Notas de clase Cálculo integral
UFM
SECCIÓN B

Christiaan Ketelaar
Organizado por: David Corzo

2019-10-09

Índice general

Capítulo 1

La integral indefinida, notación de integral, Teorema de evalucación de integrales

5.4 La Integral Indefinida. (Pag 9)

Una antiderivada de f. es una función $F(x)$

$$F'(x) = f(x)$$

Por ejemplo, encuentre la antiderivada de $f(x) = 14x^6$.

$F(x) = 2\cdot x^7$ $\quad F'(x) = 14x^6 = f(x)$

$F(x) = 2\cdot x^7 + \sqrt{10}$

$F(x) = 2\cdot x^7 - 10^{20} + \ln(10)$

Antiderivada más general

$F(x) = 2x^7 + C$

La Integral Indefinida de $f(x)$ respecto a x, es la antiderivada más general de f.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

C es una constante de integración.

$\int (\ )\,dx$ integre la función es antiderivar.

signa $\int$ $\quad dx$ diferencial, integre respecto a x.

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

$u = g(x) \quad du = g'(x)\,dx$

$$\int 14x^6\,dx = 2x^7 + C.$$

Reglas de Integración Básicas.

$\frac{d}{dx}(\ln(-x)) = \frac{1}{x}$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C. \qquad n \neq -1$$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

valor absoluto.

$$\int e^x\,dx = e^x + C.$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

0	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$
$+C$	$\tan x$	$\sec^2 x$
	$\cot x$	$-\csc^2 x.$

$\int dx$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C.$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C.$$

$$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C.$$

$\longrightarrow$ Compruebe

Guía: $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C.$ $\quad \frac{\sec x \tan x}{\sec x} + 0.$

$$\int \cot x\,dx \qquad \int \sec x\,dx \qquad \int \csc x\,dx.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C. \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C.$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1} x + C. \qquad \int \sinh x\,dx = \cosh x + C.$$

Suma/Diferencia $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Múltiplo Constante $\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$

Reglas de Integración Básicas.

$\frac{d}{dx}(\ln(-x)) = \frac{1}{x}$

$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$ $n \neq -1$

$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

valor absoluto.

$\int e^x \, dx = e^x + C.$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

0	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$
$+C.$	$\tan x$	$\sec^2 x$
	$\cot x$	$-\csc^2 x.$

$\int dx$

$\int \cos x \, dx = \sin x + C.$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C.$

$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C.$

$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C.$

Compruebe

Gulio: $\int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + C.$ $\frac{\sec x \tan x}{\sec x} + 0.$

$\int \cot x \, dx$ $\int \sec x \, dx$ $\int \csc x \, dx.$

$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + C.$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C.$

$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + C.$

$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C.$

Suma/Diferencia $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

Múltiplo Constante $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$

Ejemplos pág 11.

a) $\int x^{50} + 2x^6 \, dx = \frac{x^{51}}{51} + \frac{2}{7}x^7 + C.$

b) $\int \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x} + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{}^{x^{-2}} \, dx = \tan^{-1} x + \ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + C.$

c) $\int \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} \, dx$

$\int x^{1/2} + x^{-1/2} + x^{-3/5} \, dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + \frac{5}{2}x^{2/5} + C.$

d) $\int x^{\ln 2} + x^{\sqrt{2}} + x^{\sin(2)} \, dx = C + \frac{x^{1+\ln 2}}{1+\ln 2} + \frac{x^{1+\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}} + \frac{x^{1+\sin(2)}}{1+\sin(2)}$

potencia

Ejercicio 1: Evalúe las sigs. integrales.

a) $\int \underbrace{x^e}_{\text{potencia}} + \underbrace{e^x}_{\text{exponencial}} \, dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + e^x + C.$

b) $\int \left(8 \cdot 10^x - \frac{2}{x}\right) dx = \frac{8 \cdot 10^x}{\ln(10)} - 2\ln|x| + C.$

Álgebra.

c) $\int (x-2)(x+2)(x^2+4) \, dx = \int (x^2-4)(x^2+4) \, dx$

$\int (x^4 - 16) \, dx = \frac{1}{5}x^5 - 16x + C.$

d) $\int e^{-4x}(e^{4x} + e^{5x}) \, dx = \int (1 + e^x) \, dx = x + e^x + C.$

1

Integrales Definidas

Son integrales con límites de integración en $x = a$ y $x = b$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Teorema de Evaluación (TFC parte 2).

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Utilizando la notación de corchete.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$$ luego evalúe

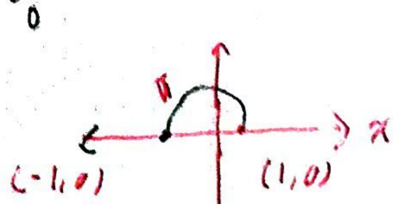
primero antiderive

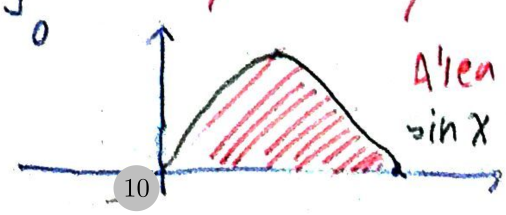
$$F(x) + C\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b) + C - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$$

Función es Integrable si $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

Ejercicio 1: Evalúe las sigs. integrales.

a. $$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$





Área bajo la curva.

5.

a. $\int_0^3 x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^3 = \frac{27}{3} - 0 = 9.$

b. $\int_9^{36} \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2}\Big]_9^{36} = \frac{2}{3}\left((6^2)^{3/2} - \overbrace{9^{3/2}}^{3^3}\right)$

$x^{1/2}$

$= \frac{2}{3}(216 - 27) = 144 - 18$

$= 126.$

c. $\int_0^2 \frac{1}{1-x^2} \, dx$ no existe discontinua en $[0,2]$

se indefine en -1 y 1.

$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \tan^{-1} x + C.$ $\quad \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$

d) $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\right) dx = 2 \cdot x^{1/2} + \frac{3 \cdot 2}{3} x^{3/2}\Big]_1^4$

$x^{-1/2}$ $\quad x^{1/2}$

$= 2\sqrt{4} + 2(2^2)^{3/2} - (2 \cdot 1^{1/2} + 2 \cdot 1^{3/2})$

$= 4 + 16 - (2 + 2) = 16.$

3. $\frac{x^{3/2} * 2/3}{3/2 * 2/3} = \frac{3 \cdot 2}{3} x^{3/2} = 2x^{3/2}.$ $\quad \int (\quad) \, dx.$

$\frac{d}{dx}(\quad)$

Capítulo 2

Áreas y propiedades de la integral definida

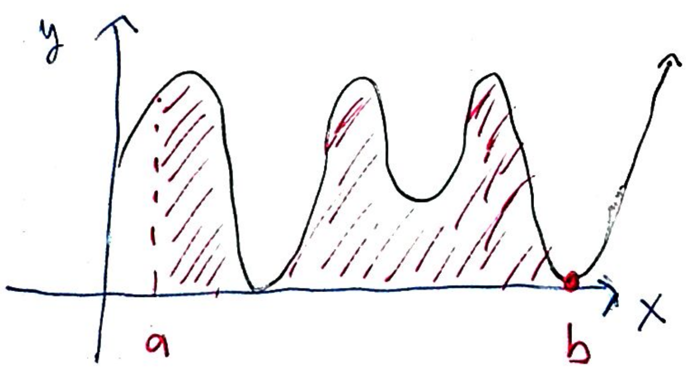
5.4 Área y Propiedades. Integral Definida.

El Área de una región $\underline{\underline{A}} = \lim\limits_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x$

Integral definida de f en [a,b] f es continua $\underline{\underline{\int_a^b f(x)\,dx}} = \lim\limits_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x$

Interpretación Integral Definida.

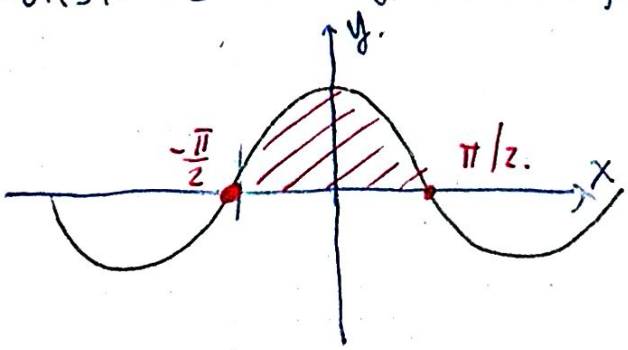
El área de la región bajo la curva $y = f(x)$, encima del eje-x, y entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. es la integral definida de f en [a,b] ¡ $f \geq 0$)



$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$$F(b) - F(a)$$

Considere la región debajo de $y = \cos x$ en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx = 2.$$

$$A = \sin x \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - (-1) = 1 + 1 = 2.$$

$$A = -x^2\Big]_{-2}^{0} + x^2\Big]_{0}^{3} = -0-(-(-2)^2)+9-0$$
$$= 0+4+9 = 13.$$

Regla Integral Definida. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

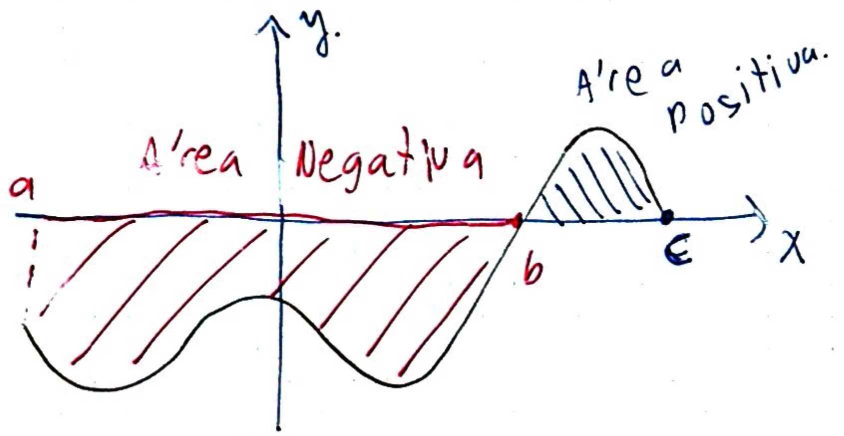
Invertir el orden

Ej: $\int_{-2}^{0} -2x\,dx = \int_0^{-2} 2x\,dx = x^2\Big]_0^{-2} = 4-0 = 4$

b) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\int_{\pi}^{0} \sin x\,dx = \cos x\Big]_{\pi}^{0} = 1-(-1) = 2.$

ó $-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} - (-\cos 0) = 1+1 = 2.$

¿Qué sucede cuando f(x) es negativa?



A'rea de la región entre f(x) & y=0

$\int_{-1}^{0} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big]_{-1}^{0}$
$= 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$

$A \neq \int_a^c f(x)\,dx$

$A = -\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$ ✓ valor absoluta

Definición Más compacta $A = \int_a^b |f(x)|\,dx$

Ejercicio 3: (Pág 16) Considere $f(x) = 4x^3 - 4$ en $-2 \leq x \leq 2$.

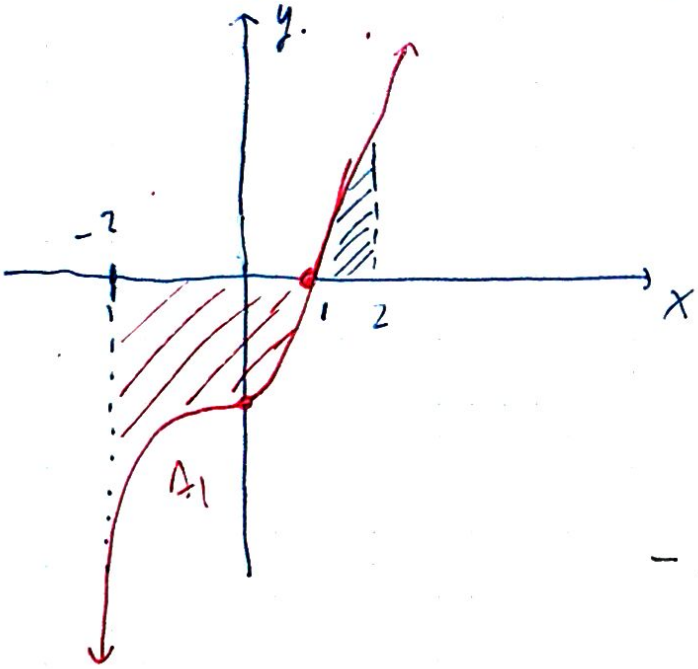
a. Evalúe $\int_{-2}^{2} (4x^3 - 4)\, dx = x^4 - 4x \Big]_{-2}^{2}$

$x^4 \Big]_{-2}^{2} - 4x \Big]_{-2}^{2}$

$= (16 - 8) - (16 + 8)$

$= 8 - 24 = -16.$

b. Bosqueje la región y explique si la integral definida es igual al área de la región.



Intercepto - x: $4(x^3 - 1) = 0$

$x = 1.$

Intercepto - y: $0 - 4 = -4$

$A \neq \int_{-2}^{2} f(x)\, dx$

$-f(x) = -4x^3 + 4$

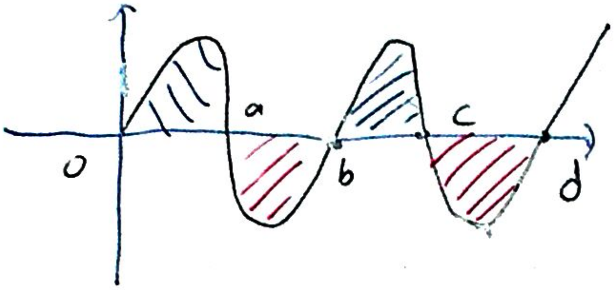
c. Encuentre el área de la región.

$A = \int_{-2}^{1} \overbrace{(4 - 4x^3)}^{A_1}\, dx + \int_{1}^{2} (4x^3 - 4)\, dx.$

$A = 4x - x^4 \Big]_{-2}^{1} + x^4 - 4x \Big]_{1}^{2} = \overbrace{(4-1) - (-8-16)}^{A_1}$

$+ (16 - 8) - (1 - 4)$

$A = 3 + 24 + 8 + 3 = 27 + 11 = 38.$



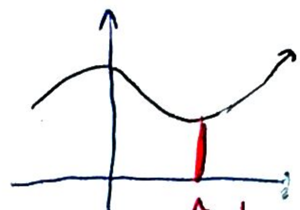
$$A = \int_0^a f\,dx - \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx - \int_c^d f\,dx.$$

Propiedades Integrales Definidas

1 y 2. $$\int_a^b k_1 f(x) \pm k_2 g(x)\,dx = k_1 \int_a^b f(x)\,dx \pm k_2 \int_a^b g\,dx.$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} e^{x^2 + \ln x + \sinh x}\,dx. = F(\sqrt{2}) - F(\sqrt{2}) = 0$$

3. $$\int_a^a f(x)\,dx. = 0$$



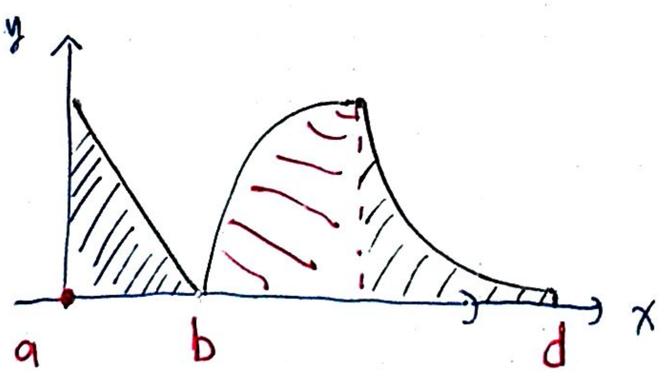
la región es sólo una línea

4. $$\int_a^b h\,dx = hx\Big]_a^b = h(b-a)$$ rectángulo altura h largo b-a.

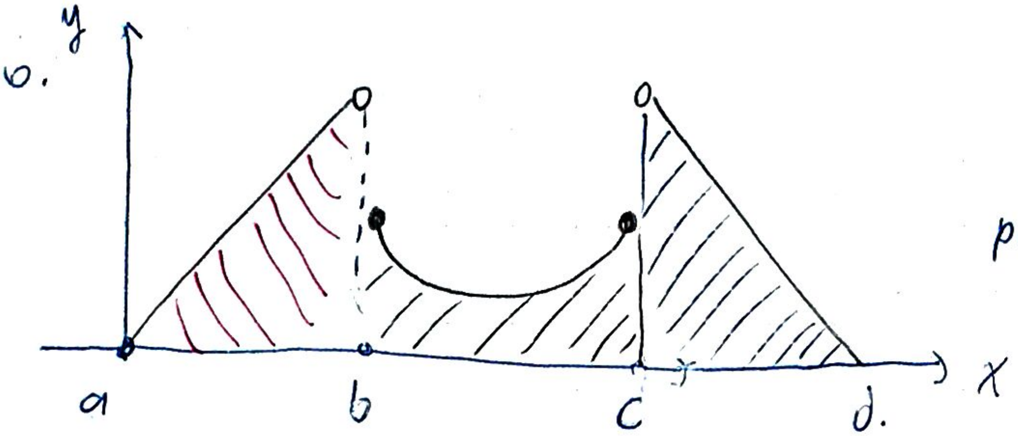
$$\int_e^{\sqrt{10}} \ln(10)\,dx = \ln(10)\left[\sqrt{10} - e\right]$$

$\int \ln x\,dx$

5.



$$\int_a^d f(x)\,dx = \int_a^b f\,dx. + \int_b^c f\,dx + \int_c^d f\,dx$$



continua por tramos

piecewise continuous.

$$\int_a^d f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx + \int_c^d f\,dx$$

$$2x\Big]_0^1 = 2-0$$

Ejercicio 5: Evalúe la sig. integral definida.

$$\int_0^3 f(x)\,dx \qquad f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-2x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 6x-12 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$\int_0^3 f\,dx = \int_0^1 2\,dx + \int_1^2 (4-2x)\,dx + \int_2^3 (6x-12)\,dx$$

$$= 2 + \left(4x - x^2\Big]_1^2\right) + \left(3x^2 - 12x\Big]_2^3\right)$$

$$= 2 + (4-3) + (-9-(-12))$$

$$= 2 + 1 + 3 = 6.$$

Derivación logarítmica $\quad y = a^x$

$$y = \frac{a^x}{\ln a}, \quad y' = a^x \frac{\cancel{\ln a}}{\cancel{\ln a}}, \quad \ln y = x \ln a.$$

$$\frac{y'}{y} = \ln a. \Rightarrow y' = a^x \ln a.$$

Capítulo 3

5.4 Desplazamiento y distancias con integrales

5.4 Desplazamiento y Distancia

La integral de la derivada $f'(x)$ es la función original.

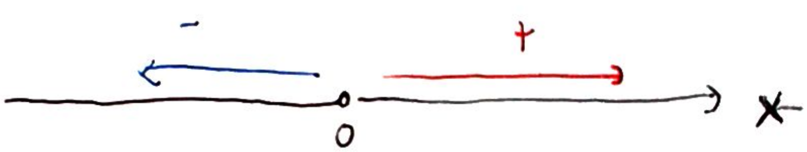
$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(x)\Big]_a^b = \underbrace{f(b) - f(a)}_{\text{cambio neto}}.$$

Si se conoce la razón de cambio de una función, el cambio neto se obtiene integrando la razón de cambio.

Desplazamiento en 1 Dimensión

$$s = \int_a^b v(t)\,dt$$

$$\int_a^b s'(t)\,dt.$$



Costo Marginal: $C'(x)$ costo neto $= \int_a^b C'(x)\,dx.$

Población: población neta $= \int_a^b p'(t)\,dt.$

Ejemplo: Una partícula tiene una velocidad de $v(t) = \frac{2}{t^{4/3}}$ cm/s.

Encuentre el desplazamiento entre $t = 1$ y 8 s. $2 \cdot t^{-4/3}$

$$s = \int_1^8 v(t)\,dt = 2\int_1^8 t^{-4/3}\,dt. = -6\,t^{-1/3}\Big]_1^8 = 6t^{-1/3}\Big]_8^1$$

$1 - \frac{1}{2}$ $\quad -\frac{1}{2} + 1$

$$s = 6\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{8}}\right) = 6\left(\frac{1}{2}\right) = 3. \quad \text{ó} \quad 6\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{8}} - \frac{(-1)}{\sqrt[3]{1}}\right)$$

Desplazamiento Neto es de 3 cm.

Ejercicio 1: Se lanza una pelota con una velocidad inicial de 64 pies/s a nivel del suelo. Encuentre el desplazamiento de la pelota entre 1 y 3 s.

$v(t) = 64 - 32t.$ ✓ $\qquad g = -32$ pies/s²

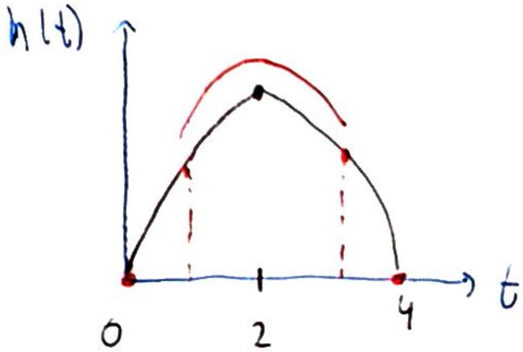
Respuesta:

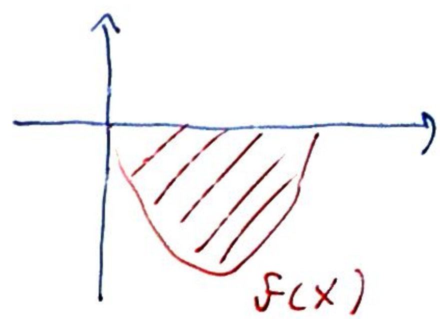
$$s = \int_1^3 v(t)\,dt = \int_1^3 (64-32t)\,dt = 64t\Big]_1^3 - 16t^2\Big]_1^3$$

$$s = 64(3-1) - 16(9-1) = 128 - 128 = 0$$

$64 \cdot 2 \qquad 16 \cdot 4 \cdot 2 \qquad 48 - 48 = 0$

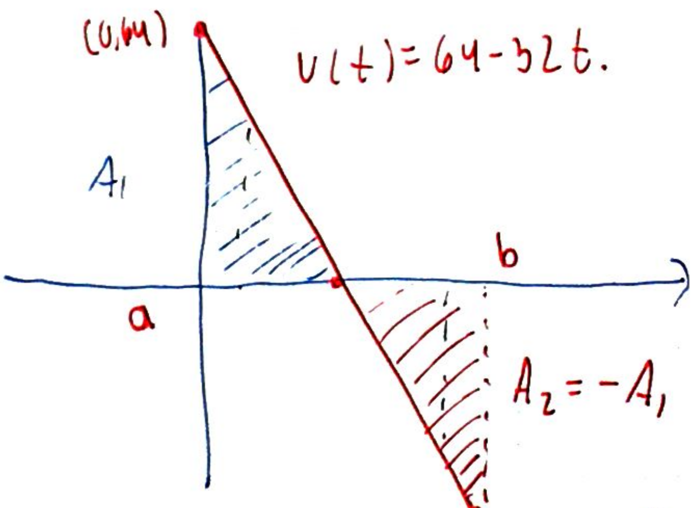
NO HAY CAMBIO NETO.





$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Distancia y Desplazamiento en una dimensión.



$-, 0, +$

Desplazamiento $\quad s = \int_a^b v(t)\,dt.$

Para el ejercicio $s = 0.$

Distancia $\quad d = \int_a^b |v(t)|\,dt.$

0 ó +.

Rapidez: $|v(t)|.$

Para esta diagrama.

Desplazamiento $\quad s = A_1 + A_2 \approx 0 \quad A_2$ es negativo.

Distancia: $\quad s = A_1 - A_2.$

Para el ejercicio Ij encuentre la distancia recorrida por la pelota entre $t=1$ y 3 s.

$$d = \int_1^3 |v(t)|\,dt = \int_1^3 |\underbrace{64-32t}_{=0}|\,dt.$$

$v(t) = 0$ cuando $t=2$.

$64-32t \quad + \;\vdots^{2}\; -$

$$d = \int_1^2 v(t)\,dt - \int_2^3 v(t)\,dt$$

$$64 - 32t = 0$$
$$64 = 32t$$
$$2 = t$$

$$d = \int_1^2 64-32t\,dt + \int_2^3 32t-64\,dt.$$

$$d = 64t - 16t^2\Big]_1^2 + 16t^2 - 64t\Big]_2^3$$

$$d = 128 - 64 - (64-16) + 16(9-4) - 64(3-2)$$

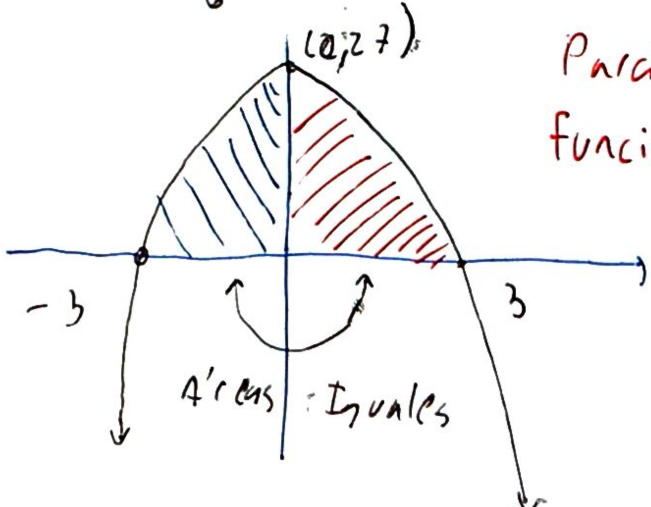
$$d = 64 - 48 + 80 - 64$$

$$d = 16 + 16 = 32 \text{ pies.}$$

Ejercicio 2: Un vehiculo da vueltas en un circuito a una velocidad $v(t) = 27 - 3t^2$ millas/hora.

a. Plantee la integral para encontrar el desplazamiento del vehiculo entre −6 y 6 horas.

$$s = \int_{-6}^{6} (27 - 3t^2)\,dt. = 2\int_{0}^{6} (27 - 3t^2)\,dt.$$



Parábola
función par

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

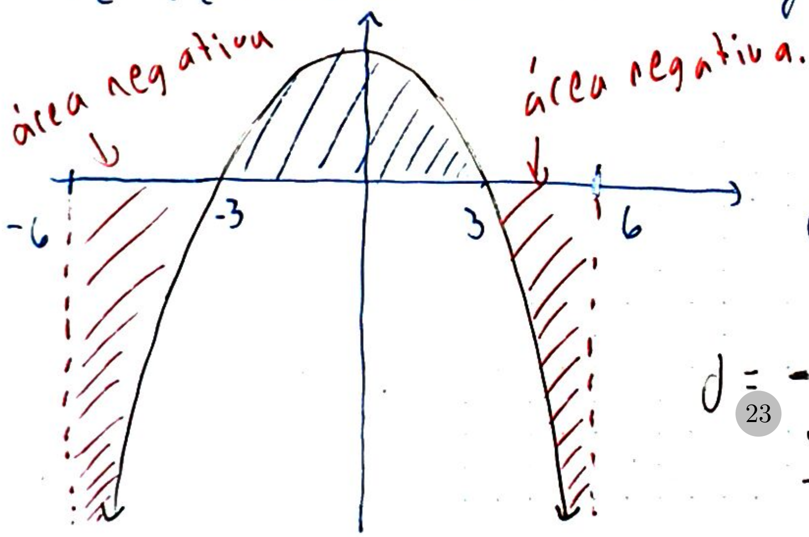
$$f(-x) = f(x)$$

$$s = 2\left(27t - t^3\Big]_{0}^{6}\right) = 2\left(\overset{27\cdot 3\cdot 2}{27\cdot 6} - 6^3\right) = 2(162 - 216)$$

$$2(-54) = -108.$$

millas.

b. Plantee la integral para encontrar la DISTANCIA del vehiculo entre −6 y 6 horas.



$$d = -A_1 + A_2 - A_3.$$

$$d = \int_{-6}^{6} |v(t)|\,dt.$$

$$d = -\int_{-6}^{-3} v(t)\,dt$$

$$d = -\int_{-6}^{-3}(27-3t^2)\,dt + \int_{-3}^{3}(27-3t^2)\,dt + \int_{3}^{6}(\underbrace{3t^2-27}_{v(t)})\,dt$$

GIANCARLO: $d = 2\int_0^3 v(t)\,dt - 2\int_3^6 v(t)\,dt.$

Integrales Indefinidas: desplazamiento, velocidad y aceleración.

$\int f(t)\,dt = F(t) + C$, función.

Dada la aceleración del objeto. $a(t) = v'(t)$.

Velocidad: $v(t) = \int a(t)\,dt + C_1$

Velocidad inicial: $V(0) = V_0$. reposo $V(0) = 0$.

Posición: $s(t) = \int v(t)\,dt. + C_2$.

Posición inicial: $s(0) = s_0$. posición equilibrio $s(0) = 0$

Ejercicio 3: Un cohete despeja con una aceleración vertical de $a(t) = t^2\left(\frac{72}{t} - 36\right)$ ft/s².

La posición inicial es 0 pies snm y la velocidad inicial es de 400 ft/s. sobre el nivel del mar.

a. Encuentre la posición vertical del cohete.

$$a(t) = 72t - 36t^2.$$

Velocidad: $v(t) = \int (72t - 36t^2)\,dt.$

$v(t) = 36t^2 - 12t^3 + C_1$

Use $v(0) = 400$: $v(0) = \boxed{C_1 = 400}$

Posición: $s(t) = \int v(t)\,dt = 12t^3 - 3t^4 + 400t + C_2.$

Use $s(0) = 0$: $s(0) = 0 + 0 + 0 + \boxed{C_2 = 0}$

Posición vertical es $s(t) = 12t^3 - 3t^4 + 400t.$

b. ¿Cuál es la rapidez y la velocidad a los $t = 10$ s?

$v(10) = 36(100) - 12(1000) + 400 = 4{,}000 - 12{,}000$
$-8{,}000$ pies/s.

rapidez $|v(10)| = 8{,}000$ pies/s.

Ejercicio 4: Un resorte inicialmente en reposo y en su punto de equilibrio tiene una aceleración de $a(t) = 4\cos t - 3\sin t$. ✓

Encuentre la velocidad y posición del resorte.

$v(t) = \int (4\cos t - 3\sin t)\,dt = 4\sin t + 3\cos t + C_1$

$v(0) = 0 + 3 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -3.$

$v(t) = 4\sin t + 3\cos t - 3.$

Desplazamiento

$s(t) = \int (4\sin t + 3\cos t - 3)\,dt.$ $\quad s(0)=0$

$s(t) = -4\cos t + 3\sin t - 3t + C_2.$

$s(0) = -4 + 0 + 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 4.$

$s(t) = -4\cos t + 3\sin t - 3t + 4.$

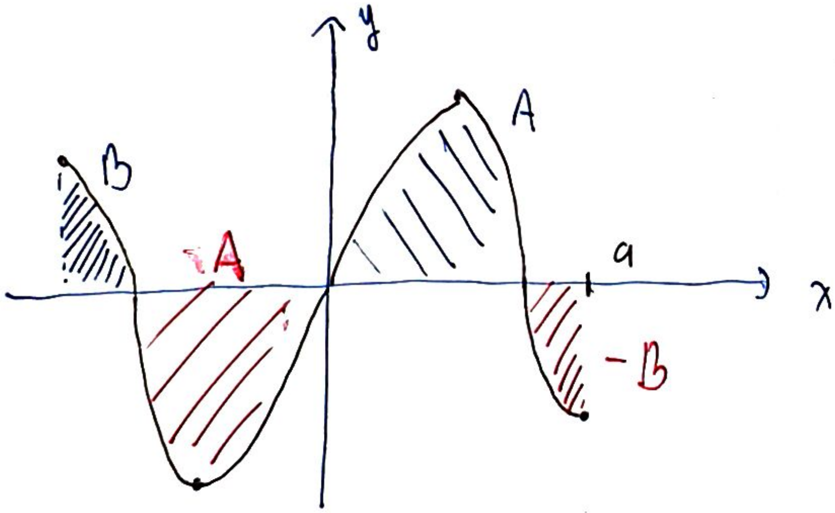
Función Pares e Impares

$$\int_{-100}^{100} (\sin x + x^3 + \tanh x)\,dx = 0.$$

Tres funciones son impares

$\sin(-x) = -\sin x$

$(-x)^3 = -x^3.$



Las áreas se cancelan entre sí.

$$\int_{-a}^{a} f_{impar}(x)\,dx = 0.$$

$$\int_0^1 e^x dx = e-1$$

$$\int_{-a}^{a} f_{par}(x)\,dx = 2\int_0^a f_{par}(x)\,dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 1$$

Capítulo 4

Teorema fundamental del cálculo, parte I & II, derivadas de funciones compuestas y definidas para integrales, generalizaciones de TFC

5.3 Teorema Fundamental del Cálculo.

Si $f(x)$ es continua en $[a, x]$ entonces

PARTE 1: $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$ $\int_a^b$ $\int$

Integral y la derivada se cancelan entre sí.

Como la derivada de una antiderivada es la función original, entonces la $\int_a^x f(t)\,dt$ es la antiderivada de $f(x)$

variable temporal de integración.

se integra primero respecto y se deriva respecto a x.

$$f(x) = \int_{10}^{x} 4t^3\,dt = t^4\Big]_{t=10}^{t=x} = x^4 - 10^4.$$

$$y(t) = \int_0^t \sin(\omega)\,d\omega$$

$$f'(x) = 4x^3$$

$t \to x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_{10}^{x} 4t^3\,dt = 4x^3$$ ATAJO.

TFC parte 2: $$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_{x=a}^{x=b.} = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(w)\,dw = F(w)\Big]_{w=a}^{w=b} = F(b) - F(a)$$

Se pueden definir funciones por medio de integrales.

Distribución normal $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

$$P(x) = \int_0^x \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt.$$ no se puede integrar de manera explícita.

$$\int e^t dt = e^t + C \qquad \int e^{t^2} t\, dt. = \frac{1}{2} e^{t^2} + C.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = 1$$

$$P'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Ejercicio 1: Derive las siguientes funciones. Pág 20.

a) $h(x) = \int_a^x 3\sqrt{t+1}\, dt.$ $\quad h'(x) = 3\sqrt{x+1}$

$t \to x$

b) $S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt$ $\quad S'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)$

$t \to w$

c) $H(w) = \int_{-5}^{w} \frac{t+4}{t^4+t^2+2} dt.$ $\quad H'(w) = \frac{w+4}{w^4+w^2+2}$

TFC parte 1 y la regla de la cadena.

$$g(x) = \int_{100}^{x^5} e^t \, dt = e^t \Big]_{t=100}^{t=x^5} = e^{x^5} - e^{100}$$

$$g'(x) = e^{x^5} \underbrace{5x^4}_{\text{Regla de la cadena}} - 0$$

$h(x) = \sin(x^5 + x^2)$ $\quad h'(x) = \cos(x^5 + x^2)(5x^4 + 2x)$

$$f(x) = \int_{a}^{b(x)} g(t)\,dt. \qquad f'(x) = g(b(x))\, b'(x)$$

$a \leftarrow$ constante. $\quad t \to b(x)$

Ejercicio 2: Derive las siguientes funciones.

a. $g(x) = \int_5^{\ln x} \sqrt{t^2+1}\, dt.$ $\qquad h(x) = \int_5^x \sqrt{t^2+1}\, dt.$

$$g'(x) = \sqrt{(\ln x)^2 + 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{d(\ln x)} \qquad h'(x) = \sqrt{x^2+1}$$

$t \to \ln x$

b. $h(x) = \int_{\sec x}^{8} \tan^{-1}(t)\, dt. = -\int_8^{\sec x} \tan^{-1}(t)\, dt.$

$$h'(x) = -\tan^{-1}(\sec x) \sec x \tan x$$

$t \to \sec x$

c. $\frac{d}{dx}\left(\int_{1000}^{x^5+x^3} \ln(t)\, dt. \right) = \ln(x^5 + x^3)(5x^4 + 3x^2)$

$t \to x^5 + x^3$ • derivada lím superior

Funciones con ambos límites dependiendo de x.

$$f(x) = \int_{\sinh x}^{\cosh x} \sec^2 t \, dt.$$

$$f(x) = \tan t \Big]_{\sinh x}^{\cosh x} = \tan(\cosh x) - \tan(\sinh x)$$

Derive: $f'(x) = \sec^2(\cosh x)\cdot \sinh x - \sec^2(\sinh x)\cosh x$

$t \to \csc x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\tan x}^{\csc x} \sec^2 t \, dt = \sec^2(\csc x)(-\csc x \cot x) - \sec^2(\tan x)(\sec^2 x)$$

TFC parte I y la Regla de la Cadena

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = f(b)\,b' - f(a)\,a'.$$

Ejercicio 3: Derive

$$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{e^x} \sqrt{10+4t^4}\, dt = \sqrt{10+4e^{4x}}\; e^x - \sqrt{10+4\sin^4 x}\,\cos x$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\ln x}^{\sin^{-1} x} \cosh \theta^3 \, d\theta = \cosh(\sin^{-1} x)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cosh(\ln^3 x)\cdot \frac{1}{x}.$$

Ejercicio 4: Encuentre la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \int_0^x \cosh^2 t \, dt$ en $t=0$

Ec. Recta Tangente $y = f(0) + f'(0)(x-0)$

$$f(0) = \int_0^0 \cosh^2 t \, dt = 0 \qquad \int_a^a f(y)\,dy = 0.$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x \cosh^2 t \, dt = \cosh^2 x \cdot 1$$

$$f'(0) = (\cosh 0)^2 = 1^2 = 1$$

Ec. Recta Tangente $y = 0 + 1(x-0)$

$$y = x$$

Capítulo 5

Técnica de integración por sustitución, para integrales definidas e indefinidas

5.5 Regla de la Sustitución

Objetivo: Integre $f(g(x))$ funciones compuestas.

a. $\int 3\underbrace{(x+2)^2}_{x^2+4x+4} dx = \int (3x^2+12x+12)\,dx$

$= x^3+6x^2+12x+C.$

conjeturando $\int 3(x+2)^2 dx = \underbrace{(x+2)^3 + C.}$

derivada $3(x+2)^2 \cdot 1 + 0$

b. $\int 11(x-20)^{10} dx = (x-20)^{11} + C.$

Regla de la Potencia $\quad \frac{d}{dx}[f(x)]^{n+1} \xrightarrow{\text{derivando}} (n+1)[f(x)]^n f'(x)$

$\xleftarrow{\text{integrando}}$

Regla de la sustitución funciones Potencia

$$\int [\underbrace{f(x)}_{u}]^n \underbrace{f'(x)\,dx}_{du} = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

$u = f(x) \quad du = f'(x)\,dx$

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{si } n \neq -1.$$

Ejercicio 1: Evalúe las sigs. integrales.

a. $\int (\overbrace{11x-20}^{u})^{10} \underbrace{11\,dx}_{du} = \int u^{10}\,du = \frac{u^{11}}{11} + C_1$

$u = 11x - 20 \quad du = 11\,dx$

$= \boxed{\frac{1}{11}(11x-20)^{11} + C_1}$

aa. $\int (\overbrace{x^2+x+3}^{u})^5 \overbrace{(2x+1)\,dx}^{du} = \int u^5\,du. = \frac{1}{6}u^6 + C_2,$

Pág. 30

$u = x^2+x+3, \quad du = (2x+1)\,dx \qquad = \frac{1}{6}(x^2+x+3)^6 + C_2$

Multiplicar/Dividir por una constante.

b. $\int (30w^3-8)^{19}\, w^2 dw. = \int u^{19} \frac{du}{90}$

$u = 30w^3 - 8$, $du = 90\underbrace{w^2 dw}.$ $\Rightarrow w^2 dw = \frac{du}{90}.$

$dw = \frac{du}{90w^2}$

$\int u^{19} \frac{du}{90} = \frac{1}{90} \cdot \frac{1}{20} u^{20} + C_3 = \boxed{\frac{1}{1{,}800} (30w^3-8)^{20} + C_3.}$

c. $\int (30w^3-8)^{19}\, 90w^3 dw. = \int u^{19} w\, du.$ X

sustitución incompleta.

$\int \cancel{u^{19} \left(\frac{1}{30}(u+8)\right)^{1/3}} \Big) du$ sólo se puede integrar. por fuerza bruta.

d. $\int 8x^3 \sqrt{8+x^4}\, dx = \int 2u^{1/2} du = 2 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C$

$u = 8 + x^4$ $du = 4x^3 dx$ $\Rightarrow$ $2du = 8x^3 dx.$

La integral es $\frac{4}{3}(8+x^4)^{3/2} + C.$

e. $\int (10x^2+6x)^2 dx = \int (100x^4 + 120x^3 + 36x^2) dx$

No se usa la sustitución expanda y luego integre

$= \boxed{20x^5 + 30x^4 + 12x^3 + C.}$

Regla de la Cadena Derivadas. $\frac{d}{dx}\left[f(g(x))\right] = f'(g(x))\, g'(x)$

Regla de la Sustitución $\int f'(g(x))\, g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du = f(u) + C.$

$u = g(x), \quad du = g'(x)\,dx \qquad = f(g(x)) + C.$

Cadena a la Inversa.

Ejercicio 2: Integre. Pág 32.

0. $\int \frac{(8+16x+48x^2)}{x+x^2+2x^3}\,dx = \int \frac{8\,du}{u} = 8\ln|u| + C$
$= \boxed{8\ln|x+x^2+2x^3| + C.}$

$u = x + x^2 + 2x^3 \qquad du = (1+2x+6x^2)\,dx$
$8\,du = (8+16x+48x^2)\,dx$

a. $\int e^{\overbrace{x^{10}+\sqrt{2}}^{u}}\, x^9\,dx = \int e^u \frac{du}{10} = \frac{1}{10}e^u + C$
$= \frac{1}{10} e^{x^{10}+\sqrt{2}} + C.$

$u = x^{10} + \sqrt{2} \qquad \frac{du}{10} = \frac{10x^9\,dx}{10}.$

a2 $\int e^{x^{10}} \underbrace{x^8\,dx}_{\neq du} \qquad \int e^{x^{10}} \underbrace{dx}_{\neq du.}$ no se puede integrar.

b. $\int x^3(x^4+3)^2 \sin(x^4+3)^3\,dx = \int u^2 \sin u^3 \frac{du}{4}.$

$u = (x^4+3) \qquad du = 4x^3\,dx \qquad \frac{du}{4} = x^3\,dx$

$u = (x^4+3)^3$ ✓

$\frac{1}{4}\int \sin(u^3)\, u^2\,du = \frac{1}{4}\int \sin t \frac{dt}{3} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cos t + C$

$t = u^3 \qquad dt = 3u^2\,du.$

$= -\frac{1}{12}\cos u^3 + C$

$= -\frac{1}{12}\cos(x^4+3)^3 + C$

Una sola sustitución.

$$\int \sin(x^4+3)^3 \underbrace{[(x^4+3)^2 x^3]\,dx}_{du/12} = \frac{1}{12}\int \sin u\, du.$$

$u = (x^4+3)^3$, $du = 3(x^4+3)^2\, 4x^3\, dx$

$$\frac{du}{12} = (x^4+3)^2 x^3\, dx$$

c. $\int \cot x\, dx = \int \underbrace{\frac{\cos x}{\sin x}\, dx}_{du} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$

$= \ln|\sin x| + C.$

$u = \sin x \quad du = \cos x\, dx$

d. $\int \sec^2 \underbrace{(e^x + x)}_{u} \underbrace{(e^x+1)\, dx}_{du} = \int \sec^2 u\, du = \tan u + C.$

$u = e^x + x \quad du = (e^x + 1)dx \qquad = \tan(e^x + x) + C.$

Sustitución Incompleta. $\quad x = u - 4.$

e. $\int 28x(x+4)^{1/3}\, dx = \int 28x\, u^{1/3}\, du.$

$u = x + 4 \quad du = 1 \cdot dx \quad = \int 28(u-4)\, u^{1/3}\, du.$

$28\int u^{4/3} - 4u^{1/3}\, du = 28\left[\frac{3}{7}u^{7/3} - 4\cdot\frac{3}{4}u^{4/3}\right] + C$

$= 12(x+4)^{7/3} - 84(x+4)^{4/3} + C.$

Regla de la sustitución para Integrales Definidas

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

$u = g(x)$

$du = g'(x)\, dx$

$u = g(a)$

$u = g(b)$

Cambie también los límites.

S.

