

CAPÍTULO 4



Introducción a la probabilidad

CONTENIDO

LA ESTADÍSTICA
EN LA PRÁCTICA:
LA EMPRESA
ROHM AND HASS

**4.1 EXPERIMENTOS, REGLAS
DE CONTEO Y ASIGNACIÓN
DE PROBABILIDADES**
Reglas de conteo, combinaciones
y permutaciones
Asignación de probabilidades
Probabilidades para el proyecto
KP&L

- 4.2 EVENTOS Y SUS
PROBABILIDADES**
- 4.3 ALGUNAS RELACIONES
BÁSICAS DE PROBABILIDAD**
Complemento de un evento
Ley de la adición
- 4.4 PROBABILIDAD
CONDICIONAL**
Eventos independientes
Ley de la multiplicación
- 4.5 TEOREMA DE BAYES**
Método tabular

LA ESTADÍSTICA *(en)* LA PRÁCTICA

LA EMPRESA ROHM AND HASS*

Filadelfia, Pensilvania

Rohm and Hass es el principal productor de materiales especiales, entre los que se encuentran materiales electrónicos, polímeros para pinturas y artículos para el cuidado personal. Los productos de esta empresa permiten la creación de bienes de consumo de vanguardia en mercados como el farmacéutico, el de alimentos, el de suministros para la construcción, equipos de comunicación y productos para el hogar. La fuerza de trabajo de la empresa es de más de 17 000 personas y sus ventas anuales son de \$8 mil millones. Una red de más de 100 puntos de fabricación, investigación técnica y servicio al cliente proporciona los productos y servicios de Rohm and Hass en 27 países.

En el área de productos químicos especiales, la empresa ofrece diversos productos químicos destinados a satisfacer las especificaciones únicas de sus clientes. Para un cliente determinado, la empresa produce un catalizador caro que el cliente emplea en sus procesos químicos. Algunos, pero no todos los lotes que produce la empresa satisfacen las especificaciones del producto. El contrato estipula que el cliente debe probar cada lote después de recibirlo y determinar si el catalizador podrá realizar la función esperada. Los lotes que no pasen la prueba del cliente serán regresados. Con el tiempo, la experiencia ha mostrado que el cliente acepta 60% de los lotes y regresa 40%. Ni el cliente ni la empresa estaban satisfechos con este servicio.

La empresa examinó la posibilidad de, antes de enviar el lote, replicar la prueba que hacía el cliente. Sin embargo, los elevados costos del equipo especial que se necesitaba para la prueba hicieron que esta posibilidad no fuera factible. Los químicos de la empresa encargados del problema propusieron una prueba diferente de costo bajo que se podía practicar antes de enviar el lote al cliente. La empresa creyó que la nueva prueba podría indicar si el catalizador pasaría la compleja prueba que practicaba el cliente.

*Los autores agradecen a Michael Haskell, de la subsidiaria Morton International de Rohm and Hass por haberles proporcionado este artículo para *La estadística en la práctica*.



Una nueva prueba antes de enviar el lote al cliente mejora el servicio al cliente. © Keith Word/Stone.

La pregunta era: ¿cuál es la probabilidad de que el catalizador pase la prueba del cliente dado que pasó la nueva prueba antes de enviar el lote?

La empresa produjo una muestra del catalizador y la sometió a la nueva prueba. Entonces sólo los lotes de catalizador que pasaban la prueba se enviaban al cliente. Mediante el análisis de probabilidad de los datos se supo que si el catalizador pasaba la nueva prueba antes de ser enviado al cliente, la probabilidad de que el catalizador pasara la prueba del cliente era 0.909. O que si el catalizador pasaba la prueba de la empresa, la probabilidad de que no pasara la prueba del cliente y fuera rechazado era 0.091. El análisis de probabilidad aportó evidencias para poner en uso el procedimiento de la prueba antes de enviar el lote. Esta nueva prueba tuvo una mejora inmediata en el servicio al cliente y redujo tanto los costos como los gastos de envío y el manejo de los lotes regresados.

A la probabilidad de que un lote sea aceptado por el cliente, dado que pasó la nueva prueba, se le llama probabilidad condicional. En este capítulo aprenderá cómo calcular la probabilidad condicional y otras probabilidades útiles en la toma de decisiones.

Los administradores sustentan sus decisiones en un análisis de incertidumbres como las siguientes:

1. ¿Qué posibilidades hay de que disminuyan las ventas si aumentamos los precios?
2. ¿Qué posibilidad hay de que un método nuevo de ensamblado aumente la productividad?
3. ¿Cuáles son las posibilidades de que el producto se tenga listo a tiempo?
4. ¿Qué oportunidad existe de que una nueva invención sea rentable?

Algunos de los primeros trabajos sobre probabilidad se dieron en una serie de cartas entre Pierre de Fermat y Blaise Pascal durante el año de 1650.

La **probabilidad** es una medida numérica de la posibilidad de que ocurra un evento. Por tanto, las probabilidades son una medida del grado de incertidumbre asociado con cada uno de los eventos previamente enunciados. Si cuenta con las probabilidades, tiene la capacidad de determinar la posibilidad de ocurrencia que tiene cada evento.

Los valores de probabilidad se encuentran en una escala de 0 a 1. Los valores cercanos a 0 indican que las posibilidades de que ocurra un evento son muy pocas. Los cercanos a 1 indican que es casi seguro que ocurra un evento. Otras probabilidades entre cero y uno representan distintos grados de posibilidad de que ocurra un evento. Por ejemplo, si considera el evento “que llueva mañana”, se entiende que si el pronóstico del tiempo dice “la probabilidad de que llueva es cercana a cero”, implica que casi no hay posibilidades de que llueva. En cambio, si informan que la probabilidad de que llueva es 0.90, sabe que es muy posible que llueva. La probabilidad de 0.50 indica que es igual de posible que llueva como que no llueva. En la figura 4.1 se presenta la probabilidad como una medida numérica de la posibilidad de que ocurra un evento.

4.1

Experimentos, reglas de conteo y asignación de probabilidades

En el contexto de la probabilidad, un **experimento** es definido como un proceso que genera resultados definidos. Y en cada una de las repeticiones del experimento, habrá uno y sólo uno de los posibles resultados experimentales. A continuación se dan varios ejemplos de experimentos con sus correspondientes resultados.

Experimento	Resultado experimental
Lanzar una moneda	Cara, cruz
Tomar una pieza para inspeccionarla	Con defecto, sin defecto
Realizar una llamada de ventas	Hay compra, no hay compra
Lanzar un dado	1, 2, 3, 4, 5, 6
Jugar un partido de fútbol	Ganar, perder, empatar

Al especificar todos los resultados experimentales posibles, está definiendo el **espacio muestral** de un experimento.

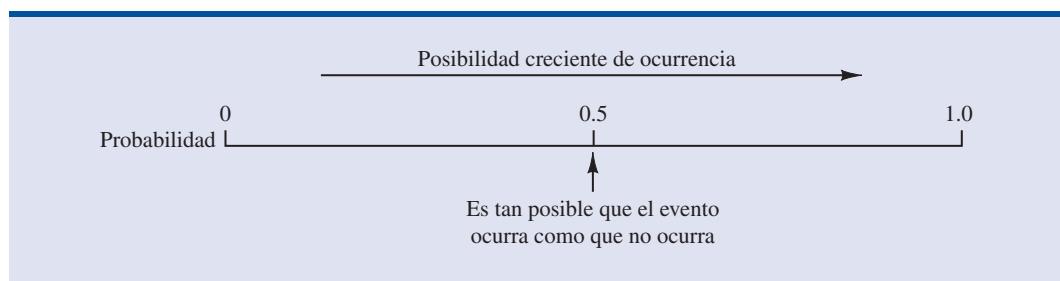
ESPAZIO MUESTRAL

El espacio muestral de un experimento es el conjunto de todos los resultados experimentales.

A los resultados experimentales también se les llama puntos muestrales.

A un resultado experimental también se le llama **punto muestral** para identificarlo como un elemento del espacio muestral.

FIGURA 4.1 PROBABILIDAD COMO MEDIDA NUMÉRICA DE LA POSIBILIDAD DE QUE UN EVENTO OCURRA



Considere el primer experimento presentado en la tabla anterior, lanzar una moneda. La cara de la moneda que caiga hacia arriba —cara o cruz— determina el resultado experimental (puntos muestrales). Si denota con S el espacio muestral, puede emplear la notación siguiente para describir el espacio muestral.

$$S = \{\text{Cara, cruz}\}$$

En el segundo experimento de la tabla —tomar una pieza para revisarla— puede describir el espacio muestral como sigue:

$$S = \{\text{Defectuosa, no defectuosa}\}$$

Los dos experimentos descritos tienen dos resultados experimentales (puntos muestrales). Pero, observe ahora el cuarto experimento enumerado en la tabla, lanzar un dado. Los resultados experimentales, definidos por el número de puntos del dado en la cara que cae hacia arriba, son los seis puntos del espacio muestral de este experimento.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Reglas de conteo, combinaciones y permutaciones

Al asignar probabilidades es necesario saber identificar y contar los resultados experimentales. A continuación tres reglas de conteo que son muy utilizadas.

Experimentos de pasos múltiples La primera regla de conteo sirve para experimentos de pasos múltiples. Considere un experimento que consiste en lanzar dos monedas. Defina los resultados experimentales en términos de las caras y cruces que se observan en las dos monedas. ¿Cuántos resultados experimentales tiene este experimento? El experimento de lanzar dos monedas es un experimento de dos pasos: el paso 1 es lanzar la primera moneda y el paso 2 es lanzar la segunda moneda. Si se emplea H para denotar cara y T para denotar cruz, (H, H) será el resultado experimental en el que se tiene cara en la primera moneda y cara en la segunda moneda. Si continúa con esta notación, el espacio muestral (S) en este experimento del lanzamiento de monedas será el siguiente:

$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

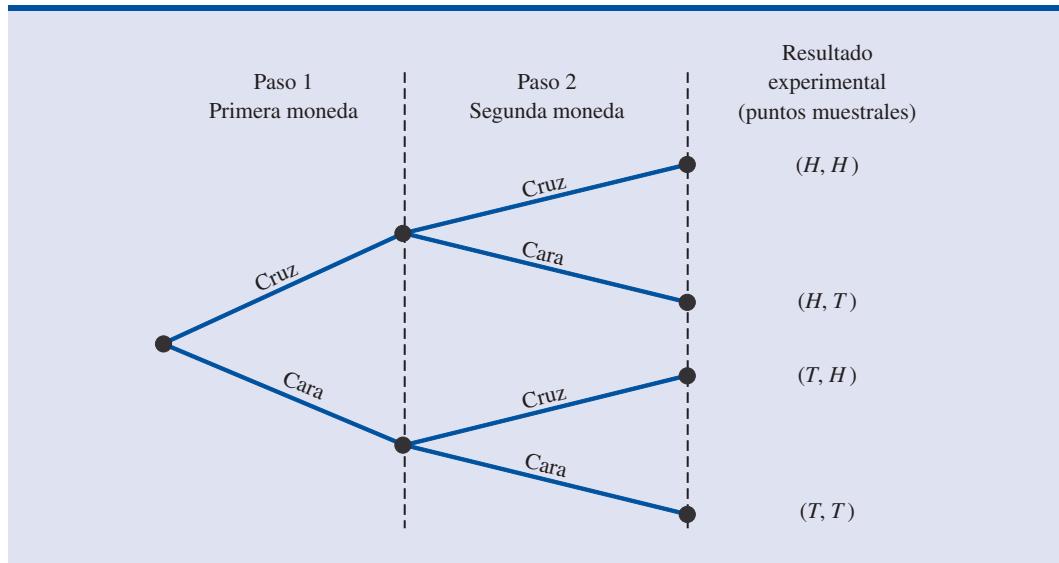
Por tanto, hay cuatro resultados experimentales. En este caso es fácil enumerar todos los resultados experimentales.

La regla de conteo para experimentos de pasos múltiples permite determinar el número de resultados experimentales sin tener que enumerarlos.

REGLA DE CONTEO PARA EXPERIMENTOS DE PASOS MÚLTIPLES

Un experimento se describe como una sucesión de k pasos en los que hay n_1 resultados posibles en el primer paso, n_2 resultados posibles en el segundo paso y así en lo sucesivo, entonces el número total de resultados experimentales es $(n_1)(n_2) \dots (n_k)$.

Si considera el experimento del lanzamiento de dos monedas como la sucesión de lanzar primero una moneda ($n_1 = 2$) y después lanzar la otra ($n_2 = 2$), siguiendo la regla de conteo $(2)(2) = 4$, entonces hay cuatro resultados distintos. Como ya se mostró, estos resultados son $S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$. El número de resultados experimentales de seis monedas es $(2)(2)(2)(2)(2)(2) = 64$.

FIGURA 4.2 DIAGRAMA DE ÁRBOL PARA EL LANZAMIENTO DE DOS MONEDAS

Sin el diagrama de árbol podría pensarse que sólo se pueden tener tres resultados experimentales en dos lanzamientos de una moneda: 0 caras, 1 cara y 2 caras.

