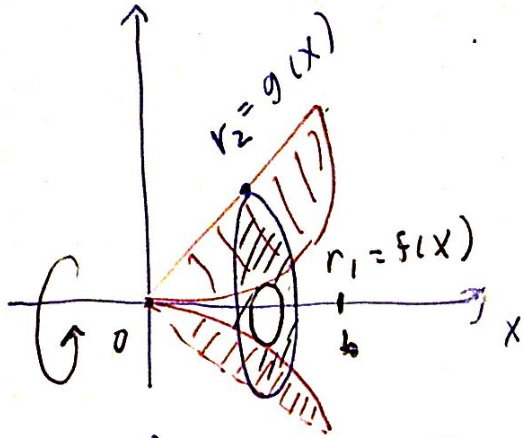
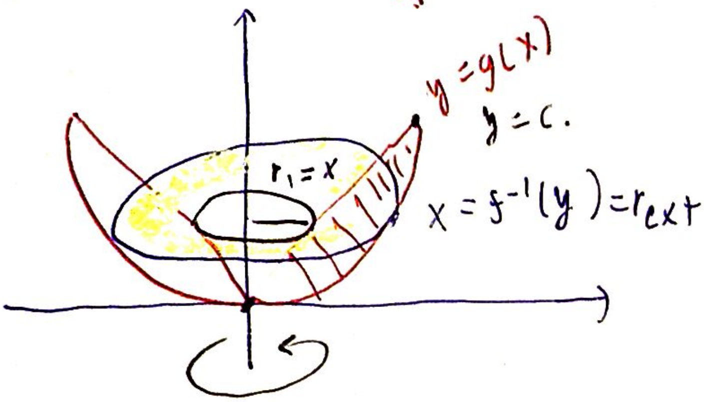
Volúmenes



$$A = \pi r_2^2 - \pi r_1^2$$

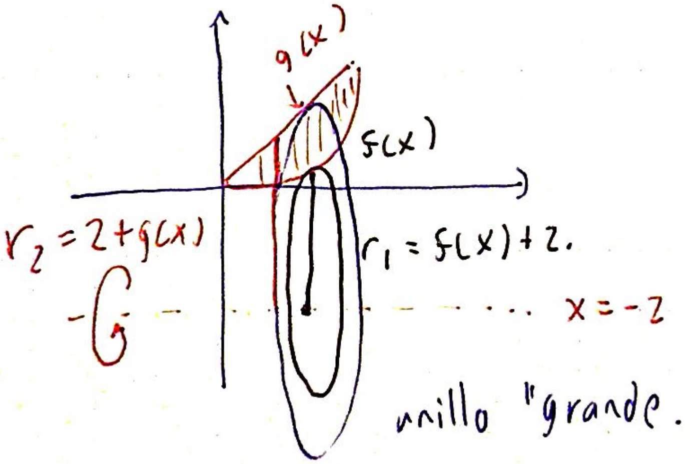
$$V = \pi \int_0^b r_2^2 - r_1^2 \, dx.$$



$$r_1 = g^{-1}(y)$$
$$r_2 = f^{-1}(y).$$

$$V = \pi \int_0^c r_2^2 - r_1^2 \, dy.$$

Rotación respecto a una recta horizontal o vertical (p 96).

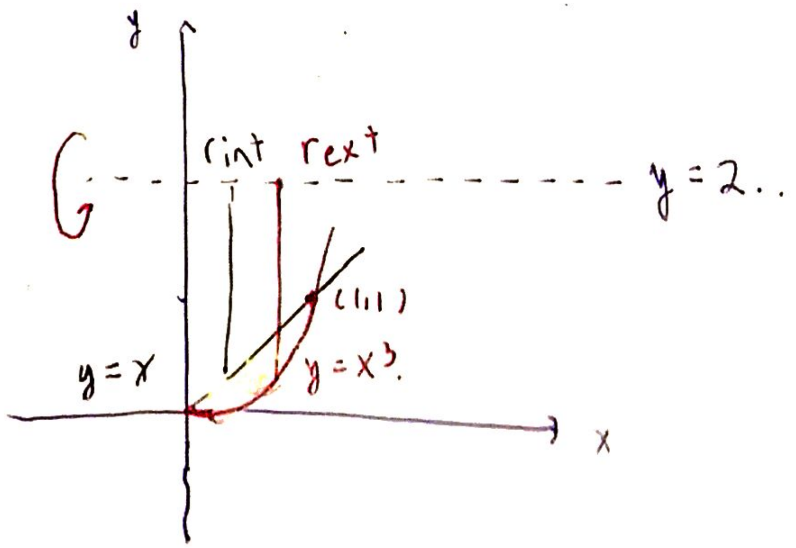


$$A = \pi r_2^2 - \pi r_1^2$$

$$V = \pi \int_0^b (2+g)^2 - (2+f)^2 \, dx.$$

Ejercicio 6: Considere la región entre $f(x)=x$ y $g(x)=x^3$.

a. Plantee la integral para encontrar el volumen del sólido al girar la región respecto a $y=2$. en el 1er cuadrante.



