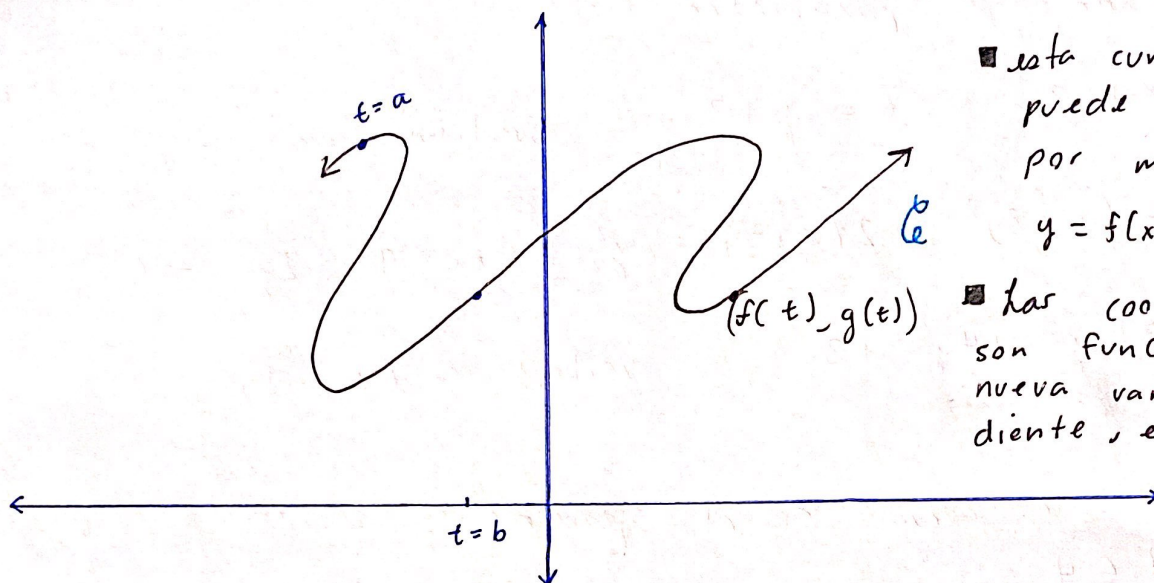


10.1 Ecuaciones Paramétricas

2019-10-15



■ esta curva no se puede representar por medio de $y = f(x)$ ó $x = f(y)$.

■ las coordenadas x & y son funciones de una nueva variable independiente, el parámetro t .

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \text{ Ecuaciones Paramétricas}$$

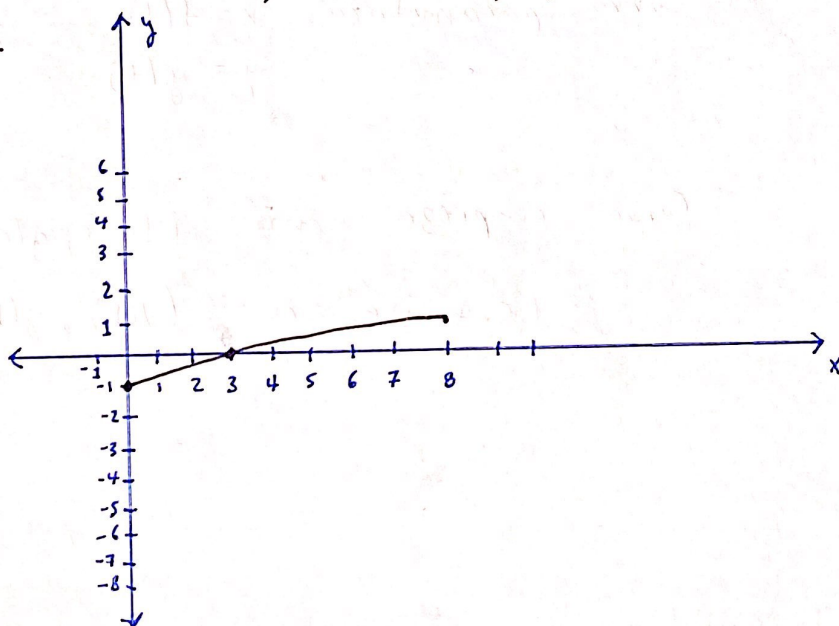
La curva paramétrica se obtiene al trazar cada uno de los puntos utilizando las ecs. paramétricas.