Un **diagrama de árbol** es una representación gráfica que permite visualizar un experimento de pasos múltiples. En la figura 4.2 aparece un diagrama de árbol para el experimento del lanzamiento de dos monedas. La secuencia de los pasos en el diagrama va de izquierda a derecha. El paso 1 corresponde al lanzamiento de la primera moneda, el paso 2 al de la segunda moneda. En cada paso, los dos resultados posibles son cruz o cara. Observe que a cada uno de los resultados posibles en el paso 1 pertenecen dos ramas por los dos posibles resultados en el paso 2. Cada uno de los puntos en el extremo derecho del árbol representa un resultado experimental. Cada trayectoria a través del árbol, desde el nodo más a la izquierda hasta uno de los nodos en el extremo derecho del árbol, muestra una secuencia única de resultados.

Ahora una aplicación de la regla de conteo para experimentos de pasos múltiples en el análisis de un proyecto de expansión de la empresa Kentucky Power & Light (KP&L). Kentucky Power & Light ha comenzado un proyecto que tiene como objetivo incrementar la capacidad de generación de una de sus plantas en el norte de Kentucky. El proyecto fue dividido en dos etapas o pasos sucesivos: etapa 1 (diseño) y etapa 2 (construcción). A pesar de que cada etapa se planeará y controlará con todo el cuidado posible, a los administrativos no les es posible pronosticar el tiempo exacto requerido en cada una de las etapas del proyecto. En un análisis de proyectos de construcción similares encuentran que la posible duración de la etapa de diseño es de 2, 3, o 4 meses y que la duración de la construcción es de 6, 7 u 8 meses. Además, debido a la necesidad urgente de más energía eléctrica, los administrativos han establecido como meta 10 meses para la terminación de todo el proyecto.

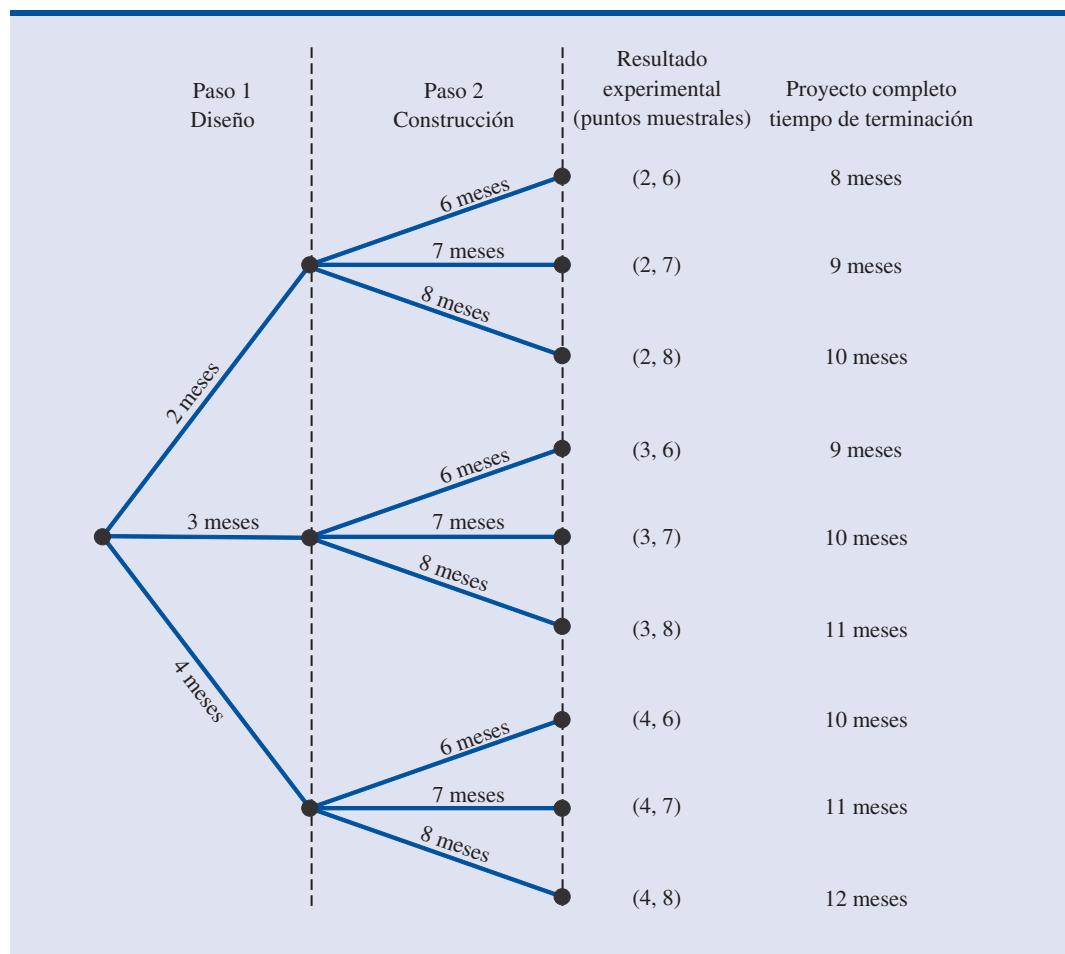
Como hay tres posibles períodos para la etapa del diseño (paso 1) y tres para la etapa de la construcción (paso 2) cabe aplicar la regla de conteo para experimentos de pasos múltiples, entonces el total de resultados posibles es $(3)(3) = 9$. Para describir los resultados experimentales emplean una notación de dos números; por ejemplo, (2, 6) significa que la etapa del diseño durará 2 meses y la etapa de la construcción 6. Esto da como resultado una duración de $2 + 6 = 8$ meses para todo el proyecto. En la tabla 4.1 aparecen los nueve resultados experimentales que hay para el problema de KP&L. El diagrama de árbol de la figura 4.3 muestra como se presentan los nueve resultados (puntos muestrales).

La regla de conteo y el diagrama de árbol ayudan al administrador del proyecto a identificar los resultados experimentales y a determinar la posible duración del proyecto. De acuerdo con la

TABLA 4.1 RESULTADOS EXPERIMENTALES (PUNTOS MUESTRALES) PARA EL PROYECTO KP&L

Duración (meses)		Notación para los resultados experimentales	Proyecto completo: duración (meses)
Etapa 1 Diseño	Etapa 2 Construcción		
2	6	(2, 6)	8
2	7	(2, 7)	9
2	8	(2, 8)	10
3	6	(3, 6)	9
3	7	(3, 7)	10
3	8	(3, 8)	11
4	6	(4, 6)	10
4	7	(4, 7)	11
4	8	(4, 8)	12

FIGURA 4.3 DIAGRAMA DE ÁRBOL PARA EL PROYECTO KP&L



información de la figura 4.3, la duración del proyecto es de 8 a 12 meses, y seis de los nueve resultados experimentales tienen la duración deseada de 10 meses o menos. Aun cuando identificar los resultados experimentales ayuda, es necesario considerar cómo asignar los valores de probabilidad a los resultados experimentales antes de evaluar la probabilidad de que el proyecto dure los 10 meses deseados.

Combinaciones Otra regla de conteo útil le permite contar el número de resultados experimentales cuando el experimento consiste en seleccionar n objetos de un conjunto (usualmente mayor) de N objetos. Ésta es la regla de conteo para combinaciones.

REGLA DE CONTEO PARA COMBINACIONES

El número de combinaciones de N objetos tomados de n en n es

$$C_n^N = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \quad (4.1)$$

donde

$$\begin{aligned} N! &= N(N-1)(N-2)\cdots(2)(1) \\ n! &= n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1) \end{aligned}$$

y por definición,

$$0! = 1$$

La notación ! significa *factorial*; por ejemplo, 5 factorial es $5! = (5)(4)(3)(2)(1) = 120$.

Como ejemplo del uso de la regla de conteo para combinaciones, considere un procedimiento de control de calidad en el que un inspector selecciona al azar dos de cinco piezas para probar que no tengan defectos. En un conjunto de cinco partes, ¿cuántas combinaciones de dos partes pueden seleccionarse? De acuerdo con la regla de conteo de la ecuación (4.1) es claro que con $N = 5$ y $n = 2$ se tiene

$$C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(2)(1)(3)(2)(1)} = \frac{120}{12} = 10$$

De manera que hay 10 resultados posibles en este experimento de la selección aleatoria de dos partes de un conjunto de cinco. Si etiqueta dichas partes como A, B, C, D y E, las 10 combinaciones o resultados experimentales serán AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE y DE.

Para ver otro ejemplo, considere la lotería de Florida en la que se seleccionan seis números de un conjunto de 53 números para determinar al ganador de la semana. Para establecer las distintas variables en la selección de seis enteros de un conjunto de 53, se usa la regla de conteo para combinaciones.

$$\binom{53}{6} = \frac{53!}{6!(53-6)!} = \frac{53!}{6!47!} = \frac{(53)(52)(51)(50)(49)(48)}{(6)(5)(4)(3)(2)(1)} = 22\,957\,480$$

La regla de conteo para combinaciones arroja casi 23 millones de resultados experimentales en esta lotería. Si una persona compra un billete de lotería, tiene una en 22 957 480 posibilidades de ganar la lotería.

Permutaciones La tercera regla de conteo que suele ser útil, es para permutaciones. Dicha regla permite calcular el número de resultados experimentales cuando se seleccionan n objetos de

Cuando se hace un muestreo de una población finita de tamaño N , la regla de conteo para combinaciones sirve para hallar el número de muestras de tamaño n que pueden seleccionarse.

La regla de conteo para combinaciones muestra que la probabilidad de ganar en esta lotería es muy pequeña.

un conjunto de N objetos y el orden de selección es relevante. Los mismos n objetos seleccionados en orden diferente se consideran un resultado experimental diferente.

REGLA DE CONTEO PARA PERMUTACIONES

El número de permutaciones de N objetos tomados de n en n está dado por

$$P_n^N = n! \binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!} \quad (4.2)$$

La regla de conteo para permutaciones tiene relación estrecha con la de combinaciones; sin embargo, con el mismo número de objetos, el número de permutaciones que se obtiene en un experimento es mayor que el número de combinaciones, ya que cada selección de n objetos se ordena de $n!$ maneras diferentes.

Para ver un ejemplo, reconsideré el proceso de control de calidad en el que un inspector selecciona dos de cinco piezas para probar que no tienen defectos. ¿Cuántas permutaciones puede seleccionar? La ecuación (4.2) indica que si $N = 5$ y $n = 2$, se tiene

$$P_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(3)(2)(1)} = \frac{120}{6} = 20$$

De manera que el experimento de seleccionar aleatoriamente dos piezas de un conjunto de cinco piezas, teniendo en cuenta el orden en que se seleccionen, tiene 20 resultados. Si las piezas se etiquetan A, B, C, D y E, las 20 permutaciones son AB, BA, AC, CA, AD, DA, AE, EA, BC, CB, BD, DB, BE, EB, CD, DC, CE, EC, DE y ED.

Asignación de probabilidades

Ahora verá cómo asignar probabilidades a los resultados experimentales. Los tres métodos comúnmente usados son el método clásico, el método de la frecuencia relativa y el método subjetivo. Sin importar el método que se use, es necesario satisfacer los **requerimientos básicos para la asignación de probabilidades**.

REQUERIMIENTOS BÁSICOS PARA LA ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

1. La probabilidad asignada a cada resultado experimental debe estar entre 0 y 1, inclusive. Si denota con E_i el i -ésimo resultado experimental y con $P(E_i)$ su probabilidad, entonces exprese este requerimiento como

$$0 \leq P(E_i) \leq 1 \text{ para toda } i \quad (4.3)$$

2. La suma de las probabilidades de los resultados experimentales debe ser igual a 1.0. Para resultados experimentales n escriba este requerimiento como

$$P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) = 1 \quad (4.4)$$

El **método clásico** de asignación de probabilidades es apropiado cuando todos los resultados experimentales tienen la misma posibilidad. Si existen n resultados experimentales, la probabilidad asignada a cada resultado experimental es $1/n$. Cuando emplee este método, satisfará en automático los dos requerimientos básicos de la asignación de probabilidades.

Por ejemplo, considere el experimento del lanzamiento de una moneda, los dos resultados experimentales —cruz o cara— tienen la misma posibilidad. Como uno de los dos resultados igualmente posibles es cara, la probabilidad de que caiga cara es $1/2$ o 0.50 . Asimismo, la probabilidad de que caiga cruz también es $1/2$ o 0.50 .

Otro ejemplo, considere el experimento de lanzar un dado. Es razonable pensar que los seis resultados que pueden presentarse son igualmente posibles y, por tanto, la probabilidad asignada a cada resultado es $1/6$. Si $P(1)$ denota la probabilidad de que la cara del dado que caiga hacia arriba sea la que tiene un punto, entonces $P(1) = 1/6$. De manera similar $P(2) = 1/6$, $P(3) = 1/6$, $P(4) = 1/6$, $P(5) = 1/6$ y $P(6) = 1/6$. Observe que dichas probabilidades satisfacen los dos requerimientos básicos de las ecuaciones (4.3) y (4.4), porque cada una es mayor o igual que cero y juntas suman 1.0.

El **método de frecuencia relativa** para la asignación de probabilidades es el más conveniente cuando existen datos para estimar la proporción de veces que se presentarán los resultados si el experimento se repite muchas veces. Considere, por ejemplo un estudio sobre los tiempos de espera en el departamento de rayos x de un hospital pequeño. Durante 20 días sucesivos un empleado registra el número de personas que están esperando el servicio a las 9:00 a.m.; los resultados son los siguientes.

