

Rocket Book Compiliation - Cálculo Multivariable

Christiaan Ketelaar
Organizado por : David Corzo

2020-01-06

Índice general

1. RB_2020-01-07_18_49_53	5
2. RB_2020-01-09_09_42_27	13
3. RB_2020-01-14_11_51_58	21
4. RB_2020-01-16_13_01_32	31
5. RB_2020-01-21_13_21_32	39
6. RB_2020-01-23_19_42_58	49
7. RB_2020-01-28_13_10_15	57
8. RB_2020-01-28_13_17_10	65
9. RB_2020-01-30_11_31_17	67

Capítulo 1

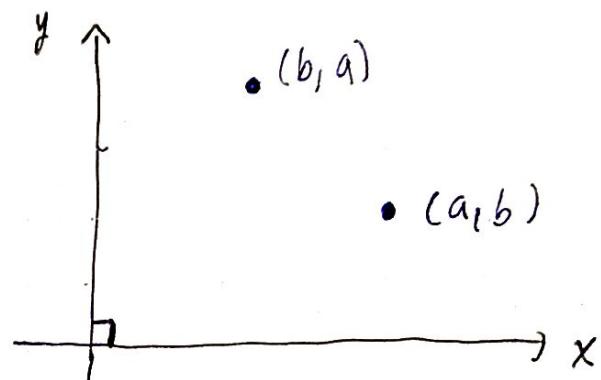
RB_2020-01-07_18_49_53

12.1 Sistemas Tridimensionales de Coordenadas.

Para localizar un punto en un plano, se necesitan 2 números.

- a la coordenada x
- b la coordenada y .

Plano \mathbb{R}^2

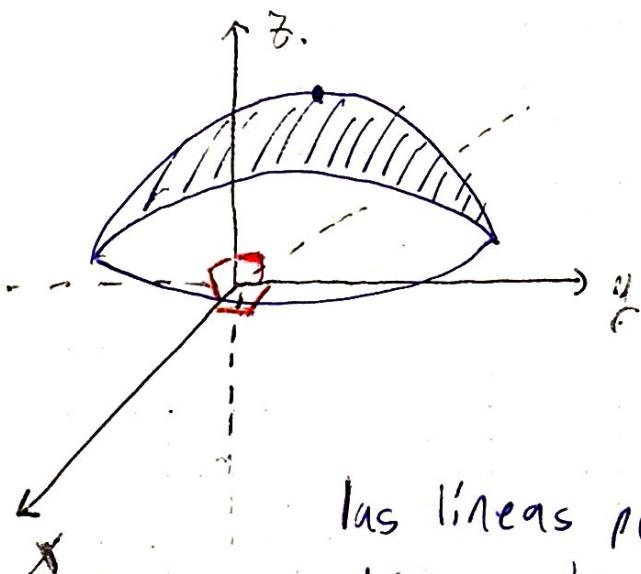


Los ejes de coordenadas son perpendiculares entre sí.

El sistema tridimensional de coordenadas rectangulares cada punto en el espacio es una terna ordenada (x, y, z)

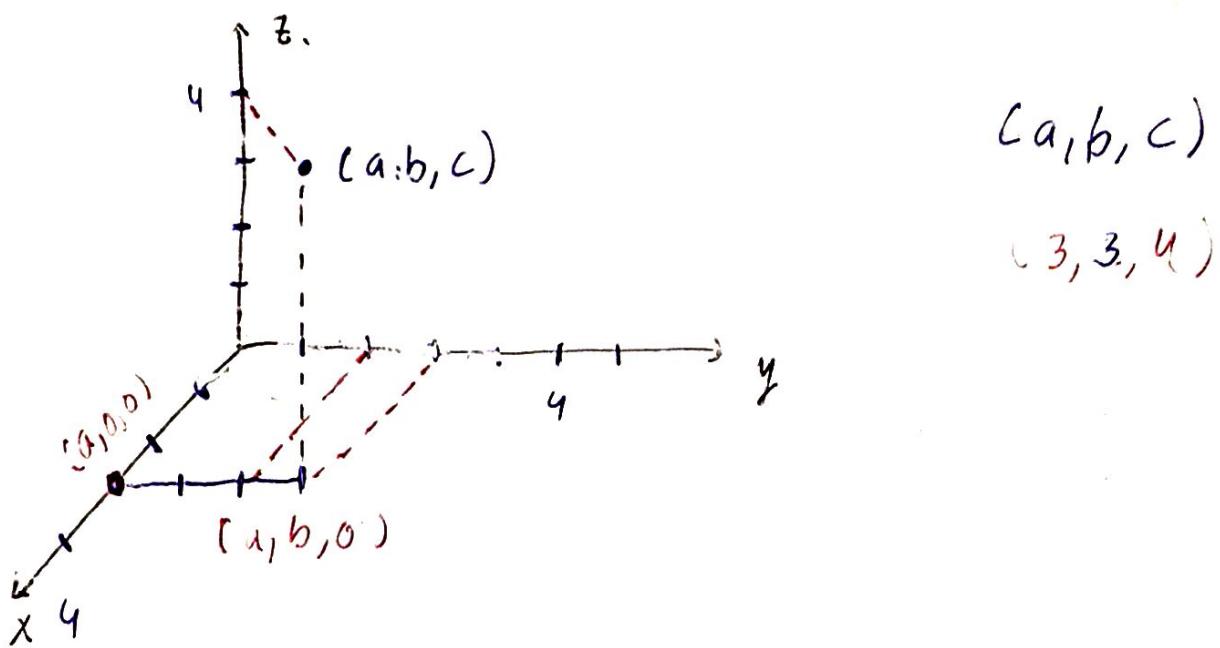
Espacio $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \text{ tal que } x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}.$$



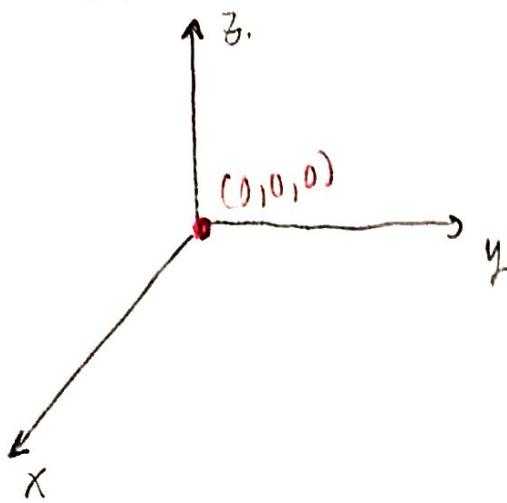
x transversal
 y horizontal
 z vertical.
 $z = f(x, y)$

las líneas punteadas se para simbolizar las partes de abajo, izquierda y detrás.

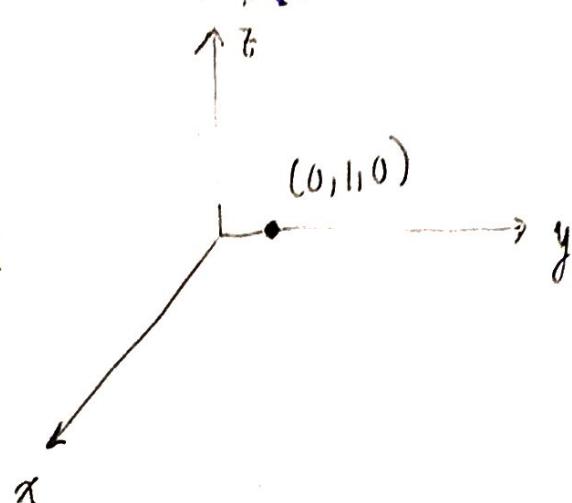


Ejercicio 1: Identifique los siguientes puntos.

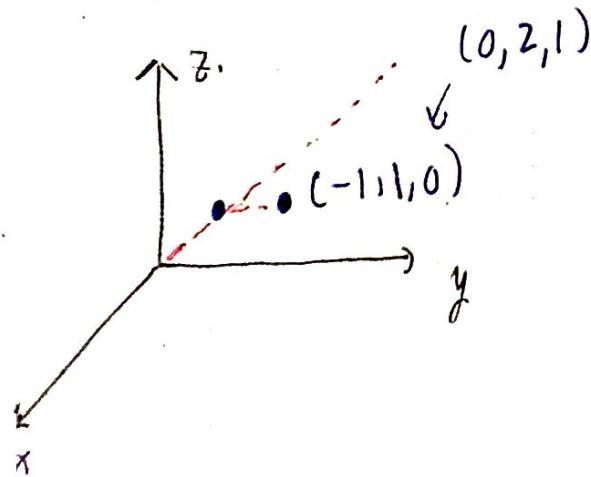
a. $(0, 0, 0)$



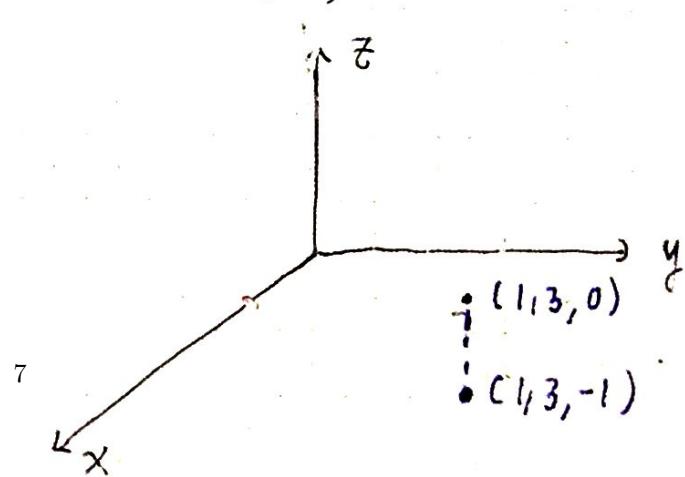
b. $(0, 1, 0)$



b. $(-1, 1, 0)$

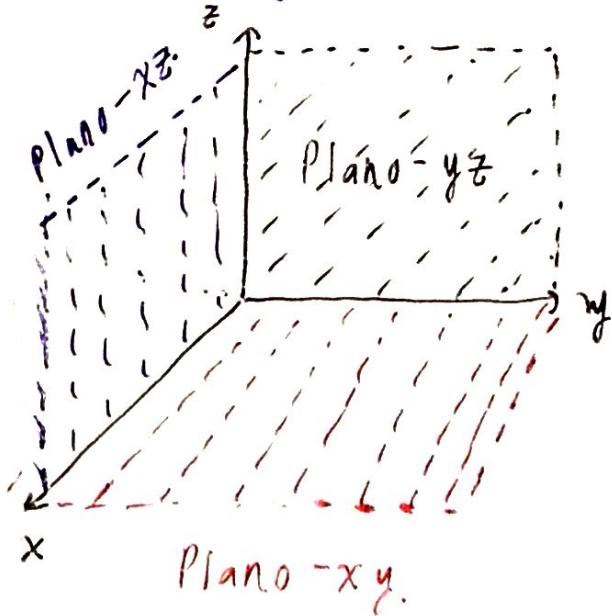


c. $(1, 3, -1)$



Planos Coordenados.

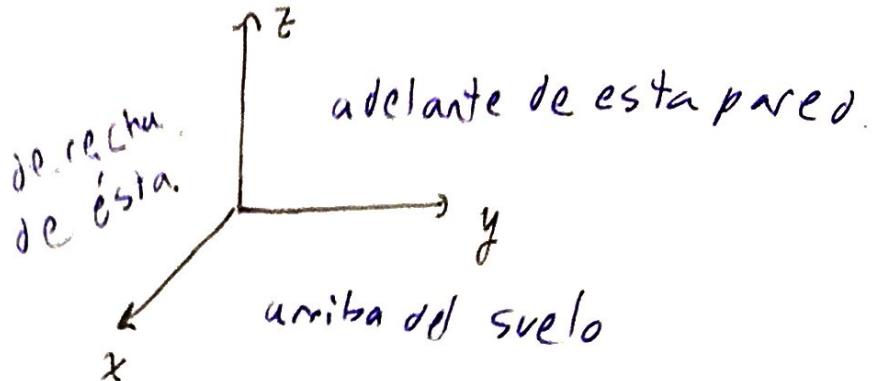
Plano - xy : $z = 0$. (el suelo) Plano - yz $x = 0$
 (pared de atrás)



Plano - xz $y = 0$.
 (pared izquierda)

1er octante.

$$x > 0, y > 0, z > 0$$



Planos en el espacio.

En 2-D.

