14.5 Derivadas Direccionales y Gradiente. p. 114.

El Gradiente de f, denotado como ∇f ó grad f, es la función vectorial

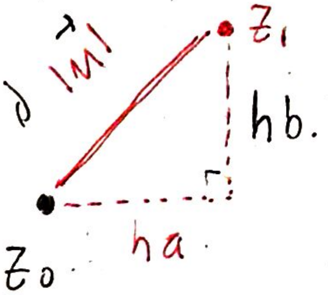
$$\nabla f = f_x \hat{\imath} + f_y \hat{\jmath} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$$

Función de tres variables $f(x, y, z)$.

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle$$

f es una función escalar ∇f es una función vectorial.

Derivadas Parciales en la dirección de x ó en la dirección de y.



La razón de cambio promedio entre z_1 y z_0 si uno se desplaza en la dirección del vector $\vec{u}$ el cual es unitario.

$$\frac{\Delta z}{\Delta d} = \frac{z_1 - z_0}{h\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{z_1 - z_0}{h.}$$

$|\vec{u}| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$ $\qquad z_1 = f(x_0 + ha, y_0 + hb)$

$z_0 = f(x_0, y_0)$.

Derivada Direccional: es la razón de cambio instántanea ($h \to 0$) de z en la dirección de $\vec{u}$ unitario en el punto (x_0, y_0)

$$\boxed{D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}}$$

3-D: $w_0 = f(x_0, y_0, z_0)$

$w_1 = f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc)$

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x_0} + h\vec{u}) - f(\vec{x_0})}{h}$$

$\vec{x_0} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$

$\vec{u} = \langle a, b, c \rangle$

¿Cómo se calcula $D_u f(\vec{x_0})$?

$u = \langle 1, 0, 0 \rangle$ en la dirección de x.

$$D_{\hat{i}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

$$D_{\hat{i}} f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$u = \langle 0, 1, 0 \rangle$

$$D_{\hat{j}} f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

en la dirección de y.

en la dirección de z.

$$D_{\hat{k}} f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}$$

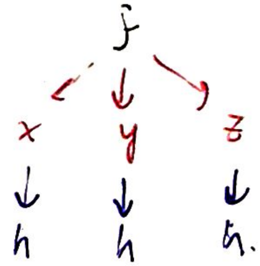
Sea $g(h) = f(x_0 + ha,\ y_0 + hb,\ z_0 + hc)$

$$g'(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{X}_0 + h\vec{u}) - f(\vec{X}_0)}{h} = D_u f(x_0, y_0, z_0)$$

$\vec{u} = \langle a, b, c \rangle \qquad |\vec{u}| = 1$

$g(h) = f(x, y, z) \qquad x = x_0 + ha \qquad z = z_0 + hc$

$y = y_0 + hb$



$$\boxed{g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial y} b + \frac{\partial f}{\partial z} c.}$$

$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle \qquad \vec{u} = \langle a, b, c \rangle$

Teorema: Si f es diferenciable en x, y, z; la derivada direccional de f en el punto $\vec{X}_0$ en la dirección del vector unitario $\vec{u}$ es:

$$\boxed{D_{\vec{u}} f(\vec{X}_0) = \nabla f \cdot \vec{u}}$$

producto punto entre el gradiente & $\vec{u}$

Ejercicio 1: Encuentre la derivada direccional de $f(x, y) = e^x \sin y$ en el punto $(0, \pi/3)$ en la dirección de $\vec{v} = \langle -6, 8 \rangle$.

$$D_{\vec{u}} f(0, \pi/3) = \nabla f(0, \pi/3) \cdot \vec{u}$$

$\vec{v}$ no es unitario $\quad |\vec{v}| = \sqrt{36+64} = 10.$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \boxed{\frac{1}{10}\langle -6, 8\rangle.}$$

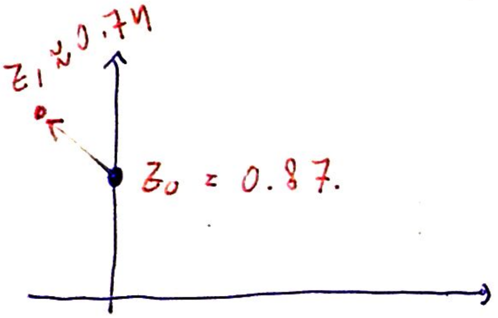
$$\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle = \langle e^x \sin y, e^x \cos y \rangle$$

$$\nabla f(0, \pi/3) = \boxed{\langle \sqrt{3}/2, 1/2 \rangle}$$

$$D_{\vec{u}} f(0, \pi/3) = \frac{1}{10}\langle -6, 8\rangle \cdot \langle \sqrt{3}/2, 1/2\rangle$$

$$= \frac{1}{10}\left(-3\sqrt{3} + 4.\right) \approx -0.119615.$$

Interpretación $\quad f(0, \pi/3) = e^0 \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660.$