Número de personas que esperan	Número de días: resultados de ocurrencia
0	2
1	5
2	6
3	4
4	3
Total	20

En estos datos aparece que 2 de los 20 días, había cero pacientes esperando el servicio, 5 días había un paciente en espera y así sucesivamente. Con el método de la frecuencia relativa, la probabilidad que se le asignará al resultado experimental cero pacientes esperan el servicio, será $2/20 = 0.10$; al resultado experimental un paciente espera el servicio, $5/20 = 0.25$; $6/20 = 0.30$ a dos pacientes esperan el servicio; $4/20 = 0.20$ a tres pacientes esperan el servicio y $3/20 = 0.15$ a cuatro pacientes esperan el servicio. Como sucede con el método clásico, al usar el método de frecuencia relativa se satisfacen en automático los dos requerimientos básicos correspondientes a las ecuaciones (4.3) y (4.4).

El **método subjetivo** de asignación de probabilidades es el más indicado cuando no es factible suponer que todos los resultados de un experimento sean igualmente posibles y, además, cuenta con pocos datos relevantes. El método subjetivo de asignación de probabilidades a los resultados de un experimento, usa toda la información disponible, por ejemplo, la propia experiencia o la intuición. Despues de considerar dicha información se asigna un valor de probabilidad que expresa el *grado de confianza* (en una escala de 0 a 1) que tiene acerca de que un resultado experimental ocurra. Como la probabilidad subjetiva expresa el grado de confianza que tiene un individuo, es personal. Cuando se usa el método de probabilidad subjetiva, es de esperarse que personas distintas asignen probabilidades diferentes a los mismos resultados de un experimento.

En el método subjetivo hay que tener cuidado de que se satisfagan los dos requerimientos básicos expresados en las ecuaciones (4.3) y (4.4). Sea cual sea el grado de confianza que tenga la persona, el valor de probabilidad asignado a cada resultado experimental debe estar entre 0 y 1, inclusive, y la suma de las probabilidades de todos los resultados experimentales debe ser 1.0.

Considere el caso en el que Tom y Judy Elsbernd hacen una oferta para la compra de una casa. Hay dos resultados posibles:

$$E_1 = \text{su oferta será aceptada}$$

$$E_2 = \text{su oferta no será aceptada}$$

El teorema de Bayes (véase sección 4.5) proporciona un medio para combinar la probabilidad a priori determinada subjetivamente con probabilidades obtenidas por otros medios para obtener probabilidades a posteriori o revisadas.

Judy cree que la probabilidad de que su oferta sea aceptada es 0.8; por tanto, Judy establece que $P(E_1) = 0.8$ y $P(E_2) = 0.2$; Tom, por su parte, cree que la probabilidad de que su oferta sea aceptada es 0.6; por tanto, Tom establecerá $P(E_1) = 0.6$ y $P(E_2) = 0.4$. Observe que la estimación de probabilidad de E_1 que hace Tom refleja bastante pesimismo de que su oferta sea aceptada.

Tanto Judy como Tom asignaron probabilidades que satisfacen los dos requerimientos básicos. El hecho de que sus probabilidades sean diferentes subraya la naturaleza personal del método subjetivo.

Incluso en situaciones de negocios en que es posible emplear el método clásico o el de las probabilidades relativas, los administradores suelen proporcionar estimaciones subjetivas de una probabilidad. En tales casos, la mejor estimación de una probabilidad suele obtenerse combinando las estimaciones del método clásico o del método de las frecuencias relativas con las estimaciones subjetivas de una probabilidad.

Probabilidades para el proyecto KP&L

Para continuar con el análisis del proyecto KP&L hay que hallar las probabilidades de los nueve resultados experimentales enumerados en la tabla 4.1. De acuerdo con la experiencia, los administrativos concluyen que los resultados experimentales no son todos igualmente posibles. Por tanto, no emplean el método clásico de asignación de probabilidades. Entonces deciden hacer un estudio sobre la duración de los proyectos similares realizados por KP&L en los últimos tres años. En la tabla 4.2 se resume el resultado de este estudio considerando 40 proyectos similares.

Después de analizar los resultados de este estudio, los administrativos deciden emplear el método de frecuencia relativa para asignar las probabilidades. Los administrativos podrían haber aportado probabilidades subjetivas, pero se dieron cuenta de que el proyecto actual era muy similar a los 40 proyectos anteriores. Así, consideraron que el método de frecuencia relativa sería el mejor.

Si emplea la tabla 4.2 para calcular las probabilidades, observará que el resultado (2, 6) —duración de la etapa 1, 2 meses, y duración de la etapa 2, 6 meses— se encuentra seis veces en los 40 proyectos. Con el método de las frecuencias relativas, la probabilidad signada a este resultado es $6/40 = 0.15$. También el resultado (2, 7) se encuentra seis veces en los 40 proyectos $6/40 = 0.15$. Continuando de esta manera, se obtienen, para los puntos muestrales del proyecto de KP&L, las asignaciones de probabilidad que se muestran en la tabla 4.3. Observe que $P(2, 6)$ representa la probabilidad del punto muestral (2, 6), $P(2, 7)$ representa la probabilidad del punto muestral (2, 7) y así sucesivamente.

TABLA 4.2 DURACIÓN DE 40 PROYECTOS DE KP&L

Duración (meses)			Número de proyectos que tuvieron esta duración
Etapa 1 Diseño	Etapa 2 Construcción	Punto muestral	
2	6	(2, 6)	6
2	7	(2, 7)	6
2	8	(2, 8)	2
3	6	(3, 6)	4
3	7	(3, 7)	8
3	8	(3, 8)	2
4	6	(4, 6)	2
4	7	(4, 7)	4
4	8	(4, 8)	6
Total			40

TABLA 4.3 ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES PARA EL PROYECTO KP&L,
EMPLEANDO EL MÉTODO DE LAS FRECUENCIAS RELATIVAS

Punto muestral	Tiempo de terminación del proyecto	Probabilidad del punto muestral
(2, 6)	8 meses	$P(2, 6) = 6/40 = 0.15$
(2, 7)	9 meses	$P(2, 7) = 6/40 = 0.15$
(2, 8)	10 meses	$P(2, 8) = 2/40 = 0.05$
(3, 6)	9 meses	$P(3, 6) = 4/40 = 0.10$
(3, 7)	10 meses	$P(3, 7) = 8/40 = 0.20$
(3, 8)	11 meses	$P(3, 8) = 2/40 = 0.05$
(4, 6)	10 meses	$P(4, 6) = 2/40 = 0.05$
(4, 7)	11 meses	$P(4, 7) = 4/40 = 0.10$
(4, 8)	12 meses	$P(4, 8) = 6/40 = 0.15$
		Total 1.00

NOTAS Y COMENTARIOS

- En estadística la noción de experimento difiere un poco del concepto de experimento de las ciencias físicas. En las ciencias físicas, los investigadores suelen realizar los experimentos en laboratorios o en ambientes controlados, con objeto de investigar causas y efectos. En los experimentos estadísticos, la probabilidad determina los resultados. Aun cuando un experimento se repita con exactitud, el resultado puede ser completamente diferente. Debido a

esta influencia que tiene la probabilidad sobre los resultados, a los experimentos en estadística también se les conoce como *experimentos aleatorios*.

- Cuando de una población de tamaño N se extrae una muestra aleatoria sin reemplazarla, se emplea la regla de conteo para combinaciones para calcular la cantidad de muestras de tamaño n que pueden seleccionarse.

Ejercicios

Métodos

- Un experimento consta de tres pasos; para el primer paso hay tres resultados posibles, para el segundo hay dos resultados posibles y para el tercer paso hay cuatro resultados posibles. ¿Cuántos resultados distintos hay para el experimento completo?
- ¿De cuántas maneras es posible seleccionar tres objetos de un conjunto de seis objetos? Use las letras A, B, C, D, E y F para identificar a los objetos y enumere todas las combinaciones diferentes de tres objetos.
- ¿Cuántas permutaciones de tres objetos se pueden seleccionar de un grupo de seis objetos? Use las letras A, B, C, D, E y F para identificar a los objetos y enumere cada una de las permutaciones factibles para los objetos B, D y F.
- Considere el experimento de lanzar una moneda tres veces.
 - Elabore un diagrama de árbol de este experimento.
 - Enumere los resultados del experimento.
 - ¿Cuál es la probabilidad que le corresponde a cada uno de los resultados?
- Suponga que un experimento tiene cinco resultados igualmente posibles: E_1, E_2, E_3, E_4 y E_5 . Asigne probabilidades a los resultados y muestre que satisfacen los requerimientos expresados por las ecuaciones (4.3) y (4.4). ¿Qué método empleó?
- Un experimento que tiene tres resultados es repetido 50 veces y se ve que E_1 aparece 20 veces, E_2 13 veces y E_3 17 veces. Asigne probabilidades a los resultados. ¿Qué método empleó?

7. La persona que toma las decisiones asigna las probabilidades siguientes a los cuatro resultados de un experimento: $P(E_1) = 0.10$, $P(E_2) = 0.15$, $P(E_3) = 0.40$ y $P(E_4) = 0.20$. ¿Son válidas estas asignaciones de probabilidades? Argumente.

Aplicaciones

8. En una ciudad las solicitudes de cambio de uso de suelo pasan por un proceso de dos pasos: una revisión por la comisión de planeación y la decisión final tomada por el consejo de la ciudad. En el paso 1 la comisión de planeación revisa la solicitud de cambio de uso de suelo y hace una recomendación positiva o negativa respecto al cambio. En el paso 2 el consejo de la ciudad revisa la recomendación hecha por la comisión de planeación y vota para aprobar o desaprobar el cambio de suelo. Suponga que una empresa dedicada a la construcción de complejos departamentales presenta una solicitud de cambio de uso de suelo. Considere el proceso de la solicitud como un experimento. ¿Cuántos puntos muestrales tiene este experimento? Enumérelos. Construya el diagrama de árbol del experimento.
9. El muestreo aleatorio simple usa una muestra de tamaño n tomada de una población de tamaño N para obtener datos para hacer inferencias acerca de las características de la población. Suponga que, de una población de 50 cuentas bancarias, desea tomar una muestra de cuatro cuentas con objeto de tener información acerca de la población. ¿Cuántas muestras diferentes de cuatro cuentas pueden obtener?
10. El capital de riesgo es una fuerte ayuda para los fondos disponibles de las empresas. De acuerdo con Venture Economics (*Investor's Business Daily*, 28 de abril de 2000) de 2374 desembolsos en capital de riesgo, 1434 son de empresas en California, 390 de empresas en Massachusetts, 217 de empresas en Nueva York y 112 de empresas en Colorado. Veintidós por ciento de las empresas que reciben fondos se encuentran en las etapas iniciales de desarrollo y 55% en la etapa de expansión. Suponga que desea tomar en forma aleatoria una de estas empresas para saber cómo son usados los fondos de capital de riesgo.
 - a. ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa que seleccione sea de California?
 - b. ¿De qué empresa no sea de ninguno de los estados citados?
 - c. ¿De qué empresa elegida no se encuentre en las etapas iniciales de desarrollo?
 - d. Si admite que las empresas en las etapas iniciales de desarrollo tuvieren una distribución homogénea en todo el país, ¿cuántas empresas de Massachusetts que reciben fondos de capital de riesgo se encuentran en las etapas iniciales de desarrollo?
 - e. La cantidad total de fondos invertidos es \$32.4 mil millones. Estime la cantidad destinada a Colorado.
11. La National Highway Traffic Safety Administration (NHTSA) realizó una investigación para saber si los conductores de Estados Unidos están usando sus cinturones de seguridad (Associated Press, 25 de agosto de 2003). Los datos muestrales fueron los siguientes.

Conductores que emplean el cinturón		
Región	Sí	No
Noreste	148	52
Oeste medio	162	54
Sur	296	74
Oeste	252	48
Total	858	228

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que en Estados Unidos un conductor lleve puesto el cinturón?
- b. Un año antes, la probabilidad en Estados Unidos de que un conductor llevara puesto el cinturón era 0.75. El director de NHTSA, doctor Jeffrey Runge esperaba que en 2003 la probabilidad llegara a 0.78. ¿Estará satisfecho con los resultados del estudio del 2003?

