

Cálculo Multivariable - Clases y apuntes de clase

David Gabriel Corzo Mcmath

2020-01-06

Índice general

0.1.	12.1 Sistema tridimensional de coordenadas	4
1.	Clase - 2020-01-23	7
1.1.	12.4 Producto Cruz	8
1.2.	Producto Cruz	8
2.	Clase - 2020-01-28	11
2.1.	12.5 Rectas y planos	12
2.1.1.	Ejercicio 3: Encuentre las ecs. simétricas de la recta que pasa por los puntos dados. Encuentre en qué punto la recta interseca al plano xz. pg.41	12
2.2.	Rectas paralelas	13
2.2.1.	Ejercicio 4: Determine si los siguientes pares de rectas son paralelas, oblicuas o se intersecan.	13
2.3.	La ecuación de un plano	14
2.3.1.	Derivación de la e. plano	14
2.3.2.	Ejercicio 1: pg45 Encuentre la ec. del plano que pasa por los 3 puntos dados.	15
2.4.	Rectas paralelas v_1 y v_2 son paralelos	16
3.	Clase - 2020-01-30	17
3.1.	Resolución de corto	18
3.2.	Rectas y planos	18
3.2.1.	Ejercicios	18
4.	Clase - 2020-02-04	23
4.1.	13.1 Funciones vectoriales y curvas en el espacio	24
4.1.1.	Ejercicios	24
4.2.	Limites y continuidad	25
4.2.1.	Ejercicios	25
4.3.	Curvas en el espacio	26
4.3.1.	Espirales	26
5.	Clase - 2020-02-06	29
5.1.	13.2 Cálculo con funciones vectoriales, pg.55	30
5.1.1.	Derivadas	30
5.1.2.	Integrales	30
5.2.	Ejercicios	30
5.3.	Recordatorios & rectas tangentes de funciones vectoriales	31
5.4.	Ejercicios	31
6.	Clase - 2020-02-11	33
6.1.	13.2 Cálculo de funciones vectoriales	34
6.2.	Ejercicios de integración	34
6.3.	Movimiento en el espacio	35
6.3.1.	Ejercicios	35
6.4.	13.3 Longitud de arco	37

6.5. Ejercicios	38
7. Clase - 2020-02-11	39
7.1. Resolución de corto	40
7.2. 14.1 Funciones de varias variables	40
7.3. Ejercicios	41
7.3.1. Gráfica de $z = f(x, y)$	42
7.4. Curva de nivel o traza horizontal	42
8. Clase - 2020-02-20	43
8.1. 14.3 Derivadas parciales	44
8.1.1. Ejercicios	44
8.2. Derivadas parciales par funciones de 2 o más variables	45
8.2.1. Ejercicio	45
8.3. Derivadas parciales de orden superior (pág. 100)	46
8.3.1. Ejercicios	46
9. Clase - 2020-02-27	49
9.1. Derivadas parciales, rectas tangentes y planos tangentes	50
9.1.1. Interpretación de la derivada parcial	50
9.1.2. Ejercicios	50
9.2. Aproximaciones lineales	51
9.2.1. Ejercicios	51
9.3. 12.4 Derivadas implícitas y 12.5 Regla de la cadena	52
9.3.1. Derivación parcial implícita abreviada	52
9.3.2. Ejercicios	53
10. Clase - 2020-03-10	55
10.1. Parcial 2	56
10.2. 14.7 Máximos y mínimos	56
10.2.1. En funciones de una variable	56
10.2.2. En funciones de dos variables	57
10.2.3. Ejercicios máximos y mínimos	57

0.1. 12.1 Sistema tridimensional de coordenadas

- Para localizar un punto en un plano, se necesitan dos números.
- Los ejes de coordenadas son perpendiculares entre sí.
- En el sistema tridimensional de coordenadas rectangulares, cada punto en el espacio es una terna ordenada.

Espacio: $\mathbb{R}^3 \{ (x, y, z) \}$ Talque $x, y, z \in \mathbb{R}$.

&

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

- Sistema 2-D vs. 3-D:
- Las líneas punteadas se usan para simbolizar las partes debajo, izquierda y detrás.

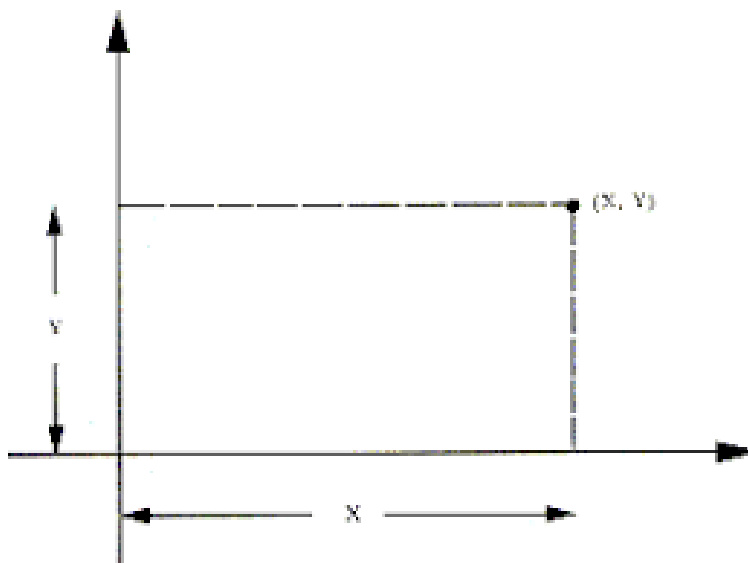


Figura 1:

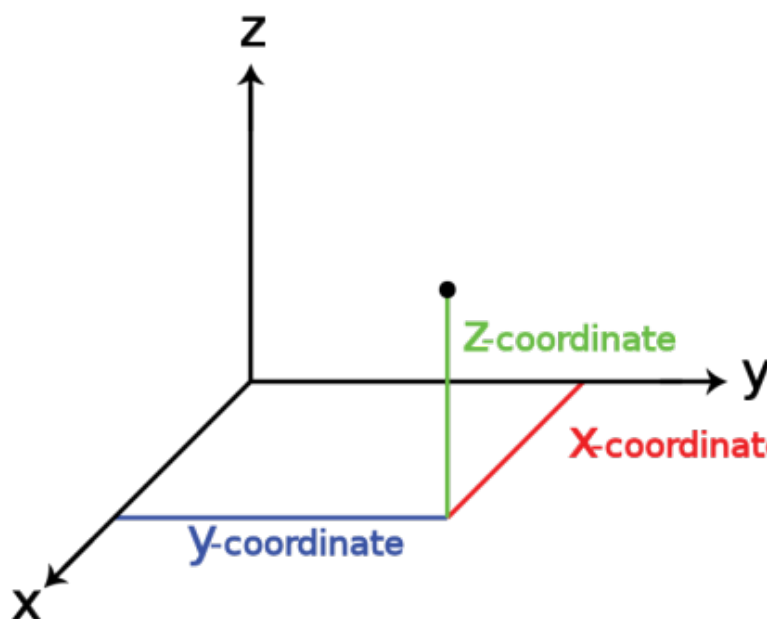


Figura 2:

Capítulo 1

Clase - 2020-01-23

1.1. 12.4 Producto Cruz

- **Definición de “Determinantes”:** Matriz (arreglo rectangular de números).
- **Definición de “Cuadrada”:** Mismo número de filas y columnas.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Determinante de orden 2. Matriz de 2x2

- pie:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-1)(4) = 6 + 4 = 10$$

- Determinante de orden 3: Matriz 3x3 suma de tres determinantes de orden 2:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

3 matrices de 2x2.

- p.e.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$2(6 - 0) - 0 + 2(-1 - 3) = 12 - 8 = 4$$

1.2. Producto Cruz

- Dados dos vectores :

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

$$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cómo se encuentra un vector \vec{c} que es perpendicular a \vec{a} y a \vec{b} ?

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

- Resuelva para c_1, c_2, c_3 :

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0$$

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 = 0$$

- El producto cruz $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = 0$ es un vector perpendicular a ambos vectores \vec{a} & \vec{b} .

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \hat{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \hat{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

- Observaciones:

- El producto cruz es un vector, mientras que el producto es un número o escalar.
- El producto cruz **no** es conmutativo $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$.

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(b_2 a_3 - a_2 b_3) + \hat{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \hat{k}(a_2 b_1 - a_1 b_2)$$

- Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{a} \times \vec{b} = 15\hat{i} - 10\hat{j} - 3\hat{k}$$

- Verifique $\vec{a} \times \vec{b}$ es ortogonal a \vec{a} & a \vec{b} .

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 2, 3, 0 \rangle = 30 - 30 + 0 = 0 \therefore \text{son ortogonales}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 1, 0, 5 \rangle = 15 + 0 - 15 = 0 \therefore \text{son ortogonales}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp a_1 b$$

- Aclaración: en dos dimensiones $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ No es posible evaluarlo.

