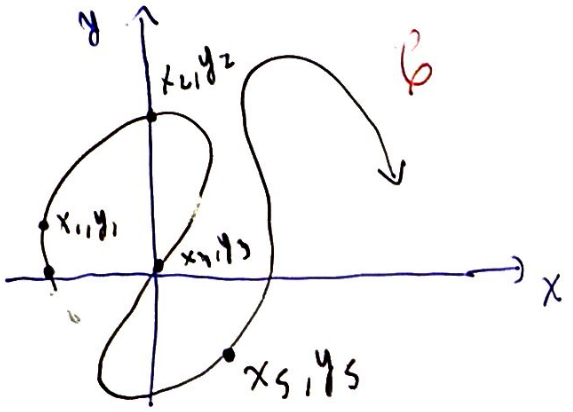
10.1 Ecuaciones Paramétricas

Describen el comportamiento de una partícula que se mueve a lo largo de una curva $\mathcal{C}$ en 2-D.



curva $\mathcal{C}$ no se puede representar por medio de $x = f(y)$

ó $y = g(x)$

Los puntos sobre la curva paramétrica $\mathcal{C}$ se pueden representar por medio de las ecs. paramétricas

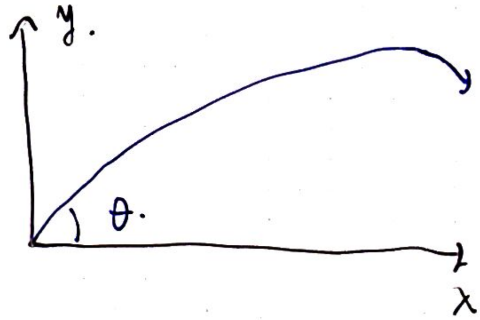
$$\left.\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{aligned}\right\} \text{Ecs. Paramétricas}$$

variable independiente t, conocida como un parámetro.

Ejercicio 1: $x = 4t - t^2$, $y = t + 2$.

Movimiento Parabólico en 2-D.

$$x = V_0(\cos\theta)t$$
$$y = V_0(\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2.$$



$V_0 = \sqrt{2}\ 90$ $\theta = \pi/4$ $g = 10$

$$x = \sqrt{2}\,\frac{90}{\sqrt{2}}\,t = 90t.$$

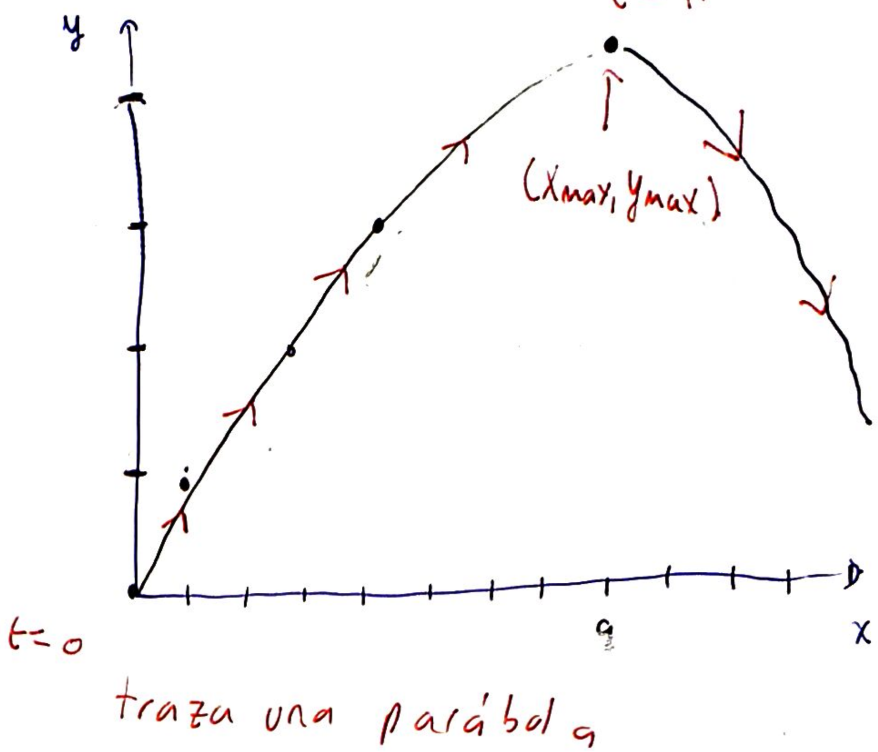
$$y = \frac{90\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,t - 5t^2.$$