Autoexamen

Autoexamen

- c. ¿Cuál es la probabilidad de que se use el cinturón en las distintas regiones del país? ¿En qué región se usa más el cinturón?
 - d. En la muestra, ¿qué proporción de los conductores provenía de cada región del país? ¿En qué región se seleccionaron más conductores? ¿Qué región viene en segundo lugar?
 - e. Si admite que en todas las regiones la cantidad de conductores es la misma, ¿ve usted alguna razón para que la probabilidad estimada en el inciso a sea tan alta? Explique.
12. En Estados Unidos hay una lotería que se juega dos veces por semana en 28 estados, en las Islas Vírgenes y en el Distrito de Columbia. Para jugar, debe comprar un billete y seleccionar cinco números del 1 al 55 y un número del 1 al 42. Para determinar al ganador se sacan 5 bolas blancas entre 55 bolas blancas y una bola roja entre 42 bolas rojas. Quien atine a los cinco números de bolas blancas y al número de la bola roja es el ganador. Ocho trabajadores de una empresa tienen el récord del mayor premio, ganaron \$365 millones al atinarle a los números 15-17-43-44-49 de las bolas blancas y al 29 de las bolas rojas. En cada juego hay también otros premios. Por ejemplo, quien atina a los cinco números de las bolas blancas se lleva un premio de \$200 000 (www.powerball.com, 19 de marzo de 2006).
- a. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar los primeros cinco números?
 - b. ¿Cuál es la probabilidad de ganar los \$200 000 atinándole a los cinco números de bolas blancas?
 - c. ¿Cuál es la probabilidad de atinarle a todos los números y ganar el premio mayor?
13. Una empresa que produce pasta de dientes está analizando el diseño de cinco empaques diferentes. Suponiendo que existe la misma posibilidad de que los clientes elijan cualquiera de los empaques, ¿cuál es la probabilidad de selección que se le asignaría a cada diseño de empaque? En un estudio, se pidió a 100 consumidores que escogieran el diseño que más les gustara. Los resultados se muestran en la tabla siguiente. ¿Confirmán estos datos la creencia de que existe la misma posibilidad de que los clientes elijan cualquiera de los empaques? Explique

Diseño	Número de veces que fue elegido
1	5
2	15
3	30
4	40
5	10

4.2

Eventos y sus probabilidades

En la introducción de este capítulo el término *evento* fue aplicado tal como se usa en el lenguaje cotidiano. Después, en la sección 4.1 se presentó el concepto de experimento y de los correspondientes resultados experimentales o puntos muestrales. Puntos muestrales y eventos son la base para el estudio de la probabilidad. Por tanto, ahora se le presenta la definición formal de **evento** como se emplea en relación con los puntos muestrales. Con esto se tiene la base para poder dar probabilidades de eventos.

EVENTO

Un evento es una colección de puntos muestrales.

Para dar un ejemplo recuerde el proyecto de KP&L. Considere que al encargado del proyecto le interesa conocer la probabilidad de terminar el proyecto en 10 meses o menos. En la tabla 4.3 aparecen los puntos muestrales $(2, 6), (2, 7), (2, 8), (3, 6), (3, 7), (4, 6)$ correspondientes a una duración del proyecto de 10 meses o menos. C denota el evento de que el proyecto dura 10 meses o menos:

$$C = \{(2, 6), (2, 7), (2, 8), (3, 6), (3, 7), (4, 6)\}$$

Si cualquiera de estos puntos muestrales es el resultado experimental, entonces ocurre el evento C .

Otros eventos de posible interés para el administrador del proyecto KP&L son los siguientes:

L = El evento de que el proyecto esté acabado en *menos* de 10 meses

M = El evento de que el proyecto esté acabado en *más* de 10 meses

De acuerdo con la tabla 4.3 dichos eventos consisten de los siguientes puntos muestrales

$$L = \{(2, 6), (2, 7), (3, 6)\}$$

$$M = \{(3, 8), (4, 7), (4, 8)\}$$

Para el proyecto KP&L existen otros muchos eventos, pero todos serán una colección de puntos muestrales del experimento.

Dadas las probabilidades de los puntos muestrales que se presentan en la tabla 4.3, para calcular la probabilidad de cualquier evento que interese al administrador del proyecto KP&L, se emplea la definición siguiente.

PROBABILIDAD DE UN EVENTO

La probabilidad de cualquier evento es igual a la suma de las probabilidades de los puntos muestrales que forman el evento.

De acuerdo con esta definición, la probabilidad de un determinado evento se calcula sumando las probabilidades de los puntos muestrales (resultados experimentales) que forman el evento. Ahora es posible calcular la probabilidad de que el proyecto dure 10 meses o menos. Como este evento está dado por $C = \{(2, 6), (2, 7), (2, 8), (3, 6), (3, 7), (4, 6)\}$, la probabilidad del evento C denotada por $P(C)$ está dada por

$$P(C) = P(2, 6) + P(2, 7) + P(2, 8) + P(3, 6) + P(3, 7) + P(4, 6)$$

Al consultar las probabilidades de los puntos muestrales de la tabla 4.3, se tiene

$$P(C) = 0.15 + 0.15 + 0.05 + 0.10 + 0.20 + 0.05 = 0.70$$

Así, como el evento de que el proyecto dure menos de 10 meses está dado por $L = \{(2, 6), (2, 7), (3, 6)\}$, la probabilidad de este evento será

$$\begin{aligned} P(L) &= P(2, 6) + P(2, 7) + P(3, 6) \\ &= 0.15 + 0.15 + 0.10 = 0.40 \end{aligned}$$

Por último, el evento de que el proyecto dure más de 10 meses está dado por $M = \{(3, 8), (4, 7), (4, 8)\}$ y por tanto

$$\begin{aligned} P(M) &= P(3, 8) + P(4, 7) + P(4, 8) \\ &= 0.05 + 0.10 + 0.15 = 0.30 \end{aligned}$$

Con estas probabilidades, ahora puede informarle al administrador del proyecto KP&L las probabilidades siguientes: que el proyecto dure 10 meses o menos es 0.70; que dure menos de 10 meses es 0.40 y que dure más de 10 meses es 0.30. Este procedimiento para calcular las probabilidades de los eventos aplica para cualquier evento que interese al administrador del proyecto KP&L.

Siempre que se puedan identificar todos los puntos muestrales de un experimento y asignar a cada uno su probabilidad, es factible calcular la probabilidad de un evento usando la definición. Sin embargo, en muchos experimentos la gran cantidad de puntos muestrales hace en extremo difícil, si no imposible, la determinación de los puntos muestrales, así como la asignación de sus probabilidades correspondientes. En las secciones restantes de este capítulo se presentan algunas relaciones básicas de probabilidad útiles para calcular la probabilidad de un evento, sin necesidad de conocer las probabilidades de todos los puntos muestrales.

NOTAS Y COMENTARIOS

1. El espacio muestral S es un evento. Puesto que contiene todos los resultados experimentales, su probabilidad es 1; es decir $P(S) = 1$.
2. Cuando se usa el método clásico para asignar probabilidades, se parte de que todos los resultados experimentales son igualmente posibles.

En tales casos la probabilidad de un evento es calculable contando el número de resultados experimentales que hay en el evento y dividiendo el resultado entre el número total de resultados experimentales.

Ejercicios

Métodos

14. Para un experimento hay cuatro resultados que son igualmente posibles: E_1 , E_2 , E_3 y E_4 .
 - a. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra E_2 ?
 - b. ¿De que ocurra cualquiera de dos resultados (por ejemplo, E_1 o E_2)?
 - c. ¿De que ocurran tres de estos resultados (E_1 o E_2 o E_4)?
15. Considere el experimento de seleccionar un naipe de una baraja con 52 naipes. Cada naipe es un punto muestral y su probabilidad es 1/52.
 - a. Enumere los puntos muestrales del evento si selecciona un as.
 - b. Enumere los puntos muestrales del evento si selecciona un trébol.
 - c. Enumere los puntos muestrales del evento si selecciona una figura (sota, rey o reina).
 - d. Halle la probabilidad correspondiente a cada uno de los eventos de los incisos a, b y c.
16. Considere el experimento que consiste en lanzar un par de dados. Suponga que lo relevante es la suma de los puntos en las dos caras que caen hacia arriba.
 - a. ¿Cuántos puntos muestrales habrá? (Sugerencia: Use la regla de conteo para experimentos de pasos múltiples.)
 - b. Enumere los puntos muestrales.
 - c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 7?
 - d. ¿De obtener un 9 o un número mayor?
 - e. Como en cada lanzamiento son factibles seis valores pares (2, 4, 6, 8, 10, y 12) y sólo cinco impares (3, 5, 7, 9 y 11), se tendrán más veces resultados pares que impares. ¿Está de acuerdo? Explique
 - f. ¿Qué método usó para calcular las probabilidades pedidas?

Autoexamen**Aplicaciones**

17. Consulte las tablas 4.2 y 4.3 que muestran los puntos muestrales del proyecto KP&L y sus probabilidades.
- La etapa del diseño (etapa 1) saldrá del presupuesto si su duración es mayor a 4 meses. Liste los puntos muestrales del evento si la etapa del diseño sale del presupuesto.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que la etapa del diseño salga del presupuesto?
 - La etapa de la construcción (etapa 2) saldrá del presupuesto si su duración es mayor a 8 meses. Enumere los puntos muestrales del evento si la etapa de construcción sale del presupuesto.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que la etapa de construcción salga del presupuesto?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que las dos etapas salgan del presupuesto?
18. Suponga que el administrador de un complejo grande de departamentos proporciona la siguiente estimación de probabilidades subjetivas acerca del número de departamentos libres que habrá el mes próximo.

Departamentos libres	Probabilidad
0	0.05
1	0.15
2	0.35
3	0.25
4	0.10
5	0.10

Dé la probabilidad de cada uno de los eventos siguientes.

- No haya departamentos libres.
 - Haya por lo menos 4 departamentos libres.
 - Haya 2 o menos departamentos libres.
19. Una asociación deportiva realiza un sondeo entre las personas mayores a 6 años respecto de su participación en actividades deportivas. (*Statistical Abstract of the United States: 2002*). El total de la población de estas edades fue 248.5 millones, de los cuales 120.9 millones eran hombres y 127.6 millones mujeres. A continuación se presenta el número de participantes en los cinco deportes principales.

Actividad	Participantes (en millones)	
	Hombres	Mujeres
Andar en bicicleta	22.2	21.0
Acampar	25.6	24.3
Caminar	28.7	57.7
Hacer ejercicio con aparatos	20.4	24.4
Nadar	26.4	34.4

- Estime la probabilidad de que una mujer, elegida al azar, participe en cada una de estas actividades deportivas.
- Estime la probabilidad de que un hombre, elegido en forma aleatoria, participe en cada una de estas actividades deportivas.
- Estime la probabilidad de que una persona, elegida en forma aleatoria, haga ejercicio caminando.
- Suponga que acaba de ver una persona que pasa caminando para hacer ejercicio. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?, ¿de que sea hombre?

20. La revista *Fortune* publica anualmente una lista de las 500 empresas más grandes de Estados Unidos. A continuación se presentan los cinco estados en los que hay más de estas 500 empresas de *Fortune*.

Estado	Número de empresas
Nueva York	54
California	52
Texas	48
Illinois	33
Ohio	30

- Suponga que se elige una de las 500 empresas de *Fortune*. ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de los eventos siguientes?
- Sea N el evento: la empresa se encuentra en Nueva York. Halle $P(N)$.
 - Sea T el evento: la empresa se encuentra en Texas. Halle $P(T)$.
 - Sea B el evento: la empresa se encuentra en uno de estos cinco estados. Halle $P(B)$.
21. En la tabla siguiente se dan las edades de la población de Estados Unidos (*The World Almanac 2004*). Los datos aparecen en millones de personas.

Edad	Cantidad
19 y menos	80.5
20 a 24	19.0
25 a 34	39.9
35 a 44	45.2
45 a 54	37.7
55 a 64	24.3
65 y más	35.0

Suponga una selección aleatoria de una persona de esta población.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la persona tenga entre 20 y 24 años?
- ¿De qué la persona tenga entre 20 y 34 años?
- ¿De que tenga 45 años o más?

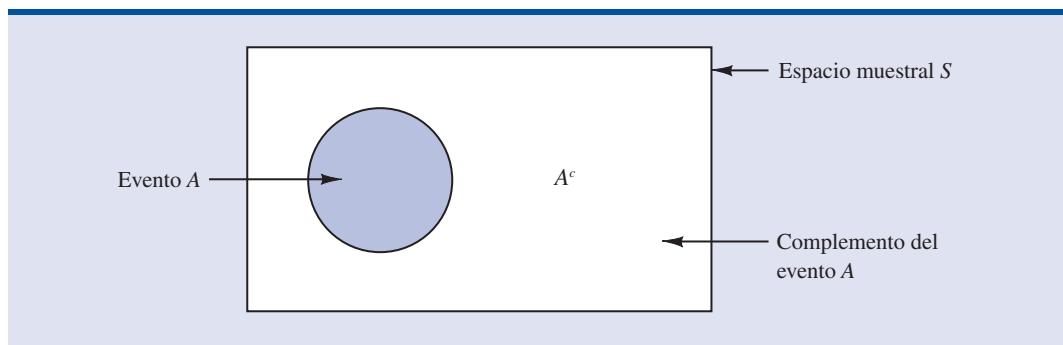
4.3 Algunas relaciones básicas de probabilidad

Complemento de un evento

Dado un evento A , el **complemento de A** se define como el evento que consta de todos los puntos muestrales que *no* están en A . El complemento de A se denota A^c . Al diagrama de la figura 4.4 se le llama **diagrama de Venn** e ilustra el concepto del complemento. El área rectangular representa el espacio muestral del experimento y, por tanto, contiene todos los puntos muestrales. El círculo representa el evento A y encierra sólo los puntos muestrales que pertenecen a A . La región del rectángulo que aparece sombreada incluye todos los puntos muestrales que no están en el evento A y es, por definición, el complemento de A .

En cualquier aplicación de la probabilidad ocurre un evento A o su complemento A^c . Por tanto,

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

FIGURA 4.4 EL COMPLEMENTO DEL EVENTO A ES EL ÁREA QUE APARECE SOMBREADA

Despejando $P(A)$, obtiene lo siguiente.