- Existen en tres dimensiones pero si se intenta evaluar en cuatro dimensiones la siguiente matriz no es posible:

$$\begin{array}{l} \text{En 3-D: } \exists \text{ En 4-D: } \nexists \\ \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{l} \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} \end{array}$$

No es posible evaluarlo.

■ Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ = 15\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}$$

Entonces... en general:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

Capítulo 2

Clase - 2020-01-28

2.1. 12.5 Rectas y planos

- Ecuación de una recta
- Vector posición $\vec{r}_0 = \langle x_0, y, z_0 \rangle$
- Vector dirección $\vec{v}_0 = \langle a, b, c \rangle$
- Ecuación vectorial: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$ donde t es el parámetro.
- Ecuaciones paramétricas:

$$x = x_0 + at$$

$$y = y_0 + bt$$

$$z = z_0 + ct$$

- Resuelva para t en las tres ecuaciones:

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Estas son las ecuaciones simétricas de la recta donde $a, b, c \neq 0$.

- Vector dirección $\vec{v} = \langle a, 0, c \rangle$ las ecuaciones en la recta cambian:

$$\underbrace{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}}_{\text{Vectorial}}$$

$$x = x_0 + at$$

$$y = y_0$$

$$z = z_0 + ct$$

Entonces queda así:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\underbrace{y = y_0}_{\text{Simétrica}}$$

2.1.1. Ejercicio 3: Encuentre las ecs. simétricas de la recta que pasa por los puntos dados. Encuentre en qué punto la recta interseca al plano xz.
pg.41

- P(2,8,-2) & Q(2,6,4)

$$\text{Vector posición} = \overrightarrow{OP} = R_0 = \langle 2, 6, 7 \rangle$$

$$\text{Vector dirección } \overrightarrow{PQ} = \vec{V} = \langle 0, -2, 6 \rangle$$

$$\text{Ec. vectorial} = \vec{r} = \langle 2, 8, -2 \rangle + t\langle 0, -2, 6 \rangle$$

$$\text{Ecs. simétricas} = x = a, \frac{y - 8}{-2} = \frac{z + 2}{6}$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cual es la intersección con el plano xz?

$$\begin{aligned}\text{Use, } y=0x=2, \frac{-8}{-2} &= \frac{z+2}{6} \\ &= 6 \cdot 4 = z+2 \implies z=22\end{aligned}$$

- La intersección con el plano xz es el punto (1, 0, 22):

$$\begin{aligned}\vec{r}_0 &= \langle 4, 6, 10 \rangle \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ} &= \langle 2, 0, 0 \rangle \\ \text{Vectorial: } \vec{r} &= \langle 4, 6, 10 \rangle + t\langle 2, 0, 0 \rangle \\ \text{Paramétricas: } x &= 4 + 2t, y = 6, z = 10 \\ \text{Simétricas: } t &= \frac{x-4}{2}, y = 6, z = 10\end{aligned}$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cual es el punto de intersección con el plano xz?

$$\text{Use: } y=0$$

Explicación: por la recta $y = 6$ siempre será 6, nunca podrá ser 0, no puede intersecar con el plano xz, **No hay.**

2.2. Rectas paralelas

Dos rectas $\vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + t\vec{v}$ & $\vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + t\vec{v}_2$ son paralelas si y solo si sus vectores de dirección \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son paralelas.

Figura 2.1:

Entonces en el espacio tenemos 3 tipos de rectas:

1. Rectas paralelas
2. Rectas intersecan en un punto
3. Rectas Ubicuas (no paralelas & no intersecan)

2.2.1. Ejercicio 4: Determine si los siguientes pares de rectas son paralelas, oblicuas o se intersecan.

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{8} = \frac{y-3}{24} = \frac{z-2}{16}, \frac{x-10}{-2} = \frac{y+15}{-6} = \frac{z+24}{-4} \\ \vec{v}_1 = \langle 8, 24, 16 \rangle, \vec{v}_2 = \langle -2, -6, -4 \rangle \\ \text{Entonces...} , \left\langle \frac{8}{-2}, \frac{24}{-6}, \frac{16}{-4} \right\rangle \\ \langle -4, -4, -4 \rangle, \therefore \text{ Son paralelas}\end{aligned}$$

El vector dirección está en el denominador.

■

$$L_1 : x = 3 - 4t, y = 6 - 2t, z = 2 + 0t, t \in \mathbb{R}$$

$$L_2 : x = 3 + 8s, y = -2s, z = 8 + 2s, s \in \mathbb{R}$$

Utilice una variable parámetro para cada recta

$$v_1 = \langle -4, -2, 0 \rangle, v_2 = \langle 8, -2, 2 \rangle \text{ No son paralelas}$$

Analice si las rectas se intersecan

$$x = x \rightarrow 5 - 4t = 3 + 8s$$

$$y = y \rightarrow 6 - 2t = -2s$$

$$z = z \rightarrow 2 = 8 + 2s \rightarrow s = -3$$

$$5 - 4 = -22 \rightarrow 4t = -27 \rightarrow -4t = -27 \Rightarrow \frac{27}{4}$$

$$6 - 2t = 6 \rightarrow 2t = 0 \rightarrow t = 0$$

\therefore Como no hay una t única (no es posible $0 \neq \frac{27}{4}$), las dos rectas no se intersecan.

L_1 & L_2 Son oblicuas

Eliminación Gaussiana

$$\begin{array}{rcl} 4t + 8s = 2 & \left| \begin{array}{ccc} 4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -6 \end{array} \right| & 0, 0, \text{ número} \implies \text{No hay solución} \\ 2t + 2s = 6 & & \\ 0t + 2s = -6 & & \end{array}$$

2.3. La ecuación de un plano

Previamente en 12.1 $ax + by + cz = 0$. Para encontrar la ec. de un plano se necesita:

Figura 2.2:

1. Un punto sobre el plano P : $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP}$
2. Un vector normal u ortogonal al plano: $\hat{n}_0 \langle a, b, c \rangle$

2.3.1. Derivación de la e. plano

$P(x_0, y_0, z_0), Q(x_1, y_1, z_1)$ Son dos puntos sobre el plano

$$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OQ} = \langle x, y, z \rangle$$

El vector $\vec{RP} = \vec{r} - \vec{r}_0$ está sobre el plano, por lo que tiene que ser ortogonal a \hat{n} .

$$\hat{n} \perp \vec{r} - \vec{r}_0 \rightarrow \underbrace{\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}_{\text{Ec. vectorial de un plano}}$$

Se puede reescribir como:

$$\underbrace{\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x + x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle + c(z - z_0) = 0}_{\text{Ecuación escalar de un plano}}$$

$$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_0$$

Para encontrar la ec. de un plano se necesita 3 puntos P,Q,R: **hay infinitas respuestas equivalentes**
 $\hat{n} = \vec{r} \times \vec{r}$

$$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$$

$$\hat{n} = \underbrace{\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}}_{\text{Tienen que empezar en el mismo punto}}$$

Hat infinitas respuestas:

$$\hat{n} = \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ}$$

2.3.2. Ejercicio 1: pg45 Encuentre la ec. del plano que pasa por los 3 puntos dados.

1. $P(3, -1, 3), Q(8, 2, 4), R(1, 2, 5)$

$$\text{Ecuación del plano : } \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\text{Ecuación de la recta : } \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

$$\vec{r}_0 = \langle 8, 2, 4 \rangle$$

Encuentre dos vectores que están sobre el plano y que comiencen en el mismo punto.

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle 5, 3, 1 \rangle, \vec{v} = \overrightarrow{PR} = \langle -2, 3, 2 \rangle$$

ii \hat{n} es ortogonal a ambos vectores !!

$$\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 12\hat{j} + 21\hat{k}$$

$$\text{Ec. Plano, } \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\text{Ec. Vectorial, } \langle 3, -12, 21 \rangle \cdot \langle x - 8, y - 2, z - 4 \rangle = 0$$

$$\text{Escalar, } 3(x - 8) -$$

2. $P(0,0,0), Q(1,0,2), \text{ y } R(0,2,3)$

Vector posición: $\vec{r}_0 = \langle 0, 0, 0 \rangle$

dos vectores sobre el plano: $\vec{PQ} = \langle 1, 0, 2 \rangle$
 $\vec{PR} = \langle 0, 2, 3 \rangle$

$$\begin{aligned} \text{Vector normal: } \hat{n} &= \vec{PQ} \times \vec{PR} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

3. Ecuación del plano:

$$-4x - 3y + 2z = 0$$

2.4. Rectas paralelas v_1 y v_2 son paralelos

Dos planos $\hat{n}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$ y $\hat{n}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = 0$ son paralelos sí y sólo si \hat{n}_1 y \hat{n}_2 son paralelos. En caso que no sean paralelos, se puede encontrar el ángulo de intersección entre dos planos.