a. Use una tabla de valores para bosquejar la curva paramétrica

$x = 90t$

$y = 90t - 5t^2 = 5t(18-t)$

t	x	y
0	0	0
1	90	85
2	180	160
3	270	225
4	360	320
9	810	405
13		325
18	1620	0



b. Elimine el parámetro para encontrar la ec. de la curva paramétrica.

$x = 90t \Rightarrow t = \frac{x}{90}$ sustituya en y:

$y = 90t - 5t^2$

$y = 90\left(\frac{x}{90}\right) - 5\left(\frac{x}{90}\right)^2 = x - \frac{5x^2}{90^2}$

Altura máxima cuando $y' = 1 - \frac{10x}{90 \cdot 90} = 0$

$x = \frac{90}{10} 90 = 9 \cdot 90 = 810$

$10x = 90 \cdot 90$

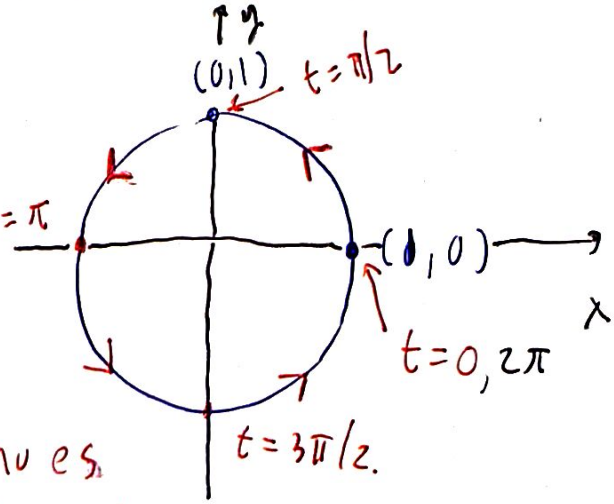
$x = 810$

Ejercicio 2: ¿Qué curva representan las sigs. ecuaciones paramétricas? p. 130.

a. $x = \cos t$, $y = \sin t$., $0 \leq t \leq 2\pi$

Elimine el parámetro t. Como $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$



Ec. Circunferencia de radio 1 $\quad x^2 + y^2 = 1$

t	0	π/2	π	3π/2	2π
x	1	0	-1	0	1
y	0	1	0	-1	0

no es función

Curva Paramétrica, tiene un sentido antihorario, se le da una vuelta al círculo.

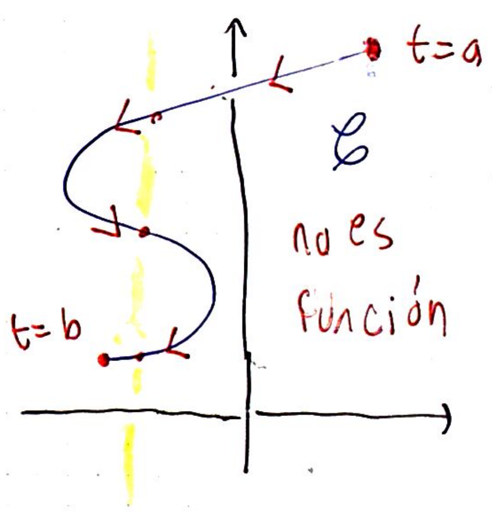
Una curva paramétrica $\mathscr{C}: x = f(t),\ y = g(t)$
$a \leq t \leq b$.