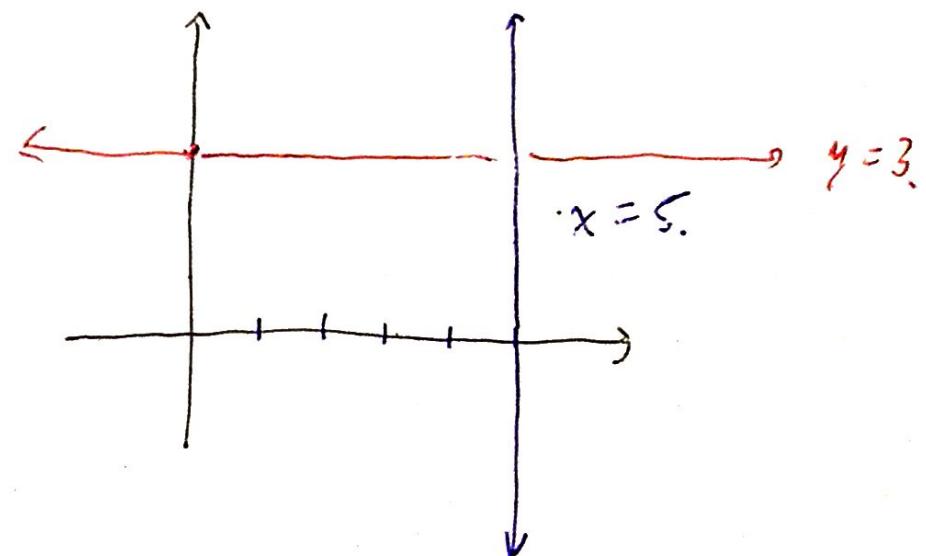
$$x = 5 \text{ ó } y = 3.$$

$$x = a$$

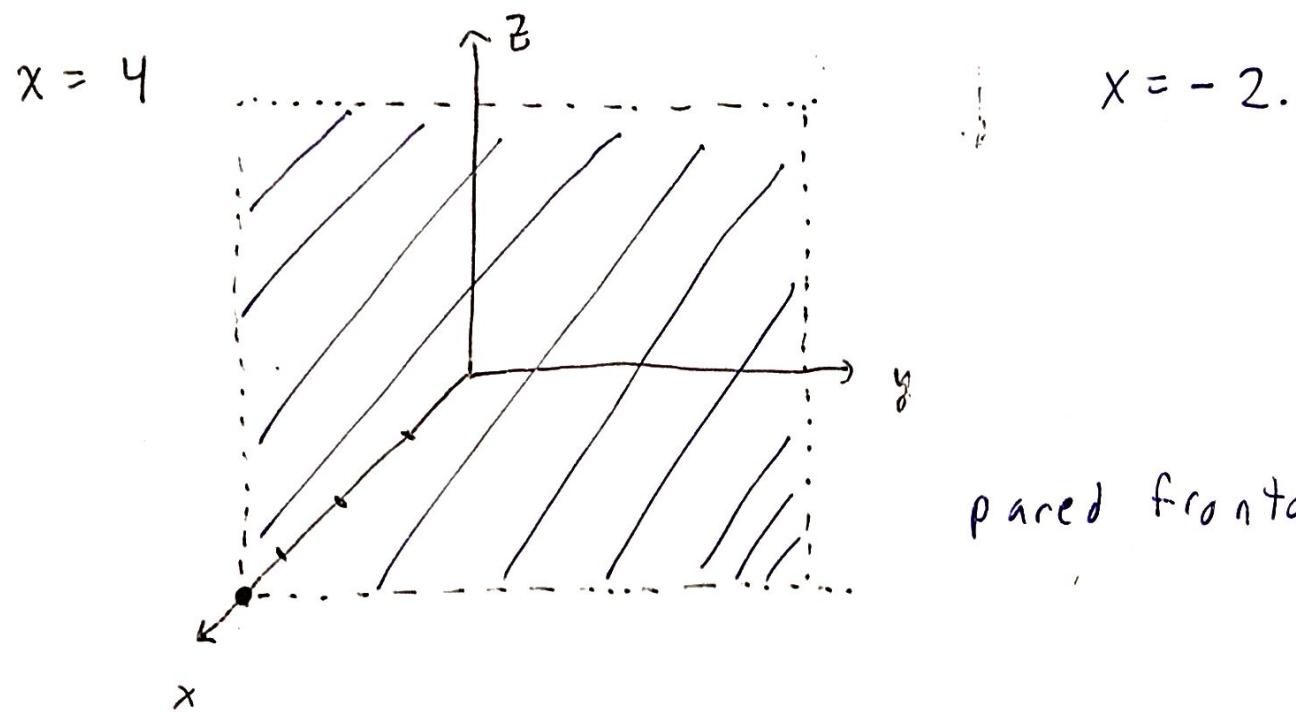
Rectas Verticales.

$$y = b.$$

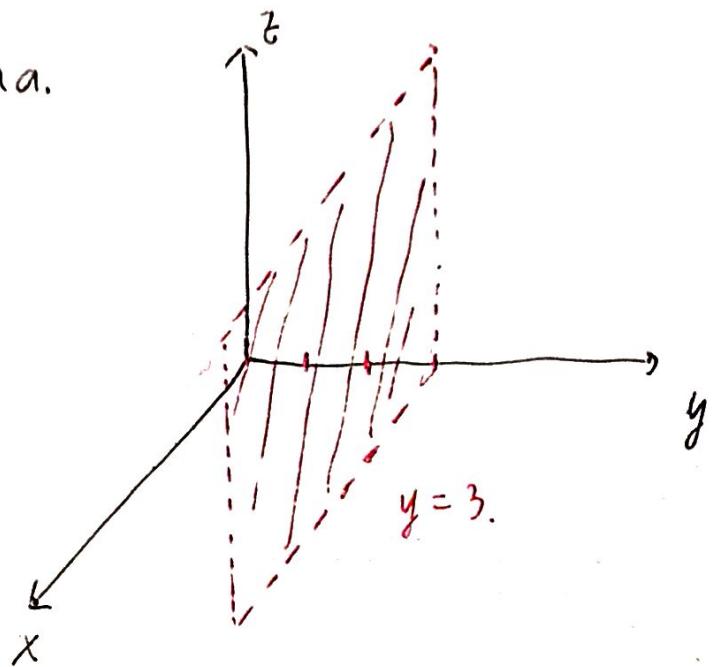
Rectas Horizontales.



En 3-D $x=a$, $y=b$, $z=c$ son gráficas de planos.

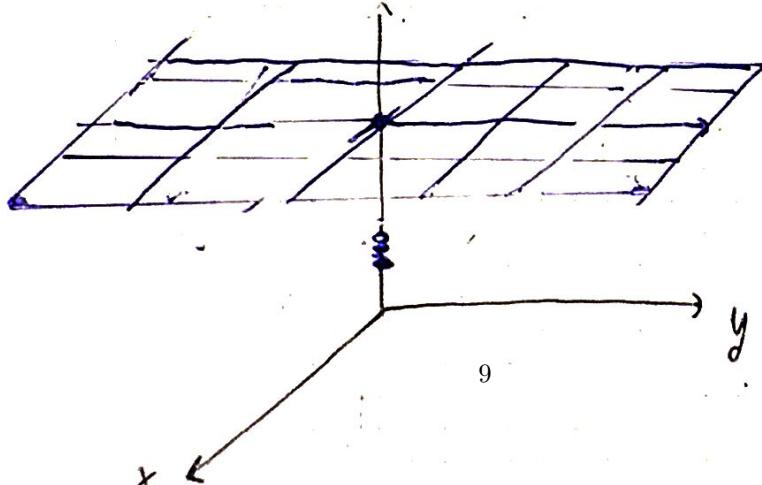


$y = 3$. pared derecha.



$z = 2$.

(techo)



Ec. lineal en 3-D va a graficar un plano.

5

Ec. Plano. $ax + by + cz = d$.

generalmente se grafican sólo en el primer octante
si cada a, b, c y d es positiva.

Intersección x : $y=0, z=0$ $(a, 0, 0)$

Intersección y : $x=0, z=0$ $(0, b, 0)$

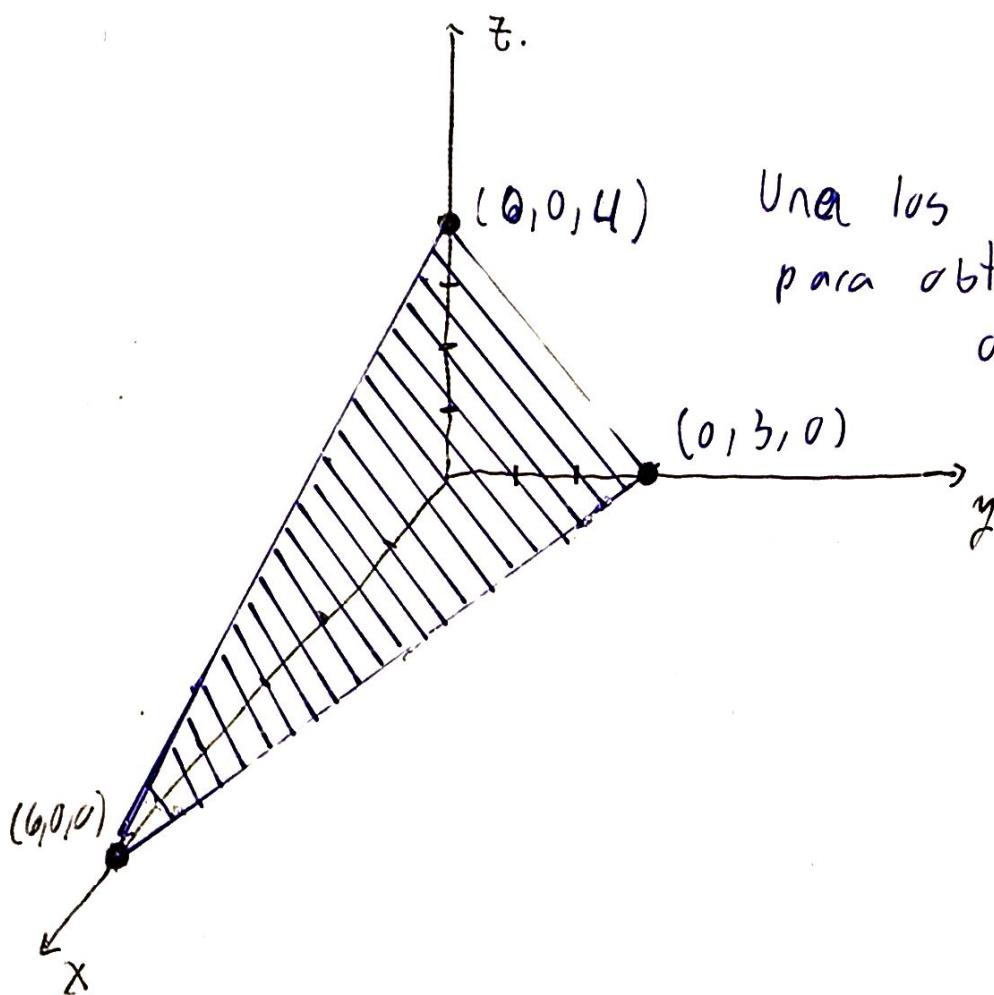
Intersección z : $x=0, y=0$ $(0, 0, c)$

Ejercicio 3: Bosqueje el plano $2x + 4y + 3z = 12$
sólo en el primer octante.

Intersepto- x : $2x = 12 \Rightarrow (6, 0, 0)$

Intersepto- y : $4y = 12 \Rightarrow (0, 3, 0)$

Intersepto- z : $3z = 12 \Rightarrow (0, 0, 4)$

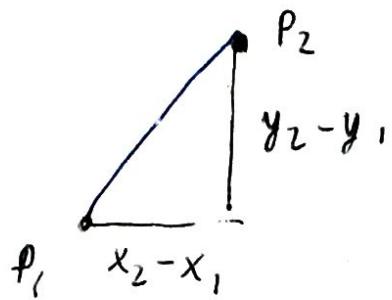


Capítulo2

RB_2020-01-09_09_42_27

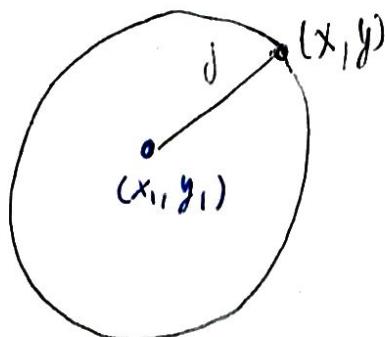
12.1.2 Distancias y Superficies Básicas.

En 2-D, la distancia entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = d^2.$$



Ecuación de Circunferencia de radio d. centrada en (x_1, y_1) .

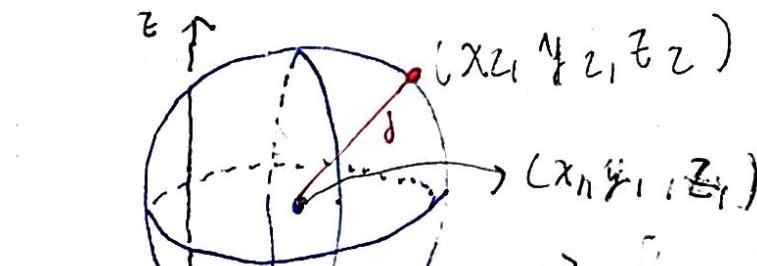
En 3-D, la distancia entre $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$

Calcule la diferencia entre z_2 & z_1 .

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

no puede ser negativa.

Notación $d = |P_2 P_1|$



Pág. 15.

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = d^2$$

Ecuación de una esfera de radio r centrada en (x_1, y_1, z_1) .