Ejercicio 3: Integre.

a. $\displaystyle\int_{-4}^{0} \frac{1}{3x-2}\, dx = \int_{-14}^{-2} \frac{1}{u} \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \ln|u| \Big]_{-14}^{-2} = (\ln 2 - \ln 14)\frac{1}{3}$

$= -\dfrac{\ln 7}{3}$

f es continua en $x \neq \frac{2}{3}$

$u = 3x-2 \qquad du = 3 \cdot dx$

$u(0) = 0-2 = -2, \qquad u(-4) = -12-2 = -14$

b. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{8}{\pi} \frac{\sin^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{8}{\pi} \int_{0}^{\pi/2} u\, du. = \frac{8}{\pi} \frac{u^2}{2} \Big]_{0}^{\pi/2} = \frac{4}{\pi} \frac{\pi^2}{4}$

$= \pi$

¿u? $\quad u = \sin^{-1} t \qquad u(1) = \sin^{-1}(1) = \pi/2$

$du = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad u(0) = \sin^{-1}(0) = 0$

Capítulo 6

Técnica de integación por partes, para integrales definidas e indefinidas

7.1 Integración por partes

$$\int \ln x \, dx \qquad \int \tan^{-1} x \, dx \qquad \int x^3 e^x \, dx \qquad \int e^x \cos x \, dx$$

IPP: Integre productos de funciones "disimilares".

$$\int \underbrace{f(x)} \, \underbrace{g(x)\, dx} = ?$$

Regla del Producto para Derivadas.

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(fg)' - f'g = fg' \qquad \text{Integre esta expresión.}$$

IPP $\boxed{\int fg' = fg - \int f'g}$

f deriva.
g' integra.

$\int fg'$

$\int f'g$ más simple que la integral original.

$$\int \underbrace{f(x)}_{u} \, \underbrace{g(x)\, dx}_{dv} = uv - \int v\, du$$

$u = f(x)$ $\quad dv = g(x)\, dx$

$du = f'(x)\, dx$ $\quad v = G(x)$

$$\boxed{\int u\, dv = uv - \int v\, du}$$

Ejercicio 1: Pág 39 Integre $\int x e^x \, dx$

Opción 1: $u = x$ $\quad dv = e^x \, dx$
$du = 1 \cdot dx$ $\quad v = e^x$

Opción 2: ~~$u = e^x$ $\quad dv = x\, dx$~~
~~$du = e^x\, dx$ $\quad v = \frac{1}{2}x^2$.~~

$$\int x e^x \, dx = \underbrace{x e^x}_{u \cdot v} - \underbrace{\int e^x \, dx}_{v\, du} = x e^x - e^x + C.$$

Derive y compruebe su respuesta.

Ejercicio 2: Integre $\int fg' = fg - \int f'g$

ó $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

a. $\int 6x^2 \ln x \, dx = (\ln x)\, 2x^3 - \int \frac{1}{x} 2x^3 \, dx$ $\qquad \frac{x^3}{x} = x^2$

$u = \ln x \qquad dv = 6x^2 \qquad 2x^3 \ln x - \int 2x^2\,dx$

$du = \frac{1}{x} \qquad v = 2x^3 \qquad \boxed{2x^3 \ln x - \frac{2}{3}x^3 + C.}$

b. $\int \ln x \, dx = \underset{v}{x}\, \underset{u}{\ln x} - \int \underset{v}{x}\, \underset{du}{\frac{dx}{x}} = x\ln x - \int dx$

$= \boxed{x\ln x - x + C.}$

$u = \ln x \qquad dv = 1 \cdot dx$

$du = \frac{dx}{x} \qquad v = x$

c. $\int \tan^{-1} x \, dx = \underset{v}{x}\, \underset{u}{\tan^{-1} x} - \int \underset{v\ du}{\frac{x}{1+x^2}\,dx}$

$u = \tan^{-1} x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad v = x$

$\int \frac{1}{1+x^2} \overbrace{x\,dx}^{du/2.} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C.$

Sustitución. $u = 1+x^2 \quad du = 2x\,dx$

$\int \tan^{-1} x \, dx = \boxed{x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| - C}$

J. $\int x^2 \cos x \, dx = \underbrace{x^2 \sin x}_{uv} - \int \underbrace{2x \sin x \, dx}_{v\,du.}$

$u = x^2 \qquad dv = \cos x \, dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = \sin x$

otra vez IPP.

$\int 2x \sin x \, dx = -2x \cos x + \int 2 \cos x \, dx = -2x \cos x + 2 \sin x + C$

$u = 2x \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = 2\,dx \qquad v = -\cos x$

$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$

ILATE.

Mnemotecnia.

Inversas trigonométricas $\sin^{-1} x, \tan^{-1} x$

Logarítmicas $\ln x, \log_a x$

Algebraicas $x^n, \sqrt{x}, 1/x^r$

Trigonométricas $\sin x, \cos x, \tan x$

Exponenciales. e^x, a^x

IPP:

Integrales Definidas:

no cambian los límites

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big]_a^b - \int_a^b v\,du$$

Ejercicio 3: Evalúe. a) Interesante.

b. $72 \int_1^2 \frac{\ln x}{x^4} dx. = 72 \ln x \left(\frac{-1}{3x^3}\right)\Big]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^{-3}}{-3} x^{-1} dx$

$u = \ln x \qquad dv = x^{-4} dx$

$du = x^{-1} dx \qquad v = \frac{x^{-3}}{-3}$

$$-\frac{24}{1x^3}\ln x\Big]_1^2 - \int_2^1 \frac{x^{-4}}{3}dx \qquad -x^{-4} \to \frac{-x^{-3}}{-3}$$

$$-\frac{24}{8}\ln 2 + \frac{24}{1}\cancel{\ln 1}^{\,0} + \frac{1}{3x^3}\Big]_2^1$$

$$-3\ln 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 8}$$

Resuelto con detalles pág 42.

incógnita

$$\boxed{\int e^x \cos x\, dx} = e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx \qquad (1)$$

$u = \cos x \qquad dv = e^x dx$

$du = -\sin x\, dx \qquad v = e^x$

$$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \boxed{\int e^x \cos x\, dx} \qquad (2)$$

incógnita.

$u = \sin x \qquad dv = e^x dx$

$du = \cos x\, dx \qquad v = e^x$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx$$

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \sin x + C.$$

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}e^x \cos x - \frac{1}{2}e^x \sin x + C.$$

Capítulo 7

Integrales trigonométrias, manipulación con identidades trigonométricas de la forma

1) $\int \sin^n(x)\cos(x)^m dx$

2) $\int \tan^n(x)\sec(x)^m dx$

3) $\int \cot^n(x)\sec^m(x) dx$

7.2 Integrales Trigonométricas.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad \div \cos^2 x.$

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x \quad \div \sin^2 x.$

I. Integrales de la forma $\int \sin^n x \cos^m x \, dx$

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

$u = \sin x, \; du = \cos x \, dx \qquad u = \cos x, \quad du = -\sin x \, dx$

Evalúe $\int \cos^5 x \, dx = \int \cos^4 x \underbrace{(\cos x \, dx)}_{du}$

Reescriba $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = (1-\sin^2 x)^2$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\int \cos^5 x \, dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \underbrace{(\cos x \, dx)}$

$u = \sin x \qquad du = \cos x \, dx$

$= \int (1-u^2)^2 \, du$

$= \int (1 - 2u^2 + u^4) \, du$

$= u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C.$

$\sin^3 x \neq \sin x^3$

$(\sin x)^3$

$= \boxed{\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.}$

Aparte algún término sinx ó cosx

a. Potencias impares de seno o coseno.

Ejercicio 1: Evalúe.

a. $\int \cos^3 x \sin^6 x \, dx = \int \cos^2 x \sin^6 x (\cos x \, dx)$

$\int \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} \sin^6 x \cos x \, dx$ ó $\int \cos^3 x \sin^5 x \sin x \, dx$ (impar; $1-\cos^2 x$ ✗)

$\cos^2 x = 1-\sin^2 x$

$$= \int (1-\sin^2 x) \sin^6 x \, (\cos x \, dx)$$

$u = \sin x$

$du = \cos x \, dx$

$$= \int (1-u^2) u^6 \, du$$

$$= \int (u^6 - u^8) \, du$$

$$= \frac{1}{7} u^7 - \frac{1}{9} u^9 + C.$$

$(a+b+c)d$

$ad + bd + cd.$

$$= \boxed{\frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{1}{9} \sin^9 x + C.}$$

b. $\int \cos^5 x \sin^3 x \, dx = \int \cos^5 x (\sin^2 x) \sin x \, dx$

$\int \underbrace{\cos^4 x}_{(1-\sin^2 x)^2} \sin^3 x \cos x \, dx$ ✓ ó $\int \cos^5 x \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} \sin x \, dx$ ✓

$$= \int \cos^5 x (1-\cos^2 x) \sin x \, dx$$

$u = \cos x$

$du = -\sin x \, dx$

$$= -\int u^5 (1-u^2) \, du = \int (-u^5 + u^7) \, du$$

$$= -\frac{1}{6} u^6 + \frac{1}{8} u^8 + C.$$

$$= \boxed{-\frac{1}{6} \cos^6 x + \frac{1}{8} \cos^8 x + C.}$$

b) Potencias pares de seno y coseno

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\, dx = \boxed{\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.}$$

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x. \quad (1)$$

$$\cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (2)$$

$$1 + \cos(2x) = 2\cos^2 x \Rightarrow \boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x}$$

(1) + (2)

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

Ejercicio 2: Evalúe.

a $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx = 2\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \frac{2}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx$$

PAR.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx = 0 \quad \text{impar.}$$

$360°$

$$\int_0^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx = x - \frac{1}{2}\sin 2x \Big]_0^{\pi} = \pi - \frac{1}{2}\cancel{\sin 2\pi}^{\,0} - 0 + \frac{\sin 0}{2}$$

$u = 2x \qquad du = 2dx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx = \pi.$$

$$\cos^2 \square = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\square)$$

b. $$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\, dx$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

doble

$$= \frac{1}{4}\int (1 - \cos^2 \underline{\underline{2x}})\, dx$$

$$\cos^2(2x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \quad = \frac{1}{4}\int \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x \ dx.$$

$\int af\,dx$

$= aF + C$

$$= \boxed{\frac{x}{8} + \frac{1}{8\cdot 4}\sin 4x + C.}$$

II Forma $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$

$(\tan x)' = \sec^2 x$ aparte	$(\sec x)' = \sec x \tan x$ aparte.
$u = \tan x$	$u = \sec x$
$\sec^2 x = \tan^2 x + 1$	$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

Ejercicio 3: Evalúe Pág. 48.

a. $\int \tan^5 x \sec^4 x \, dx$

$\int \tan^5 x \underbrace{\sec^2 x}_{\tan^2 x+1} (\sec^2 x dx)$ ✓ ó $\int \tan^4 x \sec^3 x(\tan x \sec x \, dx)$ ✓

$u = \tan x$

$u = \sec x$

$(\tan^2 x)^2 = (\sec^2 x - 1)^2$

$\int \tan^5 x \sec^2 x (\sec^2 x dx)$

$u = \tan^2 x$ ×

$du = 2\tan x \sec^2 x \, dx$ ×

$\int \tan^5 x(\tan^2 x + 1)(\sec^2 x \, dx)$

$u = \tan x$ $du = \sec^2 x \, dx$

$$\int u^5(u^2+1)\,du = \int(u^7+u^5)\,du = \frac{u^8}{8} + \frac{u^6}{6} + C.$$

$$= \boxed{\frac{1}{8}\tan^8 x + \frac{1}{6}\tan^6 x + C.}$$

s.

Sharon: Resumen Identidades y luego sustitución.

b. Alejandro $\int \tan^5 x \sec^5 x \, dx$

$\int \tan^4 x \sec^4 x (\sec x \tan x \, dx)$ ✓

$\int \tan^5 x \sec^3 x (\sec^2 x \, dx)$ X

$\int (\tan^2 x)^2 \sec^4 x \, (\sec x \tan x \, dx)$ $\quad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$\int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^4 x \, (\sec x \tan x \, dx)$

$u = \sec x \qquad du = \sec x \tan x \, dx.$

$\int (u^2-1)^2 u^4 \, du = \int (u^4 - 2u^2 + 1) u^4 \, du.$

$\int (u^8 - 2u^6 + u^4) \, du = \frac{1}{9} u^9 - \frac{2}{7} u^7 + \frac{1}{5} u^5 + C.$

$= \frac{1}{9} \sec^9 x - \frac{2}{7} \sec^7 x + \frac{1}{5} \sec^5 x + C.$

c. $\int \tan^4 x \sec^4 x \, dx. = \int \tan^4 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx$

sólo tan's.

$\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ $\quad = \int \tan^4 x (\tan^2 x + 1)(\sec^2 x \, dx)$

$u = \tan x \quad du = \sec^2 x \, dx$ $\quad = \int u^4 (u^2 + 1) \, du.$

$= \int u^6 + u^4 \, du = \frac{1}{7} u^7 + \frac{1}{5} u^5 + C$

$= \frac{1}{7} \tan^7 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + C.$

Casos especiales $\int \tan^m x\,dx$ $\int \sec^n x\,dx$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\overbrace{\sin x\,dx}^{-du}}{\underbrace{\cos x}} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C.$$
$$= -\ln|\cos x| + C.$$

$u = \cos x$ $\quad du = -\sin x\,dx$

$$\int \sec x\,dx = \int \sec x \frac{(\sec x + \tan x)^*}{\tan x + \sec x^*}\,dx$$ Brillante.

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\tan x + \sec x}\,dx$$

$u = \tan x + \sec x$ $\qquad du = (\sec^2 x + \sec x \tan x)\,dx$

$$= \int \frac{du}{u} - \ln|u| + C = \ln|\tan x + \sec x| + C.$$

$$\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C.$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C.$$

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$$\int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \tan x - x + C.$$

$$\int \tan^3 x\,dx = \int \tan^2 x \tan x\,dx$$
$$= \int (\sec^2 x - 1)\tan x\,dx$$
$$= \int (\sec^2 x \tan x - \tan x)\,dx$$
$$= \int \underbrace{\tan x}_{u}\, \underbrace{\sec^2 x\,dx}_{du} - \int \tan x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

$u = \tan x$
$du = \sec^2 x\,dx$

Más Difícil $\int \sec^3 x \, dx$.

$$\int \sec x \sec^2 x \, dx = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x \, dx$$

IPP $u = \sec x$ $\quad dv = \sec^2 x \, dx$

$du = \sec x \tan x \, dx$ $\quad v = \tan x$

$$\int \tan^2 x \sec x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx$$
$$= \int (\sec^3 x - \sec x) \, dx$$

$$\underline{\int \sec^3 x \, dx} = \sec x \tan x - \underline{\int \sec^3 x \, dx} + \int \sec x \, dx$$

$$2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \text{derivada}(\sec) + \frac{1}{2} \text{integral}(\sec)$$

$$\frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

Capítulo 8

Integrales trigonométricas (continuación), forma
1) $\int \sin^n(x)\cos(x)^m dx$
2) $\int sec^n(x)tan^m(x)dx$
3) $\int \csc^n(x)\cot^m(x)dx$
introducción a integración por sustitución trigonométrica

Lunes 26 de agosto Simulacro Parcial.
3 de septiembre Parcial 1
capítulos 5 y 7 Págs 11-70.

Integrales de la forma $\int \cot^n x \csc^m x \, dx$

$(\csc x)' = -\csc x \cot x$ $\quad$ $(\cot x)' = -\csc^2 x$

$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ $\quad$ $\csc^2 x = \cot^2 x + 1$

$u = \csc x$ $\quad$ $u = \cot x$

Ejercicio 4: Integre (Pág 50).

a $\int \cot^2 x \csc^4 x \, dx$

$\cot^2 \csc^2 x \csc^2 x$ ✓

~~$\cot x \csc^3 x (\csc x \cot x)$~~

$\int \cot^2 x \csc^2 x (\csc^2 x \, dx) = \int \cot^2 x (\cot^2 x + 1) \csc^2 x \, dx$

$\csc^2 x = \cot^2 x + 1, \quad u = \cot x \quad du = -\csc^2 x \, dx$

$= -\int u^2 (u^2+1) \, du$

$= -\int (u^4 + u^2) \, du = -\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C.$

$$\boxed{= -\frac{\cot^5 x}{5} - \frac{\cot^3 x}{3} + C.}$$

b. $\int \cot^3 x \csc^3 x \, dx = \int \cot^2 x \csc^2 x (\cot x \csc x \, dx)$

$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ $\quad = \int (\csc^2 x - 1) \csc^2 x (\cot x \csc x \, dx)$

$u = \csc x \quad du = -\csc x \cot x \, dx \quad = -\int (u^2 - 1)(u^2) \, du.$

$$-\int (u^4 - u^2)\, du = -\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + C.$$

$$= \boxed{-\frac{\csc^5 x}{5} + \frac{\csc^3 x}{3} + C.}$$

Casos especiales $\int \csc x\, dx$ $\int \csc^3 x\, dx$

$$\boxed{\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C.}$$

$$\int \csc x \frac{(\csc x + \cot x)}{\cot x + \csc x}\, dx = \int \frac{\csc^2 x + \csc x \cot x}{\cot x + \csc x}\, dx$$

$*$ "1" especial.

$u = \cot x + \csc x.$

$-du = (\csc^2 x + \csc x \cot x)dx$

$$= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C. = -\ln|\cot x + \csc x| + C.$$

$$\boxed{\int \csc x\, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C.}$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}(\sec x)' + \frac{1}{2}\int \sec x\, dx$$

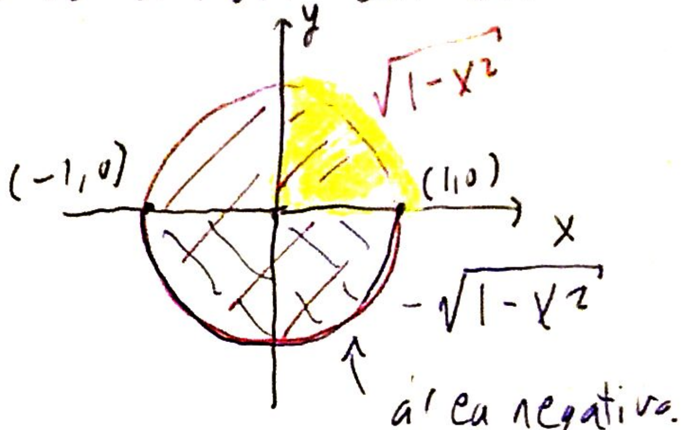
$$= \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$

$$\int \csc^3 x\, dx = \frac{1}{2}(\csc x)' + \frac{1}{2}\int \csc x\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\csc x \cot x - \frac{1}{2}\ln|\csc x + \cot x| + C.$$

Área de un círculo unitario sin utilizar Geometría

Ec: $x^2 + y^2 = 1$



función: $y^2 = 1 - x^2$.

2 Funciones $y = \pm\sqrt{1-x^2}$

$$A = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx + \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx \qquad \int_{1}^{-1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$A = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = 4\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx \qquad u = 1-x^2$$

función par  $du \neq -2x\,dx$

Ni sustitución ni integración por partes.

$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$.

$$A = 4\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2\theta}}_{\cos\theta}\, \cos\theta\, d\theta.$$

$x = \sin\theta$.

$dx = \cos\theta\, d\theta$.

$$A = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta.$$

$x = 1 = \sin\theta \Rightarrow \theta = \pi/2$

$x = 0 = \sin\theta \Rightarrow \theta = 0$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$A = \frac{4}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta. = 2\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta \Big]_0^{\pi/2}\right)$$

$$A = 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cancelto{0}{\sin\pi} - 0 - \frac{1}{2}\cancelto{0}{\sin 0}\right) = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Área de un circulo de radio (1) $\pi(1)^2$.

7.3 Sustitución Trigonométrica (Pág 54).

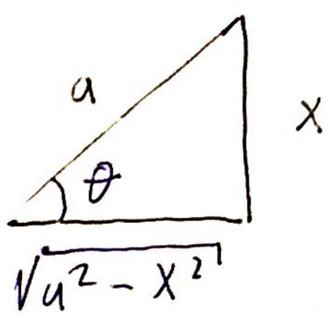
$$\int f(x)\, dx = \int \underbrace{f(g(\theta))}\, g'(\theta)\, d\theta.$$

simplifique si es posible.

$x = g(\theta) \qquad dx = g'(\theta)\, d\theta$

$\sqrt{1-x^2}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\sqrt{\sec^2\theta - 1}$
$x = \sin\theta$	$x = \tan\theta$	$x = \sec\theta.$	$\sqrt{\tan^2\theta}$
$1-\sin^2\theta = \cos^2\theta.$	$1+\tan^2\theta = \sec^2\theta.$		$\sqrt{x^2-1} = \tan\theta.$
$\sqrt{1-x^2} = \cos\theta.$	$\sqrt{1+x^2} = \sec\theta.$		

Forma $\sqrt{a^2 - x^2}$



$\sin\theta = \dfrac{C.O.}{H} = \dfrac{x}{a.}$

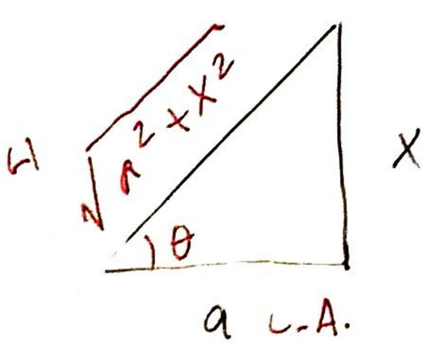
$\cos\theta = \dfrac{C.A.}{H} = \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a.}$

$x = a \cdot \sin\theta$

$dx = a \cdot \cos\theta \, d\theta.$

$\sqrt{a^2-x^2} = a \cdot \cos\theta.$

Forma $\sqrt{a^2+x^2}$



$\sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ $\qquad \tan\theta = \dfrac{x}{a.}$

$\dfrac{H}{C.A.} = \sec\theta = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{a.}$ $\qquad \dfrac{C.A.}{H}$

$x = a \cdot \tan\theta.$

$dx = a \cdot \sec^2\theta \, d\theta. \qquad \sqrt{a^2+x^2} = a \cdot \sec\theta.$

Ejercicio 1: Evalúe.

$$\int \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\,dx = \int \frac{-1}{\sqrt{u}}\cdot\frac{du}{2} = -\int \frac{u^{-1/2}}{2}\,du = -\frac{2u^{1/2}}{2} + C$$

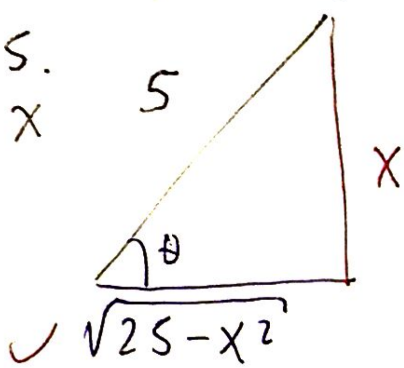
$u = 25 - x^2$ $\quad du = -2x\,dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{-2x}$ $\quad = -u^{1/2} + C.$

$$= -\sqrt{25-x^2} + C.$$

Sustitución Trigonométrica.

$H = 5.$

$C.O = x$



$x = 5\sin\theta.$

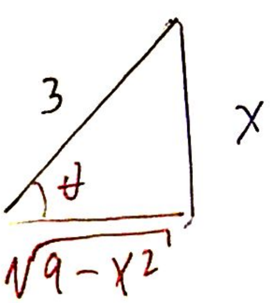
$dx = 5\cos\theta\,d\theta.$

$\sqrt{25-x^2} = 5\cos\theta.$ $\quad \dfrac{C.A.}{H.}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\,dx = \int \frac{5\sin\theta.\;5\cos\theta\,d\theta.}{5\cos\theta} = \int 5\sin\theta\,d\theta.$$

$$= -5\cos\theta + C. = \cdot\sqrt{25-x^2} + C.$$

a $$\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{27\sin^3\theta}{3\cancel{\cos\theta}}\,3\cancel{\cos\theta}\,d\theta. = 27\int \sin^3\theta\,d\theta.$$



$\sin\theta = \dfrac{x}{3}$

$\cos\theta. = \dfrac{1}{3}\sqrt{9-x^2}$

$x^3 = 27\sin^3\theta$

$x = 3\sin\theta$

$dx = 3\cos\theta\,d\theta$

$\sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta.$

$$27\int \sin^2\theta\,\sin\theta\,d\theta. = 27\int(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta.$$

$u = \cos\theta$ $\quad du = -\sin\theta\,d\theta.$

$$= -27\int (1-u^2)\,du = -27\left(u - \frac{u^3}{3}\right) + C.$$

$$= -27u + 9u^3 + C.$$

regrese a var. θ.

$$= -27\cos\theta + 9\cos^3\theta + C$$

regrese a var x.

$$= -27\,\frac{1}{3}\sqrt{9-x^2} + 9\,\frac{1}{27}\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3 + C.$$

$$= -9\sqrt{9-x^2} + \frac{1}{3}(9-x^2)^{3/2} + C.$$

Caso Integrales Trigonométricas.

$$\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left(\sin(m-n)x + \sin(m-n)x\right)$$

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m-n)x\right)$$

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right)$$

Ejercicio 5: Evalúe. (Pág 51)

a $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin \underset{m}{8}x \cos \underset{n}{4}x\,dx = 0.$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin 4x + \underset{0}{\sin 12x})\,dx = \frac{1}{2}\left(\underset{0}{\left.-\frac{\cos 4x}{4}\right]_{-\pi}^{\pi}} - \left.\frac{\cos 12x}{12}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\underset{-\frac{1}{4}}{-\frac{\cos 4\pi}{4}} + \underset{+\frac{1}{4}.}{\frac{\cos(4\pi)}{4}} - \frac{\cos 12\pi}{12} + \frac{\cos 12\pi}{12}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(0+0) = 0.$$

Capítulo 8. Integrales trigonométricas (continuación), forma
1) $\int \sin^n(x)\cos(x)^m dx$
2) $\int sec^n(x)tan^m(x)dx$
3) $\int \csc^n(x)\cot^m(x)dx$
introducción a integración por sustitución trigonométrica

Capítulo 9

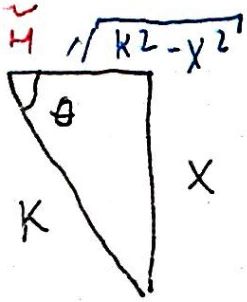
Sustitución trigonométrica por medio del triángulo pitagórico

7.3 Sustitución Trigonométrica

Forma $\sqrt{K^2 - x^2}$

$H = K$

$C.O = x$

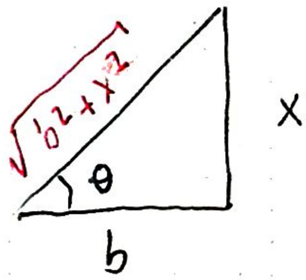


$\frac{C.O}{H} = \sin\theta = \frac{x}{K} \Rightarrow x = K\sin\theta.$

$dx = K\cos\theta\, d\theta.$

$\frac{\sqrt{K^2-x^2}}{K} = \cos\theta \Rightarrow \sqrt{K^2-x^2} = K\cdot\cos\theta.$

Forma $\sqrt{b^2 + x^2}$

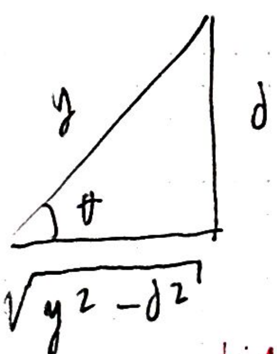


$\frac{x}{b} = \tan\theta. \Rightarrow x = b\cdot\tan\theta.$

$dx = b\cdot\sec^2\theta\, d\theta.$

$\frac{\sqrt{b^2+x^2}}{b.} = \sec\theta \Rightarrow \sqrt{b^2+x^2} = b\sec\theta.$

Forma $\sqrt{y^2 - d^2}.$



$\operatorname{sen}\theta = \frac{d}{y}$

$y = d\cdot\csc\theta.$

$dy = -d\cdot\csc\theta\cot\theta.$

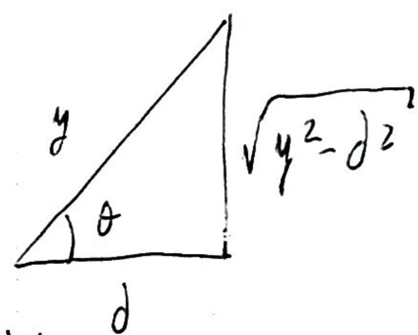
tiene signos negativos

$\frac{y}{d} = \sec\theta.$

$y = d\sec\theta.$

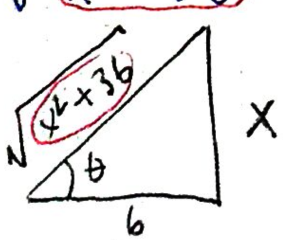
$dy = d\cdot\sec\theta\tan\theta.$

$\sqrt{y^2-d^2} = d\tan\theta.$



Ejercicios 2 y 3 Pág 58 y 59.

20) $\int \frac{1}{x^2+36}\,dx = \int \frac{6\sec^2\theta\, d\theta}{36\sec^2\theta} = \int \frac{d\theta}{6} = \frac{\theta}{6} + C$



$x = 6\cdot\tan\theta.$

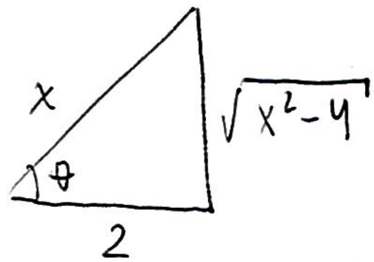
$dx = 6\cdot\sec^2\theta\, d\theta.$

$x^2 + 36 = 36(\tan^2\theta + 1) = 36\sec^2\theta$

$$\frac{1}{6}\int d\theta = \frac{1}{6}\theta + C. = \boxed{\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{x}{6}\right) + C.}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{6}\right) = \theta.$$

3a. $$\int \frac{(x^2-4)^{3/2}}{x^6}\,dx = \int \frac{2^3\tan^3\theta.}{2^6\cdot\sec^6\theta.}\,2\cdot\sec\theta\tan\theta\,d\theta.$$



$$\frac{2}{x} = \cos\theta. \rightarrow \quad x = \frac{2}{\cos\theta} = 2\sec\theta.$$

$$dx = 2\sec\theta\tan\theta\,d\theta.$$

$$\sqrt{x^2-4} = 2\tan\theta.$$

$$\left[(x^2-4)^{1/2}\right]^3 = 8\tan^3\theta.$$

$$\frac{1}{2^2}\int \frac{\tan^4\theta}{\sec^5\theta.}\,d\theta. = \frac{1}{4}\int \frac{\sin^4\theta}{\cos^4\theta.}\cos^5\theta\,d\theta.$$

$u = \sin\theta \quad du = \cos\theta\,d\theta$

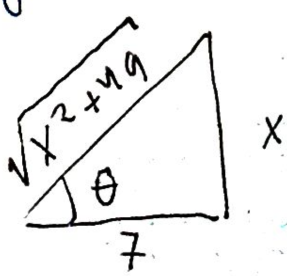
$\frac{1}{4}\int u^4 du.$

$$= \frac{1}{4}\int \underbrace{\sin^4\theta}_{u^4}\,\underbrace{\cos\theta\,d\theta}_{du}. = \boxed{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\sin^5\theta + C.}$$

Regrese ala variable x $\quad \sin\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}$, $\quad \sin^5\theta = \dfrac{(x^2-4)^{5/2}}{x^5}$

$$\int \frac{(x^2-4)^{3/2}}{x^6}\,dx = \boxed{\frac{1}{20}\,\frac{(x^2-4)^{5/2}}{x^5} + C.}$$

2a $$\int \frac{49}{x^2\sqrt{x^2+49}}\,dx = \int \frac{49 \cdot \cancel{7}\sec^2\theta}{49\tan^2\theta.\ \cancel{7}\sec\theta.}\,d\theta. = \int \frac{\sec\theta}{\underbrace{\tan^2\theta}_{\sec^2\theta - 1}}\,d\theta.$$



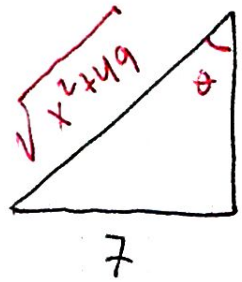
$$\frac{x}{7} = \tan\theta \qquad x = 7\tan\theta.$$

$$dx = 7\sec^2\theta\,d\theta.$$

$$\frac{H}{C.A.} = \sec\theta. \qquad \sqrt{x^2+49} = 7\sec\theta.$$

3.

2a) $$\int \frac{49}{x^2\sqrt{x^2+49}}\,dx = \int \frac{-49\cdot 7\csc^2\theta\,d\theta}{49\cot^2\theta\;7\csc\theta} = -\int \frac{\csc\theta}{\cot^2\theta}\,d\theta.$$



$$\frac{x}{7} = \cot\theta \Rightarrow x = 7\cot\theta.$$

$$dx = -7\csc^2\theta\,d\theta.$$

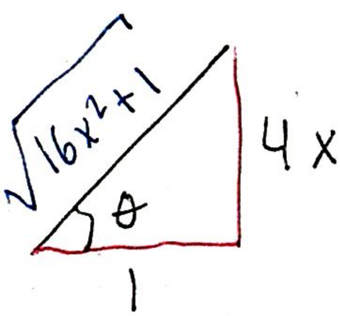
$$\frac{\sqrt{x^2+49}}{7} = \csc\theta \Rightarrow \sqrt{x^2+49} = 7\csc\theta.$$

$$-\int \frac{\csc\theta}{\cot^2\theta}\,d\theta = -\int \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = -\int \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,\frac{1}{\cos\theta}\,d\theta.$$

$$= -\int \sec\theta\tan\theta\,d\theta.$$

$$= -\sec\theta + C. = -\frac{\sqrt{x^2+49}}{x} + C.$$

3b) $$\int \frac{1}{x\sqrt{16x^2+1}}\,dx = \int \frac{(1/4)\sec^2\theta\,d\theta}{(1/4)\tan\theta\cdot\sec\theta} = \int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\,d\theta.$$



$$\frac{4x}{1} = \tan\theta. \Rightarrow x = \tfrac{1}{4}\tan\theta.$$

$$dx = \tfrac{1}{4}\sec^2\theta\,d\theta.$$

$$\sqrt{16x^2+1} = \sec\theta.$$

$\ln|\quad|$

$$\int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\,d\theta = \int \frac{1}{\cos\theta}\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta = \int \frac{1}{\sin\theta}\,d\theta = \int \csc\theta\,d\theta.$$

$$= -\ln\left|\csc\theta + \cot\theta\right| + C.$$

$$= -\ln\left|\frac{\sqrt{16x^2+1}}{4x} + \frac{1}{4x}\right| + C.$$

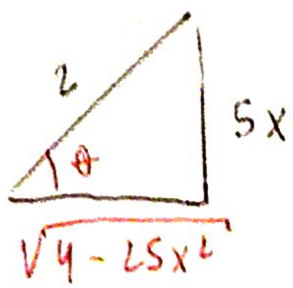
Capítulo 10

Más problemas de integración por sustitución trigonométrica

Parcial Lunes 2 septiembre 1:00 PM. D-503 B.
2:30 PM D-505 A

Sub 5.

$$\int 5^8 x^7 \sqrt{4-25x^2}\,dx = 5^8\int \frac{2^7}{5^7}\sin^7\theta \, 2\cdot\cos\theta \cdot \frac{2}{5}\cos\theta \, d\theta.$$



$\frac{5x}{2} = \sin\theta$ $x = \frac{2}{5}\sin\theta.$

$dx = \frac{2}{5}\cos\theta\, d\theta$

$\sqrt{4-25x^2} = 2\cos\theta.$

$x^7 = \frac{2^7}{5^7}\sin^7\theta.$

$$\frac{5^8}{5^8} 2^9 \int \sin^7\theta \cdot \cos^2\theta\, d\theta = 512\int \sin^6\theta \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta.$$

$\sin^6\theta = (\sin^2\theta)^3 = (1-\cos^2\theta)^3$ $= 512\int (1-\cos^2\theta)^3\cos^2\theta \sin\theta\, d\theta.$

$u = \cos\theta$ $du = -\sin\theta\, d\theta.$ $- 512\int (1-u^2)^3 u^2\, du.$

$(1-u^2)^3 = 1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6$

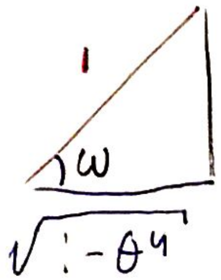
$(1-u^2)^3 u^2 = u^2 - 3u^4 + 3u^6 - u^8$

$\cos\theta.$

$$\cos\theta = \frac{(4-25x^2)^{1/2}}{2}.$$

2. $\frac{4}{\pi}\int_0^1 \theta\sqrt{1-\theta^4}\,d\theta = \frac{4}{\pi}\int_0^1 \underbrace{\sqrt{1-\theta^4}}_{\cos w}\ \underbrace{\theta\,d\theta}_{\frac{\cos w}{2}dw}$

Lab. 5.



$\sin w = \theta^2$

$\cos w\,dw = 2\theta\,d\theta$

$\sqrt{1-\theta^4} = \cos w$

$\sin w = 1^2$
$w = \pi/2$

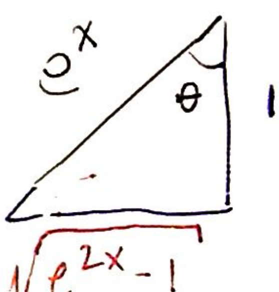
$\sin w = 0$
$w = 0$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^2 w\,dw = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2w)\,dw \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(w + \frac{1}{2}\sin 2w\Big]_0^{\pi/2}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi - \cancel{0} - \frac{1}{2}\sin 0\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

5. $\int_0^{\ln\sqrt{2}} \frac{e^{4x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = \int \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}e^x\,dx = \int \frac{\sec^3\theta}{\tan\theta}\sec\theta\tan\theta\,d\theta$



$e^x = \sec\theta$

$\sqrt{e^{2x}-1} = \tan\theta\,d\theta$

$e^{3x} = \sec^3\theta$

$e^x\,dx = \sec\theta\tan\theta\,d\theta$

$\sec\theta = \cancel{e^{\ln\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$

$\sec\theta = e^0 = 1$

$\theta = 0$

$\sec 0 = \frac{1}{\cos 0} = 1$

$$\int_0^{\pi/4}\sec^4\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/4}\sec^2\theta\,\sec^2\theta\,d\theta$$

$$\int_0^{\pi/4}(1+\tan^2\theta)\sec^2\theta\,d\theta = \int_0^1 (1+u^2)\,du$$

$u = \tan\theta \quad du = \sec^2\theta\,d\theta \quad u(\pi/4) = \tan\pi/4 = 1$

$u(0) = \tan 0 = 0$

3

$$\int_0^1 (1+u^2)\,du = u + \frac{1}{3}u^3 \Big]_0^1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

5. $$\int_0^{\ln\sqrt{2}} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\, e^{2x}\,dx. = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{2.} \qquad e^{2x} = u+1$$

$$u = e^{2x} - 1 \qquad u(\ln\sqrt{2}) = e^{2\cdot\ln 2^{1/2}} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\frac{du}{2} = e^{2x}\,dx \qquad u(0) = e^0 - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u+1}{u^{1/2}}\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{1/2} + u^{-1/2}\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{3/2} + 2u^{1/2}\Big]_0^1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{6}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

$$\int \frac{\overbrace{e^{2x}}^{u+1}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,\overbrace{e^{2x}\,dx}^{du/2.} \qquad \int \frac{u+1}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{2}$$

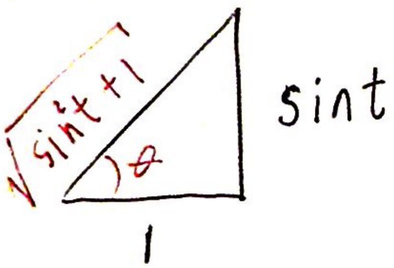
$$= \frac{1}{2}\int u^{1/2} + u^{-1/2}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{3/2} + 2u^{1/2}\right) + C.$$

$$= \frac{1}{3}(e^{2x}-1)^{3/2} + (e^{2x}-1)^{1/2}\Big]_0^{\ln\sqrt{2}}$$

Problema 2 b) Simulacro.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}}\, dt = \int \frac{\sec^2\theta \, d\theta}{\sec\theta} = \int_0^{\pi/4} \sec\theta \, d\theta.$$



$\sin\theta$

$\tan\theta = \sin t.$

$\sec^2\theta \, d\theta = \cos t \, dt.$

$\sqrt{\sin^2 t + 1} = \sec\theta.$

$\tan\theta = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\theta = \tan^{-1}(1) = \pi/4$

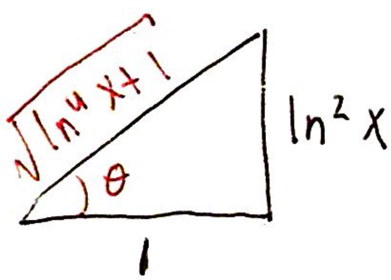
$\tan\theta = \sin 0 = 0$

$\theta = 0$

$$\int_0^{\pi/4} \sec\theta \, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| \Big]_0^{\pi/4} = \ln|\sec\pi/4 + \tan\pi/4) - \ln(\sec 0 + \tan 0)$$

$$= \ln(\sqrt{2} + 1) - \cancel{\ln(1)}^{\,0} = \underline{\ln(\sqrt{2} + 1)}$$

$$\int \frac{4}{\sqrt{\ln^4 x + 1}} \frac{2(\ln x)}{x} dx = 4\int \frac{\sec^2\theta \, d\theta}{\sec\theta} = 4\int \sec\theta \, d\theta.$$



$\tan\theta = [\ln x]^2$

$\sec^2\theta \, d\theta = 2\ln x \, \frac{1}{x} \, dx.$

$\sqrt{\ln^4 x + 1} = \sec\theta.$

$$4\int \sec\theta \, d\theta = 4\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C.$$

$$4\ln\left|\sqrt{\ln^4 x + 1} + \ln^2 x\right| + C.$$

5.

$$\int \frac{(x-2)^3}{\sqrt{x^2-4x+13}}\,dx.$$

$u = x^2-4x+13$

$du = 2x-4 = 2(x-2)\,dx$

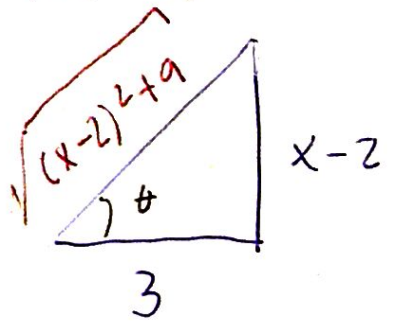
completo el cuadrado. $(x^2-4x+4)+13-4$

$(x-2)^2+9.$

$$\int \frac{(x-2)^3}{\sqrt{(x-2)^2+9}}\,dx$$

$x = a\cdot \operatorname{sen}\theta.$

$1\cdot dx = a\cdot\cos\theta\,d\theta.$



$3\cdot\tan\theta = x-2$

$3\sec^2\theta\,d\theta = dx$

$\sqrt{(x-2)^2+9} = 3\sec\theta.$

$(x-2)^3 = 3^3\tan^3\theta.$

$$\int\frac{(x-2)^3}{\sqrt{(x-2)^2+9}}\,dx = \int\frac{3^3\tan^3\theta}{3\sec\theta}\,3\sec^2\theta\,d\theta.$$

$9\tan^2\theta+9$

$9\sec^2\theta.$

$$= 3^3\int\tan^3\theta\sec\theta\,d\theta.$$

$$= 27\int\tan^2\theta\,(\tan\theta\sec\theta\,d\theta)$$

$$= 27\int(\sec^2\theta-1)\,(\tan\theta\sec\theta\,d\theta).$$

$u=\sec\theta$ $\qquad du = \sec\theta\tan\theta\,d\theta.$

$$= 27\int(u^2-1)\,du = 9u^3-27u+C.$$

$\sec\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-4x+13}}{3}$ $\qquad 9\sec^3\theta-27\sec\theta+C.$

$$= \frac{9}{27}(x^2-4x+13)^{3/2}-\frac{27}{3}(x^2-4x+13)^{1/2}+C.$$

$$\int \frac{(x-2)^3}{\sqrt{x^2-4x+13}}\,dx \qquad u = x^2-4x+13$$
$$du = (2x-4) = 2(x-2)\,dx$$

completa el cuadrado $(x^2-4x+4)+13-4$
$$(x-2)^2+9$$

$$\int \frac{(x-2)^3}{\sqrt{(x-2)^2+9}}\,dx$$

$x = a\sec\theta$
$dx = a\cos\theta\,d\theta$

$3\tan\theta = x-2$
$3\sec^2\theta\,d\theta = dx$
$\sqrt{(x-2)^2+9} = 3\sec\theta.$
$(x-2)^3 = 3^3\tan^3\theta.$

$$\int \frac{(x-2)^3}{\sqrt{(x-2)^2+9}}\,dx = \int \frac{3^3\tan^3\theta}{3\sec\theta}\,3\sec^2\theta\,d\theta.$$

$9\tan^2\theta + 9$
$9\sec^2\theta$

$$= 3^3\int \tan^3\theta\sec\theta\,d\theta.$$
$$= 27\int \tan^2\theta\,(\tan\theta\sec\theta\,d\theta)$$
$$= 27\int (\sec^2\theta-1)(\tan\theta\sec\theta\,d\theta).$$

$u = \sec\theta$ $\qquad du = \sec\theta\tan\theta\,d\theta$

$$= 27\int (u^2-1)\,du = 9u^3 - 27u + C.$$

$\sec\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-4x+13}}{3}$

$$9\sec^3\theta - 27\sec\theta + C.$$
$$= \frac{9}{27}(x^2-4x+13)^{3/2} - \frac{27}{3}(x^2-4x+13)^{1/2} + C.$$

Capítulo 11

Simulacro de parcial # 1

Simulacro Parcial

a) $\int x \tan^{-1} x^2 \, dx$ $\qquad \int x f(x)\, dx$ IPP.

