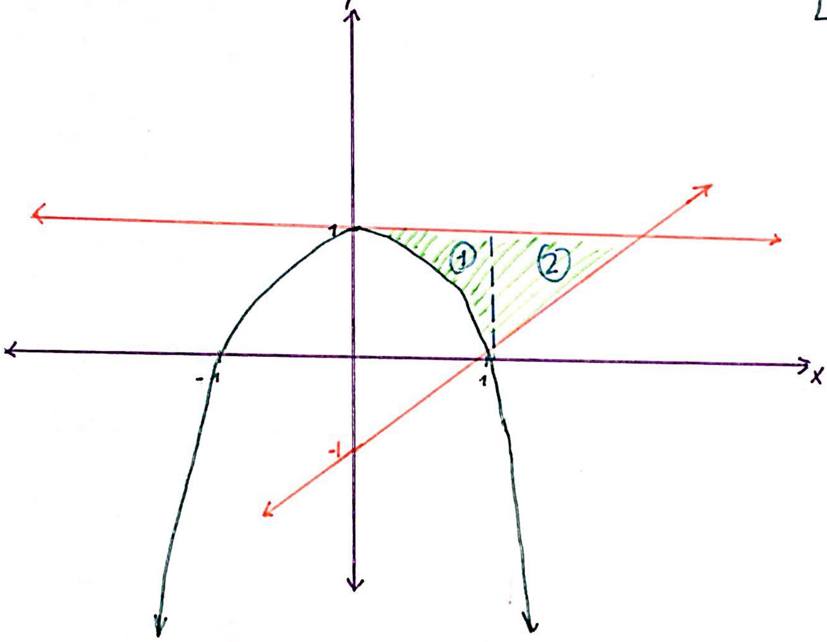
2019-09-10

# Aplicación de la integraciones

- Planteamiento
- Gráfica de una región → área → volúmen sólidos en revolución

Ej: Encuentre la región entre $\boxed{y_1 = 1}$ $\boxed{y_2 = 1 - x^2}$ & $\boxed{y_3 = x - 1}$




$y_1 = y_2$ $(0, 1)$

$y_1 = y_3$

$1 = x - 1$

$x = 2$ $(2, 1)$

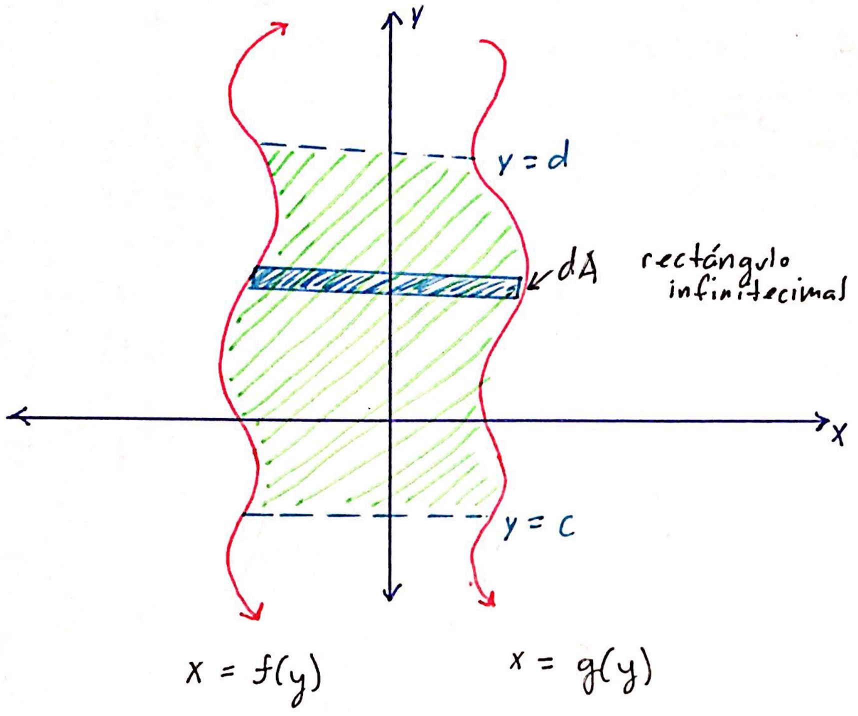
$$A = \int_0^1 1 - (1 - x^2)\,dx + \int_1^2 1 - (x + 1)\,dx$$

$$= \int_0^1 0 + x^2\,dx + \int_1^2 2 - x\,dx$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left.2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{3} + 4 - \frac{4}{2} - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