Esfera más utilizada centrada en el origen $(0,0,0)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \text{radio } r.$$

Ejercicio 4: Encuentre el centro y radio de la esfera cuya ecuación es:

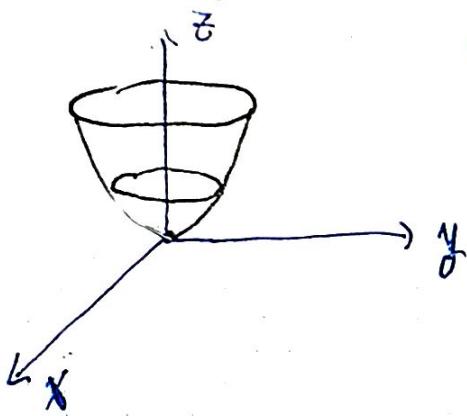
$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 4z + 4 = 0. \quad (\text{P}16).$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 + z^2 + 4z + 4 = -4. + 16 + 9 + 4$$

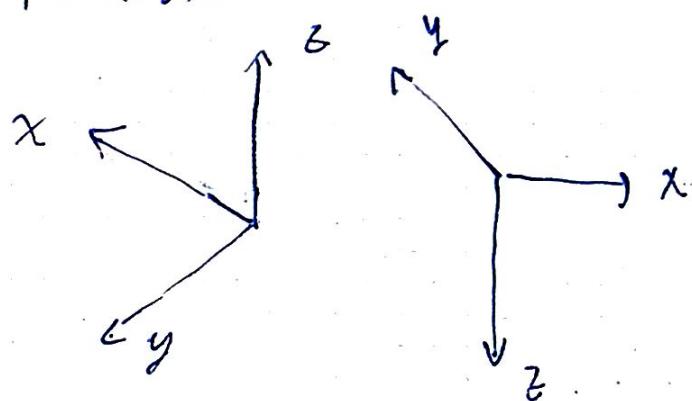
$$(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 25 = r^2$$

Centro de esfera $(-4, 3, -2)$ Radio $\sqrt{25} = 5$.

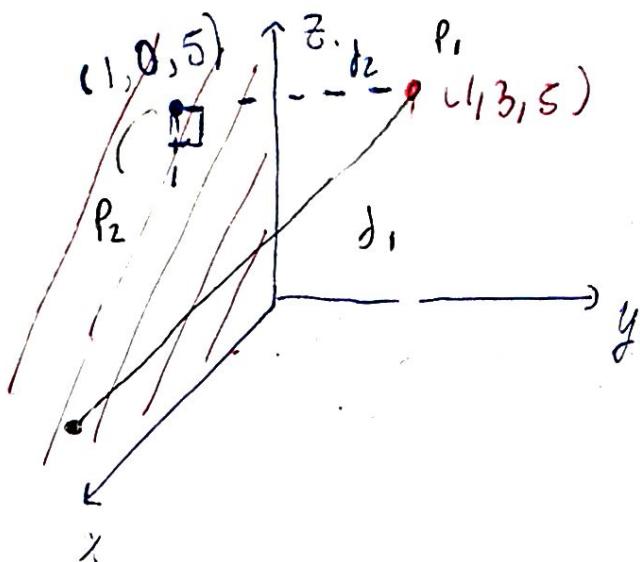
$Z = x^2 + y^2$ no es una esfera.



es un parabolóide.



Distancia entre un punto y un plano-coordenado.



Encuentre la distancia entre el punto $(1, 3, 5)$ y el plano xz . (tiene infinitos puntos)

En el plano xz $y=0$

si se estrella el punto $(1, 3, 5)$ contra el plano xz se obtiene el punto $(1, 0, 5)$.

"Estrellar": Encuentre la proyección del punto P sobre el plano.

$$\text{Distancia entre } P_1 \text{ y } P_2 \quad d = \sqrt{(1-1)^2 + (3-0)^2 + (5-5)^2}$$

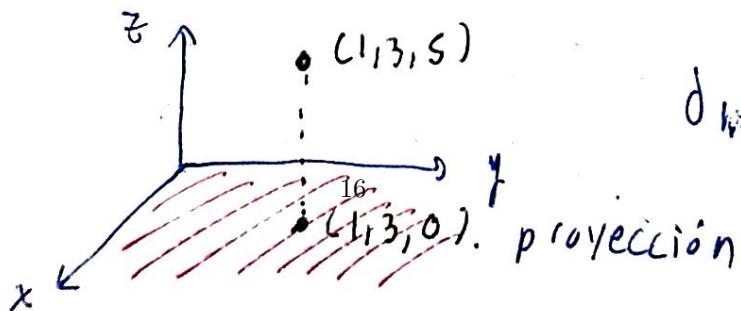
$$d = \sqrt{0+9+0} = 3$$

Gabriel la proyección del punto (a, b, c) sobre el plano xz es el punto $(a, 0, c)$.

Distancia mínima entre P y el plano es

$$d = \sqrt{0+b^2+0} = |b|. \quad \text{de la componente } -y.$$

¿Cuál es la distancia entre el punto $(1, 3, 5)$ y el plano xy ? $z=0$.



$$d_{\min} = \sqrt{0+0+S^2} = 5.$$

Ejercicio 6: considere los puntos $A(3, 0, -4)$, $B(9, 0, 0)$
 y $C(0, 1, \sqrt{15})$.
 \uparrow \uparrow \uparrow
 $y=0$. $y=0$ $z=0$.

a. ¿Cuál de los sgs. puntos está más cercano al origen?

Calcule la distancia de cada punto respecto al origen.

$$d_{AO} = |AO| = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5 \quad O(0,0,0)$$

$$|BO| = \sqrt{81+0+0} = \sqrt{81} = 9$$

$$|CO| = \sqrt{0+1+15} = \sqrt{16} = 4.$$

✓ es el más cercano al origen.

b. ¿Cuáles de los puntos están sobre el plano yz ?

Ec. Plano yz : $x=0$.

A y B no están sobre el plano yz $x \neq 0$.

El punto C $(0, 1, \sqrt{15})$ si está sobre este plano.

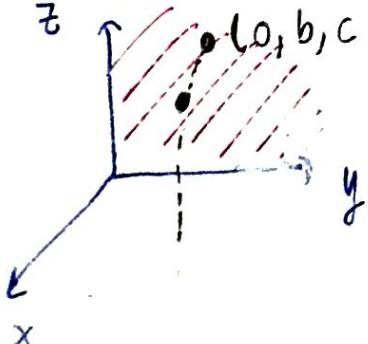
Comentario. A está sobre el plano xz .

B está sobre el eje x.

está sobre el plano xy & xz

c. ¿Cuáles de los puntos está más cercano al plano yz ? $x=0$.

z $(0, b, c)$.



como C está sobre el plano yz
 éste es el más cercano a este plano
 $d=0$.

Encuentre las proyecciones y las distancias

$$A(3,0,-4), \quad P_A = (0,0,-4), \quad d_A = 3$$

$$B(9,0,0), \quad P_B = (0,0,0), \quad d_B = 9.$$

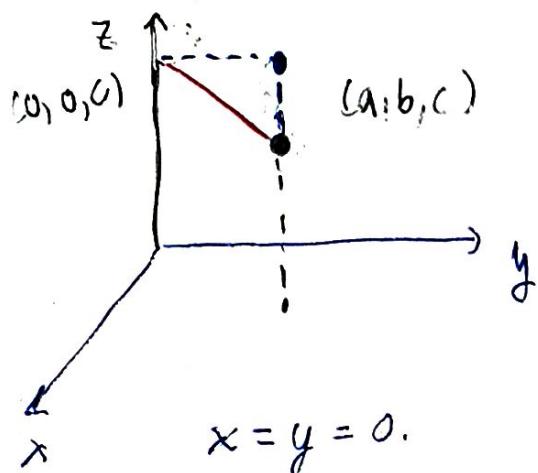
$$C(0,1,\sqrt{15}), \quad P_C = (0,1,\sqrt{15}), \quad d_C = 0 \quad \checkmark$$

mismo punto, éste sobre el plano yz

Distancia entre un punto y un eje.

j. ¿Cuál de los siguientes puntos está más cercano

al eje $-z$.



En el eje z $x=0, y=0$.

La proyección del punto $P(a,b,c)$ al eje z es el punto $P_1(0,0,c)$.

$$d_{\min} = \sqrt{a^2 + b^2 + 0}$$

Encuentre las proyecciones sobre el eje y las distancias.

$$A(3,0,-4), \quad P_A(0,0,-4), \quad d_A = \sqrt{9+0+0} = 3.$$

$$B(9,0,0), \quad P_B(0,0,0), \quad d_B = \sqrt{81+0+0} = 9.$$

$$C(0,1,\sqrt{15}), \quad P_C(0,1,\sqrt{15}), \quad d_C = \sqrt{0+1+0} = 1$$

mas cercano

Plano $x=0$ plano yz

$y=0$ plano xz

$z=0$ plano xy

Ejes

$x=0, y=0$

$x=0, z=0$

$y=0, z=0$

Eje $-z$

Eje $-y$

Eje $-x$.

Superficies. Básicas: Planos, Cilindros y Esfera.

En 12.6 superficies cuádricas cilindro parabólico
cilindro (función).

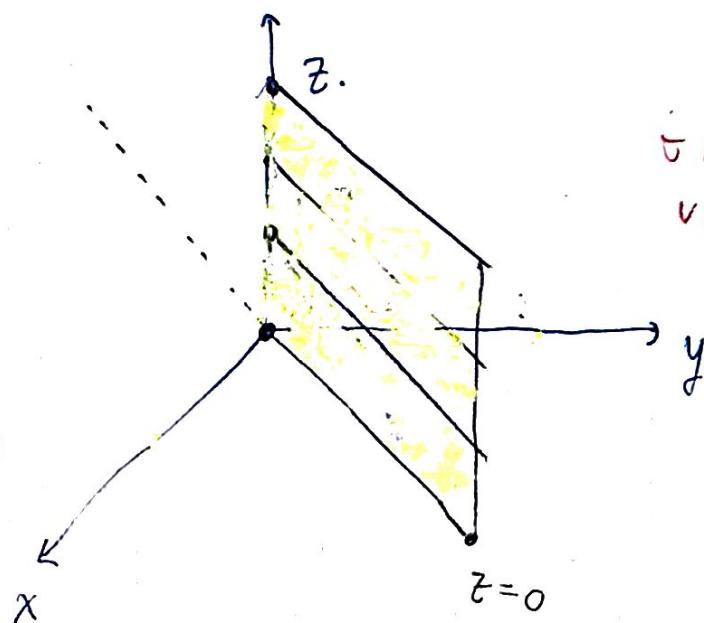
Ejercicio 7: Bosqueje el plano $y = x$. en el 1er octante.

$$z = 0 : y = x$$

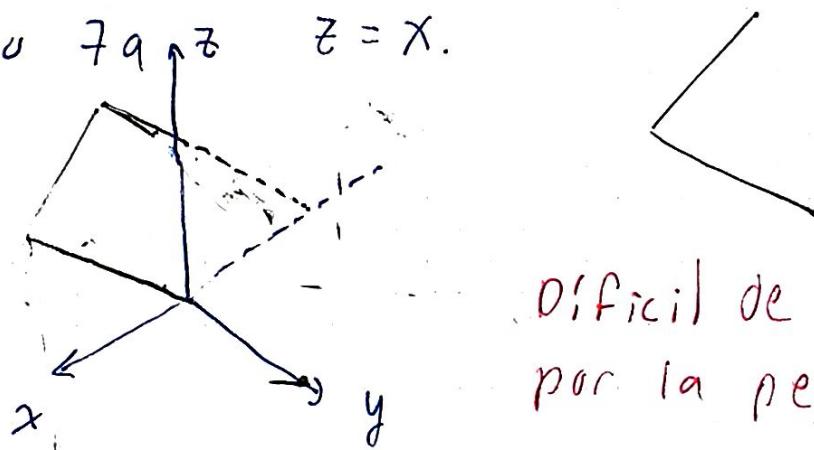
$$z = 1 : y = x$$

$$z = 9 : y = x$$

sólo tiene
intersectos con el
eje -z.



Ejercicio 7a) $z = x$.

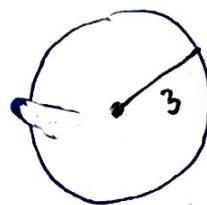


Difícil de graficar
por la perspectiva.

Ejercicio 8: Grafique las siguientes superficies

a. $x^2 + z^2 = 9$.

Variable y .

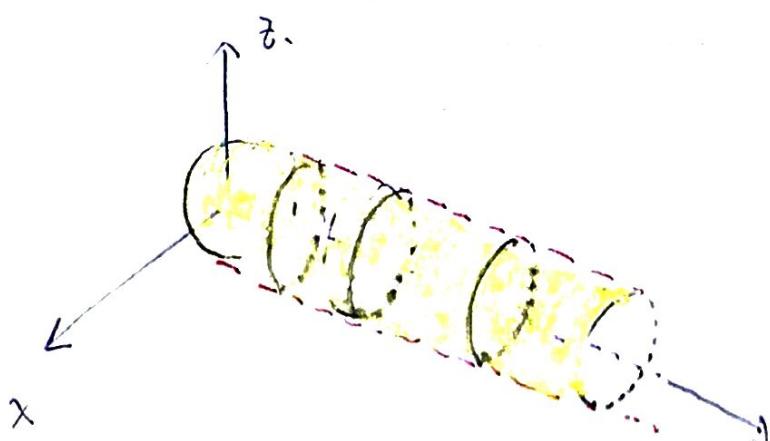


En 2-D

circunferencia
de radio 3.

