

Cálculo Multivariable - Rocket Book Compilation

Christiaan Ketelaar
Organizado por : David Corzo

2020-01-06

Índice general

1. RB_2020-01-07_18_49_53	5
2. RB_2020-01-09_09_42_27	13

Capítulo 1

RB_2020-01-07_18_49_53

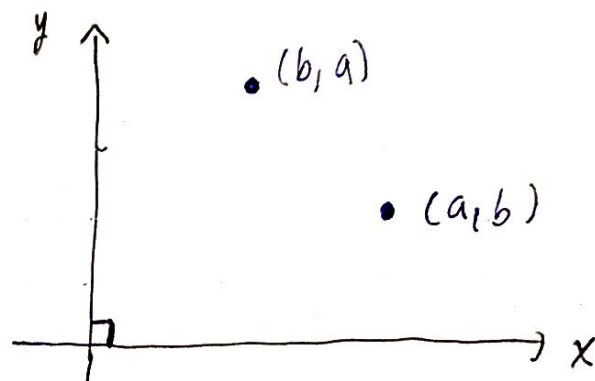
12.1 Sistemas Tridimensionales de Coordenadas.

Para localizar un punto en un plano, se necesitan 2 números.

a la coordenada x

b la coordenada y .

Plano \mathbb{R}^2



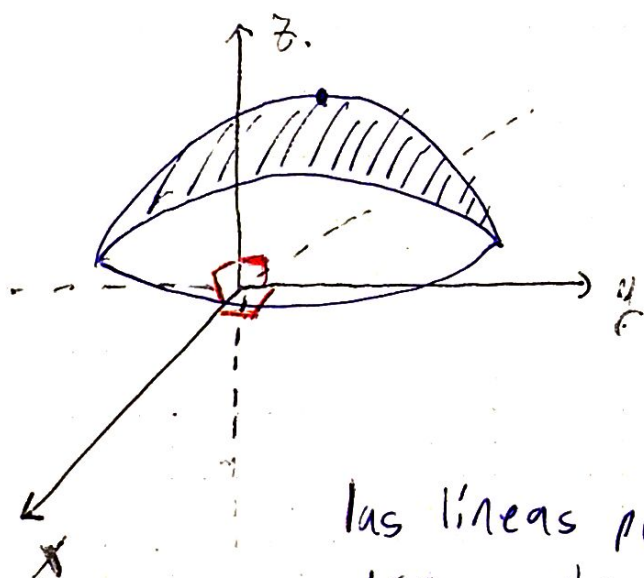
Los ejes de coordenadas son perpendiculares entre sí.

El sistema tridimensional de coordenadas rectangulares

cada punto en el espacio es una terna ordenada (x, y, z)

Espacio $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \text{ tal que } x, y, z \in \mathbb{R}\}.$

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}.$$



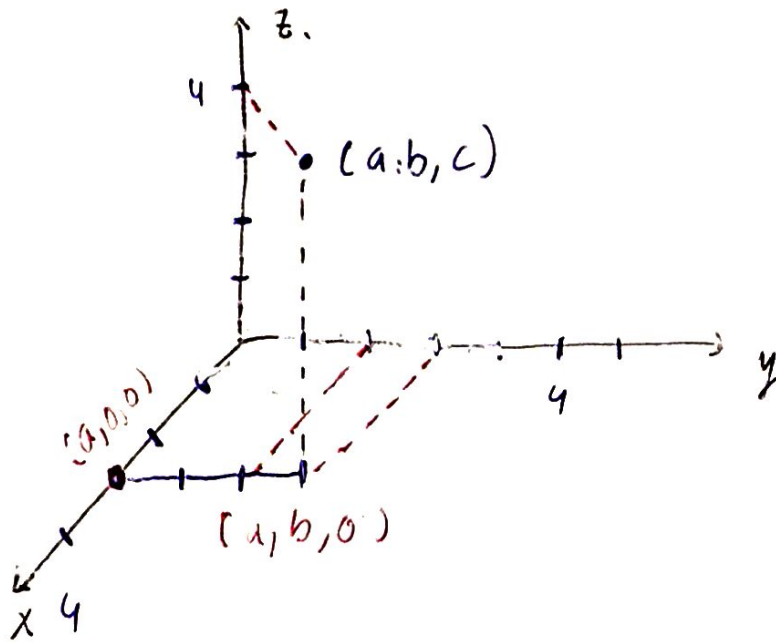
x transversal

y horizontal

z vertical.

