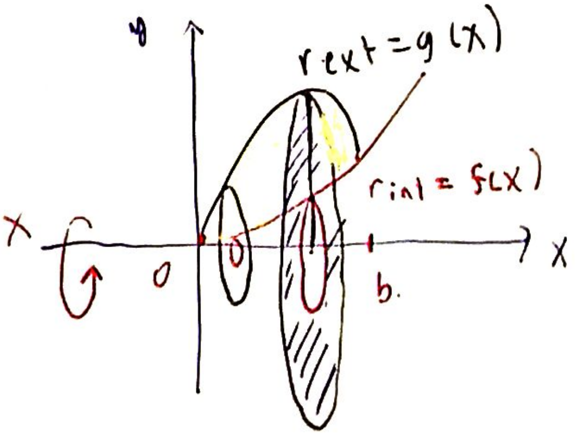
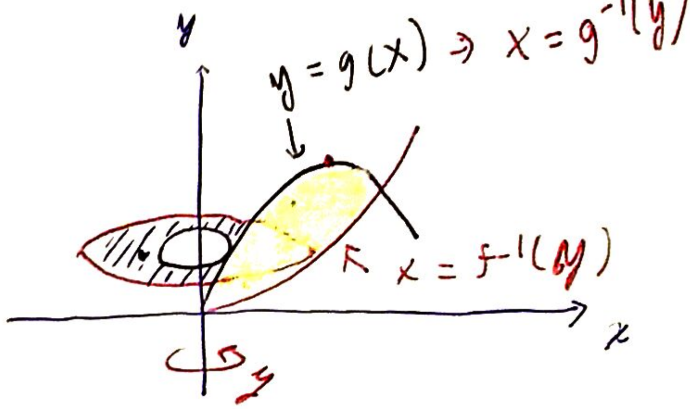
Volúmenes:

- Región.
- Identificar la recta de rotación.
- Identificar las funciones de radio para cada anillo
- Escoger la variable de integración.



$$A = \pi r_{ext}^2 - \pi r_{int}^2$$

$$V = \pi \int_0^b r_{ext}^2 - r_{int}^2 \, dx$$



Refleje respecto al eje-y.

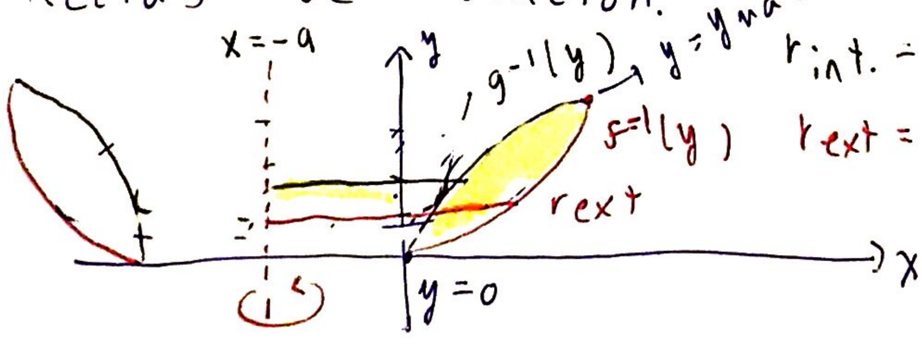
$0 \leq y \leq y_{max}$

$r_{int} = x = g^{-1}(y)$

$r_{ext} = x = f^{-1}(y)$

Volumen $V = \pi \int_0^{y_{max}} r_{ext}^2 - r_{int}^2 \, dy = \pi \int_0^{y_{max}} (f^{-1})^2 - (g^{-1})^2 \, dy.$

Rectas de Rotación.