tiene.

i un punto inicial en $t = a$

ii. un punto terminal en $t = b$.

iii orientación o sentido
(el cual se indica con flechas)



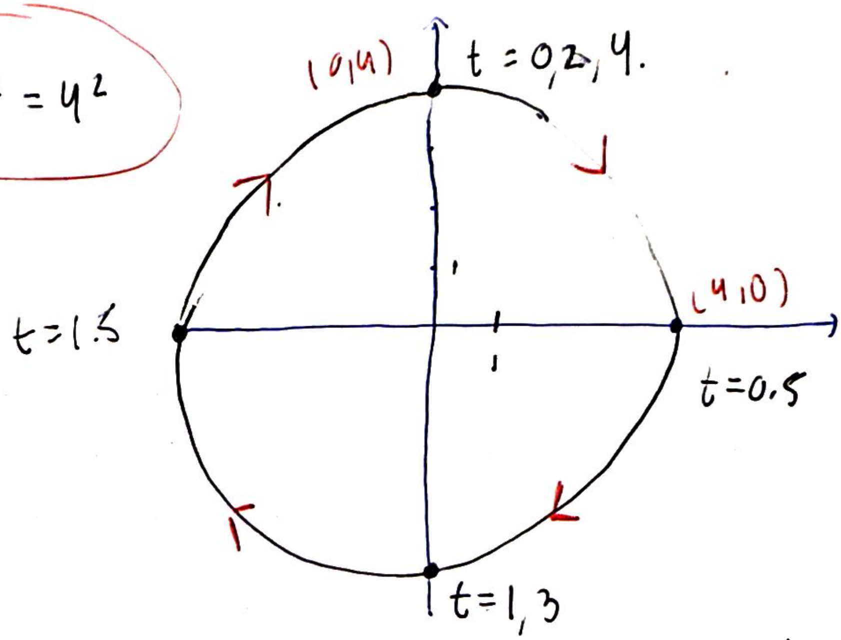
b. $x = 4\sin \pi t$, $y = 4\cos \pi t$, $0 \le t \le 4$.

$$x^2 + y^2 = 16\sin^2 \pi t + 16\cos^2 \pi t = 16.$$

Circunferencia
Radio 4

$$x^2 + y^2 = 4^2$$

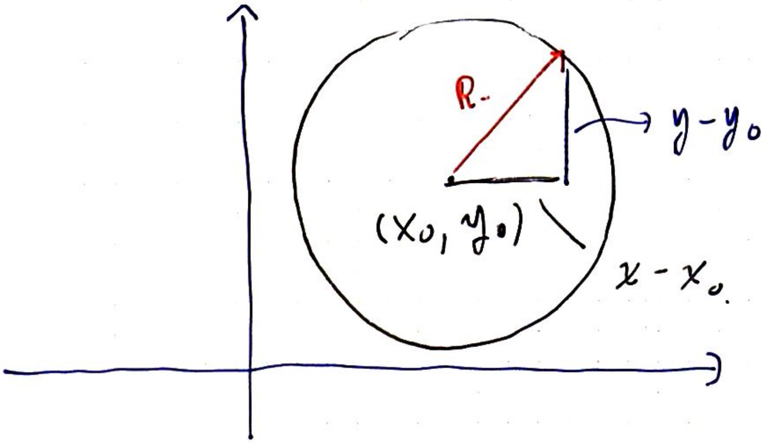
t	x	y	
0	0	4	
0.5	4	0	
1	0	-4	
1.5	-4	0	
2	4	0	1 vuelta
3	0	-4	
4	4	0	2 vueltas.



$\frac{2\pi}{\pi} = 2$. 1 vuelta cada 2 s.

sentido horario, 2 vueltas a la circunferencia

Ejercicio 3: Encuentre unas ecuaciones paramétricas que representen a una circunferencia con centro (x_0, y_0) y radio R.