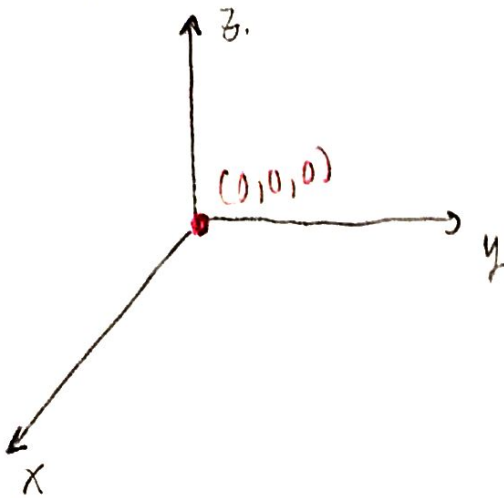
$$z = f(x, y)$$

las líneas punteadas se para simbolizar las partes de abajo, izquierda y detrás.

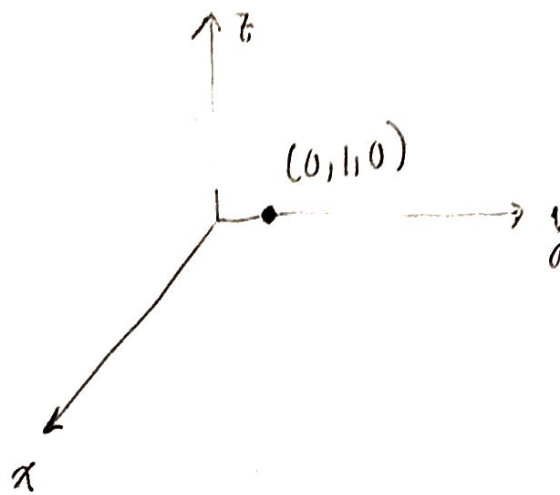

 (a, b, c)
 $(3, 3, 4)$

Ejercicio 1: Identifique los siguientes puntos.

