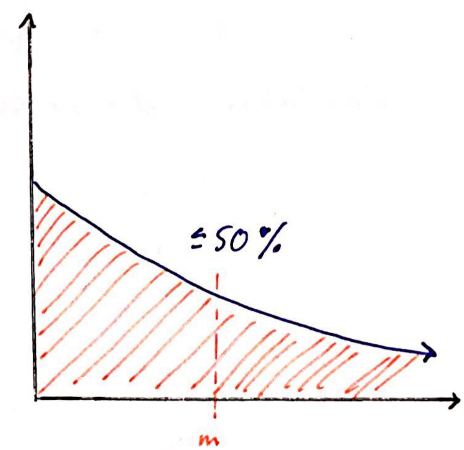
Discreta: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \, (pX_i) = \underbrace{\sigma^2}_{\text{desviación estándar}}$

Continua: $\displaystyle\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx$

Desviación estándar: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\text{varianza}}$

Mediana: el número m para el cual la probabilidad acumulada es igual al 50% ó 0.5

$$\int_{-\infty}^{m} f(x)\, dx = 0.5$$



Ejercicio 3: Considere la función exponencial.

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \quad , x \geq 0 \qquad \text{variable } \mu$$

a) Encuentre la media de $f(x)$.

$$\int_0^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{\mu} e^{-x/\mu}\, dx = -xe^{-x/\mu} - \int_0^{\infty} -e^{-x/\mu}\, dx$$

IPP

$$u = x \qquad dv = \frac{e^{-x/\mu}}{\mu} dx$$

$$du = dx \qquad v = -e^{-x/\mu}$$

$\boxed{!}$ μ es un parámetro

$$= -xe^{-x/\mu} + e^{-x/\mu} + C \Big]_0^{\infty}$$

$$= \left\{ -\underbrace{\lim_{x\to\infty} \left(x e^{-x/\mu} \right)}_{\text{L'H}} + \lim_{x\to\infty} \left(e^{-x/\mu} \right) \right\} - \left\{ \cancel{-0 e^{-0/\mu}}^{0} + \cancel{e^{-0/\mu}}^{0} \right\}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{e^{x/\mu}} \right) \overset{LH}{=} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{e^{x/\mu} \cdot \frac{1}{\mu}} \right) = \frac{1}{e^{\infty/\mu} \cdot \frac{1}{\mu}} = \frac{1}{\infty} \to 0$$

Media distribución exponencial

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{\mu} e^{-x/\mu}\, dx = \mu$$

(b) Encuentre la mediana de $f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}$

Encuentre m tal que $\int_0^m f(x)\, dx = 0.5$

$$\int_0^m \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}\, dx = -e^{-x/\mu}\Big]_0^m = -e^{-m/\mu} + 1$$

¿Cuándo es 0.5?

$$-e^{-m/\mu} + 1 = 0.5$$

$$-e^{-m/\mu} = \frac{1}{2} - 1$$

$$e^{-m/\mu} = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{m}{\mu} = \ln(0.5)$$

$$m = -\mu \ln(0.5)$$

$$m \approx 0.70\,\mu$$

Integrar $\underbrace{\int (x-\mu)^2 e^{-x/\mu}\, d\mu}_{}$ $= \sigma^2$

Para integrar uno encuentra la varianza.

Ejercicio 4: Encuentre la media, mediana, varianza y desviación estándar de la distribución uniforme.

$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b \quad$ para $\quad b = 6$ & $a = 0$

Específico $\quad f(x) = \frac{1}{6} \quad 0 \leq x \leq 6$

Probabilidad $\quad P(x_0 \leq x \leq x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{6}\, dx$

• Media: $\quad \mu = \int_0^6 x\, f(x)\, dx = \int_0^6 x \cdot \frac{1}{6}\, dx = \frac{1}{12} \cdot x^2 \Big]_0^6 =$

$= \left\{ \frac{36}{12} \right\} - \{0\} = \underline{3}$

• Mediana: $\quad \int_0^m \frac{1}{6}\, dx = 0.5 \quad ; \quad \int_0^m \frac{1}{6}\, dx = \frac{1}{6} x \Big]_0^m = \ldots$

