3.5 Probabilidad

Variable continua $-\infty \leq x \leq \infty$.

Probabilidad P, de que x ocurra entre a y b es:

$$\boxed{P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Distribución Uniforme: $f(x) = \frac{1}{b-a}$ $\quad a \leq x \leq b.$

μ = media $\quad$ Exponencial: $f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}$ $\quad x \geq 0.$

Probabilidad es del 100%. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

P. 125.

Ejercicio 1: Un contenedor tiene mercancía cuyo peso tiene una distribución uniforme entre 2 y 4 toneladas.

a. Calcule la probabilidad de que el contenedor pese entre 2.5 y 3.5 toneladas. $\quad a = 2 \quad b = 4.$

$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2}$ $\quad 2 \leq x \leq 4.$ $\quad f(x) = 0$ si $x > 4.$

$$P(2.5 \leq x \leq 3.5) = \int_{2.5}^{3.5} \frac{1}{2}\,dx = \left.\frac{x}{2}\right]_{2.5}^{3.5} = \frac{3.5-2.5}{2} = \frac{1}{2}.$$

La probabilidad de que pese entre 2.5 y 3.5 es del 50%.

b. calcule la probabilidad de que el contenedor pese más de 2.5 toneladas.

$$P(X \geq 2.5) = \cancel{\int_{2.5}^{\infty} f(x)\,dx} = \underline{\int_{2.5}^{4} \frac{1}{2}\,dx} = \left.\frac{x}{2}\right]_{2.5}^{4} = \frac{4-2.5}{2} = \frac{1.5}{2}.$$

$$P(X \geq 2.5) = \frac{3}{4} \text{ ó } 75\%.$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 1/2 & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & x > 4. \end{cases}$$

Ejercicio 2: El tiempo de espera promedio para recibir una orden a domicilio es de 0.5 hora y tiene una distribución exponencial.

a. Encuentre la probabilidad de que la comida se entregue después de media hora.

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \qquad \mu \text{ - media} \qquad \mu = 0.5.$$

$$x \geq 0.$$

$$f(x) = \frac{1}{0.5} e^{-x/0.5} = 2e^{-2x} \qquad x \geq 0.$$

$$P(X \geq 0.5) = \int_{0.5}^{\infty} 2e^{-2x}\,dx \qquad \frac{2e^{-2x}}{-2}$$

$$P(X \geq 0.5) = -e^{-2x}\Big]_{0.5}^{\infty} \qquad e^{-\infty} \to 0$$

$$= -\lim_{x\to\infty} e^{-2x} + e^{-2(0.5)} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Existe una probabilidad del 36.78% de que la entrega se realice 0.5 hora después.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la entrega se realice en menos de 15 min? ; 1/4 de hora

$$P(X \leq 1/4) = \int_0^{1/4} 2e^{-2x}\,dx = \int_{1/4}^{0} e^{\overbrace{-2x}^{u}} \overbrace{(-2dx)}^{du}$$

$u = -2x \quad du = -2dx \qquad u(0) = 0 \qquad u(1/4) = -1/2$

$$P(X \leq 1/4) = \int_{-1/2}^{0} e^{u}\,du = e^{u}\Big]_{-1/2}^{0} = 1 - e^{-1/2} \approx 0.3934$$

Estadísticos Importantes: Media, Mediana y Varianza

	x_1					
Variables Discretas.	1	2	3	4	5	6.
	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6.
	$p(x_1)$					

Media $= 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + \ldots\ 6\left(\frac{1}{6}\right)$

Dados: $= \frac{1}{6}\left(1+2+3+4+5+6\right) = \frac{21}{6.} = 3.5$

Media Discretas $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$ $f(x_i)$ peso, frecuencia probabilidad.

Variable continua: se integra $x f(x)$.

Media (mu) $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

el dominio de $f(x)$ puede restringir el intervalo de integración.

realice IPP $u = x$
$dv = f(x) dx$.

Mediana: el número m que tiene una probabilidad acumulada del 50%.

$$\int_{-\infty}^{m} f(x) dx = 0.5$$

Resuelva para m.

$F(m) = 0.5 \Rightarrow m = F^{-1}(0.5)$

Varianza: la desviación cuadrado respecto a la media (sigma) $(x-\mu)^2$.

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$$

Realice IPP dos veces $u = (x-\mu)^2$.

por partes.

Ejercicio 3: Considere la distribución exponencial.

$$f(x) = \frac{1}{100} e^{-x/100}. \qquad x \geq 0.$$

a. Encuentre la media de $f(x)$

$$\mu = \int_0^{\infty} x \frac{e^{-x/100}}{100} dx = -xe^{-x/100} \Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x/100} dx$$

$u = x \quad dv = \frac{1}{100} e^{-x/100} dx$

$du = dx \quad v = -e^{-x/100}$

$$\mu = -xe^{-x/100} \Big]_0^{\infty} - 100 e^{-x/100} \Big]_0^{\infty}$$

$$\mu = -\lim_{x \to \infty} xe^{-x/100} + \cancel{0 \cdot e^{-0}}^{\,0} - \cancel{100 \lim_{x \to \infty} e^{-x/100}}^{\,0} + \cancel{100 e^{-0}}^{\,100}$$

$e^{-\infty} \to 0.$

$$\mu = 100 - \overbrace{\lim_{x \to \infty} xe^{-x/100}}^{0.}$$

LH.