$r_{int.} = a + g^{-1}(y)$

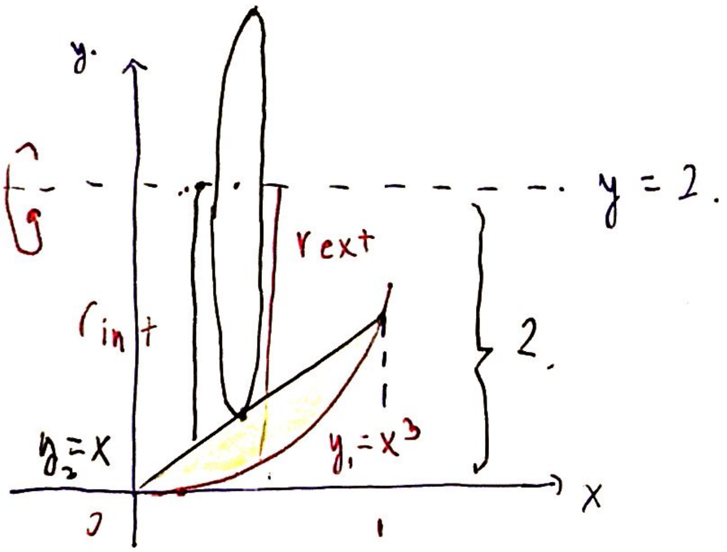
$r_{ext} = a + f^{-1}(y)$

$0 \leq y \leq y_{max}.$

$$V = \pi \int_0^{y_{max}} r_{ext}^2 - r_{int}^2 \, dy = \pi \int_0^{y_{max}} (a+f^{-1})^2 - (a+g^{-1})^2 \, dy.$$

Ejercicio 6: Considerar la región entre $f(x) = x$ & $g(x) = x^3$ en el 1er cuadrante. (p 96)

a. Plantee la integral del volumen del sólido al girar la región respecto a $\underline{y = 2}$.



$r_{int} = 2 - y_2 = 2 - x.$

$r_{ext} = 2 - y_1 = 2 - x^3$

$A = \pi (r_{ext}^2 - r_{int}^2)$

Integre en x.

$x^3 - x = 0$

$x(x^2 - 1) = 0 \quad x = 0, 1$

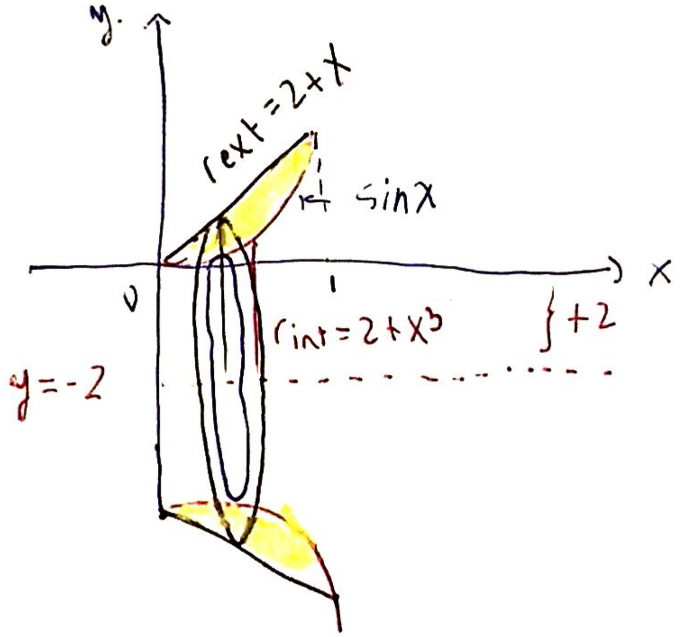
$$V = \pi \int_0^1 r_{ext}^2 - r_{int}^2 \, dx = \pi \int_0^1 (2 - x^3)^2 - (2-x)^2 \, dx$$

$$\pi \int_0^1 x^6 - 4x^3 - x^2 + 4x \, dx$$

$$= 17\pi / 21.$$

b. Plantee la integral del volumen del sólido que se obtiene al girar la región respecto a $y=-2$.

dado.



