1.4 Fracciones Parciales (P 64).

Función Racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

P y Q son polinomios de grado m y n.

Factorice $Q(x) = (x+a)(x+b)(x+c)$

$$\underbrace{\frac{P(x)}{(x+a)(x+b)(x+c)}}_{\text{No se puede integrar}} = \underbrace{\frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c}}_{\text{si se pueden}}.$$

A, B y C son constantes.

$$\int \frac{1}{x+x_0}\,dx = \ln|x+x_0| + C.$$

simplifique la función racional en fracciones más simples (fracciones parciales) y luego utilizar reglas de integración conocidas.

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

1. Objetivo: Encuentre los coeficientes $A, B, \ldots C$.
   Adicional
2. Condición: grado $P(x)$ < grado $Q(x)$

$$\frac{6}{x^2-9} \qquad \frac{9z}{2z^2+7z-4}, \qquad \frac{x^2+1}{x^4+x^2}$$

Utilice la división larga si $P(x)$ tiene un grado igual o mayor a $Q(x)$.

$$\frac{x^2+1}{x^2-9}, \ldots \quad \frac{x^3+x^2+1}{x^2+4}, \ldots;$$

Polinomio: $(x-3)(x-2) = x^2-5x+6$. Factores Lineal

x^2+4 Factores Cuadráticos.

$(x-3)^2(x^2+4)^2$ Factores Repetidos.

Caso 1: Factores Lineales Distintos.

Caso 2: Factores Lineales Repetidos.

Caso 3: Factores Cuadráticos Distintos

Caso 4: Factores Cuadráticos Repetidos.

$x^3-x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$.

Ejercicio 1: $\displaystyle\int \frac{9z}{2z^2+7z-4}\,dz$. $u \neq 2z^2+7z-4$.

p. 65

Factorice el denominador. $2z^2+7z-4. = (2z-1)(z+4)$

$2z \quad -1$

$z \quad 4$

Los ceros del denominador.

$2z-1=0$

$z+4=0$

$$\boxed{\begin{array}{l} z = 1/2. \\ z = -4 \end{array}}$$

$$\frac{9z}{(2z-1)(z+4)} = \frac{A}{2z-1} + \frac{B}{z+4} = \frac{A(z+4)+B(2z-1)}{(2z-1)(z+4)}.$$

Encuentre A y B. multiplique por $(2z-1)(z+4)$

$$A(z+4) + B(2z-1) = 9z + 0.$$

$$Az + 4A + 2Bz - B = 9z + 0.$$

Igualando términos del mismo grado.

$$z: (A+2B) = 9 \Rightarrow A + 2\cdot 4A = 9A = 9 \Rightarrow A = 1$$
$$1: 4A - B = 0 \Rightarrow B = 4A \Rightarrow B = 4.$$

Atajo: evalúe la ecuación en los valores de z donde el denominador se hace cero. -4 y $1/2$

$$A(z+4) + B(2z-1) = 9z.$$

$$z=-4: \quad 0 - 9B = -36. \Rightarrow B = 4.$$
$$z = 1/2: \quad 4.5A + 0 = 4.5 \Rightarrow A = 1$$

finalmente, integre.

$$\int \frac{9z}{(2z-1)(z+4)}\,dz = \int \frac{dz}{2z-1} + \int \frac{4\,dz}{z+4}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\ln|2z-1| + 4\ln|z+4| + C.}$$

Ejercicio 2: Evalúe las sigs. integrales (P 65)

a) $\displaystyle\int \frac{5x+13}{x^2+5x+6}\,dx$ $x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$

$x=-3,-2$ } números clave.

$$\frac{5x+13}{\underbrace{x^2+5x+6}_{(x+3)(x+2)}} \overset{?}{=} \frac{A}{(x+3)}+\frac{B}{(x+2)}$$

Factores lineales distintos.

Multiplique por $(x+3)(x+2)$

$$5x+13 = A(x+2) + B(x+3)$$

$x=-3$: $\quad -2 = -A + 0 \Rightarrow A=2.$

$x=-2$: $\quad 3 = 0 + B \Rightarrow B=3.$

$$\int \frac{5x+13}{(x+2)(x+3)}\,dx = \int \frac{2}{x+3}\,dx + 3\int \frac{dx}{x+2}.$$

$$= 2\ln|x+3| + 3\ln|x+2| + C.$$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx$ $x^3-x = x(x^2-1)$

$= x(x+1)(x-1)$

3 factores lineales distintos, 3 fracciones parciales.

$$\frac{x^2+2x-1}{x^3-x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}$$

Multiplique por $x^3 - x = x(x^2-1)$

$$x^2+2x-1 = A(x^2-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)$$

El denominador tiene ceros en $x = 0, 1, -1$.

$x=0$: $\quad -1 = -A + 0 + 0 \Rightarrow A = 1$

$x=1$: $\quad 2 = 0 + 0 + 2C \Rightarrow C = 1$

$x=-1$: $\quad -2 = 0 - B(-2) + 0 \Rightarrow B = \frac{-2}{2} = -1$

$$\int \frac{x^2+2x-1}{x(x-1)(x+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x-1}$$

$$= \ln|x| - \ln|x+1| + \ln|x-1| + C.$$

Caso 2: Factores Lineales Repetidos

$$\frac{P(x)}{(x+b)^n} = \frac{A_1}{(x+b)} + \frac{A_2}{(x+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x+b)^n}$$

n factores cada uno con su respectiva potencia

el valor de los n coeficientes $A_1, \dots, A_n$.

Ejercicio 5: Evalúe.

Repetido 2 veces.

a. $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x+3)^2}\,dx \qquad \frac{x+2}{(x+3)^2} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+3)^2}$

Multiplique por $(x+3)^2$.

$$(x+2) = A(x+3) + B.$$

Agrupe términos.

$$x + 2 = Ax + 3A + B$$

$$\int u^{-2}\,du = \frac{u^{-1}}{-1}$$

$$x = Ax \Rightarrow A = x/x = 1$$
$$2 = 3A + B. \Rightarrow 2 = 3 + B \Rightarrow B = -1.$$

$$\int \frac{x+2}{(x+3)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)}\,dx - 1\int (x+3)^{-2}\,dx$$

$$= \ln|x+3| - \frac{1}{-1}(x+3)^{-1} + C.$$

$$= \ln|x+3| + \frac{1}{(x+3)} + C.$$