Capítulo 3

Clase - 2020-01-30

3.1. Resolución de corto

- Determine el área del triángulo entre los puntos P(), Q(), R():

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \overrightarrow{PQ} = \langle 4, 3, -2 \rangle \\ \vec{b} &= \overrightarrow{PR} = \langle 5, 5, 1 \rangle \\ \text{Área} &= \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| \\ \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} &= 13\hat{i} - 14\hat{j} + 5\hat{k} \\ \text{Área} &= \frac{1}{2} \sqrt{13^2 + 14^2 + 5^2}\end{aligned}$$

3.2. Rectas y planos

- Ecs. Rectas: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

$$\text{si } a \neq b \neq c \neq 0 \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

- Paramétricas:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct\end{aligned}$$

- Ecuación de plano:

$$\begin{aligned}\hat{n} &= \vec{r} - \vec{r}_0 \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\ \hat{n} &= \vec{a} \times \vec{b}\end{aligned}$$

3.2.1. Ejercicios

1. Considere los planos $x + y = 0$ & $x + 2y + z = 1$.

a) Determine si los planos son paralelos o no lo son encuentre el ángulo entre ellos:

$$\hat{n}_1 = \langle 1, 1, 0 \rangle$$

$$\hat{n}_2 = \langle 1, 2, 1 \rangle$$

\therefore Los dos planos no son paralelos

- El \hat{n}_1 & \hat{n}_2 no son necesariamente ortogonales.

$$\cos \theta = \frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1| |\hat{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

2. Encuentre la ec. de la recta que interseca a ambos planos $x + y = 0$ & $x + 2y + z = 1$:

$$r = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

Dos puntos sobre la recta

Como la recta esta en ambos planos, se debe resolver el sig. sistema de ecuaciones

$$x + y = 0 \implies x = -y$$

$$x + 2y + z = 1 \implies y = z - 1$$

z tiene cualquier valor, ahora encontrar escogiendo cualquier punto sobre la recta, en este caso 0

$$\text{Primer punto} \quad z = 0$$

$$y = 1$$

$$x = -1$$

$$\therefore \langle -1, 1, 0 \rangle$$

$$\text{Segundo punto} \quad z = 1$$

$$y = 0$$

$$x = 0$$

$$\therefore \langle 0, 0, 1 \rangle$$

3. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por P(-1,1,0) y $\underbrace{Q(0,0,1)}_{r_0}$:

$$\vec{r}_0 = \langle 0, 0, 1 \rangle \langle -1, 1, 0 \rangle$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{QP} \langle -1, 1, -1 \rangle$$

Ecuaciones paramétricas de la recta:

$$x = 0 - t \quad y = 0 + t \quad z = 1 - t$$

4. Solución alterna:

$$\begin{aligned}
 x &= -y & y &= 1 - z & \text{Más incógnitas que ecuaciones.} \\
 x, y &\text{ ó } z & \text{ pueden tener cualquier valor} & & z = t \\
 x &= -1 + t \\
 y &= 1 - t & \therefore v_2 = \langle 1, -1, 1 \rangle & & \vec{r}_0 = \langle -1, 1 - 0 \rangle \\
 t &= t
 \end{aligned}$$

5. Solución geométrica:

- Encuentre un punto en ambos planos (0,0,1).
- La recta está en el plano I, entonces la recta es perpendicular al vector normal del plano I.
- Está en el plano z, entonces también es perpendicular al segundo vector normal.
- \therefore la recta es perpendicular a ambos \hat{n}_1 & \hat{n}_2

$$\vec{v} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\text{Ecuación de la recta: } r = \langle 0, 0, 1 \rangle + t \langle 1, -1, 0 \rangle$$

6. Ejercicio 3: Encuentre el punto en el que la línea recta $x = 1 + 2t$, $y = 4t$, $z = 5t$ interseca al plano. $x - y + 2z = 17$.

$$x = 1 + 2t$$

$$y = 4t$$

$$z = 5t$$

Plano

$$x - y + 2z = 17 \quad 1 + 2t - 4t + 10t = 17$$

$$8t = 16 \implies \therefore t = 2$$

El punto de intersección es (5,8,10).

7. Ejercicio 4: Encuentre una ec. del plano que contiene la recta $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 4 - 3t$ y es paralela al plano $5x + 2y + z = 1$.

- Cualquier punto sobre la recta que también esté sobre el plano, $t = 0$.

$$\text{Evaluemos en } t=0 \quad x = 1, y = 2, z = 4$$

$$\vec{r}_0 = \langle 1, 2, 4 \rangle$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cómo se encuentra \hat{n} ?
- El vector de dirección de la recta $v = \langle 1, -1, -3 \rangle$ es paralelo al plano.

- Como es paralelo al segundo plano, entonces tiene que ser perpendicular $\hat{n}_2 = \langle 5, 2, 1 \rangle$
- Lo que ocurre entonces es:

$$\vec{r}_0 = \langle 1, 2, 4 \rangle \quad \hat{n} = \langle 5, 2, 1 \rangle$$

$$\text{Ec. Plano: } \implies 5(x-1) + 2(y-2) + 1(z-4) = 0$$

8. Ejercicio 5: Encuentre los números directores para la recta de intersección entre los planos $x + y + z = 1$ & $x + 2y + 3z = 1$.

- **Definición de “números directores”:** a, b, c del vector de dirección $\langle a, b, c \rangle$
- La recta es ortogonal a ambos vectores normales:

$$\hat{n}_1 = \langle 1, 1, 1 \rangle \quad \hat{n}_2 = \langle 1, 2, 3 \rangle \quad \text{de ambos planos}$$

$$\vec{v} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\text{Los números directores: } a = 1, b = 2, c = 1$$

9. Ejercicio 6: Encuentre las ecs. aparmétricas de la recta que pasa por el punto $(0,1,2)$, que es paralelo al plano $x + y + z = 2$ y es perpendicular a la recta $r = \langle -2t, 0, 3t \rangle$.

$$L_1 r = \vec{r}_0 + t\vec{v} \quad r_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle$$

- Aclaraciones: L_1 es la incógnita que tenemos que encontrar.
- **Nos preguntamos:** ¿Cómo se encuentra r ?
- Plano I: $\hat{n} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ es perpendicular al plano, es paralelo a L_1 .
- Recta II: $\hat{v}_2 = \langle -2, 0, 3 \rangle$ es perpendicular a L_1
- La recta es perpendicular a \hat{n} y a \vec{v}_2

$$v = \hat{n} \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$r_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle$$

$$v = \hat{v}_2 \times \hat{n} \quad \text{Ecuaciones paramétricas:}$$

$$x = 0 - 3t$$

$$y = 1 - 5t$$

$$z = 2 + 2t$$

Capítulo 4

Clase - 2020-02-04

4.1. 13.1 Funciones vectoriales y curvas en el espacio

- Una función vectorial $\vec{r}: R \Rightarrow V_3$:

$$\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), z(t) \rangle$$

La variable t es un parámetro.

- Dominio: Números reales, Rango: vector 3D:

$$\vec{r}: \mathbb{R} \Rightarrow V_3 \quad \vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$$

$$t \text{ es un parámetro} \quad \vec{r} = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$$

- Ejemplo de una función vectorial:

$$\vec{r} = \langle a, b, c \rangle + t \langle d, e, f \rangle$$

$$\vec{r} = \langle a + td, b + et, c + tf \rangle$$

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

- Ecs. Paramétricas de una función vectorial:

- Dominio de una función vectorial: encuentre el dominio de cada función componente. El dominio de \vec{r} es la intersección de los dominios de cada función componente.

4.1.1. Ejercicios

- Encuentre el dominio:

$$r(t) = \langle \sqrt{t^2 - 9}, e^{5 \ln(t)}, \ln(t + 5) \rangle$$

Evadir raíces negativas, y $\ln(0)$

$$\sqrt{t^2 - 9} \Rightarrow \text{Definida } t^2 \geq 9$$

$$e^{\sin(t)} \text{ siempre definida}$$

$$\ln(t + 5) \text{ Definida cuando } t + 5 > 0 \quad (-5, \infty)$$

$$\therefore \text{ El dominio es de } (-5, \infty) \cup (-5, -3) \cup (-3, 3) \cup [3, \infty)$$

- Recordar: $[a, b]$ el número si es parte del dominio a, b son partes del dominio. (a, b) los puntos a, b no son parte del dominio.

2.

$$\vec{s}(t) = \left\langle \sin^3(t^2), \cosh\left(\frac{t}{t^2 + 1}\right), \frac{1}{e^t + 4} \right\rangle$$

$$\sin^3(t^2), ID_{f(t)} = IR$$

$$\cosh\left(\frac{t}{t^2 + 1}\right), ID_{g(t)} = IR$$

$$\frac{1}{e^t + 4}, ID_{h(t)} = IR$$

$$\therefore \text{ Dominio de } \vec{s}(t) = (-\infty, \infty)$$

$$e^t + 4 \neq 0 \Rightarrow e^t = -4 \Rightarrow t = \underbrace{\ln(-4)}_{\text{indefinido}}$$

4.2. Límites y continuidad

■

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \left\langle \lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \right\rangle$$

- Evalúe el límite de cada función componente.
- Si no existe por lo menos un límite de una función componente, entonces $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t)$ no existe.
- $f(t)$ está definida en $t=a$

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$$

- Si se indefine y tiene forma de $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ usar L'Hôpital.