ILATE

$y = x^2 \qquad dy = 2x\,dx$

$$\int \tan^{-1}(x^2)\,(x\,dx) = \frac{1}{2}\int \tan^{-1}(y)\,dy.$$

IPP: $u = \tan^{-1} y \qquad dv = \frac{dy}{2}$

$du = \frac{1}{1+y^2} \qquad v = \frac{y}{2}.$

$uv - \int v\,du = \frac{1}{2} y \tan^{-1} y - \frac{1}{2}\int \frac{y}{1+y^2}\,dy. \qquad \omega = 1+y^2, \; d\omega = 2y\,dy.$

$$= \frac{1}{2} y \tan^{-1} y - \frac{1}{4}\int \frac{d\omega}{\omega}$$

$$= \frac{1}{2} y \tan^{-1} y - \frac{1}{4}\ln|\omega| + C.$$

$$= \frac{1}{2} y \tan^{-1} y - \frac{1}{4}\ln|1+y^2| + C.$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} x^2 \tan^{-1}(x^2) - \frac{1}{4}\ln|1+x^4| + C.}$$

J) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$

Tres funciones

Der. x Int.	1		x Int
	xe^x	ó	$\frac{x}{(x+1)^2}$ x der
Der. x, Int ✓	$\frac{1}{(x+1)^2}$		e^x ✓

$$u = xe^x \qquad dv = (x+1)^{-2}\,dx$$

$$du = (e^x + xe^x)\,dx, \quad v = \frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{(x+1)}$$

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{-xe^x}{(x+1)} + \int \frac{(e^x + xe^x)\,dx}{(x+1)}$$

inspiración,

$$= \frac{-xe^x}{(x+1)} + \int e^x\,dx$$

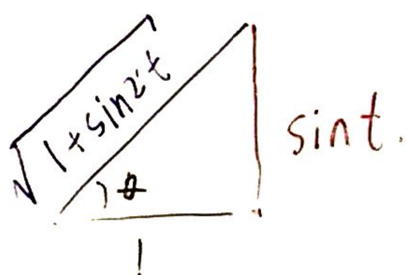
$$= \frac{-xe^x}{(x+1)} + e^x + C$$

Otras sugerencias: $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$ $\qquad u = x+1$, $du = dx$, $x = u-1$.

$$\int \frac{(u-1)}{u^2}\, e^{u-1}\,dx$$ NO AYUDA. "MUCHO"

2b) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{1+\sin^2 t}}\,dt. = \int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec\theta} = \int_0^{\pi/4} \sec\theta\,d\theta.$$

$\sin t = \tan\theta. \qquad \cos t\,dt = \sec^2\theta\,d\theta.$



$\sqrt{1+\sin^2 t} = \sec\theta.$

cambie los límites.

$\tan\theta = \sin \pi/2 = 1 \Rightarrow \theta_b = \pi/4.$

$\tan\theta = \sin 0 = 0 \Rightarrow \theta_a = 0$

$$\int_0^{\pi/4} \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big]_0^{\pi/4}.$$

$\sec 0 = 1 \quad \tan 0 = 0$

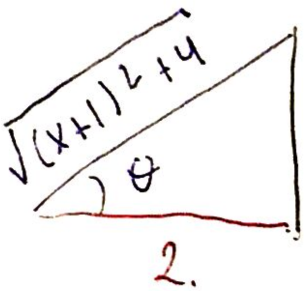
$\sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \quad \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$$= \ln|\sec\pi/4 + \tan\pi/4| - \ln|\sec 0 + \tan 0|$$

$$= \ln|\sqrt{2} + 1| - \ln(1) = \ln(\sqrt{2} + 1).$$

Conto 4A. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}\,dx = \int \frac{1}{[(x+1)^2+4]^{4/2}}\,dx$

$x^2+2x+1 \quad +5-1 = (x+1)^2+4$



$\tan\theta = \dfrac{x+1}{2} \qquad x+1 = 2\tan\theta.$

$dx = 2\sec^2\theta\,d\theta.$

$\dfrac{((x+1)^2+4)^{1/2}}{2} = \sec\theta.$

$[((x+1)^2+4)]^2 = 16\sec^4\theta.$

$$\int \frac{1}{[(x+1)^2+4]^2}\,dx = \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{16\sec^4\theta} = \frac{1}{8}\int \frac{1}{\sec^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int \cos^2\theta\,d\theta. = \frac{1}{16}\int 1+\cos(2\theta)\,d\theta.$$

$$= \frac{1}{16}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right) + C.$$

$2\sin\theta\cos\theta$

$$= \frac{1}{16}(\theta + \sin\theta\cos\theta) + C.$$

$\tan\theta = \dfrac{x+1}{2} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{2}\right). \quad \sin\theta = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

$\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

$$\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}\,dx = \frac{\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)}{16} + \frac{1}{16}\,\frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,\frac{2}{\sqrt{x^2+2x+5}} + C.$$

$$\frac{1}{16}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{8}\,\frac{x+1}{x^2+2x+5} + C.$$

IPP $\int (x-1)\sin \pi x \, dx$ $\int e^{-\theta}\cos 2\theta \, d\theta.$

$u = x-1$ $dv = \sin \pi x$

$du = dx$ $v = \frac{-1}{\pi}\cos \pi x$

$$\int (x-1)\sin \pi x \, dx = \frac{-(x-1)}{\pi}\cos \pi x + \int \frac{1}{\pi}\cos \pi x \, dx$$

$$= \frac{(1-x)}{\pi}\cos \pi x + \frac{1}{\pi^2}\sin \pi x + C.$$

Ciclico

$$* \int e^{-\theta}\cos 2\theta \, d\theta. = \frac{-1}{2}e^{-\theta}\sin 2\theta + \frac{1}{2}\int e^{-\theta}\sin 2\theta \, d\theta$$

$u = e^{-\theta}$ $dv = \cos 2\theta \, d\theta$

$du = -e^{-\theta}d\theta.$ $v = \frac{1}{2}\sin 2\theta.$

$$\int e^{-\theta}\sin 2\theta \, d\theta. = -\frac{1}{2}e^{-\theta}\cos 2\theta - \frac{1}{2}\int e^{-\theta}\cos 2\theta \, d\theta. \; *$$

$u = e^{-\theta}$ $dv = \sin 2\theta \, d\theta.$

$du = -e^{-\theta}d\theta$ $v = -\frac{1}{2}\cos 2\theta$

$$\int e^{-\theta}\cos 2\theta \, d\theta = -\frac{1}{2}e^{-\theta}\sin 2\theta. -\frac{1}{4}e^{-\theta}\cos 2\theta - \frac{1}{4}\int e^{-\theta}\cos 2\theta \, d\theta.$$

$$\frac{5}{4}\int e^{-\theta}\cos 2\theta \, d\theta = -\frac{1}{2}e^{-\theta}\sin 2\theta - \frac{1}{4}e^{-\theta}\cos 2\theta.$$

$$\int e^{-\theta}\cos 2\theta \, d\theta = -\frac{2}{5}e^{-\theta}\sin 2\theta - \frac{1}{5}e^{-\theta}\cos 2\theta + C_0$$

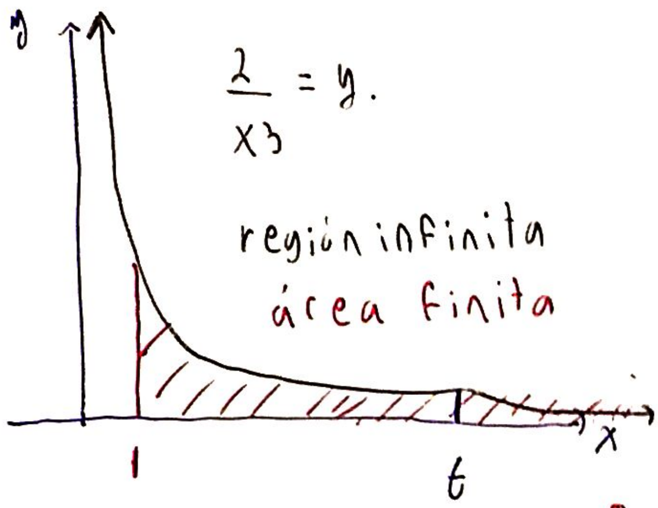
Capítulo 12

Integrales impropias

Fracciones Parciales Pág. 66 (Posteriormente).

7.8 Integrales Impropias.

Considere la región bajo la curva $y = \frac{2}{x^3}$ encima del eje-x y a la derecha de la recta $x = 1$.



$$A = \int_1^t 2x^{-3}\,dx$$

$$A = \frac{2}{-2}\,x^{-2}\Big]_1^t$$

$$A = -1 \cdot t^{-2} + \underbrace{1 \cdot 1^{-2}}_{1} = 1 - \frac{1}{t^2}.$$

$$\lim_{t \to \infty} A = \lim_{t \to \infty} 1 - \cancel{\frac{1}{t^2}}^{\,0} = 1$$

$$\boxed{\int_1^\infty \frac{2}{x^3}\,dx = 1}$$

Limites Básicos

a. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^r} = 0 \quad \frac{1}{\infty}.$ $\qquad \lim\limits_{x \to \infty} x^r = +\infty.$

r positivo

b. $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty \quad e^\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \quad \frac{1}{e^\infty} \to 0.$

c. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to \infty} \ln x = +\infty.$

$$\log_{10} \underbrace{10^{-48}}_{0^+} = -48 \qquad \log_{10} 10^{-10{,}000} = -10{,}000$$

Integrales Impropias:

Tipo 1: Intervalos infinitos $\pm\infty$.

Tipo 2: Funciones discontinuas. (AVs en $x=\pm a$).

Integrales Impropias Tipo 1: (Pág. 74)

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

Integre 1ro
Evalúe límite.

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\,dx.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

CONVERGENTE: (Se acerca a un número) el límite existe.

DIVERGENTE: (La integral a $\pm\infty$) el límite no existe.

Ejercicio 1: Evalúe. (P.74) $\sqrt{\infty} \Rightarrow \infty$

a. $\displaystyle\int_1^{\infty} x^{-1/2}\,dx. = 2x^{1/2}\Big]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} 2\sqrt{x} - 2. = \infty.$

no existe.

$p = \frac{1}{2}$ DIVERGENTE.

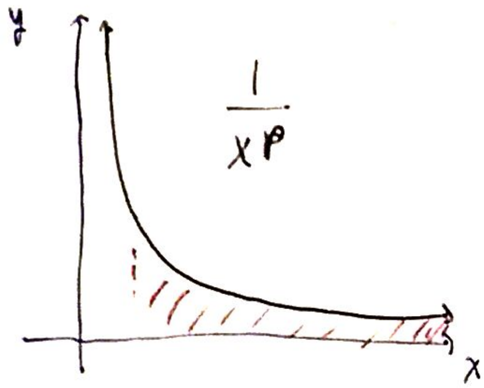
b. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \ln x - 0 = \infty.$

no existe.

$p=1$

DIVERGENTE

S.



$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ no necesariamente existe.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} p \le 1 & \text{DIVERGE.} \\ p > 1 & \text{converge.} \end{cases}$$

$p=0.99$ $\quad \int_1^\infty x^{-0.99}\,dx = \frac{x^{0.01}}{0.01}\Big]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} x^{0.01} - \frac{1}{0.01} = +\infty.$

DIVERGE.

$p = 1.001$ $\quad \int_1^\infty x^{-1.001}\,dx = \frac{x^{-0.001}}{-0.001}\Big]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{1000}{x^{0.001}} + \frac{1}{0.001}$

d.

$$= \frac{1000}{x^{0.001}}\Big]_\infty^1 = 1000 - \lim_{x\to\infty} \frac{1000}{x^{0.001}}$$

$\frac{1000}{\infty} \to 0$

$= 1000$ converge.

Ejercicio 3: Evalúe.

a. $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\, \underbrace{x\,dx}_{du/-2} = \int_{-\infty}^0 e^u \frac{du}{-2} = -\frac{1}{2}e^u\Big]_{-\infty}^0 = -\frac{1}{2}e^0 + \cancel{\frac{1}{2}e^{-\infty}}^{\,0}$

$u = -x^2$ $\qquad u(0) = -0^2$

$du = -2x\,dx$ $\qquad u(-\infty) = -(-\infty)^2 = -\infty$

$= -\frac{1}{2} + 0$

$= -\frac{1}{2}$ converge.

Notación Abreviada: $\quad e^{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

$$f(\infty) = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

b. $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$

$= \frac{1}{2}\tan^{-1}(\infty) - \frac{1}{2}\tan^{-1}(-\infty)$ CONVERGE

$\tan x$ ID: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

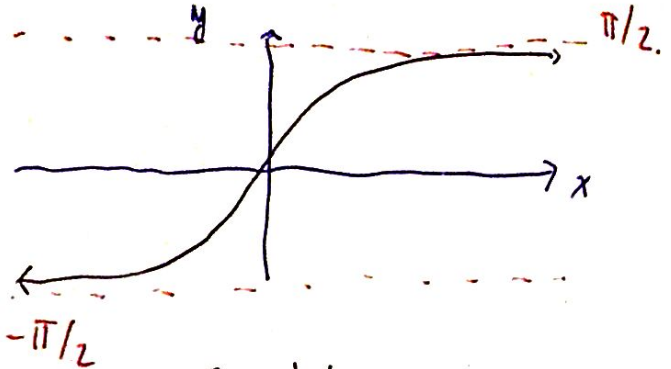
R: $(-\infty, \infty)$

A.V $x = -\pi/2, +\frac{\pi}{2}$

$\tan^{-1} x$ ID: $(-\infty, \infty)$

R: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

A.H. $y = \pm \pi/2.$



$\tan^{-1}(\infty) = \pi/2$

$\tan^{-1}(-\infty) = -\pi/2.$

David Corzo.

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \underline{\underline{\pi.}} \approx \int_{-1000}^{1000}\frac{dx}{1+x^2} \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i^2}\Delta x$

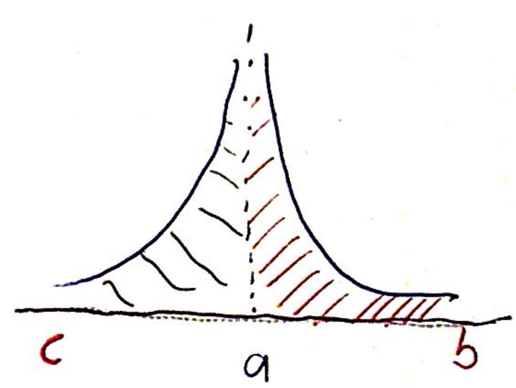
PYTHON.

Integrales Impropias Tipo 2.

Hay una asíntota vertical en $x = a.$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$$

$$\int_c^a f(x)dx = \lim_{t\to a^-}\int_c^t f(x)dx$$



AV
$x=a$

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$$

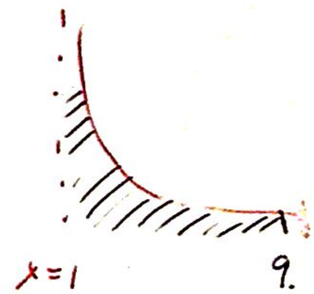
Ejercicio 4: Evalúe. Indique donde es discontinua.

a. $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \int_{0}^{8} u^{-1/3}\,du = \frac{3}{2}u^{2/3}\Big]_{0^+}^{8} =$

Discontinua: denominador igual a cero $1/0$.
en $x=1$ logaritmo de cero $\ln(0) \to -\infty$.
raíz cuadrada de un número negativo.

$u = x-1 \qquad u(9) = 8$

$du = dx \qquad u(1) = 0$



$$\frac{3}{2}u^{2/3}\Big]_{0^+}^{8} = \frac{3}{2}(8^2)^{1/3} - \frac{3}{2}\lim_{u\to 0^+} u^{2/3}$$

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{64} - \underset{0}{0} = \frac{3}{2}\cdot 4 = 6 \quad \text{CONVERGE}$$

b. $\displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{3}{x^4}\,dx = \underset{(1)}{\int_{-2}^{0} 3x^{-4}\,dx} + \underset{(2)}{\int_{0}^{3} 3x^{-4}\,dx} = \infty$ diverge.

Discontinua en $x=0$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{3} 3x^{-4}\,dx = -x^{-3}\Big]_{0^+}^{3} = -\frac{1}{3^3} + \overbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}}^{+\infty} = +\infty.$

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{0} 3x^{-4}\,dx = -x^{-3}\Big]_{-2}^{0^-} = \lim_{x\to 0^-} -\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{+\infty} + \frac{1}{(-2)^3} = +\infty.$

c. $\int_{0}^{1} \ln x \, dx$

$\int \ln x \, dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$

$u = \ln x \quad dv = dx$

$du = \frac{dx}{x} \quad v = x$

$0 \cdot \infty$

discontinua en $x = 0$

$0 \cdot \ln 0$

$$\int_0^1 \ln x \, dx = x\ln x - x \Big]_{0^+}^{1} = 1 \cdot \ln(1) - 1 - \lim_{x \to 0} x \ln x$$

A.V.

$$= -1 - \boxed{\lim_{x \to 0^+} x \ln x}$$

Regla de L'Hospital $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

$0/0$ ó ∞/∞.

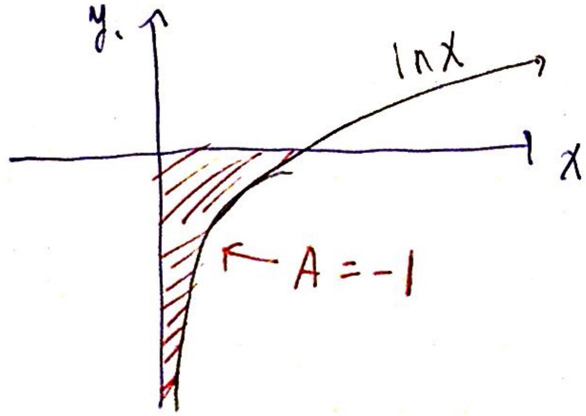
También aplica para $0 \cdot \infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0.

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} \overset{LH}{\underset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x(-x^{-2})}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{-x^{-1}} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0$$

$(\ln x)^{-1} \xrightarrow{'} -(\ln x)^{-2} \frac{1}{x}.$

$$\int_0^1 \ln x \, dx = -1 - \lim_{x \to 0} x \ln x = -1 + 0 \quad \text{CONVERGE.}$$



$\frac{\ln x}{x} \to \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -x$

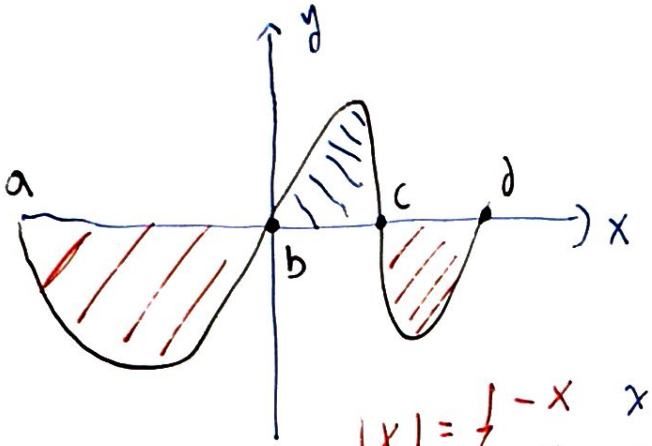
$\lim\limits_{x \to 0^+} -x = 0.$

Capítulo 13

6.1 Área entre curvas

6.1 A'reas entre curvas (p 79)

Región entre la curva $y = f(x)$ y el eje x.



A'rea de la región

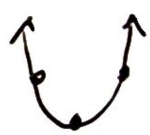
$$A = \int_a^d |f(x)|\,dx$$

$$A = -\int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx - \int_c^d f\,dx$$

$$|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

Intersecciones y bosquejar la curva y la región,

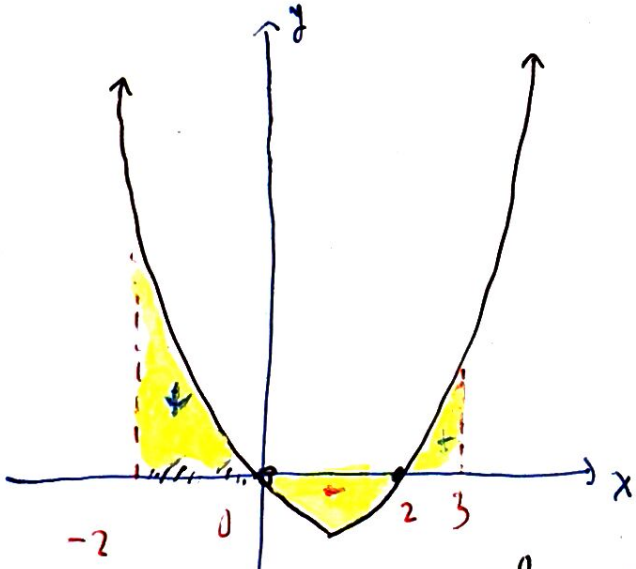
Ejercicio 1: Bosqueje y encuentre el área de la región limitada por $y = 3x^2 - 6x$, $x = -2$, $x = 3$ & $y = 0$.



Interceptos - x

$$y = 3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2.$$



Sume el área de 3 subregiones

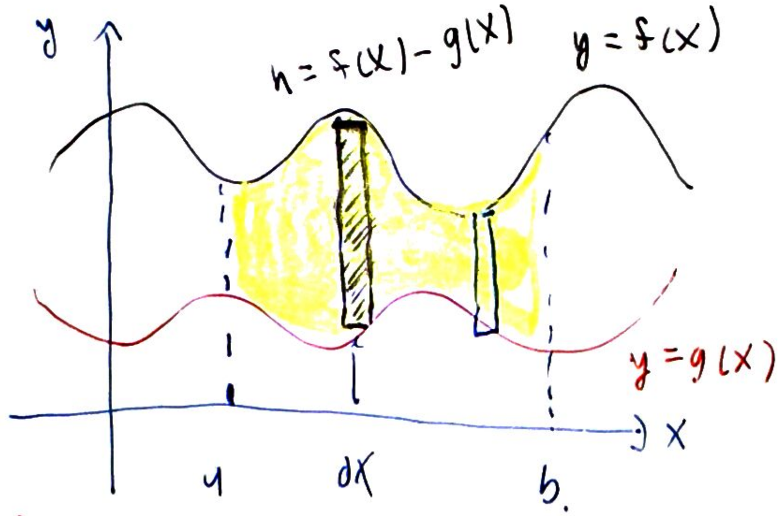
$$A = \int_{-2}^{0} 3x^2 - 6x\,dx + \int_0^2 -3x^2 + 6x\,dx + \int_2^3 3x^2 - 6x\,dx$$

$$A = x^3 - 3x^2\Big]_{-2}^{0} + \left(-x^3 + 3x^2\Big]_0^2\right) + x^3 - 3x^2\Big]_2^3$$

$$A = 0 - (-8 - 12) + (-8 + 12) + (\cancel{27} - \cancel{27} - 8 + 12) = 28$$

$A = 20 + 4 + 4 = 28$

¿Qué sucede cuando hay una curva inferior?



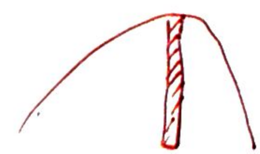
Región: $g(x) \leq y \leq f(x)$

$a \leq x \leq b.$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Diferencia de áreas.

$A = bh.$



$$\boxed{A = \int_a^b y_{arriba} - y_{abajo}\,dx}$$

Franja horizontal ó rectangulo infinitesimal. ancho dx

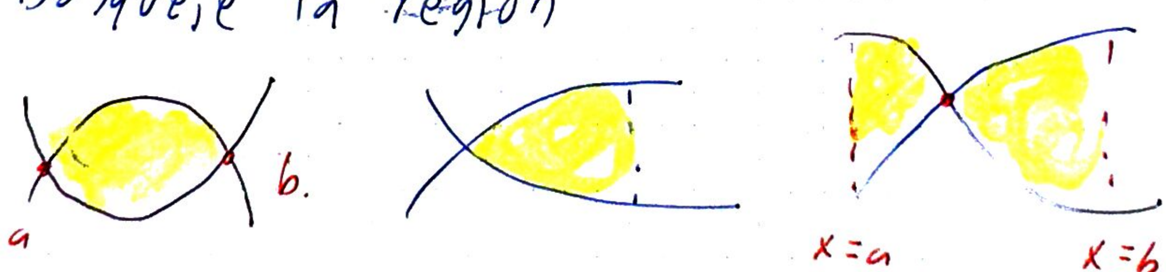
altura $f(x) - g(x)$

$$dA = (f(x) - g(x))\,dx$$

Integrando en $a \leq x \leq b.$ $\quad \int dA = A$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

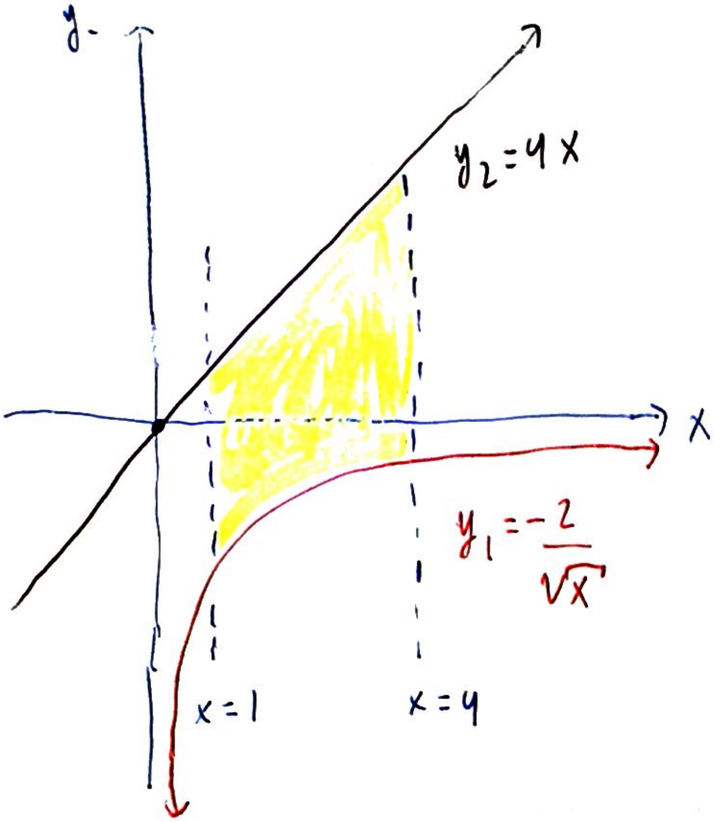
1. Bosquejar las curvas f & g.
2. Intersectos entre las curvas.
3. Bosqueje la región



Ejemplo: Bosqueje y encuentre el área entre

$y_1 = \frac{-2}{\sqrt{x}}$ & $y_2 = 4x$ en $1 \le x \le 4$.

¿$y_2 > y_1$? ó ¿$y_1 > y_2$? $\qquad \frac{1}{x^r}$



$$A = \int_1^4 y_2 - y_1 \, dx$$

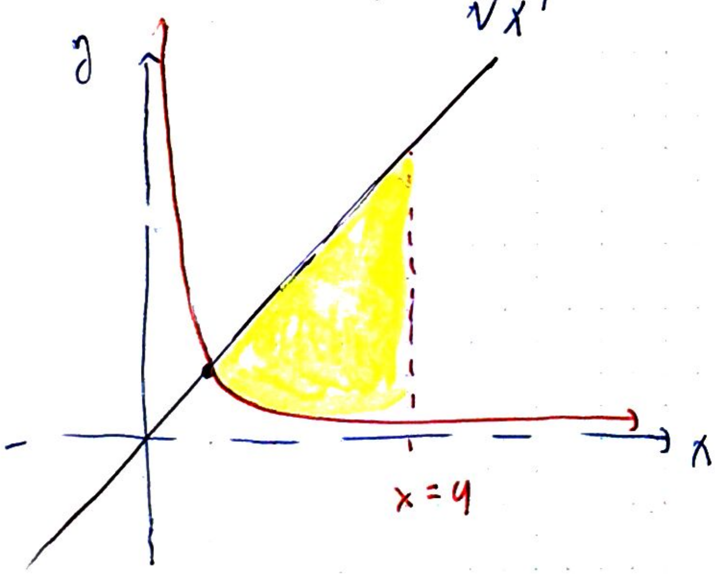
$$A = \int_1^4 4x + 2x^{-1/2}) \, dx$$

$$A = 2x^2 + 4x^{1/2} \Big]_1^4$$

$$A = 2\cdot 16 + 4\cdot 2 - (2+4).$$

$$A = 32 + 8 - 6 = 34.$$

Variación B: $y_1 = \frac{+4}{\sqrt{x}}$ & $y_2 = 4x$ y la recta $x = 4$.



$$A = \int_1^4 y_2 - y_1 \, dx$$

intersección entre y_1 & y_2.

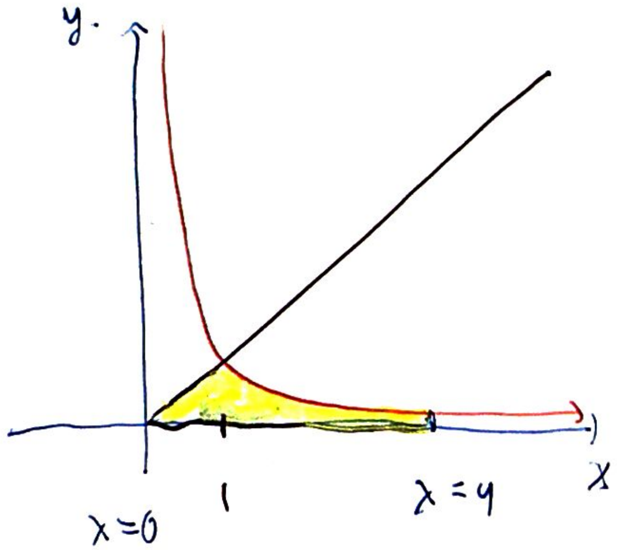
$$\frac{4}{x^{1/2}} = 4x$$

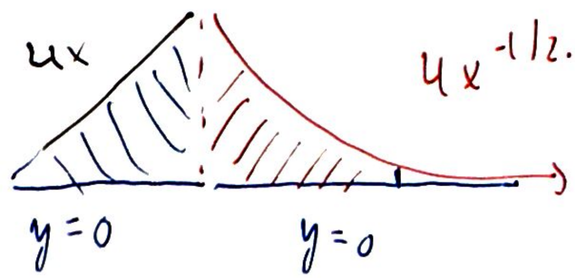
$$1 = x^{3/2} \Rightarrow x = 1$$

$$A = \int_1^4 4x - 4x^{-1/2}\,dx = 2x^2 - 8x^{1/2}\Big]_1^4$$

$$A = 32 - 16 - (2-8) = 16 + 6 = 22.$$

Variación C: Área de la región entre $y_1 = 4x^{-1/2}$, $y_2 = 4x$, $x = 4$ & $y = 0$.



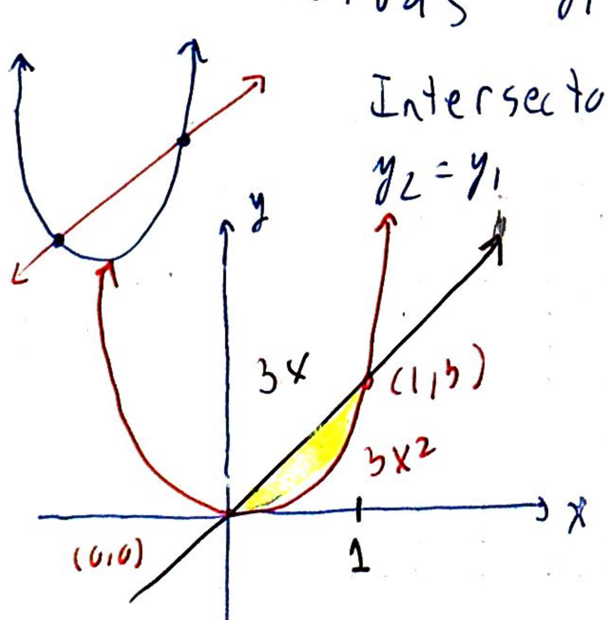


$$A = \int_0^1 4x\,dx + \int_1^4 4x^{-1/2}\,dx$$

$$A = 2x^2\Big]_0^1 + 8x^{1/2}\Big]_1^4$$

$$A = 2 + 16 - 8 = 10$$

Ejemplo: Encuentre el área de la región entre las curvas $y_1 = 3x$ & $y_2 = 3x^2$?



Intersectos $y_2 = y_1$

$$3x^2 = 3x \qquad x = 0 \text{ \& } x = 1$$

$$3x^2 - 3x = 3x(x-1) = 0$$

$$A = \int_0^1 (3x - 3x^2)\,dx$$

$$A = \frac{3}{2}x^2 - x^3\Big]_0^1 = \frac{3}{2} - 1 - 0$$

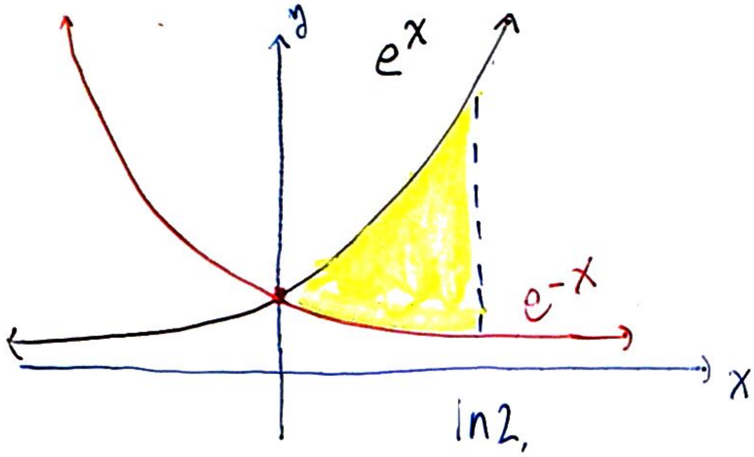
$$A = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 2: Bosqueje y encuentre el área de la región entre las curvas.

a) $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $x = 0$, $x = \ln(2)$.

crece $\to +\infty$ decrece $\to 0$

$x = 0 \quad y_1 = y_2 = 1$



$$A = \int_0^{\ln 2} (e^x - e^{-x})\,dx$$

$$A = e^x + e^{-x} \Big|_0^{\ln 2}$$

$e^{\ln 2} = 2$, $e^{-\ln 2} = \frac{1}{e^{\ln 2}} = \frac{1}{2}$

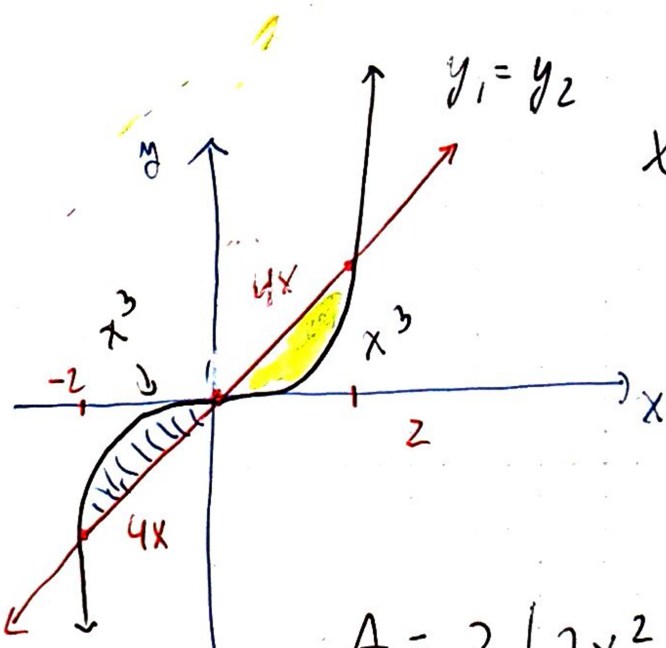
$e^{\ln 2^{-1}}$

$$A = e^{\ln 2} + e^{-\ln 2} - (e^0 + e^{-0})$$

$$A = 2 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}.$$

b) $y_1 = x^3$ & $y_2 = 4x$

2 regiones distintas y 3 interceptos.



$y_1 = y_2 \quad x^3 - 4x = 0$

$x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 2.$

$y_1 = y_2(2) = 8.$

$$A = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx + \int_0^2 (4x - x^3)\,dx$$

$$A = 2\int_0^2 (4x - x^3)\,dx$$

$$A = 2\left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\Big]_0^2\right) = 2\left(8 - \frac{16}{4}\right) = 2 \cdot 4 = 8$$

c) $y_1 = x^2 - 4x + 4$, $y_2 = 10 - x^2$.

Dos parábolas.  $A = \int_a^b y_2 - y_1 \, dx$

Intersecciones $y_1 = y_2$. $x^2 - 4x + 4 = 10 - x^2$.

$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$
$$2(x^2 - 2x - 3) = 2(x-3)(x+1) =$$

intersectos en $x = -1$ y $x = 3$.

$$A = \int_{-1}^{3} 10 - x^2 - (x^2 - 4x + 4) \, dx$$

$$A = \int_{-1}^{3} (6 - 2x^2 + 4x \quad) \, dx$$

$$A = 6x - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \Big]_{-1}^{3} = 18 - 18 + 18 - \left(-6 + \frac{2}{3} + 2\right)$$

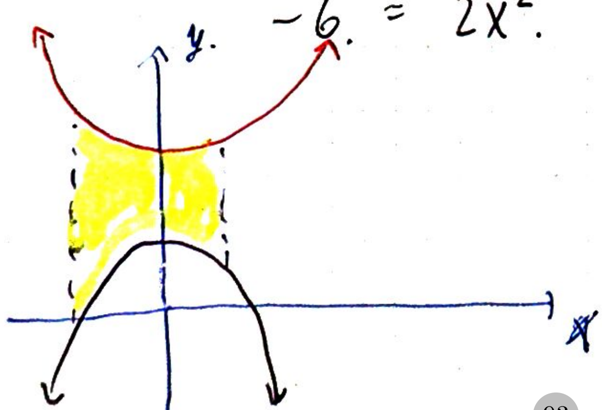
$$18 + 4 - 2/3 = 22 - \frac{2}{3}.$$

Alejandro Área entre $y_1 = 4 - x^2$ & $y_2 = 10 + x^2$, $x = a$, $x = b$

$y_1 = y_2$: $4 - x^2 = 10 + x^2$

$-6. = 2x^2$.

No hay intersectos.



$$A = \int_a^b y_2 - y_1 \, dx.$$

Capítulo 14

Área entre curvas, integración respecto al eje-y, respecto al eje-x, introducción a volúmenes de sólidos, volúmen de un cilíndro

Avisos: Participación Actividad Mate Compu.

Hasta 1.5 netos y 0.5 neto mínimo.

Lunes y martes.

Zona WA (9 pts.). → 18–17 pts Parcial.

Parcial 10 octubre, 3 octubre. Simulacro 2.

Bota Parcial 1.

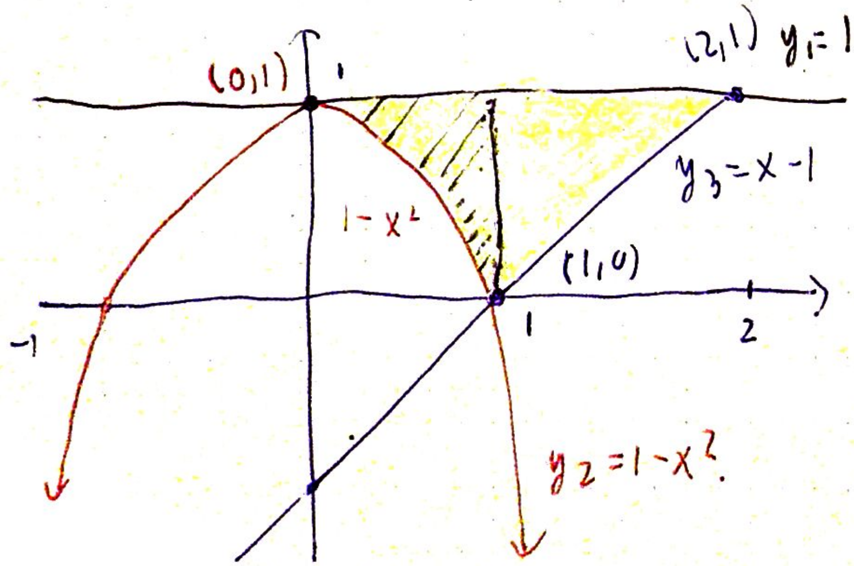
2:30 PM CES.

1 - 2:30 PM Almuerzo o Repaso con Samuel

Aplicaciones Integración:

- Planteamiento
- Gráfica de una Región. → área, → volumen sólido en revolución

Ejercicio 3: Encuentre de la región entre $y_1 = 1$, $y_2 = 1 - x^2$ & $y_3 = x - 1$.



$y_1 = y_2$ P.I (0,1)

$y_1 = y_3$ $x - 1 = 1$

$x = 2$ (2,1)

$y_2 = y_3$ en (1,0)

$\int f - g \, dx$

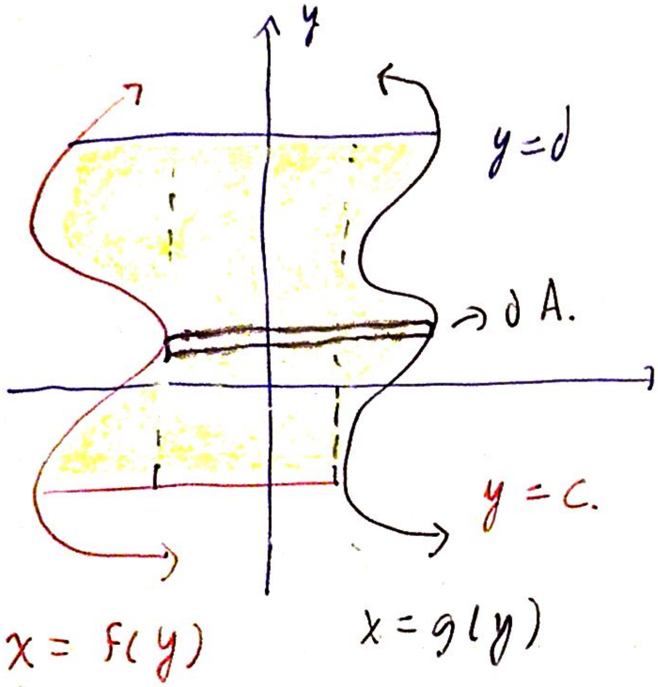
$$A = \int_0^1 1-(1-x^2)\,dx + \int_1^2 \underbrace{1-(x-1)}_{1/2.}\,dx$$

$$A = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx$$

$$A = \frac{1}{3}x^3\Big]_0^1 + 2x - \frac{x^2}{2}\Big]_1^2$$

$$A = \frac{1}{3} + 4 - \frac{4}{2} - \left(2-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

Integración en el eje-y: Franjas Horizontales
Derecha - Izquierda.



Región S $f(y) \leq x \leq g(y)$
$c \leq y \leq d.$

rectángulo infinitesimal.
altura dy.
ancho $g(y) - f(y)$
$dA = [g(y) - f(y)]\,dy.$

$$A = \int_c^d [g(y) - f(y)]\,dy.$$

$$A = \int_a^b y_{arriba} - y_{abajo}\,dx$$

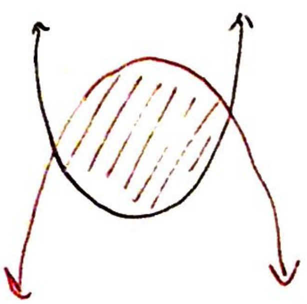
$y_{arriba} = f(x)$
$y_{abajo} = g(x)$

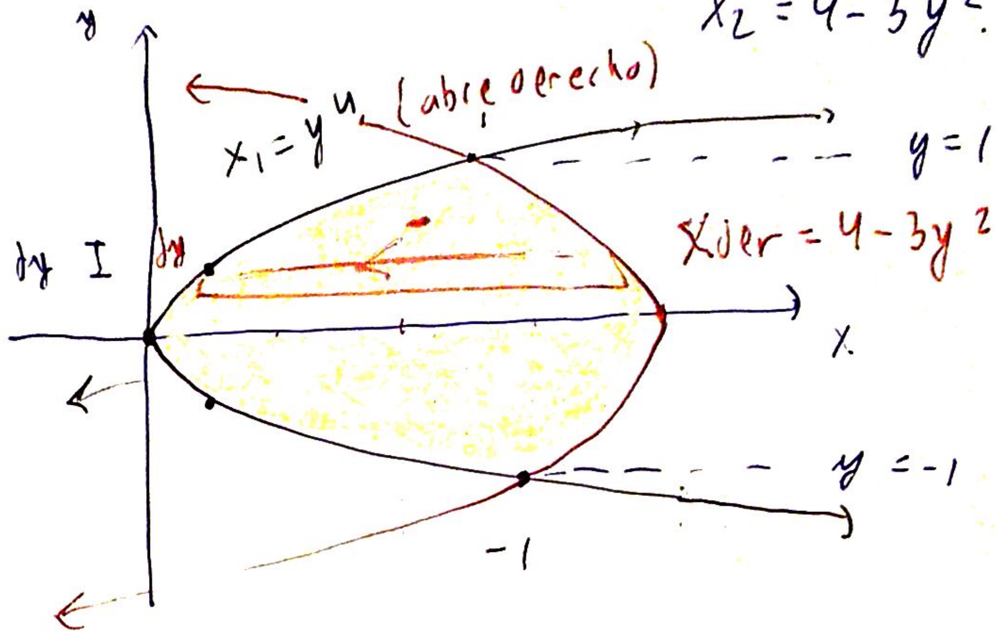
$$A = \int_c^d x_{der} - x_{izq}.\,dy.$$

$x_d = g(y)$ $x_{iz} = f(y).$

Ejercicio 4: Encuentre el área entre $x_1 = y^4$ & $x_2 = 4-3y^2$.