Ej 1: Considere las ecs. paramétricas.

$$x = t^2 - 2t \quad ; \quad y = t - 3 \quad \text{donde } t \in \mathbb{R}$$

a. Use una tabla de valores para bosquejar la curva paramétrica.

t	x	y
-3	15	-6
-2	8	-5
-1	3	-4
0	0	-3
1	-1	-2
2	0	-1
3	3	0
4	8	1



b) Encuentra la ecuación de la curva paramétrica eliminando el parámetro t :

$$y = t - 3 \rightarrow t = y + 3$$

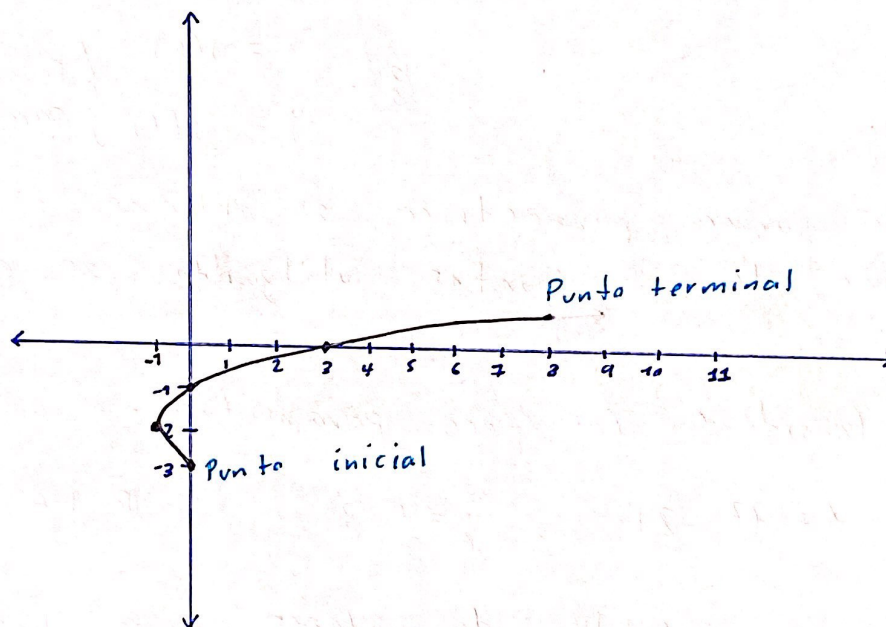
Sustituir en x

$$x = (y + 3)^2 - 2(y + 3) = y^2 + 6y + 9 - 2y - 6$$

$$x = y^2 + 4y + 3$$

vertice en $(-1, -2)$

c) Grafique la curva si el parámetro se restringe a $0 \leq t \leq 4$



Curva paramétrica

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)$$

$$a \leq t \leq b$$

Curva empieza en $(f(a), g(a)) \Rightarrow$ punto inicial

termina en $(f(b), g(b)) \Rightarrow$ punto terminal

Ej 2: ¿Qué curva representan las siguientes ecuaciones paramétricas?

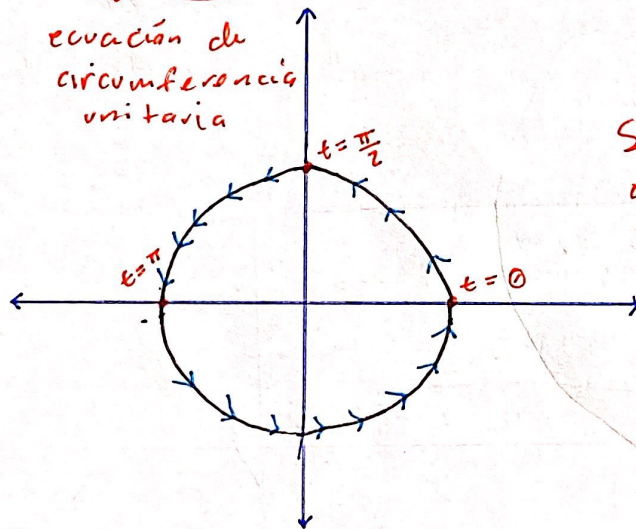
Indique la dirección de la curva utilizando flechas.

