

# Material de apoyo - Cálculo Multivariable

David Gabriel Corzo Mcmath

2020-01-06

# Índice general

I	Exámenes Cortos	4
1.	Examen corto #01	5
2.	Examen corto #03	7
II	Material y documentos de apoyo	9
3.	Material o documento de apoyo #Cr	10
III	Laboratorios	15
4.	Laboratorio #01	16
5.	Laboratorio #01	18
IV	Tareas	26
6.	Tarea #02	27
7.	Tarea #02	29
8.	Tarea #03	42
9.	Tarea #03	44
10.	Tarea #04	55
11.	Tarea #04	57
12.	Tarea #05	70
13.	Tarea #05	72
14.	Tarea #06	82
15.	Tarea #06	84
16.	Tarea #08	96
17.	Tarea #09	98
18.	Tarea #10	100



# **Parte I**

## **Exámenes Cortos**

# Capítulo 1

Examen corto #01

## Corto #1 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: David Corzo Carnet: 20190432

Resuelva las siguientes problemas:

1. (50 pts.) Halle la ecuación de la esfera con centro  $(3, -6, 4)$  y radio 5. 10  
 ¿Cuál es la intersección de esta esfera con el plano  $xz$ ?

Ecuación :

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 6)^2 + (z - 4)^2} = 10$$

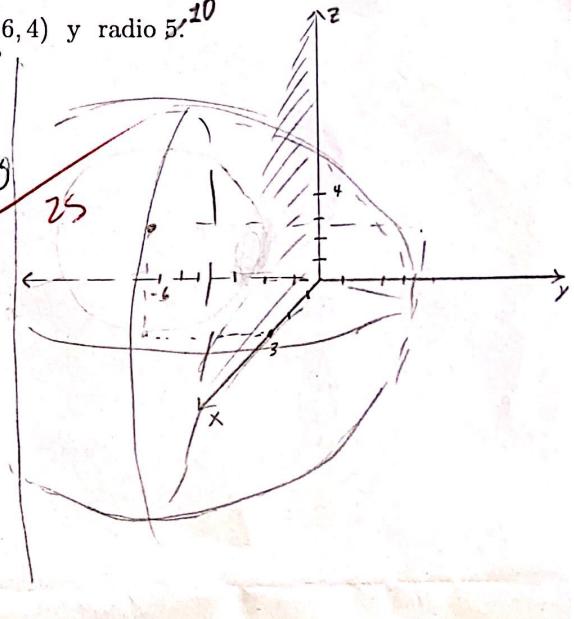
Se asume  $y = 0$ ;

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (z - 4)^2 + (6)^2} = 10$$

$$(x - 3)^2 + (z - 4)^2 + 36 = 10^2$$

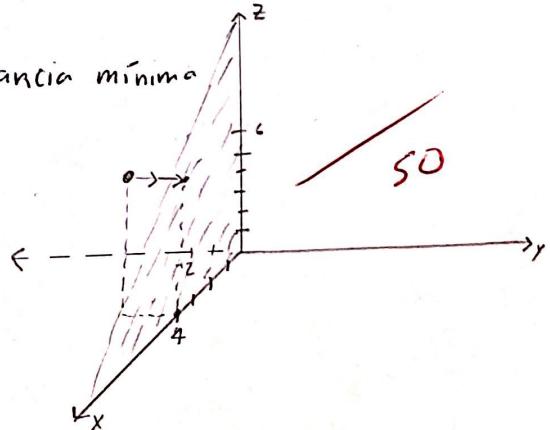
$$(x - 3)^2 + (z - 4)^2 = 100 - 36$$

Intersección :  $(x - 3)^2 + (z - 4)^2 = 64$  25



2. (50 pts.) Determine la distancia mínima del punto  $(4, -2, 6)$  al plano  $xz$ .

La distancia mínima  
es 2.



100/100

# Capítulo2

Examen corto #03

### Corto #3 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: David Corzo

Carnet: 20190430

~~90~~ / 100

Resuelva los siguientes problemas:

$$\begin{array}{r} 12 \\ 769 \\ + 496 \\ \hline 665 \\ 25 \\ \hline 690 \\ \\ \begin{array}{r} 14 \\ \cdot 14 \\ \hline 56 \\ 44 \\ \hline 496 \end{array} \end{array}$$

1. (50 pts.) Determine el área del triángulo entre los puntos  $P = (0, -2, 0)$ ,  $Q = (4, 1, -2)$  y  $R = (5, 3, 1)$ .

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{PQ} = \langle (4-0), (1-(-2)), (-2-0) \rangle = \langle 4, 3, -2 \rangle \\ \vec{w} &= \overrightarrow{PR} = \langle (5-0), (3-(-2)), (1-0) \rangle = \langle 5, 5, 1 \rangle \\ |\vec{u} \times \vec{w}| &= \left| \begin{array}{ccc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & 1 \end{array} \right| = \hat{i}[(3 \cdot 1) - (-2 \cdot 5)] - \hat{j}[(4 \cdot 1) - (-2 \cdot 5)] + \hat{k}[(4 \cdot 5) - (3 \cdot 5)] \\ &= \hat{i}[3 + 10] - \hat{j}[4 + 10] + \hat{k}[20 - 15] \\ &= 13\hat{i} - 14\hat{j} + 5\hat{k} \\ &= \langle 13, -14, 5 \rangle \\ &\quad \text{XO} \end{aligned}$$

2. (50 pts.) Encuentre el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores  $a = \langle 1, 5, -2 \rangle$ ,  $b = \langle 3, -1, 0 \rangle$ , y  $c = \langle 5, 9, -4 \rangle$ .

$$P_{\square} = |c \cdot (a \times b)|$$

$$\begin{aligned} (a \times b) &= \left| \begin{array}{ccc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{array} \right| = \hat{i}[(5 \cdot 0) - (-2 \cdot -1)] - \hat{j}[(1 \cdot 0) - (-2 \cdot 3)] + \hat{k}[(1 \cdot -1) - (5 \cdot 3)] \\ &= \hat{i}[0 - 2] - \hat{j}[0 + 6] + \hat{k}[-1 - 15] \\ &= -2\hat{i} - 6\hat{j} - 16\hat{k} \\ c \cdot (a \times b) &= \langle 5, 9, -4 \rangle \cdot \langle -2, -6, -16 \rangle \\ &= (5 \cdot -2) + (9 \cdot -6) + (-4 \cdot -16) \\ &= (-10) + (-54) + 64 \\ &= -64 + 64 = 0 \end{aligned}$$

<sup>8</sup> Hay un plano no, un paralelepípedo

50

$$\begin{aligned} |c \cdot (a \times b)| &= \sqrt{(-10)^2 + (-54)^2 + (-64)^2} \\ &= \sqrt{100 + 2916 + 4096} \\ &= \sqrt{7102} \end{aligned}$$

## **Parte II**

# **Material y documentos de apoyo**

# Capítulo3

Material o documento de apoyo #Cr

# CÁLCULO MULTIVARIABLE 1er Semestre 2020

## 1. Información General del Curso

### Libro de Texto:

- Stewart, James. [Cálculo. Trascendentes Tempranas](#). Octava Edición. Cengage Learning. México, 2013.  
ISBN: 978-607-526-548-3
- Ketelaar, Christiaan. [Cálculo Multivariable. Cuaderno de Trabajo](#). Editorial Arjé. 2018.  
ISBN: 978-1720958307.
- Cualquier otro texto de Cálculo (Leithold, Thomas y Anton) se puede utilizar como texto de apoyo.

### Requisito: Cálculo Integral

Se recomienda utilizar una calculadora ó un software como Desmos o Geogebra para realizar ejercicios y laboratorios.

## 2. Descripción del Curso

El curso comprende cuatro unidades: en la primera se abordan los vectores y la geometría del espacio; en la segunda se tratan las funciones vectoriales, la tercera es acerca de las derivadas parciales y sus aplicaciones; por último, la cuarta unidad comprende las integrales múltiples y sus diversas aplicaciones. Para lograr comprender estos temas, es necesario que el estudiante comprenda los temas de Cálculo Diferencial e Integral.

Este curso está organizado en línea por medio de la plataforma MiU. En esta plataforma voy a hacer anuncios, mantener comunicación electrónica y publicar materiales del curso como notas de clase, laboratorios, soluciones de exámenes, etc.

## 3. Objetivos

**Objetivo General:** Proporcionar al estudiante una sólida base conceptual y práctica en el cálculo multivariable que le permita profundizar en las áreas de su competencia y estar capacitado para abordar áreas afines.

### Objetivos Específicos

- Entender el concepto de un vector, operaciones vectoriales y aplicaciones de los vectores.
- Conocer y resolver problemas que involucren funciones vectoriales.
- Conocer el concepto de derivadas parciales y aplicarlas para resolver problemas aplicados a la ingeniería.
- Resolver problemas de optimización de varias variables y con restricciones.
- Conocer el concepto de integrales múltiples y aplicarlas en diversos contextos de ingeniería.

## 4. Evaluación

Se impartirán clases teóricas 2 días por semana y un día de laboratorio.

El curso tiene dos modalidades de evaluación. En la Modalidad A se realizan ejercicios en WebAssign de 5 pts. para tener un final de 20 pts, mientras que en la Modalidad B no se realizan ejercicios de WebAssign y se tiene un final de 25 pts.

Actividad	Modalidad A	Modalidad B
Exámenes Cortos (9)	9 %	9
Laboratorios (10)	10 %	10
Ejercicios WebAssign	5 %	0
Exámenes Parciales (4)	56 %	56
Examen Final	20 %	25
<b>TOTAL</b>	100 %	100

**Ejercicios WebAssign:** Cada semana se estarán subiendo ejercicios de WebAssign los cuales se deben realizar y entregar en línea.

**Exámenes Cortos:** Los exámenes cortos se pueden programar durante la sesión de laboratorio o los días martes durante la clase. El contenido de estos exámenes consistirá de los temas de clase, hojas de trabajo y laboratorios vistos en los días anteriores. Previo a los exámenes parciales, los exámenes cortos consistirán de exámenes parciales de simulacro de 1 hora que se realizarán durante la sesión de laboratorio. Van a haber más de diez exámenes cortos, por lo que sólo las nueve notas más altas entre todos los cortos se tomarán en cuenta.

**Laboratorios:** Durante la sesión de laboratorio semanal, los estudiantes completarán una serie de ejercicios sobre temas que se vieron en la semana anterior de clases. El estudiante deberá trabajar su laboratorio de manera individual pero puede recibir ayuda por parte del instructor. Van a haber más de 10 laboratorios, por lo que sólo los 10 notas más altas se tomarán en cuenta.

**Exámenes Parciales:** Van a haber tres exámenes parciales en las fechas y horarios listadas abajo. Los contenidos específicos de cada examen parcial serán anunciados con anticipación.

- Examen Parcial 1: Miércoles, 19 de febrero, 2:30 PM
- Examen Parcial 2: Miércoles, 18 de marzo, 2:30 PM
- Examen Parcial 3: Viernes, 3 de abril, 11:30 AM
- Examen Parcial 4: Jueves, 7 de mayo, 11:30 AM
- Examen Final: Jueves, 14 de mayo,

Una vez entregado el examen parcial el estudiante tiene un período posterior de 2 DÍAS para solicitar la revisión del mismo.

## 5. Temas

1. Vectores y Geometría en el Espacio
2. Funciones Vectoriales
3. Derivadas Parciales
4. Integrales Múltiples

Algunos temas se pueden presentar en un orden diferente o con un enfoque diferente al del libro de texto (Consulte el cronograma tentativo en la página 3.)

### CRONOGRAMA

Sesión	Dia	Fecha	Tema
01	Mar	07 Ene	12.1.1 Sistemas 3-D y Planos
02	Jue	09 Ene	12.1.2 Distancias y Superficies Básicas
03	Mar	14 Ene	12.2 Vectores
04	Jue	16 Ene	12.3 Producto Punto
05	Mar	21 Ene	12.4 Producto Cruz
06	Jue	23 Ene	12.5 Ecuaciones de Rectas y Planos
07	Mar	28 Ene	13.1 Funciones vectoriales y curvas en el espacio
08	Jue	30 Ene	13.2 Derivadas e integrales de funciones vectoriales
09	Mar	04 Feb	13.4 Movimiento en el espacio: velocidad y aceleración
10	Jue	06 Feb	13.3 Longitud de arco
11	Mar	11 Feb	14.1 Funciones de Varias Variables
12	Jue	13 Feb	12.6 Superficies Cuádricas
13	Mar	18 Feb	Repaso
	Mie	19 Feb	<b>EXAMEN PARCIAL 1</b>
14	Jue	20 Feb	14.3 Derivadas Parciales
15	Mar	25 Feb	14.4 Planos Tangentes y Aproximaciones Lineales
16	Jue	27 Mar	14.5 Regla de la Cadena
17	Mar	03 Mar	14.6 Derivadas Direccionales y Gradientes
18	Jue	05 Mar	14.7 Valores Máximos y mínimos
19	Mar	10 Mar	14.8 Multiplicadores de Lagrange
20	Jue	12 Mar	14.8 Multiplicadores de Lagrange
21	Mar	17 Mar	Repaso
	Mie	18 Mar	<b>EXAMEN PARCIAL 2</b>
22	Jue	19 Mar	15.1 Integrales Dobles
23	Mar	24 Mar	15.2 Integrales Iteradas
24	Jue	26 Mar	15.3 Integrales Dobles sobre regiones generales
25	Mar	31 Mar	15.4 Integrales Dobles coordenadas polares
26	Jue	02 Abr	Repaso
	Vie	03 Abr	<b>EXAMEN PARCIAL 3</b>
			Semana Santa 6-10 abril
27	Mar	14 Abr	15.6 Área Superficial
28	Jue	16 Abr	15.7 Integrales Triples Cartesianas
29	Mar	21 Abr	15.8 Integrales Triples Cilíndricas
30	Jue	23 Abr	15.8 Integrales Triples Cilíndricas
31	Mar	28 Abr	15.9 Integrales Triples Esféricas
32	Jue	30 Abr	15.9 Integrales Triples Esféricas
33	Mar	05 May	Repaso
	Jue	07 May	<b>EXAMEN PARCIAL 4</b>
	Jue	14 May	<b>EXAMEN FINAL</b>

## 6. Políticas del Curso

- **Cambio de Fechas:** Cualquier cambio a las fechas y contenidos de los exámenes será notificada por escrito por parte del catedrático.
- **Exámenes Cortos o Laboratorios:** No habrá reposición de exámenes cortos o laboratorios en caso el estudiante se ausente estos días.
- **Exámenes Extemporáneos:** En caso de una ausencia a un examen parcial o final, ésta deberá ser debidamente justificada por el estudiante y el estudiante deberá solicitar un examen extemporáneo en la Facultad de Ciencias Económicas. Posteriormente el estudiante y el catedrático deberán acordar una fecha para realizar el examen extemporáneo.
- **Derecho a Examen Final:** Para tener derecho a examen final el estudiante deberá tener una zona de por lo menos 41 puntos.
- **Exoneración de Examen Final:** Para que un estudiante sea exonerado del examen final debe tener una zona mayor o igual a 74 puntos (no se redondearán zonas entre 73.5 y 73.9 puntos), ó de 70 pts si su zona es de 75 pts.. La exoneración consistirá en una nota de examen final correspondiente a 18 puntos. En caso un estudiante exonerado quiera optar a un punteo mayor en el examen final, puedo realizarlo pero pierde el derecho de exoneración al entregar el examen final).
- **Aprobación del Curso:** Para aprobar el curso el estudiante deberá tener una nota final mayor a igual a 61 puntos (no se redondearán notas finales entre 60.5 y 60.9 puntos). Una vez publicadas las notas finales, el estudiante puede solicitar una revisión de examen final en la Facultad de Ciencias Económicas.
- Puede haber algunos temas que el catedrático pueda asignar para que sean estudiados por cuenta del estudiante, dicho material también se evaluará.

