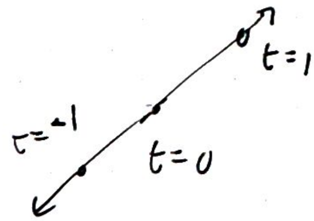
12.5 Rectas y Planos

Ecuación de una Recta.

Vector Posición $\vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$.

Vector dirección $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$.



Ec. vectorial $\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}}$

t es el parámetro

Ecs. Paramétricas:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct. \end{aligned}}$$

Resuelva para t en las tres ecs.

$$\boxed{t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

Ecs. simétricas $a, b, c \neq 0$.

vector dirección $\vec{v} = \langle a, 0, c \rangle$, las ecs. de la recta cambian,

$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

vectorial

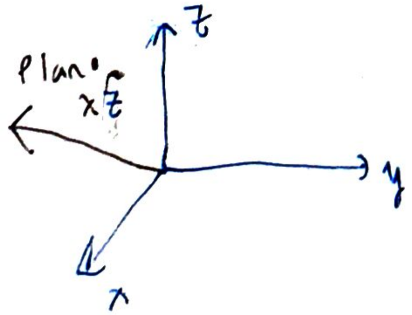
$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 \\ z &= z_0 + ct. \end{aligned}$$

Ecs. Paramétricas

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}$$

$y = y_0$.

Simétricas.



Ejercicio 3: Encuentre las ecs. simétricas de la recta que pasa por los puntos dados.
Encuentre en qué punto la recta intersecta al plano xz.
Pag. 41.

a. $P(2,8,-2)$ y $Q(2,6,4)$.

Vector Posición: $\overrightarrow{OP} = \vec{r}_0 = \langle 2,8,-2\rangle$. $\quad \vec{r} = \langle x,y,z\rangle$.

Vector Dirección. $\overrightarrow{PQ} = \vec{v} = \langle 0,-2,6\rangle$.

Ec. vectorial: $\vec{r} = \langle 2,8,-2\rangle + t\langle 0,-2,6\rangle$.

Ecs. simétricas: $x = 2, \quad \dfrac{y-8}{-2} = \dfrac{z+2}{6}$.

¿Cuál es la intersección con el plano xz?

Use $y=0$. $\quad x = 2, \quad \dfrac{-8}{-2} = \dfrac{z+2}{6}$.

$$6\cdot 4 = z+2 \Rightarrow z = 22.$$

La intersección con el plano xz es el punto $(2,0,22)$.

b. $P(4,6,10)$ y $Q(6,6,10)$

$\vec{r}_0 = \langle 4,6,10\rangle$. $\quad \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2,0,0\rangle$.

vectorial: $\vec{r} = \langle 4,6,10\rangle + t\langle 2,0,0\rangle$.

paramétricas:
$x = 4+2t$
$y = 6$
$z = 10$.

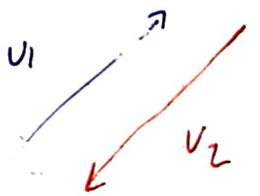
simétricas.
$t = \dfrac{x-4}{2}, \quad y=6, \quad z=10.$

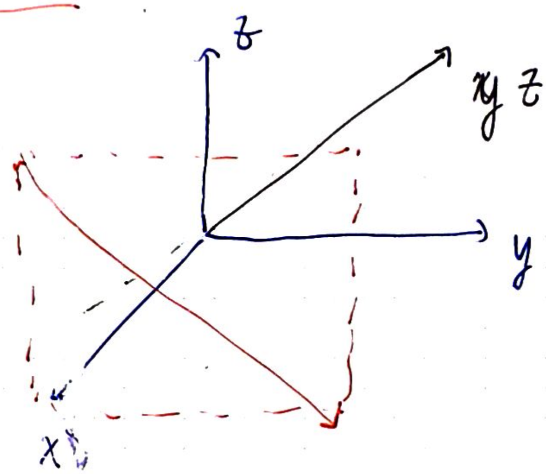
¿Cuál es el punto intersección con el plano xz?

Use $y = 0$: como cualquier punto sobre esta recta pasa sólo por $y = 6$, esta recta no puede intersectar al plano xz. NO HAY.

Rectas Paralelas.

Dos rectas $\vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + t_1\vec{v}_1$ y $\vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + t_2\vec{v}_2$ son paralelas si y sólo si sus vectores de dirección $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son paralelos.