$\ldots = \left\{ \frac{m}{6} \right\} - \{0\} = \frac{m}{6} = 0.5$

$m = (0.5)\, 6$

$\underline{m = 3}$

- Variación y desviación estándar: $\mu = 3$ $f(x) = \frac{1}{6}$

$$\sigma^2 = \int_0^6 (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \frac{1}{6}\int_0^6 (x-3)^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}(x-3)^3\Big]_0^6 = \frac{1}{18}\left[\left\{(6-3)^3\right\} - \left\{(0-3)^3\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{18}\left[27-(-27)\right] = \frac{1}{18}\left[54\right] = \frac{54}{18} = \underline{3}$$

$\therefore$ La desviación estándar es $\sqrt{\sigma^2}$

por ende $\underline{\sqrt{3}}$

Capítulo 21

Fracciones parciales
Caso 1: Factores lineales distintos
Caso 2: Factores lineales repetidos

2019-10-03

Resolución de Corte apriori

- Resolución promedio
- Resolución Longitud de arco.

- Lab 1-2:30
- Simulacro $\underbrace{2:30-4:00}_{\text{C.E.}}$

7.4. Fracciones Parciales

Se utiliza para integrar funciones racionales:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = f(x)$$

P polinomio de grado n

Q polinomio de grado m

condición : Denominador > numerador

En caso de que el grado del numerador sea mayor o igual que del denominador, realize división larga

Ej: $\frac{6}{x^2-9}$, $\frac{x+3}{x^3-9x}$, $\frac{1}{x^2+4}$ Denominador > numerador

▲ Simplifique la función en dos o más fracciones parciales.

$$\frac{6}{\underbrace{(x^2-9)}_{\text{no se puede integrar}}} = \frac{6}{(x-3)(x+3)} = \underbrace{\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}}_{\text{A \& B son coheficientes desconocidos}}$$

$$\ldots \quad \frac{6}{x^2-9} = \frac{A(x+3) + B(x-3)}{x^2-9}$$

igualando los numeradores

$$6 = A(x+3) + B(x-3)$$

tramya: considerar que x^2-9 se hace 0 en $x = \pm 3$

$x=3$ $\quad 6 = 6A + 0 \Rightarrow A = 1$

$x=-3$ $\quad 6 = 0 + 6B \Rightarrow B = 1$

$$\frac{6}{x^2-9} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}$$

finalmente integre

$$\int \frac{6}{x^2-9}\,dx = \int \frac{1}{x-3}\,dx - \int \frac{1}{x+3}\,dx = \ln|x-3| - \ln|x+3| + C$$

Clasificación por casos:

Caso 1: Los factores lineales distintos.

$$\frac{P(x)}{(x^2-9)(x^2-4)} = \frac{P(x)}{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2} = \ldots$$ encuentre A, B, C, D

$$\dots \int \frac{dx}{a(x+b)} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

Caso 2: Factores lineales repetidos

$$\frac{x^2+x+1}{\underbrace{(x+1)^3}_{\text{lo mismo tres veces}}} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

Encuentre A, B, C

$$\therefore \int f(x)\,dx = A\ln|x+1| - B(x+1)^{-1} - \frac{1}{2}C(x+1)^{-2} + K$$

Ej. 1:

$$\int \frac{18z}{2z^2+7z-4}\,dz =$$

① factorizar el denominador:

$$\int \frac{18z}{(2z-1)(z+4)}\,dz$$

$$2z^2 + 7z - 4 = (2z-1)(z+4)$$

$$\begin{array}{cc} 2z & -1 \\ z & 4 \end{array}$$

② Ceros del denominador:

$$\left.\begin{array}{l} 2z - 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{2} \\ z + 4 = 0 \Rightarrow z = -4 \end{array}\right\} \text{lineales distintos} \quad \frac{18z}{2z^2+7z-4} = \frac{A}{2z-1} + \frac{B}{z+4}$$

¿A, B?