a) $x = \cos(t)$ $y = \sin(t)$

$t = \cos^{-1}(x)$ $y = \sin(\cos^{-1}(x))$ Dificil de interpretar

$x^2 + y^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$

ecuación de
circunferencia
unitaria



Sentido antihorario
que empieza en $(1, 0)$



t	0	$\frac{\pi}{2}$	π
x	1	0	-1
y	0	1	0

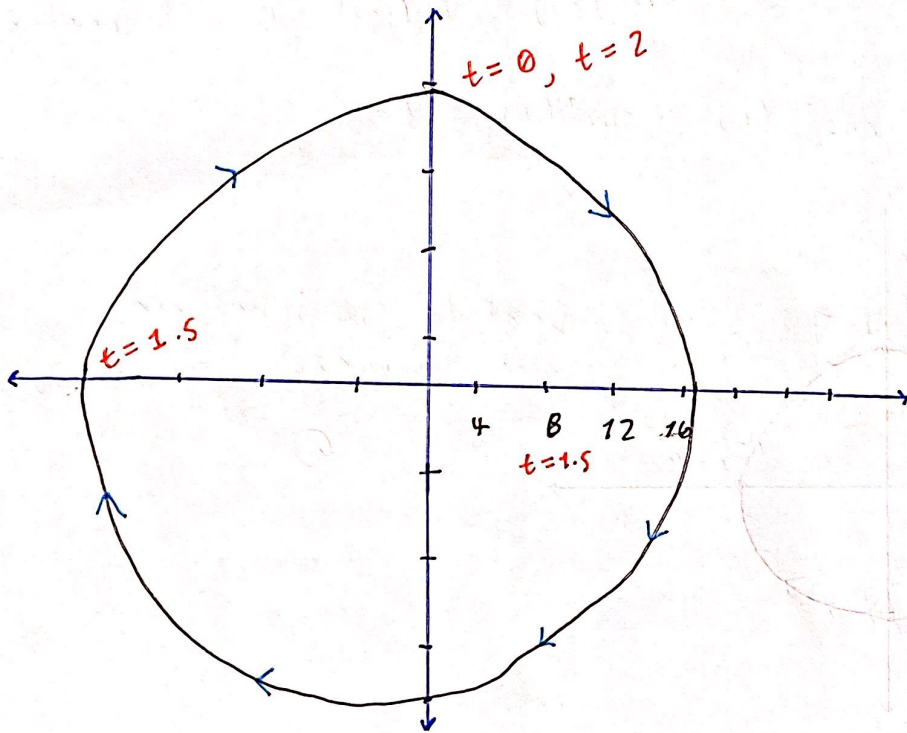
b)

$$x = 4 \sin(\pi t) ; y = 4 \cos(\pi t)$$

• Elimine el parámetro t

$$x^2 + y^2 = 16 \sin^2(\pi t) + 16 \cos^2(\pi t) = 16$$

$$x^2 + y^2 = 16$$



Sentido horario
se da una vuelta
cada $t = 2$

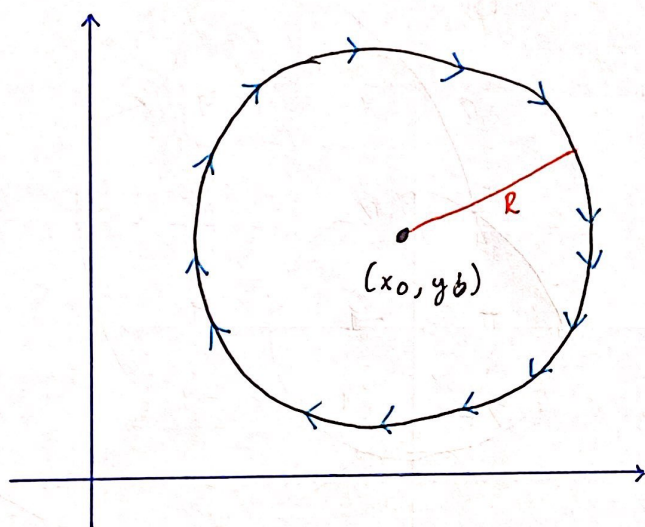
t	0	0.5	1	2
x	0	4	0	0
y	4	0	-4	4

Ejercicio 3: PG 131, encuentre unas ecuaciones paramétricas que representen a una circunferencia con centro (x_0, y_0) y radio R .