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} \underbrace{=}_{\frac{0}{0}} \lim_{t \rightarrow a} \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad \text{L'Hopital}$$

- Continua en $t = a$ si $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$
- Evite asíntotas verticales, saltos y agujeros. Ejemplo:

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{\sin(x)}{x} \underbrace{=}_{\text{LH}} \lim_{t \rightarrow a} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

4.2.1. Ejercicios

- Sea $\vec{r}(t) = \left\langle \frac{\tan(\pi t)}{t}, e^{t-2}, \frac{\ln(t-1)}{t^2-1} \right\rangle$.
- Analice si la función $\vec{r}(t)$ es continua en $t = 2$.

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \left\langle \frac{\tan 2\pi}{2}, e^0, \frac{\ln(1)}{3} \right\rangle \\ \lim_{t \rightarrow 2} \underbrace{\frac{\tan \pi t}{t}}_{\frac{0}{2}} &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow 2} e^{t-2} &= 1 \\ \lim_{t \rightarrow 2} \frac{\ln(t-1)}{t^2-1} &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{r} \text{ si es continua en } t=2 \quad \lim_{t \rightarrow 1} \vec{r}(t) = \vec{r}(2)$$

- Encuentre $\lim_{t \rightarrow 1} \vec{r}(t)$ analice el límite de cada función componente por separado.

$$\begin{aligned} f &: \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\tan 2\pi}{2} = \frac{0}{1} \\ g &: \lim_{t \rightarrow 1} e^{t-2} = e^{-1} \end{aligned}$$

$$h : \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(t-1)}{t^2-1} = \text{No existe, por } \ln(0) \text{ estar indefinido.}$$

- Analice si $\vec{r}(t)$ es continua en $t=1$.

$$\lim_{t \rightarrow 1} \vec{r}(t) = \vec{r}(1)$$

No es continua en $t=1$, $\vec{r}(1)$ está indefinida.

- Agujero $\vec{s}(t) = \left\langle \frac{\tan \pi t}{t-1}, e^{t-2}, \frac{\ln(2t-1)}{t^2-1} \right\rangle$

No es continua en $t=1$, pero su límite existe.

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\tan \pi t}{t-1} \underbrace{=}_{LH} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\pi \sec^2 \pi t}{1} = \frac{\pi}{(\cos \pi)^2} = \pi$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} e^{t-2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(2t-1)}{t^2-1} \underbrace{=}_{\frac{0}{0}} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{2t-1}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2}{2t(2t-1)} = \frac{1}{1(2-1)} = 1$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1} \left\langle \pi, \frac{1}{e}, 1 \right\rangle \quad \text{es un agujero } \vec{s}(1) \text{ está indefinido}$$

4.3. Curvas en el espacio

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)$$

$$z = h(t)$$

Figura 4.1: Curvas paramétricas en el espacio

4.3.1. Espirales

- Grafique la curva $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = \underbrace{2\hat{i} \sin(t)}_x + \underbrace{2\hat{j} \cos(t)}_y + \underbrace{\hat{k} \frac{t}{\pi}}_z$$

t	x	y	z
0	0	2	0,5
$\frac{\pi}{2}$	2	0	0,5
π	0	-2	1
$\frac{3\pi}{2}$	2	0	1,5
2π	0	2	2

Figura 4.2: Curva paramétrica

- Grafique:

$$\vec{r}(t) = \langle \sin \pi t, t, \cos \pi t \rangle$$

Graficar la circunferencia $x^2 + z^2 = 1, y = 0$

$\vec{r}(0) = \langle 0, 0, 1 \rangle$ El vector que nos servirá para delimitar la gráfica del espiral

Por ejemplo: $\vec{s}(t) = \langle \sin t, t^2, \cos t \rangle$

Capítulo 5

Clase - 2020-02-06

5.1. 13.2 Cálculo con funciones vectoriales, pg.55

- Derivadas:

$$\vec{r}'(t) \quad \text{Respecto a } t$$

- Integrales:

$$\int \vec{r}'(t) dt \quad \text{Respecto a } t$$

5.1.1. Derivadas

-

$$\vec{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$$

- Como la función $\vec{r}(t)$ está definida por tres funciones componentes se puede hacer:

$$\vec{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\langle \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}_{f'(t)}, \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}}_{g'(t)}, \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(t+h) - h(t)}{h}}_{h'(t)} \right\rangle$$

- Derivada entonces es :

$$\vec{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

5.1.2. Integrales

- Integral:

$$\int \vec{r}(t) dt = \int (f\hat{i} + g\hat{j} + h\hat{k}) dt$$

$$\hat{i} \int f dt + \hat{j} \int g dt + \hat{k} \int h dt$$

Integrar la función componente.

5.2. Ejercicios

- Encuentre la 1era y segunda derivada de las siguientes funciones:

$$\vec{r}(t) = \langle \sin(4t), t^2, \ln(\sin(t)) \rangle$$

$$\vec{r}'(t) = \left\langle 4 \cos(4t), 2t, \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \right\rangle$$

$$\vec{r}'(t) = \langle 4 \cos(4t), 2t, \cot(t) \rangle$$

$$\vec{r}''(t) = \langle f''(t), g''(t), h''(t) \rangle$$

$$\therefore \vec{r}''(t) = \langle -16 \sin(4t), 2, -\csc^2(t) \rangle$$

2. Derive: $\vec{s}(t) = \hat{i} \tan(4t) + \hat{j} \ln(4t + 1) + \hat{k}(5 - 2t)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}\vec{s}'(t) &= 4\hat{i}(\sec(4t))^2 + \hat{j}4(4t + 1)^{-1} - \hat{k}(5 - 2t)^{-\frac{1}{2}} \\ \vec{s}''(t) &= 8\hat{i} \times \sec(4t) \times \sec(4t) \times \tan(4t) \times 4 - 16\hat{j}(4t - 1)^{-2} - \frac{\hat{k}}{2}(5 - 2t)^{-\frac{3}{2}} \times (-2) \\ \vec{s}'''(t) &= 32\hat{i} \times \sec^2(4t) \times \tan(4t) - 16\hat{j}(4t - 1)^{-2} - \frac{\hat{k}}{2}(5 - 2t)^{-\frac{3}{2}} \times (-2)\end{aligned}$$

5.3. Recordatorios & rectas tangentes de funciones vectoriales

- **Recordar lo siguiente:** $f'(a)$ es igual a la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$.
- **Recordar lo siguiente:** La recta tangente.

$$L_1 : \quad y = f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{Ec. Recta Tangente}$$

- Con una función vectorial:

$$\vec{r} = \langle f, g, h \rangle, \quad x = f(t), y = g(t), z = h(t)$$

Hay ecuaciones paramétricas para cada variable:

$$\vec{r}'(a) = \langle f'(a), g'(a), h'(a) \rangle$$

Vector de pendientes de rectas tangentes a la curva $\vec{r}(t)$.

- La derivada de una función vectorial se le da el nombre de “**vector tangente**” $\vec{r}(t) : \vec{r}'(a)$.
- Recta tangente: es ahora una función vectorial.

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(a) + \vec{r}'(a)t$$

- Ecs. Paramétricas:

$$\begin{aligned}x &= f(a) + f'(a)t \\ y &= g(a) + g'(a)t \\ z &= h(a) + h'(a)t\end{aligned}$$

- Vector tangente: $\vec{r}'(a)$ en $t = a$
- Vector tangente unitario: $\frac{\vec{r}'(a)}{|\vec{r}'(a)|} = \vec{T}(a)$

5.4. Ejercicios

- Encuentre las ecs. paramétricas de la recta tangente a la curva : $s(t) = \langle 2 \cos(t), 2 \sin(t), 4 \cos(2t) \rangle$ en el punto $(\sqrt{3}, 1, 2)$:

$$\text{Recta tangente: } \vec{r}_T(t) = \vec{r}(a) + t\vec{r}'(a)$$

$$\vec{r}_T(a) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle$$

$$\text{Derivada: } \vec{r}'(t) = \langle -2\sin(t), 2\cos(t), -8\sin(2t) \rangle$$

$$\text{Nos preguntamos: ¿Cómo encuentro "a" ? igualamos } r(t) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle$$

$$2\cos(t) = \sqrt{3} \implies \cos(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies t = \frac{\pi}{6}$$

$$2\sin(t) = 1 \implies 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$4\cos(2t) = 2 \implies 4\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\text{Vector tangente: } \vec{r}'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left\langle -2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right), 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), -8\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right\rangle$$

$$\vec{r}_T(t) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle + t \langle -1, \sqrt{3}, -4\sqrt{3} \rangle$$