CÁLCULO DE UNA PROBABILIDAD USANDO EL COMPLEMENTO

$$P(A) = 1 - P(A^c) \quad (4.5)$$

La ecuación (4.5) indica que la probabilidad de un evento A se puede calcular si se conoce la probabilidad de su complemento, $P(A^c)$.

Por ejemplo, considere el caso de un administrador de ventas que, después de revisar los informes de ventas, encuentra que 80% de los contactos con clientes nuevos no producen ninguna venta. Si A denota el evento hubo venta y A^c el evento no hubo venta, el administrador tiene que $P(A^c) = 0.80$. Mediante la ecuación (4.5) se ve que

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.80 = 0.20$$

La conclusión es que la probabilidad de una venta en el contacto con un cliente nuevo es 0.20.

Otro ejemplo, un gerente de compras encuentra que la probabilidad de que el proveedor surta un pedido sin piezas defectuosas es 0.90, empleando el complemento podemos concluir que la probabilidad de que el pedido contenga piezas defectuosas es de $1 - 0.90 = 0.10$.

Ley de la adición

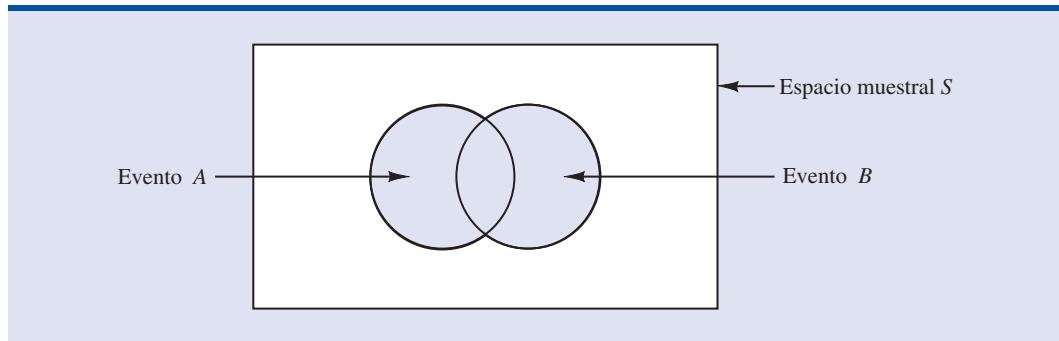
La ley de la adición sirve para determinar la probabilidad de que ocurra por lo menos uno de dos eventos. Es decir, si A y B son eventos, nos interesa hallar la probabilidad de que ocurra el evento A o el B o ambos.

Antes de presentar la ley de la adición es necesario ver dos conceptos relacionados con la combinación de eventos: la *unión* y la *intersección* de eventos. Dados dos eventos, A y B , la **unión de A y B** se define.

UNIÓN DE DOS EVENTOS

La unión de A y B es el evento que contiene todos los puntos muestrales que pertenecen a A o a B o a ambos. La unión se denota $A \cup B$.

El diagrama de Venn de la figura 4.5 representa la unión de los eventos A y B . Observe que en los dos círculos están contenidos todos los puntos muestrales del evento A y todos los puntos

FIGURA 4.5 LA UNIÓN DE LOS EVENTOS A Y B APARECE SOMBREADA

muestrales del evento B . El que los círculos se traslapen indica que algunos puntos muestrales están contenidos tanto en A como en B .

A continuación la definición de la **intersección de A y B** :

INTERSECCIÓN DE DOS EVENTOS

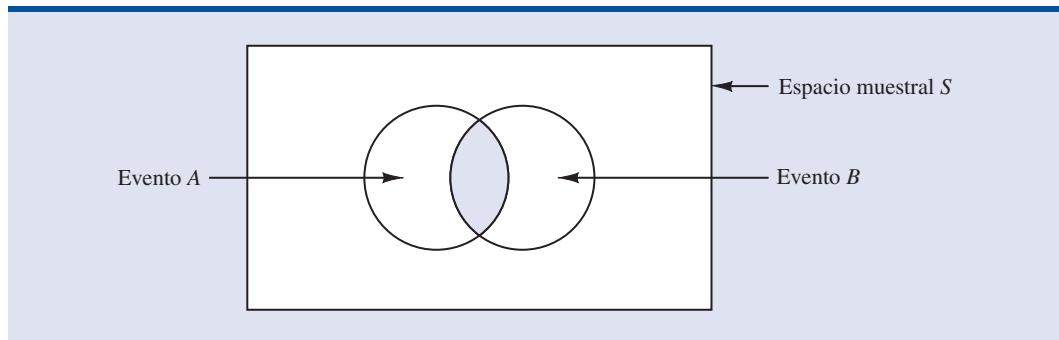
Dados dos eventos A y B , la intersección de A y B es el evento que contiene los puntos muestrales que pertenecen tanto a A como a B .

El diagrama de Venn ilustra la intersección de los eventos A y B mostrados en la figura 4.6. El área donde los círculos se sobreponen es la intersección que contiene una muestra de los puntos que están tanto en A como en B .

Ahora ya puede continuar con la ley de la adición. La **ley de la adición** proporciona una manera de calcular la probabilidad de que ocurra el evento A o el evento B o ambos. En otras palabras, la ley de la adición se emplea para calcular la probabilidad de la unión de los dos eventos. La ley de la adición se expresa.

LEY DE LA ADICIÓN

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (4.6)$$

FIGURA 4.6 LA INTERSECCIÓN DE LOS EVENTOS A Y B APARECE SOMBREADA

Para que logre un entendimiento intuitivo de la ley de la adición, observe que en la ley de la adición, los dos primeros términos $P(A) + P(B)$, corresponden a los puntos muestrales en $A \cup B$. Pero, como los puntos muestrales que se encuentran en la intersección $A \cap B$ están tanto en A como en B , cuando se calcula $P(A) + P(B)$, los puntos que se encuentran en $A \cap B$ cuentan dos veces. Esto se corrige restando $P(A \cap B)$.

Para ver un ejemplo de la aplicación de la ley de la adición, considere el caso de una pequeña empresa de ensamble en la que hay 50 empleados. Se espera que todos los trabajadores terminen su trabajo a tiempo y que pase la inspección final. A veces, alguno de los empleados no satisface el estándar de desempeño, ya sea porque no termina a tiempo su trabajo o porque no ensambla bien una pieza. Al final del periodo de evaluación del desempeño, el jefe de producción encuentra que 5 de los 50 trabajadores no terminaron su trabajo a tiempo, 6 de los 50 trabajadores ensamblaron mal una pieza y 2 de los 50 trabajadores no terminaron su trabajo a tiempo y armaron mal una pieza.

Sea

$$L = \text{el evento no se terminó el trabajo a tiempo}$$

$$D = \text{el evento se armó mal la pieza}$$

La información de las frecuencias relativas lleva a las probabilidades siguientes.

$$P(L) = \frac{5}{50} = 0.10$$

$$P(D) = \frac{6}{50} = 0.12$$

$$P(L \cap D) = \frac{2}{50} = 0.04$$

Después de analizar los datos del desempeño, el jefe de producción decide dar una calificación baja al desempeño de los trabajadores que no terminaron a tiempo su trabajo o que armaron mal alguna pieza; por tanto, el evento de interés es $L \cup D$. ¿Cuál es la probabilidad de que el jefe de producción dé a un trabajador una calificación baja de desempeño?

Observe que esta pregunta sobre probabilidad se refiere a la unión de dos eventos. En concreto, se desea hallar $P(L \cup D)$, usando la ecuación (4.6) se tiene

$$P(L \cup D) = P(L) + P(D) - P(L \cap D)$$

Como conoce las tres probabilidades del lado derecho de esta expresión, se tiene

$$P(L \cup D) = 0.10 + 0.12 - 0.04 = 0.18$$

Estos cálculos indican que la probabilidad de que un empleado elegido al azar obtenga una calificación baja por su desempeño es 0.18

Para ver otro ejemplo de la ley de la adición, considere un estudio reciente efectuado por el director de personal de una empresa importante de software. En el estudio encontró que 30% de los empleados que se van de la empresa antes de dos años, lo hacen por estar insatisfechos con el salario, 20% se van de la empresa por estar descontentos con el trabajo y 12% por estar insatisfechos con las *dos* cosas, el salario y el trabajo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado

que se vaya de la empresa en menos de dos años lo haga por estar insatisfecho con el salario, con el trabajo o con las dos cosas?

Sea

S = el evento el empleado se va de la empresa por insatisfacción con el salario

W = el evento el empleado se va de la empresa por insatisfacción con el trabajo

Se tiene $P(S) = 0.30$, $P(W) = 0.20$ y $P(S \cap W) = 0.12$. Al aplicar la ecuación (4.6), de la ley de la adición, se tiene

$$P(S \cup W) = P(S) + P(W) - P(S \cap W) = 0.30 + 0.20 - 0.12 = 0.38.$$

Así, la probabilidad de que un empleado se vaya de la empresa por el salario o por el trabajo es 0.38.

Antes de concluir el estudio de la ley de la adición se considerará un caso especial que surge cuando los **eventos son mutuamente excluyentes**.

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

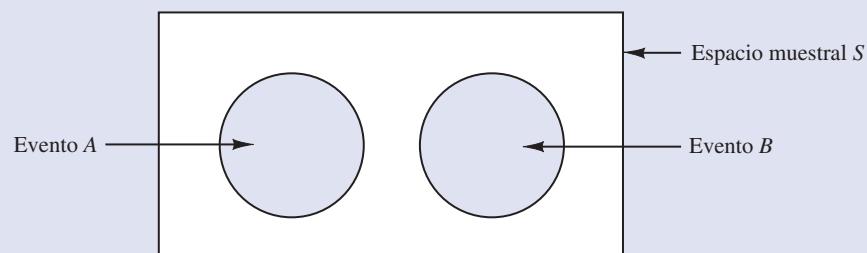
Se dice que dos eventos son mutuamente excluyentes si no tienen puntos muestrales en común.

Los eventos A y B son mutuamente excluyentes si, cuando un evento ocurre, el otro no puede ocurrir. Por tanto, para que A y B sean mutuamente excluyentes, se requiere que su intersección no contenga ningún punto muestral. En la figura 4.7 aparece el diagrama de Venn que representa dos eventos, A y B , mutuamente excluyentes. En este caso $P(A \cap B) = 0$ y la ley de la adición se expresa como sigue:

LEY DE LA ADICIÓN PARA EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

FIGURA 4.7 EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES



Ejercicios

Métodos

22. Suponga que tiene un espacio muestral con cinco resultados experimentales que son igualmente posibles: E_1, E_2, E_3, E_4 y E_5 . Sean

$$\begin{aligned}A &= \{E_1, E_2\} \\B &= \{E_3, E_4\} \\C &= \{E_2, E_3, E_5\}\end{aligned}$$

- a. Halle $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$.
 - b. Calcule $P(A \cup B)$. ¿ A y B son mutuamente excluyentes?
 - c. Estime A^c , C^c , $P(A^c)$ y $P(C^c)$.
 - d. Halle $A \cup B^c$ y $P(A \cup B^c)$.
 - e. Halle $P(B \cup C)$.
23. Suponga que se tiene el espacio muestral $S = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7\}$, donde E_1, E_2, \dots, E_7 denotan puntos muestrales. La asignación de probabilidades es la siguiente: $P(E_1) = 0.05$, $P(E_2) = 0.20$, $P(E_3) = 0.20$, $P(E_4) = 0.25$, $P(E_5) = 0.15$, $P(E_6) = 0.10$ y $P(E_7) = 0.05$. Sea

$$\begin{aligned}A &= \{E_1, E_4, E_6\} \\B &= \{E_2, E_4, E_7\} \\C &= \{E_2, E_3, E_5, E_7\}\end{aligned}$$

- a. Halle $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$.
- b. Encuentre $A \cup B$ y $P(A \cup B)$.
- c. Halle $A \cap B$ y $P(A \cap B)$.
- d. ¿Los eventos A y B son mutuamente excluyentes?
- e. Halle B^c y $P(B^c)$



Aplicaciones

24. Las autoridades de Clarkson University realizaron un sondeo entre sus alumnos para conocer su opinión acerca de su universidad. Una pregunta fue si la universidad no satisface sus expectativas, si las satisface o si supera sus expectativas. Encontraron que 4% de los interrogados no dieron una respuesta, 26% respondieron que la universidad no llenaba sus expectativas y 56% indicó que la universidad superaba sus expectativas.
- a. Si toma un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que diga que la universidad supera sus expectativas?
 - b. Si toma un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que diga que la universidad satisface o supera sus expectativas?
25. La Oficina de Censos de Estados Unidos cuenta con datos sobre la cantidad de adultos jóvenes, entre 18 y 24 años, que viven en casa de sus padres.* Sea

M = el evento adulto joven que vive en casa de sus padres

F = el evento adulta joven que vive en casa de sus padres

Si toma al azar un adulto joven y una adulta joven, los datos de dicha oficina permiten concluir que $P(M) = 0.56$ y $P(F) = 0.42$ (*The World Almanac*, 2006). La probabilidad de que ambos vivan en casa de sus padres es 0.24.

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de dos adultos jóvenes seleccionados viva en casa de sus padres?
- b. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos adultos jóvenes seleccionados vivan en casa de sus padres?