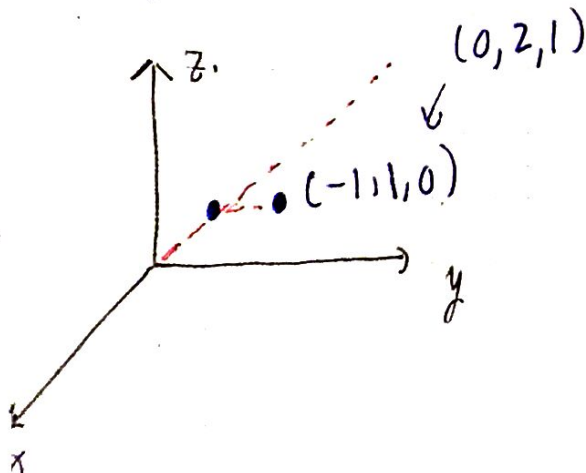
a. $(0, 0, 0)$



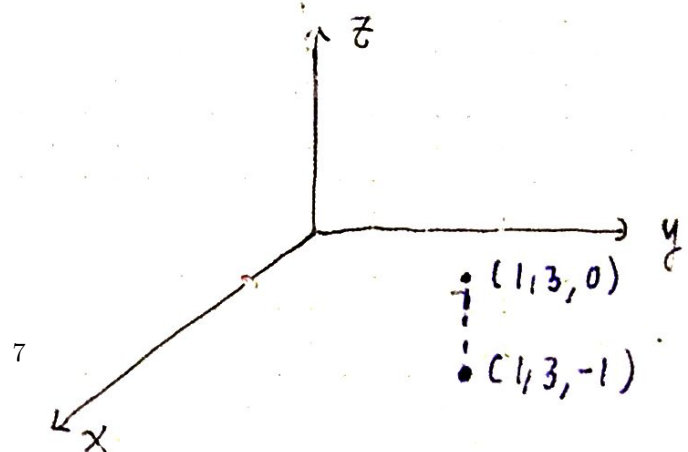
b. $(0, 1, 0)$



c. $(-1, 1, 0)$

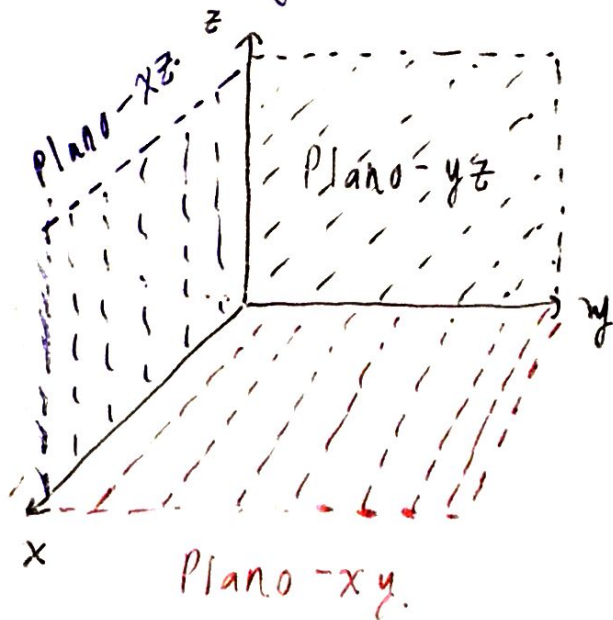


d. $(1, 3, -1)$



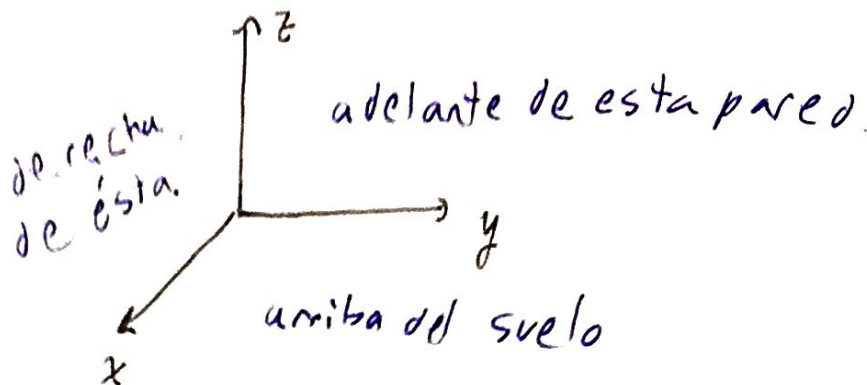
Planos Coordenados.

Plano $-xy$: $z = 0$. (el suelo) Plano $-yz$ $x = 0$
(pared de atrás)



Plano $-xz$ $y = 0$.
(pared izquierda)

1er octante.
 $x > 0, y > 0, z > 0$



Planos en el espacio.

En 2-D.

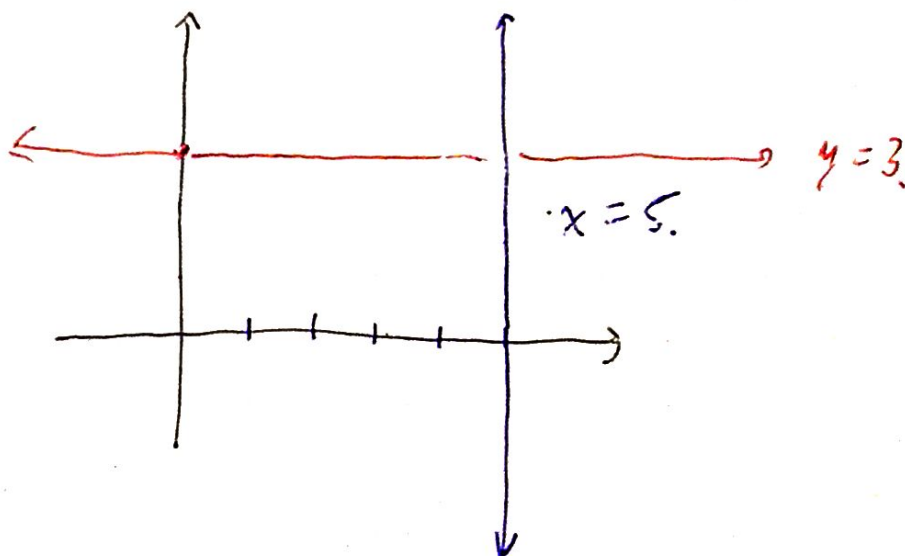
$$x = 5 \quad \text{o} \quad y = 3.$$

$$x = a$$

Rectas Verticales.

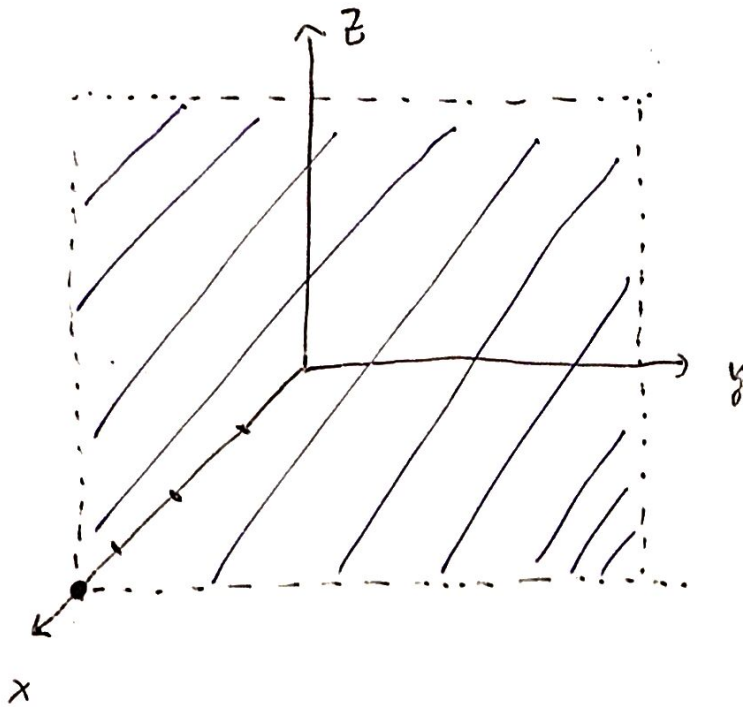
$$y = b.$$

Rectas Horizontales.



