

a) Encontrar derivadas y rectas tangentes

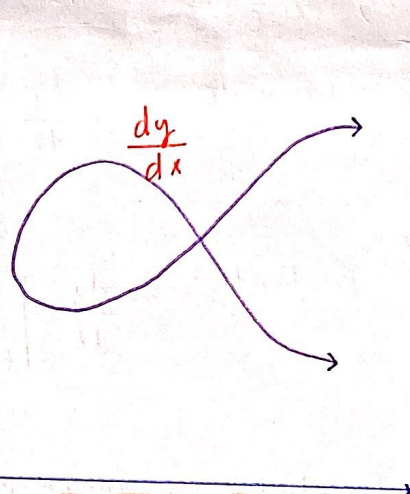
Curva  $C$ :  $x = f(t)$   $a \leq t \leq b$   
 $y = g(t)$

A veces no se pueda eliminar el parámetro  $t$ . Para encontrar  $y$  en función de  $x$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dots$$

$y \rightarrow x \rightarrow t$

en función de  $t$ .



$$= \dots \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

■ Pendiente recta tangente en

$t = t_0$  ;  $m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=t_0}$

Ec. Recta tangente

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

$$y = y(t_0) + m(x - x(t_0))$$

Ejercicio 1: p. 135

Encuentra la ec. de recta tangente a la curva

$C$ :  $x = 1 + 2t$  ;  $y = 2 - 2t^3$

Solución 1:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-6t^2}{2} = -3t^2$$

Pendiente  $m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = -3(1)^2 = \boxed{-3}$

Solución 2: Elimine el parámetro  $t$ .

$2t = x - 1 \Rightarrow t = \frac{x-1}{2}$  sustituir en  $y$

$y = 2 - \frac{2}{8}(x-1)^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}(x-1)^2 \Rightarrow m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=3} = \dots$

$x(1) = 1 + 2 = \boxed{3}$

$\dots = -\frac{3}{4} \cdot 2^2 = \boxed{-3}$



Recta tangente:  $x(1) = 1 + 2 = 3$

$y(1) = 2 - 2 = 0$

Ec. Recta tangente:

$y = 0 - 3(x - 3) = -3x + 9$

a)  $x = 1 + 2\sqrt{t}$  ;  $y = e^{t^2}$  en  $t = 1$

Derivada:  $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t e^{t^2}}{t^{-\frac{1}{2}}} = 2t \cdot t^{\frac{1}{2}} e^{t^2}$

Pendiente:  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = 2 \cdot 1^{\frac{3}{2}} e^{1^2} = 2e$

Encontrar las coordenadas:

$x(1) = 1 + 2 = 3$

$y(1) = e^1 = e$

Ecuación de la recta tangente:

$y = e + 2e(x - 3) = -5e + 2ex$

$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{1}{16}(x-1)^4} \cdot \frac{1}{4}(x-1)^3 \cdot 1$

$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=3} = e^{\frac{1}{16}(2^4)} \cdot \frac{1}{4}(2^3) = 2e$

misma respuesta

Alternativa Solución:

# Eliminar el parámetro  $t$

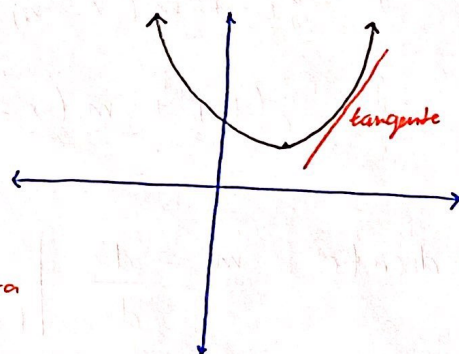
$x - 1 = 2t^{\frac{1}{2}}$

$(x - 1)^2 = 4t$

$t = \frac{1}{4}(x - 1)^2$

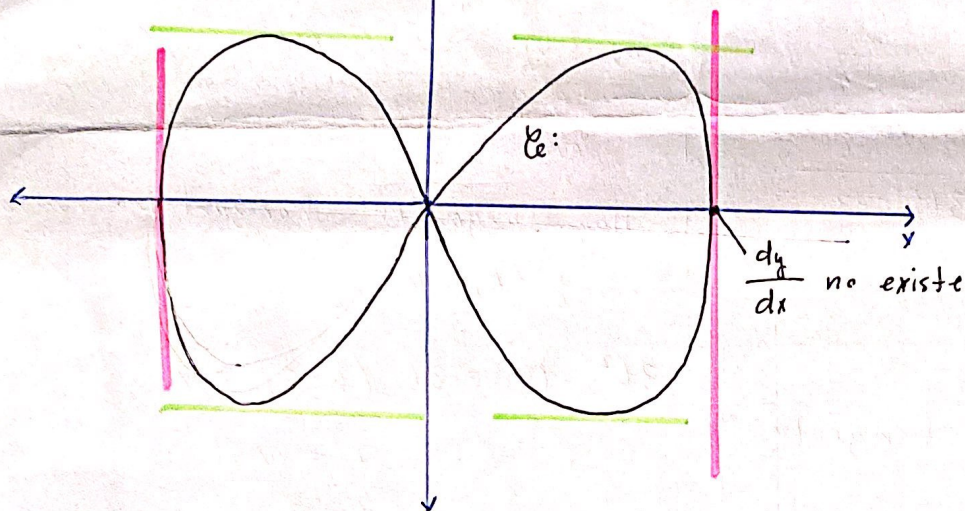
# sustituye en  $y$ :