Multiplique por $(2z-1)(z+4)$

$$\frac{18z}{2z^2+7z-4} = \frac{A}{2z-1} + \frac{B}{z+4}$$

$$18z = A(z+4) + B(2z-1)$$

$z = \frac{1}{2}$

$$18\left(\frac{1}{2}\right) = A\left(\frac{1}{2}+4\right) + \cancel{B\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-1\right)}^{\emptyset}$$

$$9 = A(4.5) + \emptyset$$

$$\frac{9}{4.5} = A$$

$$\boxed{A = 2}$$

$z = -4$

$$18(-4) = \cancel{A(-4+4)}^{\emptyset} + B(2(-4)-1)$$

$$18(-4) = B(-8-1)$$

$$18(-4) = B(-9)$$

$$\frac{18(-4)}{-9} = B$$

$$\boxed{B = 8}$$

$$\int \frac{2}{2z-1}\,dz + \int \frac{8}{z+4}$$

Capítulo 22

Fracciones parciales
Caso 3: Factores cuadráticos irreducibles
Caso 4: Factores cuadráticos repetidos

2019-10-08

Continuación de Fracciones Parciales

- Fracciones parciales:
  - factores lineales:

$$\frac{P(x)}{(x+2)(x+3)(x+4)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+4} + \frac{D}{(x+4)^2}$$

Encuentre A, B, C, D

Ej: $$\int \frac{x^2+1}{\underbrace{(x+2)(x+1)^2}} dx =$$

¿Cuándo el denominador se hace 0?

$$\frac{x^2+1}{\cancel{(x+2)(x+1)^2}} = \frac{A}{\cancel{x+2}} + \frac{B}{\cancel{x+1}} + \frac{C}{\cancel{(x+1)^2}}$$

$$x^2+1 = A(x+1)^2 + B(x+2)(x+1) + C(x+2)$$

$$(x+2)(x+1)^2 = 0$$

$x = -2 \quad x = \pm 1$

$x = -1$: $2 = 0 + 0 + C \Rightarrow C = 2$

$x = -2$: $5 = A + 0 + 0 \Rightarrow A = 5$

Como ya conozco C & A encuentro B:

$x = 0$

$$1 = A + 2B + 2C$$

$$2B = 1 - A - 2c$$

$$B = 1 - 5 - 4 = \frac{-8}{2} = -4$$

$$\int \frac{x^2+1}{(x+2)(x+1)^2}\,dx = \int \frac{5}{x+2}\,dx - 4\int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$= 5\ln|x+2| - 4\ln|x+1| - \frac{2}{(x+1)} + C$$

Caso 3: Factores cuadrático irreducible:

Ej: $\underbrace{x^2+4 \quad \& \quad x^2+x+1 \quad \& \text{ etc.}}_{\text{no son factorizables}}$

entonces:

$\underbrace{x^2 = -4}_{\text{no hay solución real}}$

Ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \quad \Big\} \text{ no tiene solución real}$$

$$\frac{P(x)}{(x^2+4)(x^2+x+1)} = \frac{\overbrace{A+Bx}^{\substack{\text{Alterna} \\ Ax+B}}}{x^2+4} + \frac{\overbrace{Cx+D}^{\substack{\text{Alterna} \\ C+Dx}}}{x^2+x+1}$$

encuentre cuatro cohueficiente:

a) $\displaystyle\int \frac{A}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$ $\qquad$ $\displaystyle\int \frac{Bx}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(|x^2+4|\right)$

b) $$\int \frac{2x^2 - x - 4}{x^3 + 4x}\,dx$$

no funcionara
$u \neq x^3 + 4x$
$du = (3x^2 + 4)\,dx$

$$x^3 + 4x = x(x^2+4)$$

$$\frac{2x^2 - x - 4}{\cancel{x^3 + 4x}} = \frac{A}{\cancel{x}} + \frac{Bx + C}{\cancel{x^2 + 4}}$$

$$2x^2 - x - 4 = A(x^2+4) + Bx^2 + Cx$$
$$2x^2 - x - 4 = Ax^2 + A4 + Bx^2 + Cx$$

Sistema de ecuaciones, agrupe términos:

x^2 : $A + B = 2 \Rightarrow B = 2 - A = 3.$

x : $C = -1 \Rightarrow C = -1$

1 : $4A = -4 \Rightarrow A = -1$

Entonces...

$$\int \frac{2x^2 - x - 4}{x^3 + 4x}\,dx = \int \frac{-dx}{x} + \int \frac{3x - 1}{x^2 + 4}\,dx$$

$$= -\ln|x| + 3\int \frac{x}{x^2+4}\,dx - 1\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= -\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x^2+4| - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Observación