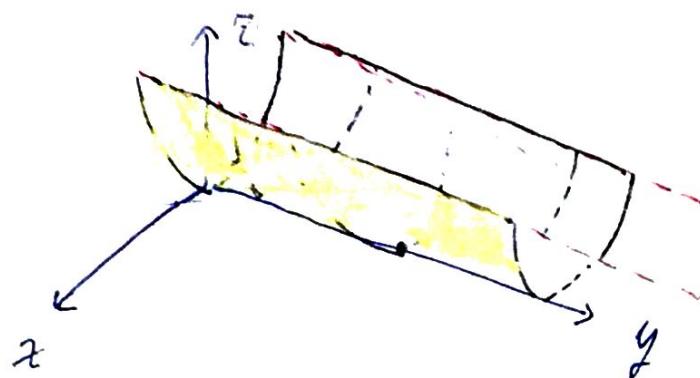
$$y=0 \quad x^2 + z^2 = 9$$

$$y=2 \quad x^2 + z^2 = 9$$



Cilindro circular de radio centrado en el eje -y.

b. $z = x^2$.

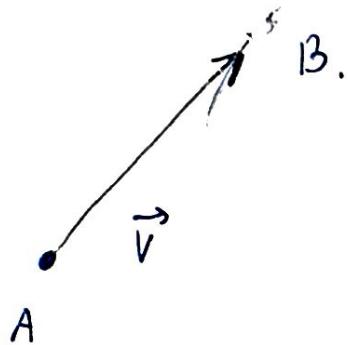


hoja doblada
cilindro parabólico.

Capítulo3

RB_2020-01-14_11_51_58

12.1 Vectores p. 21.

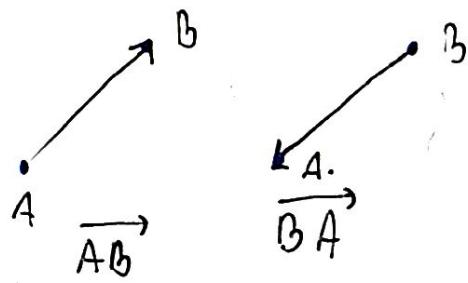


B. Un vector: tiene magnitud y dirección
se denota en negrilla \mathbf{v}
o una flecha sobre la letra
 \overrightarrow{V}

la longitud de cada segmento es la magnitud del vector.
la flecha indica su dirección.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

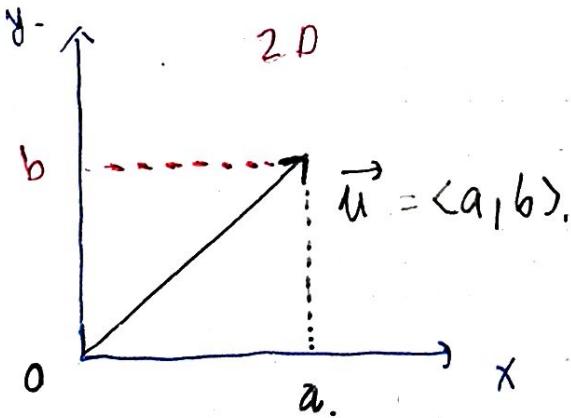
segmento de recta dirigido
empieza en el punto A y termina en el B .



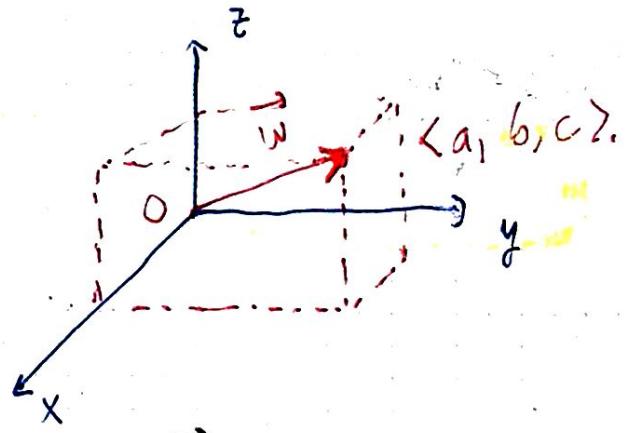
$$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$$

vector cero $\vec{0}$ no tiene ni
magnitud ni dirección.

Sistema de coordenadas y las componentes de un vector.



$$\vec{u} = \langle a, b \rangle \text{ ó } [a, b]$$

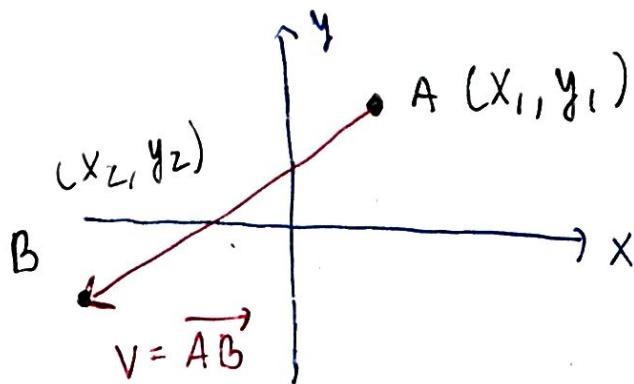


$$\vec{w} = \langle a, b, c \rangle$$

las llaves $\langle \rangle$ denotan a un vector.

Vector Posición:

En 2-D.



$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle.$$

En 3-D.

$$A(x_1, y_1, z_1) \text{ & } B(x_2, y_2, z_2)$$

$$\overrightarrow{BA} = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2 \rangle.$$

Magnitud de un vector: la distancia entre el punto B y el punto A.

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

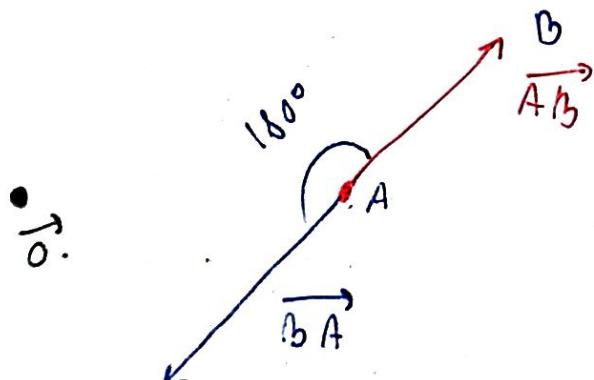
Se nota con || ó |||.

$$\text{si } \vec{v} = \langle a, b, c \rangle \quad |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Observaciones: $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

$$\text{pero } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|.$$



$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}?$$

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0} \text{ vector cero.}$$

no tiene dirección.

$$\langle x_1 - x_1, y_1 - y_1, z_1 - z_1 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle.$$

Ejercicio 1: Considere el vector \vec{AB} con un punto inicial $A(1, 2, -4)$ y punto final $B(4, 8, 2)$.

a. Encuentre el vector posición $\vec{u} = \vec{AB}$.

$$\vec{u} = \langle 3, 6, 6 \rangle \quad 2 - (-4)$$

b. Encuentre la longitud del vector \vec{u} .

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36 + 36} = \sqrt{81} = 9.$$

Operaciones de vectores.

I. Suma de vectores

✓ } Aritmética

II. Multiplicación por un escalar.

✓ } Geometría

12.3 Producto Punto

12.4 Producto Cruz.

Suma de vectores.

$$\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \quad \vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle.$$

Sume cada componente.

$$\vec{u} + \vec{w} = \langle u_1 + w_1, u_2 + w_2, u_3 + w_3 \rangle.$$

Multiplicación por un escalar. K es una constante.

denotada como un escala

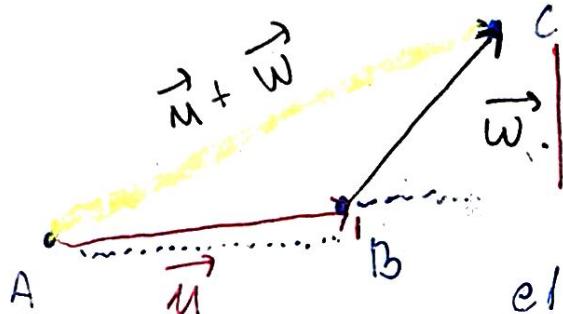
Multiplique cada componente.

$$K\vec{w} = \langle Kw_1, Kw_2, Kw_3 \rangle.$$

¿Cómo se pueden visualizar geométricamente estas operaciones?

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{BC}$$



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

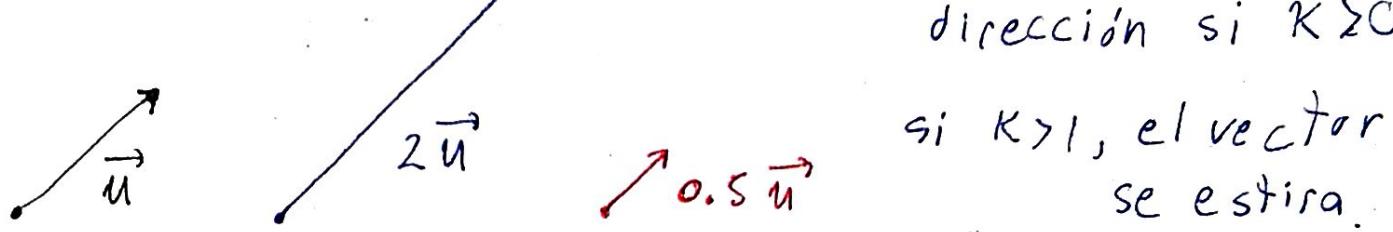
$$\vec{u} + \vec{w} = \overrightarrow{AC}$$

el segundo vector w empieza
en el punto donde termina el 1ero

Suma de vectores

Multiplicación por un escalar

- Se preserva la dirección si $K > 0$.



$$\langle a, b \rangle$$

$$\langle 2a, 2b \rangle$$

$$2\langle a, b \rangle$$

si $K > 1$, el vector se estira.

si $0 < K < 1$, el vector se comprime.

$$\begin{matrix} -\vec{u} \\ (-a, -b) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -1.5\vec{u} \\ (-1.5a, -1.5b) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -0.5\vec{u} \\ (-0.5a, -0.5b) \end{matrix}$$

si $K < 0$, el vector cambia de dirección.

(cambia en 180°).

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \langle 0, 0 \rangle.$$

Negativo de un vector: cuando $K = -1$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

$$-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$$

Resta o diferencia de vectores: Caso especial de la suma

$$\begin{aligned}\vec{u} + (-\vec{w}) &= \vec{u} - \vec{w} \\ &= \langle u_1 - w_1, u_2 - w_2, u_3 - w_3 \rangle.\end{aligned}$$

Resta cada componente entre sí.

Se puede pensar como la suma entre \vec{u} y el negativo de \vec{w} .

Ejercicio 2: Sean $\vec{a} = \langle 1, -2, 5 \rangle$, $\vec{b} = \langle -2, 1, -3 \rangle$.

combinación ^{lineal} de vectores. \vec{u}, \vec{w} en 2-D.

$$k_1 \vec{u} + k_2 \vec{w} = \langle k_1 u_1 + k_2 w_1, k_1 u_2 + k_2 w_2 \rangle$$

$$a. \vec{a} + \vec{b} = \langle -1, -1, 2 \rangle.$$

$$b. 2\vec{a} - 4\vec{b} = \underbrace{\langle 2, -4, 10 \rangle}_{2\vec{a}} + \underbrace{\langle 8, -4, 12 \rangle}_{-4\vec{b}} = \langle 10, -8, 22 \rangle$$

$$c. |2\vec{a} - 4\vec{b}| = \sqrt{100 + 64 + 484} = \sqrt{648} \approx 25.45$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30} \approx 5.47.$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14} \approx 3.74.$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \approx 2.45.$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \neq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

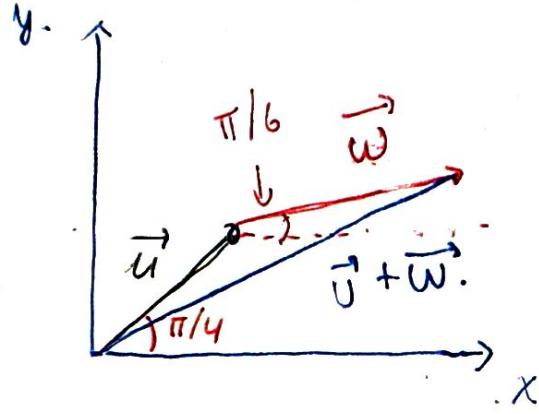
$$\sqrt{|\vec{a} + \vec{b}|^2} \neq \sqrt{|\vec{a}|^2} + \sqrt{|\vec{b}|^2}$$

6.

Problema Bono: Considere el vector $\vec{u} = \langle 1, 1 \rangle$ y $\vec{w} = \langle 1, \sqrt{3} \rangle$.

Encuentre la magnitud y el ángulo respecto al eje -x del vector $\vec{w} + \vec{u}$.

$$\vec{w} + \vec{u} = \langle 2, 1 + \sqrt{3} \rangle.$$



$$|\vec{u}| = \sqrt{1+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan \theta = y/x.$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \pi/4.$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1+3^2} = 2.$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi/6.$$

$$|\vec{w} + \vec{u}| = \sqrt{4 + (1 + \sqrt{3})^2} \\ \approx 3.3858$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) = 0.93 \text{ rad. } \approx 53.79^\circ$$

Vectores Bases o Estándar.

