Matemática Discreta Aplicada

2019-08/21

P.S. $|A \cup B| = |A| + |B|$

$A \cap B \neq \emptyset$

Contamos algo que se puede hacer por casos

P.P. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Contamos algo por pasos.

Ej.: Se tienen $\overbrace{\text{10 libros de mate discreta}}^{\text{"algo"}}$ y 250 de economía, si se quiere escoger un libro, entonces el número de maneras de poderlo hacer es:

Caso: Libros de discreta: 10

Caso: Libro de economía: 250

∴ En total, por el P.S. hay 260 formas distintas de elegir un libro.

El abecedario tiene 26 letras. Se desea formar palabras usando 5 letras (no es posible repetir letras)

$V = \{a, e, i, o, u\}$

$V \times V = \{(a,a), (a, e) \dots (u,u)\}$

$|V \times V| = 25$

La tarea puede dividirse en 5 pasos:

$$\underbrace{\frac{26}{L_1}}_{\text{de cuantos puede elegir de 26.}} \; \underbrace{\frac{25}{L_2}}_{\text{elegir de 25}} \; \underbrace{\frac{24}{L_3}}_{\text{elegir 24}} \; \underbrace{\frac{23}{L_4}}_{\text{elegir 23}} \; \underbrace{\frac{22}{L_5}}_{\text{elegir}} =$$

= 7,893,600 combinaciones

Si las letras se pudieran repetir sería:

$$\underset{L_1}{\underline{26}} \cdot \underset{L_2}{\underline{26}} \cdot \underset{L_3}{\underline{26}} \cdot \underset{L_4}{\underline{26}} \cdot \underset{L_5}{\underline{26}} = 11,881,376$$

- El problema anterior consistió en una $\underbrace{\text{selección ordenada}}$ de 5 elementos de un conjunto con 26 elementos.

"porque el orden es importante"

- FCUK
- Dunkin dooghnuts

Notación: Factorial

sea $n \in \mathbb{Z}^+ \{0\}$, entonces a la multiplicación consecutiva

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n = n!$$

Por "definición" $0!$ está definido como 1.

Con esta notación, podemos escribir la respuesta anterior como:

$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{26!}{21!}$$

$$\boxed{= \frac{26!}{(26-5)!}}$$

En general, una selección ordenada de r elementos de un conjunto con n elementos distintos, se llama:

r - permutación de n

y se calcula como:

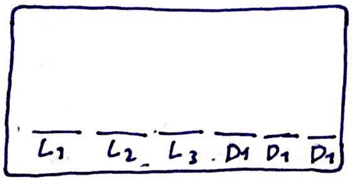
$$\boxed{\frac{n!}{(n-r)!} = P(n,r)}$$

Calculadora:
shift + $\boxed{x}$ = permutación
26P5

Si se seleccionan los n elementos, esto se llama: permutación de n y se calculan como:

caso que $r = n$ $\quad \boxed{n! = P(n,n)}$

Ej.: Placas de carro en GT



Paso1: escoger las letras

Paso2: escoger los números

* En GT no se usan vocales

* Suponemos que hay placa 000

$$P(21,3) \cdot P(10,3) = 5,745,600$$

Ej.: Direcciones IP, internet protocol

$\boxed{256} \cdot \boxed{256} \cdot \boxed{256} \cdot \boxed{256} = 4,294,967,296$ posibles combinaciones

si se fuese a hacer por P.S.

Caso1 = L_1 A

⟶ Caso 1.1 = L_2 A

⟶ Caso 1.1.1 = L_3 A

⋮

Caso$_{26}$ = L_1 Z

⟶ Caso 26.1 = L_2 Z

⋮

= 5,745,600 se hace por P.P. por que son muchos casos.

Ej.: ¿Cuántos numeros entre 1 y 999 no llevan el digito 7?

Estrategia A: Por casos

Caso: $1 \leq n \leq 9$

$\therefore$ Hay 8 dígitos entre 1 y 9 sin el 7

Caso: $10 \leq n \leq 99$

Para saber cuántos numeros hay en un conjunto es el [último extremo - primer extremo + 1]

$$\frac{8}{D_1} \cdot \frac{9}{D_2} = 72$$ números sin 7

Caso: $100 \leq n \leq 999$

$$\frac{8}{D_1} \cdot \frac{9}{D_2} \cdot \frac{9}{D_3} = 648$$ números sin 7.

Por el p.s. tenemos 728 número sin 7. $\square$

Estrategia B: armar un número sin 7; por pasos

Paso 1: Elegir D_1

Paso 2: Elegir D_2

Paso 3: Elegir D_3

$$\frac{9}{D_1} \; \frac{9}{D_2} \; \frac{9}{D_3} = 9^3 = 729$$

A los 729 números sin 7 entre 0 y 999, le restamos el 0 y terminamos con 728 números sin 7 entre 1 y 999. $\square$

Matmática Discreta Aplicada

2019-08/19

Ej: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ La Suma de los primeros n consecutivos es $\frac{n(n+1)}{2}$:

Prueba: por inducción

Paso Base: Probamos $n=1$

$$\sum_{i=1}^{1} 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Paso inductivo: Asumimos $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Luego, $\sum_{i=1}^{n+1} i = \underbrace{(n+1)}_{\text{lo saco de la suma para remplazar.}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{\text{remplazo}}$

$$= n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \square$$

- Se necesita probar por inducción matemática para ser válido

Ej: Pruebe que si $n \geq 2$, entonces $n^3 - n$ es un múltiplo de 3.

Prueba por inducción:

Prueba: Probamos $n=2$

$$(2)^3 - (2) = 6 = \underbrace{2 \cdot 3}_{\text{se probó que es un múltiplo de 3.}}$$

Paso inductivo: $n^3 - n = 3m$; m es un entero positivo. $m \in \mathbb{Z}^+$

Entonces,

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n \cancel{+1} - n \cancel{-1}$$

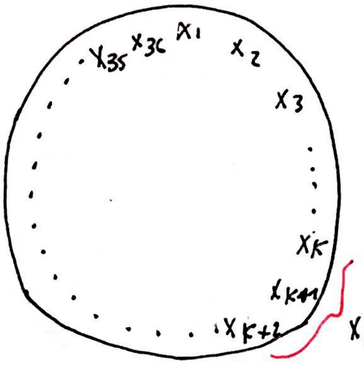
$$= \underbrace{(n^3 - n)}_{3m} + 3n^2 + 3n$$

$$= 3m + 3n^2 + 3n$$

$$= 3\underbrace{(m + n^2 + n)}_{\text{esto es un entero arbitrario}}$$

$$= 3K \quad \square$$

Ej: Pruebe que en una ruleta con los números del 1 al 36, dispuestos de forma aleatoria, siempre existen 3 consecutivos cuya suma es 55 o más.



$$x_k + x_{k+1} + x_{k+2} \geq 55$$

Solución: Escribir los números de la ruleta en un listado hacia abajo.

aquí están dispuestos todas las combinaciones posibles.

$$x_1 + x_2 + x_3 < 55$$
$$x_2 + x_3 + x_4 < 55$$
$$x_3 + x_4 + x_5 < 55$$
$$x_4 + x_5 + x_6 < 55$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$x_{35} \quad x_{36} \quad x_1 < 55$$
$$\underbrace{x_{36}}_{1-36} \quad \underbrace{x_1}_{1-36} \quad \underbrace{x_2}_{1-36} < 55$$

Para fines de contradicción se asume entonces que la suposición es falsa, entonces

$$x_k + x_{k+1} + x_{k+2} < 55$$

Sumamos las 36 desigualdades

$$3 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{36} i}_{} < 36 \cdot 55$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$3 \cdot \left(\frac{36 \cdot 37}{2}\right) < 1980$$

$$1980 < 1980$$

$$(\rightarrow\leftarrow)$$

Se contempla prueba de contradicción por que

Si escojo de forma aleatoria 25 días del año, almenor 3 de esos 25, son del mismo mes

---

Técnicas de conteo

Contar: asignar es la acción de asignar a un conjunto de objetos uno y solo uno, de los números naturales.