$\infty \cdot e^{-\infty} = \infty \cdot 0$

$$\lim_{x \to \infty.} \frac{x}{e^{x/100}} \underset{LH}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{100} e^{x/100}}$$

$\frac{1}{e^{\infty}} \to 0$

$\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ LH.

$$\mu = 100.$$

b. Encuentre la mediana de $f(x)$.

$$\int_0^m f(x)\,dx = 0.5. \qquad f(x) = \frac{1}{100} e^{-x/100}.$$

$$\frac{1}{100}\int_0^m e^{-x/100}\,dx = -\frac{100}{100} e^{-x/100}\Big]_0^m = -e^{-m/100} + e^0.$$

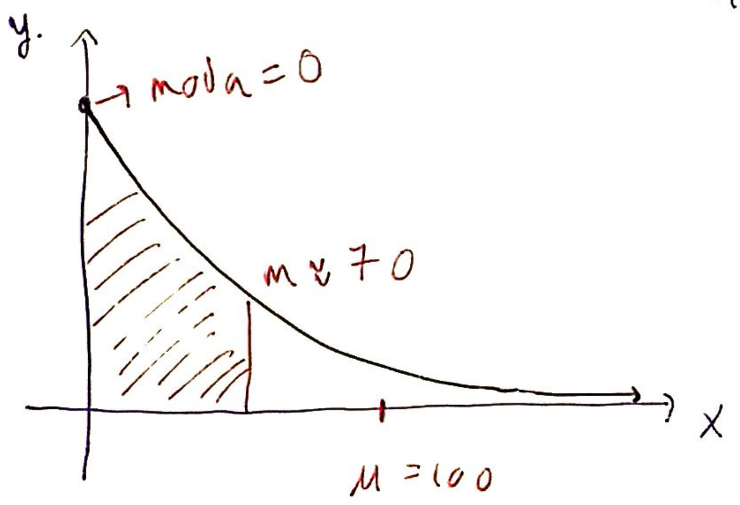
$$1 - e^{-m/100} = 0.5.$$ Resuelva para m.

$$-e^{-m/100} = -0.5$$

$$e^{-m/100} = 0.5.$$

Aplique ln's: $\frac{-m}{100} = \ln(0.5) \rightarrow m = -100\,\underbrace{\ln(0.5)}_{-0.69}$

$m \approx 69.31$



Varianza $\sigma^2 = \int_0^\infty (x-100)^2 \frac{e^{-x/100}}{100}\,dx$

$u = (x-100)^2 \qquad dv = \frac{e^{-x/100}}{100}\,dx$

$du = 2(x-100) \qquad v = -e^{-x/100}$

$$\sigma^2 = -(x-100)^2 e^{-x/100}\Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \cancel{2(x-100)e^{-x/100}}\,dx$$

LH IPP

$$\sigma^2 = -\lim_{x\to\infty} \frac{(x-100)^2}{e^{x/100}} + 100^2 e^{-0}$$

$$\sigma^2 = 100^2 \qquad \sigma = 100$$

Ejercicio 4: Encuentre la media, mediana, varianza y desviación estándar de la distribución uniforme.

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b. \qquad \text{para } b=7,\ a=1$$

Media: $\mu = \int_a^b x f(x)\,dx = \int_1^7 \frac{x}{6}\,dx = \frac{x^2}{12}\Big]_1^7$

$$\mu = \frac{49-1}{12} = \frac{48}{12} = 4.$$

Mediana: $\int_a^m f(x)\,dx = 0.5 \qquad \int_1^m \frac{1}{6}\,dx = \frac{x}{6}\Big]_1^m$

$$\frac{m-1}{6} = 0.5. \Rightarrow m = 0.5(6)+1 = 4.$$

No hay moda.

Varianza: $\int_a^b (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \int_1^7 (x-4)^2 \underbrace{\frac{1}{6}}_{f(x)}\,dx$

$$u = x-4 \qquad du = dx \qquad u(7) = 3 \quad u(1) = -3$$

$$\frac{1}{6}\int_1^7 (x-4)^2\, dx = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} u^2\, du = \frac{2}{6}\int_0^3 u^2\, du$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,u^3\Big]_0^3 = \frac{27}{9} = 3$$

Desviación estándar: $\sigma = \sqrt{\text{varianza}} = \sqrt{3}$.

4. Longitud de arco $\int \sqrt{1+(y')^2}\, dx$ cab 9.

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\Big]$$

$x = 2\sin\theta$

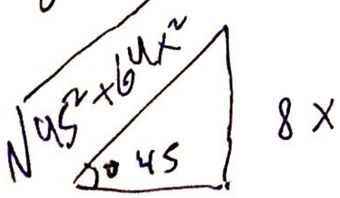
$dx = 2\cos\theta\, d\theta$.

5. $y = 180 - \left(\frac{2x}{45}\right)^2 = 180 - \frac{4x^2}{45^2}$

$y' = \frac{-8x}{45^2}$ $\qquad 1+(y')^2 = 1 + \frac{64x^2}{45^2}$

$$= \frac{1}{45^2}\left(45^2 + 64x^2\right)$$

$$L = \int_0^{90} \sqrt{45^2+64x^2}\, dx$$



$\tan\theta = \frac{8x}{45}$ $\qquad \sec\theta = \frac{\sqrt{(\ )}}{45}$.

$x = \frac{45}{8} \tan\theta \qquad dx = \frac{45}{8} \sec^2\theta \, d\theta.$

$$L = \int_0^{1} \sqrt{45^2 + 64x^2} \, dx = \int_0^{?} 45 \sec\theta \cdot \frac{45}{8} \sec^2\theta \, d\theta.$$

$$L = \frac{45^2}{8} \int \sec^3\theta \, d\theta. = \frac{45^2}{16} \left(\sec\theta \tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta| \right)$$