*En estos datos se incluye a los adultos jóvenes solteros que viven en los internados de las universidades, porque es de suponer que estos adultos jóvenes vuelven a las casas de sus padres en las vacaciones.

26. Datos sobre las 30 principales acciones y fondos balanceados proporcionan los rendimientos porcentuales anuales y a 5 años para el periodo que termina el 31 de marzo de 2000 (*The Wall Street Journal*, 10 de abril de 2000). Suponga que considera altos un rendimiento anual arriba de 50% y un rendimiento a cinco años arriba de 300%. Nueve de los fondos tienen un rendimiento anual arriba de 50%, siete de los fondos a cinco años lo tienen arriba de 300% y cinco de los fondos tienen tanto un rendimiento anual arriba de 50% como un rendimiento a cinco años arriba de 300%.
- ¿Cuál es la probabilidad de un rendimiento anual alto y cuál es la probabilidad de un rendimiento a cinco años alto?
 - ¿Cuál es la probabilidad de ambos, un rendimiento anual alto y un rendimiento a cinco años alto?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que no haya un rendimiento anual alto ni un rendimiento a cinco años alto?
27. En una encuesta en la pretemporada de futbol americano de la NCAA 2001 se preguntó: “¿Este año habrá un equipo del Big Ten o del Pac-10 en el juego del Rose Bowl?” De los 13 429 interrogados, 2961 dijeron que habría uno del Big Ten, 4494 señalaron que habría uno del Pac-10 y 6823 expresaron que ni el Big Ten ni el Pac-10 tendría un equipo en el Rose Bowl (www.yahoo.com, 30 de agosto de 2001).
- ¿Cuál es la probabilidad de que el interrogado responda que ni el Big Ten ni el Pac-10 tendrán un equipo en el Rose Bowl?
 - ¿De que afirme que el Big Ten o el Pac-10 tendrán un equipo en el campeonato Rose Bowl?
 - Halle la probabilidad de que la respuesta sea que tanto el Big Ten como el Pac-10 tendrán un equipo en el Rose Bowl.
28. En una encuesta aplicada a los suscriptores de una revista se encontró que en los últimos 12 meses 45.8% habían rentado un automóvil por razones de trabajo, 54% por razones personales y 30% por razones de trabajo y personales.
- ¿Cuál es la probabilidad de que un suscriptor haya rentado un automóvil en los últimos 12 meses por razones de trabajo o por razones personales?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que un suscriptor no haya rentado un automóvil en los últimos 12 meses ni por razones de trabajo ni por razones personales?
29. En Estados Unidos cada año hay más estudiantes con buenas calificaciones que desean inscribirse a las mejores universidades del país. Como el número de lugares permanece relativamente estable, algunas universidades rechazan solicitudes de admisión anticipadas. La universidad de Pensilvania recibió 2851 solicitudes para admisión anticipada. De éstas admitió a 1033 estudiantes, rechazó definitivamente a 854 estudiantes y dejó a 964 para el plazo de admisión normal. Esta universidad admitió a cerca de 18% de los solicitantes en el plazo normal para hacer un total (número de admisiones anticipadas más número de admisiones normales) de 2375 estudiantes (*USA Today* 24 de enero de 2001). Sean los eventos: E , un estudiante que solicita admisión anticipada es admitido; R rechazado definitivamente y D dejado para el plazo normal de admisión, sea A el evento de que un estudiante es admitido en el plazo normal.
- Use los datos para estimar $P(E)$, $P(R)$ y $P(D)$.
 - ¿Son mutuamente excluyentes los eventos E y D ? Halle $P(E \cap D)$.
 - De los 2375 estudiantes admitidos en esta universidad, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante tomado en forma aleatoria haya tenido una admisión anticipada?
 - Suponga que un estudiante solicita admisión anticipada en esta universidad. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante tenga una admisión anticipada o en el periodo normal de admisión?



4.4

Probabilidad condicional

Con frecuencia, en la probabilidad de un evento influye el hecho de que un evento relacionado con él ya haya ocurrido. Suponga que tiene un evento A cuya probabilidad es $P(A)$. Si obtiene información nueva y sabe que un evento relacionado con él, denotado por B , ya ha ocurrido, de-

seará aprovechar esta información y volver a calcular la probabilidad del evento A . A esta nueva probabilidad del evento A se le conoce como **probabilidad condicional** y se expresa $P(A | B)$. La notación $|$ indica que se está considerando la probabilidad del evento A *dada* la condición de que el evento B ha ocurrido. Por tanto, la notación $P(A | B)$ se lee “la probabilidad de A dado B ”.

Como ejemplo de la probabilidad condicional, considere el caso de las promociones de los agentes de policía de una determinada ciudad. La fuerza policiaca consta de 1200 agentes, 960 hombres y 240 mujeres. De éstos, en los últimos dos años, fueron promovidos 340. En la tabla 4.4 se muestra cómo quedaron repartidas estas promociones entre los hombres y mujeres.

Después de analizar el registro de las promociones, un comité femenil protestó, ya que habían sido promovidos 288 agentes hombres, frente a sólo 36 mujeres. Los directivos de la fuerza policiaca argumentaron que el número de mujeres promovidas no se debía a una discriminación, sino a que el número de mujeres que son agentes de policía es una cantidad pequeña. Ahora verá cómo emplear la probabilidad condicional para analizar esta acusación de discriminación.

Sean

M = el evento que un agente de policía sea hombre

W = el evento que un agente de policía sea mujer

A = el evento que un agente de policía sea promovido

A^c = el evento que un agente de policía no sea promovido

Dividir los valores de los datos de la tabla 4.4 entre el total de agentes de policía, 1200, permite concretar la información que se tiene en las probabilidades siguientes.

$P(M \cap A) = 288/1200 = 0.24$ = probabilidad de que un agente de policía, escogido en forma aleatoria, sea hombre y haya sido promovido

$P(M \cap A^c) = 672/1200 = 0.56$ = probabilidad de que un agente de policía, escogido en forma aleatoria, sea hombre y no haya sido promovido

$P(W \cap A) = 36/1200 = 0.03$ = probabilidad de que un agente de policía, escogido en forma aleatoria, sea mujer y haya sido promovido

$P(W \cap A^c) = 204/1200 = 0.17$ = probabilidad de que un agente de policía, escogido en forma aleatoria, sea mujer y no haya sido promovido

Como cada uno de estos valores da la probabilidad de la intersección de dos eventos, se les llama **probabilidades conjuntas**. A la tabla 4.5, que proporciona la información de las probabilidades de promoción de los agentes de policía, se le conoce como *tabla de probabilidades conjuntas*.

Las cantidades que aparecen en los márgenes de una tabla de las probabilidades conjuntas son las probabilidades de cada uno de los eventos por separado. Es decir, $P(M) = 0.80$, $P(W) =$

TABLA 4.4 PROMOCIONES, EN LOS ÚLTIMOS DOS AÑOS, DE LOS AGENTES DE POLICÍA

	Hombre	Mujer	Total
Promovido	288	36	324
No promovido	672	204	876
Total	960	240	1200

TABLA 4.5 TABLA DE PROBABILIDAD CONJUNTA PARA LAS PROMOCIONES

		Hombre (<i>M</i>)	Mujer (<i>W</i>)	Total
Promovido (<i>A</i>)	0.24	0.03	0.27	
No promovido (<i>A</i> ^c)	0.56	0.17	0.73	
Total	0.80	0.20	1.00	

Las probabilidades conjuntas aparecen en el cuerpo de la tabla.

Las probabilidades marginales aparecen en los márgenes de la tabla.

0.20, $P(A) = 0.27$, $P(A^c) = 0.73$. A estas probabilidades se les conoce como **probabilidades marginales** por encontrarse en los márgenes de una tabla de probabilidad conjunta.

Observe que las probabilidades marginales se obtienen al sumar las probabilidades conjuntas del renglón o columna correspondiente de la tabla de probabilidades conjuntas. Por ejemplo, la probabilidad marginal de ser promovido es $P(A) = P(M \cap A) + P(W \cap A) = 0.24 + 0.03 = 0.27$. En las probabilidades marginales se observa que 80% de la fuerza policiaca está formada por hombres y 20% por mujeres, que 27% de los agentes de policía fueron promovidos y 73% no fueron promovidos.

Ahora empiece con el análisis de la probabilidad condicional calculando la probabilidad de que un agente de policía sea promovido dado que ese agente sea hombre. Emplee la notación para probabilidad condicional para determinar $P(A | M)$. Para calcular $P(A | M)$ se observa, primero, que esta notación sólo significa que se considera la probabilidad del evento *A* (promoción) ya que la condición designada como evento *M* (que el agente de policía sea hombre) está dada. Así que $P(A | M)$ indica que sólo interesan los promovidos dentro de los 960 agentes de policía que son hombres. Como 288 de los 960 agentes de policía que son hombres fueron promovidos, la probabilidad de ser promovido dado que se es un agente hombre es $288/960 = 0.30$. En otras palabras, puesto que un agente de policía es hombre, ese agente tuvo 30% de probabilidades de ser promovido en los dos últimos años.

Resultó fácil aplicar este procedimiento, ya que en la tabla 4.4 se muestra el número de agentes de policía en cada categoría. Ahora es interesante mostrar cómo calcular probabilidades condicionales, como $P(A | M)$, a partir de las probabilidades de eventos relacionados y no a partir de los datos de frecuencias de la tabla 4.4.

Entonces, $P(A | M) = 288/960 = 0.30$. Ahora, tanto el numerador como el denominador de esta fracción se dividen entre 1200, cantidad total de agentes de policía en el estudio.

$$P(A | M) = \frac{288}{960} = \frac{288/1200}{960/1200} = \frac{0.24}{0.80} = 0.30$$

Observe que la probabilidad condicional se obtiene de 0.24/0.80. Regrese a la tabla de probabilidad conjunta (tabla 4.5) y observe que 0.24 es la probabilidad conjunta de *A* y *M*; es decir, $P(A \cap M) = 0.24$; también que 0.80 es la probabilidad marginal de que un agente de la policía seleccionado aleatoriamente sea hombre. Es decir, $P(M) = 0.80$. Por tanto, la probabilidad condicional $P(A | M)$ se calcula como la razón entre $P(A \cap M)$ y la probabilidad marginal $P(M)$.

$$P(A | M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{0.24}{0.80} = 0.30$$

El hecho de que la probabilidad condicional se pueda calcular como la razón entre una probabilidad conjunta respecto a una probabilidad marginal proporciona la siguiente fórmula para el cálculo de la probabilidad condicional de dos eventos A y B .

PROBABILIDAD CONDICIONAL

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (4.7)$$

o

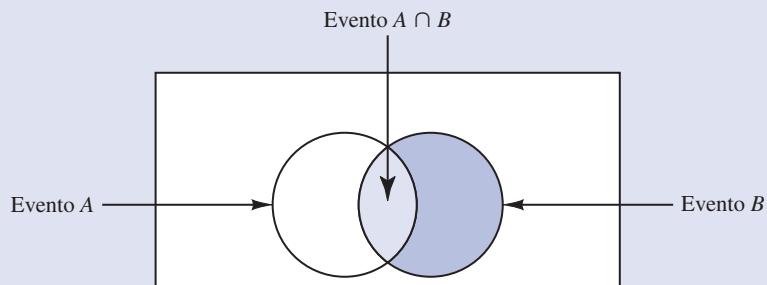
$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (4.8)$$

El diagrama de Venn de la figura 4.8 ayuda a lograr una comprensión intuitiva de la probabilidad condicional. El círculo de la derecha muestra que el evento B ha ocurrido, la parte del círculo que se superpone con el evento A se denota $(A \cap B)$. Una vez que el evento B ha ocurrido, la única manera de que también sea observable el evento A es que ocurra el evento $(A \cap B)$. De manera que la razón $P(A \cap B)/P(B)$ aporta la probabilidad condicional de que se observe el evento A dado que el evento B ya ha ocurrido.

Ahora, considere de nuevo el asunto de la discriminación contra las mujeres agentes de policía. La probabilidad marginal del renglón 1 de la tabla 4.5 indica que la probabilidad de que un agente de la policía sea promovido (ya sea hombre o mujer) es $P(A) = 0.27$. Sin embargo, la cuestión relevante en el caso de la discriminación tiene que ver con las probabilidades condicionales $P(A | M)$ y $P(A | W)$. Es decir, ¿cuál es la probabilidad de que un agente de la policía sea promovido *dado que* es hombre y cuál es la probabilidad que un agente de la policía sea promovido *dado que* es mujer? Si estas dos probabilidades son iguales, no hay fundamentos para un argumento de discriminación ya que las oportunidades de ser promovidos son las mismas para agentes de la policía hombres o mujeres. Pero, si hay diferencia entre estas dos probabilidades condicionales se confirmará que los hombres y mujeres agentes de policía son considerados de manera distinta cuando se trata de las decisiones para promoverlos.