$r_{int} = 2 + x^3$

$r_{ext} = 2 + x$

integre en $0 \leq x \leq 1$

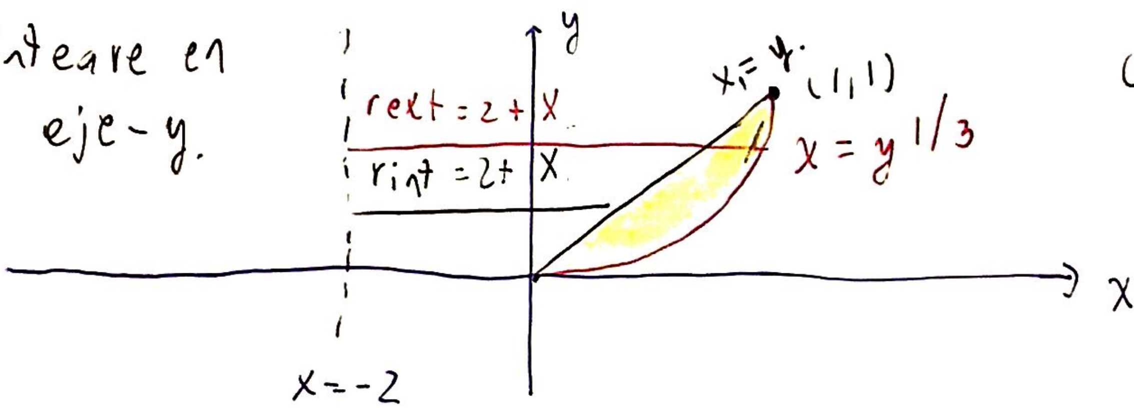
$$V = \pi \int_0^1 r_{ext}^2 - r_{int}^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (2+x)^2 - (2+x^3)^2 \, dx$$

$$V = 32\pi/21$$

c. Rote la región respecto a $x=-2$.

Integre en el eje-y.



$0 \leq y \leq 1$

$r_{ext} = 2 + y^{1/3}$

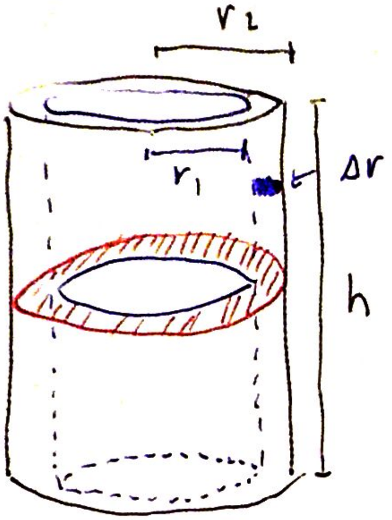
$r_{int} = 2 + y$

$0 \leq y \leq 1$

$$V = \pi \int_0^1 r_{ext}^2 - r_{int}^2 \, dy$$

$$V = \pi \int_0^1 (2+y^{1/3})^2 - (2+y)^2 \, dy.$$

6.3 Volumen con Cascarones Cilíndricos (Latas)



r_1 interno $\quad r_2$ externo. -te.

Área anillo $\pi r_2^2 - \pi r_1^2$

Volumen $\quad V = \pi h (r_2^2 - r_1^2)$

grosor $\quad \Delta r = r_2 - r_1 = dr$

radio promedio: $\quad r = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$

$$V = \pi h (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = \pi h (2r)\, dr.$$

