12.1 Vectores p.21

Tuesday, January 25, 2022 10:42

Un vector tiene magnitud y dirección su denota en negrilla V o con una flecha

La longitud de la recta representa su longitud y la flecha

Flecha tiene magnitud y dirección

Se denotan en negrita V o con flecha sobre la letra $\vec{V}$

La longitud de una componente es la magnitud del vector la flecha sobre su dirección

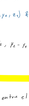
$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

Segmento de recta dirigido empieza en el punto A & termina en el punto B

$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

hay también un vector cero $\vec{0}$ & no tiene magnitud ni dirección

Si no se necesitan un sistema de coordenadas y las componentes de un vector



$\vec{v} = \langle a, b \rangle$ ó $[a, b]$ $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$

Los libros <> denotan un vector

Vector posición:

En dos dimensiones

$\overrightarrow{AB} = \langle f_1 - x_1, f_2 - y_1 \rangle$

En tres dimensiones

$A(x_1, y_1, z_1)$ & $B(f_1, f_2, f_3)$

$v = \overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BA} = \langle f_1 - x_1, f_2 - f_2, f_3 - z_1 \rangle$

Magnitud de un vector: La distancia entre el punto B & el punto A.

Lo que necesitamos la magnitud de un vector es:

$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

Siempre positivo

Se denota con $\|$ o $|| \ ||$ ó

$\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Operaciones: $\overrightarrow{AB}$ que $\overrightarrow{BA}$

pero...

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

$|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BA}|$

no son iguales pero sale el mismo resultado.

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

$\langle x_1 - x_1, y_1 - y_1, z_1 - z_1 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$

Ejercicio 1: Considerar el vector $\overrightarrow{AB}$ con un punto inicial $(1,2,-4)$ y punto final $(4,6,1)$.

a) Encuentre el vector posición $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

$\vec{v} = \langle (4-1), (6-2), (1+4) \rangle$

$\vec{v} = \langle 3, 4, 5 \rangle$

b) Encuentre la longitud del vector $\vec{v}$

$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Operaciones de vectores:

$\vec{+}$ Suma de vectores

$\vec{\times}$ Multiplicación por un escalar

T2.3 : Producto punto

T2.3 : Producto cruz

Suma de vectores

$\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ $\vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$

Suma cada componente

$$\vec{v} + \vec{w} = \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3 \rangle$$

Multiplicación por un escalar

$\vec{v}$ que son contenidos dentro de un escalar

X es una constante denotada como un escalar

Multiplicar cada componente:

$\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ $\forall, \forall \in \mathbb{R}$

¿Cómo se pueden visualizar geometricamente estas operaciones?

$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\vec{v} + \vec{w} = \vec{AC}$

El segundo vector w empieza en el punto donde termina el primero.

Suma de vectores

Multiplicación por un escalar

- Se generan la dirección si $k > 0$
- si $k > 1$, el vector se estira.
- Si $0 < k < 1$, el vector se comprime

$\vec{v} = \langle -2, 1 \rangle$

- Si $k < 0$, el vector cambia de dirección (también 180°)

Ángulos de un vector: cuando $k = -1$

$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ $-\vec{v} = \overrightarrow{BA}$

Rango o dirección de vectores: Este segmento de la suma

$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{v} - \vec{v}$

$= \langle v_1 - v_1, v_2 - v_2, v_3 - v_3 \rangle$

Resta cada componente entre sí. ...

Se puede pensar como la suma entre $\vec{v}$ Y el negativo de $\vec{w}$

Ejercicio 2 : Sean $\vec{v} = \langle -1, 2 \rangle$, $\vec{w} = \langle -3, 4 \rangle$

Encuentre la suma de vectores

$\vec{v} + \vec{w}$ $\vec{v} - \vec{w}$ $2\vec{v}$

a) $\vec{v} + \vec{w} = \langle -1 - 3, 2 + 4 \rangle$

b) $\vec{v} - \vec{w} = \langle -1 - 3, -4 - 2 \rangle = \langle 3, -6 \rangle$

c) $2\vec{v} = \langle -2, -4 \rangle$

$= \langle 3 - 2, -6 - 2 \rangle$

d) $|2\vec{v} - \vec{w}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} \approx 3.16$

$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \approx 2.23$

$|\vec{w}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} \approx 5$

$|\vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \approx 3.61$

$|2\vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} \approx 3.16$

$\sqrt{20 + 13} \neq \sqrt{20} + \sqrt{13}$

Problema base: Considere el vector $\vec{v} = \langle 2, 1 \rangle$ &

$\vec{w} = \langle -1, \sqrt{3} \rangle$

Encuentre la magnitud y el ángulo respecto al eje-x del vector: $\vec{v}$ y $\vec{w}$

$\vec{v} + \vec{w}$ $= \langle 2, 1 + \sqrt{3} \rangle$

$|\vec{v}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

$\tan\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

$|\vec{w}| = \sqrt{1 + 3} = 2$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$

$|\vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{(2-1)^2 + (1+\sqrt{3})^2}$

≈ 1.7859

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 0.91$ radianes

$= \frac{180}{\pi} \times 0.91 = 53.1°$ grados

Vectores Bases o estándar:

$\vec{v} = \langle 7, 4, 2 \rangle = 7\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$

Se denotan como $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ apuntan en la dirección de cada eje coordenado.

$\hat{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$

$\hat{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$

$\hat{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$

Permiten expresar cada vector $\vec{v}$ Como una combinación de los vectores estándar.

$\vec{v} = \langle a, b, c \rangle = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

magnitud de $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

$|\hat{i}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$ $|\hat{j}| = 1$ $|\hat{k}| = 1$

Vectores unitarios : Tienen longitud igual a 1.

$|u| = 1$

¿Qué sucede si $\vec{v} \neq 0$? Se encuentra el vector unitario. Asociado Dividiendo por $|\vec{v}|$

El vector $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|v|}$ es siempre unitario

Ejercicio 3: Sean $\vec{v} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ y $\vec{w} = 5\hat{i} - 2\hat{k}$

Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector $2\vec{v} - \vec{w}$

$2\vec{v} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 10\hat{k}$

$2\vec{v} - \vec{w} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 10\hat{k} - 5\hat{i} + 2\hat{k}$

$= -1\hat{i} - 6\hat{j} + 12\hat{k}$

$|2\vec{v} - \vec{w}| = \sqrt{1^2 + 36 + 144} = \sqrt{181}$

pero $\frac{2\vec{v} - \vec{w}}{|2\vec{v} - \vec{w}|} = \frac{-1}{\sqrt{181}}\hat{i} - \frac{6}{\sqrt{181}}\hat{j} + \frac{12}{\sqrt{181}}\hat{k}$ $= \langle -0.74, 0.4 \rangle$