En 3-D $x=a$, $y=b$, $z=c$ son gráficas de planos.

$$x = 4$$

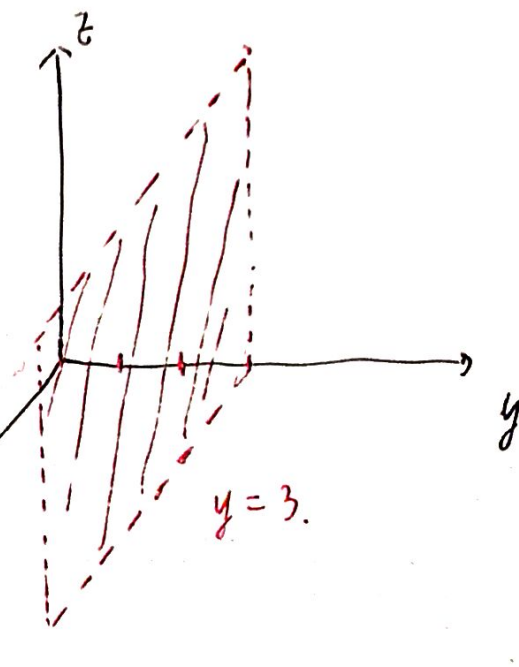


$$x = -2.$$

pared frontal.

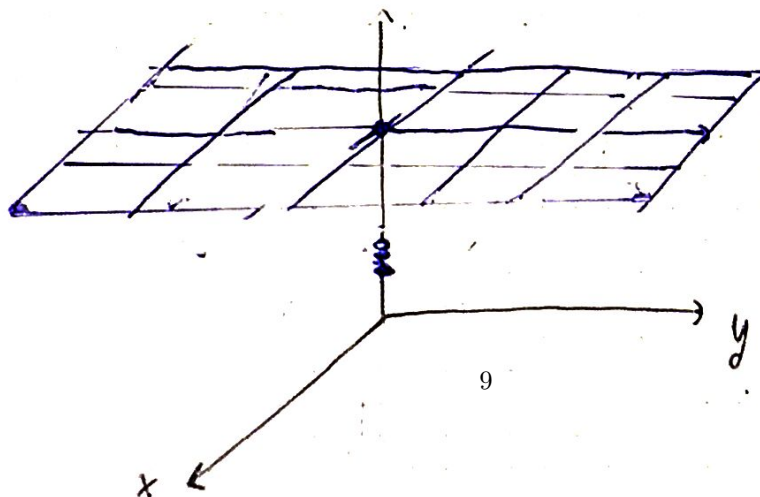
$$y = 3.$$

pared derecha.



$$z = 2.$$

(techo)



5

Ec. lineal en 3-D va a graficar un plano.

Ec. Plano. $ax + by + cz = d$.

Generalmente se grafican sólo en el primer octante si cada a, b, c y d es positiva.