\therefore

$$x = \sqrt{3} - 1t$$

$$y = 1 + \sqrt{3}t$$

$$z = 2 - 4\sqrt{3}t$$

Capítulo 6

Clase - 2020-02-11

6.1. 13.2 Cálculo de funciones vectoriales

- Derivadas:

$$\vec{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

- Vector Tangente:

$$\vec{r}'(t)$$

- Tangente unitario:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

- Integrales indefinidas:

$$\int \langle f, g, h \rangle dt = \langle F + C_1, G + C_2, H + C_3 \rangle$$

$$\int \vec{r}(t) dt = \vec{R}(t) + \vec{C}$$

\vec{R} vector de Antiderivadas

\vec{C} Vector de constantes

- Integrales definidas:

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \hat{i} \int_a^b f(t) dt + \hat{j} \int_a^b g(t) dt + \hat{k} \int_a^b h(t) dt$$

6.2. Ejercicios de integración

1. $\int_0^1 \left[\frac{4}{1+t^2} \hat{i} + \sec^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) \right] dt:$

$$4\hat{i} \times \tan^{-1}(t) \Big|_0^1 + \hat{k} \times \tan\left(\frac{\pi t}{4}\right) \Big|_0^1$$

$$I_i = 4\hat{i} \frac{\pi}{4} + \hat{k} \frac{4}{\pi} = \pi \hat{i} + \hat{k} \frac{4}{\pi} = \left\langle \pi, 0, \frac{4}{\pi} \right\rangle$$

2. $\int \left\langle te^{t^2}, te^t, \frac{q}{\sqrt{1-t^2}} \right\rangle dt :$

$$x : \int e^{t^2} t dt = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^{t^2} + C_1$$

$$\begin{aligned} u &= t^2 \\ du &= 2t dt \end{aligned}$$

$$y : \int t e^t dt = t e^t - \int t e^t - e^t + C_2$$

$$\begin{aligned} u = t \quad dv = e^t dt : \quad \int \frac{1}{1-t^2} dt &= \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta = \int d\theta = \underbrace{\theta + C_3}_{\sin^{-1}(t) + C_3} = \sin^{-1}(t) + C_3 \\ du = dt \quad v = e^t t : \end{aligned}$$

$$\therefore \int \left\langle t e^{t^2}, t e^t, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right\rangle dt = \frac{1}{2} e^{t^2} + C_1, t e^t - e^t + C_2, \sin^{-1}(t) + C_3$$

6.3. Movimiento en el espacio

Dado el vector posición $\vec{r}(t)$ de un objeto:

- Vector velocidad:

$$\vec{c}(t) = \vec{r}'(t)$$

- Vector aceleración:

$$\vec{a}(t) = \vec{v}(t) = \vec{r}''(t)$$

- Rapidez:

$$|\vec{v}(t)|$$

- Distancia:

$$|\vec{r}(t)|$$

Dado el vector de aceleración $\vec{a}(t)$:

- Velocidad:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t) dt + \vec{C}_1$$

- Desplazamiento o posición:

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) dt + C_2$$

6.3.1. Ejercicios

1. Encuentre la velocidad, aceleración y rapidez dada la posición del objeto:

$$\vec{r}(t) = \hat{i}t + 2\hat{j} \cosh(4t) + 3\hat{k} \sinh(3t)$$

Encontramos velocidad: $\vec{r}'(t) = \vec{v}(t) = \hat{i} + 8\hat{j} \sinh(4t) + 9\hat{k} \cosh(3t)$

Encontramos la aceleración: $\vec{r}''(a) = \vec{a}(t) + 32\hat{j} \cosh(4t) + 27\hat{k} \sinh(3t)$

Encontramos la rapidez: $|\vec{v}(t)| = \sqrt{1 + 64 \sinh^2(4t) + 81 \sinh^2(3t)}$

Encontramos la distancia: $|\vec{r}(t)| = \sqrt{t^2 + 4 \cosh^2(4t) + 9 \sinh^2(3t)}$

Tarea # 6: Integrales func. vectoriales 14.1 Funciones en varias variables.

Tarea opcional consolidado: 12,13,14.1

2. Encuentre la velocidad y posición del objeto dada $\vec{a}(t)$ y las condiciones iniciales:

$$\vec{a}(t) = 6t\hat{i} + \hat{j} \cos(t) - \hat{k} \sin(2t), \quad \vec{v}(0) = \hat{i} + \hat{k} \quad \vec{r}(0) = 2\hat{j} - \hat{k}$$

Velocidad: $\int \vec{a}(t) dt$

$$\vec{v}(t) = \left\langle 3t^2 + C_1, \sin(t) + C_2, \frac{1}{2} \cos(2t) + C_3 \right\rangle$$

Encuentro $\vec{v}(0) = \left\langle C_1, C_2, \frac{1}{2} + C_3 \right\rangle = \langle 1, 0, 1 \rangle$

Resolver para las constantes:
$$\begin{aligned} C_1 &= 1, \\ C_2 &= 0, \\ \frac{1}{2} + C_3 &= 1 \implies C_3 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Posición: $\int \vec{v}(t) dt$

$$\vec{r}(t) = \left\langle t^3 + t + d_1, -\cos(t) + d_2, \frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{t}{2} + d_3 \right\rangle$$

$$\vec{r}(0) = \left\langle \underbrace{d_1, -1 + d_2, d_3}_{d_1 = 0} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} -1 + d_2 &= 2 \implies d_2 = 3 \\ d_3 &= -1 \end{aligned}$$

Posición: $\vec{r}(t) = \left\langle t^3 + t, 3 - \cos(t), \frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{t}{2} - 1 \right\rangle$

3. $\vec{a}(t) = 8t\hat{i} + \sinh(t)\hat{j} - \hat{k}e^{\frac{t}{2}}$:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\vec{v}(0) = \vec{0}}_{\text{Está en reposo}} \quad \vec{s}(0) = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k} \\
\text{Velocidad: } & \vec{v}(t) = \left\langle 4t^2 + C_1, \cosh(t) + C_2, -2e^{\frac{t}{2}} + C_3 \right\rangle \\
& \vec{v}(0) = \left\langle \underbrace{C_1, 1 + C_2, -2 + C_3}_{\substack{C_1 = 0, \\ C_2 = -1 \\ C_3 = 2}} \right\rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle \\
& \vec{v}(t) = \left\langle 4t^2, \cosh(t) - 1, -2e^{\frac{t}{2}+2} \right\rangle \\
\text{Posición: } & \vec{r}(t) = \left\langle \frac{4}{3}t^3 + C_1, \sinh(t) - t + C_2, -4e^{\frac{t}{2}} + 2t + C_3 \right\rangle \\
& \vec{r}(0) = \langle C_1, C_2, -4 + C_3 \rangle = \underbrace{\langle 2, 1, -3 \rangle}_{\substack{C_2 = 1 \\ C_3 = -3 + 4 = 1}} \\
& \vec{r}(t) = \left\langle \frac{4}{3}t^3 + 2, \sinh(t) - t + 1, -4e^{\frac{t}{2}} + 2t + 1 \right\rangle
\end{aligned}$$

Se evalúa el vector en 0 por que se quiere saber el valor de las constantes cuando están en reposo.

Por defecto siempre evaluar en 0 para encontrar C_1, C_2 & C_3 .

6.4. 13.3 Longitud de arco

10.4 Ecs. Paramétricas de una curva en el plano de dos dimensiones era:

$$\begin{aligned}
x &= f(t) \\
y &= g(t)
\end{aligned}$$

- La longitud de arco:

$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt$$

- Función vectorial:

$$\vec{r} = \langle f, g, h \rangle = \langle x, y, z \rangle$$

- Derivada de función vectorial:

$$\vec{r}' = \langle x', y', z' \rangle$$

- Magnitud:

$$|\vec{r}'| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$$

- En general:

$$L = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$$

6.5. Ejercicios

Encuentre la longitud de las siguientes curvas:

1. $\vec{r}(t) = \langle \cos(t), \sin(t), \ln(\cos) \rangle$ en $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\vec{r}'(t)| dt$$

$$\vec{r}'(t) = \langle -\sin(t), \cos(t), \tan^2(t) \rangle$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + \tan^2(t)} = \sqrt{1 + \tan^2(t)} = \sec^2(t) = \sec^2(t)$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(t) dt = \ln |\sec(t) + \tan(t)| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln \left| \sec\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| - \ln |\sec(0) + \tan(0)|$$

$$L = \ln \left| \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 \right| - \ln |1| = \ln |\sqrt{2} + 1|$$

2. $\vec{r}(t) = \langle 12t, 8t^{\frac{3}{2}}, 3t^2 \rangle$ en $0 \leq t \leq 1$:

$$\vec{r}'(t) = \langle 12, 12t^{\frac{1}{2}}, 6t \rangle = 6 \langle 2, 2t^{\frac{1}{2}}, t \rangle$$

$$|\vec{r}'(t)| = 6\sqrt{4 + 4t + t^2} = 6\sqrt{(t+2)^2} = 6(t+2)$$

$$L = \int_0^1 (6t + 12) dt = 3t^2 + 12t \Big|_0^1 = 3 + 12 = 15$$

Capítulo 7

Clase - 2020-02-11

7.1. Resolución de corto

1. Analice la función $r = \langle 3e^{-t}, \ln(2t^2 - 1), \tan(2\pi) \rangle$ en $t = 1$:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 1} \vec{r}(t) &= \left\langle \lim_{t \rightarrow 1} 3e^{-t}, \lim_{t \rightarrow 1} \ln(2t^2 - 1), \lim_{t \rightarrow 1} \tan(2\pi) \right\rangle \\ \vec{r} &= \langle 3e^{-1}, \ln(1), \tan(2\pi) \rangle = \langle 3e^{-1}, 0, 0 \rangle \\ &\therefore r \text{ es continua en } t=1\end{aligned}$$

Si la pregunta hubiese sido en cuándo se indefine, se saca el dominio de cada función.