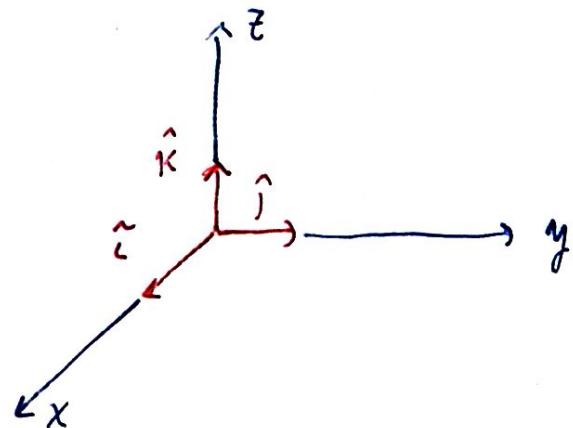
$$\vec{u} = \langle 3, 6, 7 \rangle = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}$$

se denotan como $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ y apuntan en la dirección de cada eje coordenado.

$$\hat{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

$$\hat{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

$$\hat{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$



Permiten expresar cada vector \vec{u} como una combinación de los vectores estándar.

$$\vec{u} = \langle a, b, c \rangle = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

Magnitud de $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

JNQ.

$$|\hat{i}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1 \quad |\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

Vectores Unitarios: Tienen longitud igual a 1,
 $|\vec{u}| = 1$

¿Qué sucede si $|\vec{a}| \neq 1$? Se encuentra el vector unitario \vec{u} asociado \vec{a} dividiendo por $|\vec{a}|$.

El vector $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ es siempre unitario.

Ejercicio 3: Sean $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = 5\hat{j} + 4\hat{k}$.

Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector $2\vec{a} + 3\vec{b}$.

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = 4\hat{i} - 6\hat{k} + 15\hat{j} + 12\hat{k} = 4\hat{i} + 15\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{16 + 225 + 36} = \sqrt{277}$$

unitario $\vec{u} = \frac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{|2\vec{a} + 3\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{277}} \langle 4, 15, 6 \rangle$

Capítulo4

RB_2020-01-16_13_01_32

12.3 Producto Punto

Operaciones entre vectores $\vec{a} + \vec{b}$ (suma)

suma $\vec{a} + \vec{b}$

Mult. por un escalar $k\vec{a}$

Producto punto $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Producto cruz $\vec{a} \times \vec{b}$

Producto punto entre $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

es el número a.o.b. dado por:

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Para un vector en n dimensiones.

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Para que sea posible \vec{a} y \vec{b} tienen que tener la misma dimensión

$$\vec{a} = \langle 1, 2, 0, 4 \rangle \quad \vec{b} = \langle 2, 1 \rangle$$

Faltan 2 componentes.

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ indefinido

Propiedades: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ Comunitativa.

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ Distributiva

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Ejercicio 1: Calcule el producto punto.

a. $\vec{a} = \langle 6, -2, 3 \rangle, \vec{b} = \langle 2, 5, 1 \rangle.$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6(2) - 2(5) + 3(1) = 12 - 10 + 3 = 5$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = 12 - 10 + 3 = 5 \quad \text{Gracias AA.}$$

b. $\vec{u} = \underline{\hat{j}} + \underline{2\hat{i}} + \underline{3\hat{k}}$ $\vec{v} = \underline{2\hat{k}} + \underline{4\hat{i}} + \underline{0\hat{j}}$ vectores base

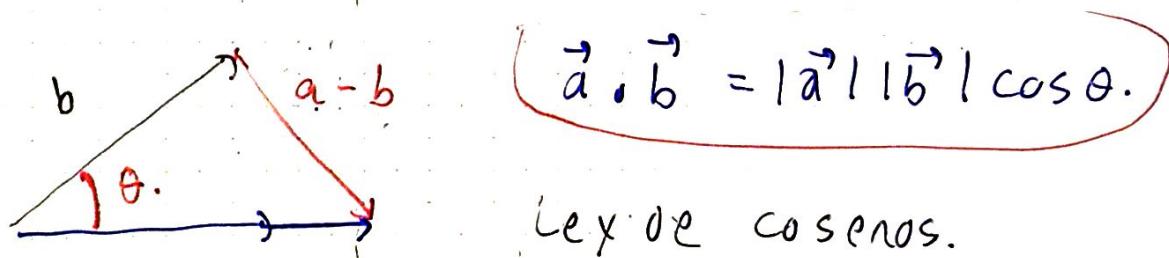
$$\langle \underline{\hat{i}}, \underline{\hat{j}}, \underline{\hat{k}} \rangle \cdot \langle 4, 0, 2 \rangle = 8 + 0 + 6 = 14$$

c. $\vec{w} = \langle 1, 0, -2 \rangle \quad \vec{v} = \langle 2, 0, 1 \rangle.$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 2 + 0 - 2 = 0$$

$$\boxed{\vec{w} \cdot \vec{v} = 0}$$

Definición Alternativa del Producto.



Ley de cosenos.

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \theta.$$

\vec{a}^2 no existe

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

$$\underline{\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = |\vec{a}|^2.}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

$$(a-b) \cdot (a-b) = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta.$$

$$a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b$$

$$|a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta.$$

$$\boxed{a \cdot b = |a||b|\cos\theta.}$$

$$|a \times b| = |a||b|\sin\theta.$$

Dados dos vectores \vec{a} y \vec{b} , el ángulo θ entre los vectores es

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a \cdot b}{|a||b|}\right)$$

Ejercicio 2: determine el ángulo entre los dos vectores.

q. $\vec{a} = \langle 4, 3 \rangle$ $\vec{b} = \langle -3, 4 \rangle$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -12 + 12 = 0 \quad |a| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$|b| = \sqrt{9+16} = 5.$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{0}{25}\right) = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ y el ángulo es 90° $\vec{a} \perp \vec{b}$ ortogonales

ortogonalidad \Leftrightarrow perpendicularidad.

$$b. \vec{a} = \langle 1, -2 \rangle, \vec{b} = \langle 3, -1 \rangle$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \quad |\vec{a}| = \sqrt{5} \quad |\vec{b}| = \sqrt{10}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi/4$$

c. $\vec{a} = \hat{i} + \hat{k}, \vec{b} = \hat{i} + \hat{j}$ $\langle 1, 0, 1 \rangle$ $\langle 1, 1, 0 \rangle$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad |\vec{b}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$\approx 16, \pi/4, \pi/3$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Vectores perpendiculares ó ortogonales., denotado como
 $a \perp b$.

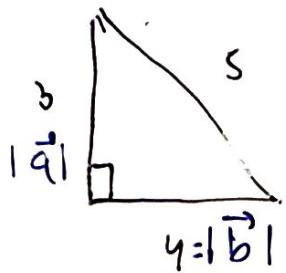
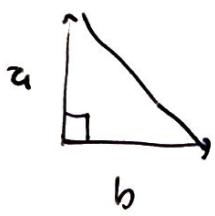
$$(a \perp b \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \pi/2 = 0.$$

Ejercicio 3: Determinese si los sigs. son ortogonales entre sí.

$$\vec{a} = \langle 4, 3, 1 \rangle, \vec{b} = \langle 2, -2, -2 \rangle,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 - 6 - 2 = 0 \quad \text{Si son ortogonales.}$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

El triángulo es rectángulo

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

b. $\vec{u} = \langle 1, 8, -2, 4 \rangle \quad \vec{w} = \langle 3, 4, 6, -1 \rangle$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 3 + 32 - 12 - 4 = 19 \neq 0$$

No son ortogonales.

c. $\vec{a} = \langle 1, 0, 0 \rangle \quad \vec{b} = \langle 0, 1, 0 \rangle \quad \vec{c} = \langle 0, 0, 1 \rangle$

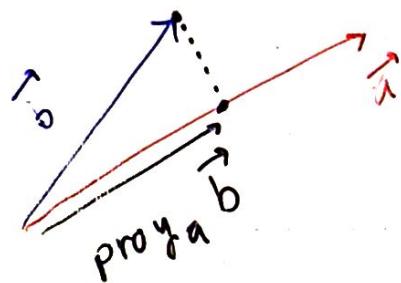
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0. \quad \text{G. sw.}$$

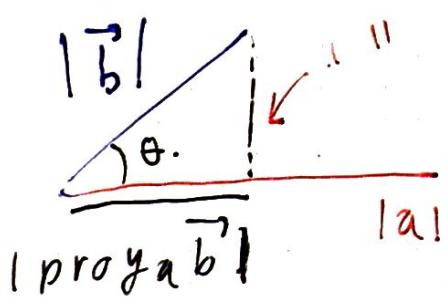
Mutuamente ortogonales.

Proyecciones: un vector se proyecta sobre otro vector



El vector $\text{proy}_a(\vec{b})$ es la proyección vectorial de \vec{b} sobre \vec{a} .

si el ángulo entre a y b es θ .

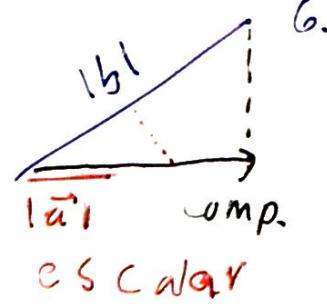


$$\frac{|\text{proy}_a \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \cos \theta. = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

proyección escalar:

$$|\text{proy}_a \vec{b}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$$

proyección escalar: $\text{Comp}_a \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$



proyección vectorial

tiene la misma dirección que el vector \vec{a} .

utilice el vector $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ para encontrar la dirección de \vec{a}

$$\text{proy}_a \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \right) \vec{a} \quad \text{vector.}$$

Observaciones: $\text{Comp}_b \vec{a} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{b}|} = \neq \text{comp}_a \vec{b}$

Ejercicio 5: Halle la proyección escalar y la proyección vectorial de \vec{b} sobre \vec{a} .

a. $\vec{a} = \langle -6, 8 \rangle \quad \vec{b} = \langle 3, 4 \rangle$

Proy escalar: $\text{Comp}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{-18 + 32}{\sqrt{100}} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

Proy. vectorial: $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{7}{5} \langle -6, 8 \rangle$
so

b. $\vec{a} = \langle 1, 1, 3 \rangle \quad \vec{b} = \langle -2, 3, 1 \rangle$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + 3 + 3 = 4 \quad |\vec{a}| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$$

Escalar $\text{Comp}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{4}{\sqrt{11}}$ Vectorial $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{4}{\sqrt{11}} \langle 1, 1, 3 \rangle$

Capítulo 5

RB_2020-01-21_13_21_32

12.4 Productos Cruz.

Determinantes Matriz (Arreglo rectangular de números)
Cuadrada (mismo # de filas y columnas)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad \text{Jet orden 2. Matrix } 2 \times 2$$

$$\text{P.e. } \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-1)(4) = 6 + 4 = 10$$

Determinante de orden 3: Matriz 3×3
suma de tres determinantes de orden 2.

$$\left| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \right| = a_1 \left| \begin{array}{cc} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{array} \right| - a_2 \left| \begin{array}{cc} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{array} \right| + a_3 \left| \begin{array}{cc} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{array} \right|$$

3×3 3 matrices 2×2 .

$$\begin{aligned}
 \text{p.e} \quad & \left| \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right| = 2 \left| \begin{array}{cc} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{array} \right| - 0 \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{array} \right| + 2 \left| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{array} \right| \\
 & = 2(6 - 0) - 0 + 2(-1 - 3) \\
 & = 12 - 8 = 4.
 \end{aligned}$$

El Producto Cruz.

Dados dos vectores $\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$ & $\vec{b} = b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}$

¿Cómo se encuentra un vector \vec{c} que es perpendicular a \vec{a} y a \vec{b} ?

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \quad \vec{c} \cdot \vec{b} = 0.$$

Resuelva para c_1, c_2, c_3

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0$$

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 = 0$$

El producto cruz $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ es un vector perpendicular a ambos vectores \vec{a} & \vec{b} .

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \hat{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \hat{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Observaciones:

- El producto cruz es un vector, mientras que el producto es un número o escalar.
 - El producto ^{cruz} no es commutativo $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$
- $$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(b_2 a_3 - a_2 b_3) + \hat{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \hat{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 15\hat{i} - 10\hat{j} - 3\hat{k}$$

II. verifique $\vec{a} \times \vec{b}$ es ortogonal a \vec{a} & \vec{b} .

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 1, 3, 0 \rangle = 30 - 30 + 0 = 0.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 1, 0, 5 \rangle = 15 + 0 - 15 = 0.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp a, b.$$

3×2 .

claracion: 2-D $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ no es posible evaluarlo,
Existe en 3-D. porque la matriz

$$4-0 \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \vec{l} \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

no es cuadrada
jD ES POSIBLE
evaluarlo.

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 15\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}$$

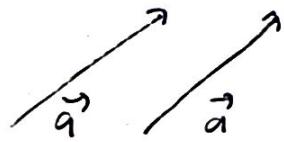
En general $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

Ejercicio 1: Encuentre el producto cruz entre
 $\vec{a} = \langle 1, 1, -1 \rangle$ & $\vec{b} = \langle 2, -2, 3 \rangle$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}(3 - 2) - \hat{j}|1 - 1| + \hat{k}(-2 - 2)$$

$$= \boxed{\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}$$



Ejercicio 2: Encuentre $\vec{a} \times \vec{a}$.

