# 5.4 Desplazamiento y Distancia

La integral de la derivada $f'(x)$ es la función original.

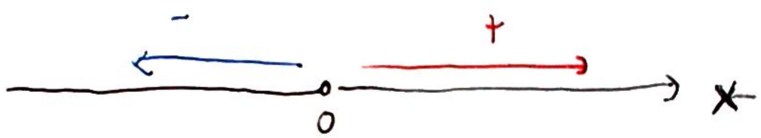
$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(x)\Big]_a^b = \underbrace{f(b) - f(a)}_{\text{cambio neto.}}$$

Si se conoce la razón de cambio de una función, el cambio neto se obtiene integrando la razón de cambio.

Desplazamiento en 1·Dimensión

$$s = \int_a^b v(t)\,dt \quad \checkmark$$

$$\int_a^b s'(t)\,dt.$$




Costo Marginal: $c'(x)$ costo neto $= \int_a^b c'(x)\,dx.$

Población: población neta $= \int_a^b p'(t)\,dt.$

Ejemplo: Una partícula tiene una velocidad de $v(t) = \frac{2}{t^{4/3}}$ cm/s.

Encuentre el desplazamiento entre $t=1$ y $8$ s. $2\cdot t^{-4/3}$

$$s = \int_1^8 v(t)\,dt = 2\int_1^8 t^{-4/3}\,dt. = -6\,t^{-1/3}\Big]_1^8 = 6t^{-1/3}\Big]_8^1$$

$1-\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{1}{2}+1$

$$s = 6\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{8}}\right) = 6\left(\frac{1}{2}\right) = 3. \quad ó \quad 6\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{8}} - \frac{(-1)}{\sqrt[3]{1}}\right)$$

Desplazamiento Neto es de 3 cm.

Ejercicio 1: Se lanza una pelota con una velocidad inicial de 64 pies/s a nivel del suelo. Encuentre el desplazamiento de la pelota entre 1 y 3 s.

$v(t) = 64 - 32t.$ ✓ $g = -32$ pies/s?

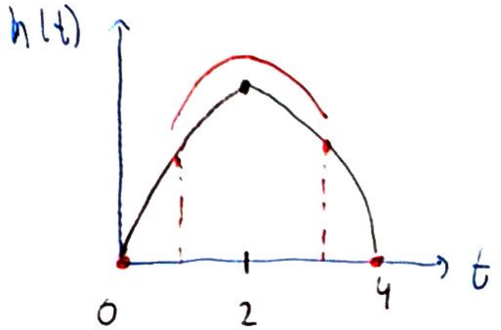
Respuesta:

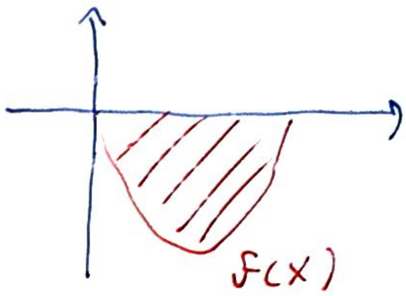
$$s = \int_1^3 v(t)\,dt = \int_1^3 (64-32t)\,dt = 64t\Big]_1^3 - 16t^2\Big]_1^3$$

$$s = 64(3-1) - 16(9-1) = 128 - 128 = 0$$

$64 \cdot 2 \qquad 16 \cdot 4 \cdot 2 \qquad 48 - 48 = 0$

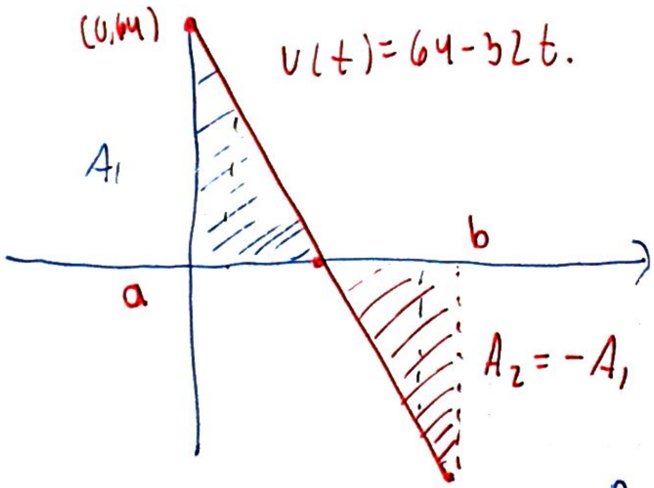
NO HAY CAMBIO NETO.




$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Distancia y Desplazamiento en una dimensión.