*El programa de este curso está sujeto a cambios.*

# **Parte III**

## **Laboratorios**

# Capítulo 4

## Laboratorio #01

# Laboratorio #1 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 16 de enero

Nombre: \_\_\_\_\_ Carnet: \_\_\_\_\_

Tema:	1	2	3	4	5	6	7	Total
Puntos:	20	20	20	20	10	10	10	110
Nota:								

Resuelva las siguientes ejercicios:

1. (20 pts.) Determine la distancia del punto  $(4, -2, 6)$  al eje  $x$
2. (20 pts.) Halle la ecuación de la esfera con centro  $(-3, 2, 5)$  y radio 4.  
¿Cuál es la intersección de esta esfera con el plano  $yz$ ?
3. (20 pts.) Encuentre el radio y centro de la esfera cuya ecuación es  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15$ .
4. (20 pts.) Halle la longitud de los lados del triángulo  $P(3, -2, -3), Q(7, 0, 1), R(1, 2, 1)$ .  
¿Es un triángulo isósceles? ¿Es un triángulo rectángulo? Utilice el Teorema de Pitágoras.
5. (10 pts.) Describa y bosqueje la superficie en  $R^3$  representada por la ecuación  $x + y = 2$ .
6. (10 pts.) Describa y bosqueje la superficie en  $R^3$  representada por la ecuación  $2z = 8 - 4x$ .
7. (10 pts.) **BONO:**  
Encuentre la ecuación de la esfera con centro  $(2, -3, 6)$  que toca el plano  $x$ .

# Capítulo 5

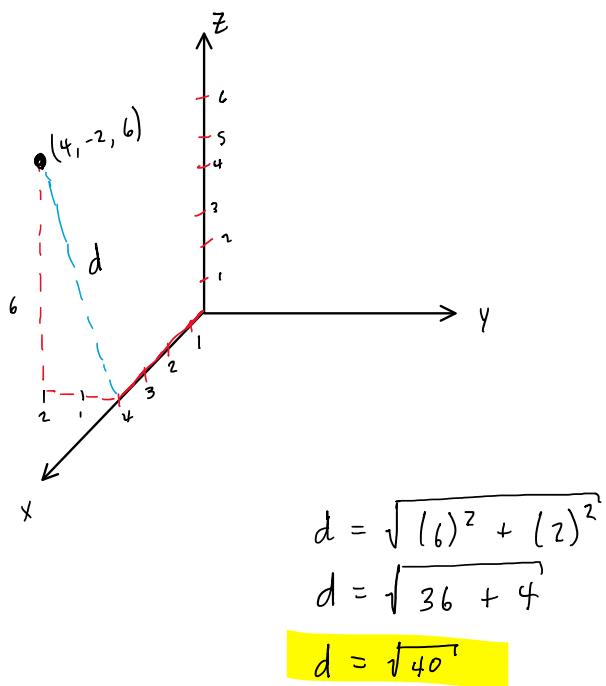
## Laboratorio #01

# LABORATORIO #01

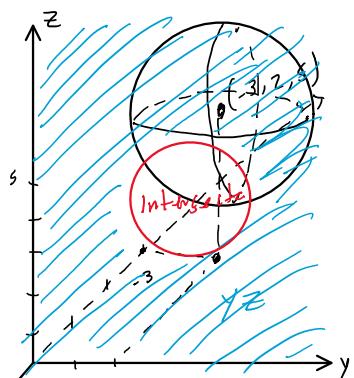
Wednesday, January 15, 2020  
13:03

DAVID CORZO 20190432

1) Punto  $(4, -2, 6)$  al eje  $x$ :



- 2) Ecuación de la esfera con centro  $(-3, 2, 5)$  & radio 4. Intersección de la esfera con el plano  $yz$ .



$$\begin{aligned} r^2 &= (x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 \\ &= \sqrt{(x - (-3))^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2} \\ &= \sqrt{(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2} \end{aligned}$$

$$4 = \sqrt{(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2}$$

Se asume  $x = 0$

$$(4)^2 = \left( \sqrt{(0 + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2} \right)^2$$

$$16 = 9 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2$$

$$16 - 9 = (y - 2)^2 + (z - 5)^2$$

$$7 = (y - 2)^2 + (z - 5)^2$$

Queda la ecuación de un círculo correspondiente a el círculo que deja la esfera en el plano  $yz$ .

3) Encuentre el radio y centro de la esfera cuya ec. es  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15$ .

$$x: \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$$

$$y: \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4$$

$$z: \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$$

$$[x^2 - 2x + 1] + [y^2 - 4y + 4] + [z^2 + 8z + 16] = 21 + 15$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 36$$

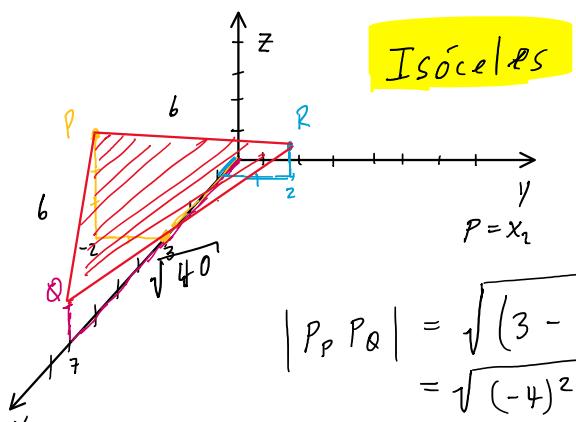
$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2} = 6$$

radio: 6

centro: (1, 2, -4)

- 4) Longitud de los lados del triángulo  $P(3, -2, -3)$ ,  $Q(7, 0, 1)$ ,  $R(1, 2, 1)$ . ¿Isóceles, triángulo rectángulo?

$$|P_A \& P_B| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



$$\begin{aligned} |P_P P_Q| &= \sqrt{(3 - 7)^2 + (-2 - 0)^2 + (-3 - 1)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} \\ &= \sqrt{36} = 6 \end{aligned}$$

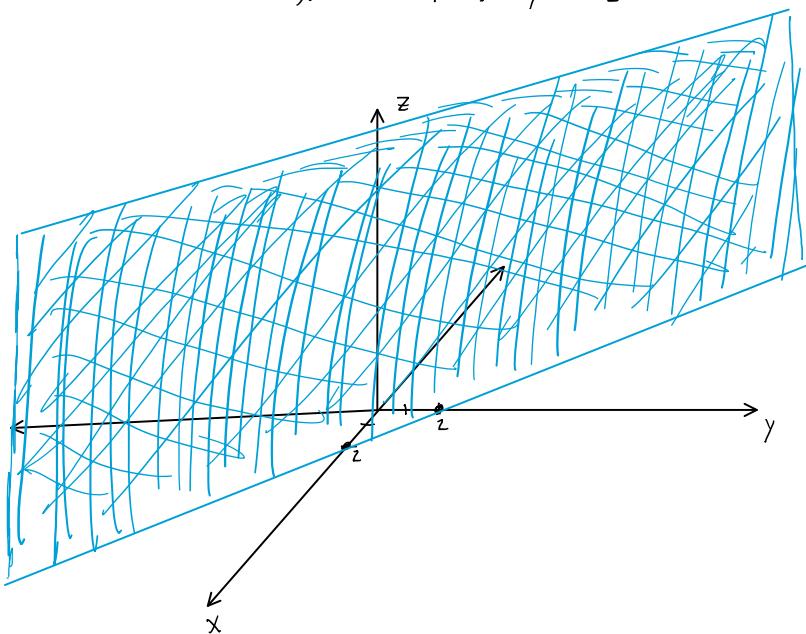
$$\begin{aligned} |P_Q P_R| &= \sqrt{(7 - 1)^2 + (0 - 2)^2 + (1 - 1)^2} \\ &= \sqrt{(6)^2 + (-2)^2 + (0)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |P_R P_P| &= \sqrt{(1 - 3)^2 + (2 + 2)^2 + (1 + 3)^2} \\ &= \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (4)^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6 \end{aligned}$$

5) Describa & por que la superficie en  $\mathbb{R}^3$  representada por la ecuación  $x + y = 2$

$$x = 2 - y ; \quad y = 2 - x$$

$$x + y + 0z = 2$$



6) Describa y bosqueje la superficie  $\mathbb{R}^3$  representada por la ecuación  $zz = 8 - 4x$

$$\text{I; } x = 0$$

$$\text{I; } z = 0$$

$$zz - 8 = 0$$

$$0 = 8 - 4x$$

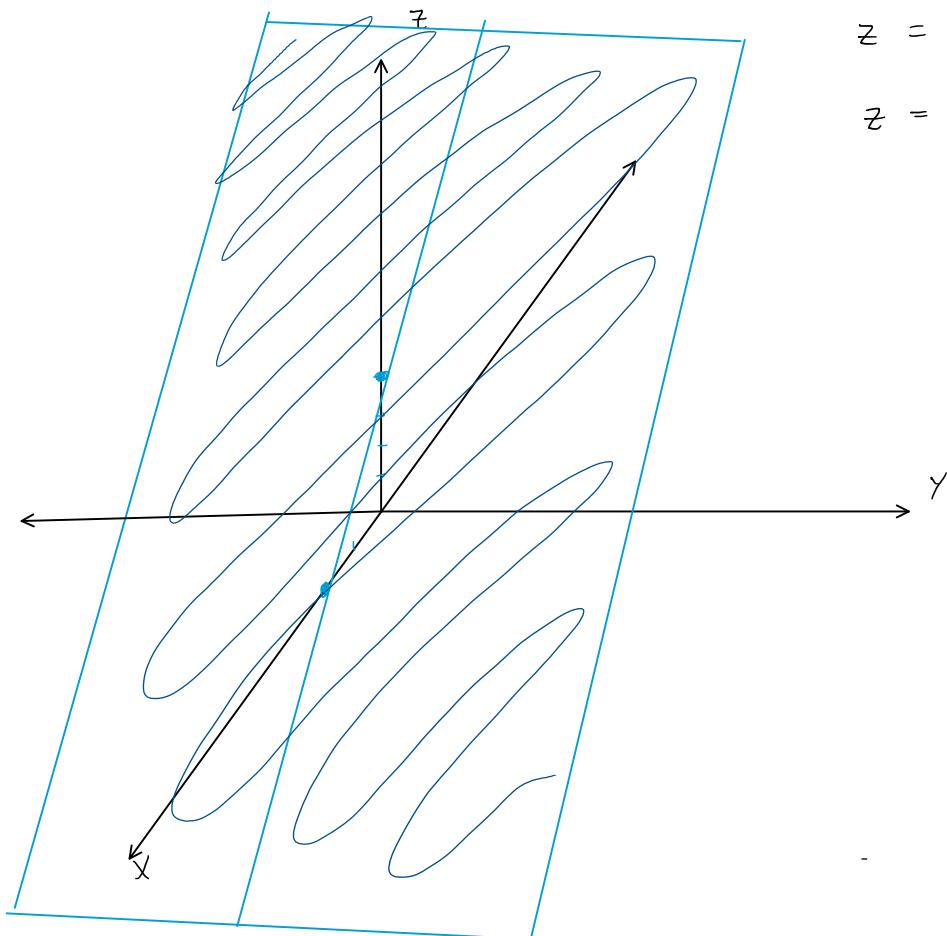
$$z = \frac{+8}{2}$$

$$-8 = -4x$$

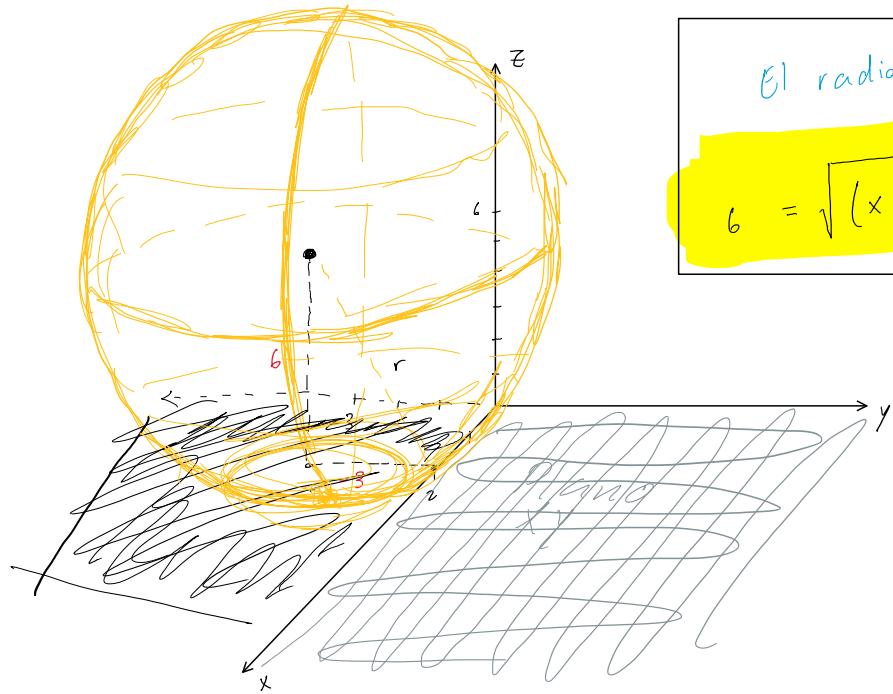
$$z = +4$$

$$\frac{-8}{-4} = x$$

$$x = 2$$



7) Bono: Da ecuación de la esfera con centro  $(2, -3, 6)$  que toca el plano  $xy$ .



El radio es 6.

$$6 = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2}$$

## **Parte IV**

### **Tareas**

# Capítulo 6

Tarea #02

## Tarea #2 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 23 de enero

Nombre: \_\_\_\_\_ Carnet: \_\_\_\_\_

Tema:	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos:	20	20	20	20	22	0	102
Nota:							

Resuelva las siguientes ejercicios:

1. Dados los vectores:  $a = \langle 5, -12, 0 \rangle$ ,  $b = \langle 0, -3, -6 \rangle$ ,  $c = \langle 1, 0, 2 \rangle$  encuentre:
  - (a) (5 pts.)  $a + 2(b + c) - (a - 2b)$
  - (b) (5 pts.)  $2a \cdot (3b + 4c) - 2c \cdot (4a + 0b)$
  - (c) (5 pts.)  $|a + c - (a + b)|$
  - (d) (5 pts.)  $|a + c| - |a + b|$
2. (20 pts.) Halle un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector  $\langle -3, 4, 6, -8 \rangle$
3. Encuentre el ángulo entre los siguientes vectores.  
No necesita utilizar calculadora para encontrar el ángulo.
  - (a) (10 pts.)  $\mathbf{a} = \langle 3, 0 \rangle$ ,  $\mathbf{b} = \langle 5, 5 \rangle$
  - (b) (10 pts.)  $\mathbf{b} = \langle 2, -4, 5 \rangle$ ,  $\mathbf{b} = \langle -2, 4, -5 \rangle$
4. Determine si los vectores son ortogonales, paralelos o ninguno.
  - (a) (5 pts.)  $a = \langle -5, 3, 7 \rangle$ ,  $b = \langle 6, -8, 2 \rangle$
  - (b) (5 pts.)  $a = \langle 4, 6 \rangle$ ,  $b = \langle -3, 2 \rangle$
  - (c) (5 pts.)  $a = -i + 2j + 5k$ ,  $b = 3i + 4j - k$
  - (d) (5 pts.)  $a = 2i + 6j - 4k$ ,  $b = -3i - 9j + 6k$
5. Considere los vectores  $a = \langle 3, 6, -2 \rangle$  y  $b = \langle 1, 2, 3 \rangle$ . Encuentre las proyecciones escalar y vectorial:
  - (a) (8 pts.) de  $\mathbf{b}$  sobre  $\mathbf{a}$ .
  - (b) (8 pts.) de  $\mathbf{a}$  sobre  $\mathbf{b}$ .
  - (c) (6 pts.) Explique si  $\text{proy}_a b = \text{proy}_b a$ .
6. **BONO: (10 pts.)**  
Encuentre los valores de  $x$  tales que el ángulo entre los vectores  $\langle 2, 1, -1 \rangle$  y  $\langle 1, x, 0 \rangle$  es de  $45^\circ$ .

