13.2 Cálculo con funciones Vectoriales. p. 55.

Derivadas $\vec{r}'(t)$ respecto a t

Integrales: $\int r'(t)\,dt$. respecto a t.

$$r'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h} \qquad r = \langle f, g, h \rangle$$

$$r'(t) = \left\langle \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}_{f'(t).}, \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}}_{g'(t)}, h'(t) \right\rangle$$

Derivada: $\boxed{r'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle.}$

Derive cada función componente.

Integral: $\int \vec{r}(t)\,dt = \int (f\,\hat{i} + g\,\hat{j} + h\,\hat{k})\,dt.$

$$\hat{i} \int f\,dt + \hat{j} \int g\,dt + \hat{k} \int h\,dt.$$

integre cada función componente.

Ejercicio 1: Encuentre la 1ra y 2da derivada de las siguientes funciones.

a. $\vec{r}(t) = \langle \sin(4t), t^2, \ln(\sin t) \rangle.$

$\vec{r}'(t) = \langle 4\cos(4t), 2t, \cos t/\sin t \rangle$

$\vec{r}'(t) = \langle 4\cos(4t), 2t, \cot(t) \rangle.$

$$r''(t) = \langle f''(t), g''(t), h''(t) \rangle$$

$$r''(t) = \langle -16\sin(4t), 2, -\csc^2 t \rangle.$$

$\sin' \to \cos$ $\quad$ $\csc' \to -\csc\cot$ $\quad$ $\int \sec = \ln(\sec+\tan)$

$\cos' \to -\sin$ $\quad$ $\sec' \to \sec\tan$

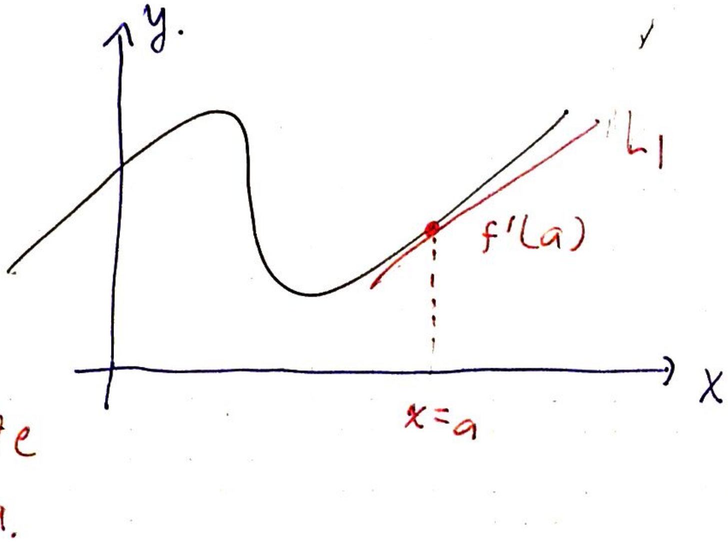
$\tan' \to \sec^2$ $\quad$ $\cot' \to -\csc^2.$ $\quad$ $t.$

b. $\vec{s}(t) = \hat{\imath}\tan(4t) + \hat{\jmath}\ln(4t+1) + \hat{k}\,(5-2t)^{1/2}.$

$$\vec{s}'(t) = 4\,\underline{\underline{\hat{\imath}}}\,[\sec(4t)]^2 + \hat{\jmath}\,4(4t+1)^{-1} - \hat{k}\,(5-2t)^{-1/2}.$$

$$s'' = 32\hat{\imath}\sec(4t)\sec(4t)\tan(4t) - 16\hat{\jmath}(4t+1)^{-2} + \frac{\hat{k}}{2}(5-2t)^{-3/2}(-2)$$

para $y = f(x)$



$f'(a)$ es igual a la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x=a$.

L_1: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ Ec. Recta Tangente.

Con una función vectorial

$\vec{r} = \langle f, g, h \rangle \qquad x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$

hay ecuaciones paramétricas para cada variable.

$\vec{r}\,'(a) = \langle f'(a), g'(a), h'(a) \rangle.$

vector de pendientes de rectas tangentes a la curva $\vec{r}(t)$.

Vector Tangente a $\vec{r}(t)$: $\boxed{r'(a)}$

Recta Tangente: es ahora una función vectorial.

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(a) + \vec{r}\,'(a)\,t}$$

Ecs. Paramétricas:

$$x = f(a) + f'(a)\,t$$
$$y = y(a) + t\,g'(a)$$
$$z = h(a) + t\,h'(a)$$

Vector Tangente en $t=a$: $r'(a)$

Vector Tangente Unitario en $t=a$: $\dfrac{r'(a)}{|r'(a)|} = \vec{T}(a)$

Ejercicio 3: Encuentre las ecs. paramétricas de la recta tangente a la curva

$r(t) = \langle 2\cos t, 2\sin t, 4\cos 2t \rangle$ en el punto $\underline{(\sqrt{3}, 1, 2)}$

Recta Tangente: $\boxed{\vec{r}_T(t) = \vec{r}(a) + t\,\vec{r}\,'(a)}$

$\vec{r}(a) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle.$

Derivada: $\vec{r}\,'(t) = \langle -2\sin t, 2\cos t, -8\sin(2t) \rangle.$

¿Cómo se encuentra a? $r(t) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle.$

$\rightarrow 2\cos t = \sqrt{3} \qquad \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{t = \pi/6.}$

$2\sin t = 1 \Rightarrow 2\sin \pi/6 = 2\,\frac{1}{2} = 1$ ✓

$4\cos 2t = 2. \Rightarrow 4\cos \pi/3 = 4\,\frac{1}{2} = 2$ ✓

Vector Tangente: $r'(\pi/6) = \langle -2\sin \pi/6, 2\cos \pi/6, -8\sin \pi/3 \rangle$

$$r'(\pi/6) = \left\langle -\frac{2}{2}, 2\frac{\sqrt{3}}{2}, -8\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = \langle -1, \sqrt{3}, -4\sqrt{3} \rangle.$$

$$\vec{r}_T(t) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle + t\,\langle -1, \sqrt{3}, -4\sqrt{3} \rangle.$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \sqrt{3} - t \\ y &= 1 + \sqrt{3}\,t \\ z &= 2 - 4\sqrt{3}\,t \end{aligned}}$$