# Integración en el eje-y : Franjas horizontales derecha - izquierda




Derecha - izquierda

Región S: $f(y) \le x \le g(y)$

$c \le x \le d$

altura = dy

ancho = $g(y) - f(y)$

$dA = [g(y) - f(y)]\,dy$

$$A = \int_c^d [(g(y) - f(y)]\,dy$$

$$A = \int_c^d x_{der.} - x_{izq.}\,dy$$

$x_{der.} = g(y)$

$x_{izq.} = f(y)$

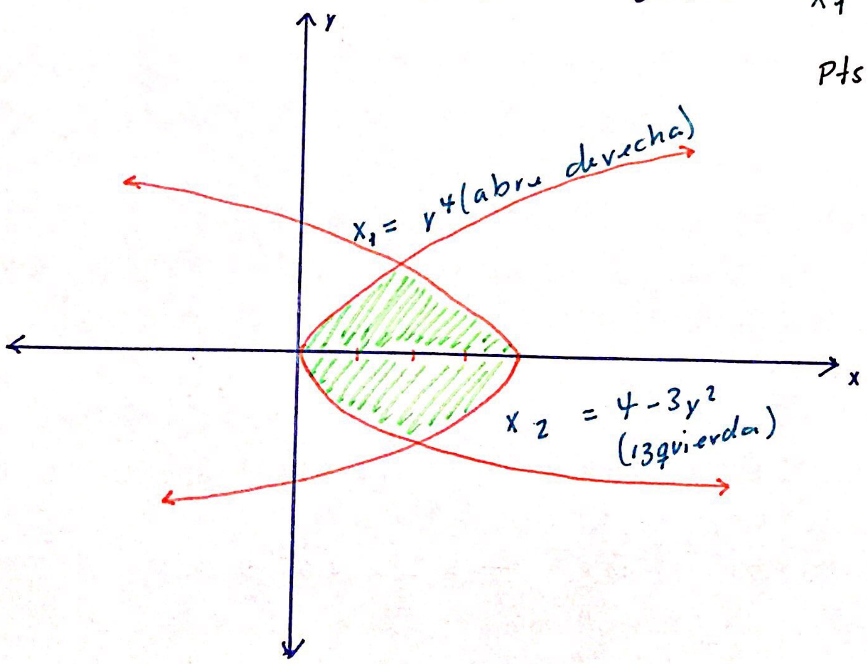
$$A = \int_a^b y_{arriba} - y_{abajo}\,dx$$

$y_{arriba} = f(x)$

$y_{abajo} = g(x)$

---

Ejercicio: encuentre el área entre $x_1 = y^4$ & $x_2 = 4 - 3y^2$ &




Pts. Intersección $x_1 = x_2$

$y^4 = 4 - 3y^2$

$y^4 + 3y^2 - 4 = 0$

$(y^2 + 4)(y^2 - 1)$

$y = \sqrt{-4}$ imaginario

$y = \sqrt{1}$

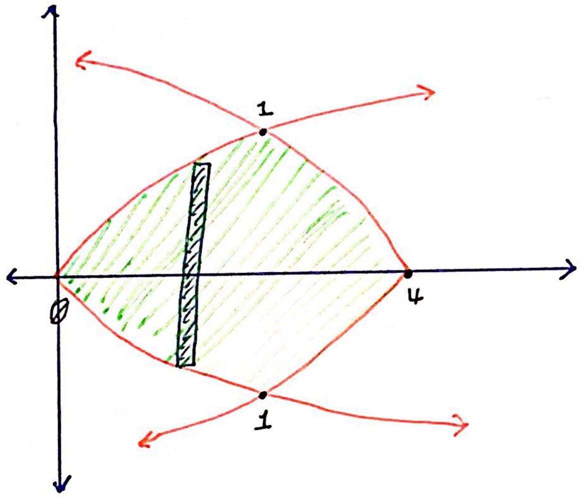
$y = \pm 1$

$$A = \int_{-1}^{1} X_{derecha} - X_{izquierda}\, dy =$$

$$= 2\int_{0}^{1} 4 - 3y^2 - y^4\, dy = 2\left(4y - y^3 - \frac{y^5}{5}\Big]_0^1\right)$$

$$= 2\left(3 - \frac{1}{5}\right) = 2\left(\frac{15}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{28}{5}$$

ahora lo mismo pero integrando respecto a eje-x.




$$\int f(x) - g(x)\, dx$$

$x = y^4$ $\quad x = 4 - 3y^2$

¡Resolver para x!