$r_{ext} = 2 - g(x)$
$= 2 - x^3$

$r_{int} = 2 - f(x)$
$= 2 - x$

$f(x) = g(x)$

$x^3 = x \qquad x^3 - x = 0$

$x(x^2-1) = 0$

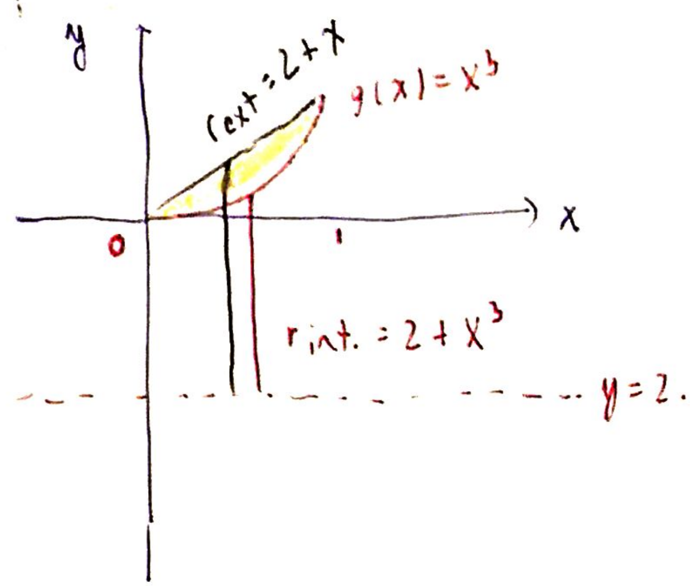
Límites $0 \leq x \leq 1$ $\qquad x = 0, 1$

Área Anillo: $\pi r_{ext}^2 - \pi r_{int}^2$

Volumen: $V = \pi \int_0^1 (2-x^3)^2 - (2-x)^2 \, dx.$

$$V = \pi \int_0^1 (x^6 - 4x^3 - x^2 + 4x) \, dx = \frac{17\pi}{21}$$

b. Encuentre el volumen obtenido al girar la región respecto a $y = -2$.



$r_{ext} = 2 + x$ ✓

$r_{int} = 2 + x^3$ ✓

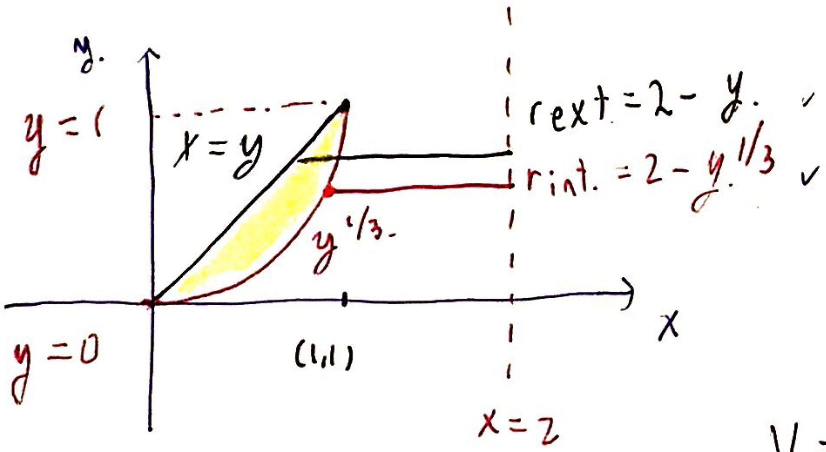
$0 \leq x \leq 1.$

$$V = \pi \int_0^1 r_{ext}^2 - r_{int}^2 \, dx.$$

$$V = \pi \int_0^1 (2+x)^2 - (2+x^3)^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (4x + x^2 - 4x^3 - x^6) \, dx = \frac{32\pi}{21}.$$

c. Plantee la integral del volumen del sólido girando la región alrededor de $x = 2$.