$x_2 = 4-3y^2$.





$x_{izq} = y^4$

(4 intersecc(s))

Pts. de intersección $x_1 = x_2$: $y^4 = 4-3y^2$

$$y^4 + 3y^2 - 4 = 0$$

$$(y^2 + 4)(y^2-1) = 0$$

$y^2 \neq -4$. imaginarios.

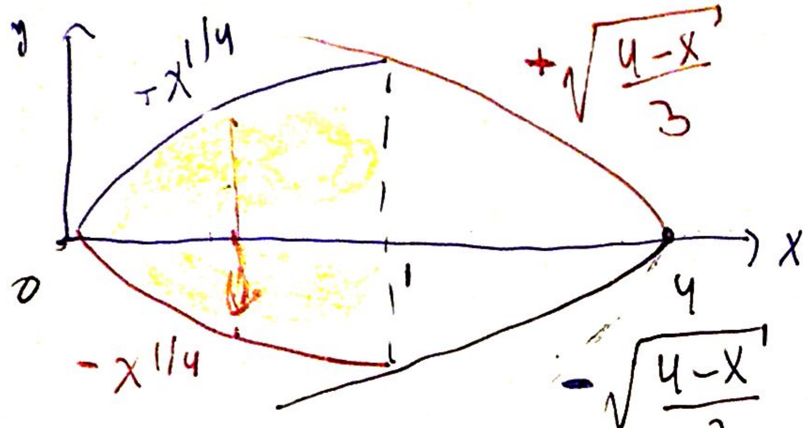
$y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

$$A = \int_{-1}^{1} x_{der} - x_{izq}\, dy = \int_{-1}^{1} 4-3y^2-y^4\, dy.$$ PAR

$$A = 2\int_0^1 4-3y^2-y^4\, dy = 2\left(4y - y^3 - \frac{y^5}{5}\Big]_0^1\right)$$

$$A = 2\left(3 - \frac{1}{5}\right) = 2\left(\frac{15}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{28}{5}.$$

Integrando en el eje - x.



$\int f(x)-g(x)\,dx$

1. $x=y^4 \quad x=4-3y^2$

Resvelva para x

$a^2=b \Rightarrow a=\pm\sqrt{b}$

2. $\int_0^1 f-g\,dx+\int_1^4 h-i\,dx$

Inversa de $x=y^4$

$y=\pm x^{1/4}$; $\pm\sqrt[4]{x}$

$x=4-3y^2 \Rightarrow x-4=-3y^2$. $\quad y^2=\frac{4-x}{3}$, $y=\pm\sqrt{\frac{4-x}{3}}$

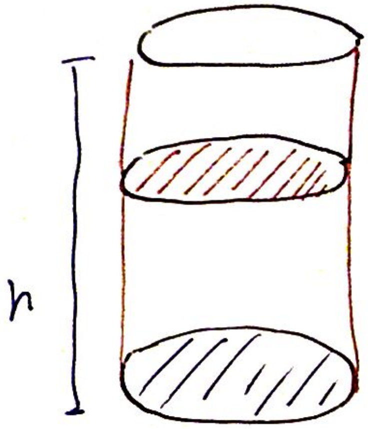
$$A=\int_0^1 x^{1/4}-(-x^{1/4})\,dx+\int_1^4\sqrt{\frac{4-x}{3}}-\left(-\sqrt{\frac{4-x}{3}}\right)dx$$

$$A=2\int_0^1 x^{1/4}dx+2\int_1^4\left(\frac{4-x}{3}\right)^{1/2}dx=\frac{28}{5}.$$

Menos 40 (2pts. P1) $\quad$ >50 (1 pt. P1.

6.2. Volúmenes (P 87)

Volumen de un cilindro circular



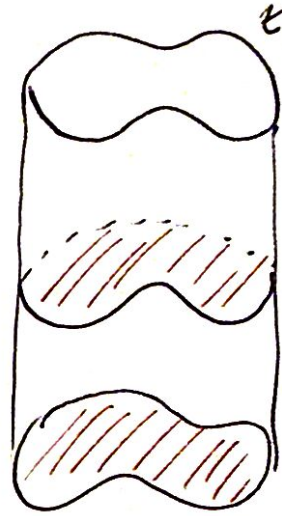
(rebanado)
sección transversal
$A = \pi r^2$

$V = Ah.$

$V = \pi r^2 h.$

círculo de radio r

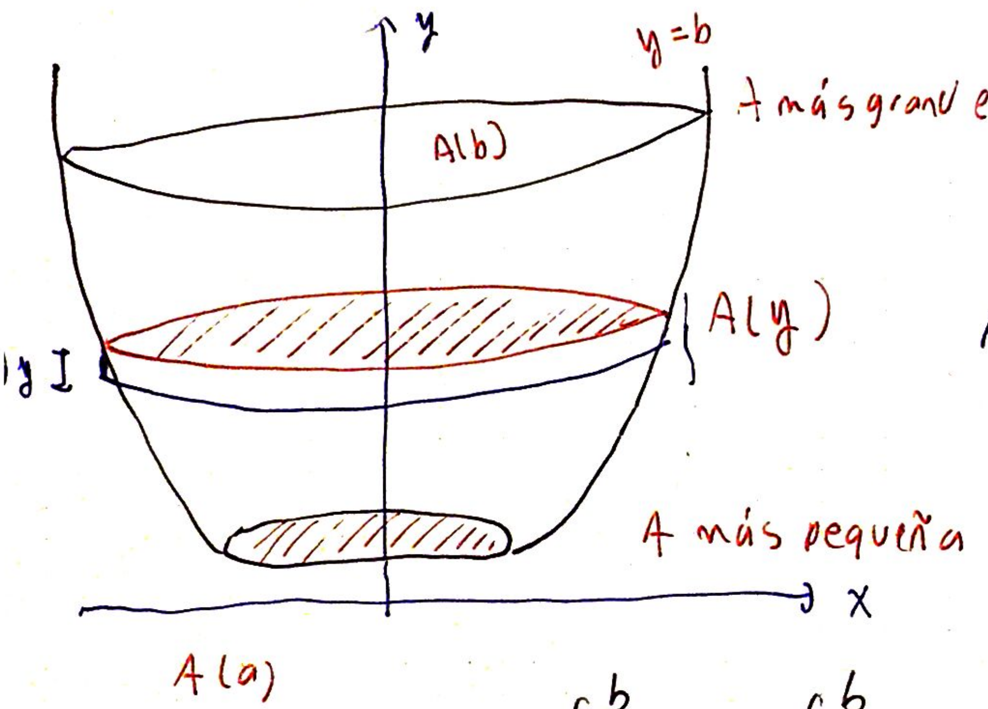
región



Área sección transversal A

$\underline{\underline{V = Ah.}}$

Volumen de un sólido S.



Parte infinitesimal de este sólido.

cilindro

Área transversal $A(y)$

Altura $dy.$

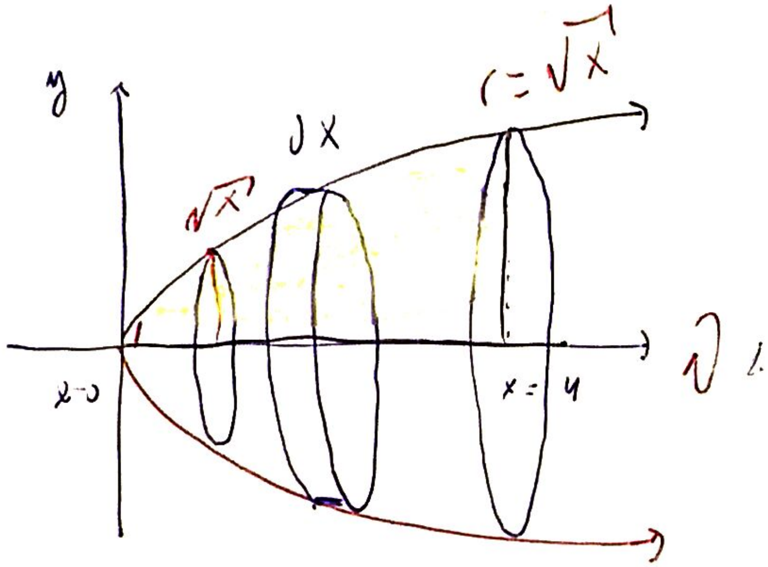
$$dV = A(y)\,dy.$$

Integrando $$V = \int_a^b dV = \int_a^b A(y)\,dy.$$

¿Cuál es el área transversal?

Ejemplo: Considere la región $0 \leq y \leq \sqrt{x}$

$0 \leq x \leq 4.$

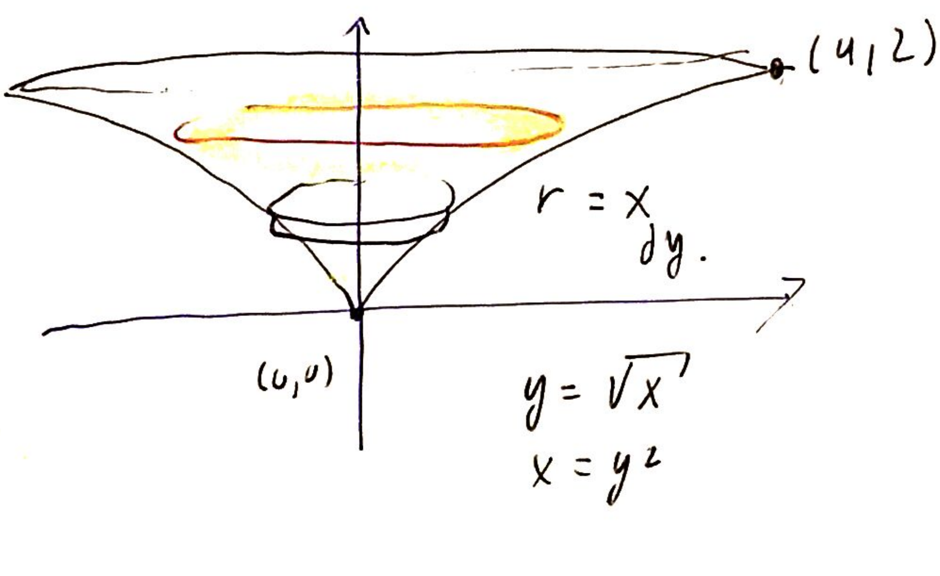


Rote alrededor del eje-x para obtener un sólido en revolución

Volumen del sólido es, sección transversal es un cilindro disco de radio $\underline{\underline{r = \sqrt{x}}}$

$$dV = \pi r^2 dx = \pi x dx.$$

$$V = \int_0^4 \pi r^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \frac{\pi x^2}{2}\Big]_0^4 = \frac{16\pi}{2} = 8\pi$$



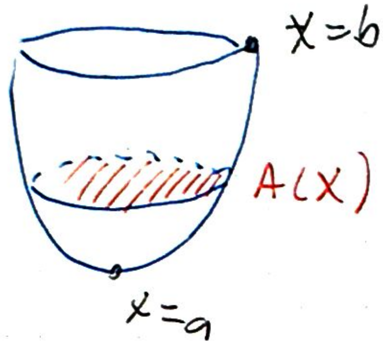
$$V = \pi \int \underline{\underline{x}}^2 dy.$$

$$V = \pi \int_0^2 y^4 dy.$$

Capítulo 15

Volúmenes sólidos en revolución, introducción a arandelas

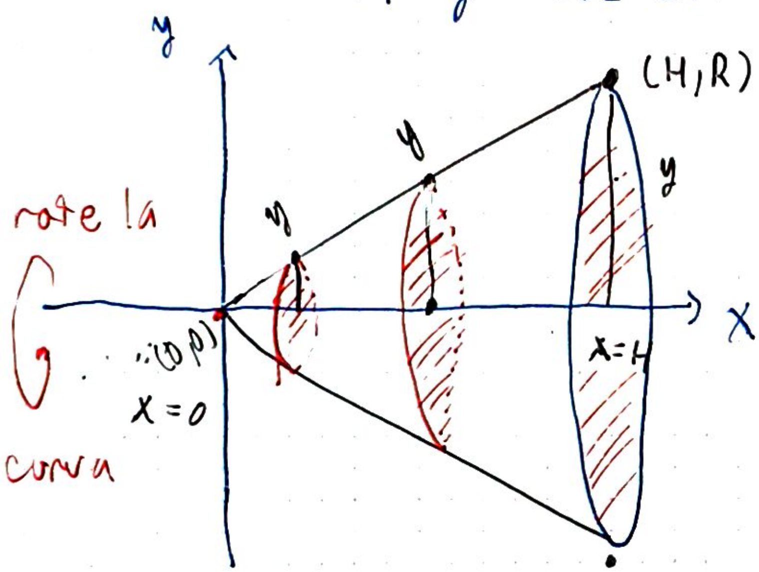
Volúmenes.



$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

↑ área sección transversal.

Ejemplo: Encuentre el volumen de un cono de altura H y base circular de radio R.



las secciones transversales son círculos de radio $y(x)$.

$$A = \pi y^2$$

$$V = \int_0^H \pi y^2\,dx$$

$y(0) = 0 + b = 0$

$b = 0$

$y = mx + b.$ $\qquad m = \frac{R-0}{H-0} = \frac{R}{H} \qquad y = \frac{R}{H}x + \cancel{b}.$

$(0,0)$ y (H,R)

$$V = \int_0^H \pi \frac{R^2 x^2}{H^2}\,dx = \frac{\pi R^2}{H^2}\int_0^H x^2\,dx$$

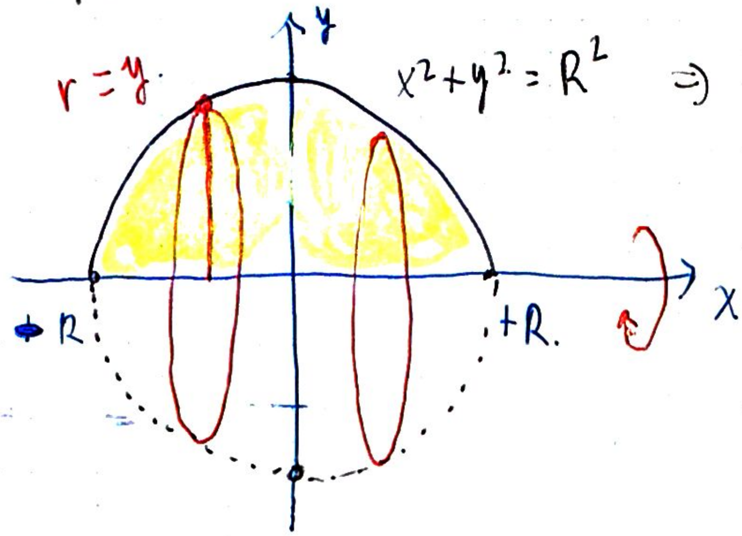
$$= \frac{\pi R^2}{H^2}\left.\frac{x^3}{3}\right]_0^H = \frac{\pi R^2}{H^2}\frac{H^3}{3}$$

P. 88.

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

Ejercicio 1: p. 89 Volumen de una Esfera de radio R.

La esfera se obtiene al girar el círculo $x^2+y^2 \leq R^2$ respecto al eje-x.



$\Rightarrow \quad y^2 = R^2 - x^2 \qquad$ ID $-R \leq x \leq R$

$y = \sqrt{R^2-x^2}$

$x^2 = R^2 \qquad x = \pm R$

Sección transversal círculo de radio $y = r$

$A(x) = \pi y^2$

$$V = \int_{-R}^{R} A(x)\,dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2-x^2)\,dx = 2\pi \int_{0}^{R} (R^2-x^2)\,dx$$

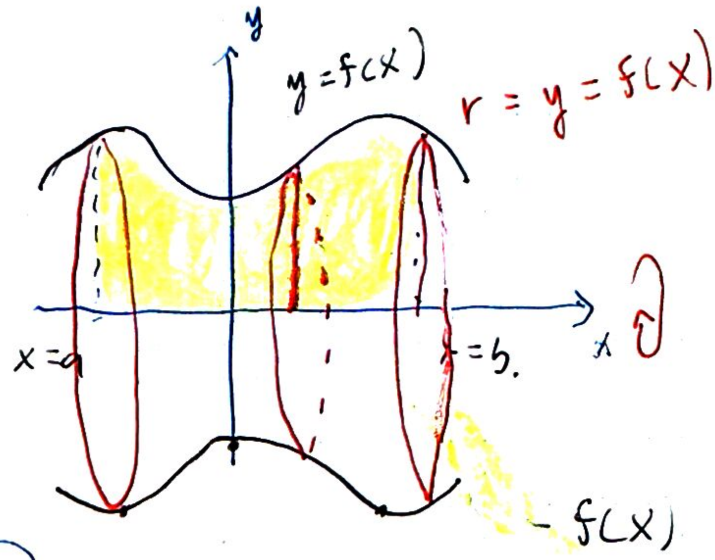
R es constante.

$$V = 2\pi \left(R^2x - \frac{x^3}{3} \Big]_0^R \right) = 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = 2\pi R^3 \left(1 - \frac{1}{3} \right)$$

$$\boxed{V = \frac{4\pi}{3} R^3}$$

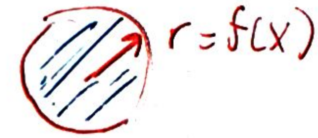
Sólidos de Revolución.

$$R: \begin{array}{l} a \leq x \leq b. \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{array}$$



gire respecto al eje-x para obtener el sólido de revolución

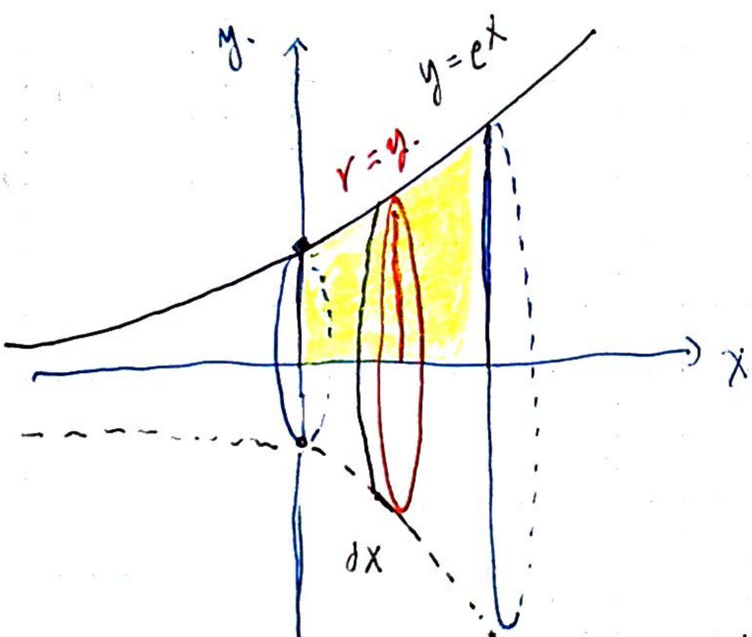
Área transversal : $\boxed{A = \pi y^2} = \pi f^2(x)$



$$V = \int_a^b \pi y^2 \, dx = \int_a^b \pi f^2(x) \, dx$$

Ejercicio 4: Encuentre el Volumen del sólido que se obtiene al girar la región $R: 0 \leq x \leq \ln 3 \quad 0 \leq y \leq e^x$ respecto al eje-x. (Pag. 91)

$y = e^x$ curva.



$$e^{\ln[\ ]} = [\ ]$$

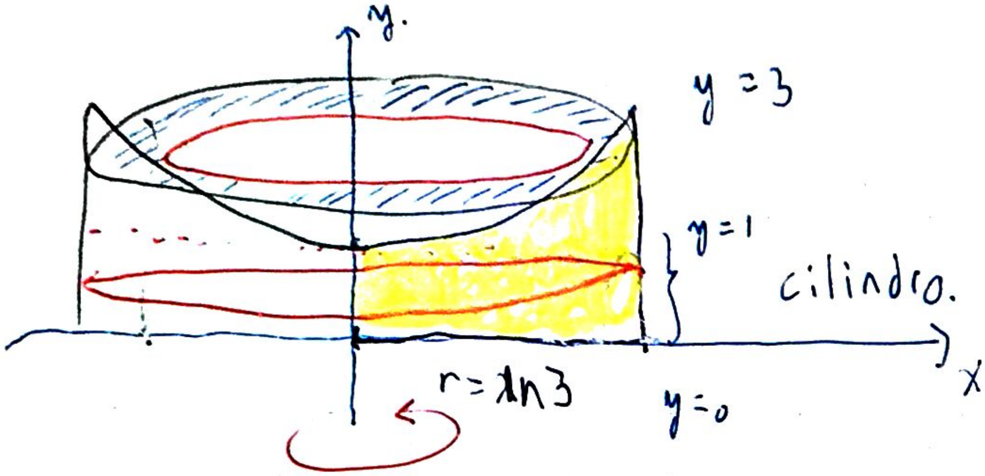
$$A = \pi y^2 = \pi e^{2x}$$

$$V = \int_0^{\ln 3} \pi e^{2x} \, dx$$

$$V = \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big]_0^{\ln 3} = 4\pi.$$

$$V = \frac{\pi}{2}\left(e^{\ln 3^2} - e^0\right) = \frac{\pi}{2}(9-1)$$

Girando la misma región respecto al eje - y.



$f(0) = 1$

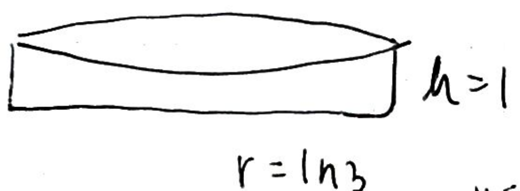
$f(\ln 3) = 3$

¡Difícil de visualizar.

Volumen = $V_1 + V_2$

V_1 = cilindro

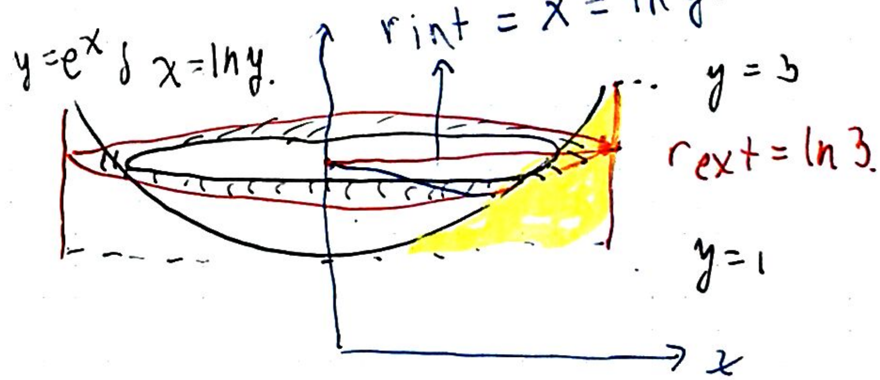
$V_1 = \pi r^2 h = \pi \ln^2 3.$



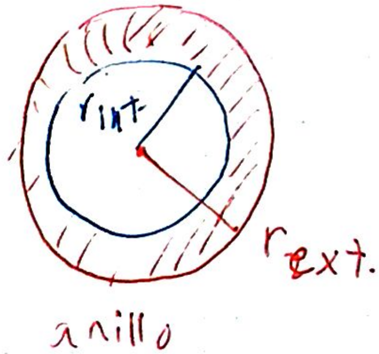
$y = e^x$

$r_{int} = x = \ln y.$

V_2 sólido hueco:



Área transversal

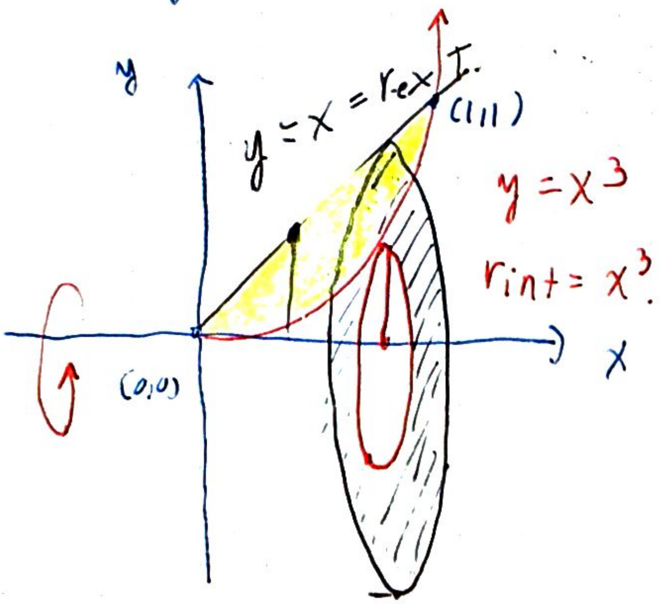


$$A = \pi r_{ext.}^2 - \pi r_{int}^2$$

$$A = \pi (\ln 3)^2 - \pi (\ln y)^2$$

$$V_2 = \int_1^3 \pi (\ln 3)^2 - \pi (\ln y)^2 \, dy.$$

Ejercicio 5: Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región entre las curvas $y = x$ & $y = x^3$ en el 1er cuadrante respecto al eje-x.



Área Anillo.

círculo grande − cir pequeño.

$r_{ext} = x \qquad r_{int} = x^3.$

$A = \pi r_{ext}^2 - \pi r_{int}^2$

$A = \pi x^2 - \pi x^6.$

Volumen $\displaystyle V = \int_0^1 A\,dx = \int_0^1 (\pi x^2 - \pi x^6)\,dx$

$\displaystyle V = \pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\Big]_0^1\right) = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right)$

Transformadas Laplace.

$$\int_0^\infty f(x)\, e^{-st}\, dt$$

$$f(t) = e^t \quad = \int_0^\infty e^t e^{-st}\, dt. = \frac{-1}{1-s} = \frac{1}{s-1}$$

$$= \int_0^\infty e^{(1-s)t}\, dt.$$

$$\left.\frac{e^{(1-s)t}}{1-s}\right]_0^\infty = \lim_{t\to\infty} \cancel{\frac{e^{(1-s)t}}{1-s}} - \frac{e^0}{1-s}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{(1-s)t} = 0 \quad \text{se necesita que} \quad 1-s<0.$$

$$e^{-\infty} \to 0. \qquad\qquad 1<s$$

$$s>1.$$

$$\int_0^\infty t\, e^{-st} = \left.-\frac{t}{s} e^{-st}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}\, dt. \qquad \text{IPP.}$$

$$s>0. \qquad = \underbrace{\frac{-1}{s}\lim_{t\to\infty} t e^{-st}}_{\text{corto } s \;\; 0.} + \frac{0e^0}{s} + \left.\frac{e^{-st}}{s(-s)}\right]_0^\infty$$

$$0$$

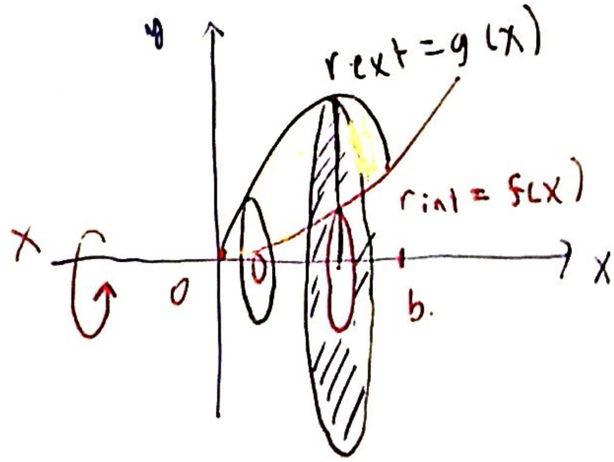
$$= 0 - \frac{1}{s^2} \cancel{\lim_{t\to\infty} e^{-st}} - \frac{e^0}{-s^2} = \frac{-1}{-s^2} = \frac{1}{s^2}.$$

Capítulo 16

Volúmenes por arandelas y cascarones cilindricos del cuadrado infinitesimal

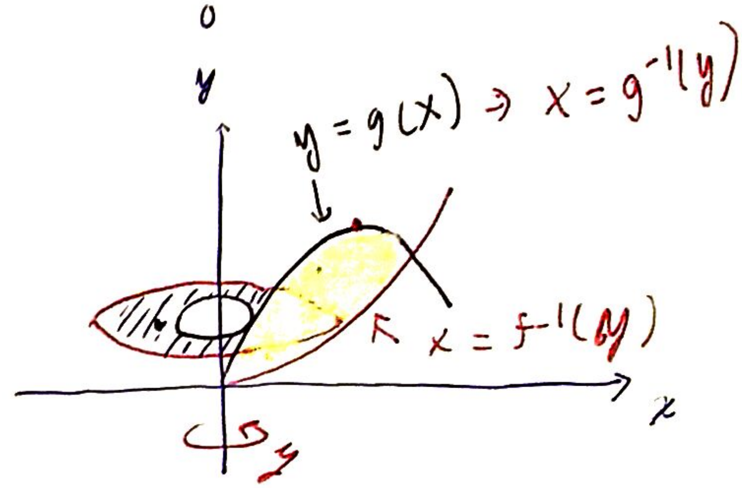
Volúmenes:

- Región.
- Identificar la recta de rotación.
- Identificar las funciones de radio para cada anillo
- Escoger la variable de integración.



$$A = \pi r_{ext}^2 - \pi r_{int}^2$$

$$V = \pi \int_0^b r_{ext}^2 - r_{int}^2 \, dx$$



Refleje respecto al eje-y.

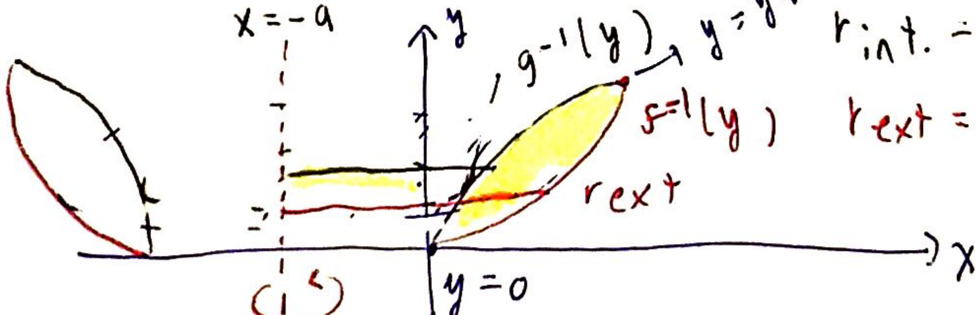
$0 \leq y \leq y_{max}$

$r_{int} = x = g^{-1}(y)$

$r_{ext} = x = f^{-1}(y)$

Volumen $V = \pi \int_0^{y_{max}} r_{ext}^2 - r_{int}^2 \, dy = \pi \int_0^{y_{max}} (f^{-1})^2 - (g^{-1})^2 dy.$

Rectas de Rotación.



$r_{int.} = a + g^{-1}(y)$

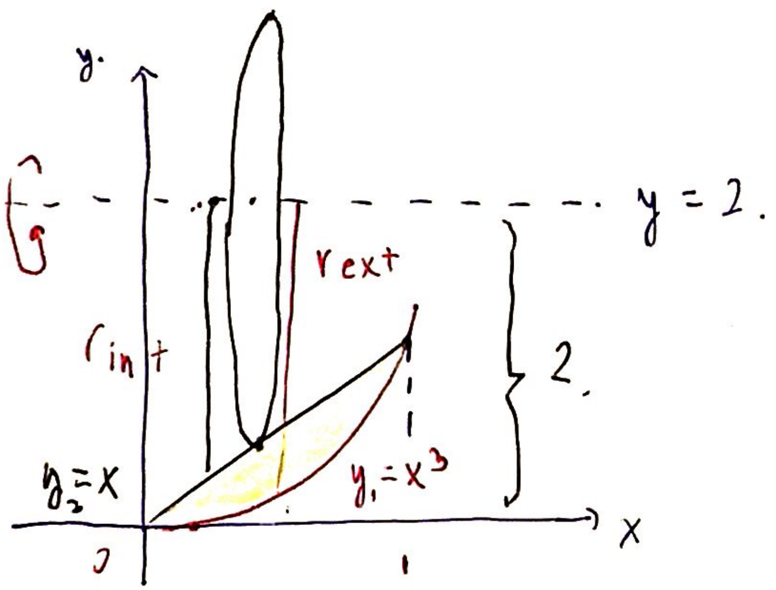
$r_{ext} = a + f^{-1}(y)$

$0 \leq y \leq y_{max}.$

$$V = \pi \int_0^{y_{max}} r_{ext}^2 - r_{int}^2 \, dy = \pi \int_0^{y_{max}} (a+f^{-1})^2 - (a+g^{-1})^2 \, dy.$$

Ejercicio 6: Considerar la región entre $f(x) = x$ & $g(x) = x^3$ en el 1er cuadrante. (p 96)

a. Plantee la integral del volumen del sólido al girar la región respecto a $y = 2$.



$r_{int} = 2 - y_2 = 2 - x.$

$r_{ext} = 2 - y_1 = 2 - x^3$

$A = \pi (r_{ext}^2 - r_{int}^2)$

Integre en x.

$x^3 - x = 0$

$x(x^2 - 1) = 0 \quad x = 0, 1$

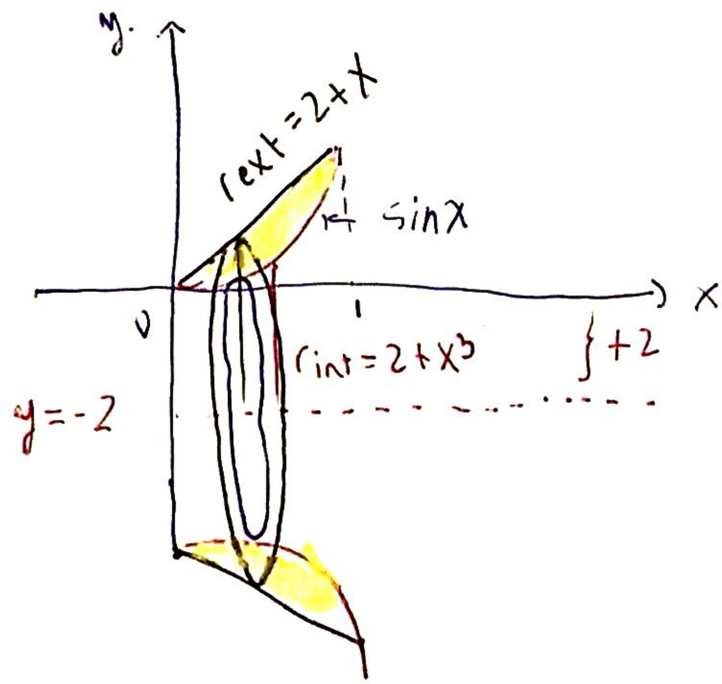
$$V = \pi \int_0^1 r_{ext}^2 - r_{int}^2 \, dx = \pi \int_0^1 (2 - x^3)^2 - (2 - x)^2 \, dx$$

$$\pi \int_0^1 x^6 - 4x^3 - x^2 + 4x \, dx$$

$$= 17\pi / 21.$$

b. Plantee la integral del volumen del sólido que se obtiene al girar la región respecto a $y=-2$.

dado.



$r_{int} = 2 + x^3$

$r_{ext} = 2 + x$

integre en $0 \leq x \leq 1$

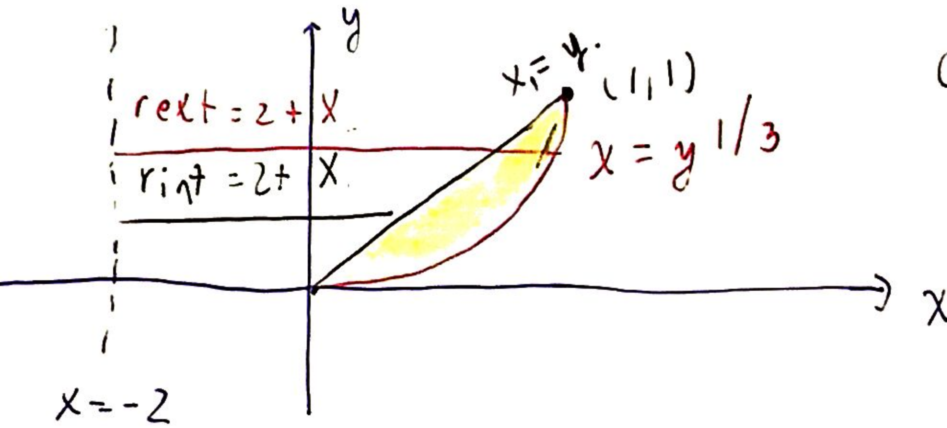
$$V = \pi \int_0^1 r_{ext}^2 - r_{int}^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (2+x)^2 - (2+x^3)^2 \, dx$$

$$V = 32\pi/21$$

c. Rote la región respecto a $x = -2$.

Integre en el eje-y.



$0 \leq y \leq 1$

$r_{ext} = 2 + y^{1/3}$

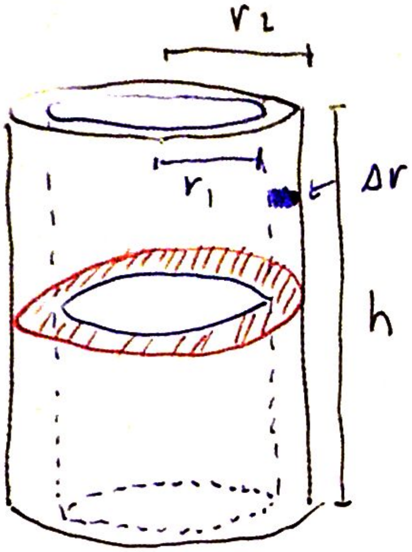
$r_{int} = 2 + y$

$0 \leq y \leq 1$

$$V = \pi \int_0^1 r_{ext}^2 - r_{int}^2 \, dy$$

$$V = \pi \int_0^1 (2+y^{1/3})^2 - (2+y)^2 \, dy.$$

6.3 Volumen con Cascarones Cilíndricos (Latas)



-te.

r_1 interno r_2 externo.

Área anillo $\pi r_2^2 - \pi r_1^2$

Volumen $V = \pi h (r_2^2 - r_1^2)$

grosor $\Delta r = r_2 - r_1 = dr$

radio promedio: $r = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$

$$V = \pi h (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = \pi h (2r)\, dr.$$

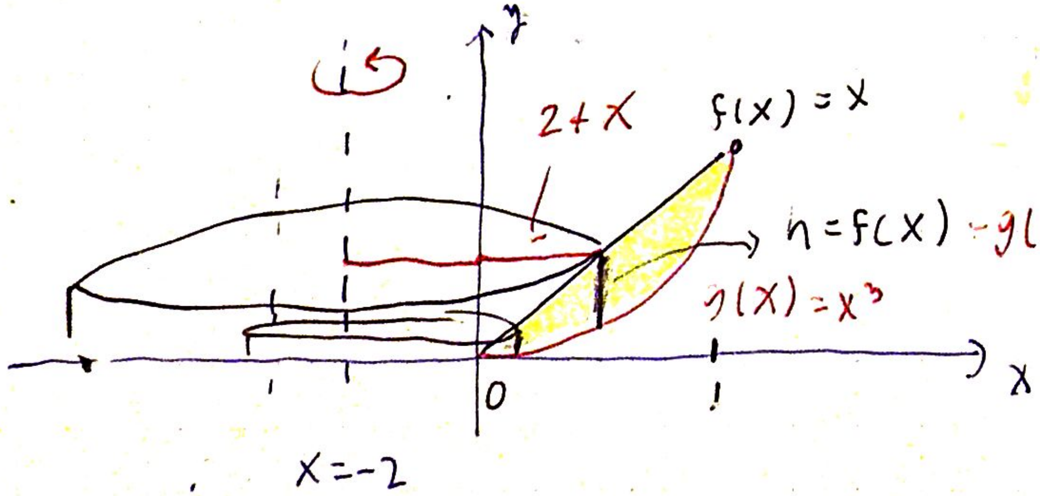
Volumen Cascarón $V = \pi h r^2$

Derive respecto a r $dV = 2\pi h r\, dr$

Integre en $a \le x \le b$ $\boxed{V = 2\pi \int_a^b h r\, dr}$

Cascarones cilíndricos.

Otra vez inciso c) $y = x3$ & $y = x$ gire a $x = -2$.



$h = f(x) - g(x) = x - x^3$

$0 \le x \le 1$

$h = x - x^3 \qquad r = 2 + x \qquad 0 \le x \le 1$

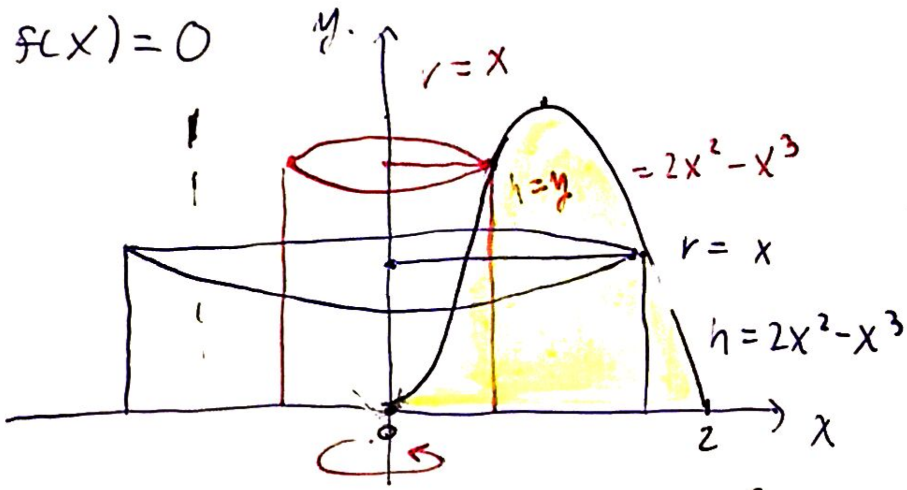
$$V = 2\pi \int_0^1 h\,r\,dx = 2\pi \int_0^1 (x - x^3)(2 + x)\,dx$$

ó $\quad V = \pi \int_0^1 (2 + y^{1/3})^2 - (2 + y)^2 \; dy.$

Ejemplo: Encuentre el volumen del sólido que se obtiene al girar la región entre el eje-x y la curva $f(x) = 2x^2 - x^3$ en el 1er cuadrante respecto al eje-y.