2. Encuentre la ec. de la recta tangente a $r(t) = \langle te^{t-1}, \frac{8}{\pi} \arctan(t), 2\ln(t) \rangle$ en $t = 1$.

$$\vec{r}(0) = \left\langle 1 \times e^0, \frac{8}{\pi} \arctan(1), 2\ln(0) \right\rangle = \langle 1, 2, 0 \rangle$$

Terminar de copiar

7.2. 14.1 Funciones de varias variables

- Cuando teníamos sólo una función de una variable no había tanta complicación, las gráficas eran curvas en el plano. Cuando empezaba y terminaba la curva en x nos daba el dominio. Había una variable independiente x y la variable dependiente y , los dominios eran intervalos, y cada x sólo podía tener un sólo valor de y .
- En funciones de 2 variables se va a describir como:

$$z = f(x, y) \quad \begin{array}{l} \text{Dos variables independientes } x, y \\ \text{Variable dependiente } z \end{array}$$

- Entonces f es una regla que asigna a cada punto (x, y) a lo sumo un valor de z .

$$f: \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{Dominio}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Rango}}$$

- Estamos pasando de una región por medio de una función z luego a tener $f(x, y)$ en la dimensión correspondiente.
- Los dominios en estas funciones se vuelven superficies.
- El dominio de una función de dos variables: un conjunto que consiste de todos los puntos o pares ordenados (x, y) para los cuales $f(x, y)$ está definida.

\mathbb{D} : En una dimensión: Todos los números x para los cuales $f(x)$ está definida

- Evite la división por cero.
- Raíces pares de números negativos.
- Logaritmos de números negativos o cero.
- El dominio de f en una función de dos variables es una región:
 - Las regiones que estén sombreadas son partes del dominio.

Para graficar funciones de dos variables son más fáciles de graficar que de una sola variable.

7.3. Ejercicios

Encuentre y bosqueje el dominio de las sigs. funciones.
Sombree la región dque es parte del \mathbb{D} y utilice líneas discontinúas para denotar a curvas que no son parte del \mathbb{D}

1. $c(x, y) = 10x + 20y :$

$$\mathbb{D} : \underbrace{(-\infty, \infty)}_x \times \underbrace{(-\infty, \infty)}_y = \mathbb{R}^2$$

Nunca se indefine.
Producto cartesiano

Producto cartesiano denota **todas las combinaciones posibles en un conjunto de n elementos**.

Explicaciones de productos cartesianos:

$$\mathbb{R} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

Definición de producto cartesiano:

$$x \times y = \{(x, y) \text{ tal que } x \in X, y \in Y\}$$

Producto cartesiano vs. unión:

$$x \times y = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$x \cup y = \{(1), (2), (3)\}$$

2. $z = \frac{8}{x^2 - y^2} :$

$$\begin{aligned} &\text{Definida si } x^2 \neq y^2 \\ &\mathbb{R}^2 - \{x^2 \neq y^2\} \\ &y \neq \sqrt{x^2} \\ &y \neq \pm x \end{aligned}$$

3. $R(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} :$

$$\begin{aligned} &9 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ &\text{Definida } 9 \geq x^2 + y^2 \\ &\mathbb{D} : x^2 + y^2 \neq 9 \end{aligned}$$

Círculo de radio 3 centrado en el origen

$$\mathbb{D} = \{(x, y) \text{ tal que } x^2 + y^2 \leq 9\}$$

4. $Q(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$:

$$\mathbb{D} : \begin{matrix} x^2 + y^2 > 0 \\ x^2 + y^2 > 9 \end{matrix}$$

\therefore Afuera del círculo o disco de radio 3

5. $z = \frac{(x+4)}{(y-2)(x-4)(y+2)}$:

Definida si : $y \neq \pm 2, x \neq 4$

$$\mathbb{D} : \mathbb{R}^2 - \{y \neq \pm 2, x \neq 4\}$$

6. $h(x, y) = \ln(2 - yx)$:

$$\begin{aligned} \text{Definida si : } & \begin{matrix} 2 - yx & > 0 \\ 2 & > yx \\ y & < \frac{2}{x} \end{matrix} \\ \therefore \mathbb{D} : & y < \frac{2}{x} \end{aligned}$$

7.3.1. Gráfica de $z = f(x, y)$

- Gráfica de $z = f(x, y)$: Son superficies y consisten de todas las *triplas* ordenadas (x, y, z) donde z .

7.4. Curva de nivel o traza horizontal

- En $f(x, y) = k$ k es una constante, rebane la superficie con los planos horizontales $z = k$ y grafique cada curva en el plano.

Capítulo 8

Clase - 2020-02-20

8.1. 14.3 Derivadas parciales

- Derivada en una dimensión:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

- En una función con dos variables independientes:

$$f(x, y) = \left. \begin{matrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{matrix} \right\} \text{ Derivadas parciales}$$

- Al derivarse parcialmente respecto a una variable, la otra se mantiene constante:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} && \# \text{ y se mantiene constante} \\ f_y(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} && \# \text{ x se mantiene constante} \end{aligned}$$

- Se pueden utilizar todas las reglas de derivación para funciones de 1 variable:

- Suma
- Producto
- Cociente
- Cadena

- 1^{eras} derivadas parciales de $f(x, y)$: encuentre todas las derivadas parciales posibles de f_x & f_y

- Notación:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\delta f}{\delta x} = \frac{\delta z}{\delta x} \\ f_y &= \frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\delta z}{\delta y} \end{aligned}$$

- Evite $f'(x, y)$ para evitar ambigüedad.

8.1.1. Ejercicios

Encuentre las derivadas parciales de las siguientes funciones.

1. $f(x, y) = 2x^2 + 3xy$: **Recordar lo siguiente:** $f_x(x, y)$ & $f_y(x, y)$

$$f_x = 4x + 3y \quad f_y = 0 + 3x$$

2. $g(x, y) = y(x^2 + 1)^3 + x^2(y^4 - 4)^4 + 5x^2y^3$:

$$\begin{aligned} g_x &= 3y(x^2 + 1)^2 2x + 2x(y^4 - 4)^4 + 10xy^3 \\ g_y &= 1 \cdot (x^2 + 1)^3 + 16y^3 x^2 (y^4 - 4)^3 + 15x^2 y^2 \end{aligned}$$

3. $h(s, t) = (s^2 + 10t)^2 \cdot (t^4 + s^3)^3$: # Regla del producto y de la cadena.

$$\begin{aligned} h_s &= 4s(s^2 + 10t)^1 \cdot (t^4 + s^3)^3 + 3 \cdot 3s^2(s^2 + 10t)^2 \cdot (t^4 + s^3)^2 \\ h_t &= 20(s^2 + 10t)^1 \cdot (t^4 + s^3)^3 + 12t^3(s^2 + 10t)^2 \cdot (t^4 + s^3)^2 \end{aligned}$$

Evalúe la derivada en punto (a, b) :

$$f_x(a, b) = \left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{(a, b)}$$

1. $w(r, \theta) = r^2 \sin(2\theta) + e^{\pi r - \theta}$, encuentre $\left. \frac{\delta w}{\delta \theta} \right|_{(2, \pi)}$

$$\begin{aligned} \frac{\delta w}{\delta \theta} &= 2r^2 \cos(2\theta) - e^{\pi r - \theta} \\ \left. \frac{\delta w}{\delta \theta} \right|_{(2, \pi)} &= w_\theta(2, \pi) = 2 \cdot 4 \cos(2\pi) - e^{2\pi - \pi} \\ &= 8 - e^\pi \end{aligned}$$

8.2. Derivadas parciales por funciones de 2 o más variables

- Se deriva respecto a una variable y el resto se mantienen constantes.

$$w = f(x, y, z)$$

3 1^{eras} derivadas parciales: f_x, f_y, f_z .