# Capítulo 7

Tarea #02

## Tarea #2

David Gabriel Corzo Mcmath - 20190432  
Cálculo Multivariable

### 1) Vectors:

$$a = \langle 5, -12, 0 \rangle$$

$$b = \langle 0, -3, -6 \rangle$$

$$c = \langle 1, 0, 2 \rangle$$

$$2b = \langle 0, -6, -12 \rangle$$

$$a + 2(b + c) - (a - 2b) =$$

$$= a + 2[(0+1), (-3+0), (-6+2)] - [(5-0), (-12+6), (0+12)]$$

$$= a + 2 \langle 1, -3, -4 \rangle - \langle 5, -6, 12 \rangle$$

$$= a + \langle 2, -6, -8 \rangle - \langle 5, -6, 12 \rangle$$

$$= a + \langle (2-5), (-6+6), (-8-12) \rangle$$

$$= a + \langle -3, 0, -20 \rangle$$

$$= \langle 5, -12, 0 \rangle + \langle -3, 0, -20 \rangle$$

$$= \langle (5-3), (-12+0), (0-20) \rangle$$

$$= \boxed{\langle 2, -12, -20 \rangle}$$

$$b) 2a \cdot (3b + 4c) - 2c \cdot (4a + \emptyset b)$$

$$2a = \langle 10, -24, 0 \rangle$$

$$4a = \langle 20, -48, 0 \rangle$$

$$3b = \langle 0, -9, -24 \rangle$$

$$\emptyset b = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

$$2c = \langle 2, 0, 4 \rangle$$

# Sacar nuevos vectores

$$4c = \langle 4, 0, 8 \rangle$$

$$= 2a \cdot \langle (0+4), (-9+0), (-24+8) \rangle - 2c \cdot \langle (20+0), (-48+0), (0+0) \rangle$$

$$= 2a \cdot \langle 4, -9, -16 \rangle - 2c \cdot \langle 20, -48, 0 \rangle$$

$$= \langle (10 \cdot 4), (-24 \cdot -9), (0 \cdot -16) \rangle - \langle (2 \cdot 20), (0 \cdot -48), (4 \cdot 0) \rangle$$

$$= \langle 40, 216, 0 \rangle - \langle 40, 0, 0 \rangle$$

$$= \langle (40 - 40), (216 - 0), (0, 0) \rangle$$

$$= \langle 0, 216, 0 \rangle$$

$$c) |a + c - (a + b)| =$$

$$a = \langle 5, -12, 0 \rangle \quad b = \langle 0, -3, -6 \rangle \quad c = \langle 1, 0, 2 \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \langle (5+1), (-12+0), (0+2) \rangle - \langle (5+0), (-12-3), (0-6) \rangle \right| \\
 &= \left| \langle 6, -12, 2 \rangle - \langle 5, -15, -6 \rangle \right| \quad \Rightarrow = \sqrt{1+9+64} \\
 &= \left| \langle (6-5), (-12+15), (2+6) \rangle \right| \quad = \sqrt{74} \\
 &= \left| \langle 1, 3, 8 \rangle \right| \quad \Rightarrow \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (8)^2}
 \end{aligned}$$

$$d) |a + c| - |a + b|$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \langle (5+1), (-12+0), (0+2) \rangle \right| - \left| \langle (5+0), (-12-3), (0-6) \rangle \right| \\
 &= \left| \langle 6, -12, 2 \rangle \right| - \left| \langle 5, -15, -6 \rangle \right| \\
 &= \sqrt{6^2 + (-12)^2 + 2^2} - \sqrt{5^2 + (-15)^2 + (-6)^2} \\
 &= \sqrt{36 + 144 + 4} - \sqrt{25 + 225 + 36} \\
 &= \sqrt{184} - \sqrt{286} \quad \# \cos \theta = \frac{A \cdot B}{|A||B|}
 \end{aligned}$$

2) Misma dirección que el vector  $\langle -3, 4, 6, -8 \rangle$

$$= |\langle -3, 4, 6, -8 \rangle|$$

Calcular magnitud

$$= \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (6)^2 + (-8)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16 + 36 + 64}$$

$$= \sqrt{125}$$

Entonces ...

$$\left| \left\langle -\frac{3}{\sqrt{125}}, \frac{4}{\sqrt{125}}, \frac{6}{\sqrt{125}}, -\frac{8}{\sqrt{125}} \right\rangle \right| = 1$$

Comprobar ...

$$= \sqrt{\frac{9}{125} + \frac{16}{125} + \frac{36}{125} + \frac{64}{125}} = \sqrt{1} = 1$$

3) Encuentre el ángulo de los vectores

a)  $a = \langle 3, 0 \rangle, b = \langle 5, 5 \rangle$

$$\begin{aligned}\theta &= \cos^{-1} \left( \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} \right) \\ &= \cos^{-1} \left( \frac{\langle (3 \cdot 5), (0 \cdot 5) \rangle}{|\langle 3, 0 \rangle| |\langle 5, 5 \rangle|} \right) \\ &= \cos^{-1} \left( \frac{15 + 0}{3 \cdot \sqrt{50}} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{15}{3 \cdot \sqrt{2 \cdot 25}} \right) \\ &= \cos^{-1} \left( \frac{15}{3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{15}{15} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} \right) \\ &= \cos^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \boxed{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

$$b) \quad a = \langle 2, -4, 5 \rangle$$

$$b = \langle -2, 4, -5 \rangle$$

$$\Theta = \cos^{-1} \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|a\| \|b\|} \right)$$

$$= \cos^{-1} \left( \frac{-4s}{(4s)^{1/2} (4s)^{1/2}} \right)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$= \cos^{-1} \left( \frac{-4s}{4s} \right)$$

$$= \cos^{-1}(-1)$$

$$= \pi$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 2 & -4 & 5 \\ \hline -2 & & 4 & -5 \\ \hline -4 & -16 & -25 \end{array}$$

$$= (-4) + (-16) + (-25)$$

$$= -20 - 25$$

$$= -45$$

$$\begin{aligned} |a| &= \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (5)^2} \\ &= \sqrt{4 + 16 + 25} = \sqrt{45} \end{aligned}$$

$$|b|$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (4)^2 + (-5)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 16 + 25} = \sqrt{45}$$

4) Determine si los vectores son ortogonales, paralelos o ninguno.

a)  $a = \langle -5, 3, 7 \rangle \quad b = \langle 6, -8, 2 \rangle$

# Producto punto de  $a$  &  $b$

$$\begin{array}{c|c|c} -5 & 3 & 7 \\ \cdot 6 & \cdot -8 & \cdot 2 \\ \hline -30 & -24 & +14 \end{array}$$

$$(-30) + (-24) + (14) = \boxed{-40} \quad \text{Ninguno}$$

b)  $a = \langle 4, 6 \rangle$

$$b = \langle -3, 2 \rangle$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

$$\begin{array}{c|c} 4 & 6 \\ -3 & 2 \\ \hline -12 & 12 \end{array}$$

$\rightarrow \underbrace{(-12) + 12}_{0}$

Son ortogonales

$$c) \quad a = -i + 2j + 5k$$

$$b = 3i + 4j - k$$

$$a = \langle -1, 2, 5 \rangle$$

$$b = \langle 3, 4, -1 \rangle$$

-1	2	5
3	4	-1
-3	8	-5

$$\begin{array}{r} (-3) + 8 + (-5) \\ \hline -8 + 8 \\ 0 \end{array}$$

son ortogonales

$$d) \quad a = 2i + 6j - 4k$$

$$b = -3i - 9j + 6k$$

$$a = \langle 2, 6, -4 \rangle$$

$$b = \langle -3, -9, 6 \rangle$$

2	6	-4
-3	-9	6
-6	54	-24

$$(-6) + 54 + (-24)$$

$$-30 + 54$$

$$24$$

son paralelos por  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  son múltiplos

entre sí.

5) Considerar vectores:

$$a = \langle 3, 6, -2 \rangle \text{ esc: } \text{Proy}_{ab} = \frac{a \cdot b}{|a|}$$

$$b = \langle 1, 2, 3 \rangle \text{ vec: } \text{Proy}_{ab} = \frac{a \cdot b}{|a|} \frac{a}{|a|}$$

a) Proyección de  $b$  sobre  $a$ :

Escalar:

$$\begin{aligned} \text{proy}_{ab} &= \frac{3 + 12 - 6}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{9 + 36 + 4}} = \\ &= \frac{9}{\sqrt{49}} = \boxed{\frac{9}{7}} \end{aligned}$$

Vectorial:

$$\begin{aligned} \text{Proy}_{ab} &= \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{49}} \langle 3, 6, -2 \rangle \\ &= \frac{9}{(49)^{\frac{1}{2}} \cdot (49)^{\frac{1}{2}}} \langle 3, 6, -2 \rangle \\ &= \frac{9}{49} \langle 3, 6, -2 \rangle \\ &= \boxed{\left\langle \frac{27}{49}, \frac{54}{49}, -\frac{18}{49} \right\rangle} \end{aligned}$$

b)  $a$  sobre  $b$ :  $a = \langle 3, 6, -2 \rangle$

$$a = \langle 3, 6, -2 \rangle$$

$$b = \langle 1, 2, 3 \rangle$$

$$\text{proy}_b a = \frac{a \cdot b}{|b|} \cdot \frac{b}{|b|}$$

$$\text{escalar: } \text{proy}_b a = \frac{9}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}}$$

$$\text{vectorial: } \text{proy}_b a = \frac{9}{\sqrt{14}} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \langle 1, 2, 3 \rangle$$

$$= \frac{9}{(\sqrt{14})^{\frac{1}{2}} \cdot (\sqrt{14})^{\frac{1}{2}}} \langle 1, 2, 3 \rangle$$

$$= \frac{9}{14} \langle 1, 2, 3 \rangle$$

$$= \left\langle \frac{9}{14}, \frac{18}{14}, \frac{27}{14} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{9}{14}, \frac{9}{7}, \frac{27}{14} \right\rangle$$

c) proyección de  $b$  sobre  $a$  no es igual a proyección de  $a$  sobre  $b$ ; si estos cumplen la condición de  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  si resultan ser la misma proyección.

\* el lab decía  $\text{proy}_{ab} = \text{proy}_{ba}$  que sí serían iguales pero asumí que quería decir  $\text{proy}_{ab} = \text{proy}_a$  que en 39 cuyo caso no siempre son iguales.

BONO: Encontrar tal valor de

x que  $\langle 2, 1, -1 \rangle$  &  $\langle 1, x, 0 \rangle$  es  
de  $45^\circ$ .

$\theta$  tiene que ser igual a  $45^\circ$  ó  $\frac{\pi}{4}$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{[(2 \cdot 1) + (1 \cdot x) + (-1 \cdot 0)]}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + x^2 + 0^2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{2 + x}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + x^2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{2 + x}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + x^2}}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 + x}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + x^2}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + x^2} = 2 + x$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{6}\right) \sqrt{1 + x^2}$$

$$\frac{\sqrt{12}}{2} \sqrt{1 + x^2} = 2 + x$$

$$\left(\frac{\sqrt{12}}{2} \sqrt{1 + x^2}\right)^2 = (2 + x)^2$$

$$3(1 + x^2) = x^2 + 4x + 4$$

$$3 + 3x^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$\begin{aligned} 3 + 3x^2 &= x^2 + 4x + 4 \\ 0 &= x^2 - 3x + 4x + 4 - 3 \\ 0 &= -2x^2 + 4x + 1 \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-(4) \pm \sqrt{16 - 4(-2)(1)}}{2(-2)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{-4} \end{aligned}$$



$$= \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{-4}$$

$$\approx -0.22$$

$$\approx 2.22$$

# Capítulo 8

Tarea #03

### Tarea #3 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 30 de enero

Nombre: \_\_\_\_\_ Carnet: \_\_\_\_\_

Tema:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Puntos:	20	10	10	10	20	10	10	10	0	100
Nota:										

Resuelva las siguientes ejercicios:

- Diga si cada expresión tiene sentido. Si no, explique por qué. En caso afirmativo, diga si la expresión es un vector ó un escalar.
  - (5 pts.)  $(a \cdot b) \cdot c$
  - (5 pts.)  $(a \cdot b) \times c$
  - (5 pts.)  $(a \times b) \times c$
  - (5 pts.)  $(a \times c) \cdot b$
- (10 pts.) Encuentre dos vectores unitarios ortogonales a  $\langle 3, 2, 1 \rangle$  y  $\langle -1, 1, 0 \rangle$ .
- (10 pts.) Calcule el triple producto escalar entre  $a = \langle 1, 2, 3 \rangle$ ,  $b = \langle 3, 2, 5 \rangle$ , y  $c = \langle 0, 4, 3 \rangle$ .  
¿Es  $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$ ?
- (10 pts.) Calcule el área del paralelogramo entre los puntos  $A(1, 4, -7)$ ,  $B(2, -1, 4)$  y  $C(0, -9, 18)$ .
- Considere los puntos  $P = (1, 0, 1)$ ,  $Q = (-2, 1, 3)$  y  $R = (4, 2, 5)$ .
  - (10 pts.) Encuentre un vector no cero ortogonal al plano que contiene los tres puntos.
  - (10 pts.) Determine el área del triángulo  $PQR$ .
- (10 pts.) Encuentre el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores  $a = \langle 1, 2, 3 \rangle$ ,  $b = \langle -1, 1, 2 \rangle$  y  $c = \langle 2, 1, 4 \rangle$ .
- (10 pts.) ¿Están los puntos  $A(1, 4, -7)$ ,  $B(2, -1, 4)$ ,  $C(0, -9, 18)$  y  $D(0, 0, 0)$  sobre el mismo plano?
- (10 pts.) Si  $(a \cdot b) = \sqrt{3}$  y  $(a \times b) = \langle 1, 2, 2 \rangle$  encuentre el ángulo entre  $a$  y  $b$ .
- BONO: (10 pts.)** Utilice propiedades del producto punto y cruz para demostrar que
  - $|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2$
  - $(a - b) \times (a + b) = 2(a \times b)$

#### Propiedades del producto punto y del producto cruz

Si  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  son vectores y  $k$  es un escalar, entonces

- |                                                                                                             |                                                                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} =  \mathbf{a} ^2$                                                           | 6. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$                                                                         |
| 2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$                                              | 7. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$                                                    |
| 3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ | 8. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \pm \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \pm (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$ |
| 4. $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b})$       | 9. $ \mathbf{a} \times \mathbf{b}  =  \mathbf{a}   \mathbf{b}  \sin \theta$                                            |
| 5. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{b} = 0$                                                                        | 10. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =  \mathbf{a}   \mathbf{b}  \cos \theta$                                              |

# Capítulo9

Tarea #03



1) a.  $(a \cdot b) \cdot c$  # asumiendo que  $a, b, c$  son vectores.