Intersección x : $y=0, z=0$ $(a, 0, 0)$

Intersección y : $x=0, z=0$ $(0, b, 0)$

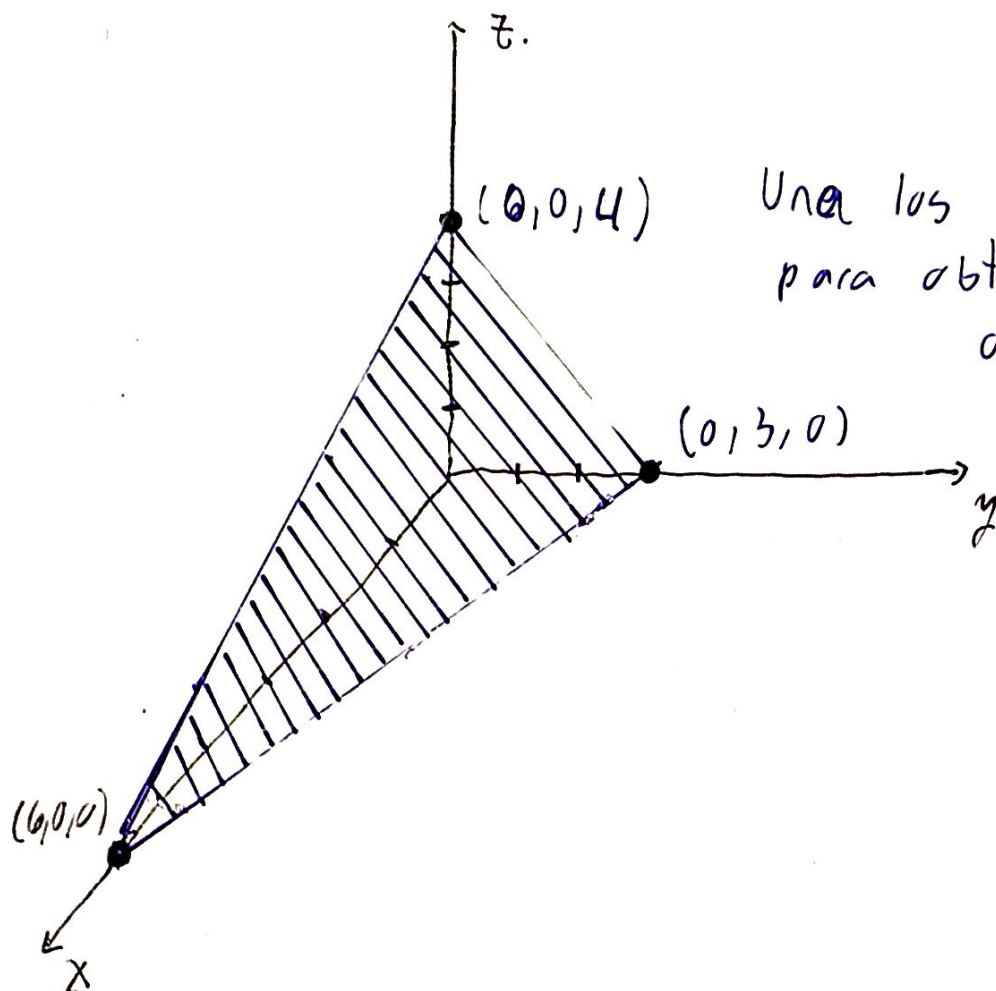
Intersección z : $x=0, y=0$ $(0, 0, c)$

Ejercicio 3: Bosqueje el plano $2x + 4y + 3z = 12$ sólo en el primer octante.

Intersecto- x : $2x = 12 \Rightarrow (6, 0, 0)$

Intersecto- y : $4y = 12 \Rightarrow (0, 3, 0)$

Intersecto- z : $3z = 12 \Rightarrow (0, 0, 4)$



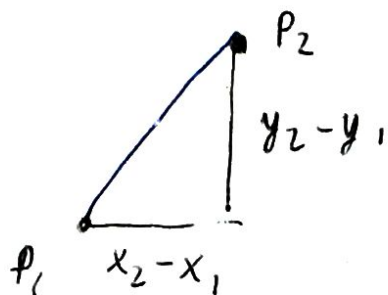
Una los tres puntos
para obtener un segmento
del plano

Capítulo 2

RB_2020-01-09_09_42_27

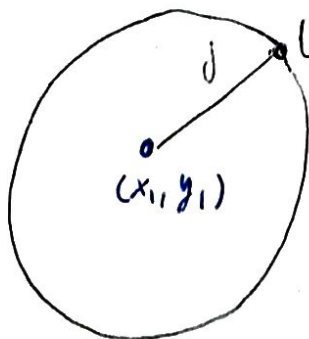
12.1.2 Distancias y Superficies Básicas.

En 2-D, la distancia entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = d^2$$



Ec. Circunferencia
de radio d centrada
en (x_1, y_1) .

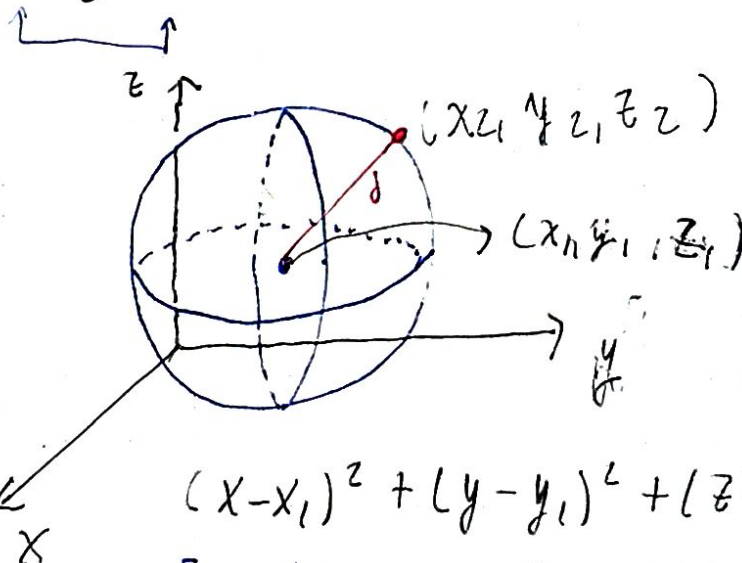
En 3-D, la distancia entre $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$

Calcule la diferencia entre z_2 & z_1 .

