# Matmática Discreta Aplicada

2019-08/19

Ej: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ La Suma de los primeros n consecutivos es $\frac{n(n+1)}{2}$:

Prueba: por inducción

Paso Base: Probamos $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Paso inductivo: Asumimos $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Luego, $\sum_{i=1}^{n+1} i = \underbrace{(n+1)}_{\text{lo saco de la suma para remplazar.}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{\text{remplazo}}$

$$= n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \square$$

---

- Se necesita probar por inducción matemática para ser válido.

Ej: Pruebe que si $n \geq 2$, entonces $n^3 - n$ es un múltiplo de 3.

Prueba por inducción:

Prueba: Probamos $n = 2$

$$(2)^3 - (2) = 6 = \underbrace{2 \cdot 3}$$

se probó que es un múltiplo de 3.

Paso inductivo: $n^3 - n = 3m$ ; $m$ es un entero positivo. $m \in \mathbb{Z}^+$

Entonces,

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n \cancel{+1} - n \cancel{-1}$$

$$= \underbrace{(n^3 - n)}_{3m} + 3n^2 + 3n$$

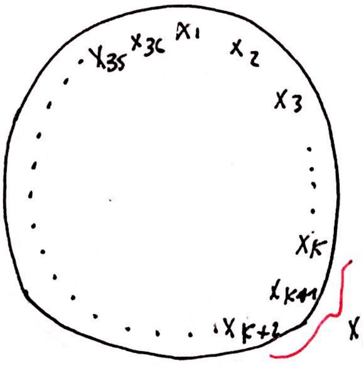
$$= 3m + 3n^2 + 3n$$

$$= 3\underbrace{(m + n^2 + n)}$$

esto es un entero arbitrario

$$= 3K \quad \square$$

Ej: Pruebe que en una ruleta con los números del 1 al 36, dispuestos de forma aleatoria, siempre existen 3 consecutivos cuya suma es 55 o más.




$$x_K + x_{K+1} + x_{K+2} \geq 55$$

---

Solución: Escribir los números de la ruleta en un listado hacia abajo.

aquí están dispuestos todas las combinaciones posibles.

$$x_1 + x_2 + x_3 < 55$$
$$x_2 + x_3 + x_4 < 55$$
$$x_3 + x_4 + x_5 < 55$$
$$x_4 + x_5 + x_6 < 55$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$x_{35} \quad x_{36} \quad x_1 < 55$$
$$\underbrace{x_{36}}_{1-36} \quad \underbrace{x_1}_{1-36} \quad \underbrace{x_2}_{1-36} < 55$$

Para fines de contradicción se asume entonces que la suposición es falsa, entonces

$$x_K + x_{K+1} + x_{K+2} < 55$$

Sumamos las 36 desigualdades

$$3 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{36} i}_{} < 36 \cdot 55$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$3 \cdot \left(\frac{36 \cdot 37}{2}\right) < 1980$$

$$1980 < 1980$$

$$(\rightarrow\leftarrow)$$

Se contempla prueba de contradicción porque

Si escojo de forma aleatoria 25 días del año, almenos 3 de esos 25, son del mismo mes

---

## Técnicas de conteo

Contar: asignar es la acción de asignar a un conjunto de objetos uno y solo uno, de los números naturales.

<u>Def:</u> Los números naturales son los enteros positivos.

$$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$$

Entonces al "contar" hacemos:

$$S = \{\underset{1}{\underset{\uparrow}{a}}, \underset{2}{\underset{\uparrow}{e}}, \underset{3}{\underset{\uparrow}{i}}, \underset{4}{\underset{\uparrow}{o}}, \underset{5}{\underset{\uparrow}{u}}\}$$

- Cuando se cuenta lo que se dice es el <u>último número</u>
- hay 5 números en el conjunto.

---

técnica de conteo: Principio de la suma (P.S.)

- Consiste en contar el número de elementos en la unión de dos conjuntos disjuntos.
  - Def. Cardinalidad de un conjunto = es el número de elementos en un conjunto (finito) es su cardinalidad.
- <u>Notación</u>: Si $A$ es un conjunto, su cardinalidad es $|A|$

$$|A \cup B| = |A| + |B|, \text{ si } \underbrace{A \cap B = \emptyset}_{\text{conjuntos disjuntos}}$$

---

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

# Técnica de conteo: Principio de producto (P.P)

- Contamos el número de elementos en el producto cartesiano de dos conjuntos.
  - Def. Producto Cartesiano

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Ej: $A = \{1,2\}$ y $B = \{x, y, z\}$

$$A \times B = \{(1,x), (1,y), (1,z), (2,x), (2,y), (2,z)\}$$

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$