Resulta en un escalar.  
productos punto resultan en escalares siempre

b.  $(a \cdot b) \times c$

El producto cruz es entre vectores no se puede hacer entre escalares,  
 $a \cdot b$  resulta en un escalar por ende no tiene sentido.

c.  $(a \times b) \times c$

Resulta en un vector

d.  $(a \times c) \cdot b$

Resulta en un escalar. producto cruz de  $a, c$  resulta en vector, ese vector con producto punto  $b$  resulta en escalar

2) Encuentre vectores unitarios ortogonales

a  $\langle 3, 2, 1 \rangle$  &  $\langle -1, 1, 0 \rangle$ .

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} [(2 \cdot 0) - (1 \cdot 1)] - \hat{j} [(3 \cdot 0) - (1 \cdot -1)] + \hat{k} [(3 \cdot 1) - (2 \cdot -1)] \\
 = \hat{i} [0 - 1] - \hat{j} [0 - (-1)] + \hat{k} [3 - (-2)] \\
 = -\hat{i} - \hat{j} + 5 \hat{k}$$

+46

$\therefore \langle -1, -1, 5 \rangle$

# Este es el vector ortogonal a  
 #  $\langle 3, 2, 1 \rangle$  &  $\langle -1, 1, 0 \rangle$  Ahora sólo  
 # falta la división por la magnitud  
 # para que sea ortogonal unitario.

$$|O_{\perp}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (5)^2} = \sqrt{1 + 1 + 25} = \sqrt{27}$$

unit  $\Rightarrow O_{\perp} \cdot \frac{1}{\sqrt{27}}$   $\Rightarrow \langle -1, -1, 5 \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{27}} =$

$$R_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{5}{\sqrt{27}} \right\rangle$$

# invierte signos  
 para encontrar  
 segundo vector

$$R_2 = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{27}}, -\frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{5}{\sqrt{27}} \right\rangle$$

# Comprobación de ser unitarios.

$$1 = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{27}}\right)^2}$$

$$1 = \sqrt{\left(\frac{1}{27}\right) + \left(\frac{1}{27}\right) + \left(\frac{25}{27}\right)}$$

$$1 = \sqrt{\frac{1 + 1 + 25}{27}}$$

$$1 = \sqrt{\frac{27}{27}}$$

$$1 = 1$$

$\therefore$  es unitario & ortogonal.

- 3) Calcula el triple producto escalar entre  $a = \langle 1, 2, 3 \rangle$  &  $b = \langle 3, 2, 5 \rangle$  &  $c = \langle 0, 4, 3 \rangle$  i  $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$

$$\begin{aligned}
 a \times c &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}[(2 \cdot 3) - (5 \cdot 4)] - \hat{j}[(3 \cdot 3) - (5 \cdot 0)] + \hat{k}[(3 \cdot 4) - (2 \cdot 0)] \\
 &= \hat{i}[6 - 20] - \hat{j}[9 - 0] + \hat{k}[12 - 0] \\
 &= \hat{i}[-14] - \hat{j}[9] + \hat{k}[12] \\
 &= -14\hat{i} - 9\hat{j} + 12\hat{k} \\
 &= \langle -14, -9, 12 \rangle
 \end{aligned}$$

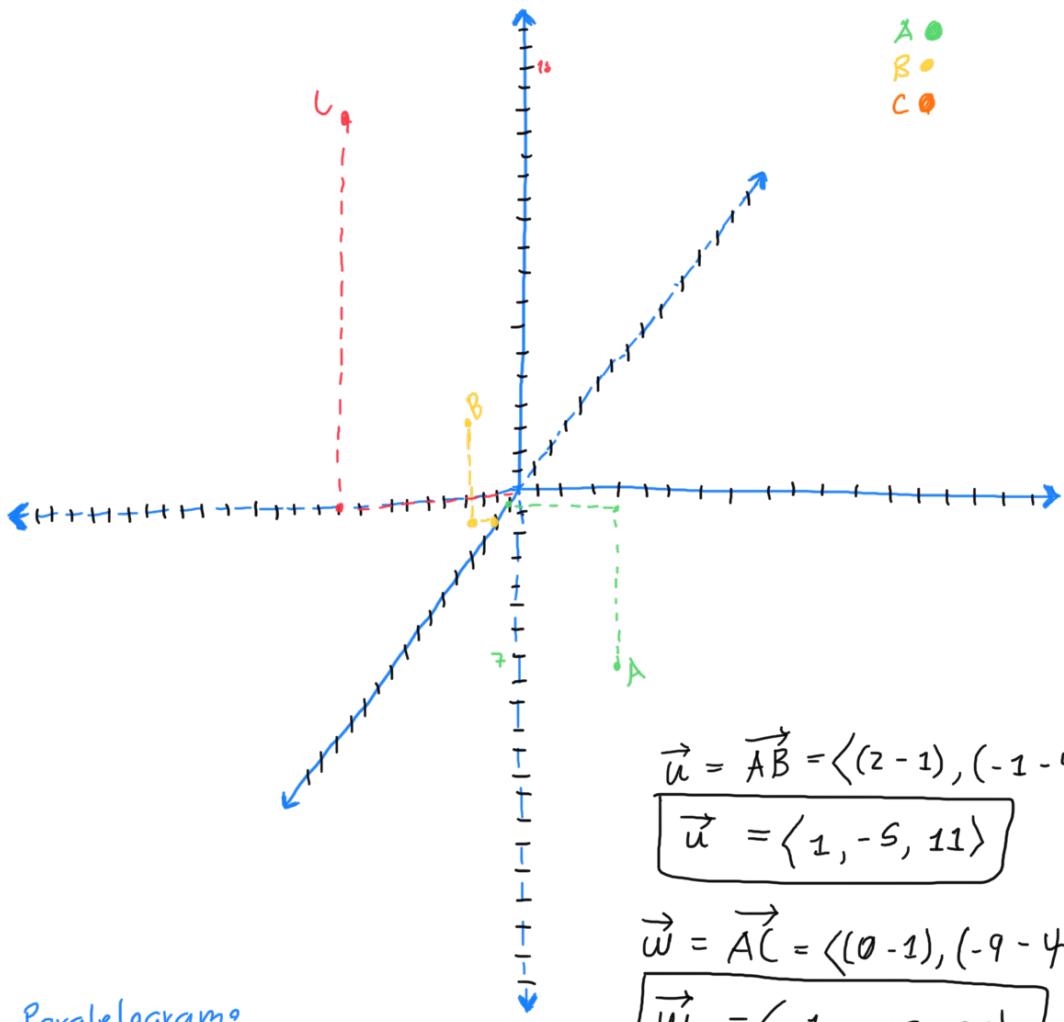
$$\begin{aligned}
 a \cdot (b \times c) &= \langle 1, 2, 3 \rangle \cdot \langle -14, -9, 12 \rangle \\
 &= \langle (1 \cdot -14), (2 \cdot -9), (3 \cdot 12) \rangle \\
 &= -14 - 18 + 36 = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a \times b &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}[(2 \cdot 5) - (3 \cdot 2)] - \hat{j}[(1 \cdot 5) - (3 \cdot 2)] + \hat{k}[(1 \cdot 2) - (3 \cdot 2)] \\
 &= \hat{i}[10 - 6] - \hat{j}[5 - 9] + \hat{k}[2 - 6] \\
 &= \hat{i}[4] - \hat{j}[-4] + \hat{k}[-4] \\
 &= 4\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k} \\
 &= \langle 4, 4, -4 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a \times b) \cdot c &= \langle 4, 4, -4 \rangle \cdot \langle 0, 4, 3 \rangle \\
 &= 0 + 16 - 12 = 4
 \end{aligned}$$

$\therefore a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$  Sí es igual ya que los dos dan 4, el mismo resultado.

- 4) Calcule el área del paralelogramo entre los puntos  $A(1, 4, -2)$ ,  $B(2, -1, 1)$ ,  $C(0, 1, 0)$  y  $D(-1, 1, 1)$



Paralelogramo

$P = b \cdot a$

$\text{base} = |\vec{u}|$

$\text{altura} = |b| \sin \theta$

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -5 & 11 \\ -1 & -13 & 25 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\begin{aligned} \dots &= \hat{i} [(-5 \cdot 25) - (11 \cdot -13)] - \hat{j} [(1 \cdot 25) - (11 \cdot -1)] + \hat{k} [(1 \cdot -13) - (-5 \cdot -1)] \\ &= \hat{i} [-125 + 143] - \hat{j} [25 + 11] + \hat{k} [-13 - 5] = \\ &= 18\hat{i} - 36\hat{j} - 18\hat{k} \\ &= \langle 18, -36, -18 \rangle \end{aligned}$$

$|\vec{u} \times \vec{w}| = \sqrt{18^2 + (-36)^2 + (-18)^2} = 18\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} = 9\sqrt{6}$

5) Consideren los puntos  $P(1,0,1)$  &  $Q(-2,1,3)$  &  $R(4,2,5)$ .

a) Encuentre el vector no cero ortogonal al plano

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (-2-1), (1-0), (3-1) \rangle$$

$$\boxed{\vec{u} = \langle -3, 1, 2 \rangle}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{PR} = \langle (4-1), (2-0), (5-1) \rangle$$

$$\boxed{\vec{w} = \langle 3, 2, 4 \rangle}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i} [(1 \cdot 4) - (2 \cdot 2)] - \hat{j} [(-3 \cdot 4) - (3 \cdot 2)] + \hat{k} [(-3 \cdot 2) - (3 \cdot 1)] \\ &= \hat{i} [4 - 4] - \hat{j} [-12 - 6] + \hat{k} [-6 - 3] \\ &= 0\hat{i} + 18\hat{j} - 9\hat{k} \\ \therefore \langle 0, 18, -9 \rangle &\text{ es el vector ortogonal no cero al plano.}\end{aligned}$$

b) Determine el área del triángulo PQR

$$\begin{aligned}A_{\Delta} &= \frac{1}{2} |\vec{v} \times \vec{w}| = \frac{1}{2} \underbrace{|\langle 0, 18, -9 \rangle|}_{\sqrt{0^2 + 18^2 + (-9)^2}} \\ &= \sqrt{324 + 81} \\ &= \sqrt{405}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{405} = \frac{1}{2} 9 \cdot \sqrt{5} = \frac{9 \cdot \sqrt{5}}{2} \leftarrow \text{es el .}$$

$\approx 10.06$

- b) Volumen del paralelepípedo determinado por los vectores  $a = \langle 1, 2, 3 \rangle$ ;  $b = \langle -1, 1, 2 \rangle$ ;  $c = \langle 2, 1, 4 \rangle$ .

$$V_p = |a \cdot (b \times c)| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{i}[(1 \cdot 4) - (1 \cdot 2)] - \hat{j}[( -1 \cdot 4) - (2 \cdot 2)] + \hat{k}[( -1 \cdot 1) - (2 \cdot 1)]$$

$$\dots = \hat{i}[4 - 2] - \hat{j}[-4 - 4] + \hat{k}[-1 - 2] = 2\hat{i} + 8\hat{j} - 3\hat{k}$$

# Ahora  $\hat{i} = 1$ ;  $\hat{j} = 2$ ;  $\hat{k} = 3$ ; (por vector a)

$$= 2(1) + 8(2) - 3(3)$$

$$= 2 + 16 - 9 = 18 - 9 = 9$$

es el volumen del paralelepípedo a, b, c.

- 7) ¿Están los pts. A(1, 4, -7); B(2, -1, 4); C(0, -9, 18); D(0, 0, 0) sobre el mismo plano?

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \langle (2 - 1), (-1 - 4), (4 + 7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{u} = \langle 1, -5, 11 \rangle}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = \langle (0 - 1), (-9 - 4), (18 + 7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{w} = \langle -1, -13, 25 \rangle}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AD} = \langle (0 - 1), (0 - 4), (0 + 7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{v} = \langle -1, -4, 7 \rangle}$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v})}$$

$$\vec{u}(\vec{\omega} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -13 & 25 \\ -1 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{i} [(-13 \cdot 7) - (-4 \cdot 25)] - \hat{j} [(-1 \cdot 7) - (25 \cdot -1)] + \hat{k} [(-1 \cdot -4) - (-1 \cdot -13)] \\ = 9\hat{i} - 18\hat{j} - 9\hat{k}$$

# reemplazar  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  con  $\vec{v}$ .

$$= 9(1) - 18(-5) - 9(11)$$

$$= 9 + 90 - 99$$

$$= 9 - 99 + 90$$

$$= -90 + 90 = 0 \quad \therefore \text{sí son parte del mismo plano.}$$

8)  $(a \cdot b) = \sqrt{3}$  &  $(a \times b) = \langle 1, 2, 2 \rangle$

# encuentra ángulo entre  $a$  &  $b$ .

$$\underbrace{a \cdot b}_{\sqrt{3}} = |a||b|\cos\theta$$

$$\underbrace{(a \times b)}_{|\langle 1, 2, 2 \rangle|} = |a||b|\sin\theta$$

$$|a||b|\cos\theta = \sqrt{3}$$

$$\underbrace{|a||b|}_{\text{# Sustituir en }} = \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$$

$$|\langle 1, 2, 2 \rangle| = \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \left. \right\} \tan\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{1 + 4 + 4}}{\sqrt{3}}$$

$$52 \quad \tan\theta = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$$

$$, \quad - = 3 \cdot 3^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tan \theta = -\frac{1}{3}$$

$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3})$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

∴ El ángulo es  $\theta = \frac{\pi}{3}$

BONO:

9) a)  $|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2$

# Partimos desde la siguiente propiedad.

$$\hookrightarrow |a \times b| = |a||b| \sin \theta \quad \# \text{ Elevamos al cuadrado}$$

$$\Rightarrow |a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 \sin^2 \theta$$

# Propiedad pitagórica

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

# Sustituir

$$|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 (1 - \cos^2 \theta) \quad \# \text{ Distribuyo}$$

$$|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - \underbrace{|a|^2 |b|^2 \cos^2 \theta}_{(a \cdot b)^2}$$

∴  $|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2$

□

b)  $(a - b) \times (a + b) = 2(a \times b) \quad \# \text{ Quiero llegar a esto}$

$$= (a - b) \times (a + b)$$

# Propiedad distributiva

$$= (a - b) \times (a + b)$$

$$= (\cancel{a \times a})^0 + (a \times b) - (b \times a) - (\cancel{b \times b})^0$$

$$= (a \times b) - (b \times a)$$

$$\begin{aligned}\# (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ \therefore 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &\quad \square\end{aligned}$$

# Capítulo 10

Tarea #04

### Tarea #3 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 06 de febrero

Nombre: \_\_\_\_\_ Carnet: \_\_\_\_\_

Tema:	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Puntos:	20	10	10	10	15	15	20	0	100
Nota:									

1. Considere los planos  $x + 3y + 2z = 3$  &  $-2x + y + 3z = 8$ .
  - (a) (10 pts.) Encuentre el ángulo de intersección entre los dos planos.
  - (b) (10 pts.) Encuentre la recta de intersección entre los dos planos.
  
2. (10 pts.) Considere la recta que pasa por  $(-2, 5, 7)$  y  $(1, 3, 4)$ . ¿Es perpendicular a la recta que pasa por  $(4, 3, 2)$  y  $(3 - 1, 8)$ ?
  
3. (10 pts.) Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$  y  $(1, 1, 0)$ .
  
4. (10 pts.) Encuentre una ec. del plano que pasa por  $(1, 4, -7)$  y contiene a la recta  $z = 2y = 3x$ .
  
5. Considere los planos.

$$P_1 : 3x + 6y - 3z = 3$$

$$P_3 : 4x - 12y + 8z = 8$$

$$P_2 : 2y = x - z - 2$$

$$P_4 : 9y = 3x + 6z - 6$$

- (a) (05 pts.) ¿Cuáles de los siguientes cuatro planos son paralelos.
- (b) (10 pts.) ¿Cuáles de ellos son idénticos?