Ya se determinó que $P(A | M) = 0.30$. Ahora use los valores de probabilidad de la tabla 4.5 y la ecuación (4.7) de probabilidad condicional para calcular la probabilidad de que un agente de

FIGURA 4.8 PROBABILIDAD CONDICIONAL $P(A | B) = P(A \cap B)/P(B)$



la policía sea promovido dado que es mujer; es decir, $P(A | W)$. Use la ecuación (4.7) con W en lugar de B

$$P(A | W) = \frac{P(A \cap W)}{P(W)} = \frac{0.03}{0.20} = 0.15$$

¿Qué conclusión obtiene? La probabilidad de que un agente de policía sea promovido dado que es hombre es 0.30, el doble de 0.15, que es la probabilidad de que un agente de policía sea promovido dado que es mujer. Aunque el uso de la probabilidad condicional no demuestra por sí misma que haya discriminación en este caso, los valores de probabilidad condicional confirman el argumento presentado por las mujeres agentes de policía.

Eventos independientes

En el ejemplo anterior, $P(A) = 0.27$, $P(A | M) = 0.30$ y $P(A | W) = 0.15$. Es claro que a la probabilidad de ser promovido (evento A) le afecta o le influye el que el oficial sea un hombre o una mujer. En concreto, como $P(A | M) \neq P(A)$ los eventos A y M son eventos dependientes. Es decir, a la probabilidad del evento A (ser promovido) la altera o le afecta saber que se da el evento M (que el agente sea hombre). De manera similar, como $P(A | W) \neq P(A)$, los eventos A y W son *eventos dependientes*. Pero, si la probabilidad de un evento A no cambia por la existencia del evento M —es decir, si $P(A | M) = P(A)$ —, entonces los eventos A y M son **eventos independientes**. Esto lleva a la definición de la independencia de dos eventos.

EVENTOS INDEPENDIENTES

Dos eventos A y B son independientes si

$$P(A \cap B) = P(A) \quad (4.9)$$

o

$$P(B | A) = P(B) \quad (4.10)$$

Si no es así, los eventos son dependientes.

Ley de la multiplicación

Mientras que la ley de la suma de probabilidades sirve para calcular la probabilidad de la unión de dos eventos, la ley de la multiplicación es útil para calcular la probabilidad de la intersección de dos eventos. La ley de la multiplicación se basa en la definición de probabilidad condicional. Al despejar en las ecuaciones (4.7) y (4.8) $P(A \cap B)$, se obtiene la **ley de la multiplicación**.

LEY DE LA MULTIPLICACIÓN

$$P(A \cap B) = P(B)P(A | B) \quad (4.11)$$

o

$$P(A \cap B) = P(A)P(B | A) \quad (4.12)$$

Para ilustrar el uso de la ley de la multiplicación, considere el caso del departamento de circulación de un periódico al que 84% de los hogares de cierta región están suscritos a la edición diaria del periódico. Si D denota el evento un hogar suscrito a la edición diaria, $P(D) = 0.84$. Además, sabe que la probabilidad de que un hogar ya suscrito a la edición diaria se suscriba también a la edición dominical (evento S) es 0.75; esto es, $P(S | D) = 0.75$.

¿Cuál es la probabilidad de que un hogar se suscriba a ambas, a la edición diaria y a la dominical? Emplee la ley de la multiplicación y calcule la probabilidad deseada, $P(S \cap D)$.

$$P(S \cap D) = P(D)P(S | D) = 0.84(0.75) = 0.63$$

Así, sabe que 63% de los hogares se suscriben a ambas ediciones, a la diaria y a la dominical.

Antes de terminar esta sección hay que considerar el caso especial de la ley de la multiplicación cuando los eventos involucrados son independientes. Recuerde que los eventos A y B son independientes si $P(A | B) = P(A)$ o $P(B | A) = P(B)$. Por tanto, con las ecuaciones (4.11) y (4.12) obtiene, para el caso especial de eventos independientes, la siguiente ley de la multiplicación.

LEY DE LA MULTIPLICACIÓN PARA EVENTOS INDEPENDIENTES

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (4.13)$$

Para calcular la probabilidad de la intersección de dos eventos independientes, simplemente se multiplican las probabilidades correspondientes. Observe que la ley de la multiplicación para eventos independientes proporciona otra manera de determinar si dos eventos son independientes. Es decir, si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, entonces A y B son independientes; si $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, entonces A y B son dependientes.

Como una aplicación de la ley de la multiplicación para eventos independientes considere el caso del jefe de una gasolinera que por experiencia sabe que 80% de los clientes usan tarjeta de crédito al pagar la gasolina. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos siguientes clientes paguen la gasolina con tarjeta de crédito? Sean

A = el evento el primer cliente paga con tarjeta de crédito

B = el evento el segundo cliente paga con tarjeta de crédito

entonces el evento que interesa es $A \cap B$. Si no hay ninguna otra información, será razonable suponer que A y B son eventos independientes. Por tanto,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = (0.80)(0.80) = 0.64$$

Para concluir esta sección, observe que el interés por la probabilidad condicional surgió porque los eventos suelen estar relacionados. En esos casos, los eventos son dependientes y para calcular la probabilidad de estos eventos se usan las fórmulas para probabilidad condicional de las ecuaciones (4.7) y (4.8). Si dos eventos no están relacionados, son independientes; en este caso a las probabilidades de ninguno de los eventos les afecta el hecho de que el otro evento ocurra o no.

NOTAS Y COMENTARIOS

No hay que confundir la noción de eventos mutuamente excluyentes con la de eventos independientes. Dos eventos cuyas probabilidades no son cero, no pueden ser mutuamente excluyentes e indepen-

dientes. Si uno de los eventos mutuamente excluyentes ocurre, el otro evento no puede ocurrir; por tanto, la probabilidad de que ocurra el otro evento se reduce a cero.

Ejercicios

Métodos

30. Suponga dos eventos, A y B , y que $P(A) = 0.50$, $P(B) = 0.60$ y $P(A \cap B) = 0.40$.
- Halle $P(A | B)$.
 - Halle $P(B | A)$.
 - ¿ A y B son independientes? ¿Por qué sí o por qué no?

31. Suponga dos eventos, A y B , que son mutuamente excluyentes. Admita, además, que $P(A) = 0.30$ y $P(B) = 0.40$.
- Obtenga $P(A \cap B)$.
 - Calcule $P(A | B)$.
 - Un estudiante de estadística argumenta que los conceptos de eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes son en realidad lo mismo y que si los eventos son mutuamente excluyentes deben ser también independientes. ¿Está usted de acuerdo? Use la información sobre las probabilidades para justificar su respuesta.
 - Dados los resultados obtenidos, ¿qué conclusión sacaría usted acerca de los eventos mutuamente excluyentes e independientes?

Aplicaciones

32. Debido al aumento de los costos de los seguros, en Estados Unidos 43 millones de personas no cuentan con un seguro médico (*Time*, 1 de diciembre de 2003). En la tabla siguiente se muestran datos muestrales representativos de la cantidad de personas que cuentan con seguro médico.

		Seguro médico	
		Sí	No
Edad	18 a 34	750	170
	35 o mayor	950	130

- Con estos datos elabore una tabla de probabilidad conjunta y úsela para responder las preguntas restantes.
 - ¿Qué indican las probabilidades marginales acerca de la edad de la población de Estados Unidos?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tomada en forma aleatoria no tenga seguro médico?
 - Si la persona tiene entre 18 y 34 años, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga seguro médico?
 - Si la persona tiene 34 años o más ¿cuál es la probabilidad de que no tenga seguro médico?
 - Si la persona no tiene seguro médico, ¿cuál es la probabilidad de que tenga entre 18 y 34 años?
 - ¿Qué indica esta información acerca del seguro médico en Estados Unidos?
33. Una muestra de estudiantes de la maestría en administración de negocios, arrojó la siguiente información sobre la principal razón que tuvieron los estudiantes para elegir la escuela en donde hacen sus estudios.



		Razones de su elección			
		Calidad de la escuela	Costo de la escuela	Otras	Totales
Tipo de estudiante	Tiempo completo	421	393	76	890
	Medio tiempo	400	593	46	1039
Totales		821	986	122	1929

- Con estos datos elabore una tabla de probabilidad conjunta.
- Use las probabilidades marginales: calidad de la escuela, costo de la escuela y otras para comentar cuál es la principal razón por la que eligen una escuela.

- c. Si es un estudiante de tiempo completo, ¿cuál es la probabilidad de que la principal razón para su elección de la escuela haya sido la calidad de la escuela?
- d. Si es un estudiante de medio tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que la principal razón para su elección de la escuela haya sido la calidad de la escuela?
- e. Si A denota el evento es estudiante de tiempo completo y B denota el evento la calidad de la escuela fue la primera razón para su elección, ¿son independientes los eventos A y B ? Justifique su respuesta.

34. La tabla siguiente muestra las probabilidades de los distintos tipos sanguíneo en la población.

	A	B	AB	O
Rh+	0.34	0.09	0.04	0.38
Rh-	0.06	0.02	0.01	0.06

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga sangre tipo O?
- b. ¿De que tenga sangre Rh-?
- c. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sea Rh- dado que la persona tiene sangre tipo O?
- d. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga sangre tipo B dado que es Rh+?
- e. ¿Cuál es la probabilidad de que en un matrimonio, los dos sean Rh-?
- f. ¿Cuál es la probabilidad de que en un matrimonio, los dos tengan sangre AB?
35. El Departamento de Estadística Laboral de Estados Unidos reúne datos sobre las ocupaciones de las personas entre 25 y 64 años. La tabla siguiente presenta el número de hombres y mujeres (en millones) en cada una de las categorías ocupacionales.

Ocupación	Hombres	Mujeres
Directivo/Profesional	19 079	19 021
Enseñanza/Ventas/ Administrativo	11 079	19 315
Servicio	4 977	7 947
Producción con precisión	11 682	1 138
Operadores/Obrero	10 576	3 482
Agricultura/Ganadería/Silvicultura/Pesca	1 838	514

- a. Desarrolle una tabla de probabilidad conjunta.
- b. ¿Cuál es la probabilidad de que un trabajador mujer sea directivo o profesional?
- c. ¿Cuál es la probabilidad de que un trabajador hombre esté en producción con precisión?
- d. ¿Es la ocupación independiente del género? Justifique su respuesta con el cálculo de la probabilidad.
36. Reggie Miller de los Indiana Pacers tiene el record de la National Basketball Association de más canastas de 3 puntos anotadas en toda una carrera, acertando en 85% de sus tiros (*USA Today*, 22 de enero de 2004). Suponga que ya casi al final de un juego cometan una falta contra él y le conceden dos tiros.
- a. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte en los dos tiros?
- b. ¿De que acierte en por lo menos uno de los dos tiros?
- c. ¿De que no acierte en ninguno de los dos tiros?
- d. Al final de un juego de básquetbol suele ocurrir que cometan faltas contra un jugador del equipo opuesto para detener el reloj del juego. La estrategia usual es cometer una falta contra el peor tirador del otro equipo. Suponga que el centro de los Indiana Pacers acierta 58% de sus tiros. Calcule para él las probabilidades calculadas en los incisos a, b y c y muestre que hacer una falta intencional contra el centro de los Indiana Pacers es mejor que hacerlo contra Reggie Miller.
37. Visa Card de Estados Unidos estudia con qué frecuencia usan sus tarjetas (de débito y de crédito) los consumidores jóvenes, entre 18 y 24 años. Los resultados del estudio proporcionan las probabilidades siguientes.

- La probabilidad de que un consumidor use su tarjeta al hacer una compra es 0.37.
 - Dado que un consumidor usa su tarjeta, la probabilidad de que tenga entre 18 y 24 años es 0.19.
 - Puesto que un consumidor usa su tarjeta, la probabilidad de que sea mayor de 24 años es 0.81.
- Datos de la Oficina de Censos de Estados Unidos indican que 14% de los consumidores tienen entre 18 y 24 años.
- Ya que un consumidor tiene entre 18 y 24 años, ¿cuál es la probabilidad de que use su tarjeta?
 - Dado que un consumidor tiene más de 24 años, ¿cuál es la probabilidad de que use su tarjeta?
 - ¿Qué interpretación se le da a las probabilidades de los incisos a y b?
 - ¿Empresas como Visa, Master Card y Discover deben proporcionar tarjetas a los consumidores entre 18 y 24 años, antes de que tengan una historia crediticia? Si no, explique. Si sí, ¿qué restricciones deben poner las empresas a estos consumidores?
38. En un estudio de Morgan Stanley Consumer Research se muestrearon hombres y mujeres y se les preguntó qué preferían tomar: agua de botella o una bebida deportiva como Gatorade o Propel Fitness (*The Atlanta Journal-Constitution*, 28 de diciembre de 2005). Suponga que en el estudio hayan participado 200 hombres y 200 mujeres y que de todos 280 hayan preferido el agua de botella. En el grupo de los que preferían bebidas deportivas, 80 eran hombres y 40 eran mujeres.

Sea

M = el evento el consumidor es hombre

W = el evento el consumidor es mujer

B = el evento el consumidor prefiere agua de botella

S = el evento el consumidor prefiere una bebida deportiva

- ¿Cuál es la probabilidad de que en este estudio una persona prefiera agua de botella?
- ¿De qué en este estudio una persona prefiera una bebida deportiva?
- ¿Cuáles son las probabilidades condicionales $P(M|S)$ y $P(W|S)$?
- ¿Cuáles son las probabilidades conjuntas $P(M \cap S)$ y $P(W \cap S)$?
- Dado que un consumidor es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera una bebida deportiva?
- Ya que un consumidor es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera una bebida deportiva?
- ¿Depende la preferencia por una bebida deportiva de que el consumidor sea hombre o mujer? Explique usando la información sobre las probabilidades.