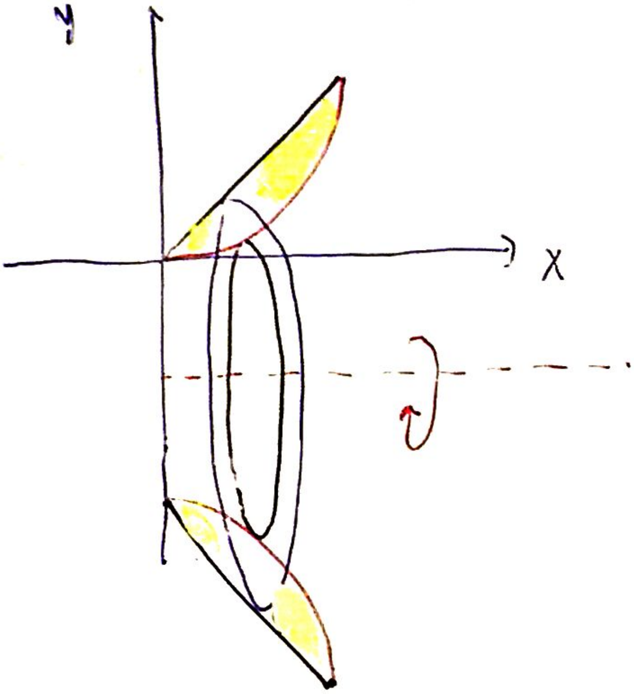


$y = x^3 \Rightarrow x = y^{1/3}.$

Limites $0 \leq y \leq 1.$

$$V = \pi \int_0^1 r_{ext}^2 - r_{int}^2 \, dy.$$

$$V = \pi \int_0^1 (2-y)^2 - (2-y^{1/3})^2 \, dy.$$

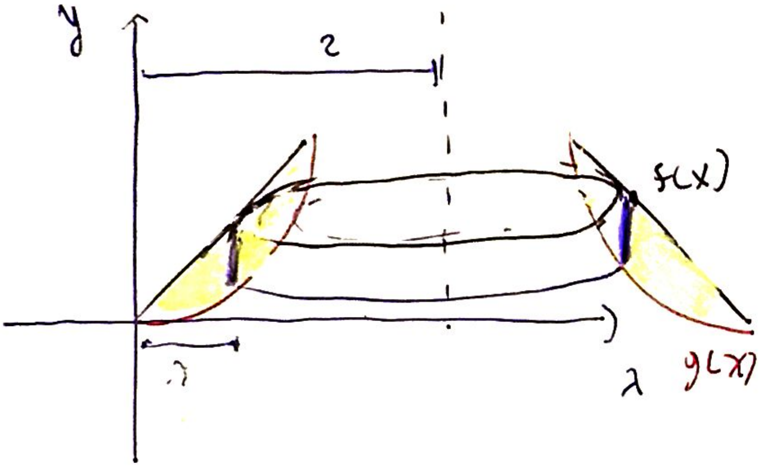


Girar respecto al eje-x o respecto a una recta horizontal.

Es preferible utilizar anillos o discos.

$r_2 = a + f(x)$

$r_1 = a + g(x)$.



anillos si gira respecto a una recta pero hay que encontrar las inversas de f & g.

Encuentre las dimensiones del cilindro.

Altura $h = f(x) - g(x) = x - x^3$. $0 \le x \le 1$.

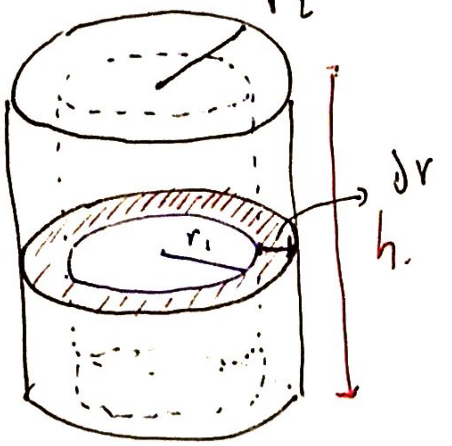
Radio $r = 2 - x$

Volumen: $V = 2\pi \int_0^1 hr\, dx$

Cascarones Cilíndricos.

$V = 2\pi \int_0^1 (x - x^3)(2 - x)\, dx$.