6. Considere las rectas.

$$L_1 : x = 1 + 6t, y = 1 - 3t, z = 12t + 5$$

$$L_3 : x = 1 + 2t, y = t, z = 1 + 4t$$

$$L_2 : 2x - 2 = 4 - 4y = z + 1$$

$$L_4 : \mathbf{r} = \langle 3, 1, 5 \rangle + t\langle 4, 2, 8 \rangle$$

- (a) (05 pts.) ¿Cuáles de los siguientes cuatro rectas son paralelas.
- (b) (10 pts.) ¿Cuáles de ellas son idénticas?

7. Determine si el par de rectas dadas son paralelas, oblicuas o se cortan.

$$(a) (10 pts.) L_1 : x = 3 + 2t, y = 4 - t, z = 1 + 3t, \quad L_2 : x = 1 + 4s, y = 3 - 2s, z = 4 + 5s$$

$$(b) (10 pts.) L_1 : x - 1 = 1 - y = \frac{z}{2}, \quad L_2 : z = 0, 2 - x = y$$

8. (10 pts.) Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por el punto  $(0, 1, 2)$ , es perpendicular a la recta  $x = 1 + t, y = 1 - t, z = 2t$  y corta a esta recta.

# Capítulo 11

Tarea #04



1) Planos  $\underbrace{x + 3y + 2z = 3}_{\hat{n}_1}$  &  $\underbrace{-2x + y + 3z = 8}_{\hat{n}_2}$

a) Encontrar el ángulo de intersección.

$$\hat{n}_1 = \langle 1, 3, 2 \rangle$$

$$\hat{n}_2 = \langle -2, 1, 3 \rangle$$

$$\cos \theta = \frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1| |\hat{n}_2|}$$

$$\cos \theta = \frac{(1 \cdot -2) + (3 \cdot 1) + (2 \cdot 3)}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}}$$

$$= \frac{-2 + 3 + 6}{\sqrt{1+9+4} \sqrt{4+1+9}} = \frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}}$$

$$= \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

B) Recta de intersección:

# Resta de ecuaciones

$$\# r = \vec{r}_0 + t \vec{v}$$

59  
vector  
director

$$\begin{array}{r}
 2(x + 3y + 2z = 3) \\
 -2x + y + 3z = 8 \\
 \hline
 2x + 6y + 4z = 6 \\
 -2x + y + 3z = 8 \\
 \hline
 \frac{1}{7}(0x + 7y + 7z = 14)
 \end{array}$$

$$y + z = 2$$

$$y = 2 - z$$

# Encuentra dos puntos en común para  
# encuentran el vector director

Cuando  $\begin{cases} z = 0 \\ y = 2 \end{cases}$   $\langle -3, 2, 0 \rangle$

$$x = 3 - 3(2) - 2(0)$$

$$x = 3 - 6$$

$$x = -3$$

Cuando  $\begin{cases} z = 1 \\ y = 1 \end{cases}$   $\langle -2, 1, 1 \rangle$

$$x = 3 - 3(1) - 2(1)$$

$$x = 3 - 3 - 2$$

$$x = -2$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle (-2+3), (1-2), (1-0) \rangle$$

$$\vec{v} = \langle 1, -1, 1 \rangle$$

$$\vec{r}_0 = \langle -3, 2, 0 \rangle - t \langle 1, -1, 1 \rangle \quad \checkmark$$

2) Considera:  $P(-2, 5, +)$  &  $Q(1, 3, 4)$ .  
 ¿Es perpendicular  $A(4, 3, 2)$   $B(3, -1, 8)$

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (-2-1), (5-3), (7-4) \rangle$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \langle (4-3), (3+1), (2-8) \rangle$$

$$\vec{v} = \langle -3, 2, 3 \rangle$$

$$\vec{w} = \langle 1, 4, -6 \rangle$$

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{w} &= \langle -3, 2, 3 \rangle \cdot \langle 1, 4, -6 \rangle \\ &= (-3 \cdot 1) + (2 \cdot 4) + (3 \cdot -6) \\ &= -3 + 8 - 18 \\ &= -21 + 8 \\ &= -13\end{aligned}$$

No son perpendiculares

3) Encuentre la ecuación del plano:  $A(0, 1, 1)$  &  $B(1, 0, 1)$  &  $C(1, 1, 0)$ :

$$\begin{aligned}\vec{u} = \overrightarrow{AB} &= \langle (1-0), (0-1), (1-1) \rangle \\ &= \langle 1, -1, 0 \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{w} = \overrightarrow{AC} &= \langle (1-0), (1-1), (0-1) \rangle \\ &= \langle 1, 0, -1 \rangle\end{aligned}$$

$$\hat{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= \hat{i} [(-1 \cdot -1) - (0 \cdot 0)] - \hat{j} [(1 \cdot -1) - (1 \cdot 0)] + \hat{k} [(1 \cdot 0) - (1 \cdot -1)] \\ &= \hat{i}[1] - \hat{j}[-1] + \hat{k}[1] \\ &= \langle 1, 1, 1 \rangle \end{aligned}$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\hat{i}(x - x_0) + \hat{j}(y - y_0) + \hat{k}(z - z_0) = 0$$

$$1(x - 1) + 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0$$

$$x - 1 + y - 1 + z - 1 = 0$$

$$x + y + z - 3 = 0$$

4) Encuentre la ec. del plano que pasa por  $(1, 4, -7)$

& contiene a  $z = 2y = 3x$

# Empieza en el origen  $(0, 0, 0)$  por que si

#  $z = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 0$

$$z = 2y$$

$$z = 3x \quad \vec{w} = \left\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 1 \right\rangle$$

El reciproco

$$P(0,0,0)$$

$$Q(1,4,-7)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (1-0), (4-0), (-7-0) \rangle$$

$$\vec{u} = \langle 1, 4, -7 \rangle$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = \dots$$

$$= \hat{i} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot -7 \right) - (1 \cdot 4) \right] - \hat{j} \left[ \left( \frac{1}{3} \cdot -7 \right) - (1 \cdot 1) \right] + \hat{k} \left[ \left( \frac{1}{3} \cdot 4 \right) - \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \right] =$$

$$= -\frac{15}{2} \hat{i} + \frac{10}{3} \hat{j} + \frac{5}{6} \hat{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \left\langle -\frac{15}{2}, \frac{10}{3}, \frac{5}{6} \right\rangle$$

$$= -\frac{15}{2} (x - x_0) + \frac{10}{3} (y - y_0) + \frac{5}{6} (z - z_0)$$

$$= -\frac{15}{2} (x - 1) + \frac{10}{3} (y - 4) + \frac{5}{6} (z + 7)$$

5) Consider the planes:

$$P_1: 3x + 6y - 3z = 3$$

$$P_2: 2y = x - z - 2$$

$$P_3: 4x - 12y + 5z = 8$$

$$P_4: 9y = 3x + 6z - 6$$

- a) ¿Paralelas?  
b) ¿idénticas?

$$\underline{(P_1 \& P_3) \vee (P_3 \& P_1)} :$$

$$\begin{array}{r} 3x + 6y - 3z = 3 \\ 4x - 12y + 5z = 8 \\ \hline \end{array}$$

$$x \left( \begin{array}{cccc} 3 & 6 & -3 & 3 \\ 4 & -12 & 5 & 8 \end{array} \right)$$

No son paralelas

$$\underline{(P_1 \& P_2) \vee (P_2 \& P_1)} :$$

$$\begin{array}{r} 3x + 6y - 3z = 3 \\ x - 2y - z = 2 \\ \hline \end{array}$$

$$x \left( \begin{array}{cccc} 3 & 6 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

No son paralelas

$$\underline{(P_1 \& P_4) \vee (P_4 \& P_1)} :$$

$$\begin{array}{r} 3x + 6y - 3z = 3 \\ 3x - 9y + 6z = 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 3 & 6 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 6 & 6 \end{array} \right)$$

No son paralelas

$$\underline{(P_2 \& P_3) \vee (P_3 \& P_2)} :$$

$$x - 2y - z = 2$$

$$4x - 12y + 5z = 8$$

$$x \left( \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & -12 & 5 & 8 \end{array} \right)$$

No son paralelas

$$\underline{(P_2 \& P_4) \vee (P_4 \& P_2)} :$$

$$x - 2y - z = 2$$

$$3x - 9y + 6z = 6$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -9 & 6 & 6 \end{array} \right)$$

No son paralelas

$$\underline{(P_3 \& P_4) \vee (P_4 \& P_3)} :$$

$$4x - 12y + 5z = 8$$

$$3x - 9y + 6z = 6$$

$$x \left( \begin{array}{cccc} 4 & -12 & 5 & 8 \\ 3 & -9 & 6 & 6 \end{array} \right)$$

No son paralelas

b) No hay identicas

6)  $\begin{aligned} L_1: \quad x &= 1 + 6t \\ y &= 1 - 3t \\ z &= 12t + 5 \end{aligned}$

$$L_2: \quad 2x - 2 = 4 - 4y = z + 1$$

$$\begin{aligned} L_3: \quad x &= 1 + 2t \\ y &= t \\ z &= 1 + 4t \end{aligned}$$

$$L_4: \quad r = \langle 3, 1, 5 \rangle + t \langle 4, 2, 8 \rangle$$

a) ¿Paralelas?

b) ¿Idénticas?

$L_1$  &  $L_3$ :

$$\begin{aligned} L_1: \quad x &= 1 + 6t \\ y &= 1 - 3t \\ z &= 12t + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3: \quad x &= 1 + 2t \\ y &= 0t \\ z &= 1 + 4t \end{aligned}$$

$L_1$  &  $L_3$  No son paralelas

```

----- if (paralelas) {
    verificar si son idénticas;
    todos tienen que ser
    iguales;
}
else {
    7 paralelas & 7 idénticas;
}
----- 
```

$\mathcal{L}_1$  &  $\mathcal{L}_2$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1: \quad x &= 1 + 6t \\ y &= 1 - 3t \\ z &= 12t + 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2: \quad t &= 2x - 2 \Rightarrow x = \frac{t+2}{2} \\ t &= 4 - 4y \Rightarrow y = \frac{4-t}{4} \\ t &= z + 1 \Rightarrow z = t - 1\end{aligned}$$

$\mathcal{L}_1$  &  $\mathcal{L}_2$  son paralelas

# Agarro los coeficientes  $(1, 1, 5)$

$$\left. \begin{aligned}x &= \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \\ y &= \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4} \\ z &= 5-1 = 4\end{aligned} \right\} \text{No iguales}$$

$\mathcal{L}_1$  &  $\mathcal{L}_2$ : Son paralelas pero no iguales

$\mathcal{L}_1$  &  $\mathcal{L}_4$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1: \quad x &= 1 + 6t \\ u &= 1 - 3t\end{aligned}$$

66  
 $\mathcal{L}_4: \quad r = \langle 3, 1, 5 \rangle + t \langle 4, 2, 8 \rangle$

$$\begin{array}{l} x = 5 + 7t \\ y = 1 + 2t \\ z = 5 + 8t \end{array}$$

$\ell_1$  &  $\ell_4$  no son paralelas.

$\ell_3$  &  $\ell_4$ :

$$\begin{array}{l} \ell_3: x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + 4t \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \ell_4: r = \langle 3, 1, 5 \rangle + t \langle 4, 2, 8 \rangle \\ x = 3 + 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = 5 + 8t \end{array}$$

# de  $\ell_3$  extraigo pt.  $(1, 0, 1)$

$$x = 3 + 4 = 7$$

$$y = 1 + 0 = 1$$

$$z = 5 + 8 = 13$$

$\ell_3$  &  $\ell_4$  son paralelos pero  
no iguales

$\ell_3$  &  $\ell_2$ :

$$\begin{array}{l} \ell_2: x = \frac{t+2}{2} \\ y = \frac{4-t}{4} \\ z = t-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \ell_4: x = 3 + 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = 5 + 8t \end{array}$$

7) a)

$$\begin{aligned}L_1: x &= 3 + 2t \\y &= 4 - t \\z &= 12t + 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_2: x &= 1 + 4s \\y &= 3 - 2s \\z &= 4 + 5s\end{aligned}$$

$$L_1: (3, 4, 1) + t(2, -1, 3) \quad \vec{v} = \langle 2, -1, 3 \rangle$$

$$L_2: (1, 3, 4) + s(4, -2, 5) \quad \vec{u} = \langle 4, -2, 5 \rangle$$

a.1) ¿Paralelos?

$$\underbrace{\vec{u} = k \vec{v}}_{\text{Para ser paralelos}}$$

$$(4, -2, 5) = k(2, -1, 3)$$

$$4 = 2k \Rightarrow k = 2$$

$$-2 = -1k \Rightarrow k = 2$$

$$5 = 3k \Rightarrow k = 5/3$$

∴ No son vectores paralelos

a.2) ¿pts en común?



# Capítulo 12

Tarea #05

## Tarea #5 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 13 de febrero

Nombre: \_\_\_\_\_ Carnet: \_\_\_\_\_

Tema:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	10	20	30	20	20	100
Nota:						

1. Analice si la función  $\mathbf{r} = \left\langle 3e^{-t}, \frac{\sin^2(\pi t)}{t}, \tan(2\pi t) \right\rangle$  es continua en:
  - (a) (6 pts.)  $t = 0$
  - (b) (4 pts.)  $t = 1$
2. Determine el límite de las siguientes funciones
  - (a) (10 pts.)  $\lim_{t \rightarrow 0} \left\langle e^{-3t}, \frac{t^2}{\sin^2(t)}, \cos(2t) \right\rangle$
  - (b) (10 pts.)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1+t^2}{1-t^2}, \arctan(t), \frac{1-e^{-2t}}{t} \right\rangle$
3. Dada  $\mathbf{r}(t) = \langle \sin(2t), t^2, \cos(2t) \rangle$ , encuentre:
  - (a) (5 pts.)  $r'(t)$
  - (b) (8 pts.)  $r''(t)$
  - (c) (8 pts.)  $r''(t) \cdot r'''(t)$
  - (d) (9 pts.)  $r'' \times r'(t)$
4. (20 pts.) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva  $x = t$ ,  $y = e^{-t}$ ,  $z = 2t - t^2$  en el punto  $(0, 1, 0)$ .
5. (20 pts.) Las curvas  $\mathbf{r}_1 = \langle \sin t, t^2, t^4 \rangle$  y  $\mathbf{r}_2 = \langle \sin t, \sin(2t), t^3 \rangle$  se cortan en el origen. Encuentre el coseno del ángulo de intersección entre las dos rectas tangentes a  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ .