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

n derivadas parciales:

$$\frac{\delta u}{\delta x}, \dots, \frac{\delta u}{\delta x_n}$$

8.2.1. Ejercicio

Encuentre todas las primeras derivadas parciales de las siguientes funciones:

- $f(x, y, z) = \sqrt[4]{x^4 + 8xz + 2y^2}$

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{4}(x^4 + 8xz + 2y^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot (4x^3 + 8z + 0) \\ f_y &= \frac{1}{4}(x^4 + 8xz + 2y^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot (4y) \\ f_z &= \frac{1}{4}(x^4 + 8xz + 2y^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot (8x) \end{aligned}$$

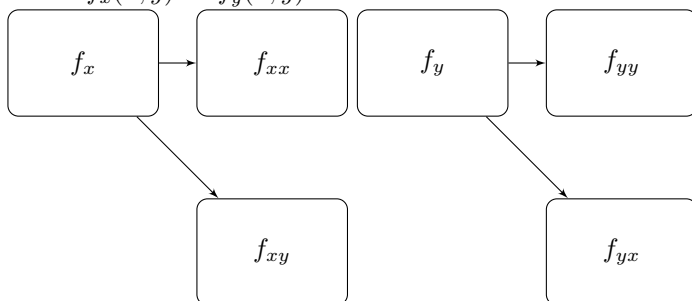
- $p(r, \theta, \phi) = r \cdot \tan(\phi^2 - 4\theta)$:

$$\begin{aligned}p_r &= \tan(\phi^2 - 4\theta) \\p_\theta &= -4r \sec^2(\phi^2 - 4\theta) \\p_\phi &= 2\phi r \sec^2(\phi^2 - 4\theta)\end{aligned}$$

Funciones vectoriales 1 variable: $\vec{r}'(t), \dots$

8.3. Derivadas parciales de orden superior (pág. 100)

- Orden superior: Segundas, terceras, cuartas, etc. derivadas.
- Como $f_x(x, y)$ & $f_y(x, y)$ son también funciones en dos variables, pueden tener derivadas parciales.



- Las segundas derivadas parciales, éstas también tienen sus derivadas parciales, terceras derivadas parciales.

$$\begin{array}{cccc}f_{xxx} & f_{xxy} & f_{yyy} & f_{yyx} \\f_{xxy} & f_{xyx} & f_{yyx} & f_{yxx}\end{array}$$

- Las derivadas parciales cruzadas f_{xy} & f_{yx} son iguales si la función es diferenciable.

$$f_{xy} = f_{yx} \quad f_{xyy} = f_{yyx} = f_{yxy}$$

- Notación delta:

$$\begin{aligned}f_{xx} &= \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\delta f}{\delta x} \right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} & f_{yy} &= \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \\f_{xy} &= \frac{\delta}{\delta y} \left(\frac{\delta f}{\delta x} \right) = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} & f_{yx} &= \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta y}\end{aligned}$$

8.3.1. Ejercicios

Encuentre todas las 2das derivadas parciales:

1. $f(x, y) = \sin(mx + ny)$ $m, n \in \mathbb{R}$:

Primeras derivadas parciales :

$$f_x = m \cos(mx + ny)$$

$$f_y = n \cos(mx + ny)$$

Segundas derivadas parciales:

$$f_{xx} = -m^2 \sin(mx + ny)$$

$$f_{yy} = -n^2 \sin(mx + ny)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{xy} &= -mn \sin(mx + ny) \\ f_{yx} &= -mn \sin(mx + ny) \end{aligned} \right\} \text{Iguales}$$

2. $z = \cos(2xy)$:

$$1^{\text{er as}} : \quad \frac{\delta z}{\delta x} = -2 \sin(2xy), \quad \frac{\delta z}{\delta y} = -2x \sin(2xy)$$

$$2^{\text{das}} : \quad \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = -4y^2 \cos(2xy), \quad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = -4x^2 \cos(2xy)$$

Capítulo 9

Clase - 2020-02-27

9.1. Derivadas parciales, rectas tangentes y planos tangentes

9.1.1. Interpretación de la derivada parcial

- \mathbb{C} curva de intersección entre $z = f(x, y)$ y $y = b$.

- Recta tangente a esta curva en el punto $(a, b, f(a, b))$:

$$\text{Derivada : } f_x(x, b) \quad \text{Pendiente: } f_x(a, b)$$

- Derivadas parciales: $f_x(a, b)$ resulta ser la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x, b)$ en la dirección de x .

$$L = \langle a, b, f(a, b) \rangle + t \langle 1, 0, f_x(a, b) \rangle \quad \text{donde: } x = t, y = b, z = f(t, b)$$

- Para encontrar L_2 $x = a$:

$$x = a, y = t, x = f(z, y) \implies z_y = f_y(a, y) \implies z_y = f_y(a, b)$$

$z_y = f_y(a, b)$ es la pendiente de la tangente a la curva $f(a, y)$ en la dirección de y

$$L_2 = \langle a, b, f(a, b) \rangle + t \langle 0, 1, f_y(a, b) \rangle$$

- Estas dos rectas se utilizan para construir un plano tangente a la superficie.
- La ecuación del plano es un plano que es paralelo a L_1 & L_2 .

$$L_1 = \langle a, b, f(a, b) \rangle + t \overbrace{\langle 1, 0, f_x(a, b) \rangle}^{v_1}$$

$$L_2 = \langle a, b, f(a, b) \rangle + t \underbrace{\langle 0, 1, f_y(a, b) \rangle}_{v_2}$$

La ec. vectorial:

$$\hat{n} \cdot (-r_0) = 0 \quad \vec{r}_0 = \langle a, b, f(a, b) \rangle$$

terminar excursión.

9.1.2. Ejercicios

- Encuentre el plano tangente a la superficie $z = \ln(x - 2y)$ en el punto $(3, 1, 0)$:

$$f(a, b) \quad f_x(a, b) \quad f_y(a, b) \quad a = 3, b = 1$$

$$f(3, 1) = \ln(3 - 2) = \ln(1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x - 2y} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|^{(3,1)} = \frac{1}{3 - 2} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2}{x - 2y} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|^{(3,1)} = \frac{-2}{3 - 2} = -2$$

$$z = f(3, 1) + f_x(x - 3) + f_y(y - 1)$$

$$\text{La ecuación del plano tangente:} \quad z = 0 + x - 3 - 2y + 2$$

$$\therefore z = x - 2y - 1$$

9.2. Aproximaciones lineales

- La aproximación lineal de $z = f(x, y)$, linearización.
- La aproximación lineal de z en (a, b) es el plano tangente a la superficie.

$$L(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial}{\partial x} f(a, b)(x - a) + \frac{\partial}{\partial y} f(a, b)(y - b)$$

9.2.1. Ejercicios

Considere la función $f(x, y) = \sqrt{2x + 2e^y}$:

- Encuentre la aproximación lineal de f en el punto $(7, 0)$:
Encuentre $f(7, 0)$ $f_x(7, 0)$ $f_y(7, 0)$

$$\begin{aligned} f(7, 0) &= \sqrt{14 + 2} = 4 \\ f_x(x, y) &= (2x + 2e^y)^{-\frac{1}{2}} & f_x(7, 0) &= \frac{1}{\sqrt{14 + 2}} = \frac{1}{4} \\ f_y(x, y) &= \frac{e^y}{\sqrt{2x + 2e^y}} & f_y(7, 0) &= \frac{1}{\sqrt{14 + 2}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

\therefore La aproximación lineal o plano tangente: $L = 4 + \frac{1}{4}(x - 7) + \frac{1}{4}y$

Cerca de $(7, 0)$: $\sqrt{2x + 2e^y} \approx \frac{9}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y$

- Utilice la aproximación lineal para aproximar el valor de $\sqrt{8 + 2e}$:

$$f(4, 1) = \sqrt{8 + 2e} \approx 3,5 \approx L(4, 1)$$

$$L(4, 1) = \frac{9}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{2} = 3,5$$

En realidad : $\sqrt{8 + 2e} \approx 3,665592$

- Ejercicio 3: Encuentre la aproximación lineal de $g(x, y) = 1 + \ln(xy - 5)$ en el punto $(2, 3)$:

$$g(2, 3) = 1 + 2 \ln(6 - 5) = 1 + 0 = 1$$

$$g_x(x, y) = 0 + 1 \cdot \ln(xy - 5) + \frac{xy}{xy - 5}$$

$$g_x(2, 3) = \ln(1) + \frac{6}{6 - 5} = 0 + \frac{6}{1} = 6$$

$$g_y(x, y) = 0 + \frac{x \cdot x}{xy - 5}$$

$$g_y(2, 3) = \frac{4}{6 - 5} = 4$$

La aproximación lineal entonces es:

$$\begin{aligned} \therefore \\ L(x, y) &= 1 + 6(x - 2) + 4(y - 3) \\ L(x, y) &= -23 + 6x + 4y \end{aligned}$$

9.3. 12.4 Derivadas implícitas y 12.5 Regla de la cadena

- Funciones 2 variables $z = f(x, y)$
- Explícita: z no está sólo en función de x & y .
- Ejemplos: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $\sqrt{z^2 - x^2} = y + z$
- ¿Cómo se encuentran $\frac{\partial z}{\partial x}$ & $\frac{\partial z}{\partial y}$?:
 - Implícita $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ es una esfera de 4 (rango $[-4, 4]$) en dos hemisferios:

$$z = +\sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{2}(16 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{z} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{y}{z} \end{aligned}$$

- Derivación implícita, se pueden encontrar z_x & z_y sin necesidad de resolver para z .