\vec{a} es paralelo a si mismo $\vec{a} \times K\vec{a}$.

$$\vec{a} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(a_1 a_2 - a_1 a_2) - \hat{j}(0) + \hat{k}(0).$$

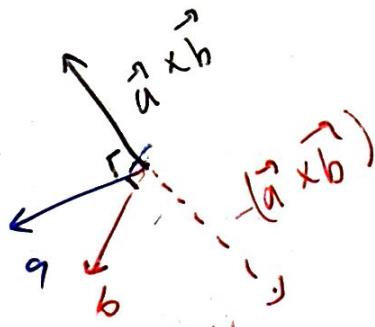
$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

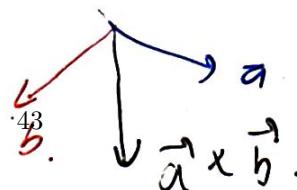
Dos vectores en V_3 (conjunto de vectores 3-D)

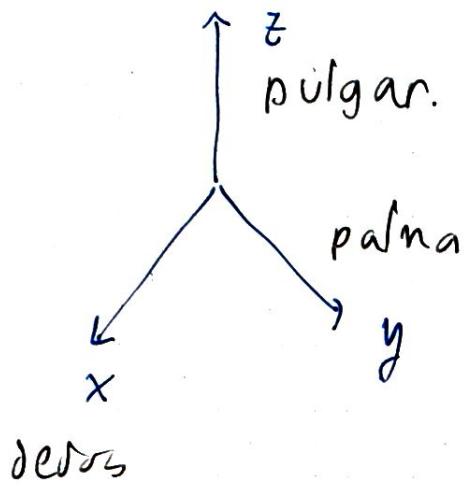
son paralelos si y sólo si $\vec{a} \times K\vec{a} = \vec{0}$
 vector cero.

Interpretación Geométrica.

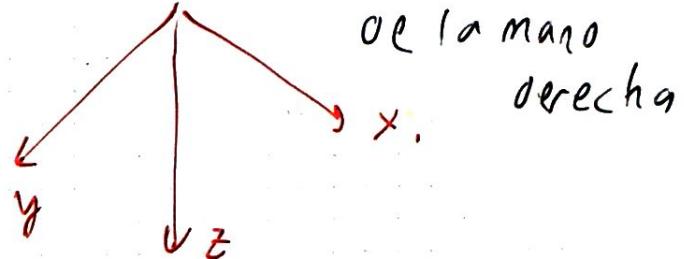


Convenção Mano
Derecha.





: vector ortogonal a ambas que apunta siguiendo la convención de la mano derecha



Propiedad: Dadas $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ y el ángulo entre estos dos vectores θ .

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta. \checkmark$$

En el producto punto $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$.

Para encontrar el ángulo entre dos vectores, es recomendable utilizar el producto punto.

$$\text{Si } \sin \theta = 0 \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0. \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0$$

vectores paralelos.

$$\theta = 0.$$

$$\sin \theta = 0$$

$$\theta = 0.$$

Dos vectores 3-D son paralelos, a ll b, si y sólo

$$\text{si } \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \text{ vector cero.}$$

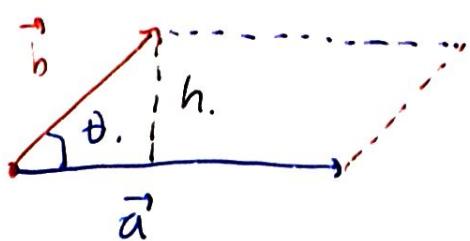
Recomendable: inspeccione si $\vec{b} = K \vec{a}$
no importa la dimensión del vector.

$$\text{Propiedades} \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Se puede utilizar para áreas de "rectángulos inclinados" y cubos "inclinados."



Paralelogramo.

$$\text{Área} = b h.$$

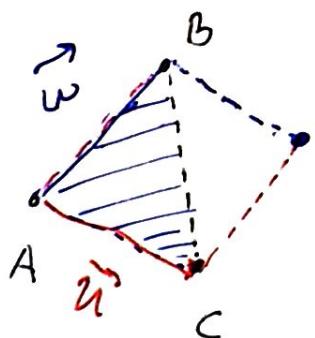
$$\text{base} = |\vec{a}|.$$

$$\text{altura } h = |\vec{b}| \sin \theta$$

$$\text{Área: } A = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta. = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

del Paralelogramo

Ejercicio 3: ¿Cuál es el área del triángulo con vértices en $A(1,0,1)$, $B(-2,1,3)$ y $C(1,2,1)$?



Área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo

$$A_T = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{w}|$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} = \langle 0, 2, 0 \rangle.$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \langle -3, 1, 2 \rangle.$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(4) - \hat{j}0 + \hat{k}(6) = 4\hat{i} + 6\hat{k}$$

Producto Triple Escalar.

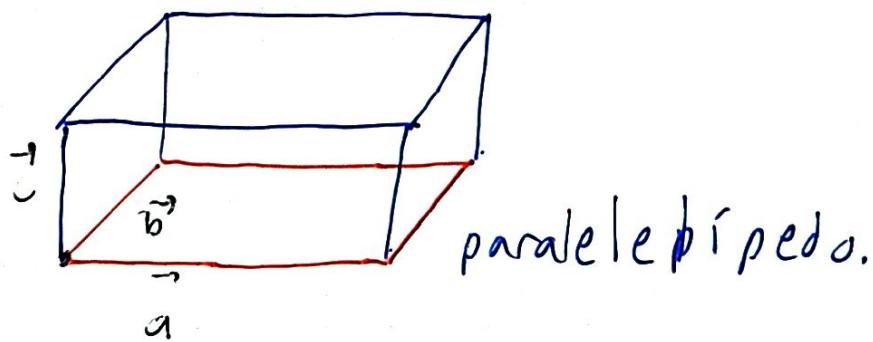
Combina el producto punto y el producto cruz.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

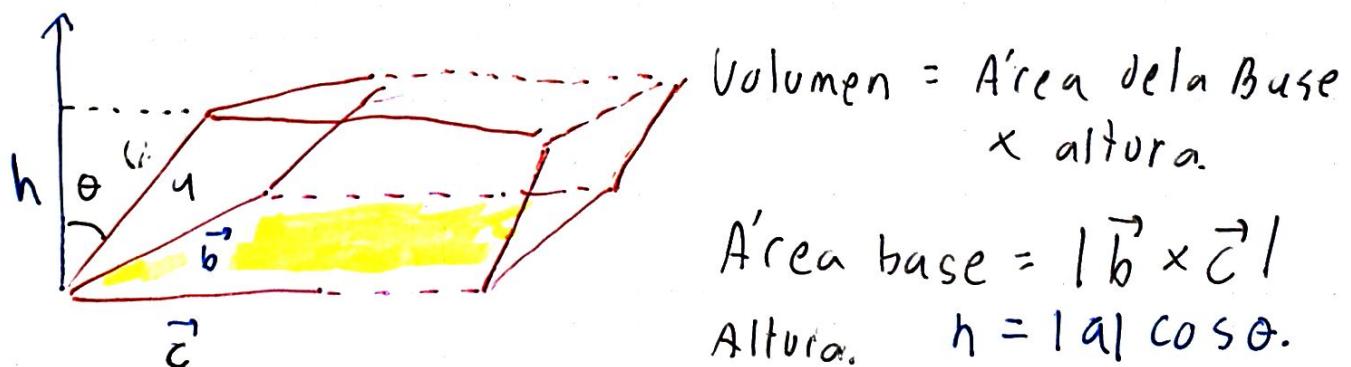
$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \quad //$$

Volumen de un cubo inclinado Paralelepípedo.

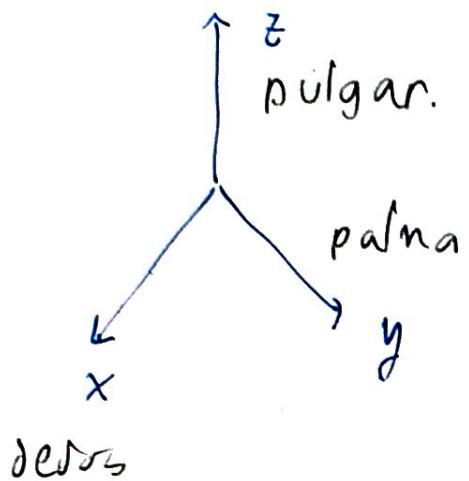


$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

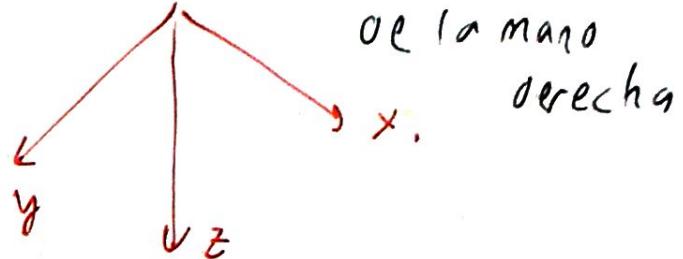


$$\text{Volumen } V = A h. = |\vec{a}| |\vec{b} \times \vec{c}| / \cos \theta.$$

$$U = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$



: vector ortogonal a ambas que apunta siguiendo la convención de la mano derecha



Propiedad: Dadas $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ y el ángulo entre estos dos vectores θ .

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta. \checkmark$$

En el producto punto $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$.

Para encontrar el ángulo entre dos vectores, es recomendable utilizar el producto punto.

$$\text{Si } \sin \theta = 0 \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0. \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0$$

vectores Paralelos.
 $\theta = 0.$

$$\sin \theta = 0 \\ \theta = 0.$$

Dos vectores 3-D son paralelos, al b , si y sólo si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ vector cero.

Recomendable. inspeccione si $\vec{b} = K \vec{a}$
no importa la dimensión del vector.

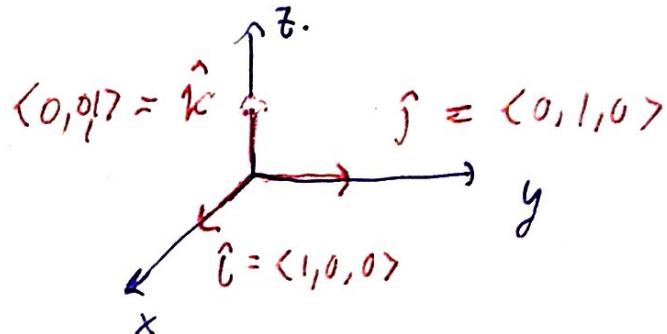
Capítulo 6

RB_2020-01-23_19_42_58

Ángulo entre un vector \vec{a} y un eje

se utiliza la fórmula del producto punto.

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$



Ángulo entre \vec{a} y el eje y.

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \hat{j}}{|\vec{a}| |\hat{j}|} = \frac{\langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle 0, 1, 0 \rangle}{|\vec{a}|} = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

Ángulos entre el vector y cada eje.

Eje - x: $\theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{a_1}{|\vec{a}|}\right)$ Eje - y: $\cos \theta_y = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$

Eje - z: $\cos \theta_z = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$

Estos ángulos se conocen como seno directores.

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

$$\vec{a} = |\vec{a}| \langle \cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z \rangle$$

Vectores paralelos o perpendiculares en n -dimensiones.

Dos vectores $\vec{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$
 $\vec{b} = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$.

-1

Son paralelos: si $\vec{a} = K\vec{b}$ K escalar 0.2

1

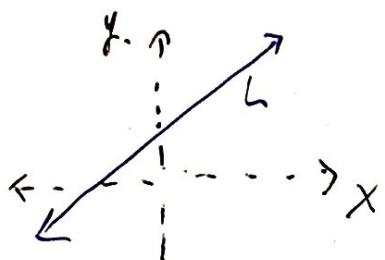
perpendiculares: si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

ángulo

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

12.5 Rectas (p. 39)

En 2-D.



1. m pendiente

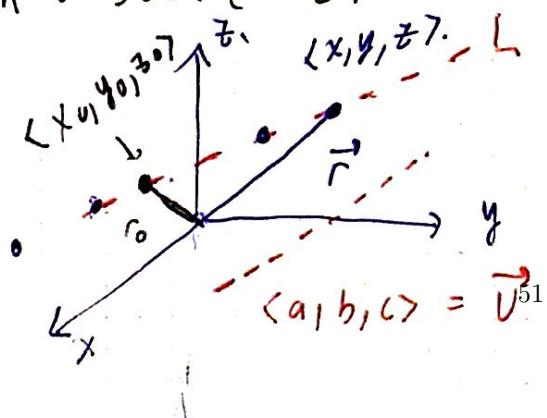
2. (x_0, y_0) punto sobre L

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

En 3-D, para encontrar una recta en el espacio se necesita conocer

1. m "pendiente", dirección de la recta vector $\langle a, b, c \rangle$.

2. punto sobre L. (x_0, y_0, z_0) .



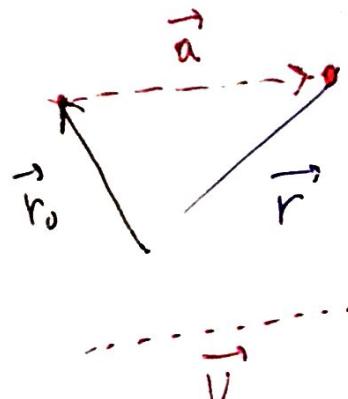
los puntos sobre L.