# Capítulo 13

Tarea #05

**TAREA #5 - DAVID CORZO - 20190432 - 2020-02-10**

$$1.a) \quad r = \left\langle 3e^{-t}, \frac{\sin^2(\pi t)}{t}, \tan(2\pi t) \right\rangle$$

¿Continua en  $t = 0$ ?

$$\lim_{t \rightarrow 0} (r) = \left\langle \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0} (3e^{-t})}_{f(t)}, \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\sin^2(\pi t)}{t} \right)}_{g(t)}, \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0} (\tan(2\pi t))}_{h(t)} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} (f(t)) &= \lim_{t \rightarrow 0} (3e^{-t}) \\ &= 3e^{-0} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} (g(t)) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\sin^2(\pi t)}{t} \right) \xrightarrow[\substack{0 \\ 0}]{} \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{2 \sin(\pi t) \cdot \cos(\pi t) \cdot \pi}{1} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (2 \sin(\pi t) \cos(\pi t) \cdot \pi) \\ &= 2 \sin(\pi \cdot 0) \cos(\pi \cdot 0) \cdot \pi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} (h(t)) &= \lim_{t \rightarrow 0} (\tan(2\pi t)) \\ &= \tan(2\pi \cdot 0) = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} (r) = \langle 3, 0, 0 \rangle$$

$$r(0) = \left\langle 3, \frac{0}{0}, 0 \right\rangle$$

Discontinuidad

$\therefore$  No es continua en  $t=0$  ya que

$$\lim_{a \rightarrow 0} (r) \neq r(0)$$

1. b)

$$\lim_{a \rightarrow 1} (r) = \lim_{a \rightarrow 1} \left\langle \underbrace{3e^{-t}}_{f(t)}, \underbrace{\frac{\sin^2(\pi t)}{t}}_{g(t)}, \underbrace{\tan(2\pi t)}_{h(t)} \right\rangle$$

$$\lim_{a \rightarrow 1} (f(t)) = \lim_{a \rightarrow 1} (3e^{-t})$$

$$= 3e^{-1} = \frac{3}{e}$$

$$\lim_{a \rightarrow 1} (g(t)) = \lim_{a \rightarrow 1} \left( \frac{\sin^2(\pi t)}{t} \right)$$

$$= \frac{\sin^2(\pi)}{1} = \sin^2(\pi) = \emptyset$$

$$\lim_{a \rightarrow 1} (h(t)) = \lim_{a \rightarrow 1} (\tan(2\pi t))$$

$$= \tan(2\pi) = \emptyset$$

$$\lim_{a \rightarrow 1} (r) = \left\langle \frac{3}{e}, 0, 0 \right\rangle$$

$$r(1) = \left\langle \frac{3}{e}, 0, 0 \right\rangle$$

Sí es continua en  $t=1$  ya que

$$\lim_{a \rightarrow 1} (r) = r(0)$$

2) Determine el límite de las sigs funciones.

2a)  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \left\langle \underbrace{e^{-3t}}_{f(t)}, \underbrace{\frac{t^2}{\sin^2(t)}}_{g(t)}, \underbrace{\cos(2t)}_{h(t)} \right\rangle \right)$

$$\lim_{a \rightarrow 0} (f(t)) = \lim_{a \rightarrow 0} (e^{-3t})$$

$$= e^{-3 \cdot 0} = e^0 = 1$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} (g(t)) = \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{t^2}{\sin^2(t)} \right) \leftarrow \frac{0}{0} \text{ indef.}$$

$$\stackrel{LH}{=} \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{2t}{2 \sin(t) \cos(t)} \right) \leftarrow \frac{0}{0} \text{ indef}$$

$$f'g + fg' \stackrel{LH}{=} \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\cos^2(t) - \sin^2(t)} \right)$$

$$= \frac{1}{1^2 - 0} = 1$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} (h(+)) = \lim_{a \rightarrow 0} (\cos(2t)) \\ = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \left\langle e^{-3t}, \frac{t^2}{\sin^2(t)}, \cos(2t) \right\rangle \right) = \langle 1, 1, 1 \rangle$$

2 b)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \left\langle \underbrace{\frac{1+t^2}{1-t^2}}_{f(t)}, \underbrace{\arctan(t)}_{g(t)}, \underbrace{\frac{1-e^{-2t}}{t}}_{h(t)} \right\rangle \right)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (f(t)) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \frac{1+t^2}{1-t^2} \right) \leftarrow \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \frac{0+2t}{0-2t} \right)$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \frac{2t}{-2t} \right) = -1$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (g(+)) = \lim_{a \rightarrow \infty} (\arctan(t))$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (h(t)) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \frac{1-e^{-2t}}{t} \right) \leftarrow \frac{1}{\infty} \text{ algo asi.}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \frac{-e^{-2t} \cdot 772}{1} \right)$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \left( e^{-2t} \right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{e^{2t}} \right) \leftarrow \frac{1}{\infty} \rightarrow 0$$

$$= \emptyset$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \left\langle \frac{1+t^2}{1-t^2}, \arctan(t), \frac{1-e^{-2t}}{t} \right\rangle \right) = \left\langle -1, \frac{\pi}{2}, \emptyset \right\rangle$$

3)  $r = \langle \sin(2t), t^2, \cos(2t) \rangle$

a)  $r'(t)$

$$r'(t) = \langle 2\cos(2t), 2t, -\sin(2t) \cdot 2 \rangle$$

b)  $r''(t)$

$$r''(t) = \langle -4\sin(2t), 2, -\cos(2t) \cdot 4 \rangle$$

c)  $r''(t) \cdot r'''(t)$

$$r'''(t) = \langle -8\cos(2t), 0, \sin(2t) \cdot 8 \rangle$$

$$= \langle -4\sin(2t), 2, -4\cos(2t) \rangle \cdot \langle -8\cos(2t), 0, 8\sin(2t) \rangle$$

$$= [-4\sin(2t) \cdot -8\cos(2t)] + [2 \cdot 0] + [-4\cos(2t) \cdot 8\sin(2t)]$$

$$= 32\sin(2t)\cos(2t) - 32\sin(2t)\cos(2t)$$

$$= \emptyset$$

$$d) \quad r''(t) \times r'(t)$$

$$r''(t) = \langle -4\sin(2t), 2, -\cos(2t) \cdot 4 \rangle$$

$$r'(t) = \langle 2\cos(2t), 2t, -\sin(2t) \cdot 2 \rangle$$

$$r''(t) \times r'(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -4\sin(2t) & 2 & -4\cos(2t) \\ 2\cos(2t) & 2t & -2\sin(2t) \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{i} \left[ (2)(-2\sin(2t)) - (2t)(-4\cos(2t)) \right] -$$

$$\hat{j} \left[ (-4\sin(2t))(-2\sin(2t)) - (2\cos(2t))(-4\cos(2t)) \right] +$$

$$\hat{k} \left[ (-4\sin(2t))(2t) - (2\cos(2t))(2) \right] =$$

$$= \hat{i} \left[ -4\sin(2t) + 8t\cos(2t) \right] -$$

$$\hat{j} \left[ 8\sin^2(2t) + 8\cos^2(2t) \right] +$$

$$\hat{k} \left[ -8t\sin(2t) - 4\cos(2t) \right]$$

$$= \langle -4\sin(2t) + 8t\cos(2t), -8, -8t\sin(2t) - 4\cos(2t) \rangle$$

4)

$$x = t$$

$$y = e^{-t}$$

$${}^{79}P(0,1,0)$$

$$z = 2t - t$$

# Encuentramos  $t$

$$x: \quad t = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$y: \quad e^{-t} = 1 \Rightarrow t = 0$$

$$z: \quad 2t - t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$$

# Armanmos  $\vec{r}$

$$\vec{r}(t) = \langle t, e^{-t}, 2t - t^2 \rangle$$

$$\vec{r}(0) = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

# Devolvemos:

$$\vec{r}'(t) = \langle 1, -e^{-t}, 2 - 2t \rangle$$

$$\vec{r}'(0) = \langle 1, -1, 2 \rangle$$

# Armanmos La fórmula de recta tangente a vectores:

$$\vec{r}_T = \vec{r}(a) + t \vec{r}'(a)$$

$$a = 0$$

$$\vec{r}_T = \langle 0, 1, 0 \rangle + t \langle 1, -1, 2 \rangle$$

# Ecs. Paramétricas:

$$x = 0 + 1t$$

$$y = 1 - 1t$$

$$z = 0 + 2t$$

5)

$$\vec{r}_1 = \langle \sin(t), t^2, t^4 \rangle$$

$$\vec{r}_2 = \langle \sin(t), \sin(2t), t^3 \rangle$$

$$\vec{r}_1'(t) = \langle \cos(t), 2t, 4t^3 \rangle$$

$$\vec{r}_1'(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

$$\vec{r}_2'(t) = \langle \cos(t), 2\cos(2t), 3t^2 \rangle$$

$$\vec{r}_2'(0) = \langle 1, 2, 0 \rangle$$

# Evaluar el ángulo:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

$$\cos \theta = \frac{\langle 1, 0, 0 \rangle \cdot \langle 1, 2, 0 \rangle}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{1 + 0 + 0}{1 \cdot \sqrt{5}}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

# Capítulo 14

Tarea #06

## Tarea #6 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 20 de febrero

Nombre: \_\_\_\_\_ Carnet: \_\_\_\_\_

Tema:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	25	15	15	15	30	100
Nota:						

1. Evalúe las siguientes integrales:

- (a) (8 pts.)  $\int_0^1 \left( \frac{4}{1+t^2}j + \frac{2t}{1+t^2}k \right) dt$
- (b) (9 pts.)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin^2(t)\cos(t)i + 3\sin(t)\cos^2(t)j + 2\sin(t)\cos(t)k) dt$
- (c) (8 pts.)  $\int \left( te^t i + t^2 \ln(t) j + \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}} k \right) dt$

2. Dada la posición  $\mathbf{r}(t) = ti + \sin(3t)j + \cos(3t)k$  encuentre:

- (a) (5 pts.) la función de velocidad.
- (b) (5 pts.) la función de aceleración.
- (c) (5 pts.) la función de rápidez.

3. Dada la aceleración  $\mathbf{a}(t) = \langle e^t, \sin t \cos t, \frac{1}{(t+1)^2} \rangle$ , la velocidad inicial  $\mathbf{v}(0) = \langle 3, -1, 2 \rangle$  y la posición inicial  $\mathbf{r}(0) = \langle 0, 2, 0 \rangle$ , encuentre:

(a) (7 pts.) la función de velocidad.

(b) (8 pts.) la función de posición.

4. (15 pts.) Calcule la longitud de arco de la helice circular de la ecuación vectorial  $r(t) = \cos(t)i + \sin(t)ij + tk$  desde el punto  $(1, 0, 0)$  hasta el punto  $(1, 0, 2\pi)$ .

5. Encuentre y bosqueje el dominio de las siguientes funciones:

- (a) (10 pts.)  $f(x, y) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}$
- (b) (10 pts.)  $g(x, y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$
- (c) (10 pts.)  $h(x, y) = \frac{9}{9-x-y}$

# Capítulo 15

Tarea #06



1) Evalúe los integrals:

a)  $\int_0^1 \left( \underbrace{\frac{4}{1+t^2} \hat{i}}_{f(t)} + \underbrace{\frac{2t}{1+t^2} \hat{k}}_{g(t)} \right) dt$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t) dt &= \int_0^1 \left( \frac{4}{1+t^2} \right) dt \\&= 4 \int_0^1 \left( \frac{1}{1+t^2} \right) dt \\&= 4 \arctan(t) \Big|_0^1 \\&= 4 \left\{ \arctan(1) - \arctan(0) \right\} \\&= 4 \left\{ \frac{\pi}{4} - 0 \right\} = \boxed{\pi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(t) dt &= \int_0^1 \left( \frac{2t}{1+t^2} \right) dt \\&= \int_0^1 \left( \frac{2t}{1+t^2} \right) dt \\&\quad u = 1+t^2 \\&\quad du = 2t dt \\&= \int_0^1 \left( \frac{du}{u} \right) \\&= \ln|1+t^2| \Big|_0^1 \\&= \left\{ \ln(2) - \ln(1) \right\} = \boxed{\ln(2)}\end{aligned}$$

∴  $\langle 0, \pi, \ln(2) \rangle$

b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 3 \sin^2(t) \cos(t) \hat{i} + 3 \sin(t) \cos^2(t) \hat{j} + 2 \sin(t) \cos(t) \hat{k} \right) dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt \quad \overbrace{\qquad\qquad}^{g(t)} \quad \overbrace{\qquad\qquad}^{h(t)}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos(t) dt \\ u &= \sin(t) \\ du &= \cos(t) dt \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 du \\ &= \frac{3}{3} u^3 = \sin^3(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left\{ \sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin^3(0) \right\} \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) dt &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t) \cos^2(t)) dt \\ u &= \cos(t) \\ -du &= \sin(t) dt \\ &= -3 \int_{u(0)}^{u\left(\frac{\pi}{2}\right)} u^2 du \\ &= -\frac{3}{3} u^3 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0) \right\} \\ &= -\left\{ 0 - 1 \right\} = \boxed{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) dt &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t) \cos(t)) dt \\ u &= \sin(t) \\ du &= \cos(t) dt \\ &= 2 \int_{u(0)}^{u\left(\frac{\pi}{2}\right)} u du \quad 87 \\ &= u^2 \Big|_{-1}^{1} = \left\{ 1^2 - 0 \right\} = \boxed{1} \end{aligned}$$

$$| u(0)=0 \quad ( ) \quad \underline{\quad}$$

$$\therefore \left\langle 1, 1, 1 \right\rangle$$

3)  $\int \left( \underbrace{te^t}_{f(t)} \hat{+} \underbrace{t^2 \ln(t)}_{g(t)} \hat{+} \underbrace{\frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}}_{h(t)} \hat{+} \right) dt$

$$\begin{aligned} \int f(t) dt &= \int \underbrace{te^t}_{dt} dt \\ &\quad u = t \quad du = e^t dt \\ &\quad du = dt \quad v = e^t \\ &= te^t - \int e^t dt \\ &= \boxed{te^t - e^t + C_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int g(t) dt &= \int t^2 \ln(t) dt \\ &\quad u = \ln(t) \quad du = t^2 dt \\ &\quad du = \frac{1}{t} dt \quad v = \frac{1}{3} t^3 \\ &= \ln(t) \cdot \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{3} \int \frac{t^3}{t} dt \\ &= \frac{1}{3} t^3 \ln(t) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} t^3 + C_2 \\ &= \boxed{\frac{1}{3} t^3 \ln(t) - \frac{1}{9} t^3 + C_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int h(t) dt &= \int \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}} dt \\ &\quad u = e^t \quad \text{88} \\ &\quad du = e^t dt \end{aligned}$$

$$\int du \quad \underline{\quad}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \\
 &= \arcsin(u) + C_3 \\
 &= \arcsin(e^t) + C_3
 \end{aligned}$$

$$\therefore \left\langle te^t - e^t + C_1, \frac{1}{3} t^3 \ln(t) - \frac{1}{9} t^3 + C_2, \arcsin(e^t) + C_3 \right\rangle$$

2) Dada la posición  $r(t) = t\hat{i} + \sin(3t)\hat{j} + \cos(3t)\hat{k}$

a) Encuentre la función de velocidad:

$$r'(t) = v(t) = \hat{i} + \cos(3t) \cdot 3\hat{j} + \sin(3t) \cdot 3\hat{k}$$

b) Encuentre la función de aceleración:

$$r''(t) = a(t) = \hat{0}\hat{i} - 3\sin(3t) \cdot 3\hat{j} + 3 \cdot 3\cos(3t)\hat{k}$$

c) Encuentre la función de rapidez:

$$\begin{aligned}
 |v(t)| &= \sqrt{(1)^2 + (3\cos(3t))^2 + (3\sin(3t))^2} \\
 &= \sqrt{1 + 9\cos^2(3t) + 9\sin^2(3t)} \\
 &= \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}
 \end{aligned}$$

3) Dada la función de aceleración:

$$a(t) = \left\langle e^t, \sin(t)\cos(t), \frac{1}{(t+1)^2} \right\rangle$$

$$v(0) = / 2 - 1 \rightarrow$$

$$v(0), \quad \dot{v}(0), \quad \ddot{v}(0)$$

$$r(0) = \langle 0, 2, 0 \rangle$$

a) Encontrar la función de aceleración:

$$\int a(t) dt = v(t)$$

$$a(t) = \left\langle \underbrace{e^t}_{f(t)}, \underbrace{\sin(t)\cos(t)}_{g(t)}, \underbrace{\frac{1}{(t+1)^2}}_{h(t)} \right\rangle$$

$$\int f(t) dt = \boxed{e^t + C_1}$$

$$\int g(t) dt = \int \sin(t)\cos(t) dt = \boxed{\frac{1}{2} \sin^2(t) + C_2},$$

$u = \sin(t)$   
 $du = \cos(t)dt$

$$\int h(t) dt = \int \frac{1 dt}{(t+1)^2} = \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{-2+1} u^{-2+1} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{t+1} + C_3$$