Def: Los números naturales son los enteros positivos.

$$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$$

Entonces al "contar" hacemos:

$$S = \{\underset{1}{a}, \underset{2}{e}, \underset{3}{i}, \underset{4}{o}, \underset{5}{u}\}$$

- Cuando se cuenta lo que se dice es el último número
- hay 5 números en el conjunto.

---

técnica de conteo: Principio de la suma (P.S.)

- Consiste en contar el número de elementos en la unión de dos conjuntos disjuntos.
  - Def. Cardinalidad de un conjunto = es el número de elementos en un conjunto (finito) es su cardinalidad.
- Notación: Si A es un conjunto, su cardinalidad es $|A|$

$$|A \cup B| = |A| + |B|, \text{ si } \underbrace{A \cap B = \emptyset}_{\text{conjuntos disjuntos}}$$

↓ ↓ ↓

Téchica de conteo: Principió de producto (P.P)

- Contamos el número de elementos en el producto cartesiano de dos conjuntos.
  - Def. Producto Cartesiano

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Ej: $A = \{1,2\}$ y $B = \{x, y, z\}$

$$A \times B = \{(1,x),(1,y),(1,z),(2,x),(2,y),(2,z)\}$$

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

Matemática Discreta

2019-08/14

- Probar que $a \geq 2$, entonces $a \nmid b$ o $a \nmid b+1$

supone mos $a | b$ y $a | b+1$

$\Rightarrow$ $b = m_1 \cdot a$ y $b+1 = m_2 \cdot a$

sustituimos $b = m_1 \cdot a$ en $b+1 = m_2 \cdot a$:

$$m_1 \cdot a + 1 = m_2 \cdot a$$
$$1 = m_2 \cdot a - m_1 \cdot a$$
$$1 = (m_2 - m_1) \cdot \underset{\geq 2}{\underset{\uparrow}{a}}$$

Entonces, $\frac{1}{m_2 - m_1} = a \longrightarrow a \leq 1$

- $a \geq 2$ y $a \leq 1$ $(\rightarrow\leftarrow)$
  contradicción

En conclusión, $a \nmid b$ o $a \nmid (b+1)$ $\square$

Ej: $\sqrt{2}$ es irracional

todos los números que no se pueden escribir como la división de dos enteros son irracionales.

Prueba: supongamos, para fines de contradicción, $\sqrt{2}$ es racional.

$$\sqrt{2} = \frac{\overset{\text{fracción reducida}}{a}}{b},\ b \neq 0 \ \text{ y } \ \text{mcd}(a,b) = 1$$

- elevamos al cuadrado ambos lados

$$((2)^{1/2})^2 = (a/b)^2 \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

a es par.

Luego, $\underbrace{a = 2k}$. Entonces,

$$a^2 = \overset{2}{\cancel{4}}k^2 = 2b^2$$

$$b^2 = 2k^2$$

$b^2 = 2k^2$, b^2 es par $\rightarrow$ b es par

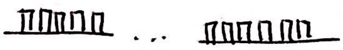
a es par y b es par $(\rightarrow\leftarrow)$

En conclusión,

$\sqrt{2}$ es irracional $\square$

Inducción Matemática Es una técnica de demonstración para propiedades de los números enteros

Analogía: Dóminos



validar argumento es el procedimiento de lógica.

1. Paso base tengo que demostrar que puedo botar el primero.
2. tengo que demostrar que si se cae el primero se va a botar el que lesigue paso inductivo
3. Conclusión todos se caen

Formalmente, si $p(n)$ es una proposición abierta y $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces el argumento

1. $P(n_0)$ es verdad (para algún $n_0 \in \mathbb{Z}^+$)

2. $P(n) \rightarrow P(n+1)$ es verdad

Entonces, $p(n)$ es cierta para toda $n \in \mathbb{Z}^+$

La suma de los primeros n impares (positivos) consecutivos es un cuadrado perfecto, en particular n^2.

matematizar:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

$2k+1$, si k arranca en 0

$2k-1$, si k arranca en 1

Paso base: $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 1 = 1^2$$

Paso inductivo: Asumimos (prueba directa) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \underbrace{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}_{n} + \underbrace{2(n+1)-1}_{n+1}$$

$$= \overbrace{\sum_{i=1}^{n}(2i-1)}^{n^2} + 2n+1$$

$$= n^2+2n+1$$ factorizo

$$= (n+1)^2$$

$\square$

Ej: La suma de los primeros n consecutivos es $\frac{n(n+1)}{2}$

Demostración

2019-08-12

Prueba directa

$P \to q$

i) Asumimos p verdadero

ii) Demostramos q

$\therefore\ p \to q$

Ej:

$P_1 \wedge P_2$

p: n par y m impar $n=4$ $m=6$ $P=0$

q: $m \cdot n$ par $m \cdot n = 24$ $q=1$

Prueba por contrarecíproca

La preposición $\neg q \to \neg p$ se llama contrarecíproca (o contrapositiva) de la preposición $p \to q$

$$\boxed{p \to q \equiv \neg q \to \neg p}$$

Ej: Para cualquier $\underset{}{\overset{\text{entero positivo}}{n \in \mathbb{Z}^+}}$, Si $\underbrace{n^2 \text{ es par}}_{P}$, $\underbrace{\text{entonces } n \text{ es par}}_{q}$.

Si asumimos p, tendríamos:

$n^2 = 2m$, para algún número entero positivo

tiene que ser binario no por casos

$\therefore\ n = 2K$, es imposible inferir

Prueba: Por contrapositiva

- Asumimos $\neg q = n$ impar $\therefore\ n = 2m+1$ entonces,

$$n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2\left[2m^2 + 2m\right] + 1$$

$$= 2K + 1$$

$\square$

P: n par y no impar

q: m·n par

Si $\underbrace{\text{n par y m impar}}_{p}$, $\underbrace{\text{entonces m·n par}}_{q}$

$\underbrace{n}_{par} \wedge \underbrace{m}_{impar} \longrightarrow m \cdot n$ par

Si m·n impar, entonces n impar o m par.

m·n impar, $\neg(n \wedge m)$ demorgan

$\neg(m \cdot n) \longrightarrow (\neg n \vee \neg m)$

Prueba por casos (exhausción)

La proposición:

$(p_1 \vee p_2 \vee p_k) \longrightarrow q$

es equivalente a $\equiv (p \vee q) \longrightarrow r \equiv (p \to r) \wedge (\to r)$

$$(p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_K \to q)$$

Ej: Si n no es divisible por 5, entonces n^2 tiene residuo 1 o 4 al ser dividido por 5.