Vector punto sobre L $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle = \vec{r}_0$

Vector cualquier punto sobre L $\langle x, y, z \rangle = \vec{r}$

Vector dirección

$$\langle a, b, c \rangle = \vec{v}$$



\vec{a} y \vec{v} son paralelos.

$$\vec{a} = k \vec{v} = \underline{t} \vec{v}$$

Variable parámetro t .

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} = \boxed{\vec{r}_0 + t \vec{v}} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ec. Vectorial Recta: punto $\vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$

y dirección $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$.

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}}$$

parámetro t .

Ec. componente por componente.

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t \langle a, b, c \rangle.$$

Ec. Paramétrica de la Recta.

$$\boxed{x = x_0 + at. \\ y = y_0 + bt. \\ z = z_0 + ct.}$$

$t \in \mathbb{R}$.

Punto V.

Posición inicial $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$.

Velocidad constante $\langle a, b, c \rangle$.

$$x = x_0 + v_{ox} t$$

$$y = y_0 + v_{oy} t$$

$$z = z_0 + v_{oz} t$$

Ejercicio 1: Encuentre la ec. vectorial y las paramétricas para la recta que pasa por el punto dado y es paralela al vector dado. (p 30.)

a. P(3,4,-2) $\vec{v} = \langle -8, 2, 5 \rangle.$ $\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}.$

Vector Posición: $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP} = \langle 3, 4, -2 \rangle.$

Vector Dirección: $\vec{v} = \langle -8, 2, 5 \rangle.$

Ec. Vectorial: $\boxed{\vec{r} = \langle 3, 4, -2 \rangle + t \langle -8, 2, 5 \rangle.}$

Ecs. Paramétricas: $x = 3 - 8t$
 $y = 4 + 2t$ $t \in \mathbb{R}.$
 $z = -2 + 5t.$

Observaciones: $\vec{r}(1) = \langle -5, 6, 3 \rangle$

$\vec{r}(10) = \langle -77, 24, -48 \rangle.$

Ec. Vectorial para $\ell:$ $\boxed{\vec{r} = \langle -5, 6, 3 \rangle + t \langle -8, 2, 5 \rangle.}$

vector de dirección v es paralelo a varios vectores

$\vec{w} = k \vec{v}$ puede ser también vector dirección.

$\vec{v}_1 = \langle 8, -2, -5 \rangle$ $\vec{v}_2 = \langle -8\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 5\sqrt{3} \rangle.$

$\boxed{\vec{r} = \langle -77, 24, -48 \rangle + t \vec{v}_2.}$ La misma recta.

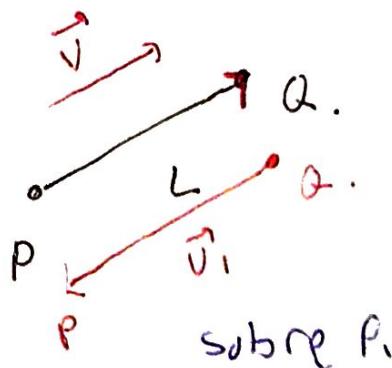
La ec. vectorial de una recta no es única. ✓

Ejercicio 2: Encuentre la ec. vectorial de la recta que pasa por los puntos dados.

a. $P(3, -2, 4)$ y $Q(5, 2, -1)$.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}$$
 $\vec{r}_0 = \langle 3, -2, 4 \rangle$ ó $\langle 5, 2, -1 \rangle$

vector de dirección $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ ó \overrightarrow{QP}



$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2, 4, -5 \rangle.$

Ec. Vectorial \vec{r} sobre P.

 $\vec{r} = \langle 3, -2, 4 \rangle + t \langle 2, 4, -5 \rangle.$

2 $\vec{r}_0 = \langle 5, 2, -1 \rangle$ $\vec{v} = \overrightarrow{QP} = \langle -2, -4, 5 \rangle.$

$\vec{r} = \langle 5, -2, -1 \rangle + t \langle -2, -4, 5 \rangle.$ sobre Q

b. $P(3, 0, 4)$ y $Q(3, 4, 2)$.

$$\vec{r}_0 = \langle 3, 0, 4 \rangle. = \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{v} = \langle 0, 4, -2 \rangle. = \overrightarrow{PQ}$$

$$\vec{v} \neq \vec{PQ}$$

$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v} = \langle 3, 0, 4 \rangle + t \langle 0, 4, -2 \rangle.$

c. ¿Qué pasa si hay 3 puntos?

-
- $P(3,0,4), Q(3,4,2) \quad R(5,3,4)$
 - R.
 - P
 - Q
 - No están sobre L .
 - $\vec{V}_1 = \overrightarrow{PQ} = \langle 0, 4, -2 \rangle$. no son
 - $\vec{V}_2 = \overrightarrow{PR} = \langle 2, 3, 0 \rangle$ paralelos.

Estos tres puntos No están sobre la misma recta.

$$\underbrace{(0,1)}_{m=1} \quad \underbrace{(1,2)}_{m=2} \quad \underbrace{(2,5)}_{m=2}$$

Capítulo 7

RB_2020-01-28_13_10_15

12.5 Rectas y Planos

Ecuación de una Recta.

Vector Posición

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0).$$

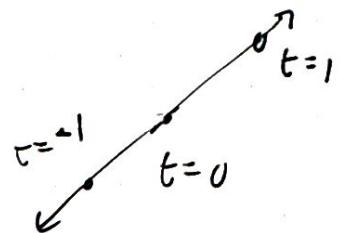
Vector dirección

$$\vec{v} = (a, b, c).$$

Ec. Vectorial

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}}$$

t es el parámetro



Ecs. Paramétricas:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct. \end{aligned}}$$

Resuelva para t en las tres ecs.

$$\boxed{t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c.}}$$

Ecs. simétricas

$$a, b, c \neq 0.$$

vector dirección $\vec{v} = (a, 0, c)$, las ecs. de la recta cambiarán,

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}$$

vectorial

$$x = x_0 + a t$$

$$y = y_0$$

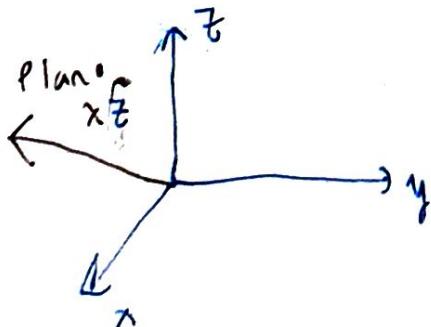
$$z = z_0 + c t.$$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c.}$$

$$y = y_0$$

simétricas

Ecs. Paraleléticas



Ejercicio 3: Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los puntos dados.

Encuentre en qué punto la recta intersecta al plano XZ .

Pág. 41.

a. $P(2, 8, -2)$ y $Q(2, 6, 4)$.

Vector Posición: $\overrightarrow{OP} = \vec{r}_0 = \langle 2, 8, -2 \rangle$. $\vec{r} = \langle x, y, z \rangle$.

Vector Dirección. $\overrightarrow{PQ} = \vec{v} = \langle 0, -2, 6 \rangle$.

Ec. Vectorial: $\vec{r} = \langle 2, 8, -2 \rangle + t \langle 0, -2, 6 \rangle$.

Ecs. simétricas: $x = 2, \frac{y-8}{-2} = \frac{z+2}{6}$

¿Cuál es la intersección con el plano XZ ?

$$\text{use } y=0. \quad x=2, \quad \frac{-8}{-2} = \frac{z+2}{6}$$

$$6 \cdot 4 = z+2 \Rightarrow z=22.$$

La intersección con el plano XZ es el punto $(2, 0, 22)$.

b. $P(4, 6, 10)$ y. $Q(6, 6, 10)$

$$\vec{r}_0 = \langle 4, 6, 10 \rangle. \quad \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2, 0, 0 \rangle.$$

vectorial: $\vec{r} = \langle 4, 6, 10 \rangle + t \langle 2, 0, 0 \rangle$.

paramétricas: $x = 4+2t$ simétricas.

$$\begin{aligned} y &= 6 \\ z &= 10 \end{aligned} \quad 59 \quad t = \frac{x-4}{2}, \quad y = 6, \quad z = 10.$$

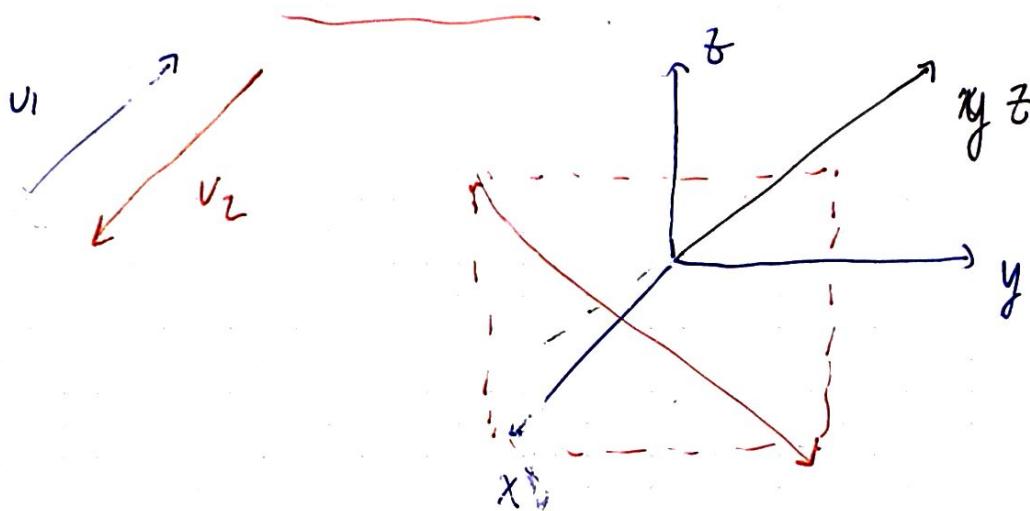
¿Cuál es el punto intersección con el plano xz ?

Use $y = 0$, como cualquier punto sobre esta recta pasa sólo por $y = 6$, esta recta no puede intersectar al plano xz . **NO HAY.**

Rectas Paralelas.

Dos rectas $\vec{r}_1 = \vec{r}_{o1} + t_1 \vec{v}_1$ y $\vec{r}_2 = \vec{r}_{o2} + t_2 \vec{v}_2$

son paralelas. si y sólo si sus vectores de dirección \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son paralelos.



En el espacio hay 3 tipos de rectas.

- Paralelas.
- Intersecan en 1 punto
- Oblicuas (ni son paralelas ni se intersecan).

Ejercicio 4: Determine si los sgs. pares de rectas
son paralelas, oblicuas o se intersecan.

$$a. \frac{x-2}{8} = \frac{y-3}{24} = \frac{z-2}{16}, \quad \frac{x-10}{-2} = \frac{y+15}{-6} = \frac{z+24}{-4}$$

$$U_1 = \langle 8, 24, 16 \rangle$$

$$U_2 = \langle -2, -6, -4 \rangle.$$

$$x = 2 + 8t, \quad y = 3 + 24t, \quad z = 2 + 16t.$$

$U_1 = -4U_2$. U_1 y U_2 son paralelos.

Las dos rectas son paralelas.

$$b. L_1: x = 5 - 4t, \quad y = 6 - 2t, \quad z = 2 + 0t \quad t \in \mathbb{R}$$

$$L_2: x = 3 + 8s, \quad y = -2s, \quad z = 8 + 2s. \quad s \in \mathbb{R}$$

Utilice una variable parámetro para cada recta

$$U_1 = \langle -4, -2, 0 \rangle, \quad U_2 = \langle 8, -2, 2 \rangle. \quad \text{No son paralelas.}$$

Analice si las rectas se intersecan.

$$\begin{aligned} x &= x & 5 - 4t &= 3 + 8s. & (1) & \Rightarrow & 2 &= 4t + 8s \\ y &= y & 6 - 2t &= -2s. & (2) & & 6 &= 2t + 2s \\ z &= z. & \boxed{2 = 8 + 2s} & & & \Rightarrow & s &= -3. \end{aligned}$$

3 ecs. y sólo 2 incógnitas t y s .

Sustituya $s = -3$ en las ecs. (1) y (2)

$$\begin{cases} 5 - 4t = -22 \Rightarrow -4t = -27 \Rightarrow t = 27/4. \\ 6 - 2t = 6 \Rightarrow -2t = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

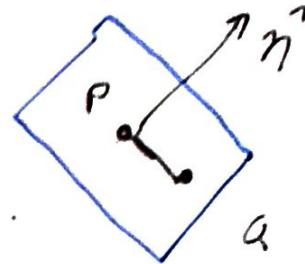
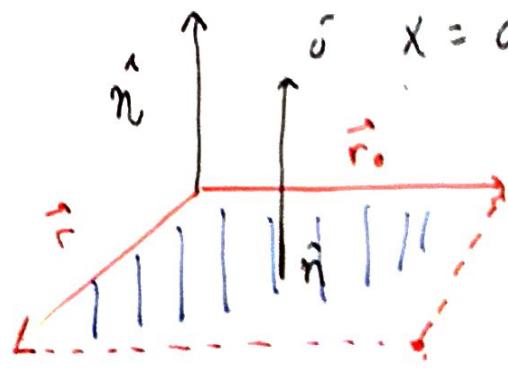
Si no hay una t única (no es posible $t \neq 27/9$), las dos rectas no se intersecan.