Ec. Cartesiana

$$(\underbrace{x - x_0}_{R\cos\theta})^2 + (\underbrace{y - y_0}_{R\sin\theta})^2 = R^2.$$

$$\sin^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta = R^2.$$

$x - x_0 = R\cos\theta.$ $\Rightarrow$ $x = x_0 + R\cos\theta$

$y - y_0 = R\sin\theta.$ $\quad y = y_0 + R\sin\theta$

Anti horario $0 \leq \theta \leq 2\pi.$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

$-R\sin\theta \qquad R\cos\theta.$

Otra parametrización

$$x = x_0 - R\sin\theta$$
$$y = x_0 + R\cos\theta.$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

$R\cos(8\theta) \qquad R\sin(8\theta)$

Otra más.

$$x = x_0 + R\cos(8\theta)$$
$$y = y_0 + R\sin(8\theta)$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Para que sea única, se necesitan más condiciones (horario/antihorario, vueltas, punto inicial y terminal).

Ejercicio 4: Trace la curva con ecs. paramétricas

$$x = \cos\theta \qquad y = \cos^4\theta$$

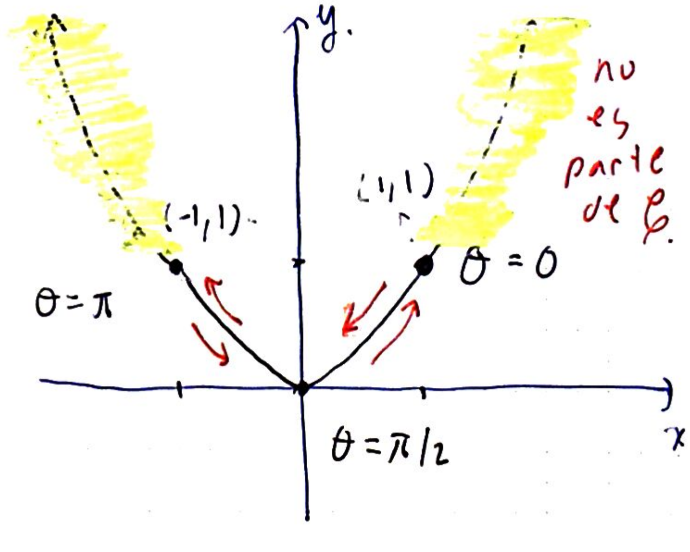
Indique con flechas la dirección de la curva.

Elimine el parámetro θ.

$\cos\theta = x, \quad y = (\cos\theta)^4$

$$y = x^4$$

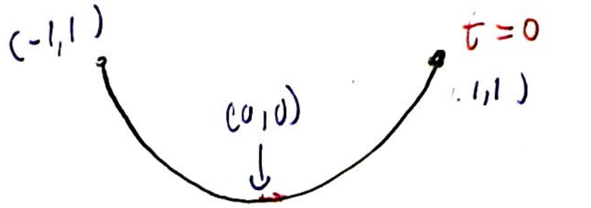
θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	1	0	-1	0	1
y	1	0	1	0	1



