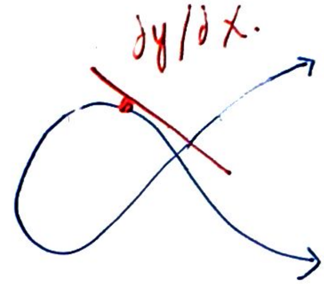
10.2 Cálculo con Ecuaciones Paramétricas

1. Derivadas y Rectas Tangentes.



curva $\mathcal{C}$: $x = f(t)$ ✓ $a \leq t \leq b$.
$y = g(t)$ ✓

A veces no se puede eliminar el parámetro t.
para encontrar y en función de x.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \checkmark$$

$y \to x \to t$. en función de t.

Pendiente recta tangente en $t = t_0$. $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_0}$.

Ec. Recta Tangente $y = \underline{\underline{y_1}} + m(x - \underline{\underline{x_1}})$

$$y = y(t_0) + m(x - x(t_0))$$

Ejercicio 1: p.135 Encuentre la ec. de la recta tangente a la curva $\mathcal{C}$: $x = f(t)$, $y = g(t)$ en el valor $t=a$

a. $x = 1 + 2t$, $y = 2 - 2t^3$. en $t = 1$.

Solución 1: $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-6t^2}{2} = -3t^2$. ✓

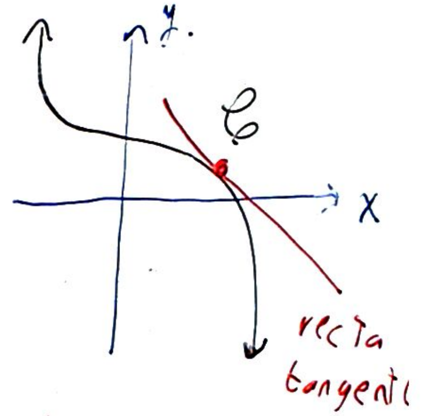
Pendiente : $m = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1} = -3(1)^2 = -3.$ ✓

evalúe en $t=1$

Solución 2: Elimine el parámetro t.

$2t = x-1 \Rightarrow t = \frac{1}{2}(x-1)$ sustituya en y:

$t^3 = \frac{1}{8}(x-1)^3 \Rightarrow y = 2 - \frac{2}{8}(x-1)^3.$



$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3}{4}(x-1)^2.$ $\quad x(1) = 1+2 = 3$

$m = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=3} = -\dfrac{3}{4}\,2^2 = -3$ misma respuesta.

Recta Tangente: $x(1) = 1+2 = 3$
$y(1) = 2-2 = 0$

Ec. Recta Tangente: $y = 0 - 3(x-3) = \underline{-3x+9}$

a. $x = 1 + 2t^{1/2}$ $\quad y = e^{t^2}$ en $t = 1$.

Derivada: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{2te^{t^2}}{t^{-1/2}} = 2t\,t^{1/2}e^{t^2}$

$$\frac{dy}{dx} = 2t^{3/2}e^{t^2}.$$

Pendiente: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1} = 2 \cdot 1^{3/2} e^{1^2} = \underline{2e}$ *

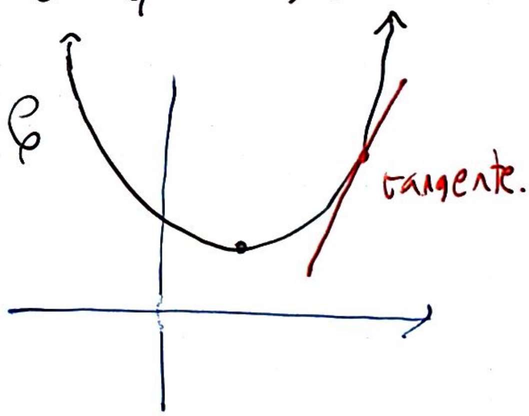
Coordenadas: $x(1) = 1 + 2\sqrt{1} = 3 \qquad y(1) = e^1 = e.$

Ec. Recta Tangente: $\quad y = e + 2e(x-3) = \boxed{-5e + 2ex}$

* Elimine el parámetro t.