En el espacio hay 3 tipos de rectas.

a. Paralelas.
b. Intersecan en 1 punto
c. Oblicuas (ni son paralelas ni se intersecan).

Ejercicio 4: Determine si los sigs. pares de rectas son paralelas, oblicuas o se intersecan.

a. $\frac{x-2}{8} = \frac{y-3}{24} = \frac{z-2}{16}$, $\frac{x-10}{-2} = \frac{y+15}{-6} = \frac{z+24}{-4}$.

$v_1 = \langle 8, 24, 16 \rangle$ $\qquad$ $v_2 = \langle -2, -6, -4 \rangle$.

$x = 2+8t, \quad y = 3+24t, \quad z = 2+16t.$

$v_1 = -4v_2$. v_1 y v_2 son paralelos.

Las dos rectas son paralelas.

b. $L_1: \quad x = 5-4t, \quad y = 6-2t, \quad z = 2+0t \qquad t \in \mathbb{R}.$
$L_2: \quad x = 3+8\underline{\underline{s}}, \quad y = -2\underline{\underline{s}}, \quad z = 8+2\underline{\underline{s}}. \qquad s \in \mathbb{R}$

Utilice una variable parámetro para cada recta

$v_1 = \langle -4, -2, 0 \rangle$, $v_2 = \langle 8, -2, 2 \rangle$. no son paralelas.

Analice si las rectas se intersecan.

$x = x \qquad 5-4t = 3+8s. \quad (1) \quad \Rightarrow \quad 2 = 4t+8s$
$y = y \qquad 6-2t = -2s. \quad (2) \qquad\quad 6 = 2t+2s$
$z = z. \qquad \boxed{2 = 8+2s} \quad \Rightarrow \quad s = -3.$

3 ecs. y sólo 2 incógnitas t y s.

Sustituya $s = -3$ en las ecs. (1) y (2)

$$\left.\begin{array}{l} 5-4t = -22 \Rightarrow -4t = -27 \Rightarrow t = 27/4. \\ 6-2t = 6 \Rightarrow -2t = 0 \Rightarrow t = 0 \end{array}\right\}$$

Como no hay una t única (no es posible $0 \neq 27/4$), las dos rectas no se intersecan.

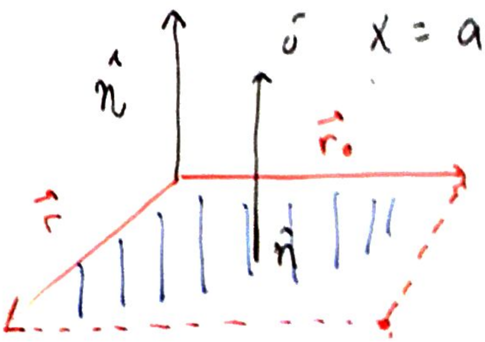
L_1 y L_2 son oblicuas (ni paralelas ni se intersecan).

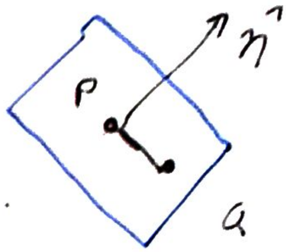
$$\begin{aligned} 4t + 8s &= 2 \\ 2t + 2s &= 6. \\ 0t + 2s &= -6 \end{aligned} \qquad \begin{array}{cc|c} t & s & \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -6 \end{array}\right] \longrightarrow \quad 0 \;\; 0 \;|\; \text{número.}$$

Ecuación de un Plano.

Previamente en 12.1 $\quad ax + by + cz = d.$ $\Big\}$ Ecs de Planos.

ó $x = a, \quad y = b, \quad z = c.$





Para encontrar la ec. de un plano se necesita.

1. un punto sobre el plano. $\quad P \quad \vec{r}_0 = \overrightarrow{OP}$
2. un vector normal u ortogonal al plano $\quad \hat{n} = \langle a, b, c \rangle.$

$\wedge$ sombrero, hat.

Derivación de la ec. Plano.

$P(x_0, y_0, z_0) \qquad Q(x, y, z)$ son dos puntos sobre el plano.

$$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle \qquad \vec{r} = \overrightarrow{OQ} = \langle x, y, z \rangle.$$

El vector $\overrightarrow{\Omega P} = \vec{r} - \vec{r_0}$ está sobre el plano, por lo que tiene que ser ortogonal a $\hat{n}$.