$u = t+1$   
 $du = 1 dt$

$$= -\frac{1}{t+1} + C_3$$

$$v(t) = \left\langle e^t + C_1, \frac{1}{2} \sin^2(t) + C_2, -\frac{1}{t+1} + C_3 \right\rangle$$

# Encontrar constantes

$$r(0) = \langle 3, -1, 2 \rangle$$

$e^0 + C_1 = 3$ $1 + C_1 = 3$ $C_1 = 3 - 1$ $C_1 = 2$	$\frac{1}{2} \sin^2(0) + C_2 = -1$ $0 + C_2 = -1$ $C_2 = -1$
----------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------

$$-\frac{1}{t+1} + C_3 = 2$$

$$-1 + C_3 = 2$$

$$C_3 = 2 + 1$$

$$C_3 = 3$$

función de velocidad:

$$v(t) = \left\langle e^t + 2, \frac{1}{2} \sin^2(t) - 1, -\frac{1}{t+1} + 3 \right\rangle$$

b) función posición:

$$\int v(t) dt = r(t)$$

$$v(t) = \left\langle \underbrace{e^t + 2}_{f(t)}, \underbrace{\frac{1}{2} \sin^2(t) - 1}_{g(t)}, \underbrace{-\frac{1}{t+1} + 3}_{h(t)} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \int f(t) dt &= \int (e^t + 2) dt \\ &= e^t + 2t + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int g(t) dt &= \frac{1}{2} \int (\sin^2(t) - 1) dt = -\frac{1}{2} \int \cos^2(t) dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2t)) dt \\ &= -\frac{1}{4} \left( t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right) + C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int h(t) dt &= - \int \left( \frac{1}{t+1} + 3 \right) dt = -(\ln|t+1| + 3t) + C_3 \\ &= -\ln|t+1| + 3t + C_3 \end{aligned}$$

# Encontrar constantes

$$r(0) = \langle 0, 2, 0 \rangle$$

$$e^0 + 2(0) + C_1 = 0 \quad | \quad 91 \quad -\frac{1}{4} \left( 0 - \frac{1}{2} \sin(2 \cdot 0) \right) + C_2 = 2$$

$$1 + 0 + C_1 = 0 \quad | \quad -\frac{1}{4} \cancel{0} + \cancel{\frac{1}{2} \sin(0)} + C_2 = 2$$

$$C_1 = -1$$

$$C_2 = 2$$

$$-\ln|t+1| + 3(t) + C_3 = 0$$

$$0 + 0 + C_3 = 0$$

$$C_3 = 0$$

función posición:

$$r(t) = \left\langle e^t + 2t - 1, -\frac{1}{4} \left( t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right) + 2, -\ln|t+1| + 3t + 0 \right\rangle$$

4) Calcule la longitud de arco de la helice circular de la ecuación vectorial:

$$r(t) = \cos(t)\hat{i} + \sin(t)\hat{j} + t\hat{k}$$

desde el punto  $(1, 0, 0)$  hasta el punto  $(1, 0, 2\pi)$ .

$$L = \int_a^b |r'(t)| dt$$

$$r'(t) = -\sin(t)\hat{i} + \cos(t)\hat{j} + \hat{k}$$

$$|r'(t)| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1}$$

$$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{2} dt = \sqrt{2}t \Big|_{a=0}^{b=2\pi}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \{ 2\pi - 0 \} = \sqrt{2} \cdot 2\pi$$

$$\# P(1, \emptyset, \emptyset) \& Q(1, \emptyset, 2\pi)$$

$$r(t) = \langle \cos(t), \sin(t), t \rangle$$

$$x = \cos(t) \quad \cos(t) = 1 \rightarrow t = 0$$

$$y = \sin(t) \quad \sin(t) = 0 \rightarrow t = 0$$

$$z = t \quad t = 0 \rightarrow t = 0$$

$$\cos(t) = 1 \rightarrow t = 2\pi$$

$$\sin(t) = 0 \rightarrow t = 2\pi$$

$$t = 2\pi \rightarrow t = 2\pi$$

5) a)  $f(x, y) = \sqrt{\underbrace{1 - x^2}_{\geq 0}} - \sqrt{\underbrace{1 - y^2}_{\geq 0}}$

$$1 - x^2 \geq 0$$

$$-x^2 \geq -1$$

$$x^2 \leq 1$$

$$x \leq \pm 1$$

$$\{-1 \leq x \leq 1\}$$

$$1 - y^2 \geq 0$$

$$-y^2 \geq -1$$

$$y^2 \leq 1$$

$$y \leq \pm 1$$

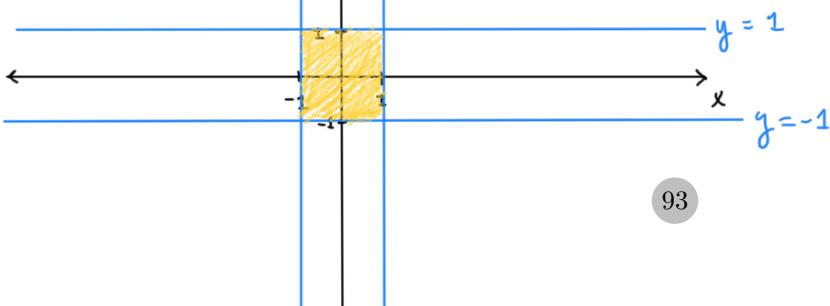
$$-1 \leq y \leq 1$$

$$x = -1$$

$$x = 1$$

∴ El dominio está definido tal que:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-1 \leq x \leq 1) \& (-1 \leq y \leq 1)\}$$



b)  $g(x, y) = \frac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

$$y - x^2 \geq 0$$

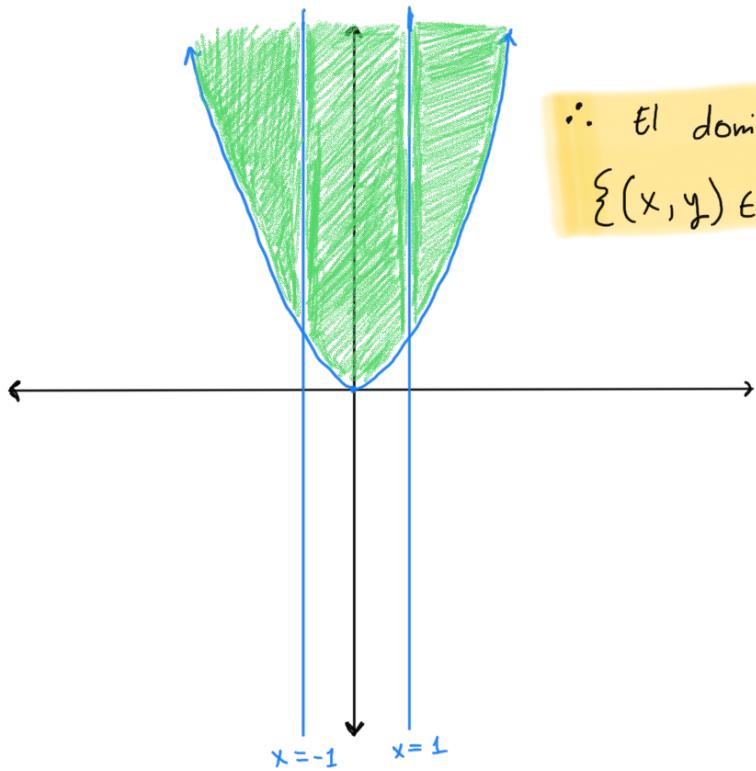
$$y \geq x^2$$

$$1 - x^2 \neq 0$$

$$-x^2 \neq -1$$

$$x^2 \neq 1$$

$$x \neq \pm 1$$



∴ El dominio está definido tal que:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y \geq x^2) \& (x \neq \pm 1)\}$$

c)  $h(x, y) = \frac{9}{9 - x - y}$

$$9 - x - y \neq 0$$

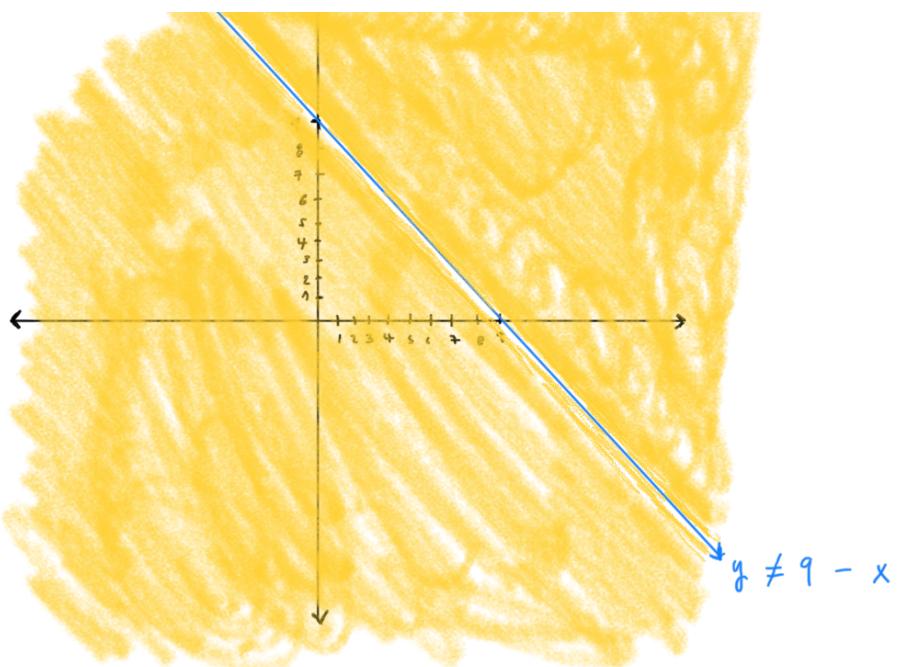
$$-x - y \neq -9$$

$$x + y \neq 9$$

$$\text{y} = 9 - x \quad \# \text{excluir}$$

∴ El dominio está definido tal que:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y \neq 9)\}$$



# Capítulo 16

Tarea #08

## Tarea #8 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 05 de marzo

Nombre: \_\_\_\_\_ Carnet: \_\_\_\_\_

Tema:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	20	32	24	24	20	120
Nota:						

1. Encuentre  $dy/dx$ .

- (a) (10 pts.)  $y \tan^{-1}(x) = x \sin^{-1}(y) + x^2 y^2$   
(b) (10 pts.)  $yx + x^3 \ln y = (x^2 + y^2)^2$

2. Encuentre las derivadas parciales de  $z$  para las sigs. funciones implícitas.

- (a) (16 pts.)  $\sin(xy) + \cos(yz) = \cot(zx)$   
(b) (16 pts.)  $\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2} = \frac{1}{x - 2y - 3z}$

3. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.

- (a) (12 pts.)  $z = \frac{2x + 3}{4y + 1}$ ,  $(0, 0, 0)$   
(b) (12 pts.)  $z = \sec(xy^2)$ ,  $\left(\frac{\pi}{3}, 1, 2\right)$

4. Encuentre la aproximación lineal  $L(x, y)$  de la función en el punto indicado.

- (a) (12 pts.)  $z = \frac{x}{x + y}$ ,  $(4, -2)$   
(b) (12 pts.)  $z = e^{-xy} \sin(y)$ ,  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

5. Encuentre las ecuaciones paramétricas de las rectas tangente a la superficie  $z = f(x, y)$  en el punto indicado.  $L_1$  es la tangente en la dirección de  $x$  y  $L_2$  es la tangente en la dirección de  $y$ .

- (a) (10 pts.)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $(3, 4)$   
(b) (10 pts.)  $z = 2 \sin^2(3x - 2y) + 4 \cos^2(x + y)$ ,  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

Recuerde encontrar una función vectorial para encontrar la recta tangente a la superficie  $z = f(x, y)$ .

Dirección-x	Dirección-y
$x = t$	$x = a$
$y = b$	$y = t$
$z = f(t, b)$	$z = f(a, t)$

# Capítulo 17

Tarea #09

## Tarea #9 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 12 de marzo

Nombre: \_\_\_\_\_ Carnet: \_\_\_\_\_

Tema:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	20	20	20	20	20	100
Nota:						

1. Encuentre  $\frac{dz}{dt}$ .

- (a) (10 pts.)  $z = x^2 + y^2 + xy, \quad x = \sin t, \quad y = e^t$   
(b) (10 pts.)  $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \quad x = \ln t, \quad y = \cos t$

2. Encuentre  $\frac{\partial z}{\partial s}$  y  $\frac{\partial z}{\partial t}$ .

- (a) (10 pts.)  $z = x^2y^3, \quad x = s \cos t, \quad y = s \sin t$   
(b) (10 pts.)  $z = e^r \cos \theta \sin(\phi), \quad r = st, \quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}, \quad \phi = \ln[\tan(s) + \sinh(t)]$

3. (20 pts.) Determine la derivada direccional de  $f(x, y) = x^3y^4 + x^4y^3$  en el punto  $(1, 1)$  en la dirección del vector unitario  $\mathbf{u} = \langle \cos \theta, \sin \theta \rangle, \theta = \pi/6$ .

4. (20 pts.) Encuentre la razón de cambio de  $f(x, y, z) = e^{x-1} \sin y + (x+1)^2 \ln(z+1)$  en el punto  $(1, \pi/3, 0)$  en la dirección del vector  $\mathbf{v} = \langle -1, 4, -8 \rangle$ .

5. Dada la función  $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$ .

- (a) (10 pts.) Determine el gradiente de  $f$ .  
(b) (05 pts.) Evalúe el gradiente en el punto  $P(-6\pi, 4\pi)$ .  
(c) (05 pts.) Encuentre la razón de cambio de  $f$  en  $P$  en la dirección del vector  $u = \frac{1}{2}(\sqrt{3}i - j)$ .

# Capítulo 18

Tarea #10

# Tarea #10, Cálculo Multivariable

Entrega: Martes 24 de marzo, 2019

Nombre y Apellidos: \_\_\_\_\_

Entregue sólo un ejercicio de cada tema.

Se le recomienda como práctica realizar la mayor cantidad posible de ejercicios.

## 1. Tema 1: Planos Tangentes y Aproximaciones Lineales

- (a) Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.

- $z = x^2 + y^2, (1, 1, 3)$
- $z = x \sin(x + y), (-1, 1, 0)$

- (b) Encuentre la aproximación lineal  $L(x, y)$  de la función en el punto indicado.

- $z = xe^{xy}, (1, 0)$
- $z = \sqrt{x + e^{4y}}, (3, 0)$

## 2. Tema 2: Derivación Implícita

- (a) Encuentre  $dy/dx$ :

- $y \cos x = x^2 + y^2$
- $e^y \sin x = x + xy$

- (b) Encuentre las primeras derivadas parciales de  $z$  dada la ecuación  $e^z + e^{xy} = xyz$ .