$x - 1 = 2t^{1/2}. \qquad (x-1)^2 = 4t \Rightarrow t = \frac{1}{4}(x-1)^2.$

Sustituya en y: $\quad y = e^{\frac{1}{16}(x-1)^4}$



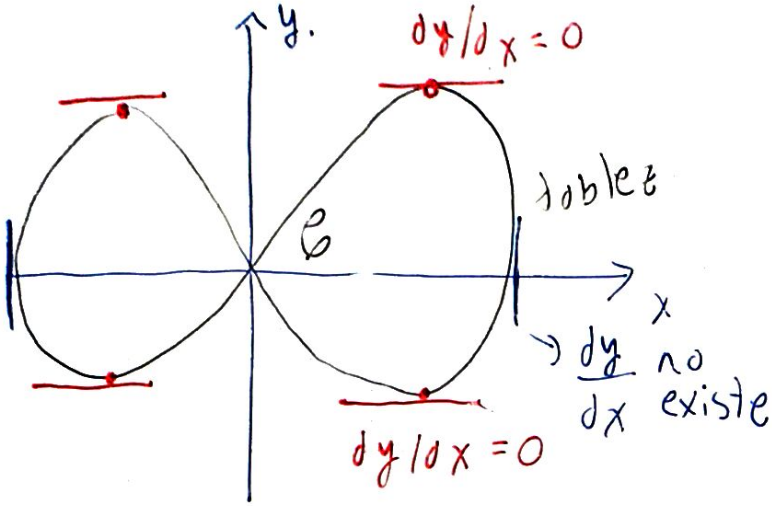
$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{1}{16}(x-1)^4} \cdot \frac{1}{4}(x-1)^3 \cdot 1$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} = e^{\frac{1}{16}2^4} \cdot \frac{1}{4}2^3$$

$$= e^{16/16} \cdot \frac{8}{4} = \underline{2e} \; *$$

misma respuesta

Tangentes horizontales y verticales



Tangente horizontal cuando $\frac{dy}{dx} = 0$

Tangente vertical cuando $\frac{dy}{dx}$ no existe.

$\mathcal{C}: x = f(t), \; y = g(t)$ $\qquad \frac{a}{b} = 0 \Rightarrow a = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = 0 \Rightarrow$$ tangente horizontal cuando $y'(t) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$ se indefine $\Rightarrow$ tangente vertical cuando $x'(t) = 0$.

$\frac{1}{0}$ indefinido.

En Resumen, dada una curva $\mathcal{C}$ hay.

Tangentes Horizontales $\quad y'(t) = 0 \;\; \& \;\; x'(t) \neq 0$.

Tangentes Verticales. $\quad x'(t) = 0 \;\; \& \;\; y'(t) \neq 0$.

Indeterminado: cuando $x'(t) = y'(t) = 0$.

$$\lim_{t \to t_0} \frac{x'(t)}{y'(t)} \quad \frac{0}{0}$$ use la Regla de L'Hospital para encontrar la derivada.

Ejercicio 2: La curva $\mathcal{C}$ es definida por

$$x = t^3 - 3t \qquad y = t^3 - 3t^2$$

a. Encuentre dy/dx. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3t^2 - 6t}{3t^2 - 3}$. $\qquad \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

b. ¿En cuáles puntos (x, y) la tangente es horizontal a la curva $\mathcal{C}$?

Hay Tangentes horizontales cuando $y'(t) = 0$.

$$3t^2 - 6t = 3t(t-2) = 0 \Rightarrow t = 0, 2. \checkmark$$

$$x'(0) = 0 - 3 \neq 0 \qquad x'(2) = 12 - 3 = 9 \neq 0.$$

Puntos: $x(0) = 0 - 0 = 0 \qquad y(0) = 0 - 0 = 0 \qquad (0,0)$

$x(2) = 8 - 6 = 2 \qquad y(2) = 8 - 12 = -4 \qquad (2,-4)$

Tangentes horizontales en $(0,0)$ y $(2,-4)$.

c. ¿Dónde hay tangentes verticales?