! Hay varias Respuestas

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$



$$R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t = R^2$$

$$\underbrace{(x - x_0)^2}_{R^2 \sin^2 t} + \underbrace{(y - y_0)^2}_{R^2 \cos^2 t} = R^2$$

$$x = x_0 + R \sin t$$

$$y = y_0 + R \cos t$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

La parametrización no es única Sentido horario una vuelta

$$x = x_0 \pm R \cos t$$

$$y = y_0 \pm R \sin t$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

Sentido antihorario

$$x = x_0 + R \cos(4t)$$

$$y = y_0 - R \sin(4t)$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

sentido antihorario

4 vueltas a la circunferencia

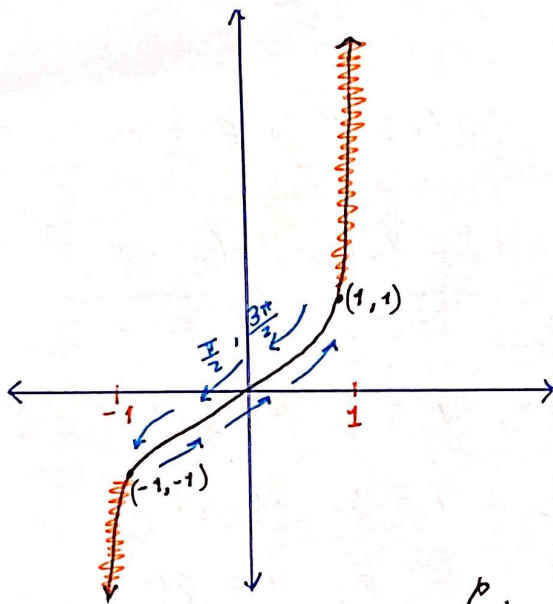
Observación aunque el valor de t parámetro p no esté restringido la parametrización puede llegar a sólo un segmento de la curva original!

Ej 4: trace la curva paramétrica

$$x = \cos \theta \quad ; \quad y = \cos^3 \theta \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

Eliminar el parámetro t $\cos \theta = x$

$$y = \cos^3 \theta = x^3$$



θ	x	y
0	1	1
$\frac{\pi}{2}$	0	0
π	-1	-1
2π	1	1

$$C: y = x^3, \quad -1 \leq x \leq 1$$

Curvas paramétricas comunes P. 132:

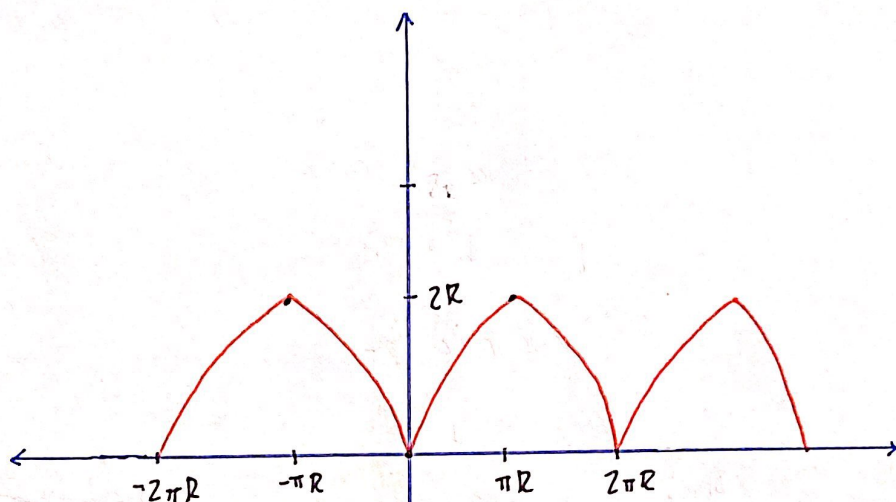
La cicloide



$$x = R(\theta - \sin \theta)$$

$$y = R(1 - \cos \theta)$$

θ	x	y
-2π	$-2\pi R$	0
$-\pi$	$-\pi R$	$2R$
0	0	0
π	πR	$2R$
2π	$2\pi R$	0



$$y = R - R \cos \theta$$

$$\frac{y - R}{-R} = \cos \theta$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(1 - \frac{y}{R} \right)$$

$$x = R \left(\cos^{-1} \left(1 - \frac{y}{R} \right) - \sin \left(\cos^{-1} \left(1 - \frac{y}{R} \right) \right) \right)$$

ecuación cartesiana

Circunferencia de Radio R & centro $(0,0)$.