$y = e^{\frac{1}{16}(x-1)^4}$





# Tangentes horizontales & verticales



tangente horizontal:

cuando  $\frac{dy}{dx} = 0$

tangente vertical:

cuando  $\frac{dy}{dx}$  no existe

$C: x = f(t) ; y = g(t)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = 0$$

tangente horizontal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \text{inf.}$$

tangente vertical

En resumen, dada una curva  $C$  hay:

tangentes horizontales  $y'(t) = 0$  &  $x'(t) \neq 0$

tangentes verticales  $x'(t) = 0$  &  $y'(t) \neq 0$

para evitar  $\frac{1}{0}$



Ejercicio 2: La curva  $C$  se define por:

$$x = t^3 - 3t$$

$$y = t^3 - 3t^2$$

a) encuentre  $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 6t}{3t^2 - 3}$$

b) ¿En cuáles puntos  $(x, y)$  la tangente es horizontal a la curva  $C$ ?

Hay tangentes horizontales cuando  $y'(t) = 0$

$$3t^2 - 6t = 3t(t - 2) = 0$$

$$t = 0$$

$$t = 2$$

c) ¿Dónde hay tangentes verticales?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 6t}{3(t^2 - 1)} \text{ se indefinice en } t = \pm 1$$

$$x'(0) = 0 - 3 \neq 0$$

$$x'(2) = 12 - 3 \neq 0$$

Puntos:

$$x(1) = 1 - 3 = -2$$

$$x(-1) = -1 + 3 = 2$$

$$y(1) = 1 - 3 = -2$$

$$y(-1) = -1 - 3 = -4$$

Puntos:

$$x(0) = 0 - 0 = 0 \quad (0, 0)$$

$$x(2) = 8 - 6 = 2$$

$$y(0) = 0 - 0 = 0 \quad (2, 4)$$

$$y(2) = 8 - 12 = -4$$

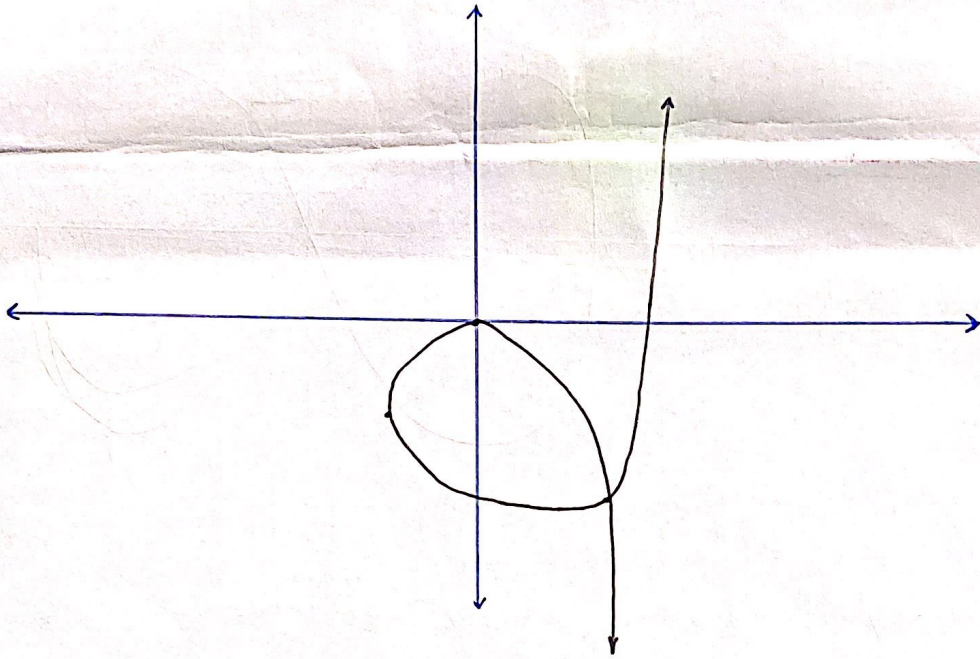
tangentes verticales en  $(-2, 2)$  &  $(2, -4)$

d) Bosqueje la curva utilizando sólo las tangentes horizontales y verticales

tangentes horizontales  $(0, 0)$  y  $(2, -4)$

verticales  $(-2, 2)$  y  $(2, -4)$

Se pasa por el origen 2 veces,

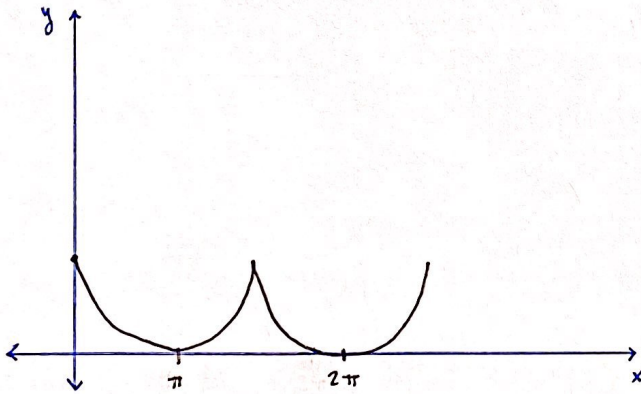


Ejercicio 3: Cicloide invertido

$$x = r(\theta + \cos\theta)$$

$$y = r(1 + \sin\theta)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$



a) encuentre la derivada  $r$  es constante:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{r(\cos\theta)}{r(1 - \sin\theta)} = \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}$$

b)