Intersectos-x $\quad 2x^2 - x^3 = x^2(2 - x) = 0 \quad$ $x = 0$, $x = 2.$

$f(x) = 0$



radio $\quad r = x$

altura $\quad h = 2x^2 - x^3.$

limites $\quad 0 \le x \le 2.$

$$V = 2\pi \int_0^2 h\,r\,dx = 2\pi \int_0^2 (2x^2 - x^3)\,x\,dx$$

$$V = 2\pi \int_0^2 2x^3 - x^4\,dx = 2\pi \left(\frac{2x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \Big]_0^2 \right)$$

$$V = 2\pi \left(8 - \frac{32}{5} \right)$$

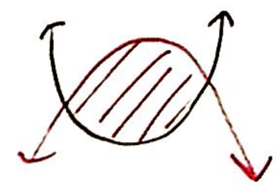
Rotando con un eje horizontal

Anillos $\quad V = \int_a^b \pi (r_2^2 - r_1^2)\, dx \quad$ eje-x, $y = 0$, $y = cte$

Rotando con un eje vertical $\quad x = 0$ ó $x = cte.$

Cilindros $\quad V = 2\pi \int_a^b h\, r\, dx$

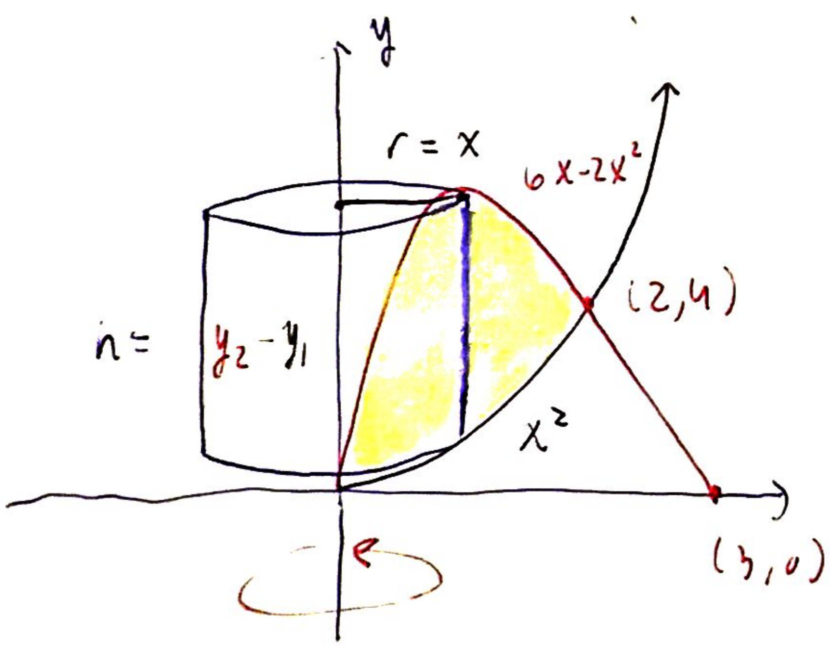
Ejercicio 2: Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región entre $y_1 = x^2$ & $y_2 = 6x - 2x^2$ alrededor del eje-y.



$y_2 = 0 \quad 2x(3 - x) = 0 \Rightarrow x = 0, 3.$

$y_1 = y_2 \quad x^2 = 6x - 2x^2.$

$3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2.$



Altura. $h = y_2 - y_1$

$h = 6x - 3x^2.$

Radio $\quad r = x$

Límites. $0 \leq x \leq 2.$

$V = 2\pi \int_0^2 h\, r\, dx.$

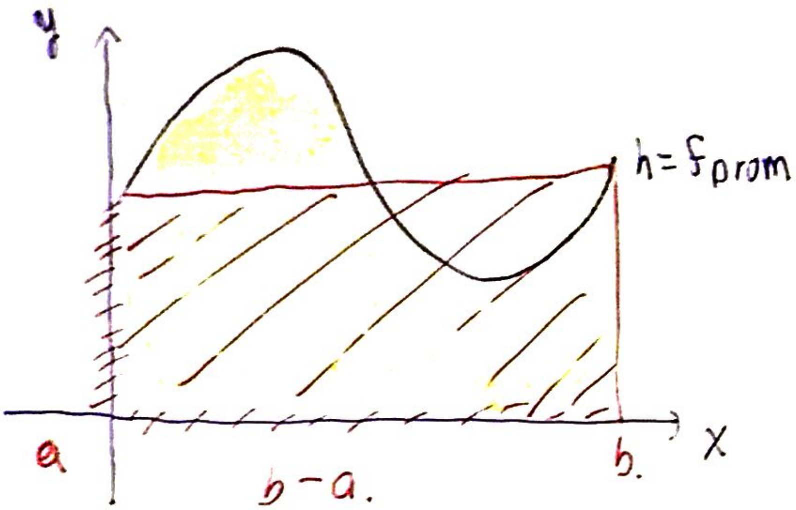
$$V = 2\pi \int_0^2 6x^2 - 3x^3 \, dx = 2\pi \left(2x^3 - \frac{3}{4}x^4 \Big]_0^2 \right)$$

$$V = 2\pi \left(16 - 3 \cdot 4 \right) = 2\pi(4) = 8\pi$$

Capítulo 17

6.5 Valor promedio de una función

6.5 Valor Promedio de una Función



¿Promedio altura y? (f_{prom})

Iguale el área del rectángulo con el área de la región amarilla

misma área

Ancho $b-a$

altura f_{prom}

A'rea $f_{prom}(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx.$

Área Región Amarilla

$$\boxed{f_{prom} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

$f(x)$ sea continua en $[a,b]$.

Ejemplo: Encuentre el valor promedio de $f(x) = \csc^2 x$ en $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$b - a = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$ $\quad \frac{1}{b-a} = \frac{4}{\pi}$

$$f_{prom} = \frac{4}{\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2 x\,dx = -\frac{4}{\pi}\cot x\Big]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$f_{prom} = \cancel{-\frac{4}{\pi}\cot \pi/2}^{\,0} + \frac{4}{\pi}\cot \pi/4. = \frac{4}{\pi}.$$

$\cot \pi/2 = \frac{\cos \pi/2}{\sin \pi/2} = \frac{0}{1}$ $\qquad \tan\frac{\pi}{4} = 1$

Ejercicio 1: Encuentre el valor promedio de $F(x)$.

a. $f(t) = \cos^4 t \sin t$ en $[0, \pi]$.

$$f_{prom} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi} \underbrace{\cos^4 t}_{u^4}\, \overbrace{\sin t\, dt}^{-du}.$$

$u = \cos t \qquad du = -\sin t\, dt. \qquad u(\pi) = \cos\pi = -1$

$u(0) = \cos 0 = 1$

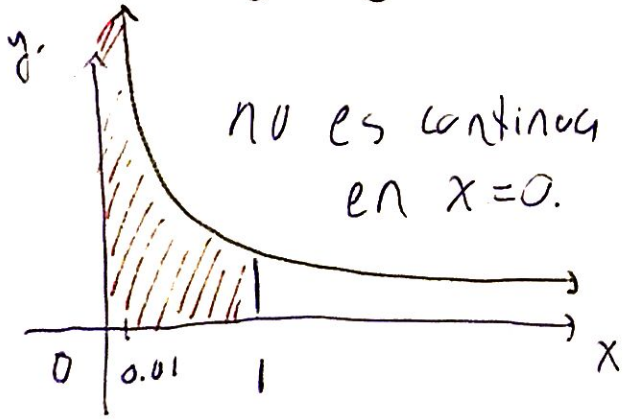
$$f_{prom} = \frac{-1}{\pi}\int_1^{-1} u^4\, du = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \underset{\text{par.}}{u^4}\, du = \frac{2}{\pi}\int_0^1 u^4\, du.$$

$$f_{prom} = \frac{2}{\pi}\left.\frac{u^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\pi}.$$

b. $g(x) = \dfrac{1}{x}$ en $[e^4, e^{10}]$.

$$g_{prom} = \frac{1}{e^{10}-e^4}\int_{e^4}^{e^{10}} \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{e^{10}-e^4}\ln|x|\Big]_{e^4}^{e^{10}}$$

$$g_{prom} = \frac{1}{e^{10}-e^4}\left(\ln e^{10} - \ln e^4\right) = \frac{6}{e^{10}-e^4}$$



Valor promedio de f en $0 \le x \le 1$

$$g_{prom} = \frac{1}{1}\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \ln x\Big]_0^1 = -\lim_{x \to 0^+} \ln x$$

$$y_{prom} = -\lim_{x\to 0^+} \ln x = +\infty \quad \text{no existe.}$$

La función no tiene valor promedio

$u^{-1/2}$

$2u^{1/2}$

c. $h(x) = \dfrac{3}{(4+x)^{1/2}}$ en $[-4, 5]$.

no es continua en $x = -4$.

$$h_{prom} = \frac{1}{5-(-4)} \int_{-4}^{5} 3(4+x)^{-1/2}\,dx$$

$(x)' = 1$.

$$h_{prom} = \frac{3}{9}\; 2(4+x)^{1/2} \Big]_{-4}^{5}$$

$(4-4)^{1/2} = 0^{1/2}$

$$h_{prom} = \frac{2}{3}\Big(9^{1/2} - \lim_{x\to -4^+} \cancel{(4+x)^{1/2}} \Big) = \frac{2}{3}\cdot 3 = 2.$$

0

Ejercicio 2: Densidad Lineal $\rho = 12(x+1)^{-1/2}$.

la varilla tiene 8 m. de longitud.

a. Encuentre la densidad promedio de la varilla.

$$\rho_{prom} = \frac{1}{8}\int_0^8 12(x+1)^{-1/2}\,dx$$

$$\rho_{prom} = \frac{24}{8}\,(x+1)^{1/2}\Big]_0^8 = 3\left(9^{1/2} - 1^{1/2}\right)$$

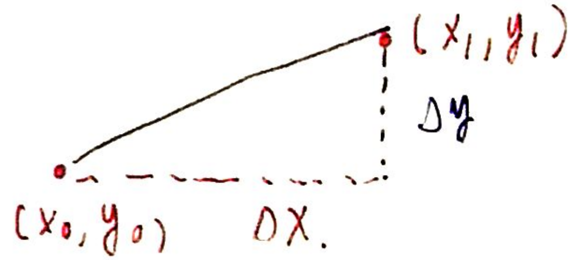
$$3(3-1) = 6 \text{ Kg/m.}$$

Capítulo 18

8.1 Longitud de arco

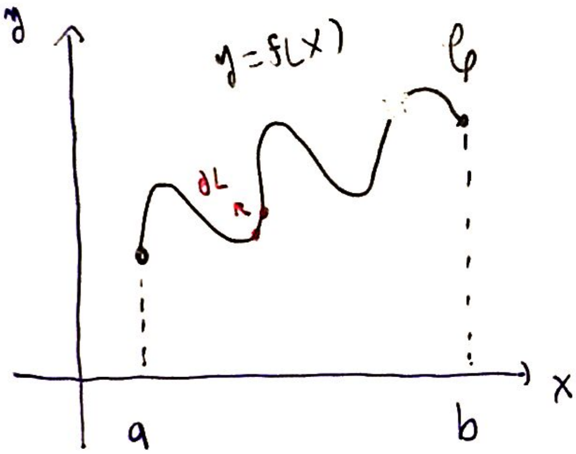
8.1 Longitud de Arco.

Derivación Fórmula.



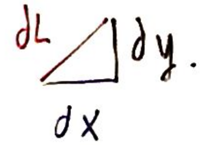
$$L = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

$$L = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$



largo de la curva $\mathcal{C}$.

$a \leq x \leq b$, $y = f(x)$



Longitud infinitesimal del segmento.

$$dL = \sqrt{(dy)^2 + (dx)^2}$$

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}\; dx.$$

Integrando

Longitud de arco de $\mathcal{C}$: $\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + [y']^2}\, dx}$

derivada.

Valor Promedio: $f_{ave} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$

No es necesario graficar ninguna curva.

Ejemplo. Encuentre la longitud de la curva

$$y(x) = 1 + 2x^{3/2} \quad \text{en} \quad 0 \leq x \leq 8/9$$

Simplifique $1 + (y')^2$ antes de integrar

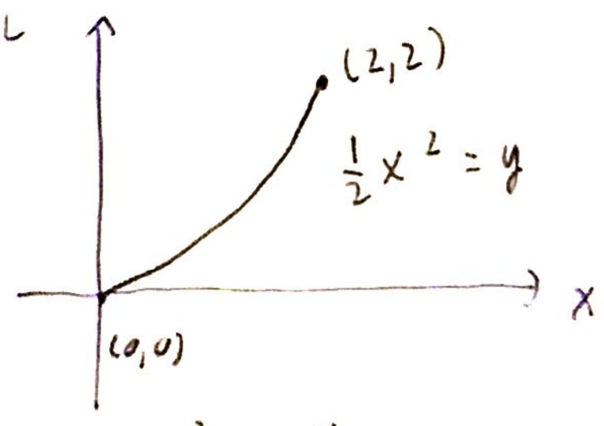
$y' = 3x^{1/2}$ $\qquad (y')^2 = 9x$ $\qquad 1 + (y')^2 = 1 + 9x$

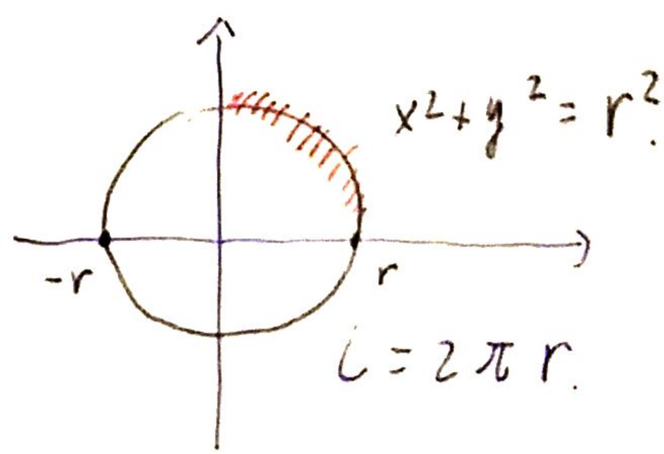
Longitud Arco: $L = \int_0^{8/9} (1+9x)^{1/2}\, dx$ $\qquad u = 1 + 9x$, $du = 9 \cdot dx$

$$L = (1+9x)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} \Big]_0^{8/9}$$

$$L = \frac{2}{27}\Big(\underbrace{9^{3/2}}_{(3^2)^{3/2}} - \underbrace{1^{3/2}}_{1} \Big) = \frac{2}{27}\left(3^3 - 1\right) = \frac{2}{27} \cdot 26.$$

Ejercicio (a): Parábola (Planteado)





$y' = x$

$1 + (y')^2 = 1 + x^2$

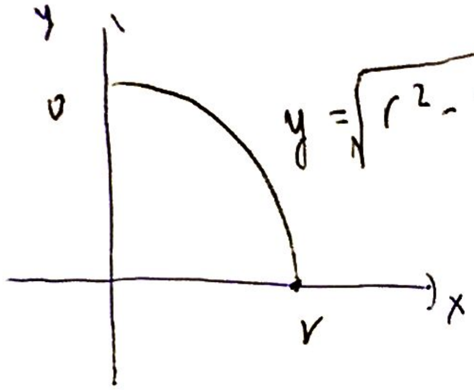
$$L = \int_0^2 \sqrt{1+x^2}\, dx \qquad x = \tan\theta, \quad dx = \sec^2\theta \cdot d\theta.$$

Ejercicio 1 b: Longitud de una circunferencia de radio r.

$r = c\text{te}.$

Ec: $x^2 + y^2 = r^2.$

$$L = 4\int_0^r \sqrt{1+(y')^2}\, dx.$$



$$y' = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-1/2}(-2x)$$

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}.$$

$$L = 4\int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 4r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$\sqrt{r^2} = r$

$$= 4r \sin^{-1}\left(\frac{x}{r}\right)\Big]_0^r$$

$$= 4r\left[\sin^{-1}\left(\frac{r}{r}\right) - \sin^{-1}(0)\right]$$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$= 4r\left[\overset{\pi/2}{\cancel{\sin^{-1} 1}} - \overset{0}{\cancel{\sin^{-1}(0)}}\right]$$

$$= 4r\,\frac{\pi}{2} = 2\pi r.$$

Longitud de circunferencia $2\pi r. = L$

Área de un círculo $\pi r^2 = A$

Volumen $4\pi r^3/3 = V$

1.

Longitud: Un cable telefónico cuelga entre dos postes con posiciones horizontales en $x = \pm 25$. El cable tiene una curva con ec. $y = -5 + 25\cosh\left(\frac{x}{25}\right)$

Encuentre la longitud del cable.

$$L = \int_{-25}^{25} \sqrt{1+(y')^2}\, dx \qquad \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$$

$$y' = 25\sinh\left(\frac{x}{25}\right)\cdot\frac{1}{25} = \sinh\left(\frac{x}{25}\right)$$

se cancelan los 25's.

$$1+(y')^2 = 1 + \sinh^2\left(\frac{x}{25}\right) = \cosh^2\left(\frac{x}{25}\right)$$

identidad hiperbólica

$$L = \int_{-25}^{25} \sqrt{\cosh^2(x/25)}\, dx = \int_{-25}^{25} \cosh\left(\frac{x}{25}\right) dx$$

$$L = 2\int_{0}^{25} \cosh\left(\frac{x}{25}\right) dx = 2\cdot 25\sinh\left(\frac{x}{25}\right)\Big]_0^{25}$$

$$L = 50\left[\sinh(1) - \cancel{\sinh(0)}^{\,0}\right] \approx 58.7600$$

función tiene diferente variable independiente.

Ejercicio 3: Pág 112. Encuentre la longitud para las siguientes curvas.

a. $\mathcal{C}_1: \; x = \dfrac{y^3}{6} + \dfrac{1}{2y} \qquad 1 \leq y \leq 2.$

Utilice el eje-y para integrar

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx \quad ; \quad \int_a^b \sqrt{1+(\underline{\underline{x'}})^2}\, dy.$$

Objetivo: SIMPLIFIQUE $1+(x')^2$.

$$x' = \frac{3y^2}{6} - \frac{1}{2}y^{-2} = \frac{1}{2}\left(y^2 - y^{-2}\right) \qquad y^2 y^{-2} = y^0$$

$$(x')^2 = \frac{1}{4}\left(y^2 - y^{-2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(y^4 - 2\cdot 1 + y^{-4}\right)$$

$$1+(x')^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(y^4 - 2 + y^{-4}\right)$$

Simplifique y factorice.

$$= \frac{1}{4}\left(4 + y^4 - 2 + y^{-4}\right) \qquad a^2 + 2a + 1 \quad (a+1)^2$$

$$y^2 \cdot y^{-2} = 1 \qquad = \frac{1}{4}\left(y^4 + 2 + y^{-4}\right) \qquad 1 + \frac{1}{4}a = \frac{4+a}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(y^2 + y^{-2}\right)^2 = 1+(x')^2.$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+(x')^2}\, dy = \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{4}\left(y^2+y^{-2}\right)^2}\, dy.$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 (y^2 + y^{-2})\,dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{1}{y}\Big]_1^2\right)$$

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\right)$$

b. $\mathcal{C}_2$: $y = \ln(\sec\underline{\underline{\theta}})$ $\qquad 0 \le \underline{\underline{\theta}} \le \pi/4.$

$$y'(\theta) = \frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec\theta} = \tan\theta.$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta.$$

$$L = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1+(y')^2}\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2\theta}\,d\theta.$$

$$L = \int_0^{\pi/4} \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big]_0^{\pi/4}.$$

$$L = \ln(\sec\pi/4 + \tan\pi/4) - \ln(\cancel{\sec 0}^{\,1} + \cancel{\tan 0}^{\,0})$$
$$= \ln(\sqrt{2} + 1) - \ln 1 = \ln(\sqrt{2}+1)$$

Longitud de Arco: curva está en $a \le t \le x$.

límite superior indefinido.

$$S(x) = \int_a^x \sqrt{1+(y')^2}\,dt \Bigg\}$$ Función de Longitud de Arco.

7

Ejercicio 4: Encuentre la función de longitud de arco para la curva $y = \ln(\sin t)$ en $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq X$.

$$y' = \frac{\cos t}{\sin t} = \cot(t) \qquad \int \csc^2 t \, dt = \cot x$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \cot^2(t) = \csc^2(t).$$

$$L(X) = \int_{-\pi/2}^{x} \sqrt{1 + (y')^2}\, dt = \int_{-\pi/2}^{x} \sqrt{\csc^2 t}\, dt.$$

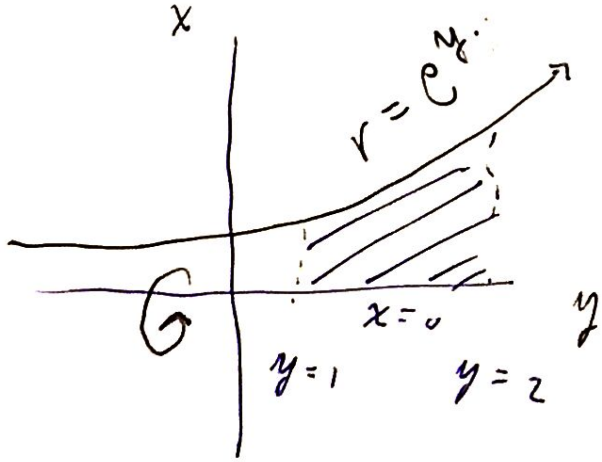
$$L(X) = \int_{-\pi/2}^{x} \csc t \, dt. = -\ln|\csc t + \cot t| \Big]_{-\pi/2}^{x}$$

$$= -\ln|\csc x + \cot x| + \ln|\csc(-\pi/2) + \cot(-\pi/2)|$$

$$\cot \pi/2 = \frac{\cos \pi/2}{\sin \pi/2} = 0 \qquad \csc(-\pi/2) = \frac{1}{\sin(-\pi/2)} = -1$$

0.

$$= -\ln|\csc x + \cot x| + \cancel{\ln}|-1|$$

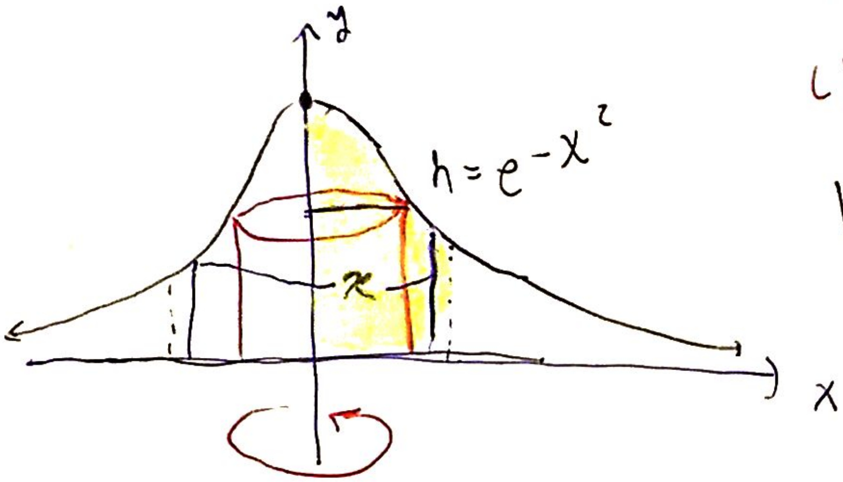


Ej: 3 Lab 8.

Ej: 4 $\quad y = e^{-x^2} \quad y = 0, \quad x = -1 \quad x = 1$

Lab 8.

a) alrededor del eje-y.



Cilindros.

$$V = 2\pi \int_0^1 h r \, dx$$

Discos

$$V = \pi \int_0^1 r^2(y)\, dy.$$

$$V = \pi \int_0^1 e^{-x^2} \overbrace{2x\,dx}^{-du} = \pi \int_0^{-1} -e^u\, du = -\pi\, e^u \Big]_0^{-1}$$

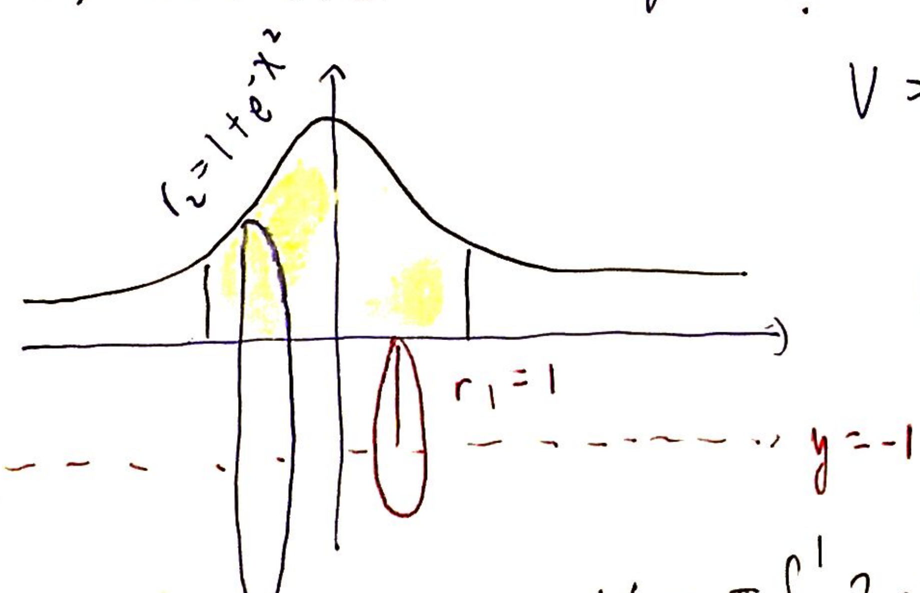
$u = -x^2 \qquad du = -2x\,dx$

$u(0) = 0 \qquad u(1) = -1$

$$-\pi\left(e^{-1} - e^0\right)$$

$$\pi\left(e^0 - e^{-1}\right) = \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

b) alrededor de $y = -1$.



$$V = \pi \int_{-1}^1 r_2^2 - r_1^2 \, dx.$$

$$(1 + e^{-x^2})^2 - 1$$

$$1 + 2e^{-x^2} + e^{-x^4} - 1$$

$$2e^{-x^2} + e^{-x^4}$$

$$V = \pi \int_{-1}^1 2e^{-x^2} + e^{-x^4}\, dx$$

Capítulo 19

8.5 Probabilidad
a) Distribución uniforme
b) Distribución exponencial
c) Distribución normal

Simulacro Lunes 7 de octubre. 2:30 PM
CES.

$0 \leq$ Notas ≤ 60 Bola Parcial. Res

7.8 Integrales Improp 8.5 Probabilidades.
76-128. sin 8.2 Área Superficial.

Lunes 14 de octubre Parcial 2: 2:30 PM CES.

Integr. Funciones Parciales.

Probabilidad (p. 123).

Un evento puede ser discreto o puede ser continuo.

Discreto: hay un número finito o contable de eventos.

Goles en un partido, lanzamiento de dados y monedas.

$$\text{Probabilidad} = \frac{\#\text{ veces de que ocurra un evento}}{\#\text{ total de eventos.}}$$

Dado
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

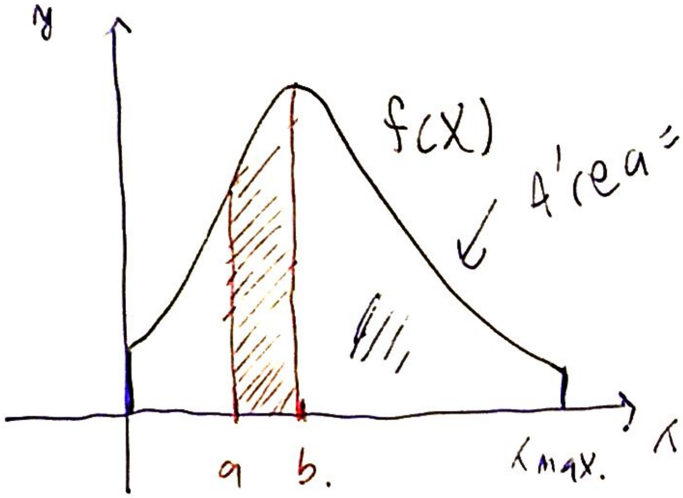
$$\text{Probabilidad } P(X \geq 5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Probabilidad de que ocurra cualquier evento
está entre 0 y 1 $0 \leq P(x) \leq 1$.
$0\% \leq P(x) \leq 100\%$

Probabilidad de
que ocurran todos los eventos $\sum_{i=1}^{n} P(X_i)$

Enfoque: Statistical I y Mate Discreta

Continuo: el número de eventos no es contable.
El dominio de los eventos son los números reales.



Mediciones de cantidades como pesos, alturas, tiempos, volúmenes, áreas.

La probabilidad de que ocurra un evento entre a y b es el área bajo la curva.

$$p(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

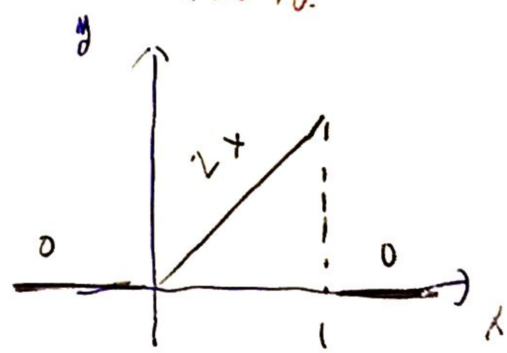
Función de densidad de probabilidad. $f(x)$.

Condiciones.

i. $f(x) \geq 0$ en $-\infty \leq x \leq \infty$.

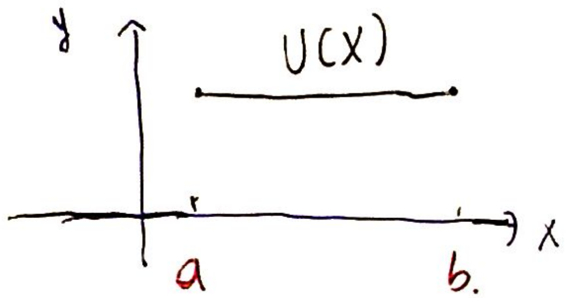
ii $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ Probabilidad tiene que ser del 100%.

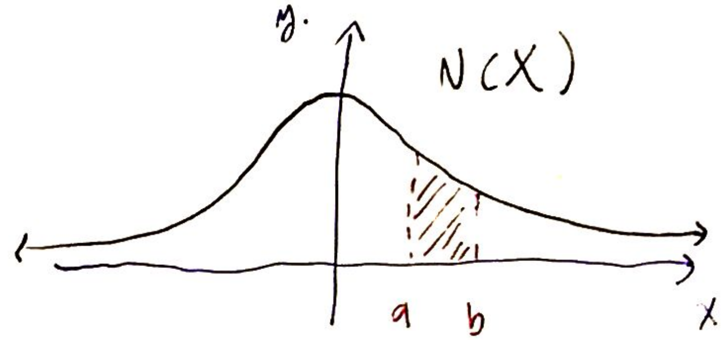
Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0. \\ 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx = x^2\Big]_0^1 = 1 \quad ✓$$

3 Distribuciones de Probabilidad Comunes.





$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x > b. \end{cases}$$

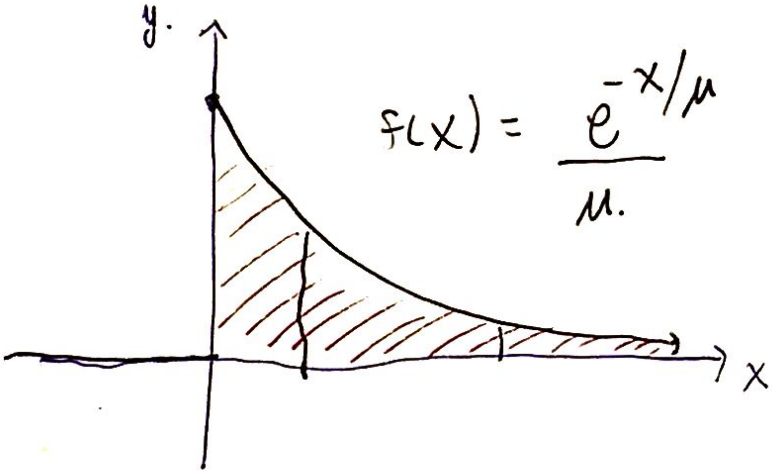
uniforme.

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Normal media 0
desv. estándar 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(x)\,dx = 1.$$

Exponencial.



$$f(x) = \frac{e^{-x/\mu}}{\mu}.$$

letra griega.
μ = media, mio
todos los eventos

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

mediciones, tiempos, pesos

Ejercicio: Compruebe de que la distribución uniforme y la distribución exponencial son funciones de densidad

$$U(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b \qquad f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}, \; x \geq 0.$$

$$P(-\infty \leq x \leq \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x)\,dx = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dx$$

a, b son constantes

↑ probabilidad

$$= \frac{x}{b-a}\Big]_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

$U(x) \geq 0$ en $\mathbb{R}$.

$U(x)$ es una función de densidad de probabilidad.

Exponencial:

$$P(0 \leq x \leq \infty) = \int_0^{\infty} e^{-x/\mu} \frac{dx}{\mu}$$

μ tiempo promedio constante.

$$w = \frac{-x}{\mu} \qquad dw = \frac{-dx}{\mu}$$

$u(\infty) = -\infty.$
$u(0) = 0.$

$$P(0 \leq x \leq \infty) = -\int_0^{-\infty} e^{w}\,dw = -e^{w}\Big]_0^{-\infty}$$

$$e^{-\infty} \to 0 \qquad = -\lim_{w \to -\infty} e^{w} - (-e^{0}) = 1$$

Capítulo 20

8.5 Probabilidad, media, varianza, desviación estándar, mediana

3.5 Probabilidad

Variable continua $-\infty \leq x \leq \infty$.

Probabilidad P, de que x ocurra entre a y b es:

$$\boxed{P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Distribución Uniforme: $f(x) = \frac{1}{b-a}$ $\quad a \leq x \leq b$.

Exponencial: $f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}$ $\quad x \geq 0$.

μ = media

Probabilidad es del 100%. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

P. 125.

Ejercicio 1: Un contenedor tiene mercancía cuyo peso tiene una distribución uniforme entre 2 y 4 toneladas.

a. Calcule la probabilidad de que el contenedor pese entre 2.5 y 3.5 toneladas. $a = 2$ $\quad b = 4$.

$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2}$ $\quad 2 \leq x \leq 4$. $\quad f(x) = 0$ si $x > 4$.

$$P(2.5 \leq x \leq 3.5) = \int_{2.5}^{3.5} \frac{1}{2}\,dx = \frac{x}{2}\Big]_{2.5}^{3.5} = \frac{3.5-2.5}{2} = \frac{1}{2}.$$

La probabilidad de que pese entre 2.5 y 3.5 es del 50%.

b. Calcule la probabilidad de que el contenedor pese más de 2.5 toneladas.

$$P(X \geq 2.5) = \cancel{\int_{2.5}^{\infty} f(x)\,dx} = \int_{2.5}^{4} \frac{1}{2}\,dx = \frac{x}{2}\Big]_{2.5}^{4} = \frac{4-2.5}{2} = \frac{1.5}{2}.$$

$$P(X \geq 2.5) = \frac{3}{4} \text{ ó } 75\%.$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 1/2 & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & x > 4. \end{cases}$$

Ejercicio 2: El tiempo de espera promedio para recibir una orden a domicilio es de 0.5 hora y tiene una distribuición exponencial.

a. Encuentre la probabilidad de que la comida se entregue después de media hora.

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \qquad \mu \text{ - media} \qquad \mu = 0.5.$$
$$x \geq 0.$$

$$f(x) = \frac{1}{0.5} e^{-x/0.5} = 2e^{-2x} \qquad x \geq 0.$$

$$P(x \geq 0.5) = \int_{0.5}^{\infty} 2e^{-2x}\,dx \qquad \frac{2e^{-2x}}{-2}$$

$$P(X \geq 0.5) = -e^{-2x}\Big]_{0.5}^{\infty} \qquad e^{-\infty} \to 0$$

$$= -\lim_{x\to\infty} e^{-2x} + e^{-2(0.5)} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Existe una probabilidad del 36.78% de que la entrega se realice 0.5 hora después.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la entrega se realice en menos de 15 min? ; 1/4 de hora

$$P(X \leq 1/4) = \int_0^{1/4} 2e^{-2x}\,dx = \int_{1/4}^{0} e^{\overset{u}{\frown}\,-2x} \underbrace{(-2dx)}_{du}$$

$u = -2x \quad du = -2dx \qquad u(0) = 0 \qquad u(1/4) = -1/2$

$$P(X \leq 1/4) = \int_{-1/2}^{0} e^{u}\,du = e^{u}\Big]_{-1/2}^{0} = 1 - e^{-1/2} \approx 0.3934$$

Estadísticos Importantes: Media, Mediana y Varianza

	x_1					
Variables	1	2	3	4	5	6.
Discretas.	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6.
	$p(x_1)$					

Media $= 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + \dots\ 6\left(\frac{1}{6}\right)$

Dados: $= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6.} = 3.5$

Media Discretas $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$ $f(x_i)$ peso, frecuencia probabilidad.

Variable continua: se integra $x f(x)$.

Media (mi :)) $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ el dominio de $f(x)$ puede restringir el intervalo de integración.

realice IPP $u = x$
$dv = f(x) dx$.

Mediana: el número m que tiene una probabilidad acumulada del 50%.

$$\int_{-\infty}^{m} f(x) dx = 0.5$$ Resuelva para m.

$$F(m) = 0.5 \Rightarrow m = F^{-1}(0.5)$$

Varianza: la desviación cuadrado respecto a la media (sigma) $(x-\mu)^2$.

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$$

Realice IPP dos veces $u = (x-\mu)^2$.
por partes.

Ejercicio 3: Considere la distribución exponencial.

$$f(x) = \frac{1}{100} e^{-x/100}. \qquad x \geq 0.$$

a. Encuentre la media de f(x)

$$\mu = \int_0^\infty x \frac{e^{-x/100}}{100} dx = -xe^{-x/100}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x/100} dx$$

$u = x \quad dv = \frac{1}{100} e^{-x/100} dx$

$du = dx \quad v = -e^{-x/100}$

$$\mu = -xe^{-x/100}\Big]_0^\infty - 100e^{-x/100}\Big]_0^\infty$$

$$u = -\lim_{x\to\infty} xe^{-x/100} + \cancel{0 \cdot e^{-0}} - \cancel{100 \lim_{x\to\infty} e^{-x/100}} + \cancel{100 e^{-0}}$$

$e^{-\infty} \to 0.$

$$\mu = 100 - \overbrace{\underbrace{\lim_{x\to\infty} xe^{-x/100}}_{LH}}^{0.}$$

$\infty \cdot e^{-\infty} = \infty \cdot 0$

$$\lim_{x\to\infty.} \frac{x}{e^{x/100}} \underset{LH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{100} e^{x/100}}$$

$\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ LH.

$\frac{1}{e^\infty} \to 0$

$$\mu = 100.$$

b. Encuentre la mediana de $f(x)$.

$$\int_0^m f(x)\,dx = 0.5. \qquad f(x) = \frac{1}{100} e^{-x/100}.$$

$$\frac{1}{100}\int_0^m e^{-x/100}\,dx = -\frac{100}{100} e^{-x/100}\Big]_0^m = -e^{-m/100} + e^0.$$

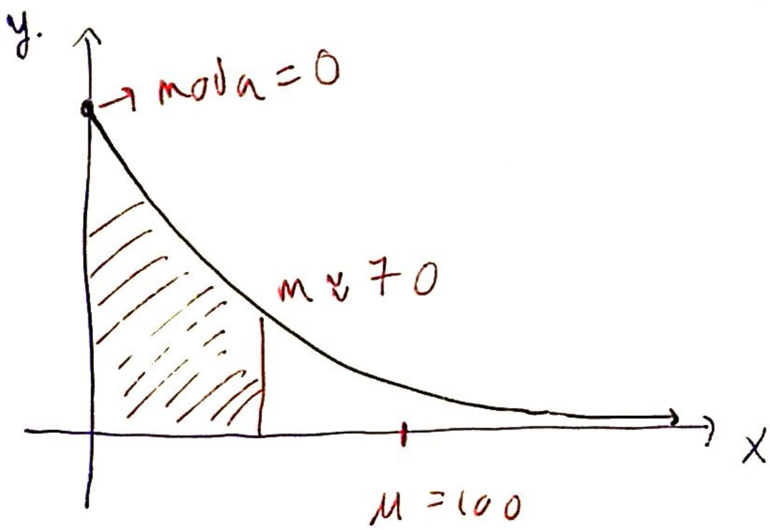
$$1 - e^{-m/100} = 0.5.$$ Resuelva para m.

$$-e^{-m/100} = -0.5$$

$$e^{-m/100} = 0.5.$$

Aplique ln's: $\frac{-m}{100} = \ln(0.5) \rightarrow m = -100\,\underbrace{\ln(0.5)}_{-0.69}$

$m \approx 69.31$



Varianza $\sigma^2 = \int_0^\infty (x-100)^2 \frac{e^{-x/100}}{100}\,dx$

$u = (x-100)^2 \qquad dv = \frac{e^{-x/100}}{100}\,dx$

$du = 2(x-100) \qquad v = -e^{-x/100}$

$$\sigma^2 = -(x-100)^2 e^{-x/100}\Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \cancel{2(x-100)\, e^{-x/100}}\, dx$$

IPP.

$$\sigma^2 = -\lim_{x\to\infty} \frac{(x-100)^2}{e^{x/100}} + 100^2 e^{-0}.$$

L'H

$$\sigma^2 = 100^2 \qquad \sigma = 100$$

Ejercicio 4: Encuentre la media, mediana, varianza y desviación estándar de la distribución uniforme.

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b. \qquad \text{para } b=7,\ a=1$$

Media: $$\mu = \int_a^b x f(x)\,dx = \int_1^7 \frac{x}{6}\,dx = \frac{x^2}{12}\Big]_1^7$$

$$\mu = \frac{49-1}{12} = \frac{48}{12} = 4.$$

Mediana: $$\int_a^m f(x)\,dx = 0.5 \qquad \int_1^m \frac{1}{6}\,dx = \frac{x}{6}\Big]_1^m$$

$$\frac{m-1}{6} = 0.5. \Rightarrow m = 0.5(6)+1 = 4.$$

No hay moda.

Varianza: $$\int_a^b (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \int_1^7 (x-4)^2 \underbrace{\frac{1}{6}}_{f(x)}\,dx$$

$$u = x-4 \qquad du = dx \qquad \begin{array}{l} u(7)=3 \\ u(1)=-3 \end{array}$$

$$\frac{1}{6}\int_1^7 (x-4)^2\,dx = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} u^2\,du = \frac{2}{6}\int_0^3 u^2\,du$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,u^3\Big]_0^3 = \frac{27}{9} = 3$$

Desviación estándar: $\sigma = \sqrt{\text{varianza}} = \sqrt{3}$.

4. Longitud de arco $\int \sqrt{1+(y')^2}\,dx$ cab 9.

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\Big]$$

$x = 2\sin\theta$

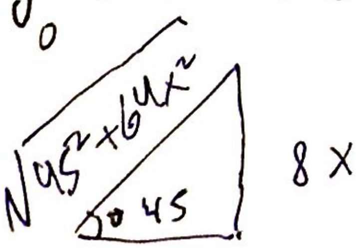
$dx = 2\cos\theta\,d\theta$.

5. $y = 180 - \left(\frac{2x}{45}\right)^2 = 180 - \frac{4x^2}{45^2}$.

$y' = \frac{-8x}{45^2}$ $\qquad 1 + (y')^2 = 1 + \frac{64x^2}{45^2}$

$$= \frac{1}{45^2}\left(45^2 + 64x^2\right).$$

$$L = \int_0^{90} \sqrt{45^2 + 64x^2}\,dx$$



$\tan\theta = \frac{8x}{45}$ $\qquad \sec\theta = \frac{\sqrt{(\ )}}{45}$.

$$x = \frac{45}{8}\tan\theta \qquad dx = \frac{45}{8}\sec^2\theta\, d\theta.$$

$$L = \int_0^{?} \sqrt{45^2+64x^2}\, dx = \int_0 45\sec\theta \cdot \frac{45}{8}\sec^2\theta\, d\theta.$$

$$L = \frac{45^2}{8}\int \sec^3\theta\, d\theta. = \frac{45^2}{16}\left(\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta|\right)$$

Capítulo 21

7.4 Fracciones parciales
Caso 1: Factores lineales distintos
Caso 2: Factores lineales repetidos

Lab Lunes 1-2:30 PM.
sim2 2:30 PM Sentro Estudiantil.

7.4 fracciones Parciales

se utiliza para integrar funciones racionales.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = f(x)$$

P polinomio de grado n
Q polinomio de grado m.

condición: denominador > numerador.

En caso de que el grado del numerador sea mayor que o igual del denominador, realice la división larga.

$$\frac{6}{x^2-9}, \quad \frac{x+3}{x^3-9x}, \quad \frac{1}{x^2+4}, \ldots,$$

denominador es el más grande

$$\left.\frac{x^2+3}{x^2-9}, \quad \frac{x^4+x^2+1}{x^3-4x}\right\}$$ división larga

simplifique la función en dos o más fracciones parciales.

$$\underbrace{\frac{6}{x^2-9}}_{\text{no puede integrar}} = \frac{6}{(x-3)(x+3)} = \underbrace{\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}}_{}$$

A, B dos coeficientes "desconocidos"

$$\frac{6}{x^2-9} = \frac{A(x+3)+B(x-3)}{x^2-9}.$$

Igualando los numeradores cero en $x=-3, 3$.

$$6 = A(x+3) + B(x-3)$$

$x=3$: $\quad 6 = 6A + 0 \Rightarrow A=1$

$x=-3$: $\quad 6 = 0 - 6B \Rightarrow B=-1$

$$\frac{6}{x^2-9} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}$$

$$\int \frac{6}{x^2-9}\,dx = \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x+3} = \ln|x-3| - \ln|x+3| + C.$$

Finalmente integre.

Caso 1: Factores lineales distintos.

$$\frac{p(x)}{(x^2-9)(x^2-4)} = \frac{p(x)}{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c.$$

Encuentre A, B, C y D.

Caso 2: Factores Lineales Repetidos.