$-$, $0$, $+$

Desplazamiento $s = \int_a^b v(t)\,dt.$

Para el ejercicio $s = 0.$

Distancia $d = \int_a^b |v(t)|\,dt.$

$0$ ó $+$.

Rapidez: $|v(t)|.$

Para esta diagrama.

Desplazamiento $s = A_1 + A_2 \approx 0$ $A_2$ es negativo.

Distancia: $s = A_1 - A_2.$

Para el ejercicio 1j encuentre la distancia recorrida por la pelota entre $t = 1$ y $3$ s.

$$d = \int_1^3 |v(t)|\,dt = \int_1^3 |\underbrace{64-32t}_{=0}|\,dt.$$

$v(t) = 0$ cuando $t = 2$.

$64 - 32t$ $\quad + \ \overset{2}{\vdots} \ -$

$$d = \int_1^2 v(t)\,dt - \int_2^3 v(t)\,dt$$

$64 - 32t = 0$

$64 = 32t$

$2 = t$

$$d = \int_1^2 64-32t\,dt + \int_2^3 32t-64\,dt.$$

$$d = 64t - 16t^2\Big]_1^2 + 16t^2 - 64t\Big]_2^3$$

$$d = 128 - 64 - (64-16) + 16(9-4) - 64(3-2)$$

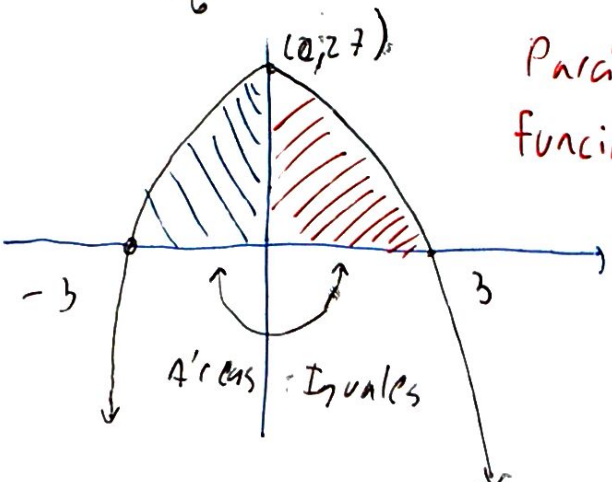
$$d = 64 - 48 + 80 - 64$$

$$d = 16 + 16 = 32 \text{ pies.}$$

Ejercicio 2: Un vehiculo da vueltas en un circuito. a una velocidad $v(t) = 27 - 3t^2$ millas/hora.

a. Plantee la integral para encontrar el desplazamiento del vehiculo entre −6 y 6 horas

$$s = \int_{-6}^{6} (27 - 3t^2)\,dt = 2\int_{0}^{6} (27 - 3t^2)\,dt.$$




Parábola
función par

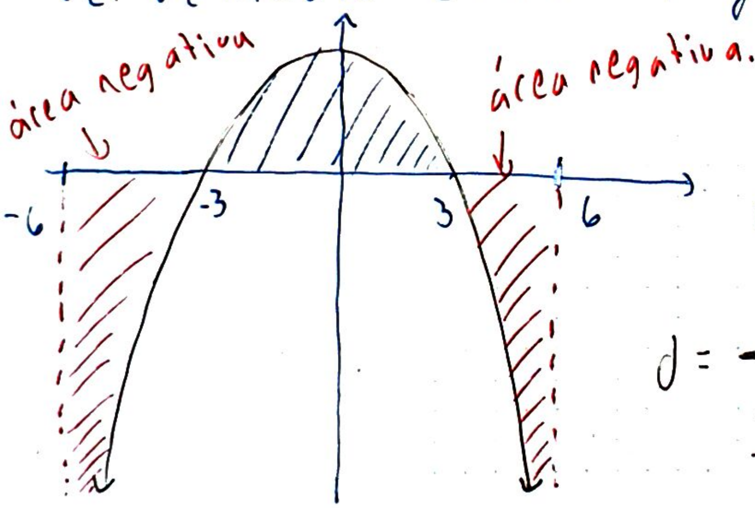
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$f(-x) = f(x)$$

$$s = 2\left(27t - t^3\Big]_0^6\right) = 2\left(\overset{27\cdot 3\cdot 2}{27\cdot 6} - 6^3\right) = 2(162 - 216)$$

$$2(-54) = -108$$ millas.

b. Plantee la integral para encontrar la DISTANCIA del vehiculo entre −6 y 6 horas.




$$d = -A_1 + A_2 - A_3.$$

$$d = \int_{-6}^{6} |v(t)|\,dt.$$

$$d = -\int_{-6}^{-3} v(t)\,dt$$

$$d = -\int_{-6}^{-3}(27-3t^2)\,dt + \int_{-3}^{3}(27-3t^2)\,dt + \int_{3}^{6}(\underbrace{3t^2-27}_{v(t)})\,dt$$

GIANCARLO: $d = 2\int_0^3 v(t)\,dt - 2\int_3^6 v(t)\,dt.$

Integrales Indefinidas: desplazamiento, velocidad y aceleración.