Resumen $\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle$

Derivada Direccional $D_u f(\vec{x_0}) = \nabla f \cdot \vec{u}$

Ejercicio 2: Considere la función $g(r,t) = r^2 \tan\left(\frac{\pi t}{4}\right)$.

a. Encuentre el gradiente de $g(r,t)$ en el punto $(2,1)$.

$$\nabla g = \langle g_r, g_t \rangle = \left\langle 2r \tan\left(\frac{\pi t}{4}\right), \frac{\pi r^2}{4} \sec^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) \right\rangle$$

$$\nabla g(2,1) = \left\langle 4 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right), \pi \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\rangle$$

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$$\nabla g(2,1) = \langle 4, 2\pi \rangle.$$

b. Encuentre la razón de cambio instántanea de g en el punto $(2,1)$ en la dirección de $v = \langle -1, 2 \rangle$.

$$D_u g(2,1) = \nabla g(2,1) \cdot \vec{u}$$

Falta un vector unitario: $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle -1, 2 \rangle$.

$$D_u g(2,1) = \frac{\langle 4, 2\pi \rangle \cdot \langle -1, 2 \rangle}{\sqrt{5}} = \frac{-4 + 4\pi}{\sqrt{5}} \approx 2.$$

Ejercicio 3: Considere la función $f(x,y,z) = x^3y^2z$.

a. Encuentre el gradiente de f en el punto $(1,2,4)$.

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \langle 3x^2y^2z,\ 2x^3yz,\ x^3y^2 \rangle.$$

$$\nabla f(1,2,4) = \langle 3\cdot 4\cdot 4,\ 2\cdot 1\cdot 2\cdot 4,\ 1\cdot 4 \rangle.$$

$$\nabla f(1,2,4) = \langle 48, 16, 4 \rangle.$$

b. Encuentre $D_u f(x,y,z)$ en $(1,2,4)$ en la dirección de $\vec{u} = \langle \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \rangle$.

$$|\vec{u}| = \frac{1}{3}|\langle 1,-2,2\rangle| = \frac{1}{3}\sqrt{1+4+4} = 1$$

este vector ya es unitario.

$$D_{\vec{u}} f(1,2,4) = \nabla f(1,2,4) \cdot \vec{u}$$

$$= \frac{48}{3} - \frac{32}{3} + \frac{8}{3} = 16 - \overbrace{\frac{24}{3}}^{8.} = 8$$

La razón instantánea de cambio es de 8 unidades.

Interpretación del Gradiente

1 unitario.

$$D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u} = |\nabla f|\,\cancel{|\vec{u}|}\cos\theta.$$

$$D_{\vec{u}} f = |\nabla f| \cos\theta.$$

θ es el ángulo entre ∇f y $\vec{u}$.

Valor Máximo de $D_{\vec{u}} f$ cuando $\theta = 0$.

$$(D_{\vec{u}} f)_{max} = |\nabla f|$$

El valor máximo de la derivada direccional, o máxima razón de cambio, es $|\nabla f|$ y ocurre en la dirección $u = \dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Steepest Ascent.

Cuando $\theta = \pi$ $\quad (D_{\vec{u}} f)_{\text{min.}} = -|\nabla f|$.

Valor mínimo de la derivada direccional es $-|\nabla f|$ y ocurre en la dirección $-\nabla f$.

Steepest Descent.

Ejercicio 4: Encuentre la máxima razón de cambio de $f(x, y) = (y^2+1)e^x$ en el punto $(0, 2)$ y la dirección en que ocurre este cambio.

Valor Máximo $|\nabla f|$ $\qquad$ Dirección ∇f.

$\nabla f = \langle e^x(y^2+1), 2ye^x \rangle$.

$\nabla f(0,2) = \langle 4+1, 2\cdot 2\cdot 1 \rangle = \underline{\langle 5, 4 \rangle}$

Valor Máximo Razón Cambio $|\nabla f(0,2)| = \sqrt{25+16}$
≈ 6.40.

Dirección Valor Máximo $\quad \nabla f = \langle 5, 4 \rangle$.