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

no puede
ser
negativa.

Notación $d = |P_2 P_1|$



$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = d^2$$

Ec. de una esfera de radio r
centrada en (x_1, y_1, z_1) .

Pág. 15.

Esfera más utilizada centrada en el origen $(0,0,0)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \text{radio } r.$$

Ejercicio 4: Encuentre el centro y radio de la esfera
cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 4z + 4 = 0. \quad (P16).$$

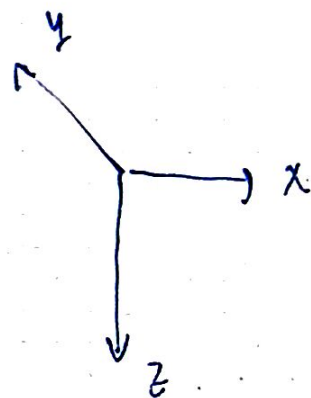
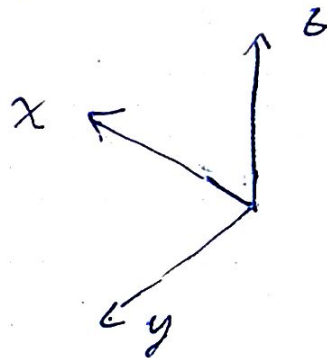
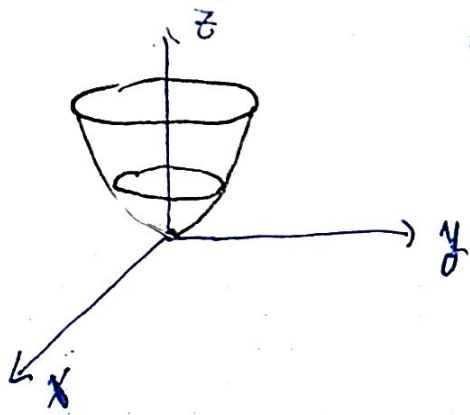
$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 + z^2 + 4z + 4 = -4 + 16 + 9 + 4$$

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 25 = r^2$$

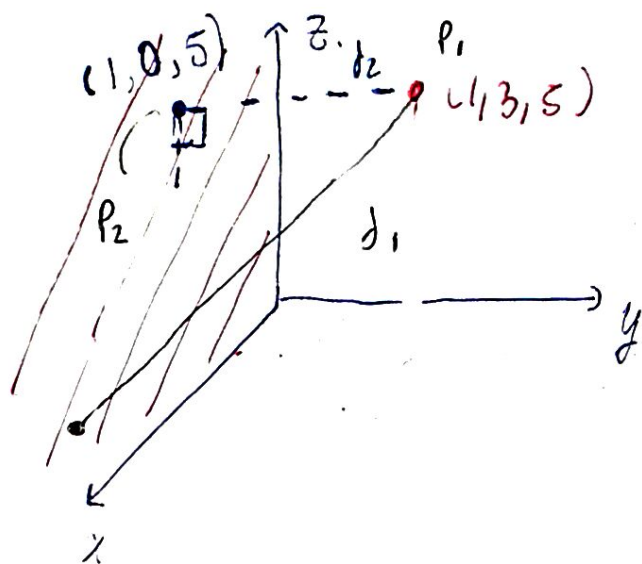
Centro de esfera $(-4, 3, -2)$ Radio $\sqrt{25} = 5$.

$z = x^2 + y^2$ no es una esfera.

es un paraboloide.



Distancia entre un punto y un plano - coordenado. ^{3.}



Encuentre la distancia entre el punto $(1, 3, 5)$ y el plano xz . (tiene infinitos puntos)

En el plano xz $y=0$

o se estrella el punto $(1, 3, 5)$ contra el plano xz se obtiene el punto $(1, 0, 5)$.

"Estrellar": Encuentre la proyección del punto P sobre el plano.

Distancia entre P_1 y P_2 $d = \sqrt{(1-1)^2 + (3-0)^2 + (5-5)^2}$
 $d = \sqrt{0 + 9 + 0} = 3$

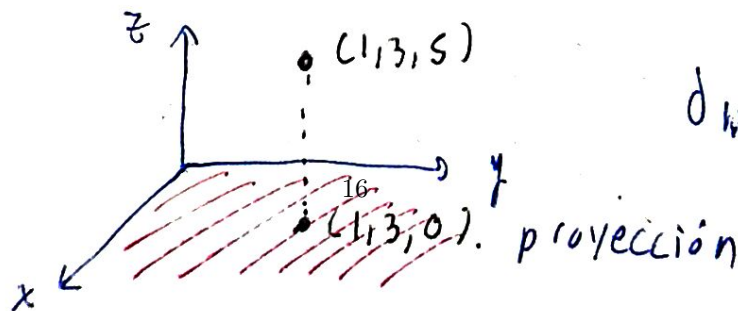
Gabriel la proyección del punto (a, b, c) sobre el plano xz es el punto $(a, 0, c)$.