$n = 97 \to n^2 = 9409 = 1881 * 5 + 4$

$n = 18 \to n^2 = 324 = 64 * 5 + 4$

$n = 6 \to n^2 = 36 = 7 \cdot 5 + 1$

Un número no múltiplo de 5 tiene forma

$$\underbrace{5k+1}_{p_1} \text{ o } \underbrace{5k+2}_{p_2} \text{ o } \underbrace{5k+3}_{p_3} \text{ o } \underbrace{5k+4}_{p_4}$$

Queremos probar:

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4) \to q$$

en donde $\underbrace{q: 5m+1}_{q_1}$ o $\underbrace{5m+4}_{q_2}$

Prueba por casos:

Caso 1: $n = 5k+1$

Luego, $n^2 = 25k^2 + 10k + 1$

$= 5(5k^2 + 2k) + 1$

$= 5m + 1$

Caso 2: $n = 5k+2$

Luego, $n^2 = 25k^2 + 20k + 4$

$n = 5(5k^2 + 4k) + 4$

$= 5m + 4$

Caso 3: $n = 5k+3$

Luego $n^2 = 25k^2 + 30k + 9$

$= 5(5k^2 + 6k) + 9 \equiv 5(5k^2 + 6k + 1) + 4$

$= 5k + 4$

Caso 4: $n = 5k+4$

Luego $n^2 = 25k^2 + 40k + 16 \equiv n^2 = 25k^2 + 15 + 1$

$= 5(5k^2 + 8k + 3) + 1$

$= 5m + 1$

$\square$

Prueba por contradicción

La proposición $p \to q$ puede probarse de la siguiente manera:

✓) Asumimos p

✓) Asumimos $\neg q$

✓) Demonstramos que $\underbrace{(p \land \neg q) \to F}_{\text{es una contradicción}}$

$$(p \land \neg q) \to F$$

$\therefore$ q es verdad.

Ej: Si $a \geq 2$ y $b \in \mathbb{Z}$, entonces $a \nmid b$ o $a \nmid (b+1)$

$a = 8$; $b = 11$

$8 \nmid 11$ o $8 \nmid 12$ ✓

$a = 8$; $b = 15$

$8 \nmid 15$ $\quad$ $8 \mid 16$

Prueba: por contradicción

Asumimos $a \geq 2$ y $b \in \mathbb{Z}$. Asumimos también, para fines de contraddicción, que $a \mid b$ y $a \mid (b+1)$.

Esto es:

$$b = m_1 \cdot a \quad \text{y} \quad b+1 = m_2 \cdot a$$

Matemática Discreta Aplicada

2019-08-05

① $[(p \to q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (p \vee r)] \to (\neg q \to s)$

$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg r \vee s)$ resolution

$(q \vee r) \wedge (\neg r \vee s)$ resolution

$(r \vee q) \wedge (\neg r \vee s)$ resolution

$(q \vee s)$ equivalencia

$(\neg q \to s)$

$p \to q$
$\neg r \vee s$
$p \vee r$
$\therefore \neg q \to s$

② $[(p \wedge \neg q) \wedge r] \to (p \wedge r) \vee q$

① $p \wedge \neg q$
② r
$\therefore (p \wedge r) \vee q$

③ p simplificación 1.

④ $p \wedge r$ conjuncion 2 y 3

⑤ $(p \wedge q) \vee q$ adición

③ $[p \wedge (p \to q) \wedge (\neg q \vee r)] \to r$

① p

② $p \to q$

③ $\neg q \vee r$

Técnicas de demostración

07/08/2019

Def: Demostración es una validación lógica de un $\underbrace{\text{teorema}}_{\text{Proposiciones}}$

- Prueba o demostración directa
- Prueba o demostración recíproca
- Prueba o demostración por contradicción
- Prueba o demostración por casos
- Prueba por inducción matemática

Prueba Directa: (usa modus ponens)

Queremos demostrar la implicación:

$$\boxed{p \to q}$$

La estrategia:
1) suponer p
2) Comprobamos q

Ej: La suma de dos números pares es un número par.

Si n y m, entonces $m+n$ es par.

Greog Cantor

$\mathbb{Z}$: zahlen

$\mathbb{N}$: Natürliche

$\mathbb{Q}$: Quotienten

$\mathbb{R}$: Reele

$\mathbb{C}$: Komplex

Prueba: Supongamos $m = 2k_1$ y $n = 2k_2$ para $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

Luego, $m + n = 2k_1 + 2k_2 = 2\underbrace{(k_1 + k_2)}_{\mathbb{Z}} = 2k_3$

$\square$ $\Diamond$ Q.E.D.

Ej: Si a es par y b es impar, entonces $a \cdot b$ es par

Nota: Los impares tienen la forma $2K + 1$

Prueba:

Suponemos, $a = 2K_1$ $\quad b = 2k_1 + 1$ $\quad$ para $K_1, K_2 \in \mathbb{Z}$

Luego, $a \cdot b = 2k_1 \cdot (2k_2 + 1) = 4k_1 \cdot k_2 + 2k_1$

$$= 2(2k_1 \cdot k_2 + k_1) = \underline{2k_3}$$

Inferencia

31/07/2019

- Deducción
- Conclusión a partir de información conocida.

→ Descubrir el razonamiento que se utiliza para demostrar o probar un argumento

→ Validar un argumento: usar equivalencias lógicas y reglas de inferencia para determinar si la conclusión de dicho argumento es V o F.

- Buen Argumento = debe de ser correcto pero fácil que los demás entiendan. "Orden", "Claro".
- Un argumento puede ser falso si la conclusión es verdadera

A raíz de lo tedioso que es hacer tablas o algebra booleana surgen las reglas de inferencia

$$\underbrace{(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q}_{\text{¿Cómo hacer tablas o algebra aquí?}}$$

Reglas de inferencia son TAUTOLOGÍAS

- modus ponens

ej.: $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$

- Resolución

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \vee r \\ \hline q \vee r \end{array}$$

~~Prueba:~~

$\cancel{(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)}$

$\cancel{p \wedge (q \wedge R) = (p \wedge q) \vee (p \wedge R)}$

$\cancel{[(p \wedge q) \wedge \neg p] \vee [(p \vee q) \wedge r] \rightarrow}$ ~~que~~

$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$

$[(p \vee q)$

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p q r	p ∨ q	¬p ∨ r	① ∧ ②	q ∨ r	③ → ④
0 0 0	0	1	0	0	1
0 0 1	0	1	0	1	1
0 1 0	1	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	1	1
1 0 0	1	0	0	0	1
1 0 1	1	1	1	1	1
1 1 0	1	0	0	1	1
1 1 1	1	1	1	1	1

tautología

Premisas

Ej:
1. $(\neg p \vee q) \rightarrow r$
2. $r \rightarrow (s \vee t)$
3. $\neg s \wedge \neg u$
4. $\neg u \rightarrow \neg t$

$\therefore p$

5. $(\neg p \vee q) \rightarrow (s \vee t)$ // silogismo hipotético
6. $\neg u$ // simplificación 3
7. $\neg t$ // modus ponens con 4, 6
8. $\neg s$ // simplificacion 3
9. $\neg s \wedge \neg t$ // Conjunción 7 y 8
10. $\neg \underbrace{(s \vee t)}_{s \vee t \text{ es falso}}$ // De morgan 9
11. $\neg (p \vee q)$ // por $(s \vee t) = F$ entonces en la 5
12. $p \wedge \neg q$ // De Morgan
13. p // simplificación 12.

Validación de argumentos

p: La banda toca
q: Las bebidas
r: La fiesta se cancela
s: alice se enoja
t: El dinero se devuelve

identificación

Premisas:

1. $(\neg p \vee q) \to (r \wedge s)$
2. $r \to t$
3. $\neg t$

$\therefore p$

4. $\overbrace{(\neg p \vee q)}^{p \to q} \to r \wedge s$ Equiv.
5. $(p \to q) \to \underbrace{(r \wedge s)}_{r}$ simplificación
6. $(p \to q) \to r$ equiv.