$\int f(t)\,dt = F(t) + C$, función.

Dada la aceleración del objeto. $a(t) = v'(t)$.

Velocidad: $v(t) = \int a(t)\,dt + C_1$

Velocidad inicial: $V(0) = V_0$. reposo $V(0) = 0$.

Posición: $s(t) = \int v(t)\,dt. + C_2$.

Posición inicial: $s(0) = s_0$. posición equilibrio $s(0) = 0$

Ejercicio 3: Un cohete despeja con una aceleración vertical de $a(t) = t^2\left(\frac{72}{t} - 36\right)$ ft/s².

La posición inicial es 0 pies snm y la velocidad inicial es de 400 ft/s. sobre el nivel del mar.

a. Encuentre la posición vertical del cohete.

$$a(t) = 72t - 36t^2.$$

Velocidad: $v(t) = \int (72t - 36t^2)\,dt.$

$v(t) = 36t^2 - 12t^3 + C_1$

Use $v(0)=400$: $v(0) = \boxed{C_1 = 400}$

Posición: $s(t) = \int v(t)\,dt = 12t^3 - 3t^4 + 400t + C_2.$

Use $s(0)=0$: $s(0) = 0+0+0+\boxed{C_2 = 0}$

Posición vertical es $s(t) = 12t^3 - 3t^4 + 400t.$

b. ¿Cuál es la rapidez y la velocidad a los $t = 10s$?

$v(10) = 36(100) - 12(1000) + 400 = 4{,}000 - 12{,}000$
$-8{,}000$ pies/s.

rapidez ~~-~~ $|v(10)| = 8{,}000$ pies/s.

Ejercicio 4: Un resorte inicialmente en reposo y en su punto de equilibrio tiene una aceleración de

$a(t) = 4\cos t - 3\sin t.$ ✓

Encuentre la velocidad y posición del resorte.

$v(t) = \int (4\cos t - 3\sin t)\,dt = 4\sin t + 3\cos t + C_1$

$v(0) = 0 + 3 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -3.$

$v(t) = 4\sin t + 3\cos t - 3.$

Desplazamiento

$$s(t) = \int (4\sin t + 3\cos t - 3)\,dt. \qquad s(0)=0$$

$$s(t) = -4\cos t + 3\sin t - 3t + C_2.$$

$$s(0) = -4 + 0 + 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 4.$$

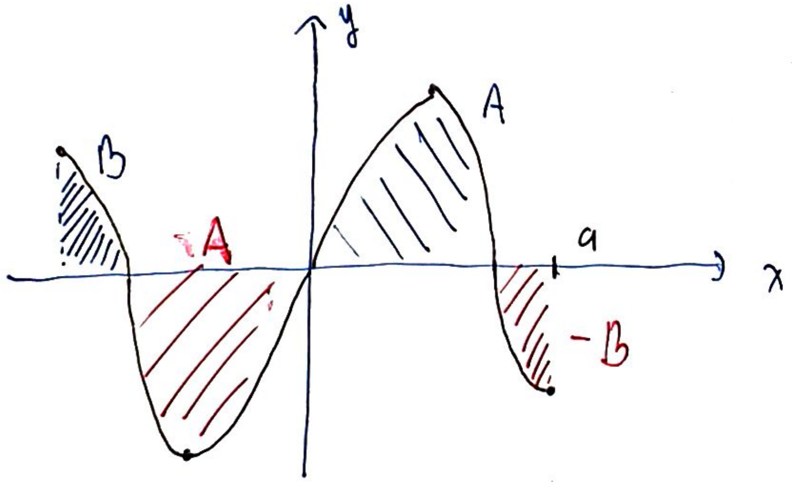
$$s(t) = -4\cos t + 3\sin t - 3t + 4.$$

Función Pares e Impares

$$\int_{-100}^{100} (\sin x + x^3 + \tanh x)\,dx = 0.$$

Tres funciones son impares

$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$(-x)^3 = -x^3.$$




Las áreas se cancelan entre sí.

$$\int_{-a}^{a} f_{impar}(x)\,dx = 0.$$

$$\int_0^1 e^x dx = e-1$$

$$\int_{-a}^{a} f_{par}(x)\,dx = 2\int_0^a f_{par}(x)\,dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 1$$