$\hat{n} \perp \vec{r} - \vec{r_0} \Rightarrow \boxed{\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0.}$

Ec. Vectorial de un Plano.

Se puede rescribir como.

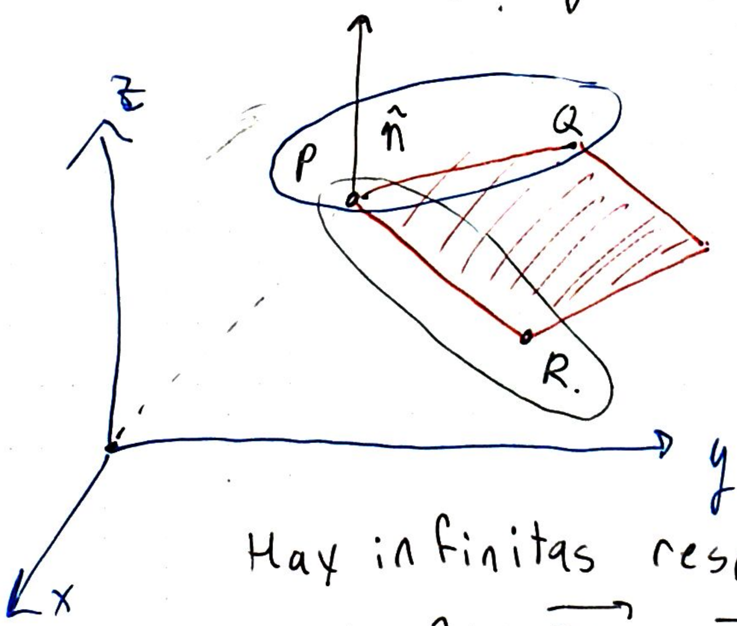
$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0 + z - z_0 \rangle = 0.$

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.}$$

Ec. escalar de un plano.

$$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_{d.}$$

Para encontrar la ec. de un plano, se necesitan 3 puntos P, Q y R.



$r_0 = \overrightarrow{OP}$ ✓

$\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ ✓

tienen que comenzar en el mismo punto

Hay infinitas respuestas equivalentes

$\hat{n} = \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ}$

Ejercicio 1: p 45. Encuentre la ec. del plano que pasa por los 3 puntos dados.

a. $P(3,-1,3)$, $Q(8,2,4)$ y $R(1,2,5)$

Ec. plano $\underline{\underline{\hat{n}}} \cdot (\vec{r} - \underline{\underline{\vec{r}_0}}) = 0$

Ec. Recta $\vec{r} = \underline{\underline{\vec{r}_0}} + t\underline{\underline{\vec{v}}}$

$\underline{\underline{r_0 = \langle 8,2,4 \rangle}}$.

Encuentre dos vectores que estén sobre el plano y que comiencen en el mismo punto.

$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle 5,3,1 \rangle$ $\quad\quad$ $\vec{v} = \overrightarrow{PR} = \langle -2,3,2 \rangle$.

¡¡ $\hat{n}$ es ortogonal a ambos vectores !!

$$\boxed{\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\underline{3\hat{i} - 12\hat{j} + 21\hat{k}}}$$

Ec. Plano: $\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

Vectorial: $\langle 3,-12,21 \rangle \cdot \langle x-8, y-2, z-4 \rangle = 0$.

Escalar. $3(x-8) - 12(y-2) + 21(z-4) = 0$.

b. $P(0,0,0)$, $Q(1,0,2)$ y $R(0,2,3)$

Vector Posición: $\vec{r}_0 = \langle 0,0,0 \rangle$.

2 vectores sobre el plano. $\overrightarrow{PQ} = \langle 1,0,2 \rangle$.
$\overrightarrow{PR} = \langle 0,2,3 \rangle$.

Vector Normal: $\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$

$$\hat{n} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$$

Ec. Plano. $-4x - 3y + 2z = 0.$

Rectas paralelas V_1 y V_2 son paralelos.

Dos planos $\hat{n}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$ y $\hat{n}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = 0$.
son paralelos si y sólo si $\hat{n}_1$ y $\hat{n}_2$ son paralelos.

En caso que no sean paralelos, se puede encontrar el ángulo de intersección entre dos planos.

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1|\,|\hat{n}_2|} \right)$$