$(\neg p \vee q) \to r$

$\neg(\neg p \vee q) \vee r$ equiv.

Equivalencias lógicas

29/07/2019

Definiciones preliminares

— tautología = una proposición compuesta que siempre es verdadera.

— Contradicción = proposición compuesta que siempre es Falsa.

— contingencia = una proposición compuesta que no es tautología ni contradicción

---

- P y Q son lógicamente equivalentes si la bicondicional es una tautología.

$$P_1 \land (P_2 \land P_3) \qquad P \leftrightarrow Q$$

- P y Q son lógicamente equivalentes:

$$P \equiv Q$$

- Ej. Probemos que $\neg(\neg P) \equiv P$:
  - construimos una tabla

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$	$\neg(\neg P) \leftrightarrow P$
0	1	0	1
1	0	1	1

tautología

$\therefore$ $\neg(\neg P) \equiv P$; doble negación

Por lo tanto

Ej.: Propiedad identidad

$$P \wedge V \equiv P$$

P	V	$P \wedge V$	$P \wedge V \leftrightarrow P$
0	1	0	1
1	1	1	1

tautología

$\underline{P \wedge V \equiv P}$ es verdadero

- Equivalencias lógicas
  - logical Equivalencias involving conditional statements
  - Logical Equivalencias Involving Bicondicional Statements

Ej.: Sin usar tablas de verdad, mostrar:

$$\neg(\neg P \wedge q) \equiv P \vee \neg q$$

Prueba: (Algebra booleana)

$$\neg(\neg P \wedge Q) \equiv \underbrace{\neg(\neg\ )}_{P} \vee \neg Q \quad \} \text{ De Morgan}$$

$\therefore$

$$\equiv P \vee \neg Q \quad \} \text{ Doble negación}$$

Ej.: $\neg(P \vee (\neg P \wedge Q)) \equiv \neg(P \vee Q)$

Ej.: $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg(p \vee q$

Prueba:

$$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg([p \vee \neg p] \wedge [p \vee q]) \quad \text{Distributatividad}$$
$$\equiv \neg(V \wedge [p \vee q]) \quad \text{Negación}$$
$$\equiv \neg(p \vee q) \quad \text{identidad}$$

Se trabaja desde adentro hacia afuera.

Jerarquía de operaciones

1. $\neg$
2. $\wedge$
3. $\vee$
4. $\rightarrow$
5. $\leftrightarrow$

Ej.: $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

2do

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ 1ero

$\neg(p \rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q)$

$\underbrace{\neg(\neg p)}_{\text{Doble}} \wedge \neg q$

$\equiv p \wedge \neg q$

Ej.: mostrar que $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ es tautología

$\equiv [p \wedge (\neg p \vee q)] \rightarrow q$ Equivalencia $\rightarrow$

$\equiv p \wedge (\neg p \vee q) \rightarrow q$ Distributiva

$\equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \rightarrow q$ Negacion

$\equiv F \vee (p \wedge q) \rightarrow q$ Identidad

$\equiv p \wedge q \rightarrow q$ Equiv $\rightarrow$

$\equiv \neg p \vee \neg q \vee q$ De Morgan

$\equiv \neg p \vee V$ Asoc. y negación

$\equiv V$ Dominación

Regla de inferencia: modus ponens

$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ equiva. $\rightarrow$

$\equiv q \vee \neg p$ conmutativa

$\equiv \neg q \rightarrow \neg p$ Equiv. $\rightarrow$

Contrarecíproca: $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

Validación de Argumentos:

Logica Proposicional

24/07/2017

Juegos de lógica:

Premisas = condiciones prexistentes

Proposición abierta $\Rightarrow$ $P(x): x > 4$

- conectivos 2 proposiciones
- atomico 1 proposición

$p \wedge q$ Conjunción (and)

$p \vee q$ disyunción (or)

$\neg p$ no (not)

$p \Rightarrow q$ (si p, entonces q), implicación

$p \Leftrightarrow q$ doble implicación (p si y solo si q

Tablas de verdad

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Si estudio mate discreta

entonces apruebo el curso.

Proposiciones:

m: el mayordomo dice la verdad

c: el cocinero dice la verdad

j: el jardinero dice la verdad

e: el empleado está diciendo la verdad

Premisas:

1. $m \rightarrow c$
2. $\neg(c \wedge j)$
3. $\neg(\neg j \wedge \neg e)$
4. $e \rightarrow \neg c$

Argumento:

5. Suponemos $c = 0$ ▲
6. $m = 0$ (porque 1 es verdad)
7. $j = 0$ o $j = 1$
8. $e = 0$ o $e = 1$ 9. $e \neq 0$ y $j \neq 0$

conclusión parcial

10. $c = 0$, $m = 0$ para $\neg e \wedge \neg j = 0$

5'. Suponemos $c = 1$

6'. $j = 0$ (porque 2 es verdad)

7'. $e = 1$ (porque 3 es verdad)

8'. $e = 0$ (contradicción)

$\therefore$ $m = 0$

$c = 0$

$\neg e \wedge \neg j = 0$

①

m	c	$m \rightarrow c$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

④

e	c	$e \rightarrow \neg c$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

②

c	j	$c \wedge j$	$\neg(c \wedge j)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

③

j	e	$\neg j \wedge \neg e$	$\neg(\neg j \wedge \neg e)$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1

1º en esta habitación hay una dama y en la otra hay un tigre.

2º en una de estas habitaciones hay una dama y en una un tigre

1.

D	T	$D \wedge T$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2

D	T	$D \underline{\vee} T$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1	2	$1 \wedge 2$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

$P \Rightarrow Q$

Discrete Mathematics Aplied

Sumary

2.1 Book summary 2.1 - 2.4

- Rules of logic validate arguments

If $\underset{\text{true}}{p}$ then $\underset{\text{true}}{q}$

- similar to boolean

- establishing this we validate arguments and also validate arguments using the same format

- Proposition - (statement or asertion) is a sentence that is either true or false but <u>not</u> both. (questions and exclamations are <u>not</u> propositions)
- we can turn not statements into statements by adding conditions

- cannot decide truth of false $\neq$ we don't know how to verify it.

- A proposition can only have the posibility of being true or false, even if we don't know how to prove it if we know it is true or false, it <u>is</u> a proposition.

- p, q, r used as <u>propositional variables</u> (truth tables vary)
- negation of p for example, $\boxed{\bar{p}}$ or $\boxed{\neg p}$ or $\boxed{\sim p}$

p = True $\bar{p}$ = False

- Notations to facilitate discussion

$\mathbb{N}$ = Natural numpers (positive intigers)

$\mathbb{Z}$ = intigers

$\mathbb{R}$ = Real numbers

$\mathbb{Q}$ = Rational numbers

$\underbrace{A, B, C, S, T}_{\text{sets}}$

$\underbrace{a, b, c, s, t}_{\text{elements of sets}}$

$\underbrace{b \in B}_{\text{b belongs to B}}$

$\underbrace{B \ni b}_{\text{B contains b}}$

- Superscript notation

$\mathbb{R}^+$ = positive real numbers

$\mathbb{R}^-$ = negative real numbers

$\mathbb{R}^*$ = set of all nonzero real numbers

- Same convention applies to $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$;

- Notation as multiples

kS = means in a set S obtained by multiplying k to every number in S.