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3t^2 - 6t}{3(t^2-1)}$ se indefine en $t = \pm 1$

Puntos: $x(1) = 1 - 3 = -2 \qquad y(1) = 1 - 3 = -2.$

$x(-1) = -1 + 3 = 2 \qquad y(-1) = -1 - 3 = -4$

Tangentes verticales en $(-2,-2)$ y $(-2,-4)$

J. Bosqueje la curva utilizando sólo las tangentes horizontales y verticales.

Tangentes Horizontales: $(0,0)$ y $(2,-4)$

Verticales: $(-2,-2)$ y $(2,-4)$

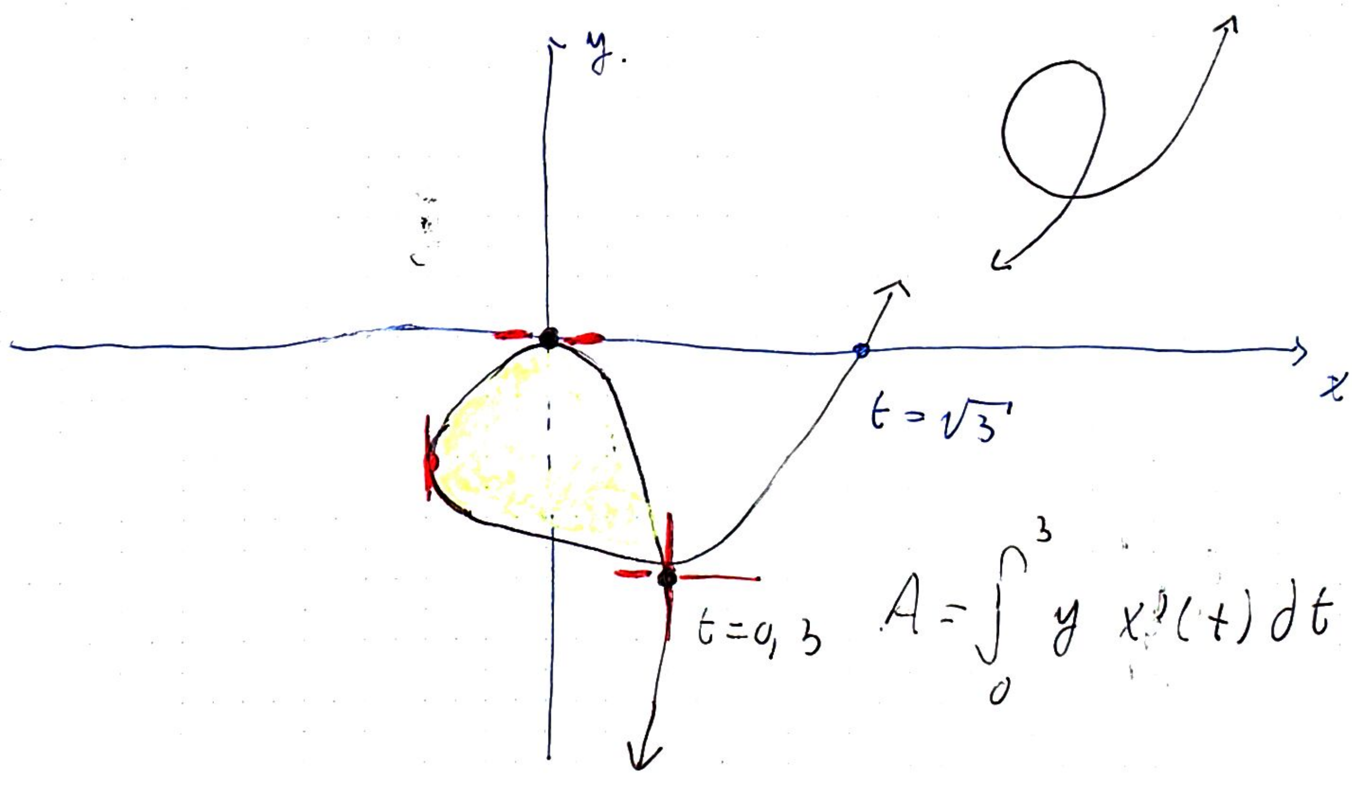
Luis $x=0$ cuando $t(t^2-3)=0$ $\quad t=0$, $t=\pm\sqrt{3}$