Distancia mínima entre P y el plano es

$$d = \sqrt{0 + b^2 + 0} = |b|. \quad \text{de la componente } -y.$$

¿Cuál es la distancia entre el punto $(1, 3, 5)$ y el plano xy ?

$$z=0.$$



$$d_{\min} = \sqrt{0 + 0 + 5^2} = 5.$$

Ejercicio 6: Considere los puntos $A(3, 0, -4)$, $B(9, 0, 0)$ y $C(0, 1, \sqrt{15})$.
 \uparrow \uparrow \uparrow
 $y=0$ $y=0$ $z=0$

a. ¿Cuál de los sigs. puntos está más cercano al origen?

Calcule la distancia de cada punto respecto al origen.

$$d_{AO} = |AO| = \sqrt{9 + 0 + 16} = \sqrt{25} = 5 \quad O(0, 0, 0)$$

$$|BO| = \sqrt{81 + 0 + 0} = \sqrt{81} = 9$$

$$|CO| = \sqrt{0 + 1 + 15} = \sqrt{16} = 4.$$

\hookrightarrow es el más cercano al origen.

b. ¿Cuáles de los puntos están sobre el plano yz ?

Ec. Plano yz : $x=0$.

A y B no están sobre el plano yz $x \neq 0$.

El punto C $(0, 1, \sqrt{15})$ si está sobre este plano.

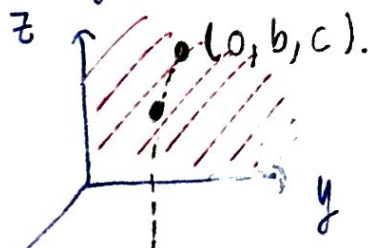
Comentario. A está sobre el plano xz .

B está sobre el eje x .

está sobre el plano xy & xz

c. ¿Cuáles de los puntos está más cercano al plano

yz ? $x=0$.



Como C está sobre el plano yz éste es el más cercano a este plano $d=0$.

Encuentre las proyecciones y las distancias

$$A(3, 0, -4), \quad P_A = (0, 0, -4), \quad d_A = 3$$

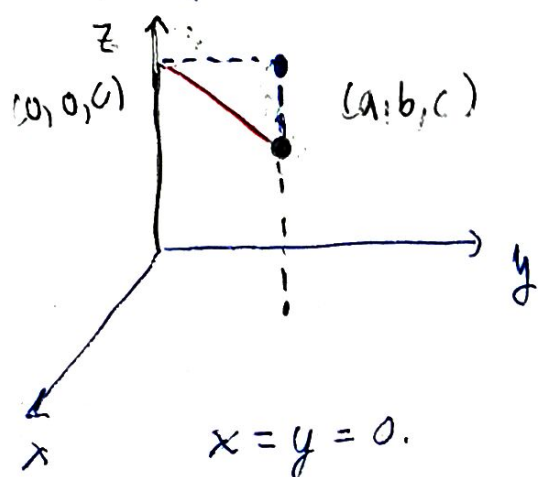
$$B(9, 0, 0), \quad P_B = (0, 0, 0), \quad d_B = 9.$$

$$C(0, 1, \sqrt{15}), \quad P_C = (0, 1, \sqrt{15}), \quad d_C = 0 \quad \checkmark$$

mismo punto, está sobre el plano yz

Distancia entre un punto y un eje.

¿Cuál de los siguientes puntos está más cercano al eje-z.



En el eje z $x=0, y=0$.

La proyección del punto $P(a, b, c)$ al eje z es el punto $P_1(0, 0, c)$.

$$d_{\min} = \sqrt{a^2 + b^2 + 0}$$

Encuentre las proyecciones sobre el eje y las distancias.

$$A(3, 0, -4), \quad P_A(0, 0, -4), \quad d_A = \sqrt{9 + 0 + 0} = 3.$$

$$B(9, 0, 0), \quad P_B(0, 0, 0), \quad d_B = \sqrt{81 + 0 + 0} = 9.$$

$$C(0, 1, \sqrt{15}), \quad P_C(0, 0, \sqrt{15}), \quad d_C = \sqrt{0 + 1 + 0} = 1$$

crítico.

más cercano

Plano $x=0$ plano yz
 $y=0$ plano xz
 $z=0$ plano xy

Ejes
 $x=0, y=0$ Eje-z
 $x=0, z=0$ Eje-y
 $y=0, z=0$ Eje-x

Superficies. Básicas: Planos, Cilindros y Esfera.

En 126 superficies cuádricas cilindro parabólico
cilindro (función).