2.2

- Binary operators = $+, -, \cdot, \div$
- unary operators = $-(x)$

- compound statements = joined statements using operands or logical conectives

- Conjunctions and disjunction

Conjuction AND $\to \wedge$	Disyuction OR $\to \vee$
true if both are true	False if both false true otherwise

* Don't use logical operators in math

$$\underbrace{x \wedge y \in \mathbb{R}}_{\text{incorrect}}$$

maybe like this

$$\underbrace{\underbrace{(x \in \mathbb{R})}_{T \text{ or } F} \wedge \underbrace{(y \in \mathbb{R})}_{T \text{ or } F}}_{\text{and result}}$$

short circuit evaluation = only asses the first to know the result and skip the second operator

2.3 Implications

- condition statements are also called implications
  "$P \Rightarrow$ implies q" • if P is True and q false it is false otherwise it is true
- "p" is considered a hypothesis, premise, antecedent and "q" is the conclusion or consequence
- if an implication is True, the hypothesis when is met, the consequence must be true as well, this is why conditional statement.
- takes the form "if p ______, then ______." (then: implies)
- "P unless q" means $\bar{p} \Rightarrow q$, q is a necesary condition that prevents p from happening.

converse $q \Rightarrow P$

inverse $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$

contrapositive $\bar{q} = \bar{p}$

P	Q	$P \Rightarrow q$	$q \Rightarrow P$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

$\bar{q}$	$\bar{P}$	$\bar{q} \Rightarrow \bar{P}$
F	F	T
T	F	F
F	T	T
T	T	T

- given "$x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$"
  - ↳ converse $[x^2 > 4 \Rightarrow x > 2]$
  - ↳ inverse $[x \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 4]$
  - ↳ contrapositive $[x^2 \leq 4 \Rightarrow x \leq 2]$

- The converse of a theorem in the form of an implication

$$(P \Rightarrow q) \neq (q \Rightarrow P)$$

p is a sufficient condition for q.

q is a necessary condition for p.

- for q to be true, it's enough to say that p is true
- for p to be true it's necessary for q to be true as well.

or if ? = what implies, pg. 22

2.4 Biconditional statements. "p if and only if q"

T	T	= T
T	F	= F
F	T	= F
F	F	= T

- also a compound statement
- Both are true or false simultaneously

$$(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow p)$$

- the "exclusive or"

- Order of operations

not	Highest
and	⋮
or	⋮
implies	⋮
Biconditional	Lowest

22/07/2019

Matemática Discreta Aplicada

CS041; Mario Castillo; macastillom@ufm.edu

¿Qué es?

Es la manipulación numérica de elementos contables.
Es la matemática de los números enteros.

Ej. Conjeturas y pruebas: una conjetura es una idea, en matemática, es una idea que no se ha probado para todos los números, es una aproximación

$1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$

$1 + 3 + \quad = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$

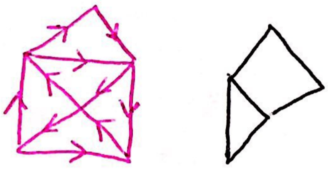
$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + n}_{n \text{ números}} = n^2$$

- La formula que se deriva de observar el patrón es una con
- Un flop es un ciclo de reloj
- no hay que generalizar

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$$

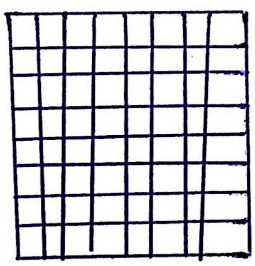
cuando sean 20,000,000 de numeros

Ej: La casita



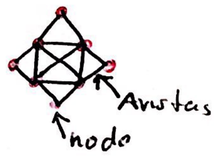
tiene solución

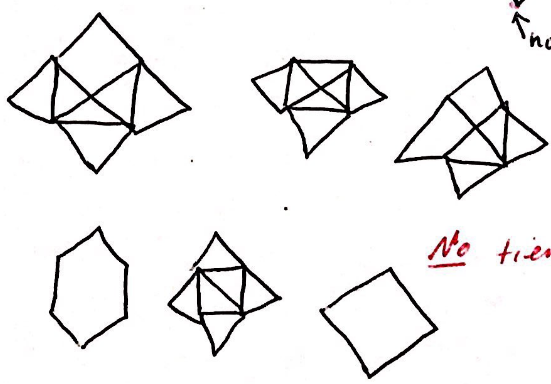
Ej. Ajedrez



• tomar en cuenta los cuadros negros y blancos, no se puede quitar uno negro y solo uno blanco.

Ej. La casita Reloaded





No tiene solución

Teoría de grafos

Lo que sale del nodo se llama grado, no tiene solución porque el grado y nodos tienen que ser

Ej: Teoría de numeros

Encryptación (encryptografía)

ocvlto escritura

- ceasar's shift

0	1	2	3	4	5		23	24	25
A	B	C	D	E	F	...	X	Y	Z
2	3	4	5	6	7		25	0	1

def $\quad Encrypt(x) = x + 2 \pmod{26}$

No es inmune a un ataque de fuerza bruta

Enigma

RSA

ECC

2019-09-18

Continiuación

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$48 = 2^4 \cdot 3 \qquad 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

$$\text{mcd}(48, 84) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Observación: Dados $a, b \in \mathbb{Z}^+$, tenemos (por TFA):

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r} \quad \& \quad b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\beta_r}$$

Entonces,

$$\text{mcd}(a, b) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot p_2^{\{\alpha_2, \beta_2\}} \cdot \ldots \cdot p_r^{\{\alpha_r, \beta_r\}}$$

Este procedimiento es muy complicado los numeros son grandes:

$$\text{mcd}(4517, 8633)$$

Para ello usaremos un método llamado "el algoritmo euclidano", el cual esta basado en la siguiente observación

Dados dos enteros $a, b \in \mathbb{Z}^+$, el algoritmo de la division de euclides dice que:

$$a = q \cdot b + r, \quad 0 \leq r \leq b$$

Resulta que se cumple lo siguiente:

$$\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r)$$

$\underline{Ej}$:

$$\underbrace{8}_{a} = \underbrace{1}_{q}\cdot\underbrace{6}_{b} + \underbrace{2}_{r}$$

$$\underbrace{6}_{a} = \underbrace{3}_{q}\cdot\underbrace{2}_{b} + \underbrace{0}_{r}$$

$$mcd(\underbrace{8}_{a},\underbrace{6}_{b}) = mcd(\overset{a}{\underset{b}{6}},\overset{b}{\underset{r}{2}}) = mcd\underbrace{(2,0)}_{\text{forma}} = 2$$

$mcd(\boxed{\text{algo}}, 0)$

"algo" es

⌈ojo siembre b es más grande

$\underbrace{b}$ = qa + r ⌋

$\underline{Ej}$: Calcular el $mcd(4517, 8633) \equiv mcd(8633, 4517)$

$8633 = 1\cdot 4517 + 4116$

$\Rightarrow mcd(4517, 4116)$

$4517 = 1\cdot 4116 + 401$

$\Rightarrow mcd(4116, 401)$

$4116 = 10\cdot 401 + 106$

$\Rightarrow mcd(401, 106)$

$401 = 3\cdot 106 + 83$

$\Rightarrow mcd(106, 83)$

$106 = 1\cdot 83 + 23$

$\Rightarrow mcd(83, 23)$

$83 = 3\cdot 23 + 14$

$\Rightarrow mcd(23, 14)$

$23 = 1\cdot 14 + 9$

$\Rightarrow mcd(14, 9)$

$14 = 1\cdot 9 + 5$

$\Rightarrow mcd(9, 5)$

$9 = 1\cdot 5 + 2$

$\Rightarrow mcd(5, 2)$

$5 = 2\cdot 2 + 1$

$\Rightarrow mcd(2, 1)$

$2 = 1\cdot 1 + 1$

$\Rightarrow mcd(1, 1)$

$1 = 1\cdot 1 + 0$

$\Rightarrow mcd(1, 0)$

HALT

[!] Cuando $mcd(a,b) = 1$ decimos que a y b son primos relativos (coprimos). Por ejemplo:

$$a = 14, \quad b = 15$$

$$mcd(14, 15)$$

$$15 = 1 \cdot 14 + 1$$

$$14 = 1 + 0$$

$$mcd(1, 0)$$

Mínimo Común Multiplo:

Def. MCM = Dados $a, b \in \mathbb{Z}^+$, decimos:

1) "d" es común multiplo de "a" y "b" si:

$$\boxed{a \mid d \quad \& \quad b \mid d}$$

[!] hay infinitos comunes multiplos.

