Teorema Fundamental del Cálculo Generalizado

Evalúe la siguiente expresión, integrando y luego derivando:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x^3}^{x^5} e^y\, dy\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{x^5} - e^{x^3}\right) = \underbrace{5x^4}_{b'(x)}\underbrace{e^{x^5}}_{e^{b(x)}} - \underbrace{3x^2}_{a'(x)}\underbrace{e^{x^3}}_{e^{a(x)}}$$

En este problema ambos límites de integración dependen de x y en la respuesta final se utilizaron dos reglas de la cadena por separado.

El último ejemplo nos indica como el uso del TFC y la regla de la cadena se puede extender para funciones donde los dos límites de integración dependen de x.

> Use regla de la cadena para el límite superior $b(x)$ y para el límite inferior $a(x)$
>
> $$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} F(t)\, dt\right) = F(\ b(x)\ )\ b'(x) - F(\ a(x)\ )\ a'(x)$$

Ejercicio 3: Evalúe las siguientes expresiones

a. $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{\sin x}^{e^x} \sqrt[4]{10+4t^4}\ dt\right) = \sqrt[4]{10+4e^{4x}}\, e^x - \sqrt[4]{10+4\sin^4(x)}\, \cos x$

b. $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{1/x}^{\ln x} \cosh\theta^3\ d\theta\right) = \cosh(\ln^3 x)\dfrac{1}{x} + \cosh(x^{-3})\dfrac{1}{x^2}$

Ejercicio 4: Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ *en* $x = 0$.

a. $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}\ dt.$

Coordenada-y:	$f(0) = \displaystyle\int_0^0 e^{-t^2/2}\ dt = 0$
Derivada:	$f'(x) = e^{-x^2/2}$
Pendiente:	$f'(0) = e^{-0/2} = 1$
Recta Tangente:	$y = f(0) + f'(0)(x-0) = x$

b. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \cosh^2 t\ dt.$

Coordenada-y:	$f(0) = \displaystyle\int_0^0 \cosh^2 t\ dt = 0$
Derivada:	$f'(x) = \cosh^2 x$
Pendiente:	$f'(0) = (\cosh 0)^2 = 1$
Recta Tangente:	$y = f(0) + f'(0)(x-0) = x$