- (c) Encuentre la derivada parcial de  $z$  para función implícita  $\cos yx + \sin yz = zx$

## 3. Tema 3: Regla de la Cadena

- (a) Encuentre  $\partial z / \partial s$  y  $\partial z / \partial t$

- $z = e^r \cos \theta, \quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}, \quad r = st$
- $z = \arcsin(x - y), \quad x = s^2 + t^2, \quad y = 1 - 2st$

- (b) Un manufactor ha modelado su producción anual  $P$  como una función Cobb-Douglas de la forma

$$P(L, K) = 10L^{1/2}K^{1/2}$$

donde  $L$  es el número de horas (en miles),  $K$  son las horas de capital (en miles) y  $P$  está en toneladas. Suponga que  $L = 25$  y que  $K = 16$ . La labor de horas está decreciendo con una tasa de 2 mil horas por año y el capital está aumentando con una tasa de 3 mil horas por año. Encuentre la tasa de cambio de la producción.

- (c) La temperatura en un punto  $(x, y)$  es medida en grados Celsius. Un bicho viaja tal que su posición después de  $t$  segundos está dada por  $x = \sqrt{1+t}$ ,  $y = 2 + \frac{1}{3}t$ , donde  $x$  y  $y$  están dadas en cms. La función de temperatura satisface que  $T_x(2, 3) = 4$  y  $T_y(2, 3) = 3$ . ¿Cuán rápido está aumentando la temperatura a lo largo de la trayectoria del bicho después de 3 segundos?

- (d) El voltaje  $V$  en un circuito simple decrece gradualmente a medida que la batería se agota. La resistencia  $R$  crece despacio a medida que el resistor se calienta. Utilice la ley de Ohm,  $V = IR$ , para encontrar como está cambiando la corriente  $I$  en el momento que la resistencia es  $R = 400 \Omega$ ,  $I = 0.08A$ ,  $dV/dt = -0.01 V/s$  y  $dR/dt = 0.03 \Omega/s$ .

#### 4. Tema 4: Derivada Direccional

(a) Halle la derivada direccional de la función en el punto  $P$ , en la dirección del vector  $\vec{v}$ .

- $f(x, y) = x^3 - y^3$  ,  $P(4, 3)$  ,  $\vec{v} = \sqrt{2}/2(\hat{i} + \hat{j})$
- $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  ,  $P(1, 1, 1)$  ,  $\vec{v} = \sqrt{3}/3(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$

(b) Encuentre la razón de cambio instántanea de la función en  $P$ , en la dirección del vector  $\vec{v}$ .

- $f(x, y) = e^x \sin y$  ,  $P(1, \pi/2)$  ,  $\vec{v} = -\hat{i}$
- $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  ,  $P(1, 1, 1)$  ,  $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$

(c) Halle la derivada direccional de la función en la dirección del vector unitario  $\vec{u} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$

- $f(x, y) = \sin(2x + y)$  ,  $\theta = \pi/3$
- $f(x, y) = \frac{y}{x + y}$  ,  $\theta = -\pi/6$

#### 5. Tema 5: Optimización

(a) Encuentre y clasifique los extremos relativos de las siguientes funciones:

- $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 3$
- $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(b) Encuentre y clasifique los extremos relativos de las siguientes funciones:

- $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/3} + 2$
- $g(x, y) = x^2 - 3xy - y^2$

(c) Sea  $P$  una función de producción dada por

$$P(L, K) = 2LK - 3K^2 - 2L^2 - 2L + 21K$$

Encuentre los valores de  $L$  (en miles) y  $K$  (en miles) que maximizan la producción  $P$ .

(d) Una compañía produce dos tipos de pasteles cuyos costos unitarios de producción son de  $Q20$  y  $Q10$ . Las demandas para ambos pasteles son

$$q_A = 100 - 5x - 2y, \quad q_B = 250 - 3x - 5y.$$

Encuentre los precios de venta  $x$  y  $y$  que maximizan la utilidad de la compañía.

## Tema 6: Multiplicadores de Lagrange

- (a) Una empresa puede elaborar su producto en dos de sus plantas. El costo de producir  $x$  unidades en su primera planta y el costo de producir  $y$  unidades en la segunda planta está dado por la función conjunta de costo:

$$C(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$$

¿Cuántas unidades debe producir en cada planta con el objetivo de minimizar el costo total si la empresa tiene que suministrar una orden de 500 unidades?

- (b) La función de producción de una empresa es

$$P(L, K) = 118L + 20K + 3LK - L^2 - 2K^2$$

donde  $L$  y  $K$  representan el número de unidades de mano de obra y de capital utilizados y  $P$  es el nivel de producción. Los costos unitarios de mano de obra y del capital son de \$ 80 y \$ 160, respectivamente. Encuentra cuánto trabajo y capital debe utilizar la empresa para maximizar la producción si sólo dispone de un presupuesto de \$ 5,640.

- (c) Durante los meses de zafra, un ingenio azucarero Emplea  $L$  trabajadores y  $K$  trituradoras y produce  $P$  kilogramos de caña de azúcar procesada.

$$P(L, K) = 50L^{2/3}K^{1/3}$$

El ingenio contrata cada trabajador a Q 100 diarios por cada trabajador, gasta Q 50 diarios en el uso y mantenimiento de cada trituradora y dispone de un presupuesto diario de Q 450,000 para procesar la caña de azúcar. ¿Cuántos trabajadores se deben de contratar y trituradoras se deben usar a efecto de maximizar la producción?

# Parte V

## Soluciones Varias

# Capítulo 19

Solución #01

## Corto #7 Cálculo Multivariable

Nombre: \_\_\_\_\_ Carnet: \_\_\_\_\_

1. Encuentre el dominio de la función vectorial  $r(t) = \frac{t+4}{t-4}\hat{i} + \frac{2}{\sqrt{1-t}}\hat{j} + \ln(t+2)\hat{k}$ .

Dominio f:  $t \neq 4$   $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

Dominio g:  $1-t > 0$   $(-\infty, 1)$   
 $t < 1$

Dominio h:  $t+2 > 0$   $(-2, \infty)$

$$t > -2$$

Encuentre el dominio en común entre las tres

Dominio  $-2 < t < 1$  ó  $(-2, 1)$

$\lim_{t \rightarrow a} r(t)$

$t \rightarrow a$ .

2. Considere la función  $g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$ .

(a) Encuentre y bosqueje el dominio de  $g$ .

(b) Encuentre y bosqueje las curvas de nivel para  $k = \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{9}}$ .

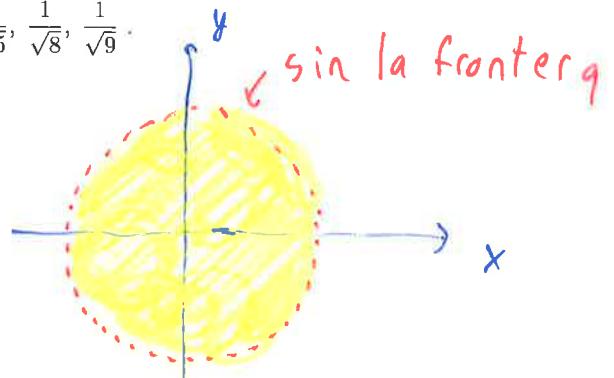
1D es una región.

$$a) 9 - x^2 - y^2 > 0$$

$$9 > x^2 + y^2.$$

$$x^2 + y^2 < 9.$$

circunferencia disco radio 3



b) Curvas de nivel  $g(x, y) = K$

$$\frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} = K \Rightarrow \frac{1}{K} = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{1}{K^2} = 9 - x^2 - y^2.$$

$$\frac{1}{K^2} = a,$$

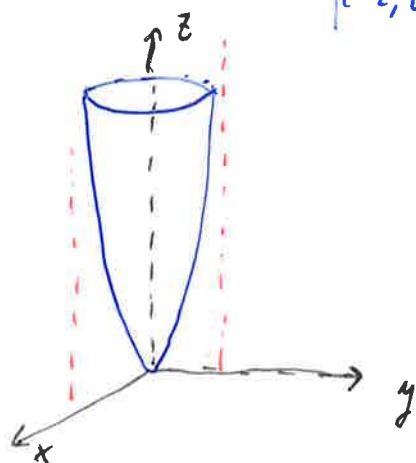
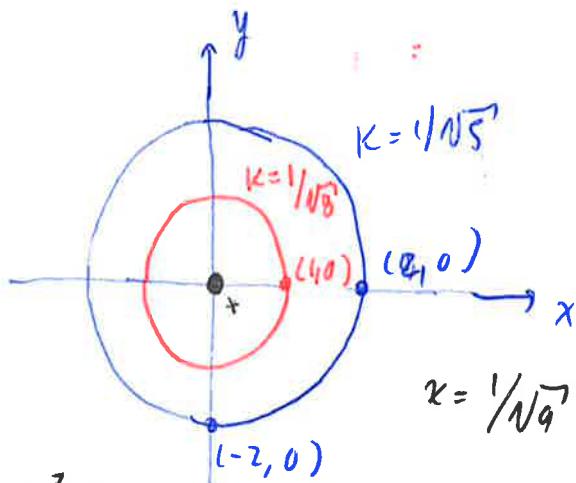
Circunferencias radio  $\sqrt{9 - \frac{1}{K^2}}$

$$x^2 + y^2 = 9 - \frac{1}{K^2}.$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \frac{1}{K^2} = 5 \quad x^2 + y^2 = 9 - 5 = 4$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{8}}, \quad \frac{1}{K^2} = 8 \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{9}}, \quad \frac{1}{K^2} = 9 \quad x^2 + y^2 = 0$$



3. Considere la función de producción  $P = 10e^{K+L-KL}$

$K+L-KL$

- (a) Encuentre las funciones de productividad marginal del trabajo y del capital.
- (b) Encuentre y simplifique  $P_{LL} + P_{KK}$ .

a) Productividad Marginal es la derivada.

$$P_L = 10(1-K)e^{K+L-KL}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial L^2} = P_{LL}$$

$$P_K = 10(1-L)e^{K+L-KL}$$

b) Encuentre y simplifique  $P_{CC} + P_{KK}$

$$P_{LL} = 10(1-K)(1-L)e^{K+L-KL}$$

$$P_{KK} = 10(1-L)^2 e^{K+L-KL}$$

$$P_{CC} + P_{KK} = \underline{10(1-K)^2} e^{K+L-KL} + \underline{10(1-L)^2} e^{K+L-KL}$$

$$10 e^{K+L-KL} [ (1-K)^2 + (1-L)^2 ]$$

¿  $P_{LK}$  ó  $P_{KL}$ ?  $P_{LK} = -10 e^{K+L-KL} + 10(1-K)(1-L)e^{K+L-KL}$

regla del producto  $\underline{P_{KL}} = -10 e^{K+L-KL} + 10(1-L)(1-K)e^{K+L-KL}$

Derivadas cruzadas.

4. Encuentre la longitud de arco de la curva descritas por las función vectorial:  
 $s(t) = \langle t \sin t + \cos t, t \cos t - \sin t \rangle$ ,  $-2 \leq t \leq 0$ .

Longitud de arco  $L = \int_{-2}^0 |s'(t)| dt.$

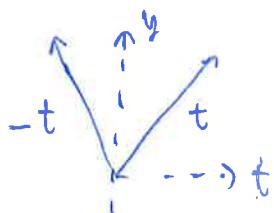
$2-0 \quad \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$        $3-0 \quad \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$

$s'(t) = \langle \cancel{\sin t + t \cos t} - \sin t, \cancel{\cos t - t \sin t} - \cos t \rangle$

$s'(t) = \langle t \cos t, -t \sin t \rangle$       velocidad.

$|s'(t)| = \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t} = \sqrt{t^2} = |t|$

$$L = \int_{-2}^0 |t| dt. = - \int_{-2}^0 t dt. = - \frac{t^2}{2} \Big|_{-2}^0 = \frac{0+4}{2} = 2.$$



$$\int_0^{-2} t dt = \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^{-2} = 2 - 0 = 2.$$

$$\underbrace{(t-4)^{-1}}$$

5. La curva  $\mathcal{C}$  es descrita por la función vectorial  $\mathbf{r}(t) = \left\langle \ln(t-2), \frac{1}{t-4}, 10 \tan^{-1} t \right\rangle$ .

/ (a) Encuentre la ec. vectorial de la recta tangente a  $\mathcal{C}$  en  $t=3$ .

(b) ¿Es perpendicular la recta tangente a la recta  $2x-1 = \frac{z}{-3}$ ,  $y=10$ ?

Ec. Recta Tangente a una curva.  $a=3$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a) + t \mathbf{r}'(a)$$

Punto:  $\mathbf{r}(3) = \left\langle \ln 1, \frac{1}{-1}, 10 \tan^{-1} 3 \right\rangle = \langle 0, -1, 10 \tan^{-1} 3 \rangle$

Derivada:  $\mathbf{r}'(t) = \left\langle \frac{1}{t-2}, \frac{-1}{(t-4)^2}, \frac{10}{1+t^2} \right\rangle$

Pendientes:  $\mathbf{r}'(3) = \langle 1, -1, 1 \rangle$

Ec. Vectorial:  $\mathbf{r}(t) = \langle 0, -1, 10 \tan^{-1} 3 \rangle + t \langle 1, -1, 1 \rangle$

Ecs. Paramétricas  $x = 0 + t$  Ecs. simétricas

$$t = -1 - y.$$

$$y = -1 - t$$

$$t = x = -1 - y = z - 10 \tan^{-1} 3$$

$$z = 10 \tan^{-1} 3 + t.$$

b. ¿Es perpendicular a la recta  $2x-1 = \frac{z}{-3}$ ,  $y=10$ ?

Tangente  $\mathbf{v}_1 = \langle 1, -1, 1 \rangle$ .

2da recta  $\mathbf{v}_2 = \langle \frac{1}{2}, 0, -3 \rangle$

$$2x-1 = t \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{t}{2}.$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2} + 0 - 3 = \frac{-5}{2} \neq 0.$$

$$y = 10 \Rightarrow y = 10 + 0 \cdot t$$

$$\frac{z}{-3} = t \Rightarrow z = -3t$$

Las dos rectas no son perpendiculares.

6. Una partícula dentro de un campo eléctrico experimenta la siguiente aceleración.

$$t^{1/2}$$

$$\mathbf{a}(t) = -6t^2\mathbf{i} + \underline{8 \sinh(2t)\mathbf{j}} + \underline{e^{t/2}\mathbf{k}}$$

$$\cosh 0 = 1, \sinh 0 = 0$$

(a) Encuentre la función de velocidad si  $\mathbf{v}(0) = 10\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ .

(b) Encuentre la función de posición si  $\mathbf{r}(0) = 10\mathbf{j}$ .

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t) dt = \langle -2t^3 + c_1, 4\cosh(2t) + c_2, 2e^{t/2} + c_3 \rangle$$

$$\text{Use } \mathbf{v}(0) = \langle 10, 0, 2 \rangle$$

$$\mathbf{v}(0) = \langle c_1, 4 + c_2, 2 + c_3 \rangle = \langle 10, 0, -2 \rangle$$

$$\begin{aligned} c_1 &= 10 & 4 + c_2 &= 0 & 2 + c_3 &= -2 \\ && c_2 &= -4 & & c_3 = -4. \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}(t) = \langle 10 - 2t^3, 4\cosh(2t) - 4, 2e^{t/2} - 4 \rangle$$

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t) dt = \langle 10t - \frac{1}{2}t^4 + c_1, 2\cosh(2t) - 4t + c_2, 4e^{t/2} - 4t + c_3 \rangle$$

$$\text{Use } \mathbf{r}(0) = \langle 0 \rangle$$

$$\mathbf{r}(0) = \langle 0 - 0 + c_1, 2 - 0 + c_2, 4 - 0 + c_3 \rangle = \langle 0, 10, 0 \rangle$$

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -2, \quad c_3 = -4.$$

$$\mathbf{r}(t) = \langle 10t - \frac{1}{2}t^4, 2\cosh(2t) - 4t - 2, 4e^{t/2} - 4t - 4 \rangle$$