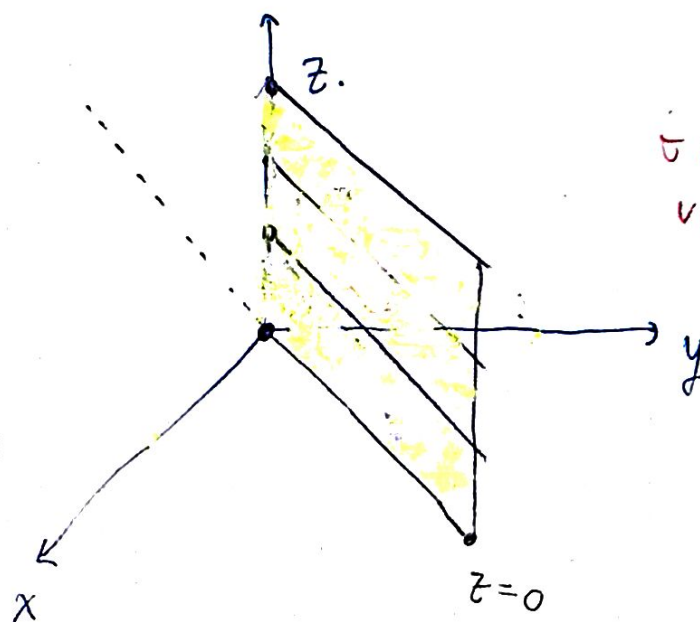
Ejercicio 7: Bosqueje el plano $y = x$ en el 1er octante.

$$z = 0: y = x$$

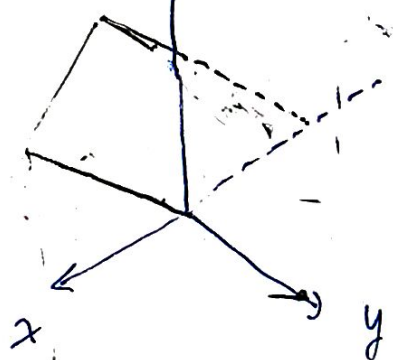
$$z = 1: y = x$$

$$z = a: y = x$$

sólo tiene
intersección con el
eje z .



Ejercicio 7a $z = x$.



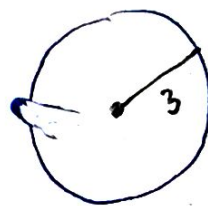
Difícil de graficar
por la perspectiva.

Ejercicio 8: Grafique las siguientes superficies

7.

a. $x^2 + z^2 = 9$.

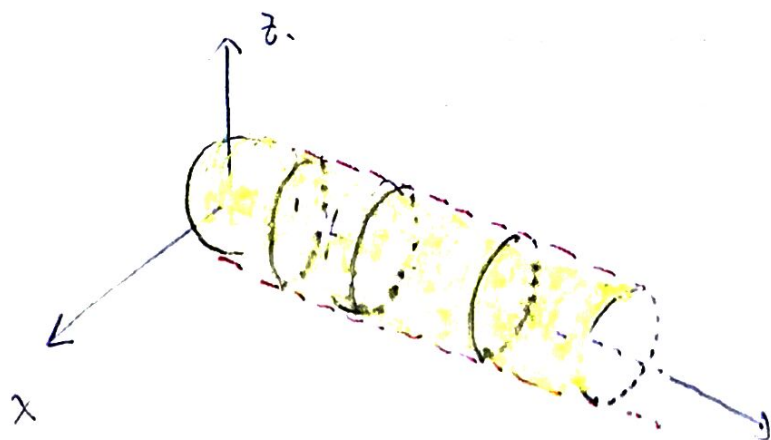
Variable y .



En 2-D
circunferencia
de radio 3.

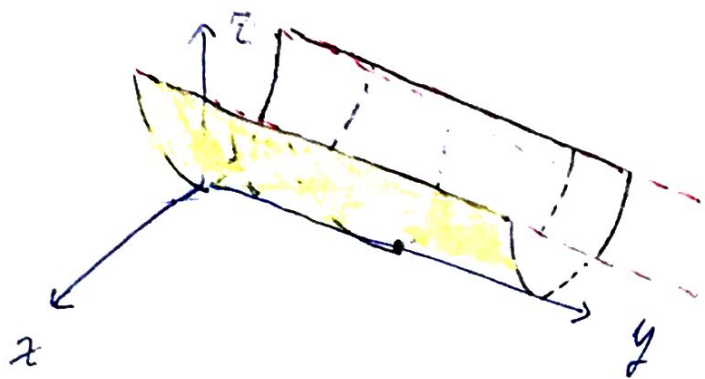
$$y=0 \quad x^2 + z^2 = 9$$

$$y=2 \quad x^2 + z^2 = 9$$



Cilindro circular de radio centrado en
el eje- y .

b. $z = x^2$.



hoja doblada
cilindro parabólico.