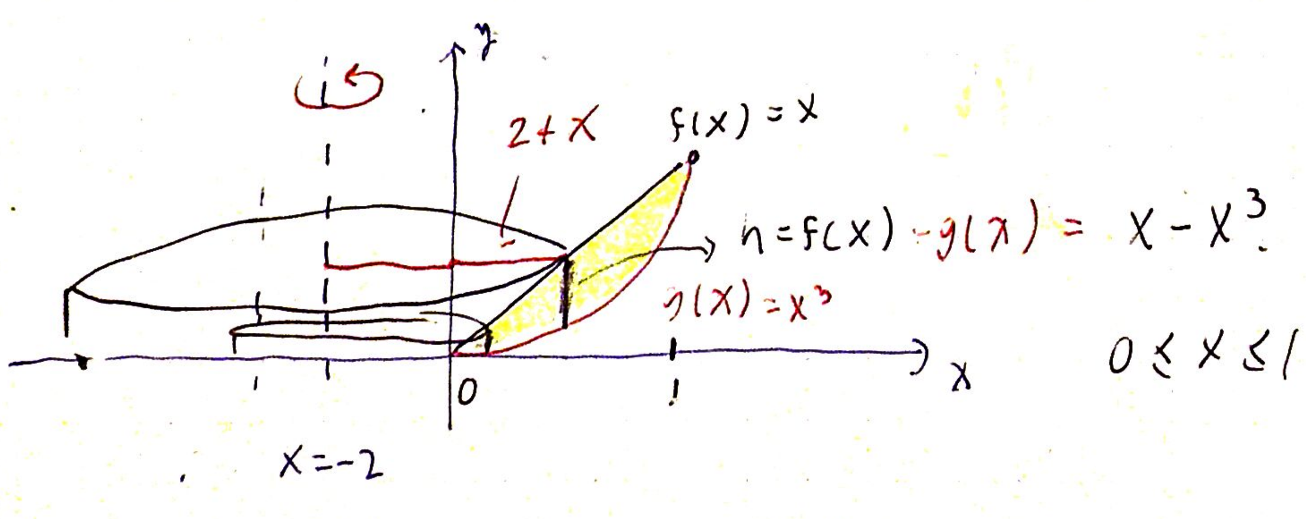
Volumen Cascarón $\quad V = \pi h r^2$

Derive respecto a r $\quad dV = 2\pi h r\, dr$

Integre en $a \leq x \leq b$ $\quad \boxed{V = 2\pi \int_a^b h r\, dr}$

cascarones cilíndricos.

Otra vez inciso c) $\quad y = x^3$ & $y = x$ gire a $x = -2$.



$h = x - x^3 \qquad r = 2 + x \qquad 0 \leq x \leq 1$

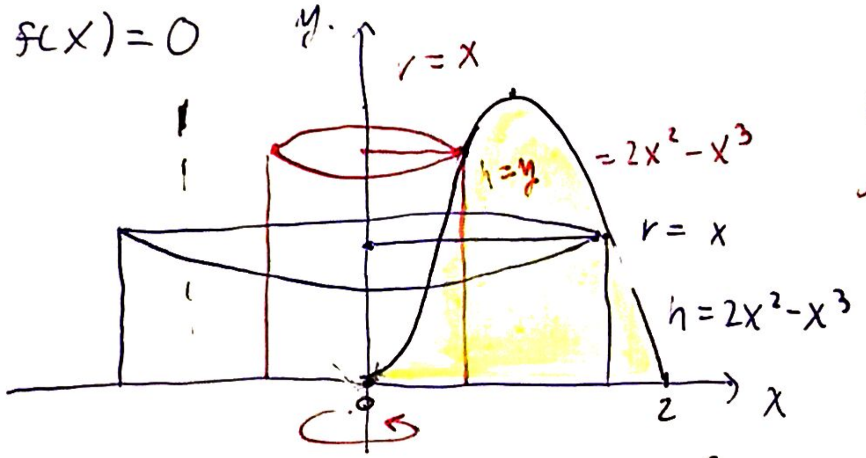
$$V = 2\pi \int_0^1 h r \, dx = 2\pi \int_0^1 (x - x^3)(2 + x) \, dx$$

ó $$V = \pi \int_0^1 (2 + y^{1/3})^2 - (2 + y)^2 \, dy.$$

Ejemplo: Encuentre el volumen del sólido que se obtiene al girar la región entre el eje-x y la curva $f(x) = 2x^2 - x^3$ en el 1^er cuadrante respecto al eje-y.