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \quad z \text{ & } y \text{ son independientes}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(16)$$

$$2x + 0 + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$2z \frac{\partial z}{\partial x} = -2x \implies \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial}{\partial y}(16)$$

$$0 + 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

9.3.1. Derivación parcial implícita abreviada

- $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ como $x \ln(y) + x^2 \sqrt{1 + x + z} = k$
- Forma implícita: $F(x, y, z(x, y)) = \text{constante}$. $\frac{\partial z}{\partial x}$ use la regla de la cadena.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \quad \implies \quad z_x = -\frac{f_x}{f_z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \quad \implies \quad z_y = -\frac{f_y}{f_z}\end{aligned}$$

9.3.2. Ejercicios

Encuentre las primeras derivadas parciales de z .

1. $\ln(zy) + 9z - xyz = 1$:

$$\begin{aligned}F_x &= -yz & \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_y} = \frac{yz}{z^{-1}+9-xy} \\ F_y &= y^{-1} + 0 - xy & \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{xz-y^{-1}}{z^{-1}+9-xy} \\ F_z &= z^{-1} + 9 - xy\end{aligned}$$

Sin derivación parcial implícita

$z(x, y)$ agregue z_x cada vez que aparece z .

$$\frac{yz_x}{z_y} + 9z_x - y_x$$

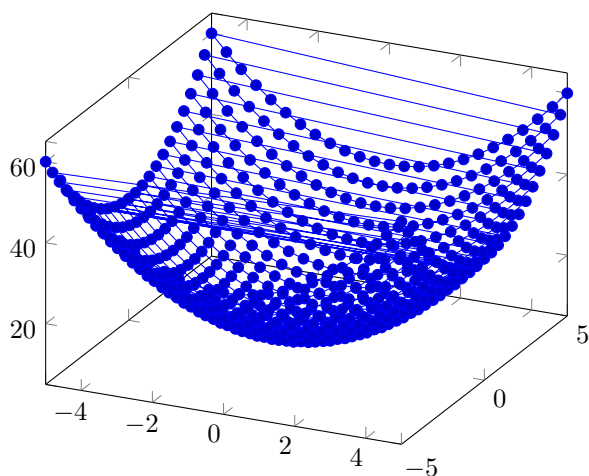
Capítulo 10

Clase - 2020-03-10

10.1. Parcial 2

- Planos tangentes y aproximaciones lineales
- Regla de la cadena
- Derivación implícita
- Derivada direccional o razón de cambio en f en la dirección de \vec{u}

10.2. 14.7 Máximos y mínimos



- Máximo relativo:
 - $f(a, b) > f(x, y)$
 - (x, y) cerca de (a, b)
- Mínimo relativo:
 - $f(a, b) < f(x, y)$
 - (x, y) cerca de (a, b)

10.2.1. En funciones de una variable

- Números críticos: $f'(c) = 0$ ó $f'(c) = \text{indef.}$
- 2da derivada:

$f'(c) < 0$	Máximo relativo
$f'(c) > 0$	Mínimo relativo
$f'(c) = 0$	Inconcluso

10.2.2. En funciones de dos variables

- Puntos críticos:

$$f_x(a, b) = 0 \quad \& \quad f_y(a, b) = 0$$

- No es suficiente:

$$\begin{array}{lll} f_{xx} < 0 & \& f_{yy} < 0 & \text{Máx relativo} \\ f_{xx} > 0 & \& f_{yy} > 0 & \text{Mín relativo} \end{array}$$

- Prueba de la segunda derivada: (a, b) es un punto crítico y $f(x, y)$ tiene segundas derivadas continuas.

$$D(a, b) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

- Entonces:

- Máximo relativo: $D(a, b) > 0$ & $f_{xx} < 0$
- Mínimo relativo: $D(a, b) > 0$ & $f_{xx} > 0$
- Punto de silla: $D(a, b) < 0$ no hay ni mínimo ni máximo.
- Inconcluso: $D(a, b) = 0$

- Ejemplo: Considere la función $z = x^2 + y^2$.

- Puntos críticos:

$$\begin{array}{l} z_x = 2x = 0 \\ z_y = -2y = 0 \end{array}$$

Prueba de la segunda derivada

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

10.2.3. Ejercicios máximos y mínimos

1. Encuentre los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones.

- $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 6x + 16y$

$$\left. \begin{array}{l} f_x = 2x - 6 = 0 \implies x = 3 \\ f_y = 8y + 16 = 0 \implies y = -2 \end{array} \right\} \text{Único punto crítico en: } (3, -2)$$

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 16 \quad 16 > 0$$

$$f_{xx} = 2 \quad 2 > 0$$

$$\text{Valor mínimo : } f(3, -2) = -25$$

■ $g(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 + 100$

$$\begin{aligned} g_x = 4x + 4 = 0 &\implies y = -4x \text{ implies } y = 0 \\ g_y = x + 2y = 0 &\text{ implies } x - 8x = -9x = 0 \text{ implies } x = 0 \end{aligned}$$

#Resolver ecuaciones

Único punto crítico

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7 \implies 7 > 0$$

$$g_{xx} = 4 > 0$$

Valor mínimo relativo:

$$g(0, 0) = 100$$

■ $h(x, y) = 30 - x^2 - 2y^2 + 4x - 12y$

$$\begin{aligned} \text{Encontrar pts. críticos : } h_x = 2x - 4 = 0 \\ \text{Encontrar pts. críticos : } h_y = -4y - 12 = 0 \end{aligned} \left\} \begin{aligned} x &= -\frac{4}{2} = 2 \\ y &= \frac{12}{-4} = -3 \end{aligned} \right.$$

Único número crítico es (2,-3)

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 > 0 \quad h_{xx} = -2 < 0$$

Máximo relativo en (2,-3) 38

2. Una caja de cartón sin tapa, debe de tener un volumen de $32,000cm^3$, calcule las dimensiones x, y, z que minimicen el cartón utilizado.

$$\text{Volúmen: } V = xyz = 32,000$$

$$\text{Área: } A = 2zy + 2zx + xy$$

Tengo que minimizar el área

$$A = 2zy + 2zx + xy \implies z = \frac{32,000}{xy}$$

$$x, y, z > 0$$

$$A(x, y) = 64,000 \cdot \frac{y}{xy} + 64,000 \frac{x}{xy} + xy$$

$$A(x, y) = \frac{64,000}{x^2} + \frac{64,000}{y} + xy$$

$$A_x = 0 : \quad \frac{-64,000}{x^2} + y = 0 \implies y = 64,000x^{-2}$$

$$A_y = 0 : \quad \frac{-64,000}{y^2} + x = 0 \implies [64,000]^2 x^{-4}$$

$$\text{Sustituya en } A_y \quad \frac{-64,000}{(64,000)^2 x^{-4}} + x = 0$$

$$-\frac{x^4}{64,000} = -x$$

$$x = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{1,000} = 4 \cdot 10 = 40$$

$$y = \frac{64,000}{x^2} = \frac{64 \cdot 1,000}{16 \cdot 100} = 4 \cdot 10 = 40$$

$$z = \frac{32,000}{40 \cdot 40} = \frac{32,000}{16,000} = 20$$

\therefore Las dimensiones que minimizan el área es: $x = y = 40, \quad z = 20$

3. Discriminación de precios:

- Demanda:

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = 104 - q_1 \\ p_2 = 84 - q_2 \end{array} \right\} \text{ Producción: } q_1, q_2$$

- Costos:

$$C = 600 + 4q_1 + 4q_2$$

- Encuentre los precios y las cantidades q_1 & q_2 a la que deben venderse los productos para maximizar la utilidad.

$$\text{Utilidad} = \text{Ingresos} - \text{Costos}$$

$$\text{Utilidad : } u(q_1, q_2) = p_1 q_1 + p_2 q_2 - 600 - 4q_1 - 4q_2$$

$$u(q_1, q_2) = 104q_1 - q_1^2 + 84q_2 - q_2^2 - 600 - 4q_1 - 4q_2$$

$$u(q_1, q_2) = -q_1^2 - q_2^2 + 100q_1 + 80q_2 - 600$$

$$\frac{\partial u}{\partial q_1} = -2q_1 + 100 = 0 \implies q_1 = 50$$

$$\frac{\partial u}{\partial q_2} = -2q_2 + 80 = 0 \implies q_2 = 40$$

$$\text{Único punto crítico: } (q_1 = 50, q_2 = 40)$$

$$\left. \begin{array}{l} q_1 = 50 \implies p_1 = 40 \\ q_2 = 40 \implies p_2 = 44 \end{array} \right\} \text{ discriminación}$$

$$\text{Utilidad máxima: } u(50, 40) = 54 \cdot 50 + 44 \cdot 40 - 600 - 360$$

$$2,700 + 1,760 - 960 = 35,00 \quad \text{utilidad máxima}$$

Prueba de la segunda derivada :

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$v_{q_1 q_1} = -2 < 0$$