6.5 Valor Promedio de una función (P 105 - P 108)

El valor promedio de una función continua en un intervalo $[a,b]$ es igual a.

$$\boxed{f_{prom} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$ ✓

$$f_{prom} = \frac{f_1 + f_2 + \dots f_n}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_i)$$

Número infinitos y continuo de puntos, dividir el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \frac{\Delta x}{b-a} = \frac{1}{n}.$$

$$f_{prom} \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b-a} f(x_i)\,\Delta x$$

Para tener una respuesta $n \to \infty$, $\Delta x \to 0$.

$$f_{prom} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ejemplo: Encuentre el valor promedio de $f(x) = \csc^2 x$ en $[\pi/4, \pi/2]$.

$$b = \frac{\pi}{2} \qquad a = \frac{\pi}{4} \qquad b - a = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Big\} \text{ Ancho del intervalo.}$$

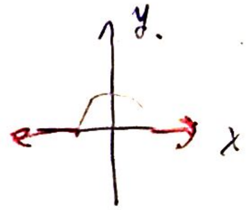
$$f_{prom} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2 x\, dx.$$

$$f_{prom} = \frac{4}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi/4} -\csc^2 x\, dx = \frac{4}{\pi} \cot x \Big]_{\pi/2}^{\pi/4} = \frac{4}{\pi}(1-0) = \frac{4}{\pi}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \cot\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \cot\frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$$

Ejercicio 6: Encuentre el valor promedio de promedio de las sigs. funciones en el intervalo dado.

a. $f(t) = \cos^4 t \sin t$ en $[0, \pi]$.



$$f_{prom} = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi} \cos^4 t\, \overbrace{\sin t\, dt}^{du}.$$

$$u = \cos t \qquad u(\pi) = \cos \pi = -1$$
$$du = -\sin t\, dt. \qquad u(0) = \cos 0 = 1$$

$$f_{prom} = \frac{-1}{\pi}\int_1^{-1} u^4\, du = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} u^4\, du = \frac{2}{\pi}\int_0^1 u^4\, du.$$

$$f_{prom} = \frac{2}{\pi}\,\frac{u^5}{5}\Big]_0^1 = \frac{2}{5}\,\frac{1}{\pi}$$

b. $g(x) = \frac{1}{x}$ en $[e^4, e^{10}]$

$$g_{prom} = \frac{1}{e^{10}-e^4}\int_{e^4}^{e^{10}} \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{e^{10}-e^4} \ln|x|\Big]_{e^4}^{e^{10}}$$

$\ln(e^{10}) = 10 \quad \ln(e^4) = 4$

$$= \frac{1}{e^{10}-e^4}(10-4) = \frac{6}{e^{10}-e^4}$$

c. $h(x) = \frac{3}{(4+x)^{1/2}}$ en $[-4, 5]$ no es continua.

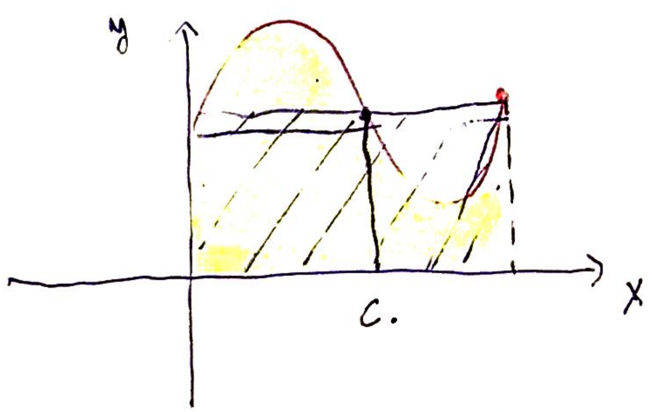
$h(-4) = \frac{3}{0}$ indefinido, integral impropia.

$$h_{prom} = \frac{3}{5-(-4)}\int_{-4}^{5} (4+x)^{-1/2}\,dx \qquad -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}.$$

$$h_{prom} = \frac{3}{9}\, 2(4+x)^{1/2}\Big]_{-4}^{5} \qquad (4-4)^{1/2} = 0^{1/2} = 0$$

$$h_{prom} = \frac{6}{9}\left(9^{1/2} - \lim_{x\to -4^+} \cancel{(4+x)^{1/2}}^{\,0}\right) = \frac{6}{9}\cdot 3 = \boxed{2.}$$

Relación entre el valor promedio y el área de una región



$$f_{prom} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\underbrace{f_{prom}}_{h}\,\underbrace{(b-a)}_{b.} = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Área Región}}$$

El área de la región es igual al área de un rectángulo  con altura f_{prom} y ancho $b-a$.