6.3 Volúmenes por medio de cascarones cilíndricos. (lata).
(p 99)



Volumen Cascarón.

Sección transversal Anillo.

$r_{ext} = r_2 \qquad r_{int} = r_1$.

$$V = Ah = \pi(r_2^2 - r_1^2)h.$$

$$V = \pi h(r_2+r_1)(r_2-r_1)$$

espesor de la lata.

$dr = r_2 - r_1$

$r = \frac{1}{2}(r_2+r_1)$

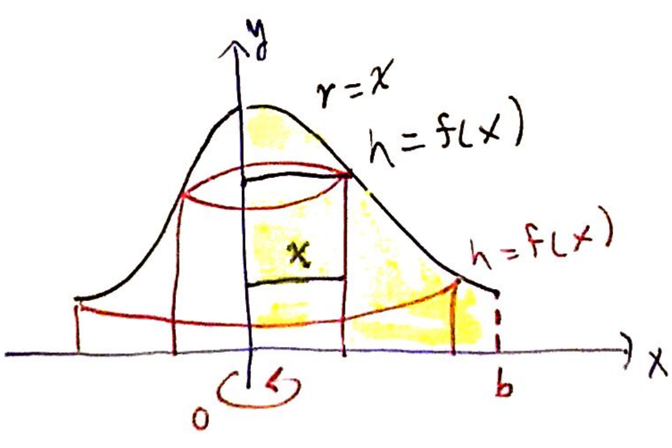
radio promedio r.

$$V = \pi h\, 2r\, dr$$

$$\boxed{V = 2\pi h r\, dr}$$ Volumen Cascarón Cilíndrico/Lata.

Si la región $R: a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)$ se gira respecto al eje-y. el volumen del sólido es:

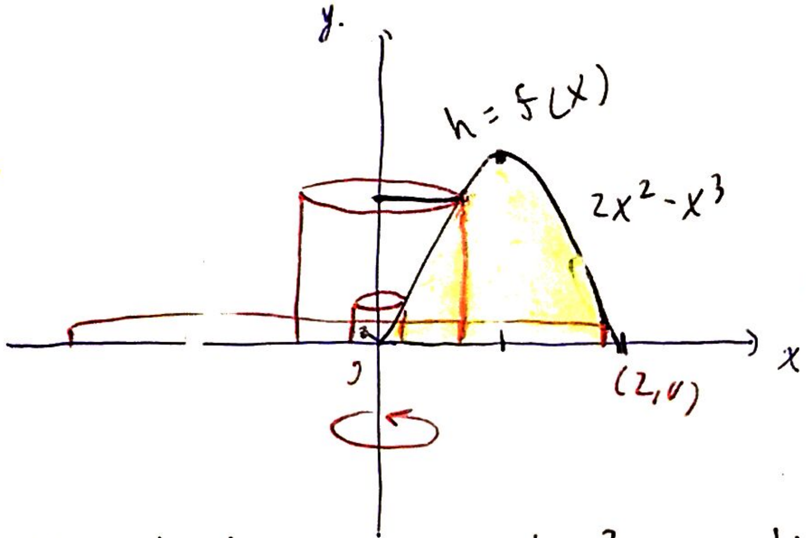
$$V = 2\pi \int_a^b r h\, dr = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$



Evitar calcular la inversa de $f(x)$ y de integrar en el eje-y.

Ejemplo: Encuentre el volumen del sólido al girar la región entre el eje x y la curva $f(x) = 2x^2 - x^3$ respecto al eje-y. (P 100).

Interceptos-x: $2x^2 - x^3 = 0 \qquad x^2(2-x) = 0 \qquad x = 0, 2.$



Dimensiones del cilindro.