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

$x+1$

Encuentre A, B y C.

$$\int F(x) = A \ln|x+1| - B(x+1)^{-1} - \frac{1}{2}C(x+1)^{-2} + K.$$

$$\int (x+a)^{-t}\,dx = \frac{(x+a)^{-t+1}}{1-t} + K.$$

Ejercicio 1: $\displaystyle\int \frac{18z}{2z^2+7z-4}\,dz$ P(64)

1. Factorice dem: $2z^2 + 7z - 4 = (2z-1)(z+4)$.

$$\begin{matrix} 2z & & -1 \\ z & & 4 \end{matrix}$$

$2(z^2 + 3.5z + 2)$

2. Ceros Den.

$$\left.\begin{aligned} 2z - 1 = 0 &\Rightarrow z = 0.5. \\ z + 4 = 0 &\Rightarrow z = -4 \end{aligned}\right\}$$ lineales distintos.

$$\frac{18z}{2z^2+7z-4} = \frac{A}{2z-1} + \frac{B}{z+4}$$

¿ A, B?

Multiplique por $(2z-1)(z+4)$

$$18z = A(z+4) + B(2z-1)$$

$z = 0.5$: $9 = 4.5A + 0 \Rightarrow A = 9/4.5 = 2.$

$z = -4$: $18(-4) = 0 - 9B \Rightarrow B = \frac{-18}{-9}(4) = 8$

$$\int \frac{18z}{2z^2+7z-4} = \int \frac{2}{2z-1}\,dz + 8\int \frac{dz}{z+4}$$

$$= \frac{2}{2}\ln|2z-1| + 8\ln|z+4| + C.$$

Ejercicio 2: Integre las sigs. funciones.

a) $\displaystyle\int \frac{4x+2}{x^2+2x+1}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx$

a) $x^2+2x+1 = (x+1)^2$. factor lineal repetido.

$$\frac{4x+2}{x^2+2x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \quad ¿A, B?$$

Multiplique por $(x+1)^2$ denominador se hace cero en $x=-1$

$$4x+2 = A(x+1) + B.$$

$x=-1$: $-2 = 0 + B \Rightarrow B=-2.$

$x=0$: $2 = A + B. \Rightarrow A = 2-B = 2+2 = 4.$

$$\int \frac{4x+2}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{4}{x+1}\,dx + \int -2(x+1)^{-2}\,dx$$

$$= 4\ln|x+1| + 2(x+1)^{-1} + C.$$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx \qquad x^3-x = x(x^2-1)$

$$= x(x+1)(x-1)$$

ceros en $0, -1, 1$ (factores lineales distintos)

$$\frac{x^2+2x-1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

$$x^2+2x-1 = A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)$$

$x=0: \quad -1 = -A + 0 + 0 \Rightarrow A = 1$

$x=-1: \quad -2 = 0 + 2B + 0 \Rightarrow B = -1$

$x=1: \quad 2 = 0 + 0 + 2C \Rightarrow C = 1$

$$\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx = \int\frac{dx}{x} - \int\frac{dx}{x+1} + \int\frac{dx}{x-1}$$

$$= \ln|x| - \ln|x+1| + \ln|x-1| + C.$$

Capítulo 22

7.4 Fracciones parciales

Caso 3: Factores cuadráticos irreducibles

Caso 4: Factores cuadráticos repetidos

1

Sesión Resolución Dudas Lun 1-2:30 PM
D-503.

Parcial 2 Lun 2:30 CES.

Corto 9 | Fracciones Parciales.

Lab 11 Hoy Entrega Jueves 17 octubre.

Fracciones Parciales.

Caso 1 y 2: Factores Lineales.

$$\frac{P(x)}{x(x+1)^2(x+2)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+2)} + \frac{E}{(x+2)^2} + \frac{F}{(x+2)^3}$$

$$\int \frac{A\,dx}{x+a} = A\ln|x+a| + C \qquad \int B(x+a)^{-n}\,dx \quad \frac{B}{-n+1}\frac{1}{(x+a)^{n-1}} + C.$$

Ejemplo 1: $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{(x+2)^2(x-1)}\,dx \qquad (x^2+4x+4)(x-1)$

$$\frac{x^2+x}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x-1)} \quad * (x+2)^2(x-1)$$

$$x^2+x = A(x+2)(x-1) + B(x-1) + C(x+2)^2.$$

cero en $x=-2$ y en $x=1$

$x=-2$: $2 = 0 - 3B + 0$ $\qquad B = -2/3 = -6/9$

$x=1$: $1^2+1 = 0 + 0 + 9C$ $\qquad C = 2/9$

$x=0$: $0 = -2A - B + 4C.$ $\qquad 2A = -B - 4C = -2/9$

$A = -1/9, \quad B = -2/3, \quad C = 2/9. \qquad \int (x+2)^{-2}\,dx$

$$\int \frac{x^2+x}{(x+2)^2(x-1)}\,dx = -\frac{1}{9}\int \frac{dx}{x+2} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(x+2)^2} + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= c \quad -\frac{1}{9}\ln|x+2| + \frac{2}{3}\,\frac{1}{x+2} + \frac{2}{9}\ln|x-1|$$

Caso 3: Factores Cuadráticos Irreducibles.

no tienen raíces reales. $b^2-4ac<0$ imaginario

$\underline{x^2+36}$ $\qquad$ $\underline{x^2+x+1}$ $\qquad$ no se pueden factorizar.

$x^2 = -36.$ $\qquad$ $x^2+x+1 = 0$

cuadrática: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ no tiene soln reales

$$\frac{P(x)}{(x^2+36)(x^2+x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+36} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

$$\int \frac{\overbrace{x}^{du/2}}{\underbrace{x^2+k^2}_{u}}\,dx \quad \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln|x^2+k^2| + c.$$

$$\int \frac{1}{x^2+k^2}\,dx = \int \frac{k\sec^2\theta\,d\theta}{k^2\sec^2\theta} = \frac{1}{k}\int d\theta = \frac{1}{k}\theta + c.$$

$x = k\tan\theta.$

$dx = k\sec^2\theta\,d\theta$

$$\boxed{\frac{1}{k}\tan^{-1}\left(\frac{x}{k}\right) + c.}$$

Ejercicio 6: Integre P. 69.

b. $\displaystyle\int \frac{2x^2-x-4}{x^3+4x}\,dx \qquad x(x^2+4) = x^3+4x$

$$\frac{2x^2-x-4}{x^3+4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx}{x^2+4} + \frac{C}{x^2+4} \quad * \; x^3+4x.$$

$$2x^2-x-4 = Ax^2+4A+Bx^2+Cx$$

$$2x^2-x-4 = (A+B)x^2 + Cx + 4A.$$

Igualando los coeficientes.

Grado 2: $A+B=2. \Rightarrow B=2-A. = 3.$

Grado 1: $C=-1 \Rightarrow C=-1$

Grado 0: $4A=-4 \Rightarrow A=-1$

$A=-1, \; B=3, \; C=-1$

$$\int \frac{2x^2-x-4}{x^3+4x}\,dx = -\int\frac{dx}{x} + 3\int\frac{x\,dx}{x^2+4} - \int\frac{dx}{x^2+4}$$

$$= -\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x^2+4| - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

b. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-1}\,dx$

$$x^4-1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x-1)(x+1)$$

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$$

$$1 = (Ax+B)(x^2-1) + C(x^2+1)(x+1) + D(x^2+1)(x-1)$$

$$0x^3+0x^2+1 = Ax^3+Bx^2-Ax-B+Cx^3+Cx^2+Cx+C$$
$$+0x \qquad\qquad +Dx^3-Dx^2+Dx-D$$

Igualando coeficientes.

(1) $A+C+D=0$ $\qquad$ (1)+(3) $\quad 2C+2D=0$ $\quad$ (5)

(2) $B+C-D=0$ $\qquad$ (2)+(4) $\quad 2C-2D=1$ $\quad$ (6)

(3) $-A+C+D=0$ $\qquad\qquad\qquad 4C=1$

(4) $-B+C-D=1$

$C=1/4$ $\qquad D=-C=-1/4.$

$A=-C-D=-1/4+1/4=0$ $\qquad B=D-C=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}.$

$$\int\frac{dx}{x^4-1} = \int \frac{-1/2}{x^2+1} + \frac{1/4}{x-1} - \frac{1/4}{x+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\tan^{-1}x + \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + C.$$

Factores Cuadráticos repetidos (Caso 4) p. 70.

$$\frac{P(x)}{(x^2+25)^2(x^2+36)^3} = \frac{Ax+B}{(x^2+25)} + \frac{Cx+D}{(x^2+25)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+36)}$$

$$+ \frac{Gx+H}{(x^2+36)^2} + \frac{Ix+J}{(x^2+36)^3}$$

Ejercicio 7: $\int \frac{x^2+2}{x^5+8x^3+16x}\,dx$

Cuadrado perfecto

$$\int \frac{x^2+2}{x^5+8x^3+16x}\,dx \qquad x(x^4+8x^2+16)$$

$$x(x^2+4)^2.$$

$$\frac{x^2+2}{x(x^2+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}.$$

Multiplique por $x(x^2+4)^2$.

$$x^2+2 = A(x^4+8x^2+16) + (Bx+C)(x^3+4x) + Dx^2 + Ex$$

$$x^2+2 = Ax^4 + 8Ax^2 + 16A + Bx^4 + Cx^3 + 4Bx^2 + 4Cx$$
$$Dx^2 \qquad + Ex.$$

Grado Cuatro: $A + B = 0 \Rightarrow B = -A = -1/8.$

Grado tres: $C = 0 \Rightarrow C = 0$

Grado Dos: $8A + 4B + D = 1 \qquad D = 1 - 1 + 4/8 = 1/2.$

Grado Uno: $4C + E = 0 \Rightarrow E = -4C = 0$

Grado cero. $16A = 2 \Rightarrow A = 1/8$

6.

$A = 1/8, \quad B = -1/8, \quad C = 0, \quad D = 1/2, \quad E = 0.$

$$\int \frac{x^2+2}{x(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{8}\int \frac{x}{x^2+4}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{x}{(x^2+4)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\ln|x| - \frac{1}{16}\ln|x^2+4| - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+4)} + C$$

$$8A + 4B + D = 1$$

$$1 - \frac{4}{8} + D = 1 \Rightarrow D = 1 - 1 + \frac{4}{8} = \frac{4}{8}.$$

$$\frac{P(x)}{(x+1)(x+2)^2(x^2+4)(x^2+9)^2}$$

Capítulo 23

Lab. 10 Resueltos 3 y 4., Sección A.

5. Distribución exponencial $\mu = 4$. $f(x) = \frac{1}{4} e^{-x/4}$

¿Cuál es la probabilidad de que se atienda a la persona en menos de 3 minutos?

$$P(X < 3) = \int_0^3 \frac{1}{4} e^{-x/4} \, dx = -e^{-x/4}\Big]_0^3 = e^{-x/4}\Big]_3^0$$

$$= e^0 - e^{-3/4}$$

$$= 1 - e^{-3/4} \approx 52.76\%.$$

1. $f(x) = \dfrac{c}{1+x^2}$ $\quad -\infty \leq x \leq \infty.$

a. ¿Cuál es el valor de c para que f(x) sea función de probabilidad?

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \qquad c\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = 1$$

$$2c \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\tan^{-1} x} dx = 2c \tan^{-1} x \Big]_0^{\infty}$$

$\tan(0) = 0$

$$= 2c \lim_{x \to \infty} \tan^{-1} x - \cancel{\tan^{-1}(0)}^{\,0} = 1$$

tan AV. en $x = \pi/2$.

$\tan^{-1}$ AH en $y = \pi/2$.

$$= 2\frac{\pi}{2} c = \pi c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\pi}$$

b. ¿Cuál es la probabilidad de x esté entre -1 y 1?

$$P(-1 \leq X \leq 1) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}x\Big]_0^1 = \frac{2}{\pi}\left[\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0)\right]$$

$\tan\frac{\pi}{4} = 1$

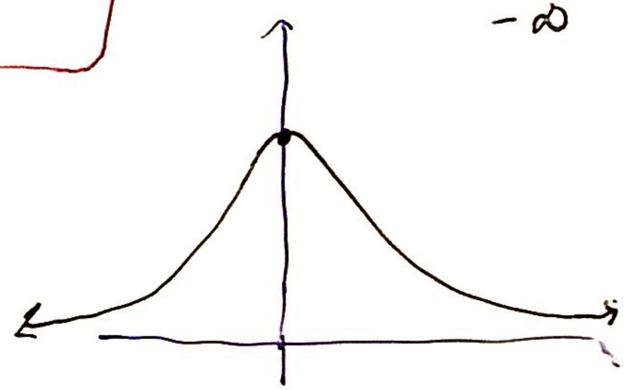
$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.$$

$\tan 0 = 0$

c. ¿Cuál es la media de $f(x)$? $\qquad \infty - \infty.$

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dx} = \frac{1}{2}\ln|1+x^2|\Big]_{-\infty}^{\infty}$$

$\frac{\text{Impar}}{\text{par.}} = \text{Impar}$ $\qquad \mu = 0$

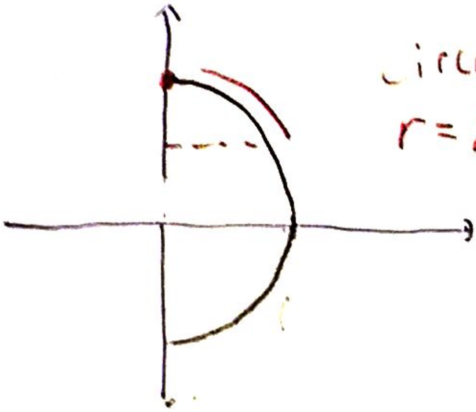


media = mediana = moda $= 0.$

Lab. 9. Prob 4.

$x = \sqrt{4-y^2} \qquad 1 \le y \le 2. \qquad y = \sqrt{4-x^2}$

Encuentre la longitud de arco de x.



circunferencia $r=2$.

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+(x')^2}\, dy.$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

$$x' = \frac{1}{2}(4-y^2)^{-1/2}(-2y) = \frac{-y}{\sqrt{4-y^2}}$$

$$1+(x')^2 = 1 + \frac{y^2}{4-y^2} = \frac{4-y^2+y^2}{4-y^2} = \frac{4}{4-y^2}$$

$$\sqrt{1+(x')^2} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4-y^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}$$

$$L = \int_1^2 \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\, dy. = 2\sin^{-1}\left(\frac{y}{2}\right)\Big]_1^2 = 2\sin^{-1}(1) - 2\sin^{-1}(0.5)$$

$y = 2\sin\theta.$

$dy = 2\cos\theta\, d\theta.$

$\sqrt{4-y^2} = 2\cos\theta.$

$$\int \frac{2}{\cancel{2\cos\theta}}\, \cancel{2\cos\theta}\, d\theta = \int 2\, d\theta.$$

$$= 2\theta + C.$$

$$= 2\sin^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) + C.$$

$L = 2\sin^{-1}(1) - 2\sin^{-1}(0.5)$ $\sin \pi/2 = 1$

$\sin \pi/6 = 0.5$

$$L = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Lab 6 Prob (b)

b) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{1}{\sqrt[4]{x+2}}\, dx$ ¿Dónde es impropia? en $x=-2$ discontinuidad.

$$\int_{-2}^{3} (x+2)^{-1/4} dx = \frac{4(x+2)^{3/4}}{3}\Bigg]_{-2}^{3} \qquad 0^{3/4} = 0$$

$$= \frac{4}{3}\left(5^{3/4} - \lim_{x\to -2^+} (x+2)^{3/4}\right)$$

$x^2(2+x)$

$$= \frac{4}{3} 5^{3/4} \quad \text{CONVERGENTE}$$

b) Simulacro $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{12x^2+4x}{2x^3+x^2}\, dx$ indefinida en $x=0$.

$$\frac{12x^2+4x}{x^2(2+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}$$ MÁS LARGA.

ATAJO. $u = 2x^3 + x^2$ $du = (6x^2+2x)\,dx$

$$2\int_0^1 \frac{(6x^2+2x)\,dx}{2x^3+2x} = 2\int_0^3 \frac{du}{u} = 2\ln u\Big]_0^3$$ DIVERGENTE

porque $\lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$.

Integre con fracciones parciales

$$\int \frac{12x^2+4x}{x^2(2+x)} = \int \frac{A}{x}\,dx + \int \frac{B\,dx}{x^2} + \int \frac{C}{x+2}\,dx$$

* $12x^2+4x$.

$$12x^2+4x = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2$$
$$12x^2+4x+0 = Ax^2+2Ax+Bx+2B+Cx^2$$

$$A+C=12 \qquad C=12-A=10$$
$$2A+B=4 \qquad 2A=4 \quad A=2$$
$$2B=0 \Rightarrow B=0$$

$$\int \frac{12x^2+4x}{x^2(2+x)} = \int \frac{2}{x}\,dx + 0 + \int \frac{10}{x+2}\,dx$$

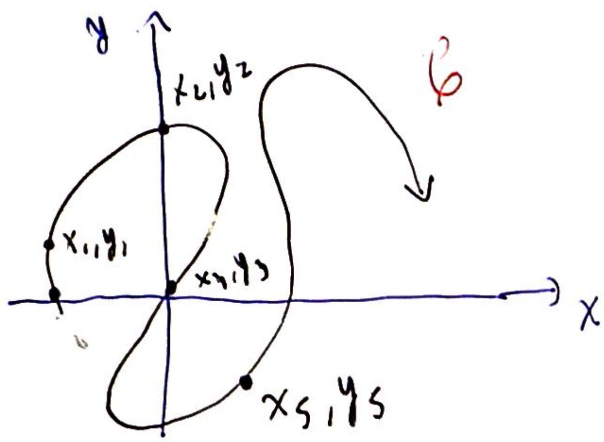
$$= 2\ln|x| + 10\ln|x+2|$$

Capítulo 24

10.1 Ecuaciones paramétricas

10.1 Ecuaciones Paramétricas

Describen el comportamiento de una partícula que se mueve alo largo de una curva $\mathcal{C}$ en 2-D.



curva $\mathcal{C}$ no se puede representar por medio de $x = f(y)$ ó $y = g(x)$

Los puntos sobre la curva paramétrica $\mathcal{C}$ se pueden representar por medio de las ecs. paramétricas

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{aligned}\right\} \text{Ecs. Paramétricas}$$

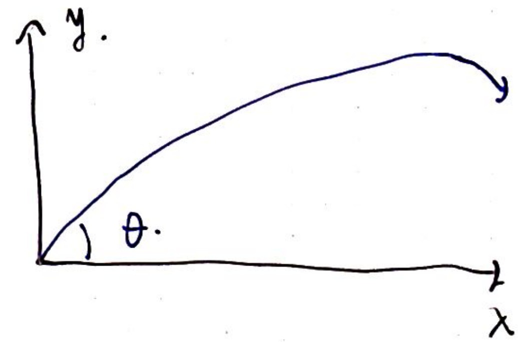
variable independiente t, conocida como un parámetro.

Ejercicio 1: $x = 4t - t^2$, $y = t + 2$.

Movimiento Parabólico en 2-D.

$$x = V_0(\cos\theta)t$$

$$y = V_0(\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2.$$



$V_0 = \sqrt{2}\,90$ $\theta = \pi/4$ $g = 10$

$$x = \sqrt{2}\,\frac{90}{\sqrt{2}}\,t = 90t.$$

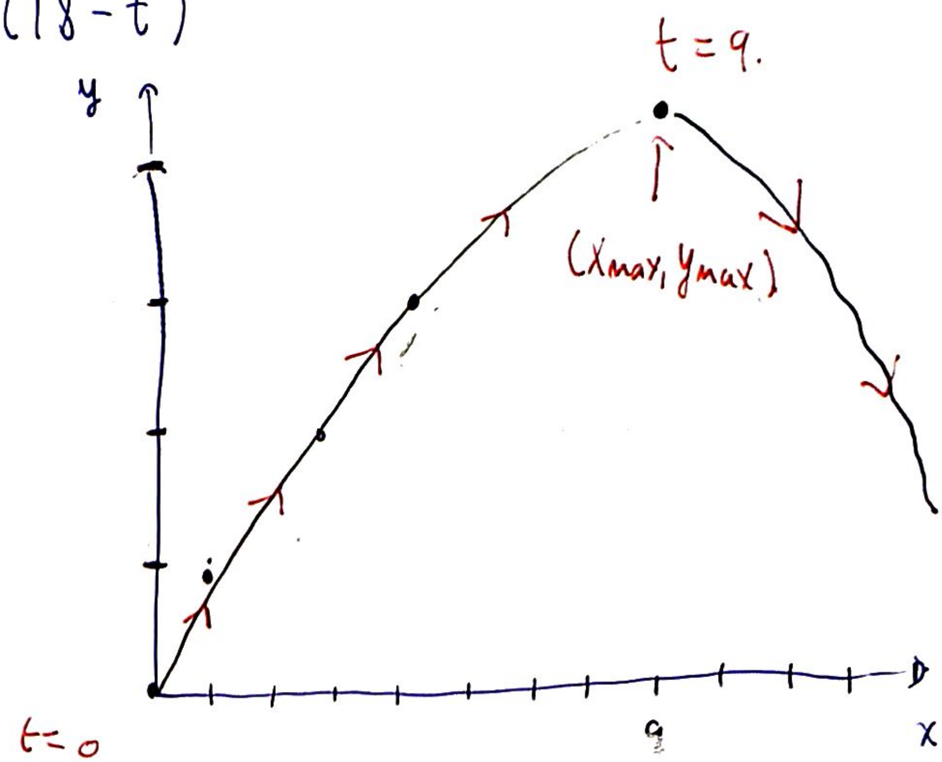
$$y = 90\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}\,t - 5t^2.$$

a. Use una tabla de valores para bosquejar la curva paramétrica

$x = 90t$

$y = 90t - 5t^2 = 5t(18-t)$

t	x	y
0	0	0
1	90	85
2	180	160
3	270	225
4	360	320
9	810	405.
13		325
18.	1620	0



traza una parábola

b. Elimine el parámetro para encontrar la ec. de la curva paramétrica.

$x = 90t \Rightarrow t = \frac{x}{90}$ sustituya en y:

$y = 90t - 5t^2$.

$$y = 90\left(\frac{x}{90}\right) - 5\left(\frac{x}{90}\right)^2 = x - \frac{5x^2}{90^2}.$$

Altura máxima cuando $y' = 1 - \frac{10x}{90 \cdot 90} = 0$

$x = \frac{90}{10} 90 = 9 \cdot 90 = 810$

$10x = 90 \cdot 90$

$x = 810$.

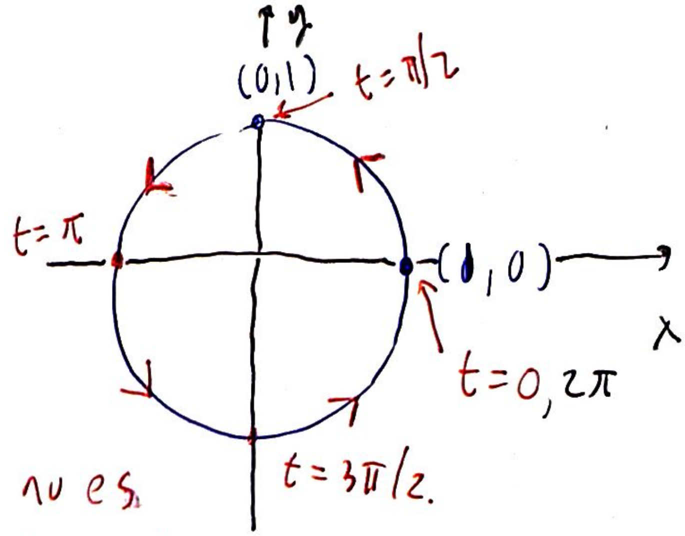
Ejercicio 2: ¿Qué curva representan las sigs. ecuaciones paramétricas? p. 130.

a. $x = \cos t$, $y = \sin t.$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Elimine el parámetro t. Como $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Ec. Circunferencia de radio 1 $\quad x^2 + y^2 = 1$



t	0	π/2.	π	3π/2	2π
x	1	0	-1	0	1
y	0	1	0	-1	0

no es función

Curva Paramétrica, tiene un sentido antihorario, se le da una vuelta al círculo.

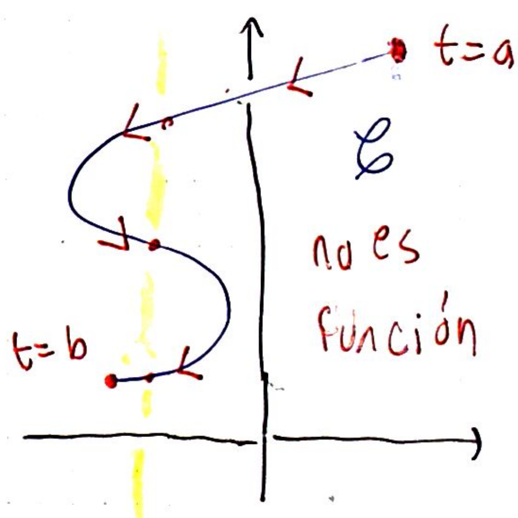
Una curva paramétrica $\mathscr{C}: x = f(t),\ y = g(t)$
$a \leq t \leq b.$

tiene.

i un punto inicial en $t=a$

ii. un punto terminal en $t=b$.

iii orientación o sentido (el cual se indica con flechas)



b. $x = 4\sin \pi t$, $y = 4\cos \pi t$, $0 \le t \le 4$.

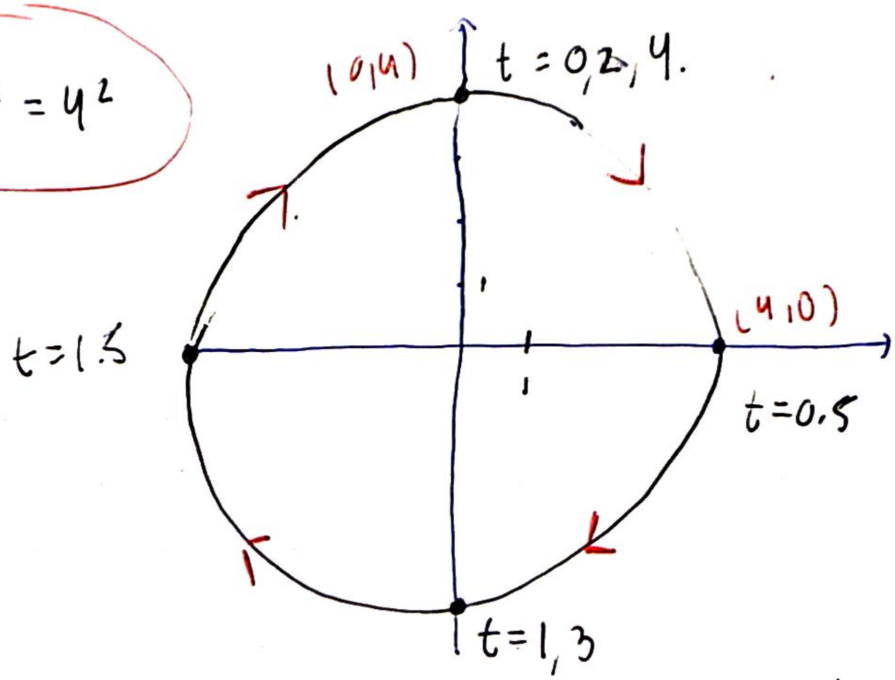
$$x^2 + y^2 = 16\sin^2 \pi t + 16\cos^2 \pi t = 16.$$

Circunferencia
Radio 4

$$x^2 + y^2 = 4^2$$

t	x	y
0	0	4
0.5	4	0
1	0	-4
1.5	-4	0
2	4	0
3	0	-4
4	4	0

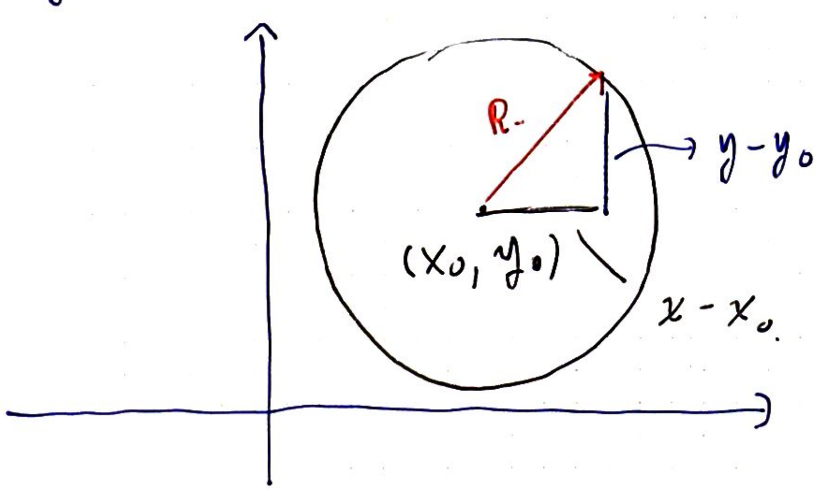
2: 1 vuelta; 4: 2 vueltas.



$\frac{2\pi}{\pi} = 2$. 1 vuelta cada 2 s.

sentido horario, 2 vueltas a la circunferencia

Ejercicio 3: Encuentre unas ecuaciones paramétricas que representen a una circunferencia con centro (x_0, y_0) y radio R.



Ec. Cartesiana

$$(\underbrace{x - x_0}_{R\cos\theta})^2 + (\underbrace{y - y_0}_{R\sin\theta})^2 = R^2.$$

$$\sin^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta = R^2.$$

$x - x_0 = R\cos\theta.$ $\quad\Rightarrow\quad$ $x = x_0 + R\cos\theta$

$y - y_0 = R\sin\theta.$ $\qquad\quad$ $y = y_0 + R\sin\theta$

Anti horario $0 \leq \theta \leq 2\pi.$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

$-R\sin\theta \qquad R\cos\theta.$

Otra parametrización

$x = x_0 - R\sin\theta$

$y = x_0 + R\cos\theta.$

$0 \leq \theta \leq 2\pi.$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

$R\cos(8\theta) \qquad R\sin(8\theta)$

Otra más.

$x = x_0 + R\cos(8\theta)$

$y = y_0 + R\sin(8\theta)$

$0 \leq \theta \leq 2\pi.$

Para que sea única, se necesitan más condiciones (horario/antihorario, vueltas, punto inicial y terminal).

Ejercicio 4: Trace la curva con ecs. paramétricas

$$x = \cos\theta \qquad y = \cos^4\theta$$

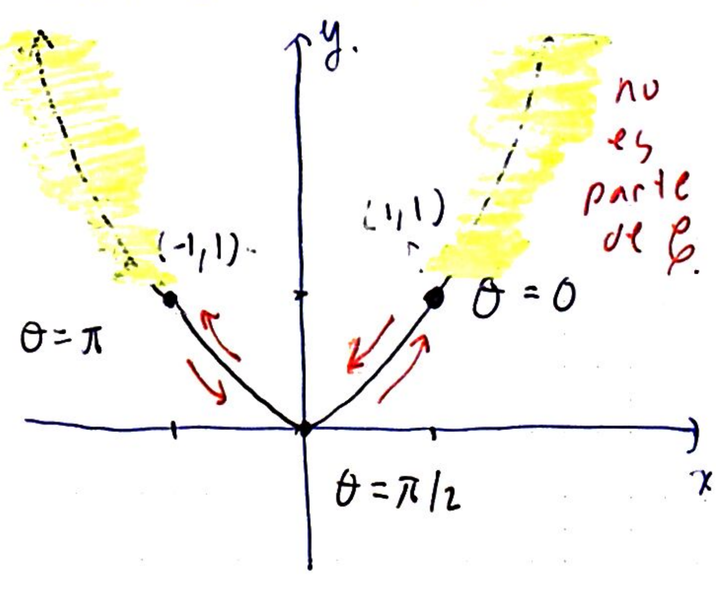
Indique con flechas la dirección de la curva.

Elimine el parámetro θ.

$\cos\theta = x, \quad y = (\cos\theta)^4$

$$y = x^4$$

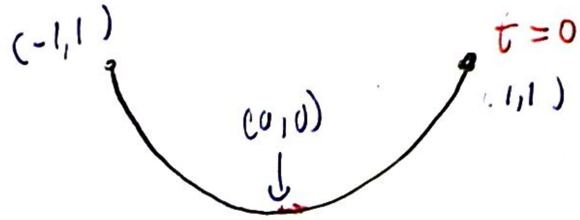
θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	1	0	-1	0	1
y	1	0	1	0	1



curva paramétrica $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

$$y = x^4, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$x = \cos\theta \qquad y = \cos^4\theta.$$



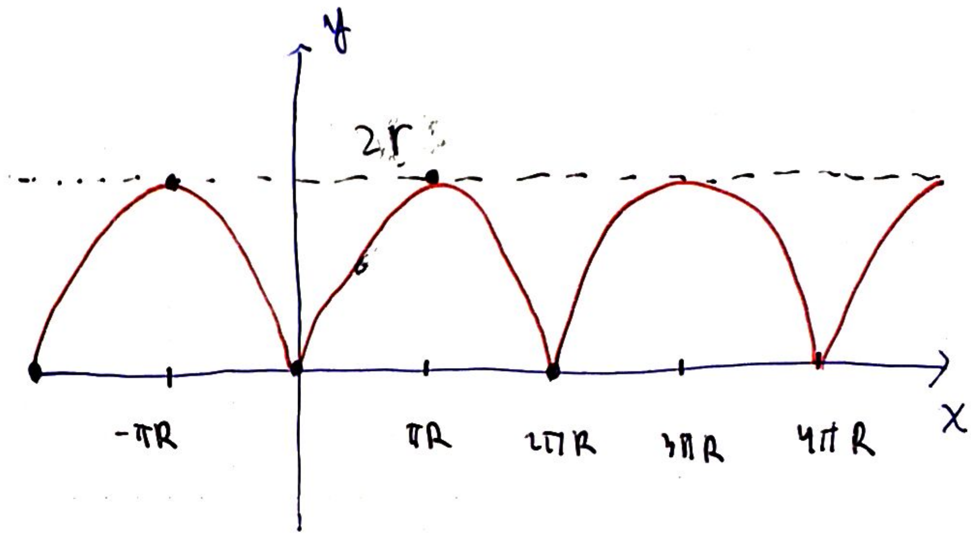
sube y baja la rampa

La Cicloide: es dificil $y = f(x)$

$$x = r(\theta - \sin\theta)$$

$$y = r(1 - \cos\theta)$$

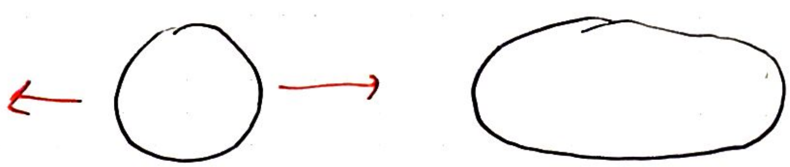
θ	x	y.
-2π	$-2\pi r$	0
$-\pi$	$-\pi r$	$2r$
0	0	0
$\pi/2$.	$r(\frac{\pi}{2} - 1)$	r
π	πr	$2r$
2π	$2\pi r$	0



$\sin(-2\pi) = -\sin(2\pi)$ $\qquad \cos(n\pi) = \pm 1$

$\sin(n\pi) = 0.$

Elipse.



Ec. Cartesiana $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\qquad a \neq b.$

$$x = a \cdot \cos\theta. \qquad y = b \cdot \sin\theta.$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{b^2\sin^2\theta}{b^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

$x = a \cdot \cos\theta$

$y = b \cdot \sin\theta.$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

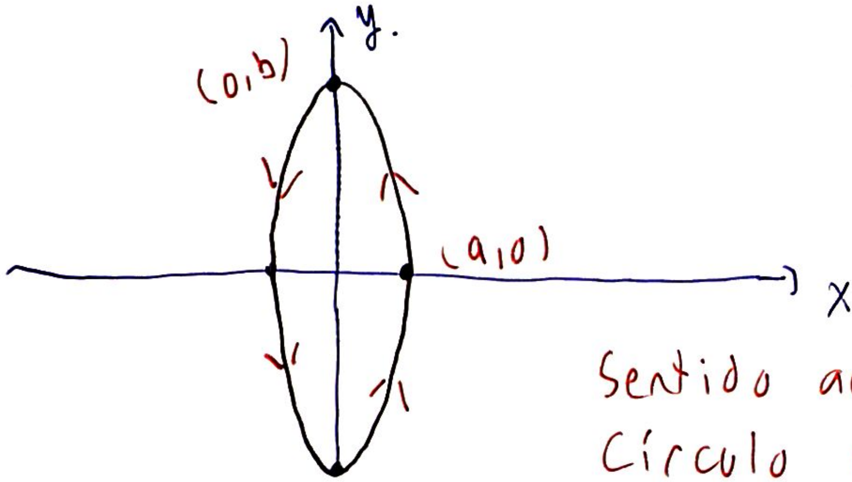
$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

$a = 1$

$b = 3$

$x = 0:$ $y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3.$ $(0, \pm 3)$

$y = 0:$ $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ $(\pm 1, 0)$



Sentido antihorario

Círculo Achatado.

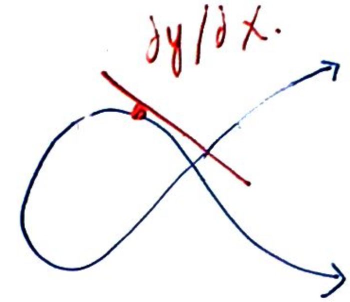
$$\underbrace{\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}}_{\text{Jueves 10.2 derivadas}} \qquad \underbrace{L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, d\theta.}_{\text{Longitud de Arco.}}$$

Capítulo 25

10.2 Calculo con ecuaciones paramétricas

10.2 Cálculo con Ecuaciones Paramétricas

1. Derivadas y Rectas Tangentes.



curva $\mathcal{C}$: $x = f(t)$ ✓ $a \leq t \leq b$.
$y = g(t)$ ✓

A veces no se puede eliminar el parámetro t.
para encontrar y en función de x.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dX}\,\frac{dX}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dX} = \frac{dy/dt}{dX/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$ ✓

$y \to X \to t$. en función de t.

Pendiente recta tangente en $t = t_0$. $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_0}$.

Ec. Recta Tangente $y = \underline{\underline{y_1}} + m(X - \underline{\underline{X_1}})$

$$y = y(t_0) + m(X - X(t_0))$$

Ejercicio 1: p.135 Encuentre la ec. de la recta tangente a la curva $\mathcal{C}$: $x = f(t)$, $y = g(t)$ en el valor $t = a$

a. $X = 1 + 2t$, $y = 2 - 2t^3$. en $t = 1$.

Solución 1: $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-6t^2}{2} = -3t^2$. ✓

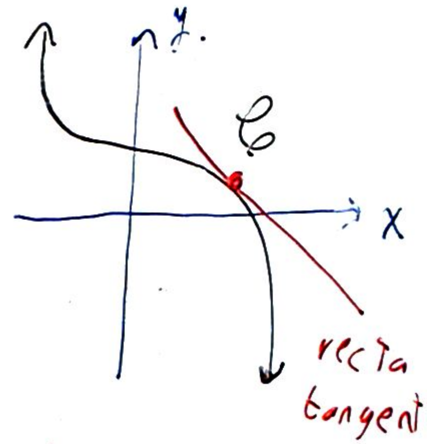
Pendiente: $m = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1} = -3(1)^2 = -3.$ ✓

evalúe en $t=1$

Solución 2: Elimine el parámetro t.

$2t = x-1 \Rightarrow t = \frac{1}{2}(x-1)$ sustituya en y:

$t^3 = \frac{1}{8}(x-1)^3 \Rightarrow y = 2 - \frac{2}{8}(x-1)^3.$



$\dfrac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}(x-1)^2.$ $x(1) = 1+2 = 3$

$m = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=3} = -\frac{3}{4}\,2^2 = -3$ misma respuesta.

Recta Tangente: $x(1) = 1+2 = 3$
$y(1) = 2-2 = 0$

Ec. Recta tangente: $y = 0 - 3(x-3) = \underline{-3x+9}$

a. $x = 1 + 2t^{1/2}$ $\quad y = e^{t^2}$ en $t = 1$.

Derivada: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{2te^{t^2}}{t^{-1/2}} = 2t\,t^{1/2}e^{t^2}$

$$\frac{dy}{dx} = 2t^{3/2}e^{t^2}.$$

Pendiente: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1} = 2\cdot 1^{3/2}e^{1^2} = \underline{\underline{2e}}$ *

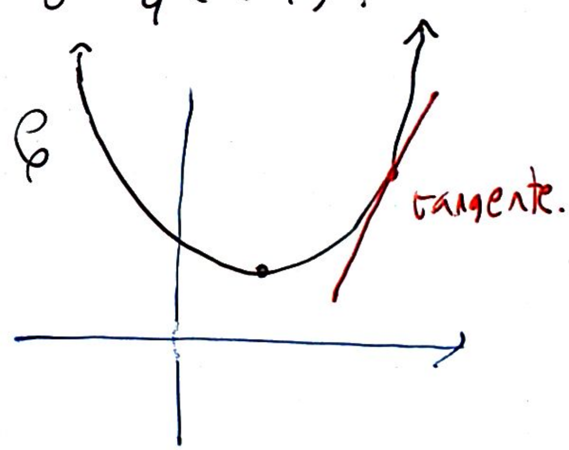
Coordenadas: $x(1) = 1 + 2\sqrt{1} = 3$ $\quad y(1) = e^1 = e$.

Ec. Recta Tangente: $y = e + 2e(x-3) = \boxed{-5e + 2ex}$

* Elimine el parámetro t.

$x - 1 = 2t^{1/2}$. $\quad (x-1)^2 = 4t \Rightarrow t = \frac{1}{4}(x-1)^2$.

Sustituya en y: $\quad y = e^{\frac{1}{16}(x-1)^4}$



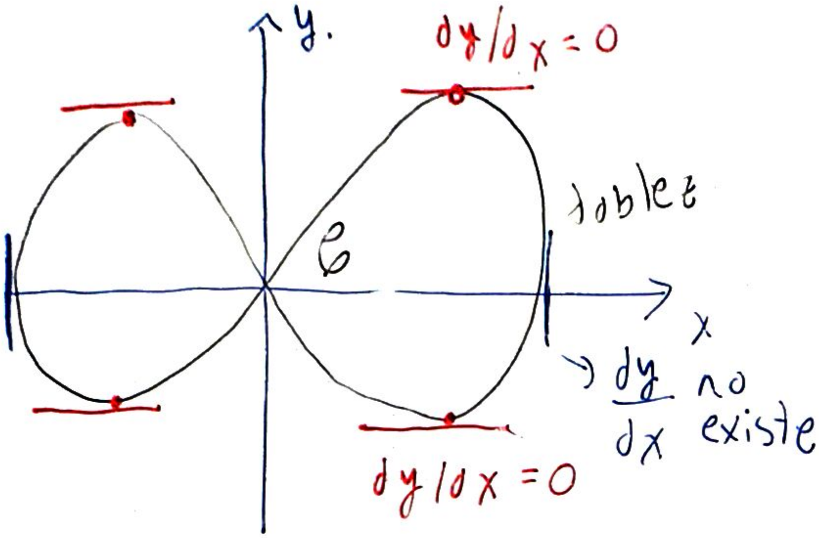
$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{1}{16}(x-1)^4}\cdot\frac{1}{4}(x-1)^3\cdot 1$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} = e^{\frac{1}{16}2^4}\cdot\frac{1}{4}2^3$$

$$= e^{16/16}\cdot\frac{8}{4} = \underline{\underline{2e}}\ *$$

misma respuesta

Tangentes horizontales y verticales



Tangente horizontal cuando $\frac{dy}{dx} = 0$

Tangente vertical cuando $\frac{dy}{dx}$ no existe.

$\mathcal{C}: x = f(t),\ y = g(t)$ $\qquad \frac{a}{b} = 0 \Rightarrow a = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = 0 \Rightarrow$ tangente horizontal cuando $y'(t) = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ se indefine $\Rightarrow$ tangente vertical cuando $x'(t) = 0$.

$\frac{1}{0}$ indefinido.

En Resumen, dada una curva $\mathcal{C}$ hay.

Tangentes Horizontales $y'(t) = 0$ & $x'(t) \neq 0$.

Tangentes Verticales. $x'(t) = 0$ & $y'(t) \neq 0$.

Indeterminado: cuando $x'(t) = y'(t) = 0$.

$\lim_{t \to t_0} \frac{x'(t)}{y'(t)}$ $\frac{0}{0}$ use la Regla de L'Hospital para encontrar la derivada.

Ejercicio 2: La curva $\mathcal{C}$ es definida por

$$x = t^3 - 3t \qquad y = t^3 - 3t^2$$

a. Encuentre dy/dx. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3t^2 - 6t}{3t^2 - 3}$. $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

b. ¿En cuáles puntos (x, y) la tangente es horizontal a la curva $\mathcal{C}$?

Hay tangentes horizontales cuando $y'(t) = 0$.

$$3t^2 - 6t = 3t(t-2) = 0 \Rightarrow t = 0, 2. \checkmark$$

$x'(0) = 0 - 3 \neq 0 \qquad x'(2) = 12 - 3 = 9 \neq 0.$

Puntos: $x(0) = 0 - 0 = 0 \qquad y(0) = 0 - 0 = 0 \qquad (0,0)$

$x(2) = 8 - 6 = 2 \qquad y(2) = 8 - 12 = -4 \qquad (2,-4)$

Tangentes horizontales en $(0,0)$ y $(2,-4)$.

c. ¿Dónde hay tangentes verticales?