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C =$$

$u = x^2 + a^x$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C$$

$du = 2x\,dx$

$\frac{du}{2} = x\,dx$

a)

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+1}\,dx \qquad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2} \Big\}\ \text{imaginario}$$

Factor cuadrático irreducible

$$\frac{x+3}{\cancel{x^2+2x+1}} = \frac{Ax+B}{\cancel{x^2+2x+10}}$$

$$\underbrace{\begin{aligned} x+3 &= Ax+B \\ x+3 &= (1)x+(3) \end{aligned} \quad \left.\begin{aligned} A&=1 \\ B&=3 \end{aligned}\right\}}_{\text{no nos sirvió}}$$

ya es una fracción parcial.

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+1}\,dx = \overbrace{\int \frac{x+3}{(x+1)^2+9}\,dx}^{\text{usar completación al cuadrado}} = \int \frac{w+2}{w^2+2}\,dw$$

$w = x+1$

$w+2 = x+3$

$dw = dx$

$$= \int \frac{u}{u^2+9}\,du + 2\int \frac{du}{u^2+3^2} =$$

$$= \ln|u^2+9| + \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{u}{3}\right) + C$$

$$= \ln|(x+1)^2+9| + \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+3}{3}\right) + C$$

Caso 4: Factores cuadráticos repetidos (p.78)

$$\frac{P(x)}{(x^2+a^2)^3} = \frac{Ax+B}{(x^2+a^2)} + \frac{Cx+D}{(x^2+a^2)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+a^2)^3}$$

Resolver para A, B, C, D, E, F

$$\frac{P(x)}{x^3(x^2+a^2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+a^2} + \frac{Fx+G}{(x^2+a^2)^2}$$

Resolver para A, B, C, D, E, F, G

Ej:

Integre: $\displaystyle\int \frac{1}{x\underbrace{(x^2+4)^2}_{\text{ya está factorizado}}}\,dx =$

$$\frac{1}{\cancel{x(x^2+4)^2}} = \frac{A}{\cancel{x}} + \frac{Bx+C}{\cancel{x^2+4}} + \frac{Dx+E}{\cancel{(x^2+4)^2}}$$

⌐ Recordar teorema fundamental del Álgebra, todos pueden ser representados por factores lineales y cuadráticos ⌐

$$1 = A(x^2+4)^2 + (Bx+C)x(x^2+4) + (Dx+E)x$$

$$= A(x^4+8x+16) + (Bx^4 + Cx^3 + 4Bx^2 + C4x + Dx^2 + Ex$$

• 5 incógnitas, tenemos 5 ecuaciones.

Grado 4: $A + B = 0 \implies B = -\frac{1}{16}$

Grado 3: $C = 0 \implies C = 0$

Grado 2: $8A + 4B + D = 0 \implies D = -\frac{1}{4}$

Grado 1: $1C + E = 0 \implies E = 0$

Constantes: $16A = 1 \implies A = \frac{1}{16}$

$$\frac{1}{x(x^2+4)^2} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{x} + \frac{-\frac{1}{16}x+0}{x^2+4} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)x+0}{(x^2+4)^2}$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2} = \frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{32}\ln(x^2+4) + \frac{1}{8}\,\frac{1}{(x^2+4)} + C$$

División Larga:

$$\int \frac{x^4+1}{x-1}\,dx \qquad\qquad \int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt$$

Antes de utilizar fracciones parciales, el grado del numerador debe ser menor al del denominador.

$$\begin{array}{r|l}
 & \overbrace{x^3 + x^2 + x + 1}^{\text{denominador}} \\
\hline
\underbrace{x-1}_{\text{numerador}} & x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \\
 & -x^4 + x^3 \\
\hline
 & x^3 \\
 & -x^3 + x^2 \\
\hline
 & x^2 \\
 & -x^2 + x \\
\hline
 & x + 1 \\
 & -x + 1 \\
\hline
 & \underbrace{2}_{\text{residuo}}
\end{array}$$

$$\int \frac{x^4+1}{x-1} = \int x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{2}{x-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1|\cdot 2 + C$$