$a^2 = b \Rightarrow a = \pm\sqrt{b}$

$$2\int_{0}^{1} f - g\, dx + \int_{1}^{4} h - i\, dx$$

Sacar la inversa: $x = y^4$ & $x = 4 - 3y^2$

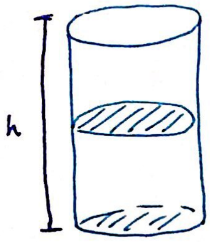
$y = \pm\sqrt[4]{x}$

$x = 4 - 3y^2 \Rightarrow x - 4 = 3y^2$

$\pm\sqrt{\frac{x-4}{3}} = y$

$$A = 2\int_{0}^{1} x^{1/4}\, dx + 2\int_{1}^{4} \left(\frac{4-x}{3}\right)^{1/2} dx = \frac{28}{5}$$

# Volúmenes



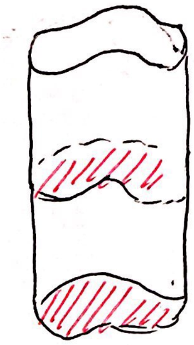

(rebanado)

Sección transversal

$A = \pi r^2$

$V = Ah$

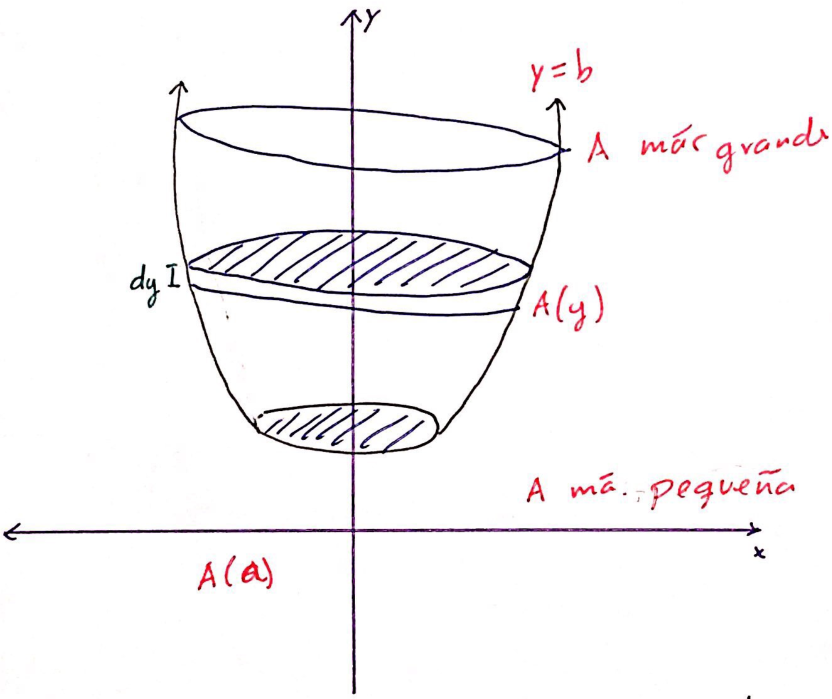
$V = \pi r^2 h$



Área sección transversal

$V = Ah$

Volúmen de un sólido S.




Parte infinitecimal de este sólido

cilindro

Área transversal $A(y)$

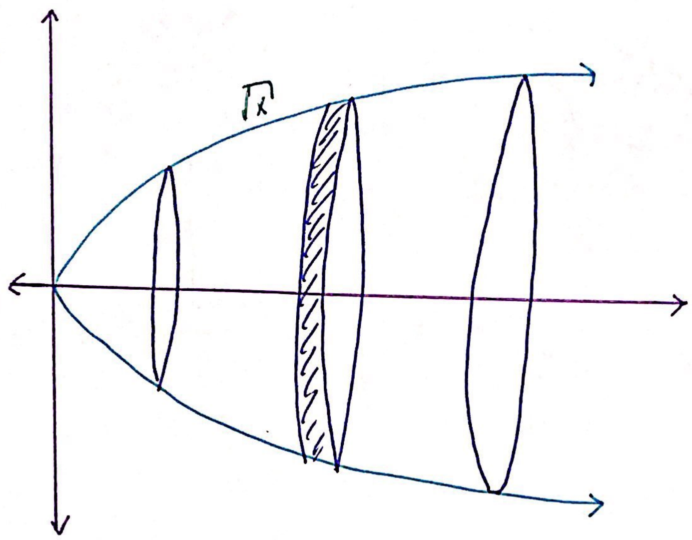
Altura $dy$

$dv = A(y)\,dy$

Integrando $V = \int_a^b dv = \int_a^b A(y)\,dy$

¿cuál es el área transversal

Ejemplo: Considere la región $0 \leq y \leq \sqrt{x}$




Volumen del solido es la sección transversal es un cilíndro disco de radio $r = \sqrt{x}$

$$dv = \pi r^2 \, dx = \pi x \, dx$$

$$V = \int_0^4 \pi r^2 \, dx = \pi \int_0^4 x \, dx = \left.\frac{\pi x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{16\pi}{2} = 8\pi$$