2) "d" es el mínimo común multiplo de "a" y "b" si cualquier otro común multiplo "c" cumple

$$\boxed{d \mid c}$$

Entonces $d = mcd(a, d)$

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ & 2 \\ & 2 \\ & 2 \\ & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ & 2 \\ & 3 \\ & 7 \end{array}$$

• de potencia máxima

$$mcm(84, 48) = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$$

__Observación:__ Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, por TFA:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_R^{\alpha_R} \;\&\; b = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_R^{\alpha_r}$$

Entonces,

$$\operatorname{mcm}(a,b) = p_1^{\text{máx}\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot p_2^{\text{máx}\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \dots \cdot p_r^{\text{máx}\{\alpha_r, \beta_R\}}$$

$\boxed{!}$ $\operatorname{mcm}(a,b)\, \operatorname{mcd}(a,b)$

2019-09-16

Teoría de Números

- orientada a C.S.

- def. el estudio de los enteros y sus propiedades
  - def. divisibilidad: dados dos enteros a, b decimos "a" divide a "b" $(a \mid b)$, si existe un entero q tal que:

$$b = a \cdot q$$

[!] entendemos a la división como restas sucesivas

$$b - aq = \emptyset$$

$$b - \underbrace{a - a - \dots - a}_{q \text{ veces}} = \emptyset$$

a "b" le quito "q" veces "a" hasta llegar a $\emptyset$, si no es exacto y hay un residuo

- cuando no termina en $\emptyset$:

$$\left.\begin{array}{l} b - qa = \underbrace{r} \\ r > 0 \end{array}\right\}$$ se le conoce como "algoritmo de la división de Euclides"

∴ b se puede escribir como:

$$b = r + qa$$, donde "q" y "r" son únicos y $\emptyset \leq r < a$

Indefinición
$$0 = \square \cdot 0 + 0$$

[!] Cuando $r \neq 0$, decimos "a" no divide a "b" o $(a \nmid b)$

Def: Número Primo: un $\underbrace{\text{número}}_{\text{entero positivo}}$ que tiene exactamente dos divisores.

- alterna: numero que solo se divide por 1 o por sí mismo

ID Primos $= \{1, \infty\}$

ID Compuesto $= \{1, \infty\}$

[!] Los divisores tienen que ser distintos.

- uno es un compuesto
- un número compuesto tiene más de dos divisores
- Los números primos son la clave de la criptografía.

▲ Teorema de Euclides:

"Hay infinitos números primos"

▲ Teorema fundamental de la aritmética:

"un número entero es primo o es un producto de potencias de números primos". • inducción fuerte

Ej:

31 es primo,

$\sqrt{31} \approx 5$ propar del 1 - 5

$2 \nmid 31$; $3 \nmid 31$; $5 \nmid 31$

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

▲ **Def.** El máximo común divisor: dados dos enteros positivos "a" & "b", si existe un entero positivo "c" que cumple ambas:

1) $(c \mid a) \wedge (c \mid b)$

2) Cualquier otro divisor de "a" y "b", d cumple: $(d \mid c)$ propiedad del máximo

Entonces, c es el máximo común divisor de a y b escrito (mcd) de (a,b)

$$\boxed{mcd(a,b) = C}$$

<u>Ej el ejemplo de la mis o profe:</u>

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$mcd(2,2,3) = 12$

Solución Simulacro

2019-09-08

① $(\neg p \wedge (p \to q)) \to \neg q$

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \wedge (p \to q)$	$\neg q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0

No es una tautología

② $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$

- $\neg q$
- $p \to q$

$\therefore \neg q$

- $p \to q \equiv \neg p \vee q$ Eq. 1
- $(\neg q \wedge q) \vee \neg p$ Eq. 10
- $F \vee \neg p$ Identity laws
- $\neg p$ $\square$

③

K: kevin está chateando

h: heather está chateando

R: randy está chateando

v: víctor está chateando

A: abby está chateando

① $(K \vee H) \vee (K \wedge H)$

② $(R \vee V) \wedge \neg(R \wedge V)$

③ $A \rightarrow R$

④ $(V \wedge R) \vee (\neg V \wedge \neg R)$

⑤ $H \rightarrow (A \wedge K)$

<u>Argumentos</u>:

①

5

$$\sum_{i=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^i = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3\cdot 2^n}$$

Probar que funciona para K

$$\sum_{i=0}^{K}\left(-\frac{1}{2}\right)^i = \frac{2^{K+1}+(-1)^K}{3\cdot 2^K}$$

Probar que funciona para K + 1

$$\sum_{i=0}^{K+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^i = \frac{2^{K+1}+(-1)^K}{3\cdot 2^K} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{K+1}$$

$$= \frac{2^{K+1}+(-1)^K}{3\cdot 2^K} - \frac{1^{K+1}}{\underbrace{2^{K+1}}_{2\cdot 2^K}}$$

$$= \frac{2^{K+1}+(-1)^K}{3\cdot 2^K} - \frac{1^{K+1}}{2\cdot 2^K}$$

$$= \frac{2\left(2^{K+1}+(-1)^K\right)+3\left(-1^{K+1}\right)}{3\cdot 2\cdot 2^K} =$$

$$= \frac{2^{K+2}+2(-1)^K-3(-1)^K}{3\cdot 2\cdot 2^K}$$

$$= \frac{2^{K+2}-1(-1)^K}{3\cdot 2\cdot 2^K} = \frac{2^{K+2}+(-1)(-1)^K}{3\cdot 2\cdot 2^K}$$

$$= \frac{2^{K+2}+(-1)^{K+1}}{3\cdot 2^{K+1}} \quad \square$$

9 $|6| * |10| = 60$

10 22 jugadores de los que se puede escoger 11

$$\frac{1}{J_1}\ \frac{2}{J_2}\ \frac{3}{J_3}\ \frac{4}{J_4}\ \frac{5}{J_5}\ \frac{6}{J_6}\ \frac{7}{J_7}\ \frac{8}{J_8}\ \frac{9}{J_9}\ \frac{10}{J_{10}}\ \frac{11}{J_{11}}$$

el orden no importa

$$_{11}^{22}C = \frac{22!}{(22-11)! \cdot 11!} = 705\,432$$

11

$$\overline{B_1}\ \overline{B_2}\ \overline{B_3}\ \overline{B_4}\ \overline{B_5}$$

a) importa el orden

$$_{5}^{5}P = 120$$

$$\frac{P_1}{B_1}\ \overline{B_2}\ \overline{B_3}\ \overline{B_4}\ \frac{P_2}{B_5}$$

b)

$$_{3}^{3}P = 6$$

12 $\{3, 5, 6, 7, 9\}$; quiero agarrar 2 y multiplicarlos

a) $_{2}^{5}C = 10$

b) impares $\{3, 5, 7, 9\}$

pares $\{6\}$

$\therefore 6$

c) $\frac{\square}{\square}$ $\{3, 5, 6, 7, 9\}$

$$_{2}^{5}P = 20$$

Permutaciones y combinaciones generalizadas 2019-09-2

- Remover el factor de repetición:

  ahora sí puedo repetir

(todos distintos)

- Dado un conjunto de n elementos, la selección ordenada de r de ellos con repetición puede hacerse de:

$$n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^r$$

- Ej el número de cadenas binarias de k bits es:

  El conjunto de opciones para cadenas binarias es $\{0,1\}$

  - Seleccionamos ordenadamente k opciones 2^k

- Cuantas permutaciones de la palabra ball en inglés hay.