Intersectos-x $\quad 2x^2 - x^3 = x^2(2 - x) = 0 \qquad x = 0, \; x = 2.$

$f(x) = 0$



radio $\quad r = x$

altura $\quad h = 2x^2 - x^3$.

límites $\quad 0 \leq x \leq 2$.

$$V = 2\pi \int_0^2 h r \, dx = 2\pi \int_0^2 (2x^2 - x^3)\, x \, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^2 2x^3 - x^4 \, dx = 2\pi \left(\frac{2x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \Big]_0^2 \right)$$

$$V = 2\pi \left(8 - \frac{32}{5} \right)$$

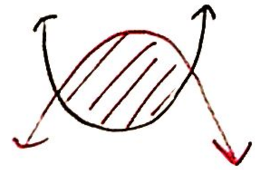
Rotando con un eje horizontal

Anillos $\quad V = \int_a^b \pi (r_2^2 - r_1^2)\, dx \quad$ eje-x, $y = 0$, $y = cte$

Rotando con un eje vertical $\quad x = 0$ ó $x = cte.$

Cilindros $\quad V = 2\pi \int_a^b h r \, dx$

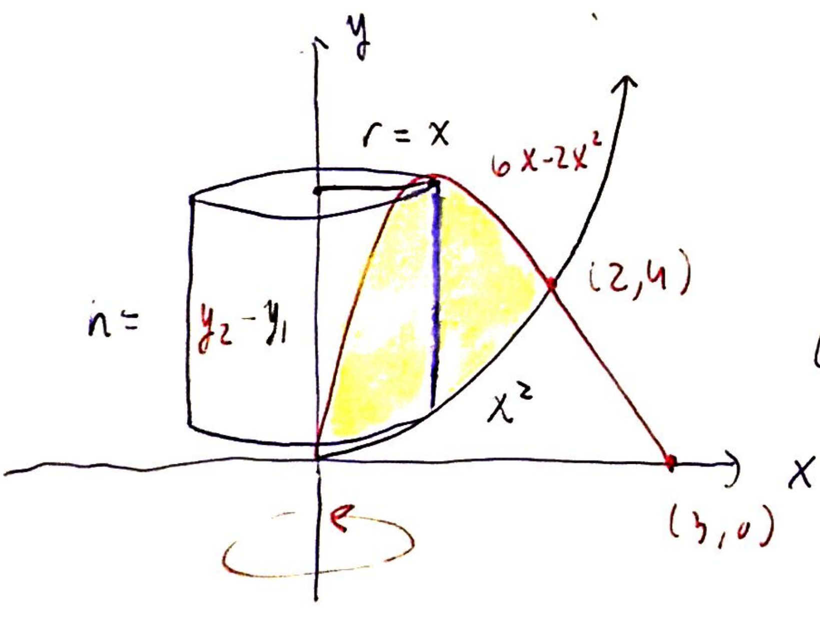
Ejercicio 2: Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región entre $y_1 = x^2$ & $y_2 = 6x - 2x^2$ alrededor del eje-y.



$y_2 = 0 \quad 2x(3-x) = 0 \Rightarrow x = 0, 3.$

$y_1 = y_2 \quad x^2 = 6x - 2x^2.$

$3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2.$



Altura. $\quad h = y_2 - y_1$

$h = 6x - 3x^2.$

Radio $\quad r = x$

Límites. $\quad 0 \leq x \leq 2.$

$V = 2\pi \int_0^2 h r \, dx.$

$$V = 2\pi \int_0^2 6x^2 - 3x^3 \, dx = 2\pi \left(2x^3 - \frac{3}{4} x^4 \Big]_0^2 \right)$$

$$V = 2\pi \left(16 - 3 \cdot 4 \right) = 2\pi(4) = 8\pi$$