Corto #7 Cálculo Multivariable

Nombre:____ **Carnet:** _______________

1. Encuentre el dominio de la función vectorial $r(t) = \frac{t+4}{t-4}\hat{\imath} + \frac{2}{\sqrt{1-t}}\hat{\jmath} + \ln(t+2)\hat{k}$.

Dominio f: $t \neq 4$ $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

Dominio g: $1 - t > 0$ $(-\infty, 1)$

$t < 1$

Dominio h: $t + 2 > 0$ $(-2, \infty)$

$t > -2$

$(-2, 1)$

Encuentre el dominio en común entre las tres

Dominio $-2 < x < 1$ ó $(-2, 1)$

$\lim_{t \to a} r(t)$

2. Considere la función $g(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$.

(a) Encuentre y bosqueje el dominio de g.

(b) Encuentre y bosqueje las curvas de nivel para $k = \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{9}}$.

D es una región.

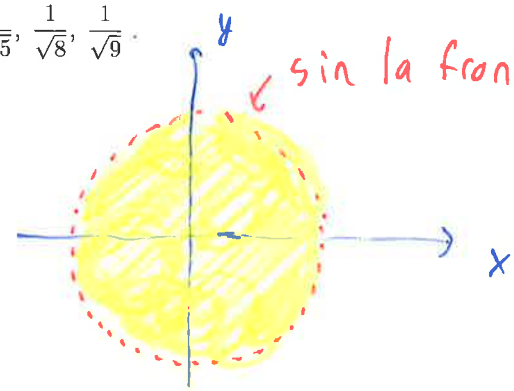
a) $9 - x^2 - y^2 > 0$

$9 > x^2 + y^2.$

$x^2 + y^2 < 9.$

~~circunfere~~ disco radio 3

sin la frontera



b) Curvas de nivel $g(x,y) = K$

$$\frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}} = K \Rightarrow \frac{1}{K} = \sqrt{9-x^2-y^2}$$

$$\frac{1}{K^2} = 9 - x^2 - y^2.$$

$$\frac{1}{\frac{1}{9}} = 9,$$

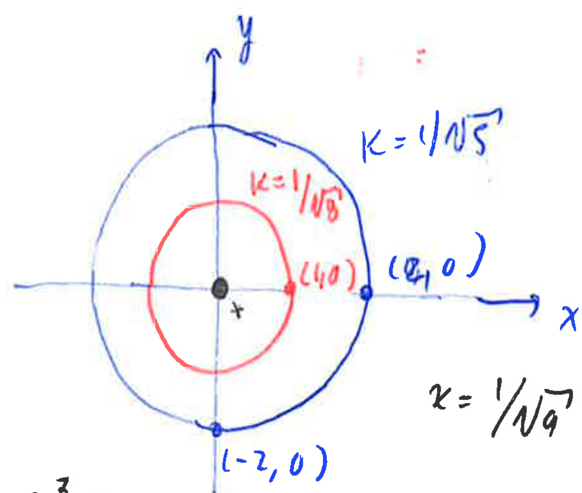
circunferencias radio $\sqrt{9 - \frac{1}{K^2}}$

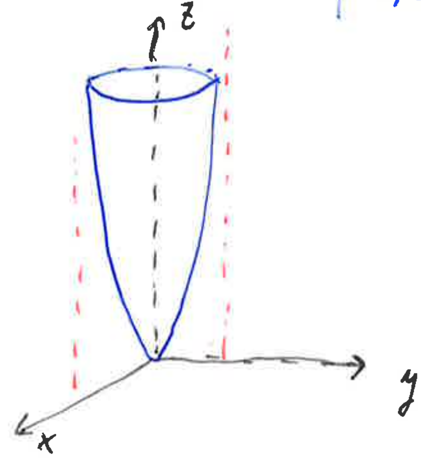
$$x^2 + y^2 = 9 - \frac{1}{K^2}.$$

$K = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \frac{1}{K^2} = 5 \qquad x^2 + y^2 = 9 - 5 = \underbrace{4}_{2^2}$

$K = \frac{1}{\sqrt{8}} \quad \frac{1}{K^2} = 8 \qquad x^2 + y^2 = 1$

$K = \frac{1}{\sqrt{9}} \quad \frac{1}{K^2} = 9 \qquad x^2 + y^2 = 0$





3. Considere la función de producción $P = 10e^{K+L-KL}$ $K+L-KL$

(a) Encuentre las funciones de productividad marginal del trabajo y del capital.

(b) Encuentre y simplifique $P_{LL} + P_{KK}$.

a) Productividad Marginal es la derivada.

$$P_L = 10(1-K)e^{K+L-KL}$$

$$P_K = 10(1-L)e^{K+L-KL}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial L^2} = P_{LL}$$

b) Encuentre y simplifique $P_{LL} + P_{KK}$

$$\left.\begin{aligned} P_{LL} &= 10(1-K)(1-K)e^{K+L-KL} \\ P_{KK} &= 10(1-L)^2 e^{K+L-KL} \end{aligned}\right\} \text{2das derivadas}$$

$$P_{LL} + P_{KK} = \underline{\underline{10}}(1-K)^2 \underline{\underline{e}}^{K+L-KL} + \underline{\underline{10}}(1-L)^2 \underline{\underline{e}}^{K+L-KL}$$

$$10e^{K+L-KL}\left[(1-K)^2 + (1-L)^2\right]$$

¿ P_{LK} ó P_{KL}?

regla del producto

$$P_{LK} = -10e^{K+L-KL} + 10(1-K)(1-L)e^{K+L-KL}.$$

$$\underbrace{P_{KL}}_{\text{derivadas cruzadas.}} = -10e^{K+L-KL} + 10(1-L)(1-K)e^{K+L-KL}.$$

4. Encuentre la longitud de arco de la curva descritas por las función vectorial:
$\mathbf{s}(t) \quad \langle t\sin t + \cos t,\ t\cos t - \sin t\rangle$, $-2 \leqslant t \leqslant 0$.