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3t^2 - 6t}{3(t^2-1)}$ se indefine en $t = \pm 1$

Puntos: $x(1) = 1 - 3 = -2 \qquad y(1) = 1 - 3 = -2.$

$x(-1) = -1 + 3 = 2 \qquad y(-1) = -1 - 3 = -4$

Tangentes verticales en $(-2,-2)$ y $(-2,-4)$

J. Bosqueje la curva utilizando sólo las tangentes horizontales y verticales.

Tangentes Horizontales: $(0,0)$ y $(2,-4)$

Verticales: $(-2,-2)$ y $(2,-4)$

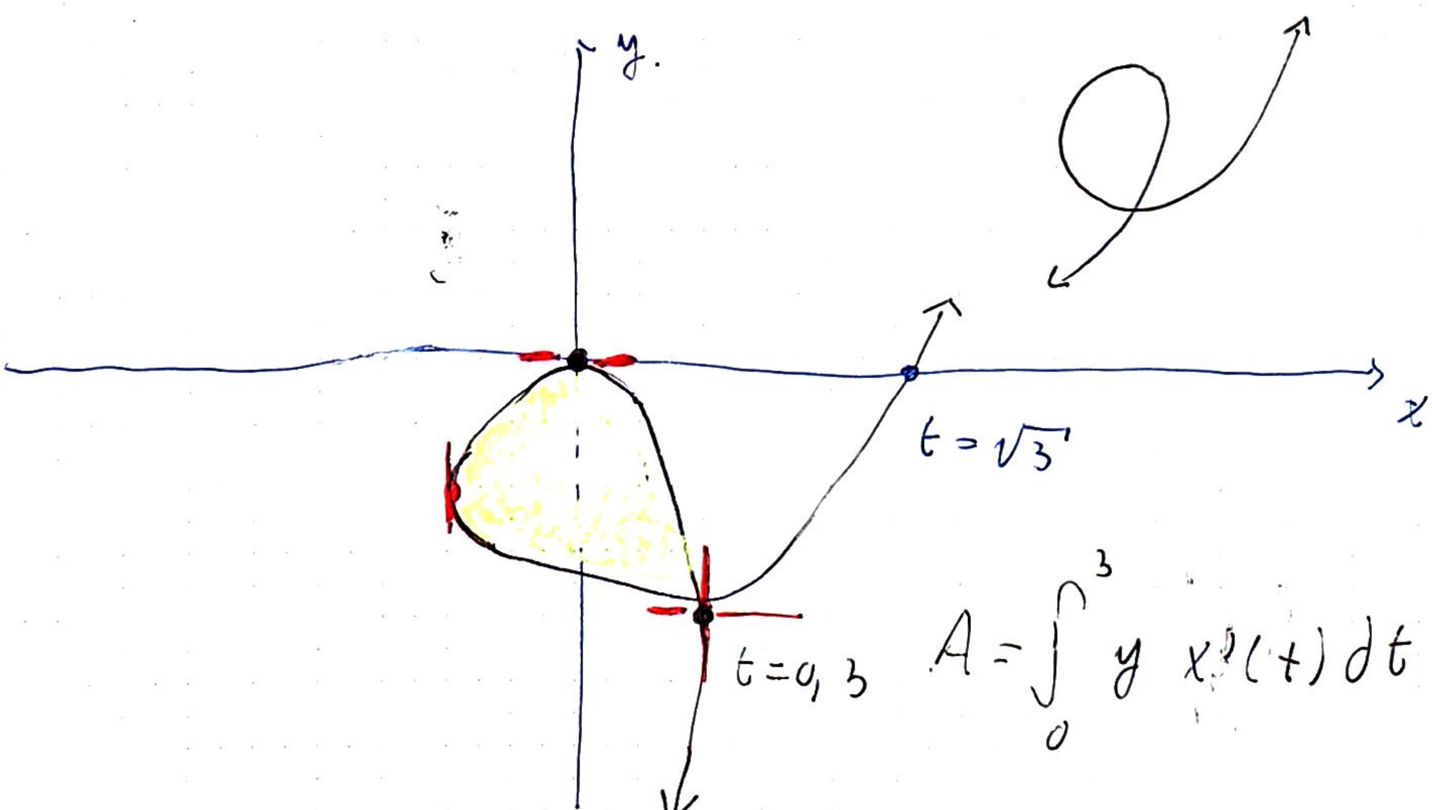
Luis $x=0$ cuando $t(t^2-3)=0$ $t=0$, $t=\pm\sqrt{3}$

corte el eje-y en tres puntos

$y=0$ $t^3-3t^2=t^2(t-3)=0$ $t=0$, $t=3$.

$y(3)=27-27=0$

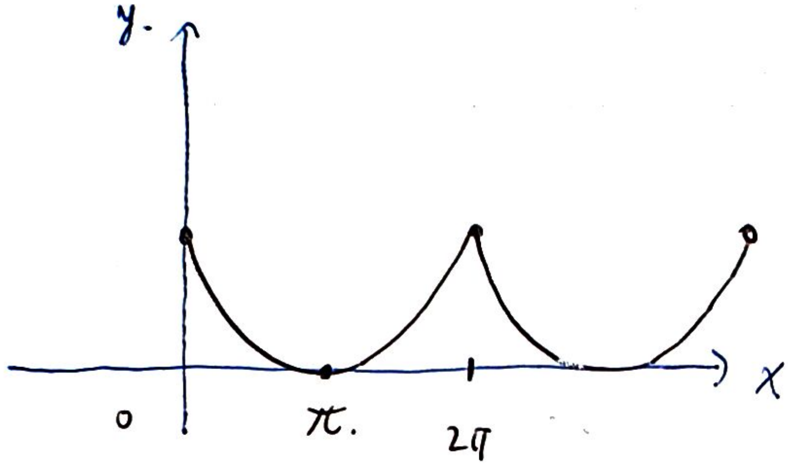
Se Pasa por el origen dos veces.



$$A=\int_0^3 y\, x'(t)\,dt$$

Ejercicio 3: Considere un arco del cicloide "invertido"

$$x = r(\theta + \cos\theta) \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$
$$y = r(1 + \sin\theta)$$



a. Encuentre la derivada, r es constante.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{r(\cos\theta)}{r(1-\sin\theta)} = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}.$$

b. Encuentre la ec. de la recta tangente en $\theta = \pi/6$

Pendiente: $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/6} = \frac{\cos\pi/6}{1-\sin\pi/6} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}.$$

Coordenadas: $$x(\pi/6) = r\left(\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\right) = r\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y(\pi/6) = r\left(1 + \sin\frac{\pi}{6}\right) = 3r/2.$$

Ec. Recta tangente: $$y = \frac{3r}{2} + \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}r - \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$$

c. Encuentre dónde hay tangentes horizontales y verticales.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

Horizontales: $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \underline{\frac{\pi}{2}}, \frac{3\pi}{2}.$

es cero.

Verticales: $1-\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 1 \quad \theta = \underline{\frac{\pi}{2}}.$

no existe

Como $y'(3\pi/2) \neq 0$, hay tangente horizontal cuando $\theta = 3\pi/2$.

En $x'(\pi/2) = y'(\pi/2) = 0$, indeterminada.

$$\lim_{\theta\to\pi/2} \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \lim_{\theta\to\pi/2} \frac{-\sin\theta}{-\cos\theta} = \lim_{\theta\to\pi/2} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \infty.$$

$0/0$. $\quad$ $-1/0$. no existe

Hay una tangente vertical en $\theta = \pi/2$.

coordenadas $x = r(\theta + \cos\theta)$, $y = (1+\sin\theta)r$

TH $\quad x(3\pi/2) = \frac{3\pi}{2}r \quad y(3\pi/2) = 1-1 = 0$

$(3\pi r/2, 0)$

TV $\quad x(\pi/2) = r\frac{\pi}{2}. \quad y(\pi/2) = r(1+1) = 2r.$

TV en $\left(\frac{\pi}{2}r, 2r\right)$

Capítulo 26

Cálculo con ecuaciones paramétricas

Cálculo con ecuaciones paramétricas.

a. Primera Derivada $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

b. Tangentes Horizontales: $y'(t) = 0$ $\quad x'(t) \neq 0.$

Tangentes Verticales: $x'(t) = 0$ $\quad y'(t) \neq 0.$

c. Segunda Derivada. P. 139.

Dada la curva $\mathcal{C}$: $x = f(t)$ $\quad y = g(t)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{d}{dt}(y)}{x'(t)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(dy/dx)}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(dy/dx)}{x'(t)}. \quad , \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{d}{dt}(d^2y/dx^2)}{x'(t)}$$

$x = f(t)$ $\quad y = dy/dx$

Ejercicio 4: Encuentre la primera, segunda y tercera derivada de las sigs. curvas paramétricas.

a. $x = 3t^2 \qquad y = t^3 + 3t^6.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3t^2 + 18t^5}{6t.} = 0.5t + 3t^4$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(dy/dx)}{x'(t)} = \frac{0.5 + 12t^3}{6t.} = \frac{1}{12t} + 2t^2$$

2.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{d}{dt}\left(d^2y/dx^2\right)}{x'(t)} = \frac{1}{6t}\left(\frac{-1}{12t^2} + 4t\right)$$

b. $x = e^t \qquad y = te^t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1e^t + te^t}{e^t} = 1 + t.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(dy/dx\right)}{x'(t)} = \frac{1}{e^t} = e^{-t} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{d}{dt}\left(d^2y/dx^2\right)}{x'(t)} = \frac{-e^{-t}}{e^t} = \frac{-1}{e^{2t}}$$

c. $x = \cos\theta \qquad y = \cos 2\theta. \qquad -1 \leq x \leq 1$

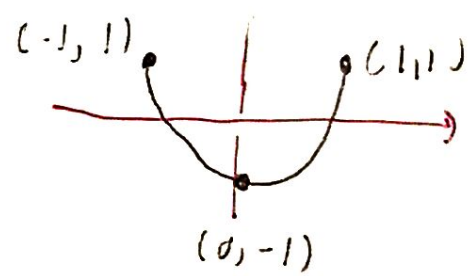
$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\theta\right)$$

$$2x^2 = 1 + \cos 2\theta. \qquad \cos 2\theta = 2x^2 - 1$$

$$y = 2x^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x$$

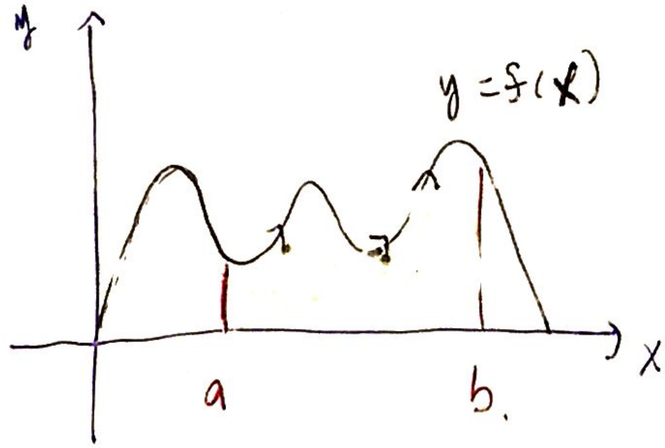
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4 \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = 0$$



Paramétricas $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2\sin 2\theta}{-\sin\theta.} = \dfrac{4\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 4\cos\theta$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4\sin\theta.}{-\sin\theta} = 4.$$

Área de una Región encerrada por una curva.



$$A = \int_a^b y\,dx.$$

$$; \quad A = \int_c^d x\,dy)$$ no se usa mucho.

$\mathcal{C}$: $x = f(t)$ $\quad dx = f'(t)\,dt.$

$y = g(t).$

$t_1 \leq t \leq t_2.$

Reescriba

$$\boxed{A = \int_a^b y\,dx = \int_{t_1}^{t_2} g(t)\,f'(t)\,dt}$$

Ejercicio 6: p.141 Encuentre el área de la región dada.

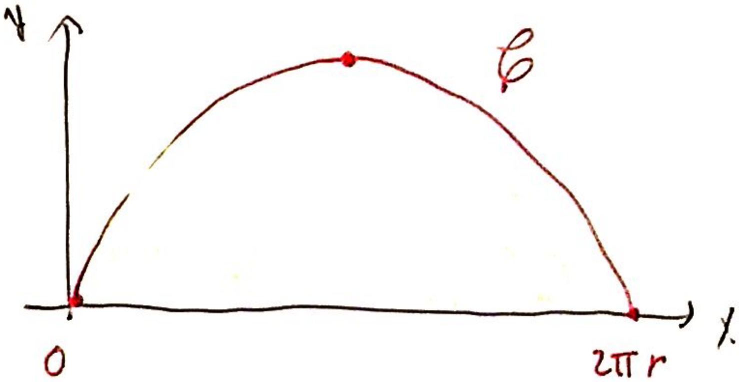
a. La región debajo de un arco de la cicloide

$x = r(\theta - \sin\theta)$

$y = r(1 - \cos\theta)$

$0 \leq \theta \leq 2\pi.$

r es constante



$$A = \int_0^{2\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi} r(1-\cos\theta)\,r(1-\cos\theta)\,d\theta.$$

$$dx = r(1 - \cos\theta)\,d\theta.$$

$$A = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2\,d\theta.$$

$$A = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta.$$

Identidad Doble Ángulo: $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta.)$

$$A = r^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta.$$

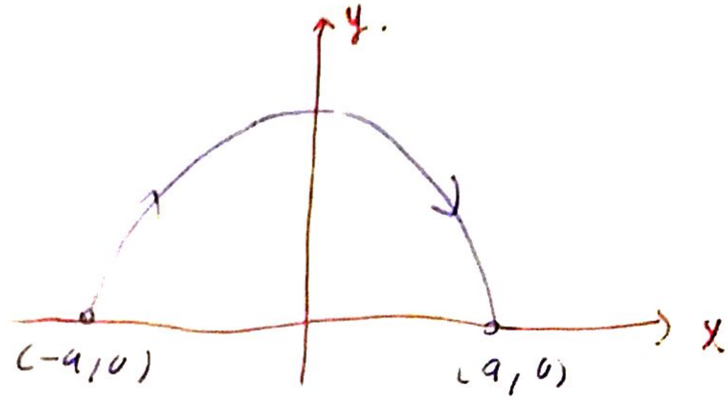
$$A = r^2 \left(\frac{3\theta}{2} - 2\sin\theta, + \frac{1}{2\cdot 2}\sin 2\theta \Big]_0^{2\pi} \right)$$ $\sin 0 = 0$

$$A = r^2 \left(\frac{3\cdot 2\pi}{2} - 2\cancel{\sin 2\pi}^{\,0} + \frac{1}{4}\cancel{\sin 4\pi}^{\,0} - 0 \right)$$

$$\boxed{A = 3\pi r^2.}$$ 3 veces el área del círculo. πr^2.

b. Media elipse.

$x = -a\cos\theta$
$y = b\sin\theta.$
$0 \le \theta \le \pi.$



$$A = \int_0^{\pi} y\, dx = \int_0^{\pi} b\cdot\sin\theta\; a\cdot\sin\theta\, d\theta. = ab\int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta.$$

$dx = a\cdot\sin\theta\, d\theta$

$$A = \frac{ab}{2}\int_0^{\pi} 1 - \cos 2\theta\, d\theta. = \frac{ab}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\pi}\right)$$

$$A = \frac{ab}{2}\left(\pi - \frac{1}{2}\cancel{\sin 2\pi}^{\,0} - 0\right) = \frac{\pi ab}{2}$$ ½ Elipse.

Área toda la elipse. $A = \pi ab.$

de un círculo: $A = \pi a^2.$ $a = b.$

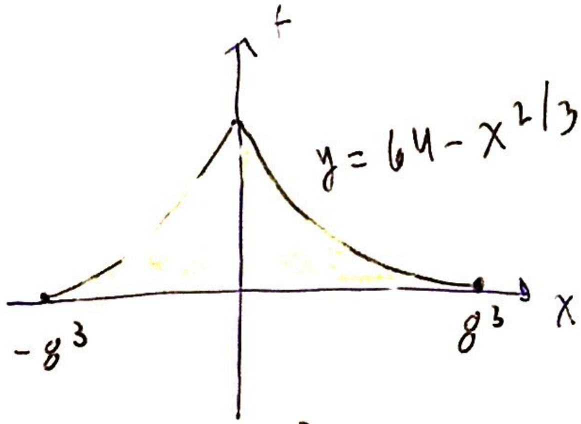
d. $\mathcal{C}$: $x = t^3,\ y = 64 - t^2$ y el eje-x.

Elimine el parámetro ó $\int y\,dx$ $dx = x'(t)dt.$

$t = x^{1/3} \Rightarrow y = 8^2 - x^{2/3}.$

Intersecciones-x: $y=0$: $x^{2/3} = 8^2$ $(1^{2/3})^{3/2}.$

$x = (8^2)^{3/2} = \pm 8^3$



$$A = \int_{-8^3}^{8^3} y\,dx$$

$$A = \int_{-8^3}^{8^3} (8^2 - x^{2/3})\,dx$$

$$A = 2\int_0^{8^3} (8^2 - x^{2/3})\,dx = 2\left(8^2 x - \frac{3}{5}x^{5/3}\Big]_0^{8^3}\right)$$

$$A = 2\left(8^5 - \frac{3}{5}(8^3)^{5/3}\right) = 2\left(8^5 - \frac{3}{5}8^5\right) = 2\cdot 8^5\left(1 - \frac{3}{5}\right)$$

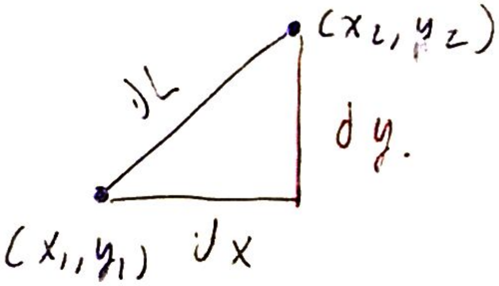
Soln 2: $y = 64 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 64 \Rightarrow t = \pm 8$

$$A = \int_{-8}^{8} y\,x'(t)\,dt. = \int_{-8}^{8} (64 - t^2)\,3t^2\,dt.$$

$$A = 2\int_0^8 64\cdot 3t^2 - 3t^4\,dt = 2\left(8^2\cdot t^3 - \frac{3}{5}t^5\Big]_0^8\right)$$

$$A = 2\left(8^5 - \frac{3}{5}8^5\right)$$

e. Longitud de Arco.



$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$\mathcal{C}: \quad x = f(t) \qquad y = g(t)$$

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\ \frac{dt}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt.$$

Longitud de Arco de una curva $\mathcal{C}: x = f(t),\ y = g(t)$

en $a \leq t \leq b$. $\quad L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\ dt.$

cartesiana: $\quad L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\ dx$

Ejercicio 7: Encuentre la longitud exacta de la curva dada.

a. Longitud de una circunferencia de radio 4.

$x = 4\cos\theta, \quad y = -4\sin\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

$x'(\theta) = -4\sin\theta \qquad y'(\theta) = -4\cos\theta. \qquad y' = \sqrt{16 - x^2}$

$(x')^2 + (y')^2 = 16\sin^2\theta + 16\cos^2\theta = 16.$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\ d\theta = 4\int_0^{2\pi} d\theta = 4\theta\Big]_0^{2\pi} = 8\pi.$$

c. $x = e^t \cos t \qquad y = e^t \sin t \qquad 0 \leq t \leq \ln 2$ 7.

Use la Regla del Producto.

$x'(t) = e^t \cos t - e^t \sin t. \qquad e^t e^t = e^{2t}$

$y'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t. \qquad \sin t \sin t = \sin^2 t$

$(x')^2 = e^{2t}\cos^2 t - 2e^{2t}\cos t \sin t + e^{2t}\sin^2 t$

$(y')^2 = e^{2t}\sin^2 t + 2e^{2t}\cos t \sin t + e^{2t}\cos^2 t.$

$(x')^2 + (y')^2 = e^{2t} + 0 + e^{2t} = 2e^{2t}.$

$$L = \int_0^{\ln 2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt. = \int_0^{\ln 2} (2e^{2t})^{1/2}\, dt.$$

$$L = 2^{1/2} \int_0^{\ln 2} e^t\, dt. = 2^{1/2} e^t \Big]_0^{\ln 2}$$

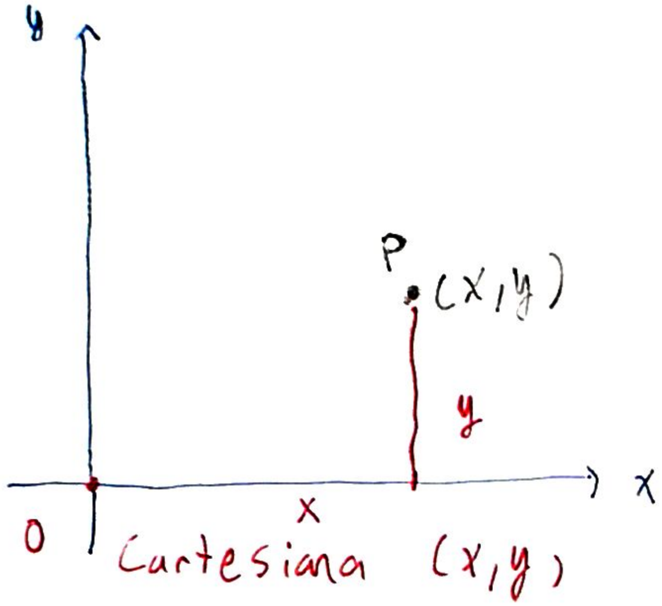
$$L = 2^{1/2}(e^{\ln 2} - e^0) = \sqrt{2}(2-1) = \sqrt{2}$$

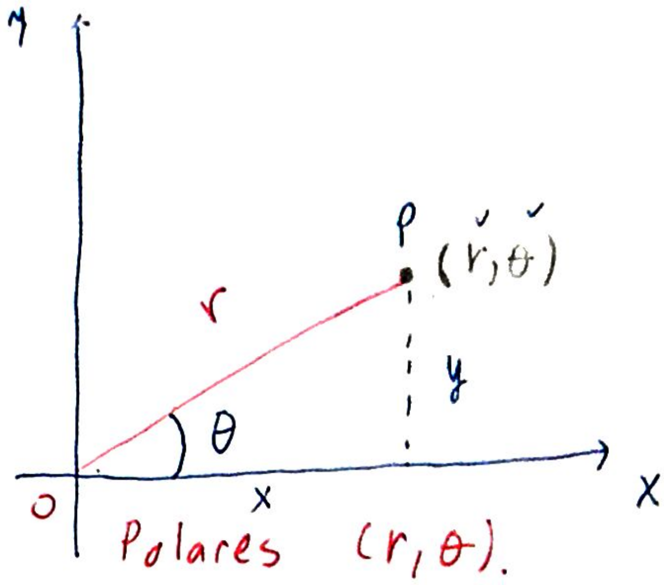
Capítulo 27

10.3 Coordenadas polares

1.

10.3 Coordenadas Polares p. 147.





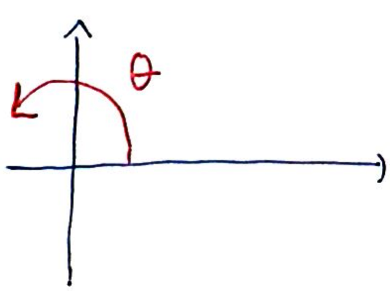
r : radio distancia del punto (x,y) al origen $(0,0)$

$$\boxed{r = \sqrt{x^2+y^2}}$$

θ : ángulo entre la recta $\overline{op}$ y el eje-x.

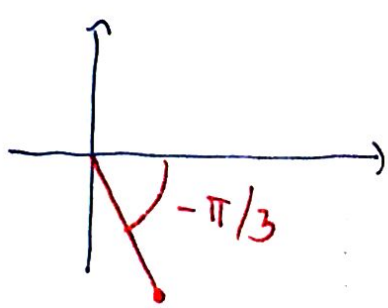
$$\frac{C.O}{C.A.} = \tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \boxed{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Convenciones y Observaciones Coordenadas Polares

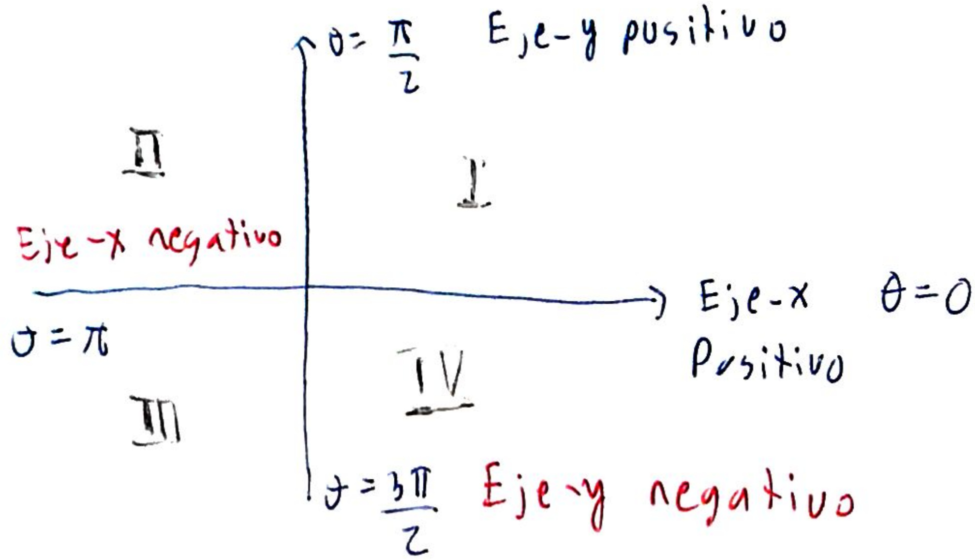


$\theta > 0$ en sentido anti horario.

$\theta < 0$ en sentido horario

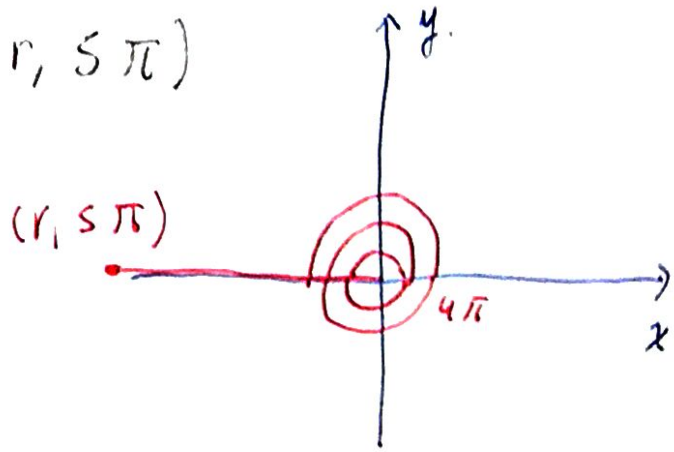


Usualmente $0 \leq \theta \leq 2\pi$.



Ángulos mayores a 2π se da un vuelta al plano.

$(r, 5\pi)$

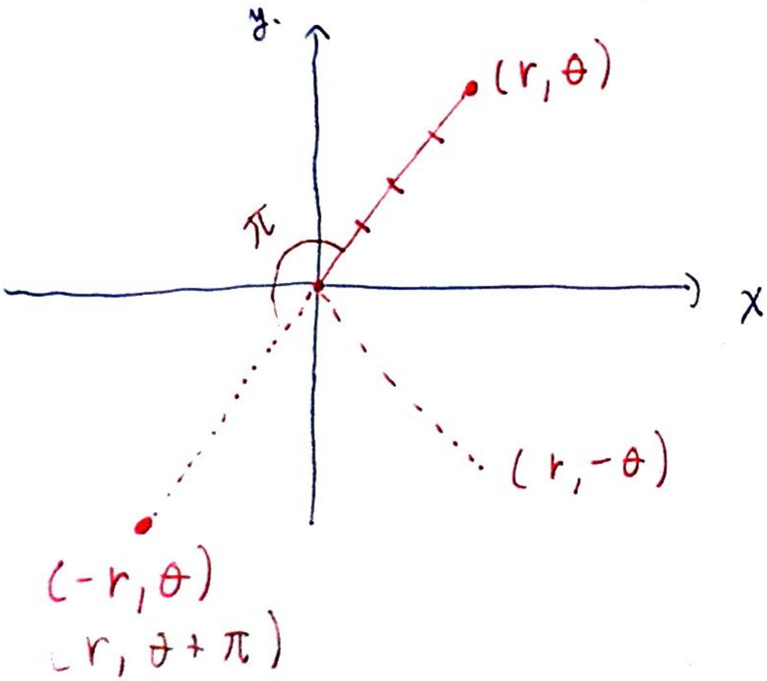


(r, π) $(r, -\pi)$ $(r, 3\pi)$ representan al mismo punto

Coordenadas cartesianas $(-r, 0)$

Reescribir radios negativos.

usualmente $r > 0$



$(-r, \theta)$ es diamentralmente opuesto a (r, θ)

$(-r, \theta)$ se reescribe como $(r, \theta + \pi)$ ó $(r, \theta - \pi)$.

Origen : $(0,0)$ $\quad r=0$

Cualquier punto de la forma $(0,\theta)$ representa al origen.

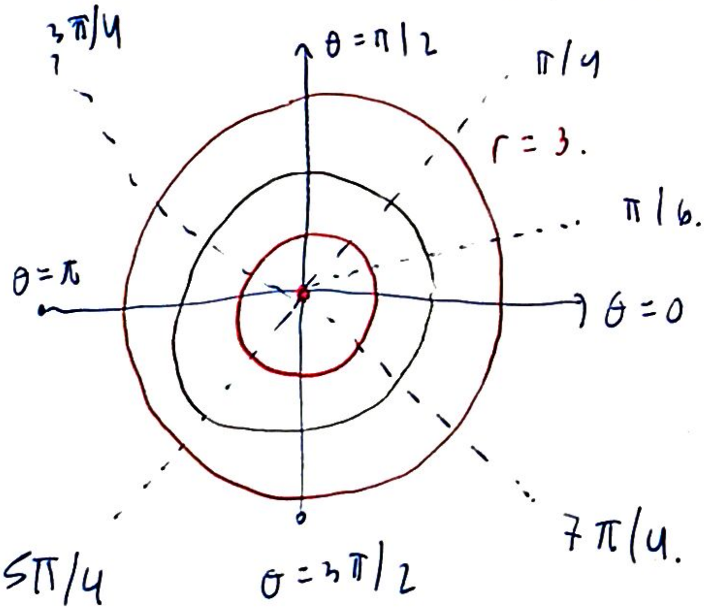
Infinitas representaciones de un punto en coordenadas polares: Como 2π es una vuelta

$(r,\theta) \qquad (r,\theta+2\pi) \qquad (r,\theta \pm 2n\pi) \quad n \in \mathbb{N}.$

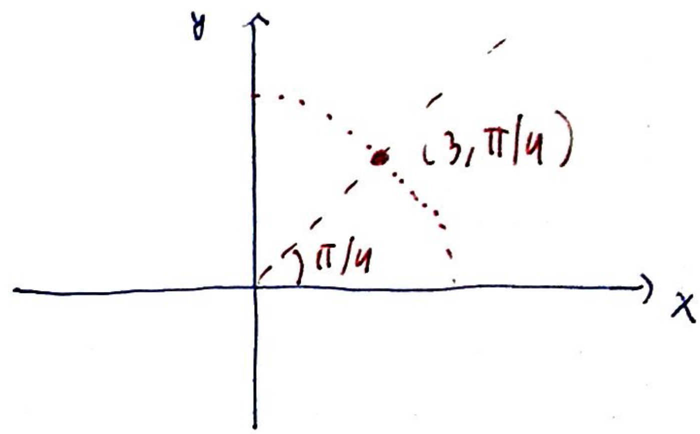
$(-r,\theta+\pi) \qquad (-r,\theta+3\pi) \qquad (-r,\theta \pm 2n\pi + \pi)$

representan al mismo punto en coordenadas polares.

Ejercicio 1: Grafique los puntos cuyas coordenadas están dadas



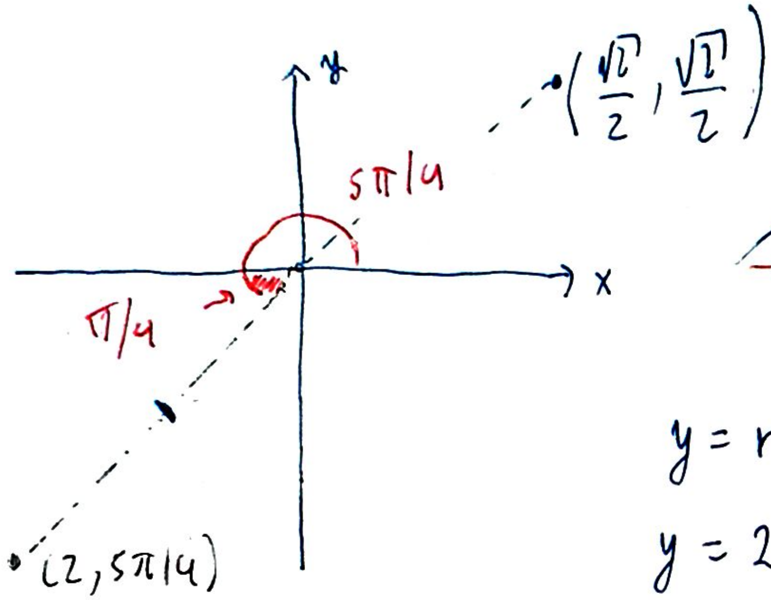
a. $(3, \pi/4)$

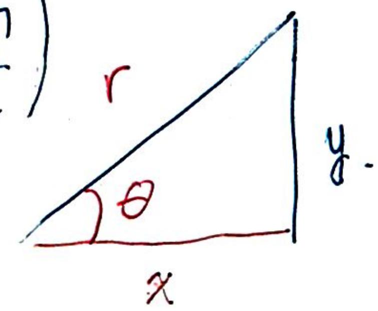


a. $(2, 5\pi/4)$ $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$ Complementos Suplementos de Ángulos.

225°

3er Cuadrante





$\frac{y}{r} = \sin\theta.$

$\frac{x}{r} = \cos\theta.$

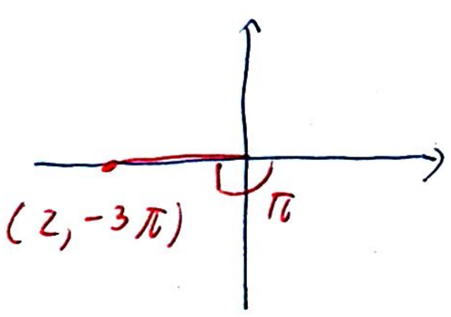
$y = r\sin\theta \qquad x = r\cos\theta.$

$y = 2\sin\frac{5\pi}{4} = -2\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$

Cartesianas $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$x = 2\cos\frac{5\pi}{4} = -2\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$

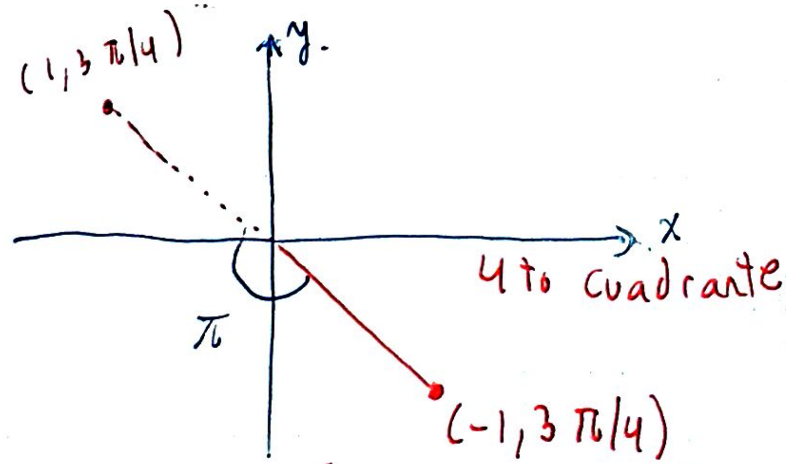
b. $(2, -3\pi)$ 1 vuelta en sentido horario, luego media vuelta.



$(2, -\pi)$ ó $(2, \pi)$

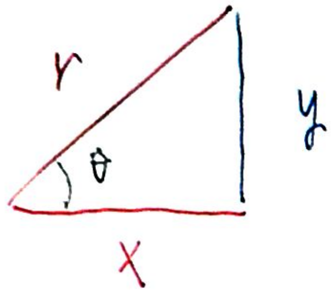
c. $(-1, 3\pi/4)$

está diametralmente opuesto a $(1, 3\pi/4)$



$180° \to \pi$ rad.   Sume π $(1, 7\pi/4)$ ó $(1, 7\pi/4)$

Cambio de Coordenadas



Polares (r, θ) a Cartesianas (x, y)

Exprese x & y en términos de r, θ.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta. \\ y &= r\sin\theta. \end{aligned}}$$

Ecs. Paramétricas

r = hipotenusa.

Cartesianas (x, y) a Polares (r, θ).

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

θ tiene que estar en el cuadrante correcto.

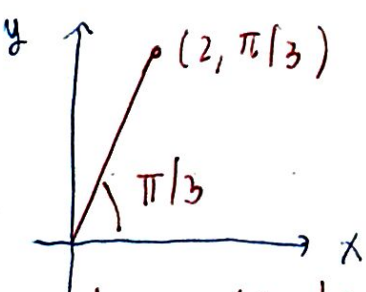
Ejercicio 2: Convierta los sigs. puntos de coordenadas polares a cartesianas

o. $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$

$y = r\sin\theta = 2\sin\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Coordenadas Cartesianas $(1, \sqrt{3})$.



1er cuadrante.

a. $\left(-3, \frac{\pi}{6}\right)$; $\left(3, \frac{7\pi}{6}\right)$

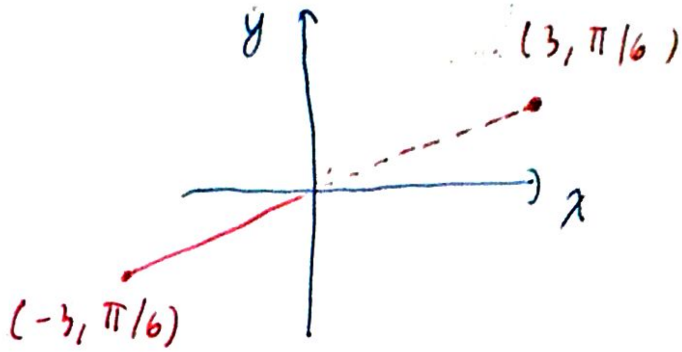
$x = r\cos\theta = -3\cos\frac{\pi}{6} = -3\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$y = r\sin\theta. = -3\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{3}{2}.$

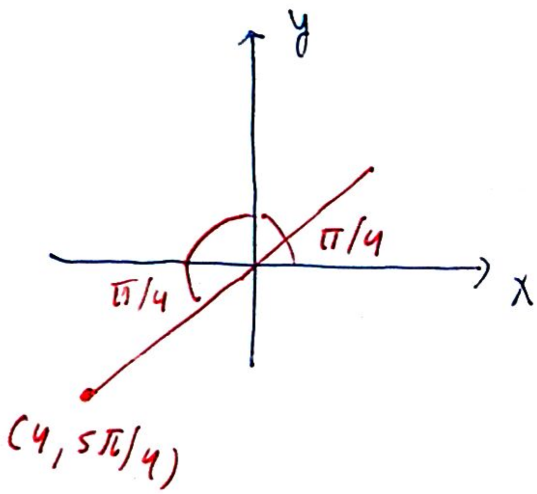
6.

Coordenadas Cartesianas

$$\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$



b. $\left(4, \frac{5\pi}{4}\right)$



3er cuadrante

$$\sin\frac{5\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

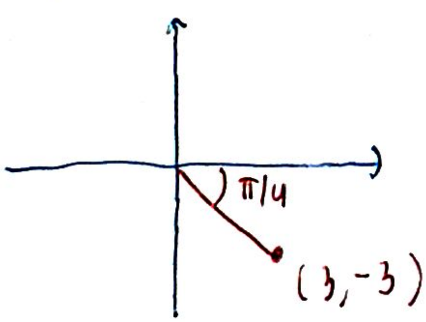
$$x = 4\cos\frac{5\pi}{4} = -2\sqrt{2}$$

$$y = 4\sin\frac{5\pi}{4} = -2\sqrt{2}$$

Cartesianas $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

Ejercicio 3: Encuentre las coordenadas polares del punto (x, y).

a). $(3, -3)$ 4to Cuadrante $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$.



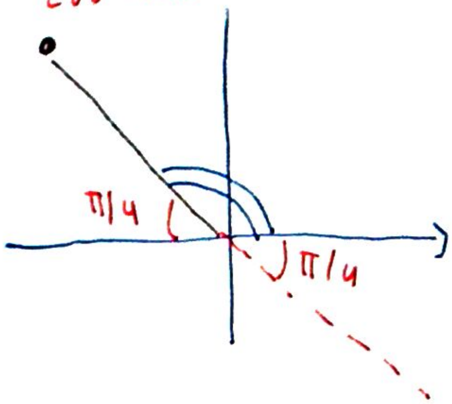
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

$(3\sqrt{2}, -\pi/4)$ ó $(3\sqrt{2}, 7\pi/4)$.

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

a 2. $(-3, 3)$



$r = 3\sqrt{2}$

$\theta = \tan^{-1}(-1) = -\pi/4.$

$\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$

Coordenadas Polares $\left(3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

b. $(-1, -\sqrt{3})$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2.$

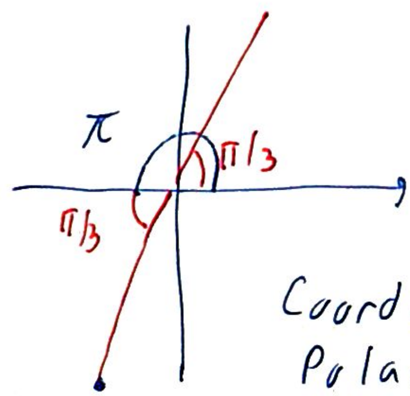
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \pi/3.$

$\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}/2$

$\cos\frac{\pi}{3} = 1/2.$

$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$(-1, -\sqrt{3})$ está en el 3er cuadrante.



$\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}.$

Coordenadas Polares $(2, 7\pi/3)$

Capítulo 28

Coordenadas polares

Lunes 4 noviembre   Lab 13
Coordenadas Polares, Derivadas y Áreas

Lunes 11 noviembre.   Parcial 3
Mar 12 noviembre   Parcial 3.

Final Jueves 21 de noviembre.

Corto 11   Jueves 31   Áreas y Longitud Arco
Jueves 6   Coordenadas Polares.

Curvas Polares $r = f(\theta)$ θ variable independiente
r variable dependiente.

(Identifique cada punto (r, θ) y luego se conectan por medio de una curva).

Curvas Polares comunes, circunferencias, cardioides, espirales y flores.

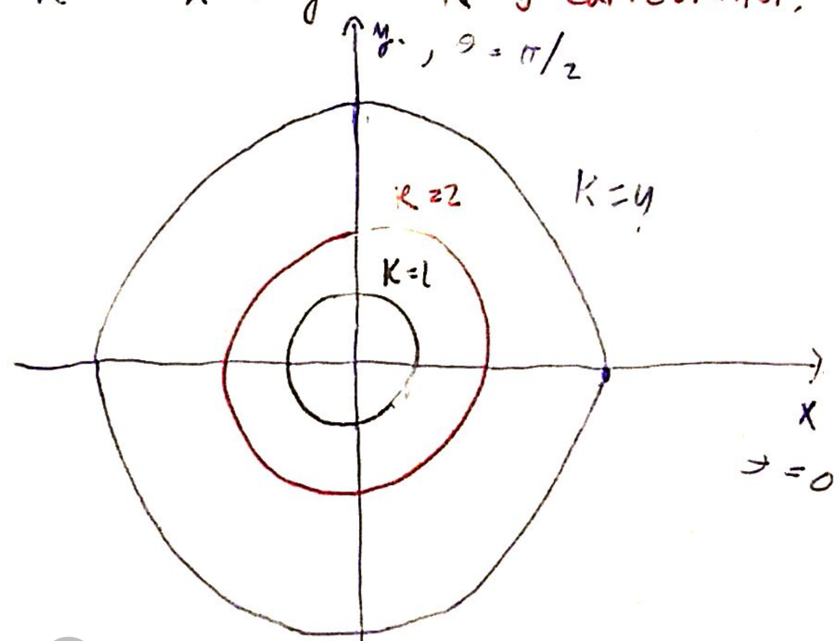
a. Circunferencia de radio K: $x^2 + y^2 = K^2$ } Ec. cartesiana.

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$\boxed{r = K.}$

Circunferencia de radio K. centrada en el origen



b. Rayo : $\theta = \alpha$.