Teorema del Valor para Integrales.

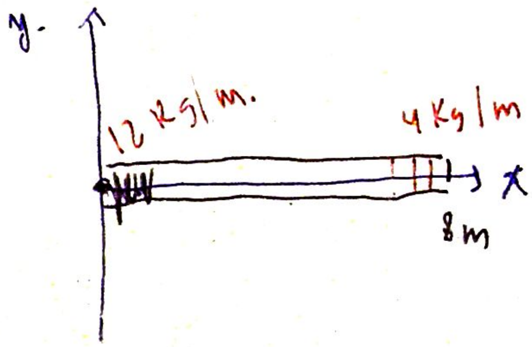
Si f es continua en $[a,b]$ entonces existe por lo menos un número c tal que

$$\boxed{f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\cdot dx}$$

c está entre a y b.

Ejercicio 2: La densidad lineal de una varilla de 8 m de longitud es $\rho = \frac{12}{\sqrt{x+1}}$ Kg/m.

a. Encuentre la densidad promedio de la varilla.

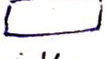


$$\rho_{prom} = \frac{1}{8-0}\int_0^8 12(x+1)^{-1/2}\,dx$$

$$\rho_{prom} = \frac{12\cdot 2}{8}(x+1)^{1/2}\Big]_0^8$$

$$\rho_{prom} = 3\left(9^{1/2} - 1^{1/2}\right)$$

$$\rho_{prom} \quad 3(3-2) = 6.$$



x

b. Encuentre la posición de la varilla donde la densidad lineal es igual a la densidad promedio.

$$\rho(x) = \frac{12}{\sqrt{x+1}} \qquad \rho_{prom} = 6.$$

$$6 = \frac{12}{\sqrt{x+1}} \rightarrow \sqrt{x+1} = \frac{12}{6} = 2.$$

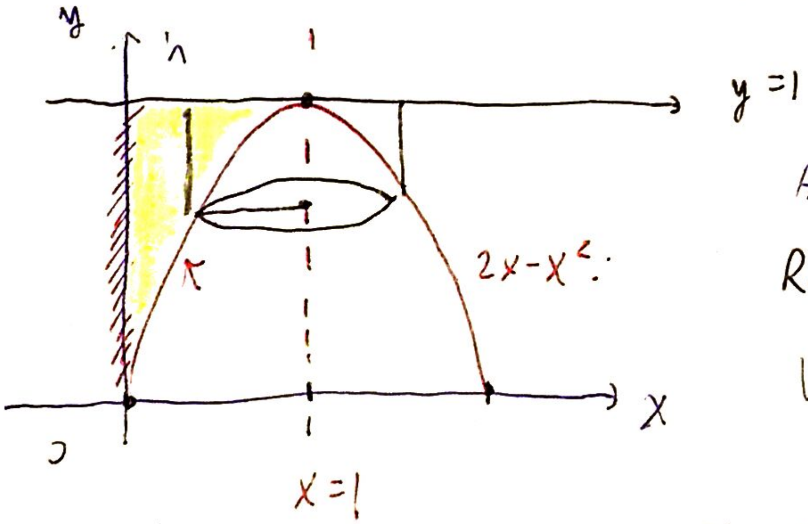
$$x+1 = 4 \Rightarrow x = 3.$$

Pág 103 Considere la región entre $y_1 = 2x - x^2$, $y_2 = 1$ & $x = 0$.

Encuentre el volumen al rotar la región respecto a la recta $x = 1$.

$y_1 = y_2$ $\quad 1 = 2x - x^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0.$

$$(x-1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1.$$



Altura $h = 1 - (2x - x^2)$

Radio $r = 1 - x$

$$V = 2\pi \int_0^1 h\,r\,dx$$

$$V = 2\pi \int_0^1 (1-x)(1-2x+x^2)\,dx$$