L_1 y L_2 son oblicuas (ni paralelas ni se intersecan).

$$\begin{array}{l} 4t + 8s = 2 \\ 2t + 2s = 6 \\ 0t + 2s = -6 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -6 \end{array} \right] \rightarrow \text{0 o 1 número.}$$

Ecuación de un Plano.

Previamente en 12.1 $ax + by + cz = d.$ } Ecs de Planos.



Para encontrar la ec. de un plano se necesita:

1. un punto sobre el plano. $P \quad \vec{r}_0 = \overrightarrow{OP}$

2. un vector normal v ortogonal al plano $\hat{n} = \langle a, b, c \rangle.$

Derivación de la ec. Plano. \wedge sombrero, hat.

$P(x_0, y_0, z_0)$ $Q(x_1, y_1, z_1)$ son dos puntos sobre el plano.

$$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle \quad \vec{r} = \overrightarrow{OQ} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle.$$

El vector $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0$ está sobre el plano, por lo que tiene que ser ortogonal a \hat{n} .

$$\hat{n} \perp \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0 \Rightarrow \hat{n} \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0) = 0.$$

Ec. Vectorial de un Plano.

Se puede escribir como.

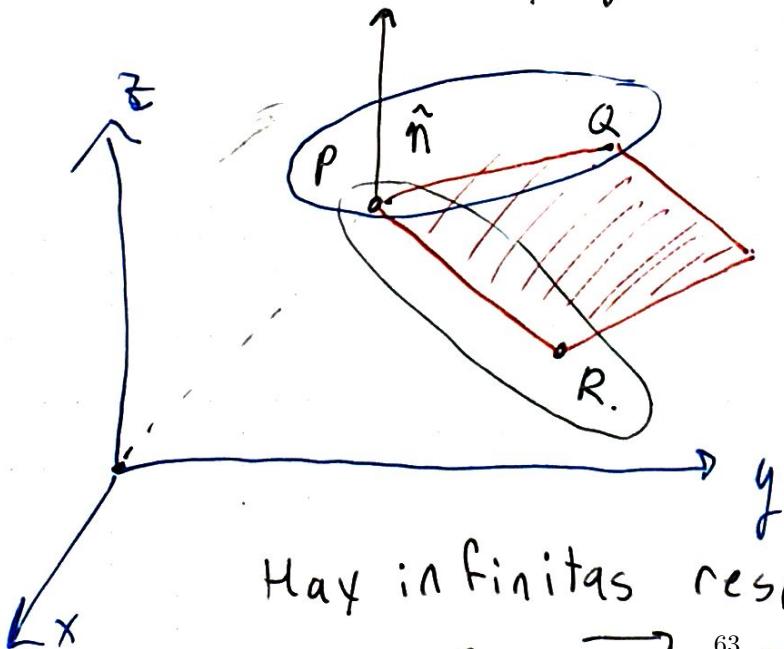
$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0 + z - z_0 \rangle = 0.$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Ec. escalar de un plano.

$$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_d.$$

Para encontrar la ec. de un plano, se necesitan 3 puntos P, Q y R .



$$\overrightarrow{r}_0 = \overrightarrow{OP}$$

$$\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$$

tienen que comenzar en el mismo punto

Hay infinitas respuestas equivalentes

$$\hat{n} = \overrightarrow{PR} \times \overset{63}{\overrightarrow{PQ}}$$

Ejercicio 1: PYS. Encuentre la ec. del plano que pasa por los 3 puntos dados.

a. P(3, -1, 3), Q(8, 2, 4) y R(1, 2, 5)

$$\text{Ec. plano } \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\text{Ec. Recta } \vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}$$

$$\vec{r}_0 = \langle 8, 2, 4 \rangle.$$

Encuentre dos vectores que estén sobre el plano y que comiencen en el mismo punto.

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle 5, 3, 1 \rangle \quad \vec{v} = \overrightarrow{PR} = \langle -2, 3, 2 \rangle.$$

ii \hat{n} es ortogonal a ambos vectores !!

$$\boxed{\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \underline{3\hat{i} - 12\hat{j} + 21\hat{k}}$$

$$\text{Ec. Plano: } \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\text{Vectorial: } \langle 3, -12, 21 \rangle \cdot \langle x-8, y-2, z-4 \rangle = 0.$$

$$\text{Escalar. } 3(x-8) - 12(y-2) + 21(z-4) = 0.$$

Capítulo 8

RB_2020-01-28_13_17_10

b. $P(0,0,0)$, $Q(1,0,2)$ y $R(0,2,3)$

Vector Posición: $\vec{r}_0 = \langle 0,0,0 \rangle$.

2 vectores sobre el plano. $\overrightarrow{PQ} = \langle 1,0,2 \rangle$.
 $\overrightarrow{PR} = \langle 0,2,3 \rangle$.

Vector Normal: $\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$

$$\hat{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

Ecuación Plano. $-4x - 3y + 2z = 0$.

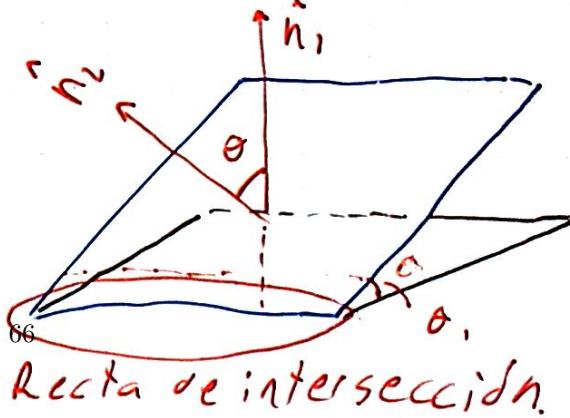
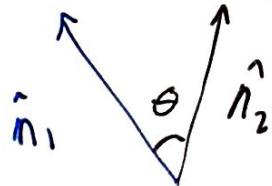
Rectas paralelas v_1 y v_2 son paralelos.

Dos planos $\hat{n}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$ y $\hat{n}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = 0$.

Son paralelos si y sólo si \hat{n}_1 y \hat{n}_2 son paralelos.

En caso que no sean paralelos, se puede encontrar el ángulo de intersección entre dos planos.

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1| |\hat{n}_2|} \right)$$



Capítulo9

RB_2020-01-30_11_31_17

Rectas y planos.

$$\vec{V} = \overrightarrow{PQ}$$

Ecs. Rectas: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

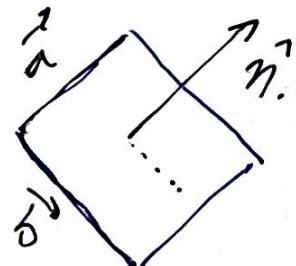
si $a \neq b \neq c \neq 0$ $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

$$\boxed{\begin{aligned}x &= x_0 + at \\y &= y_0 + bt \\z &= z_0 + ct\end{aligned}}$$

Ec. Plano: $\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$\hat{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

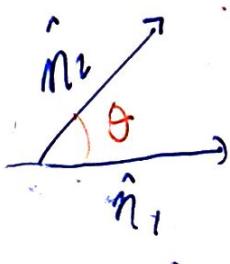


Ejercicio 2: Considere los planos $x+y=0$ & $x+2y+z=1$.

a. Determine si los planos son paralelos. Si no lo son encuentre el ángulo de intersección entre ellos.

$\hat{n}_1 = \langle 1, 1, 0 \rangle$. no son paralelos \hat{n}_1 y \hat{n}_2

$\hat{n}_2 = \langle 1, 2, 1 \rangle$. los dos planos NO SON PARALELOS.



$$\cos \theta = \frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1| |\hat{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{2} \sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{12}}$$

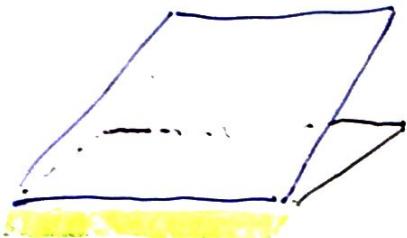
$$\boxed{\cos \theta} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \theta = \frac{\pi}{6} \text{ ó } 30^\circ$$

$$0 \quad \pi/6 \quad \pi/4 \quad \pi/3 \quad \pi/2$$

$$\cos \theta \quad 1 \quad \sqrt{3}/2 \quad \sqrt{2}/2 \quad 1/2 \quad 0$$

$$\sin \theta \quad 0 \quad 1/2 \quad \sqrt{2}/2 \quad \sqrt{3}/2 \quad 1$$

O. Encuentre la ec. de la recta que interseca a ambos planos. $x+y=0$ + $x+2y+z=1$.



$$r = \vec{r}_0 + t \vec{v}$$

Dos puntos sobre la recta,

como la recta está en ambos planos, se debe resolver el sig. sistema.

$$x + y = 0 \Rightarrow x = -y.$$

$$x + 2y + z = 1 \Rightarrow y = 1 - z.$$

z tiene cualquier valor.

1er punto $z=0$:

$$(-1, 1, 0) \quad \begin{array}{l} y=1 \\ x=-1 \end{array}$$

2do punto $z=1$

$$(0, 0, 1) \quad \begin{array}{l} y=0 \\ x=0 \end{array}$$

Encuentre la ec. de la recta que pasa por $P(-1, 1, 0)$

$$y \quad \underbrace{Q(0, 0, 1)}_{\vec{r}_0}$$

$$\vec{r}_0 = \langle 0, 0, 1 \rangle. \quad \vec{v} = \overrightarrow{QP} = \langle -1, 1, -1 \rangle.$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{QP} = \langle -1, 1, -1 \rangle.$$

Ec. Paramétrica
de la recta.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 0 - t \\ y &= 0 + t \\ z &= 1 - t. \end{aligned}}$$

II. Solución. $x = -y$.
 $y = 1 - z$ más incógnitas que ecuaciones.

x, y ó z pueden tener cualquier valor. $\boxed{z = t}$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 1 - t \\ z &= t \end{aligned}}$$

$$U_L = \langle 1, -1, 1 \rangle \quad \vec{r}_0 = \langle -1, 1, 0 \rangle$$

III. Solución Geométrica. por ejemplo.

1. Encuentre un punto en ambos planos $(0, 0, 1)$

La recta está en el plano l , entonces la recta es perpendicular al vector normal del plano l .

Está en el plano z , entonces también es perpendicular al segundo vector normal.

∴ La recta es perpendicular a ambos \hat{n}_1 y \hat{n}_2 .

$$\vec{J} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

Ec. Recta $r = \langle 0, 0, 1 \rangle + t \langle 1, -1, 1 \rangle$.

Ejercicio 3: Encuentre el punto en el que la línea recta $x=1+2t$, $y=4t$, $z=5t$ interseca al plano $x-y+2z=17$.

Plano.

$$x = 1 + 2t$$

$$y = 4t$$

$$z = 5t$$

Recta

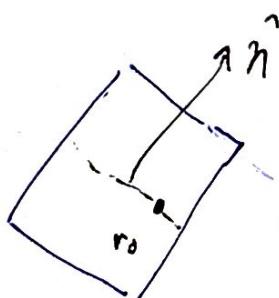
$$x - y + 2z = 17.$$

$$1 + 2t - 4t + 10t = 17.$$

$$8t = 16 \Rightarrow t = 2$$

El Pto. de Intersección es $(5, 8, 10)$.

Ejercicio 4: Encuentre una ec. del plano que contiene, a la recta $x=1+t$, $y=2-t$, $z=4-3t$ y es paralela al plano $5x+2y+z=1$.



Qualquier punto sobre la recta también está sobre el plano.

$$t=0: x=1, y=2, z=4 \quad \vec{r}_0 = \langle 1, 2, 4 \rangle.$$

¿Cómo se encuentra \hat{n} ?

El vector de dirección de la recta $v = \langle 1, -1, -3 \rangle$ es paralelo al plano.

Como es paralelo al segundo plano, entonces tiene que ser perpendicular $\hat{n} = \langle 5, 2, 1 \rangle$.

$$\vec{r}_0 = \langle 1, 2, 4 \rangle \quad y \quad \vec{n} = \langle 5, 2, 1 \rangle.$$

5.

Ecuación Plana: $\underline{5(x-1) + 2(y-2) + 1(z-4) = 0.}$

Ejercicio 5: Encuentre los números directores para la recta de intersección entre los planos $x+y+z=1$ y.

$$x+2y+3z=1.$$

Los números directores a, b y c del vector de dirección $\langle a, b, c \rangle$.

La recta es ortogonal a ambos vectores normales.

$\vec{n}_1 = \langle 1, 1, 1 \rangle$ y $\vec{n}_2 = \langle 1, 2, 3 \rangle$ de ambos planos.

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}}$$

Números directores: $a=1, b=-2, c=1$

Ejercicio 6: Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(0, 1, 2)$, que es paralela al plano $x+y+z=2$ y perpendicular a la recta.

$$\vec{r} = \langle -2t, 0, 3t \rangle.$$

$$L_1: \underline{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}} \quad \underline{\vec{r}_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle}$$

¿Cómo se encuentra v ?

Plano 1 $\hat{n} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ es perpendicular al plano.

Recta 2: $\hat{v}_2 = \langle -2, 0, 3 \rangle$ es paralelo a L_1 .

La recta es perpendicular a \hat{n} y a \hat{v}_2 .

$$v = \hat{n} \times \hat{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

✓ $v = \hat{v}_2 \times \hat{n}$

Ecs. Paramétricas.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 0 + 3t \\ y &= 1 - 5t \\ z &= 2 + 2t \end{aligned}}$$