  * Falla la premisa de tener todos distintos, las letras L aparece 2 veces, son $\boxed{\text{indistinguibles}}$, es decir

$$B\,A\,L_1L_2 = B\,A\,L_2\,L_1$$

1. Contar todos como si todos los objetos fueran distintos.

$$P(4,4) = 4!$$

2. Descontamos las permutaciones de L:

$$P(2,2) = 2!$$

En total $(4!)$ le descuento $2!$:

$$\frac{4!}{2!} = 12 \text{ palabras distintas}$$

■ Ej: Permutaciones de la palabra:

PATATA

1) Todas distintas:

$$P(6,6) = 6! = 720$$

2) descontamos:

2.1) 3 letras A : $P(3,3) = 3!$

2.2) 2 letras T: $P(2,2) = 2!$

En total hay:

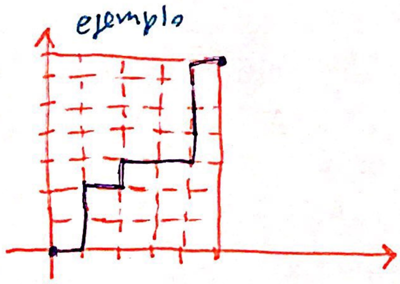
$$\frac{6!}{3! * 2!} = 60 \text{ palabras distintas}$$

En general: de un conjunto de n elementos de los cuales hay n_1 elementos tipo 1, n_2 elementos tipo 2, ..., n_K elementos tipo K. Podemos de este conjunto elegir de forma ordenada. (permutación):

$$\frac{n!}{n_1! * n_2! * \ldots * n_K!}$$

Ej: ¿Cuantos posibles caminos hay desde el punto (0,0) hasta el punto (5;7), si los únicos movimientos permitidos son 1 unidad a la derecha o 1 unidad hacia arriba?

ejemplo



- El camino de opciones:

$$\{R, U\}$$

R: derecha
U: arriba

- Un camino desde $(0,0)$ hasta $(5,7)$ incluye 12 movimientos:

5 a la derecha y

7 hacia arriba

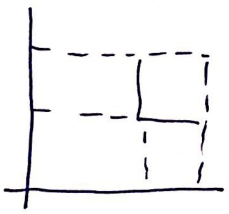
- Por ejemplo, la ruta del dibujo es:

$$\underset{1}{R}\ \underset{2}{U}\ \underset{3}{U}\ \underset{4}{R}\ \underset{5}{U}\ \underset{6}{R}\ \underset{7}{R}\ \underset{8}{U}\ \underset{9}{U}\ \underset{10}{U}\ \underset{11}{U}\ \underset{12}{R}$$

una palabra de tamaño 12 con 5 R's indistinguibles y 7 U's indistinguibles:

$$\frac{12!}{5!\,7!} = 792$$

- Variante: Comenzamos en $(3,4)$



2 movimientos
+ 3 movimientos

5 en total

$$\underset{1}{R}\ \underset{2}{U}\ \underset{3}{U}\ \underset{4}{R}\ \underset{5}{U}$$

$$\frac{5!}{2!\,3!} = 10 \text{ rutas}$$

Variante 2: Cuántos caminos hay de $(0,0)$ a $(5,7)$ que no pasan por $(3,4)$: $\underbrace{792}_{\frac{12!}{5!7!}} - \underbrace{10}_{\frac{5!}{3!2!}} = 782$

▲ Permutaciones y combinaciones generalizadas:

Una tienda de donas tiene cinco sabores diferentes de donas:

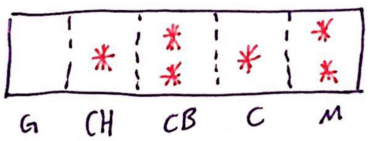
- glaseada
- chocolate
- crema bavaria
- café
- maple

¿cuántas opciones diferentes tenemos para elegir 6 donas?

*Consideraciones:
- selección no ordenada.
- podemos repetir un sabor.

La estrategia es asociar este problema como uno conocido, el de las cadenas binarias.

5 sabores 4 separadores



Analogía: cadenas binarias

Combinaciones:

2019-08-28

Una selección no ordenada de r elementos de un conjunto n elementos, se llama

r - combinación

Ej: Supongamos que tenemos un estuche con 5 lapiceros de colores: $S = \{a, r, v, n, c\}$ y queremos escoger 3 de ellos, ¿de cuántas formas diferentes podemos hacerlo?

Si el orden fuese importante, sería:

$$P(5,3) = \frac{5!}{2!} = 60$$

En este caso la selección, por ejemplo:

$$\left.\begin{matrix} a, v, c \\ a, c, v \\ c, a, v \\ c, v, a \\ v, a, c \\ v, c, a \end{matrix}\right\} \text{es la misma selección no ordenada}$$

$6 = 3!$

$P(3,3)$

Por lo tanto:
Del total de 3- Permutaciones de S descontamos $3!$ permutaciones.

$$\frac{5!}{(5-3)!\,3!} = 10$$

- En general, de r - permutaciones de n, descontamos $r!$ permutaciones

$$\frac{n!}{(n-r)!\,r!} = C(n,r)$$

- esto es r - combinación de n objetos

Ej: Cadenas de bits

a) ¿Cuántas cadenas de 4 bits tienen dos ceros?

- Esta cadena tiene dos unos.

0101
1010
0011
1100
1001
0110

$\} \; 4!$ ← $P(4,4)$ (se asume todos distintos)

$\{1100, 1100\}$ doble conteo

$\{1100, 1100\}$ doble conteo

$$6 = C(4,2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!}$$

b) Cadenas de 8 bits con 2 unos (6 ceros)

- suponiendo 8 símbolos distintos:

$$8! = 40320$$

- suponiendo que los 2 unos son iguales

$$\frac{8!}{2!}$$

- Suponemos que los 6 ceros son iguales:

$$\frac{8!}{2! \cdot 6!} = \underbrace{C(8,2)}_{28} = \underbrace{C(8,6)}_{28}$$

[!] Propiedad de simetría:

$$C(n,r) = C(n,n-r)$$

c) Cadenas de ocho bits al menos con 3 unos.

- Contamos el complemento, es decir, cadenas de 8 bits con al menos 3 unos (0, 1, 2)

Cadenas con cero unos = $C(8,0) = 1$

Cadenas con un uno = $C(8,1) = 8$

Cadenas con dos unos = $C(8,2) = 28$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 8 \\ + \; 28 \\ \hline 37 \end{array}$$

$$\underbrace{2^8}_{\text{posibles combinaciones}} - \underbrace{37}_{\text{cadenas} < 3 \text{ unos}} = 219$$

Ej: Cartas

- 52 cartas en una baraja.
- 4 palos diferentes:

$$\underbrace{\heartsuit}_{13} \quad \underbrace{\diamondsuit}_{13} \quad \underbrace{\clubsuit}_{13} \quad \underbrace{\spadesuit}_{13}$$

- Denominaciones:

A, 2–10, J, Q, K

- Mano de póker: 5 cartas

a) ¿Cuántas manos diferentes existen?