curva paramétrica $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

$y = x^4, \quad -1 \leq x \leq 1$

$x = \cos\theta \qquad y = \cos^4\theta.$



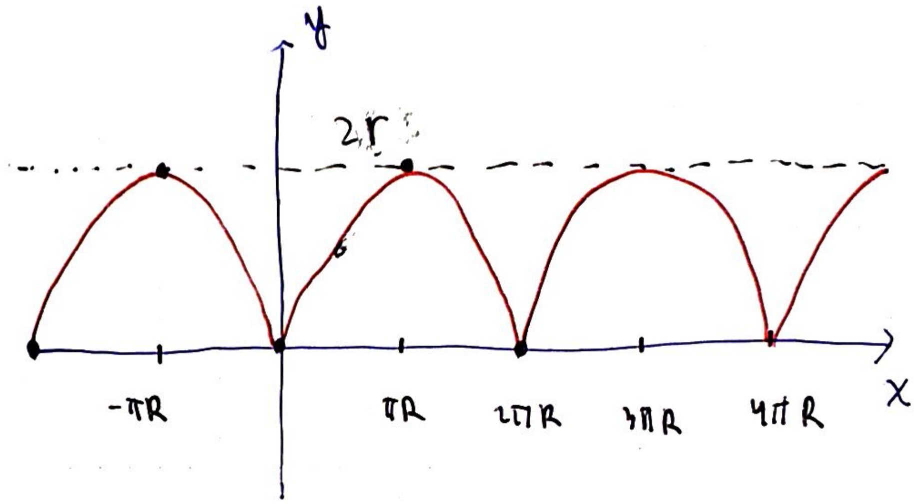
sube y baja la rampa

La Cicloide: es dificil $y = f(x)$

$x = r(\theta - \sin\theta)$

$y = r(1 - \cos\theta)$

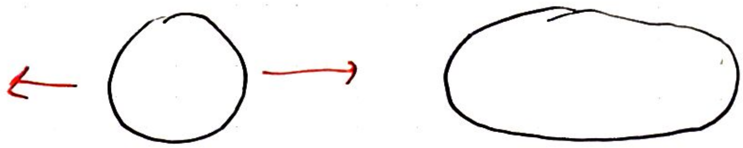
θ	x	y.
-2π	$-2\pi r$	0
$-\pi$	$-\pi r$	$2r$
0	0	0
$\pi/2$.	$r(\frac{\pi}{2} - 1)$	r
π	πr	$2r$
2π	$2\pi r$	0



$\sin(-2\pi) = -\sin(2\pi) \qquad \cos(n\pi) = \pm 1$

$\sin(n\pi) = 0.$

Elipse.



Ec. Cartesiana. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a \neq b.$

$x = a \cdot \cos\theta. \qquad y = b \cdot \sin\theta.$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{b^2}{b^2}\sin^2\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

$x = a\cdot\cos\theta$

$y = b\cdot\sin\theta.$

$0 \le \theta \le 2\pi$

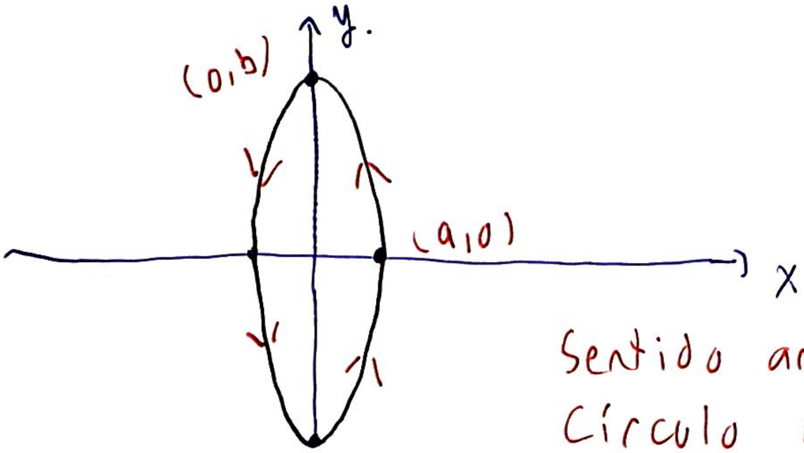
$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

$a = 1$

$b = 3$

$x = 0: \quad y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3. \quad (0, \pm 3)$

$y = 0: \quad x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \quad (\pm 1, 0)$



Sentido antihorario

Círculo Achatado.

$$\underbrace{\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}}_{\text{Jueves 10.2 derivadas}} \qquad \underbrace{L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, d\theta.}_{\text{Longitud de Arco.}}$$