Longitud de arco $\quad L = \displaystyle\int_{-2}^{0} |s'(t)|\, dt.$

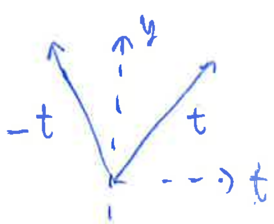
2-D $\sqrt{(x')^2 + (y')^2}$ $\qquad$ 3-D $\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$

$$s'(t) = \langle \cancel{\sin t} + t\cos t - \cancel{\sin t},\ \cancel{\cos t} - t\sin t - \cancel{\cos t} \rangle$$

$$s'(t) = \langle t\cos t, -t\sin t \rangle$$ velocidad.

$$|s'(t)| = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2 \sin^2 t} = \sqrt{t^2} = |t|$$

$$L = \int_{-2}^{0} |t|\, dt. = -\int_{-2}^{0} t\, dt. = -\frac{t^2}{2}\Big]_{-2}^{0} = \frac{0+4}{2} = 2.$$



$$\int_{0}^{-2} t\, dt = \frac{1}{2} t^2 \Big]_{0}^{-2} = 2 - 0 = 2.$$

$(t-4)^{-1}$

5. La curva C es descrita por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \left\langle \ln(t-2), \frac{1}{t-4}, 10\tan^{-1} t \right\rangle$.

✓ (a) Encuentre la ec. vectorial de la recta tangente a C en $t = 3$.

(b) ¿Es perpendicular la recta tangente a la recta $2x - 1 = \frac{z}{-3}$, $y = 10$?

Ec. Recta Tangente a una curva. $a = 3$

$$r(t) = r(a) + t\, r'(a)$$

Punto: $r(3) = \langle \ln 1, \frac{1}{-1}, 10\tan^{-1}(3) \rangle = \langle 0, -1, 10\tan^{-1}(3) \rangle$

Derivada: $r'(t) = \left\langle \frac{1}{t-2}, \frac{-1}{(t-4)^2}, \frac{10}{1+t^2} \right\rangle$

Pendientes: $r'(3) = \langle 1, -1, 1 \rangle$

Ec. vectorial: $r(t) = \langle 0, -1, 10\tan^{-1}(3) \rangle + t\langle 1, -1, 1 \rangle$

Ecs. Paramétricas

$x = 0 + t$

$y = -1 - t$

$z = 10\tan^{-1}(3) + t.$

$t = -1 - y.$

Ecs. simétricas

$t = x = -1 - y = z - 10\tan^{-1}(3)$

b. ¿Es perpendicular a la recta $2x - 1 = \frac{z}{-3}$, $y = 10$?

Tangente $v_1 = \langle 1, -1, 1 \rangle$.

2da recta $v_2 = \langle \frac{1}{2}, 0, -3 \rangle$

$2x - 1 = t \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{t}{2}.$

$y = 10 \Rightarrow y = 10 + 0 \cdot t$

$\frac{z}{-3} = t \Rightarrow z = -3t$

$v_1 \cdot v_2 = \frac{1}{2} + 0 - 3 = \frac{-5}{2} \neq 0.$

Las dos rectas no son perpendiculares

$t^{1/2}$.

6. Una partícula dentro de un campo eléctrico experimenta la siguiente aceleración.

$$\mathbf{a}(t) = -6t^2\mathbf{i} + 8\sinh(2t)\mathbf{j} + e^{t/2}\mathbf{k}$$

$\cosh 0 = 1, \sinh 0 = 0$

(a) Encuentre la función de velocidad si $\mathbf{v}(0) = 10\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$.

(b) Encuentre la función de posición si $\mathbf{r}(0) = 10\mathbf{j}$.

$$v(t) = \int a(t)\,dt = \langle -2t^3 + c_1,\ 4\cosh(2t) + c_2,\ 2e^{t/2} + c_3 \rangle$$

Use $v(0) = \langle 10, 0, -2 \rangle$

$$v(0) = \langle c_1,\ 4 + c_2,\ 2 + c_3 \rangle = \langle 10, 0, -2 \rangle$$

$c_1 = 10$ $\quad 4 + c_2 = 0 \quad c_2 = -4$ $\quad 2 + c_3 = -2 \quad c_3 = -4$.

$$v(t) = \langle 10 - 2t^3,\ 4\cosh(2t) - 4,\ 2e^{t/2} - 4 \rangle$$

$$r(t) = \int v(t)\,dt = \langle 10t - \tfrac{1}{2}t^4 + c_1,\ 2\cosh(2t) - 4t + c_2,\ 4e^{t/2} - 4t + c_3 \rangle$$

Use $r(0) = 10\hat{j}$

$$r(0) = \langle 0 - 0 + c_1,\ 2 - 0 + c_2,\ 4 - 0 + c_3 \rangle = \langle 0, 10, 0 \rangle$$

$c_1 = 0, \quad c_2 = -2, \quad c_3 = -4$.

$$r(t) = \langle 10t - \tfrac{1}{2}t^4,\ 2\cosh(2t) - 4t - 2,\ 4e^{t/2} - 4t - 4 \rangle$$