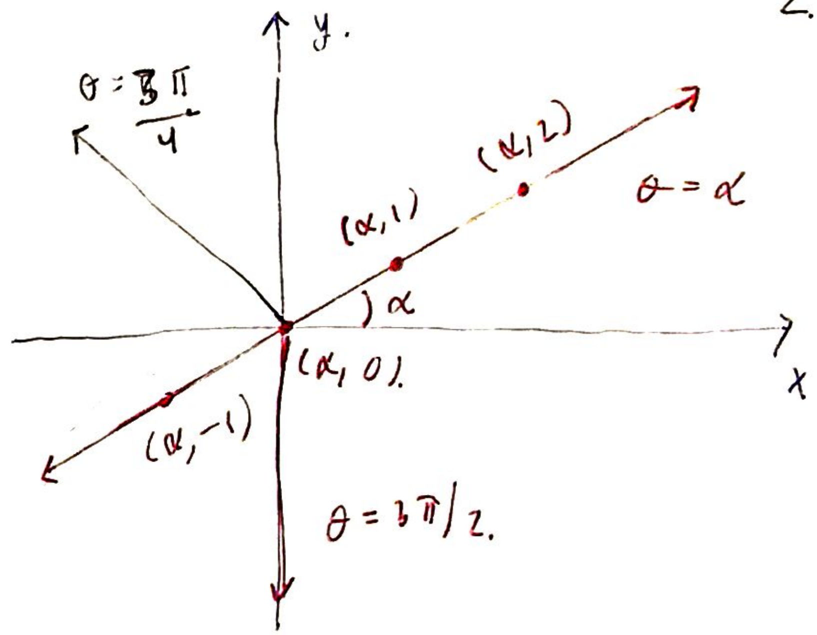
El ángulo α se mantiene constante.

Ec cartesiana Rayo

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \alpha$$

$$\frac{y}{x} = \tan\alpha.$$

$$y = x(\tan\alpha)$$

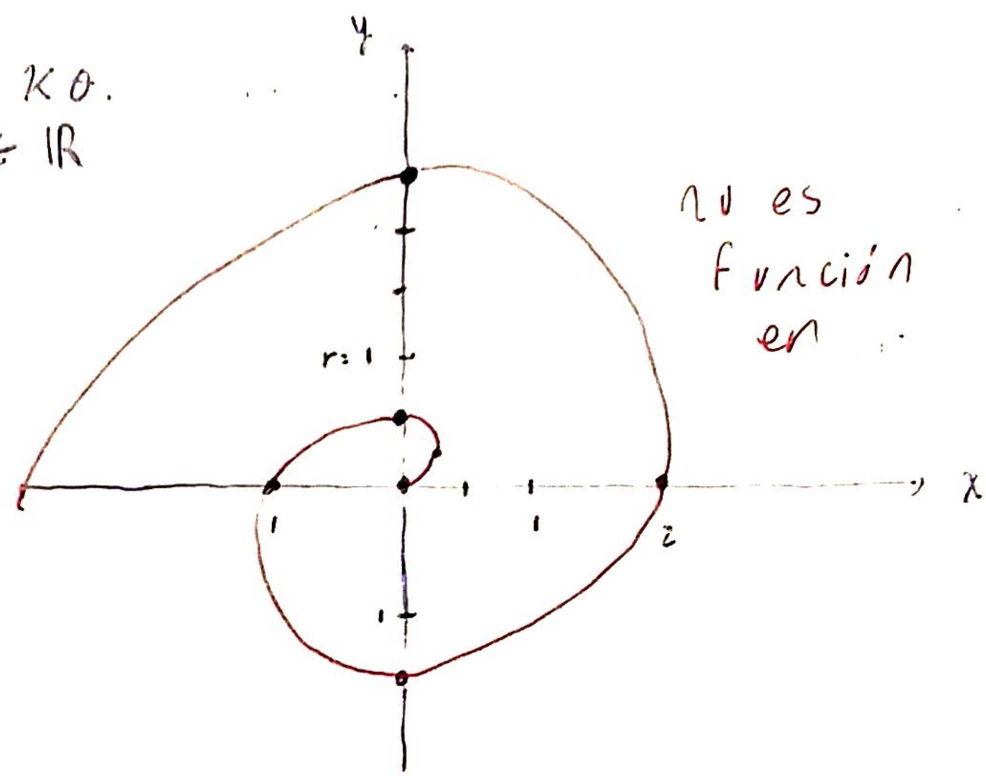


pendiente $\tan\alpha$ intercepto 0.

c. Espiral $r = K\theta$. $K \in \mathbb{R}$

$\rightarrow r = \theta/\pi$.

θ	r
0	0
$\pi/4$	$\pi/4/\pi = \frac{1}{4}$
$\pi/2$	$1/2$
π	1
$3\pi/2$	$3/2$
2π	2
$2\pi + \frac{\pi}{2}$	2.5



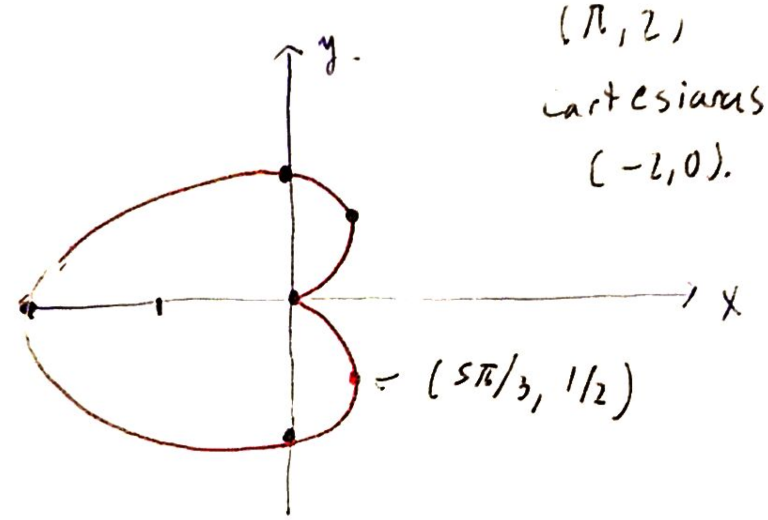
no es función en

Ec. Cartesiana de la espiral $\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

d. Cardioides $r = 1 \pm \sin\theta$ ó $r = 1 \pm \cos\theta$.

Grafique $r = 1 - \cos\theta$. $0 \le \theta \le 2\pi$

θ	r
0	$1 - 1 = 0$
$\pi/2$	$1 - 0 = 1$
π	$1 - (-1) = 2$.
$\pi/3$	$1 - \frac{1}{2} = 1/2$
$3\pi/2$	$1 - 0 = 1$
$-\pi/3$	$1 - 1/2 = 1/2$



Ecs. Cartesianas: Cardioide. $\sqrt{x^2+y^2} = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$x = r\cos\theta$.

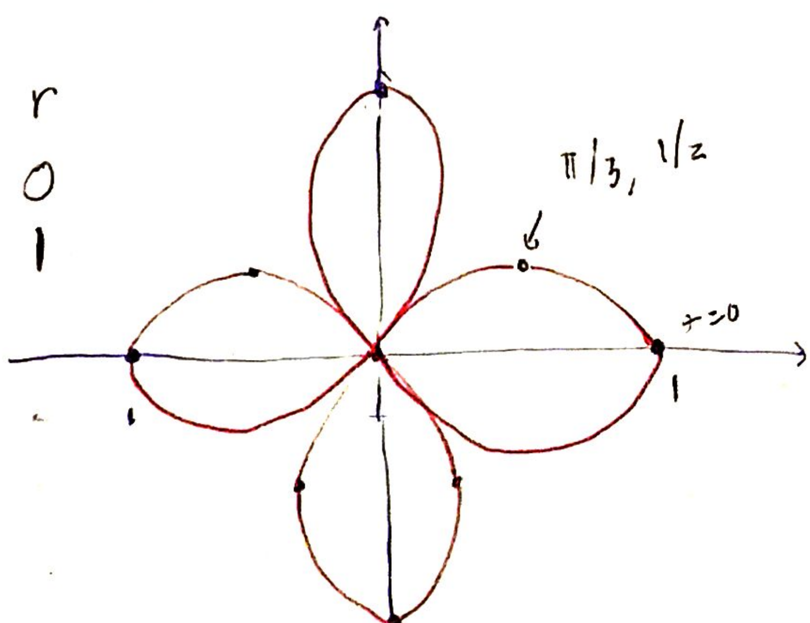
e. Rosa de n pétalos $r = \cos n\theta$ $n \geq 2$.
$r = \sin n\theta$.

$r = \cos 2\theta$. Múltiplos de $\pi/4$.

$r(\pi/4) = \cos(2\pi/4) = \cos(\pi/2) = 0$

θ	r
0	$\cos 0 = 1$
$\pi/4$	$\cos \pi/2 = 0$
$\pi/2$	$\cos\pi = -1$
$3\pi/4$	0
π	1
$5\pi/4$	0
$3\pi/2$	-1

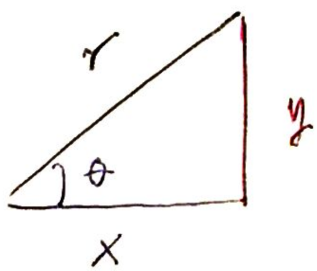
θ	r
$7\pi/4$	0
2π	1



Ejercicio 4: Sea $r = 2\sin\theta$.

a. Encuentre una ecuación cartesiana para la curva.

Eliminar r & θ y exprese en términos de x & y.



$y = r\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{r}$.

$x = r\cos\theta$.

$r^2 = x^2 + y^2$.

$r = 2\sin\theta = \frac{2y}{r} \Rightarrow r^2 = 2y$.

$\boxed{x^2 + y^2 = 2y.}$ Ec. Cartesiana.

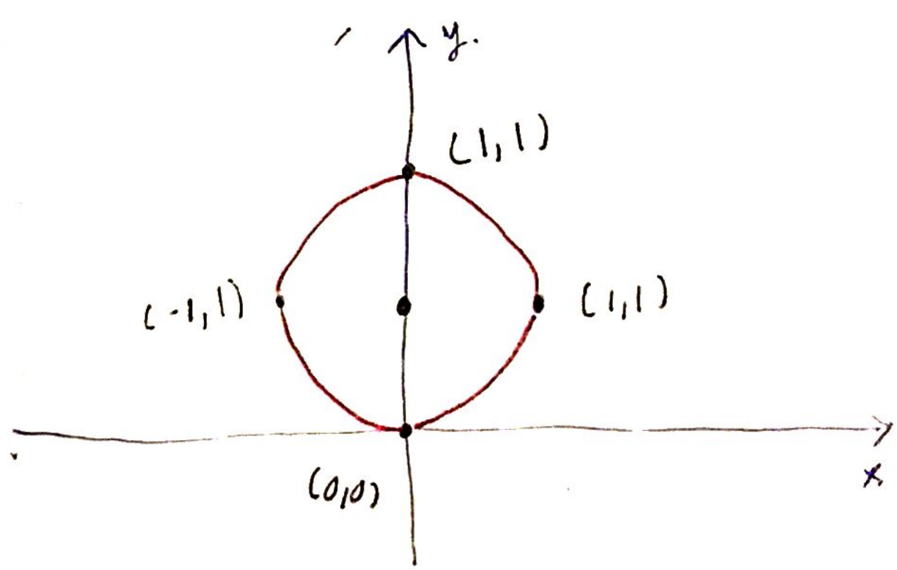
b. Identifique y grafique la curva

Ec. circunferencia centrada (a,b) y radio r $\quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0 + 1$ Complete el cuadrado $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}$

$x^2 + (y-1)^2 = 1$

circunferencia radio 1 centrada en $(0,1)$.



Ec. Circunferencia. $r = A\sin\theta + B\cos\theta.$

A, B cualquier constante. centro fuera del origen.

Derivadas de Funciones Polares:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \qquad y = f(t) \qquad x = g(t).$$

Dada una función polar $r = f(\theta)$ $\quad r'(\theta)$

Reescriba en coordenadas cartesianas

$y = r\sin\theta. = f(\theta)\sin\theta$ $\qquad$ θ es el parámetro.

$x = r\cos\theta. = f(\theta)\cos\theta.$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}.}$$

Ejercicio 5: Considere el cardioide $r = 1 - \cos\theta$

a. Encuentre dy/dx.

$y = r\sin\theta = \sin\theta - \sin\theta\cos\theta. = \sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta.$

$x = r\cos\theta. = \cos\theta - \cos^2\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{\cos\theta - \cos 2\theta.}{-\sin\theta + 2\sin 2\theta.}$$

b. Encuentre la ec. de la recta tangente en $\theta = \pi/2$.

$$x(\pi/2) = \cos\pi/2 - (\cos\pi/2)^2 = 0$$

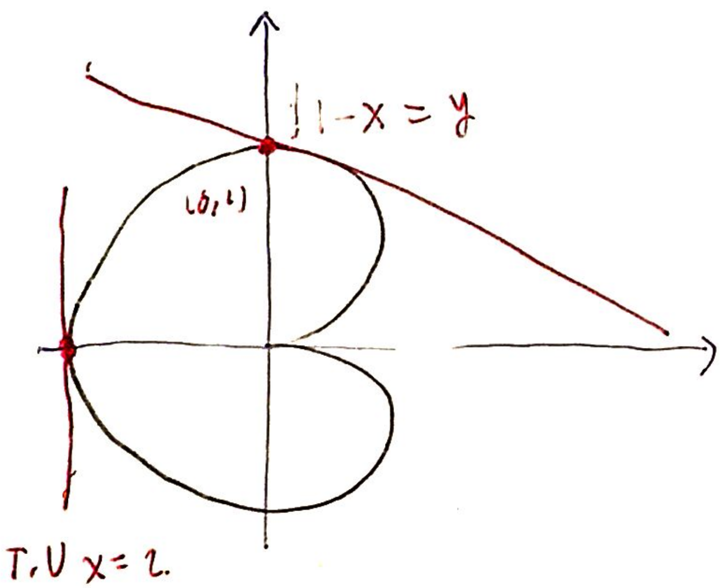
$$y(\pi/2) = \sin\pi/2 - \frac{1}{2}\sin\pi = 1$$

$(0, 1)$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/2} = \frac{\overbrace{\cos\pi/2}^{0} - \cos\pi}{-\sin\pi/2 + \underbrace{2\sin\pi}_{0}} = \frac{+1}{-1} = -1$$

Ec. Recta Tangente: $y = y(\pi/2) + m(x - \overbrace{x(\pi/2)}^{0})$

$$\boxed{y = 1 - x}$$



c. Encuentre la ecuación de la recta tangente en $\theta = \pi$.

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi} = \frac{\overbrace{\cos\pi}^{-1} - \cos 2\pi}{-\sin\pi + 2\sin 2\pi} = \frac{-2}{0}$$

Hay una tangente vertical

$$x(\pi) = \cos\pi - (\cos\pi)^2 = -1 - 1 = -2.$$

$$y(\pi) = 0$$

$$\boxed{x = -2}$$

Ejercicio 6: Considere la ec. polar $r = 2\sin\theta$.

círculo de radio 1 centrado en $(0,1)$

a. Encuentre la derivada dy/dx.

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad x^2+y^2 = 2y.$$

$$x^2+y^2-2y+1 = 1 \qquad x^2+(y-1)^2 = 1$$

$$y = r\sin\theta. = 2\sin^2\theta.$$

$$x = r\cos\theta = \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{4\sin\theta\cos\theta}{\cos 2\theta.} = \frac{2\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \boxed{2\tan 2\theta.}$$

b. Encuentre la tangente a la curva en $\theta = \pi/6$.

$$y(\pi/6) = 2(\sin\pi/6)^2 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

$$x(\pi/6) = \frac{1}{2}\sin\pi/3 = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/6} = 2\tan\pi/3. = 2\,\frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = 2\sqrt{3}$$

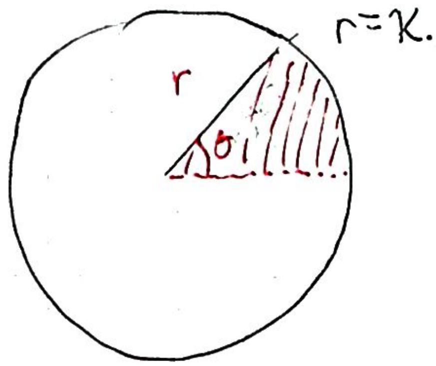
Ec. Recta Tangente: $\boxed{y = \frac{1}{2} + 2\sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}$

Capítulo 29

Áreas y regiones polares

A'reas Regiones Polares.

A'rea de una "Rebanada de Pizza"



$A = \pi r^2$. Circulo 2π radianes.

Rebanada o sector circular tiene un ángulo central θ.

$$A_{Rebanda} = \pi r^2 \left(\frac{\theta}{2\pi}\right) = \frac{r^2}{2}\theta.$$

Pizza 8 pedazos

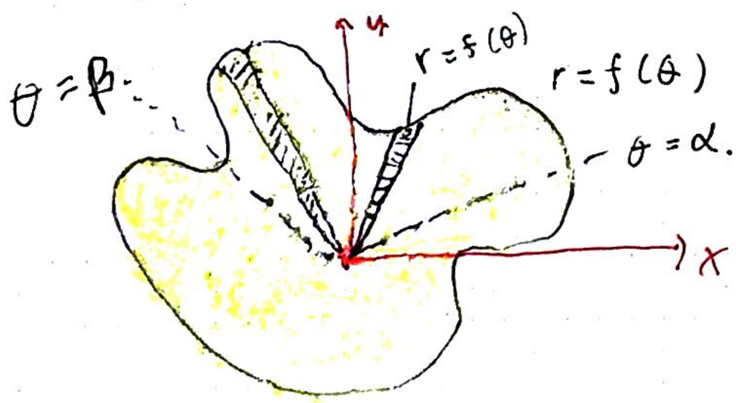
↳ $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$; $45°$.

$r = 12''$

$$A = \frac{r^2}{2}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi r^2}{8} = \pi\frac{144}{8}.$$

A'rea de una Región Polar.

$r = f(\theta)$ $\quad \alpha \leq \theta \leq \beta$.



Considere una rebanada muy delgada "infinitesimal" $r = f(\theta)$ $\quad d\theta$.

$$dA = \frac{r^2}{2}d\theta = \frac{f^2(\theta)}{2}d\theta.$$

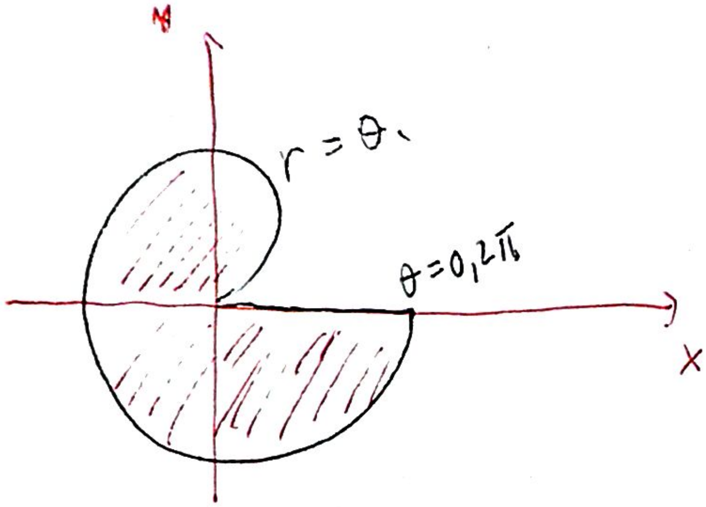
↳ área infinitesimal

Integre dA en $\alpha \leq \theta \leq \beta$.

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\, d\theta.}$$

Ejemplo: Encuentre el área dentro de la espiral $r = \theta$. en $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

theta.



$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \theta^2 \, d\theta.$$

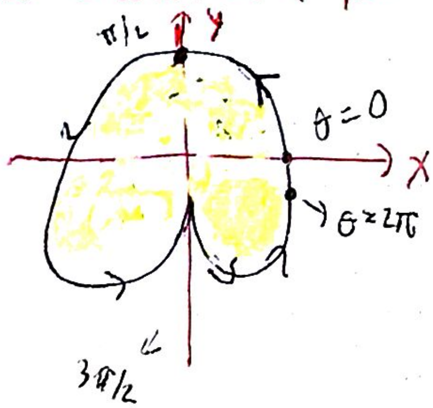
$$A = \frac{1}{6}\, \theta^3 \Big]_0^{2\pi}$$

$$A = \frac{1}{6}\, 8\pi^3 = \frac{4}{3}\pi^3.$$

P. 159 $\quad r = \sqrt{\theta}$

Ejercicio 1: Encuentre el área de las siguientes regiones

a. Encerrada por el cardioide $r = 1 - \sin\theta. = f(\theta)$



Limites $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 \, d\theta. = \frac{2}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} r^2 \, d\theta.$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1-\sin\theta)^2 \, d\theta.$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - 2\sin\theta. + \underline{\sin^2\theta}) \, d\theta.$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta.$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{3}{2} - 2\sin\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta \, d\theta. = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\theta + 2\cos\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\Big]_0^{2\pi}\right)$$

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\, 2\pi + 2\cos 2\pi - \frac{1}{4}\sin 4\pi - 0 - 2\cos 0 - \frac{1}{4}\sin 0\right).$$

$$A = \frac{1}{2}\left(3\pi + 2 - 2\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

b. Dentro del círculo $r = 4\sin\theta$. en $0 \leq \theta \leq \pi$.

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 \, d\theta.$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 16\sin^2\theta \, d\theta.$$

$$A = \int_0^{\pi} 8\sin^2\theta \, d\theta. = \int_0^{\pi} 4(1-\cos 2\theta)\, d\theta.$$

$$A = \int_0^{\pi} (4 - 4\cos 2\theta)\, d\theta. = 4\theta - 2\sin 2\theta \Big]_0^{\pi}$$

$$A = 4\pi - 2\,\cancel{\sin 2\pi} - 0 + 0 = 4\pi.$$

círculo de radio 2. $\longrightarrow$ $\pi(2)^2 = 4\pi$.

$$y = r\sin\theta = 4\sin^2\theta$$
$$x = r\cos\theta = 4\sin\theta\cos\theta.$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$
$$y = \sqrt{4 - (x-2)^2}$$

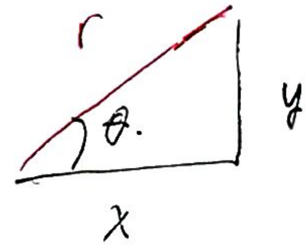
$$A = 2\int_0^4 \sqrt{4-(x-2)^2}\, dx$$

Cartesianas.

más complicado.

Ejercicio 2: Rosa de 4 pétalos $r = \cos 2\theta$.

a. Encuentre la derivada dy/dx $\qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$



Ecs. Paramétricas de la curva polar

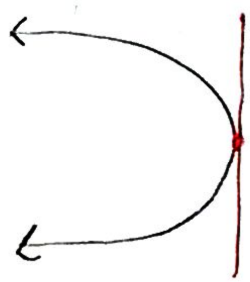
$$y = r \sin\theta.$$
$$x = r\cos\theta.$$

$$y = \cos 2\theta \sin\theta$$
$$x = \cos 2\theta \cos\theta.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin 2\theta \sin\theta + \cos 2\theta \cos\theta}{-2\sin 2\theta \cos\theta - \cos 2\theta \sin\theta.}$$

use la regla del producto.

b. Compruebe que la rosa tiene tangentes verticales en $\theta = 0$ y en $\theta = \pi$.



$\frac{dy}{dx}$ no existe

$x'(\theta) = 0$

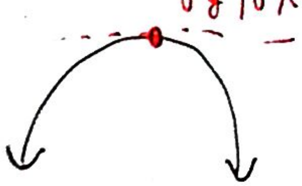
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=0} = \frac{-2\cdot 0 + 1}{-2\cdot 0 - 0} = \frac{1}{0} \quad \text{no existe.}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi} = \frac{-2\cdot 0 - 1}{-2\cdot 0 - 0} = \frac{-1}{0} \quad \text{no existe.}$$

Max tangentes verticales en $\theta = 0$ y en $\theta = \pi$.

Max tangentes horizontales en $\theta = \pi/2, 3\pi/2$

$dy/dx = 0$



$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/2} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=3\pi/2} = \frac{0}{-1} = 0$$

Max tangentes horizontales

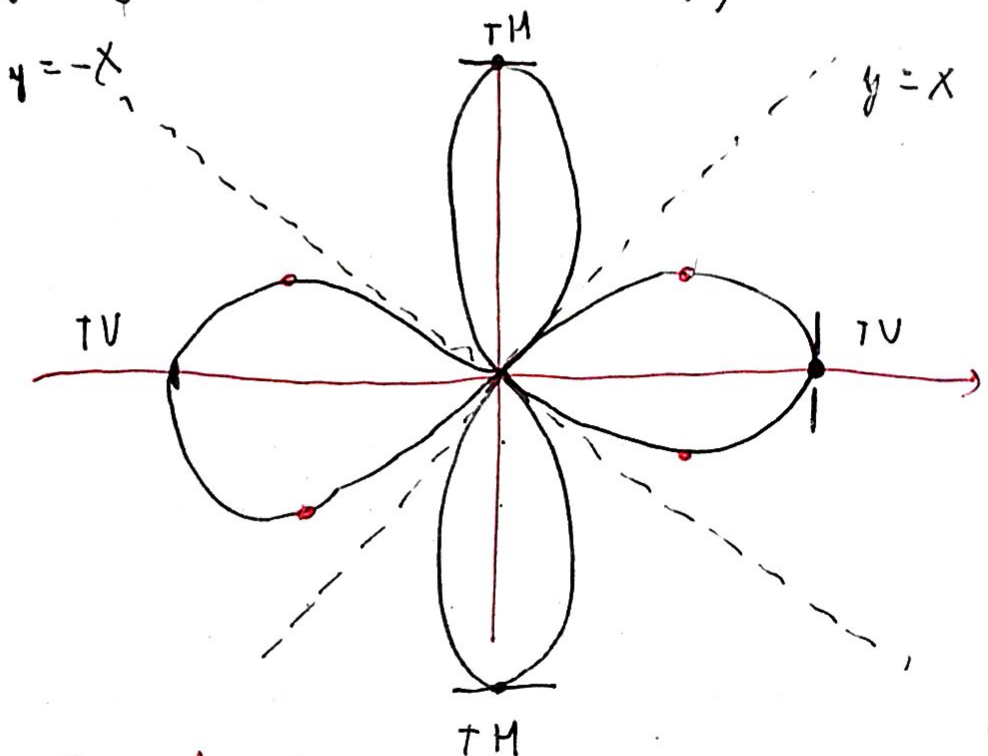
i. Encuentre la ec. de la recta tangente en $\pi/4$.

$$x(\pi/4) = \cos \pi/2 \sin \pi/4 = 0$$

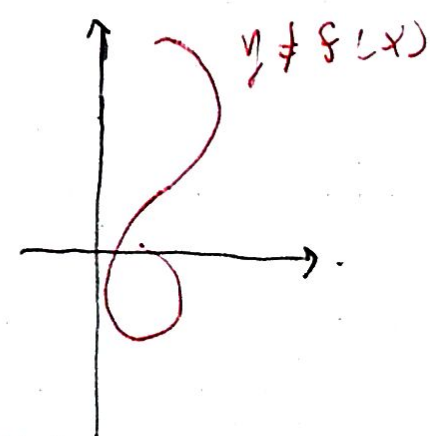
$$y(\pi/4) = \cos \pi/2 \sin \pi/4 = 0.$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/4} = \frac{-2(1)\frac{\sqrt{2}}{2} + 0}{-2(1)\frac{\sqrt{2}}{2} - 0} = \frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 1$$

$$y = y(\pi/4) + m(\cancel{x} - x(\pi/4)) = x \qquad \boxed{y = x}$$



$y = f(t)$
$x = g(t)$



Área Superficial.

$$A_S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

$$A_S = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt.$$

Capítulo 30

Área entra curvas polares

Parcial 3 Lab 12 y 13. 1

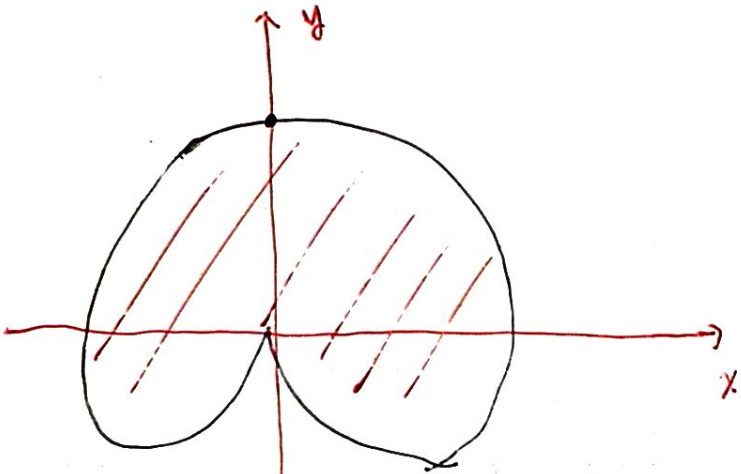
contos 10, 11 y 12 (Jueves)

Jueves Conto (1h).

Lunes Sim 3.

Martes Par 3. 10 AM.

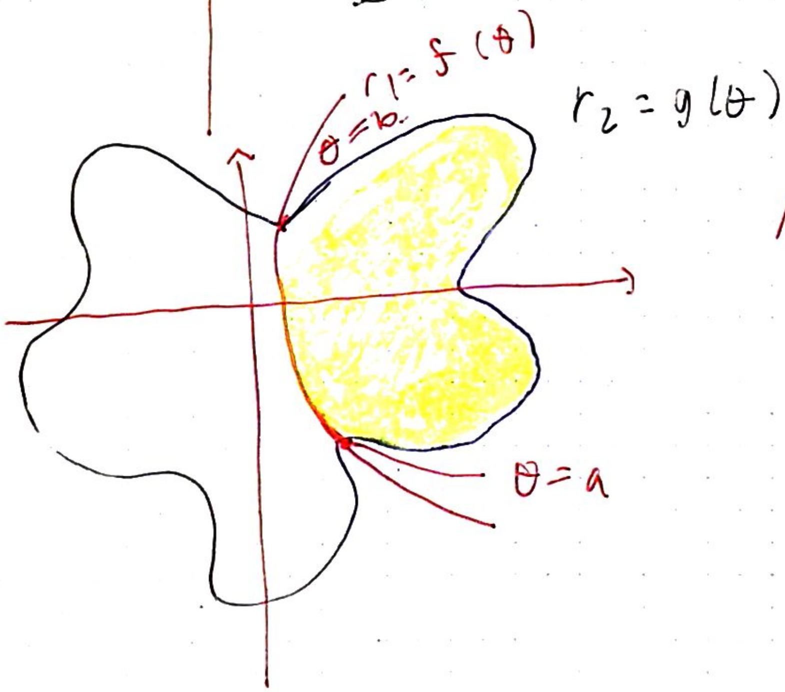
Área entre curvas Polares.



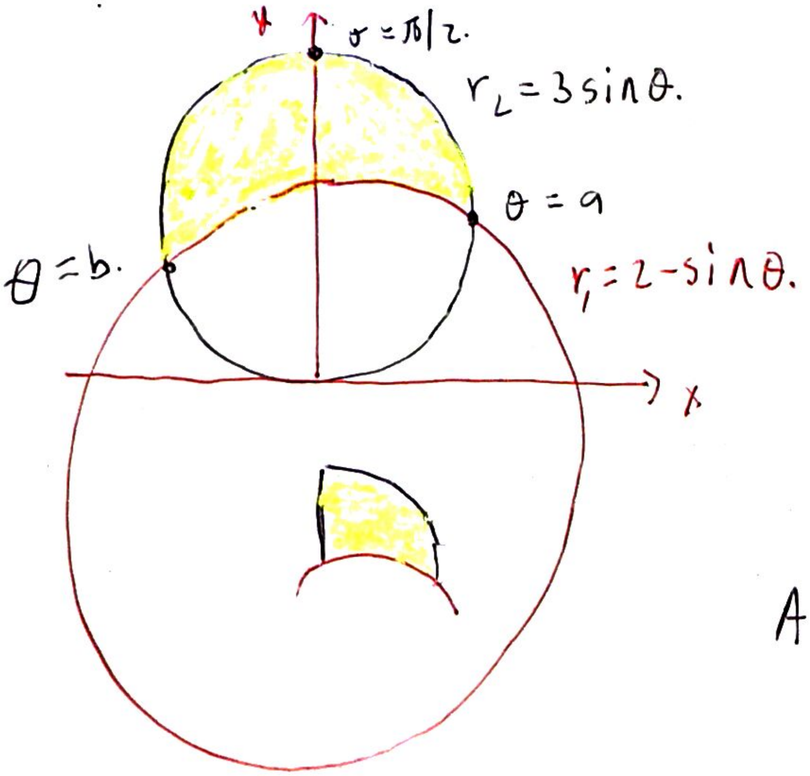
$$A = \frac{1}{2}\int_a^b r^2\, d\theta.$$

$$\frac{1}{2} r^2 \theta.$$

$\theta = 2\pi$ $\quad 2\pi r^2$



$$A = \frac{1}{2}\int_a^b r_2^2 - r_1^2\, d\theta.$$



Ejemplo: p. 163.

Encuentre el área de la región fuera del limaçon $r_1 = 2 - \sin\theta$ y adentro del círculo $r_2 = 3\sin\theta$.

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b r_2^2 - r_1^2 \, d\theta.$$

$r_2 > r_1$ en $a \le \theta \le b$ el círculo está más alejado del origen.

P.I's: $r_1 = r_2$ $\quad 3\sin\theta = 2 - \sin\theta.$

$4\sin\theta = 2 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}.$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{5\pi/6} (3\sin\theta)^2 - (2-\sin\theta)^2 \, d\theta.$$

$$A = \frac{2}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} 9\sin^2\theta - (4 - 4\sin\theta + \sin^2\theta) \, d\theta.$$

$$A = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(\underline{8\sin^2\theta} + 4\sin\theta - 4\right) d\theta. \qquad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta = \sin^2\theta$$

$$A = \int_{\pi/3}^{\pi/2} (4 - 4\cos 2\theta + 4\sin\theta - 4) \, d\theta.$$

$$A = \int_{\pi/3}^{\pi/2} -4\cos 2\theta + 4\sin\theta \, d\theta.$$

3.

$$A = -\frac{4}{2}\sin 2\theta \Big]_{\pi/3}^{\pi/2} - 4\cos\theta \Big]_{\pi/3}^{\pi/2}$$

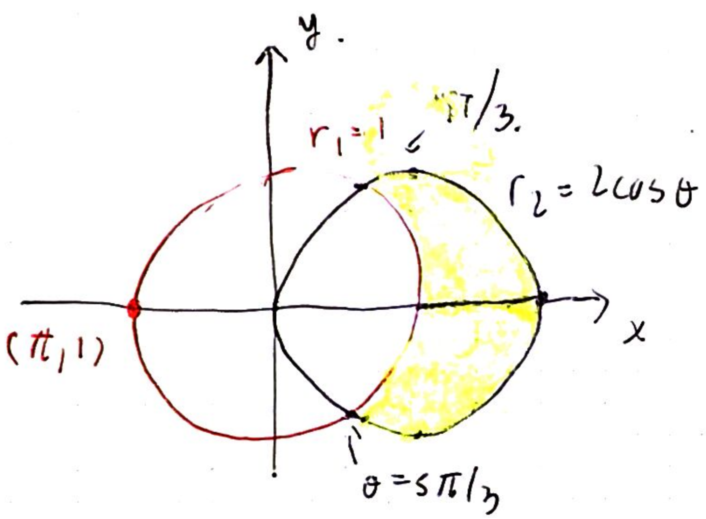
$0 \qquad 0$

$\int \cos 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$

$$A = -2\cancel{\sin \pi} + 2\sin\frac{2\pi}{3} - 4\cancel{\cos\frac{\pi}{2}} + 4\cos\frac{\pi}{3}$$

$$A = 2\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}!$$

Ejercicio 3: Encuentre el área que está adentro del círculo $r_2 = 2\cos\theta$ y fuera del círculo $r_1 = 1$.



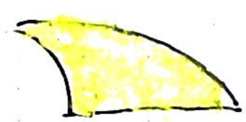
r_2 está más alejada del origen que r_1

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b r_2^2 - r_1^2 \, d\theta.$$

P.I's. $\quad r_2 = r_1$

$2\cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = 1/2$

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (4\cos^2\theta - 1^2)\, d\theta.$$



$$A = \frac{2}{2}\int_0^{\pi/3} (4\cos^2\theta - 1)\, d\theta.$$

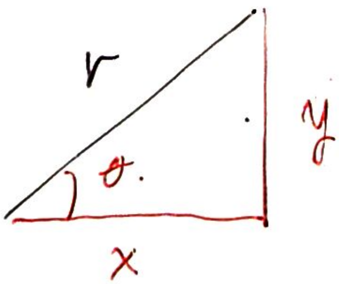
$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta.$

$$A = \int_0^{\pi/3} (2\cos 2\theta + 2 - 1)\, d\theta. = \sin 2\theta + \theta \Big]_0^{\pi/3}$$

$$A = \sin\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$$

Longitud de Arco Coordenadas Polares.

Una función polar $r = f(\theta)$ tiene las sigs. ecs. paramétricas cartesianas.



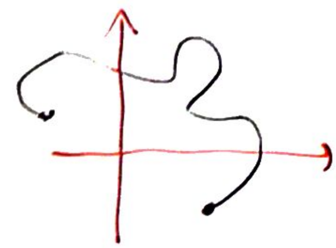
$$\boxed{\begin{aligned} y &= r\sin\theta \\ x &= r\cos\theta \end{aligned}}$$

θ parámetro

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}$$

Longitud Curva $\quad L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, d\theta$

r no es constante $\quad r(\theta)$



$$x'(\theta) = r'(\theta)\cos\theta - r\sin\theta$$
$$y'(\theta) = r'\sin\theta + r\cos\theta.$$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$(x')^2 = (r')^2\cos^2\theta - 2rr'\cos\theta\sin\theta + r^2\sin^2\theta.$$
$$(y')^2 = (r')^2\sin^2\theta + 2rr'\cos\theta\sin\theta + r^2\cos^2\theta$$

$$(r')^2 \qquad 0 \qquad r^2.$$

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\theta.}$$

Fórmula que se puede utilizar.

Última Páginas Ejercicio 4: Encuentre la longitud exacta de las siguientes curvas.

a. $r = 2\cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Círculo de radio 1

$2\pi(1)$

$r = 2\cos\theta$ $\quad r^2 = 4\cos^2\theta$.

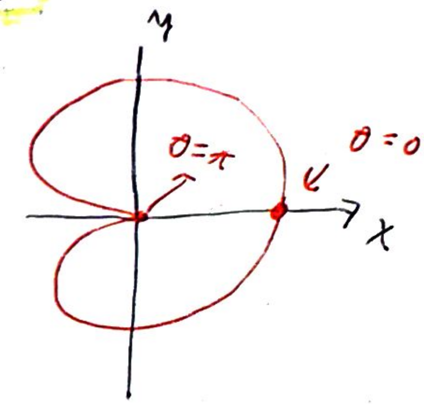
$r'(\theta) = -2\sin\theta$ $\quad (r')^2 = 4\sin^2\theta$.

$r^2 + (r')^2 = 4(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 4.$

$r(0) = 2$
$r(\pi) = -2.$
$(0, 2)$ y $(\pi, -2)$ son el mismo punto.

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{4}\, d\theta = 2\int_0^{\pi} d\theta = 2\theta\Big]_0^{\pi} = 2\pi$$



b. $r = 1 + \cos\theta$ $\quad 0 \leq \theta \leq \pi$.

Medio cardioide.

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta.$$

$r = 1 + \cos\theta$ $\quad r' = -\sin\theta$.

$r^2 = (1+\cos\theta)^2 = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$, $(r')^2 = \sin^2\theta$.

$r^2 + (r')^2 = 1 + 2\cos\theta + \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}$

$r^2 + (r')^2 = 2 + 2\cos\theta.$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\, d\theta.$$ cicloide $\int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\sin\theta}\, d\theta.$ 6.

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\theta) \qquad 4\cos^2\frac{\theta}{2} = 2+2\cos\theta.$$
$$4\sin^2\frac{\theta}{2} = 2-2\cos\theta.$$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta. = 2\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta.$$

$$L = 2\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big]_0^{\pi} = 4\left(\cancel{\sin\frac{\pi}{2}}^{1} - \cancel{\sin 0}^{0}\right) = 4.$$

Longitud de todo el cardioide es $2L = 8$.

J. Un pétalo de la rosa $r = \cos 2\theta$, $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$.

$$r = \cos(2\theta) \qquad r^2 = \cos^2(2\theta)$$
$$r' = -2\sin(2\theta) \qquad (r')^2 = 4\sin^2(2\theta)$$

$$r^2 + (r')^2 = \cos^2(2\theta) + 4\sin^2(2\theta) = 1 + 3\sin^2(2\theta)$$

$$L = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1+3\sin^2 2\theta}\, d\theta.$$

No se puede integrar de manera, sólo de manera aproximada

$$L = 2\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+3\sin^2 2\theta}\, d\theta.$$

c. La espiral $r = \theta^2$ en $0 \leq \theta \leq \sqrt{\pi}$.

$$r = \theta^2 \qquad r^2 = \theta^4$$

$$r' = 2\theta \qquad (r')^2 = 4\theta^2$$

θ^2 F.C.

$$L = \int_0^{\sqrt{\pi}} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta = \int_0^{\sqrt{\pi}} \sqrt{\theta^4 + 4\theta^2}\, d\theta.$$

$$L = \int_0^{\sqrt{\pi}} \sqrt{\underbrace{\theta^2 + 4}_{u}}\; \theta\, d\theta. \qquad u = \theta^2 + 4$$

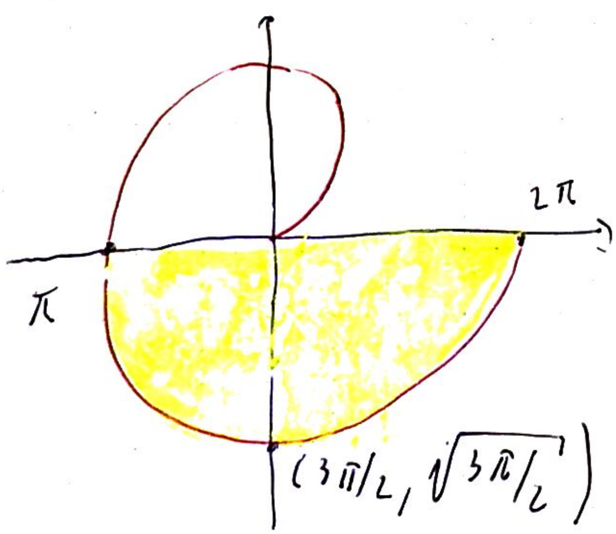
$$du = 2\theta\, d\theta.$$

$$L = \int u^{1/2} \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{1}{3}(\theta^2+4)^{3/2}\Big]_0^{\sqrt{\pi}}$$

$$L = \frac{1}{3}(\pi + 4)^{3/2} - \frac{1}{3}\underbrace{4^{3/2}}_{8} = \frac{1}{3}\left[(\pi+4)^{3/2} - 8\right].$$

$$\int_a^b y\, dx$$

WA 10.4 Prob. $r = \sqrt{\theta}$



$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_a^b r^2\, d\theta}$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \theta\, d\theta.$$

$$A = \frac{1}{4}\theta^2\Big]_{\pi}^{2\pi}$$

$$A = \frac{1}{4}\left(4\pi^2 - \pi^2\right) = \frac{3\pi^2}{4}$$

8.

Prob 1b) Recta Tangente a $r = \frac{1}{\theta}$ en $\theta = \pi$.

Ec. Recta Tangente $y = y(\pi) + m(\pi)(x - x(\pi))$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}$$

$y = r\sin\theta = \theta^{-1}\sin\theta.$

$x = r\cos\theta = \theta^{-1}\cos\theta.$

R.P.

$y'(\theta) = -\theta^{-2}\sin\theta + \theta^{-1}\cos\theta.$

$x'(\theta) = -\theta^{-2}\cos\theta - \theta^{-1}\sin\theta.$

$\sin\pi = 0$

$\cos(\pi) = -1$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi} = \frac{\frac{-\sin\pi}{\pi^2} + \frac{\cos\pi}{\pi}}{\frac{-\cos\pi}{\pi^2} - \frac{\sin\pi}{\cancel{\pi}}} = \frac{\frac{-1}{\pi}}{\frac{+1}{\pi^2}} * \frac{\pi^2}{\pi^2} = -\pi$$

$x(\pi) = \frac{1}{\pi}\cos\pi = \frac{-1}{\pi}$ $\qquad y(\pi) = \frac{1}{\pi}\sin\pi = 0$

Ec. Recta Tangente: $y = -\pi\left(x + \frac{1}{\pi}\right)$

$$\boxed{y = -\pi x - 1}$$