$C(52,5) = 2{,}598{,}960$

b) ¿Cuántas manos de póker contiene sólo corazones?

$C(13,5) = 1{,}287$

c) ¿Cuántas manos de póker contienen al menos un corazón?

complemento sin corazones:

sin corazón = $C(39,5) = 575{,}757$

$C(52,5) - C(39-5) = 2{,}023{,}255$

d) opcional los números pares de cada denominación:

descontar; A, J, Q, K
descontar; 3, 5, 7, 9 $\Big\}$ $13 - 8 = 5$

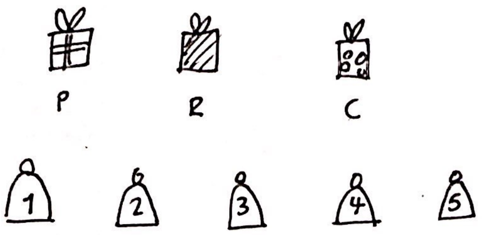
$C(20,5) = 15{,}504$

Matemática Discreta - Combinatoria

2019-08-26

① Se distribuyen 3 regalos entre cinco chicos. De cuántas formas pueden hacerlo si:

a) cada chico solo puede recibir 1 regalo



- Cuando importa el orden usar permutación
- Cuando no importa usar combinatoria

1P	2R	3C
1P	2R	4C
⋮	⋮	⋮

$${}^{5}_{3}P = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{2}\cdot\cancel{1}} = \underline{\underline{60}}$$

b) a cada chico le puede tocar más de un regalo.

Por casos:

Problema de la uno:

① un regalo a cada uno = 60

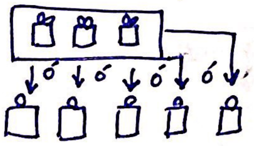
② tres regalos solo a uno = 5

③ dos a uno y uno a otro = 60

$+$

$\underline{\underline{125}}$

2: es como que si fuese un paquete de 3 regalos



3: casos de agrupación

$${}^{5}_{2}P = \frac{5!}{(5-2)!} = 4\cdot 5 = 20$$

como tenemos 3 casos se multiplica la permutación por 3

60

c) cada chico sólo puede recibir un regalo pero los tres son idénticos.

NO IMPORTA ORDEN

$$\boxed{{}^{n}_{r}C = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}}$$

$${}^{5}_{3}C = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = 10$$

② Una persona tiene 6 chaquetas y 10 pantalones. ¿De cuántas formas distintas puede combinar?

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

$$\underbrace{\boxed{6}}_{\text{seis posibilidades de una chacheta diferente}}^{C}\ \underbrace{\boxed{10}}_{\text{10 posibilidades de un pantalón}}^{P} = |6| \times |10| = 60$$

* Cuando solo hay dos conjuntos, se puede utilizar permutaciones pero cuando son 3 conjuntos se usa $|A \times B|$

③ Un amigo le quiere regalar a otro dos libros, los quiere elegir entre 15 que le gustan. ¿Cuántas formas distintas puede combinarse?

NO IMPORTA = COMBINATORIA

$${}^{15}_{2}C = \frac{15!}{(15-2)!\,2!} = 105$$

Corto 1 Matemática Discreta

Miércoles, 7 de agosto 2019

Nombre y Apellidos: David Gabriel Corzo Mcmath 20190432

Tema:	1	2	Total
Puntos:	50	50	100
Nota:	15	50	65

1. (50 pts.) El día miercoles 7 de agosto, David le gustaría determinar las notas de dos colegas usando dos hechos. El primero es que él sabe que si Jean Pierre no es la nota más alta, entonces Sharon lo es. Segundo, él sabe que si Sharon no es la nota más baja, entonces Andrea es la nota más alta. ¿Será posible para David poder ordenarlos en base a su nota del corto?¿Por qué? Utilice reglas de inferencia lógica.

Premisas

en hoja ✓ ok.

2. (50 pts.) Muestre que $(p \to r) \vee (q \to r)$ es equivalente a $(p \wedge q) \to r$. Muestrelo por medio del uso de tablas de verdad.

en hoja ok.

Premisas

David Corzo
20190432

J: Jean Pierre es la nota más alta.
S: Sharon es la nota más alta.
A: Andrea es la nota más alta

alguna es la nota más alta pero no mas de una

Proposiciones

1. $\neg J \longrightarrow S$
2. $\neg(\neg S) \rightarrow A$

no es cierto.

Alterno

(3) $(\neg J \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow A)$

(4) $\neg J \rightarrow A$ silogismo hipotético

3. $\underbrace{(\neg J \rightarrow S)}_{1} \wedge \underbrace{(S \rightarrow A)}_{2}$
4. $(\neg S \rightarrow J) \wedge (S \rightarrow A)$ equiv. lógica contra recíproca (1)
5. $(\neg S \vee J) \wedge (S \rightarrow A)$ equiv lógica (1)
6. $(\neg S \vee J) \wedge (\neg S \vee A)$ equiv lógica (2)
7. $\neg S \vee (J \wedge A)$ equivalencia (1) y (2)

falta.

$(p \to r) \vee (q \to r)$

p	q	$p \to q$	q	r	$q \to r$	$(p \to r)$	$(q \to r)$	$(p \to r) \vee (q \to r)$
0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

$(p \wedge q) \to r$

	p	q	r	$(p \wedge q) \to r$
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	1	1	1
5	1	0	0	1
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

$\overbrace{0 \wedge 0}^{0} \to 0$

$\overbrace{0 \wedge 0}^{0} \to 1$

$\overbrace{0 \wedge 1}^{0} \to 0$

$\overbrace{0 \wedge 1}^{0} \to 1$

$1 \wedge 0 \to 0$

$1 \wedge 0 \to 1$

$\overbrace{1 \wedge 1}^{1} \to 0$

$1 \wedge 1 \to 1$

$p \to q$	
0	0
0	1
1	0
1	1

or

0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

~~el~~ ~~resultado~~ es equivalente.

	p	q	r	$(p \to r) \vee (q \to r)$
1	0	0	0	1 1
2	0	0	1	2 1
3	0	1	0	3 1
4	0	1	1	4 1
5	1	0	0	5 1
6	1	0	1	6 1
7	1	1	0	7 0
8	1	1	1	8 1

1 $\overbrace{(0 \to 0)}^{1} \vee \overbrace{(0 \to 0)}^{1}$

2 $\overbrace{(0 \to 1)}^{1} \vee \overbrace{(0 \to 1)}^{1}$

3 $\overbrace{(0 \to 0)}^{1} \vee \overbrace{(1 \to 0)}^{0}$

4 $\overbrace{(0 \to 1)}^{1} \vee \overbrace{(1 \to 1)}^{1}$

5 $\overbrace{(1 \to 0)}^{0} \vee \overbrace{(0 \to 0)}^{1}$

6 $\overbrace{(1 \to 1)}^{1} \vee \overbrace{(0 \to 1)}^{1}$

7 $\overbrace{(1 \to 0)}^{0} \vee \overbrace{(1 \to 0)}^{0}$

8 $\overbrace{(1 \to 1)}^{1} \vee \overbrace{(1 \to 1)}^{1}$