Ec. Cartesiana $x^2 + y^2 = R^2$

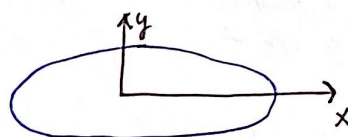
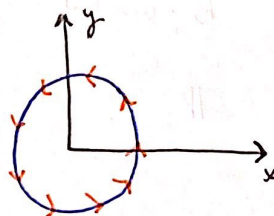
$$x = R \cos \theta$$

$$y = R \sin \theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Elipse con centro $(0,0)$

Ec. Cartesiana:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{a^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 \theta}{b^2} = 1$$

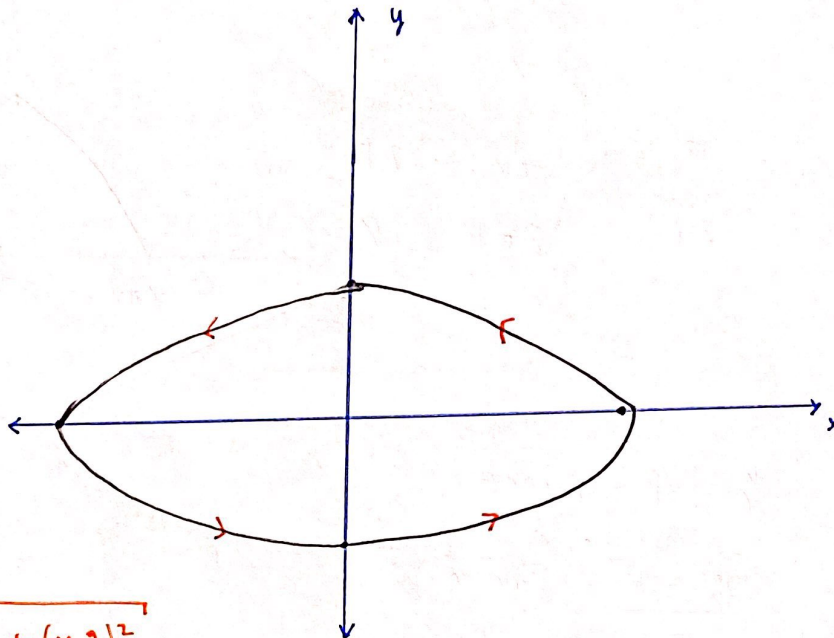
$$x = a \cdot \cos \theta$$

$$y = b \cdot \sin \theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$a = 4$$

$$b = 2$$



$$L = \int \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$$

Longitud de arco

Hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

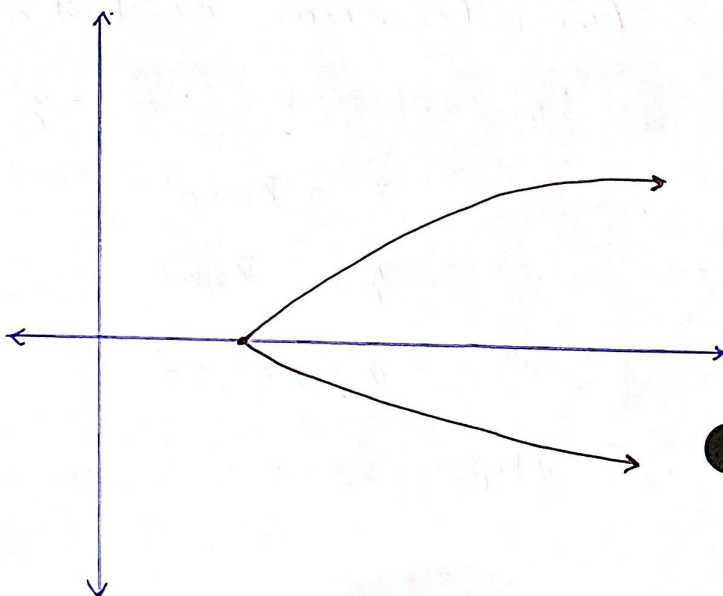
Identidad hipérbolica

$$x = a \cdot \cosh t$$

$$y = b \cdot \sinh t$$

$$t \in \mathbb{R}$$

t	x	y
-2	++	--
-1	+	-
0	a	0
1	+	++
2	++	++



¿Cómo parametrizar $y = f(x)$?

$$x = t$$

$$y = f(t)$$

$$t \in \mathbb{D}$$

x es el parámetro t .