Altura $h = 2x^2 - x^3$

radio $r = x$

Límites $0 \leq x \leq 2.$

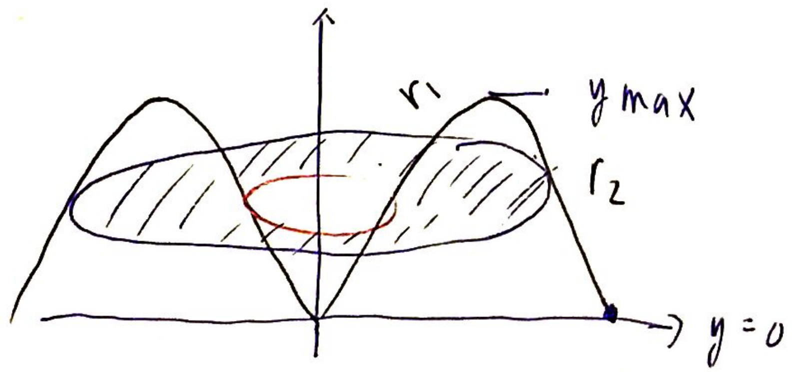
$$V = \int_0^2 2\pi h r \, dr.$$

V cilindro $\quad V = \pi h r^2. \qquad dV = \pi h \, 2r \, dr.$

$$V = \int_0^2 2\pi (2x^2 - x^3) x \, dx = 2\pi \int_0^2 2x^3 - x^4 \, dx$$

$$V = 2\pi \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5} \Big]_0^2 \right) = 2\pi \left(\frac{16}{2} - \frac{32}{5} \right)$$

Es dificil de plantear con arandelas.



$0 \leq y \leq y_{max}.$

$r_1 = f^{-1}_{izq}(y)$

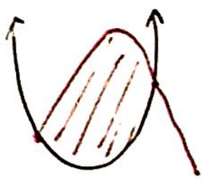
$r_2 = f^{-1}_{der}(y)$

$$V = \pi \int_0^{y_{max}} r_2^2 - r_1^2 \, dy.$$

No se puede encontrar la inversa de $2x^2 - x^3 = y$.

Ejercicio 2: Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región entre $y_1 = x^2$ & $y_2 = 6x - 2x^2$ alrededor del eje-y.

$y_2 = 0$ cuando $x = 0, 3$

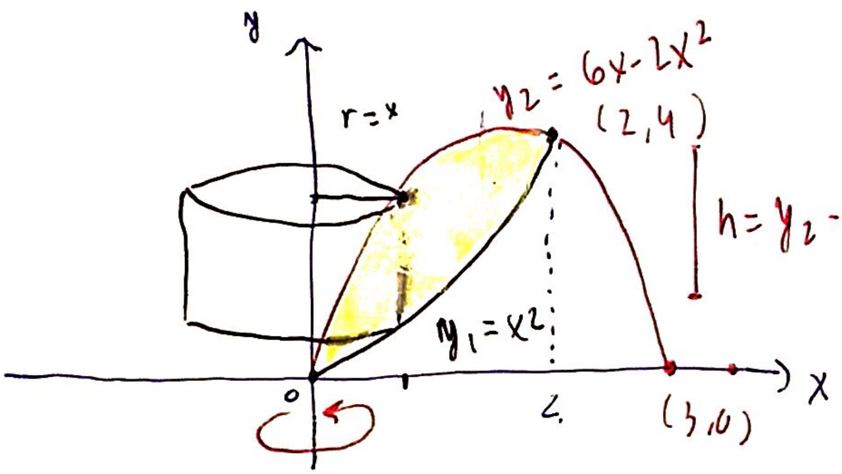


$y_1 = y_2$. $\quad x^2 = 6x - 2x^2$.

$3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0$

$x = 0, 2$.

$y_1(0) = 0 \qquad y_2(2) = 4$.



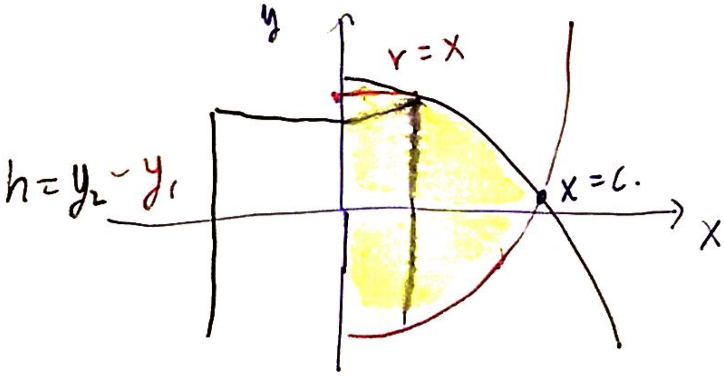
Altura

$h = y_2 - y_1$

$h = 6x - 2x^2 - x^2$.

radio $r = x$.

$0 \leq x \leq 2$.



$$V = \int_0^2 2\pi r h \, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^2 (6x - 3x^2)\, x\, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^2 (6x^2 - 3x^3)\, dx.$$

$$V = 2\pi \left(2x^3 - \frac{3}{4}x^4 \Big]_0^2 \right) = 2\pi (16 - 3 \cdot 4) = 8\pi$$