Demostración

2019-08-12

Prueba directa

$P \to q$

i) Asumimos p verdadero

ii) Demostramos q

$\therefore P \to q$

Ej:

$P_1 \wedge P_2$

p: n par y m impar $n=4$ $m=6$ $P=0$

q: $m \cdot n$ par $m \cdot n = 24$ $q = 1$

Prueba por contrarecíproca

La preposición $\neg q \to \neg p$ se llama contrarecíproca (o contrapositiva) de la proposición $p \to q$

$$\boxed{p \to q \equiv \neg q \to \neg p}$$

Ej: Para cualquier $\overset{\text{entero positivo}}{n \in \mathbb{Z}^+}$, Si $\underbrace{n^2 \text{ es par}}_{P}$, $\underbrace{\text{entonces } n \text{ es par}}_{q}$.

Si asumimos p, tendríamos:

$n^2 = 2m$, para algún número entero positivo

tiene que ser binario no por casos

$\therefore n = 2K$, es imposible inferir

Prueba: Por contrapositiva

- Asumimos $\neg q = n$ impar $\therefore n = 2m+1$ entonces,

$$n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2+4m+1 = 2[2m^2+2m]+1$$
$$= 2K+1$$

$\square$

p: n par y no impar

q: m·n par

Si $\underbrace{\text{n par y m impar}}_{p}$, $\underbrace{\text{entonces m·n par}}_{q}$

$\underbrace{n}_{\text{par}} \wedge \underbrace{m}_{\text{impar}} \longrightarrow$ m·n par

Si m·n impar, entonces n impar o m par.

m·n impar, $\neg(n \wedge m)$ demorgan

$\neg(m \cdot n) \longrightarrow (\neg n \vee \neg m)$

Prueba por casos (exhausción)

La proposición:

$(p_1 \vee p_2 \vee p_k) \longrightarrow q$

es equivalente a $\equiv (p \vee q) \longrightarrow r \equiv (p \to r) \wedge (\to r)$

$$(p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_k \to q)$$

Ej: Si n no es divisible por 5, entonces n^2 tiene residuo 1 o 4 al ser dividido por 5.

$n = 97 \to n^2 = 9409 = 1881*5 + 4$

$n = 18 \to n^2 = 324 = 64*5 + 4$

$n = 6 \to n^2 = 36 = 7 \cdot 5 + 1$

Un número no múltiplo de 5 tiene forma

$\underbrace{5K+1}_{P_1}$ o $\underbrace{5K+2}_{P_2}$ o $\underbrace{5K+3}_{P_3}$ o $\underbrace{5K+4}_{P_4}$

Queremos probar:

$(P_1 \vee P_2 \vee P_3 \vee P_4) \rightarrow q$

en donde $q: \underbrace{5m+1}_{q_1}$ o $\underbrace{5m+4}_{q_2}$

Prueba por casos:

Caso 1: $n = 5K+1$

Luego, $n^2 = 25K^2 + 10K + 1$

$= 5(5K^2 + 2k) + 1$

$= 5m + 1$

Caso 2: $n = 5k+2$

Luego, $n^2 = 25k^2 + 20k + 4$

$n = 5(5k^2 + 4k) + 4$

$= 5m + 4$

Caso 3: $n = 5k+3$

Luego $n^2 = 25k^2 + 30k + 9$

$= 5(5K^2 + 6K) + 9 \equiv 5(5k^2 + 6K + 1) + 4$

$= 5K + 4$

Caso 4: $n = 5k+4$

Luego $n^2 = 25K^2 + 40k + 16 \equiv n^2 = 25K^2 + 15 + 1$

$= 5(5k^2 + 8k + 3) + 1$

$= 5m + 1$

$\square$

Prueba por contradicción

La proposición $p \to q$ puede probarse de la siguiente manera:

- ✓) Asumimos p
- ✓) Asumimos $\neg q$
- ✓) Demonstramos que $\underbrace{(p \wedge \neg q) \to F}_{\text{es una contradicción}}$

$$(p \wedge \neg q) \to F$$

$\therefore$ q es verdad.

Ej: Si $a \geq 2$ y $b \in \mathbb{Z}$, entonces $a \nmid b$ o $a \nmid (b+1)$

$a = 8$; $b = 11$

$8 \nmid 11$ o $8 \nmid 12$ ✓

$a = 8$; $b = 15$

$8 \nmid 15$ $\quad$ $8 \mid 16$

Prueba: por contradicción

Asumimos $a \geq 2$ y $b \in \mathbb{Z}$. Asumimos también, para fines de contraddicción, que $a \mid b$ y $a \mid (b+1)$.

Esto es:

$$b = m_1 \cdot a \quad y \quad b+1 = m_2 \cdot a$$