corte el eje-y en tres puntos

$y=0 \quad t^3-3t^2=t^2(t-3)=0 \quad t=0$, $t=3$.

$y(3)=27-27=0$

Se Pasa por el origen dos veces.

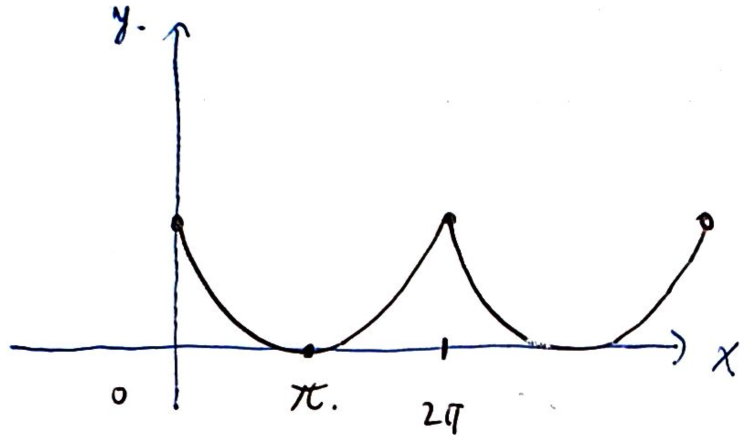


$$A=\int_0^3 y\,x'(t)\,dt$$

Ejercicio 3: Considere un arco del cicloide "invertido"

$x = r(\theta + \cos\theta)$ $0 \leq \theta \leq 2\pi.$

$y = r(1 + \sin\theta)$



a. Encuentre la derivada., r es constante.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{r(\cos\theta)}{r(1-\sin\theta)} = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}.$$

b. Encuentre la ec. de la recta tangente en $\theta = \pi/6$

Pendiente: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/6} = \frac{\cos \pi/6}{1-\sin\pi/6} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}.$

Coordenadas: $x(\pi/6) = r\left(\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\right) = r\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$y(\pi/6) = r(1 + \sin\frac{\pi}{6}) = 3r/2.$

Ec. Recta tangente: $y = \frac{3r}{2} + \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}r - \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$

c. Encuentre dónde hay tangentes horizontales y verticales.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

Horizontales: $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}, \frac{3\pi}{2}.$

es cero.

Verticales: $1-\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 1 \quad \underline{\underline{\theta = \frac{\pi}{2}.}}$

no existe

Como $r'(3\pi/2) \neq 0$, hay tangente horizontal cuando $\theta = 3\pi/2.$

En $x'(\pi/2) = y'(\pi/2) = 0$, indeterminada.

$$\lim_{\theta\to\pi/2} \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \lim_{\theta\to\pi/2} \frac{-\sin\theta}{-\cos\theta.} = \lim_{\theta\to\pi/2} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \infty.$$

$0/0.$ $\quad$ $-1/0$. no existe

Hay una tangente vertical en $\theta = \pi/2.$

coordenadas $x = r(\theta + \cos\theta)$, $y = (1+\sin\theta)r$

TH $\quad x(3\pi/2) = \frac{3\pi}{2}r \quad y(3\pi/2) = 1 - 1 = 0.$

$(3\pi r/2, 0)$

TV $\quad x(\pi/2) = r\frac{\pi}{2}. \quad y(\pi/2) = r(1+1) = 2r.$

TV en $(\frac{\pi}{2}r, 2r)$