4.5

Teorema de Bayes

En el estudio de la probabilidad condicional vio que revisar las probabilidades cuando se obtiene más información es parte importante del análisis de probabilidades. Por lo general, se suele iniciar el análisis con una estimación de probabilidad inicial o **probabilidad previa** de los eventos que interesan. Después, de fuentes como una muestra, una información especial o una prueba del producto, se obtiene más información sobre estos eventos. Dada esta nueva información, se modifican o revisan los valores de probabilidad mediante el cálculo de probabilidades revisadas a las que se les conoce como **probabilidades posteriores**. El **teorema de Bayes** es un medio para calcular estas probabilidades. En la figura 4.9 se presentan los pasos de este proceso de revisión de la probabilidad.

FIGURA 4.9 REVISIÓN DE LA PROBABILIDAD USANDO EL TEOREMA DE BAYES

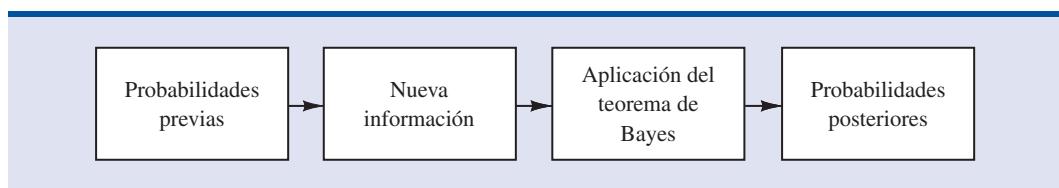


TABLA 4.6 CALIDAD DE DOS PROVEEDORES

	Porcentaje de piezas buenas	Porcentaje de piezas malas
Proveedor 1	98	2
Proveedor 2	95	5

Como aplicación del teorema de Bayes, considere una fábrica que compra piezas de dos proveedores. Sea A_1 el evento la pieza proviene del proveedor 1 y A_2 el evento la pieza proviene del proveedor 2. De las piezas que compra la fábrica, 65% proviene del proveedor 1 y 35% restante proviene del proveedor 2. Por tanto, si toma una pieza aleatoriamente, le asignará las probabilidades previas $P(A_1) = 0.65$ y $P(A_2) = 0.35$.

La calidad de las piezas compradas varía de acuerdo con el proveedor. Por experiencia, sabe que la calidad de los dos proveedores es como muestra la tabla 4.6. Si G denota el evento la pieza está buena y B denota el evento la pieza está mala, la información de la tabla 4.6 proporciona los siguientes valores de probabilidad condicional.

$$\begin{aligned} P(G | A_1) &= 0.98 & P(B | A_1) &= 0.02 \\ P(G | A_2) &= 0.95 & P(B | A_2) &= 0.05 \end{aligned}$$

El diagrama de árbol de la figura 4.10 representa el proceso de recibir una pieza, de uno de los dos proveedores, y después determinar si la pieza es buena o mala como experimento de dos pasos. Se observa que existen cuatro resultados experimentales: dos corresponden a que la pieza esté buena y dos corresponden a que la pieza esté mala.

Cada uno de los resultados experimentales es la intersección de dos eventos, de manera que para calcular estas probabilidades puede usar la ley de la multiplicación. Por ejemplo,

$$P(A_1, G) = P(A_1 \cap G) = P(A_1)P(G | A_1)$$

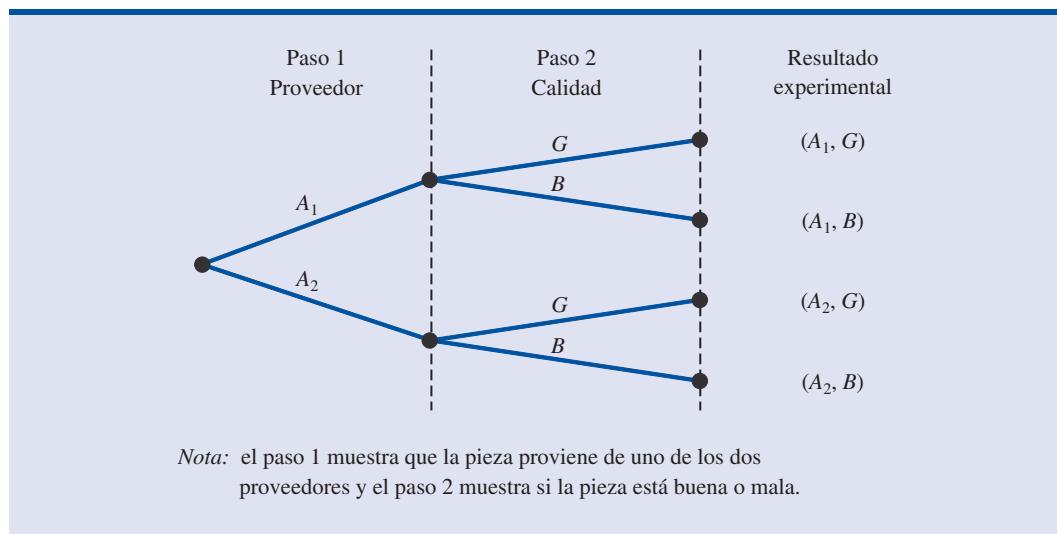
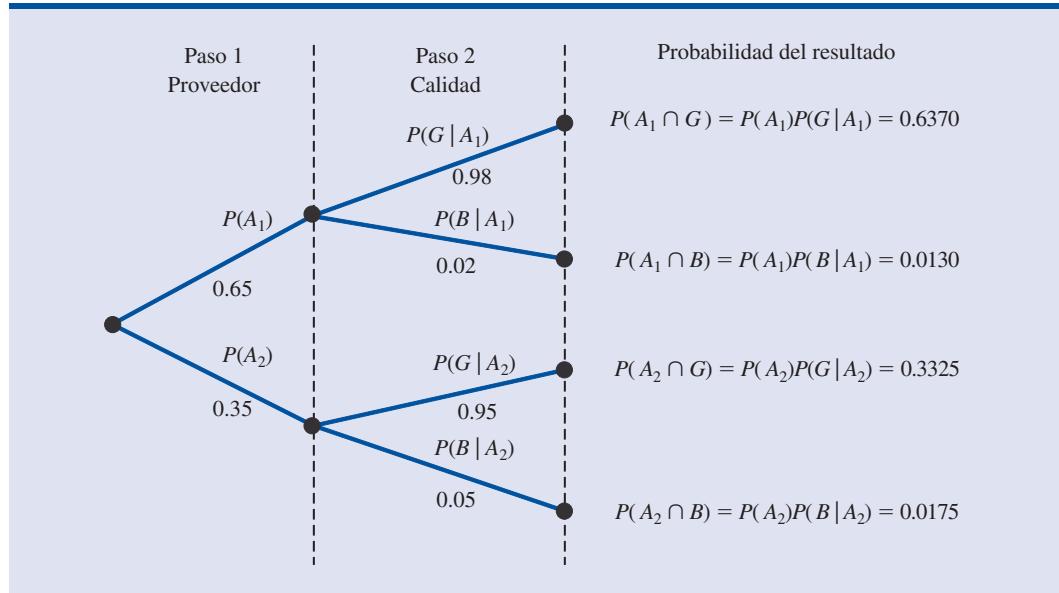
FIGURA 4.10 DIAGRAMA DE ÁRBOL PARA EL EJEMPLO DE LOS DOS PROVEEDORES

FIGURA 4.11 ÁRBOL DE PROBABILIDAD PARA EL EJEMPLO DE LOS DOS PROVEEDORES

El proceso del cálculo de estas probabilidades conjuntas se representa mediante un árbol de probabilidad (figura 4.11). De izquierda a derecha por el árbol, las probabilidades de cada una de las ramas del paso 1 son probabilidades previas y las probabilidades de cada una de las ramas del paso 2 son probabilidades condicionales. Para hallar la probabilidad de cada uno de los resultados experimentales, simplemente se multiplican las probabilidades de las ramas que llevan a ese resultado. En la figura 4.11 se muestra cada una de estas probabilidades conjuntas junto con las probabilidades en cada rama.

Suponga ahora que las piezas de los dos proveedores se emplean en el proceso de fabricación de esta empresa y que una máquina se descompone al tratar de procesar una pieza mala. Dada la información de que la pieza está mala, ¿cuál es la probabilidad de que sea del proveedor 1 y cuál es la probabilidad de que sea del proveedor 2? Para responder estas preguntas aplique el teorema de Bayes usando la información del árbol de probabilidad (figura 4.11).

Como B es el evento la parte está mala, lo que busca son las probabilidades posteriores $P(A_1 | B)$ y $P(A_2 | B)$. De acuerdo con la ley para la probabilidad condicional

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} \quad (4.14)$$

Del árbol de probabilidad

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1)P(B | A_1) \quad (4.15)$$

Para hallar $P(B)$, se observa que B sólo puede presentarse de dos maneras: $(A_1 \cap B)$ y $(A_2 \cap B)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) \\ &= P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.15) y (4.16) en la ecuación (4.14) y expresando de manera similar $P(A_2 | B)$ se obtiene el teorema de Bayes para el caso de dos eventos.

Al reverendo Thomas Bayes, un ministro presbiteriano, se le atribuye la idea inicial que llevó a la versión del teorema de Bayes que se usa en la actualidad.

TEOREMA DE BAYES (CASO DE DOS EVENTOS)

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1)P(B | A_1)}{P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2)} \quad (4.17)$$

$$P(A_2 | B) = \frac{P(A_2)P(B | A_2)}{P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2)} \quad (4.18)$$

A partir de la ecuación (4.17) y los valores de probabilidad del ejemplo, se tiene

$$\begin{aligned} P(A_1 | B) &= \frac{P(A_1)P(B | A_1)}{P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2)} \\ &= \frac{(0.65)(0.02)}{(0.65)(0.02) + (0.35)(0.05)} = \frac{0.0130}{0.0130 + 0.0175} \\ &= \frac{0.0130}{0.0305} = 0.4262 \end{aligned}$$

Y usando la ecuación (4.18) se encuentra $P(A_2 | B)$.

$$\begin{aligned} P(A_2 | B) &= \frac{(0.35)(0.05)}{(0.65)(0.02) + (0.35)(0.05)} \\ &= \frac{0.0175}{0.0130 + 0.0175} = \frac{0.0175}{0.0305} = 0.5738 \end{aligned}$$

Observe que al principio de este ejemplo, la probabilidad de seleccionar una pieza y que fuera del proveedor 1 era 0.65. Sin embargo, dada la información de que la pieza está mala, la probabilidad de que la pieza provenga del proveedor 1 bajó a 0.4262. En efecto, si la pieza está mala, la posibilidad de que sea del proveedor 2 es mayor que 50-50; es decir, $P(A_2 | B) = 0.5738$.

El teorema de Bayes es aplicable cuando los eventos para los que se quiere calcular la probabilidad revisada son mutuamente excluyentes y su unión es todo el espacio muestral.* En el caso de n eventos mutuamente excluyentes A_1, A_2, \dots, A_n , cuya unión sea todo el espacio muestral, el teorema de Bayes aplica para calcular cualquiera de las probabilidades posteriores $P(A_i | B)$ como se muestra a continuación

TEOREMA DE BAYES

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i)P(B | A_i)}{P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2) + \cdots + P(A_n)P(B | A_n)} \quad (4.19)$$

*Si la unión de los eventos es todo el espacio muestral, los eventos son colectivamente exhaustivos.

Con las probabilidades previas $P(A_1)$, $P(A_2)$, ..., $P(A_n)$ y las probabilidades condicionales adecuadas $P(B | A_1)$, $P(B | A_2)$, ..., $P(B | A_n)$, se usa la ecuación (4.19) para calcular la probabilidad posterior de los eventos A_1, A_2, \dots, A_n

Método tabular

Para realizar los cálculos del teorema de Bayes es útil emplear un método tabular. En la tabla 4.7 se muestra este método aplicado al problema de las piezas de los proveedores. Los cálculos que se muestran ahí se realizan mediante los pasos siguientes.

Paso 1. Se harán las columnas siguientes:

Columna 1: Para los eventos mutuamente excluyentes A_i de los que quiere tener la probabilidad posterior

Columna 2: Para las probabilidades previas $P(A_i)$ de los eventos

Columna 3: Para las probabilidades condicionales $P(B | A_i)$ de la nueva información B dado cada evento

Paso 2. En la columna 4 se calculan las probabilidades conjuntas $P(A_i \cap B)$, de cada evento y la nueva información, empleando la ley de la multiplicación. Estas probabilidades conjuntas se encuentran multiplicando las probabilidades previas de la columna 2 por las correspondientes probabilidades condicionales de la columna 3; es decir, $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B | A_i)$.

Paso 3. Sume las probabilidades de la columna 4. Esta suma es la probabilidad de la nueva información, $P(B)$. Así, en la tabla 4.7 se ve que la probabilidad de que una pieza sea del proveedor 1 y esté mala es 0.0130 y que la probabilidad de que la pieza sea del proveedor 2 y esté mala es 0.0175. Como éstas son las únicas dos maneras de tener una pieza mala, la suma $0.0130 + 0.0175$, que es 0.0305, da la probabilidad de hallar una pieza mala en las piezas recibidas de los dos proveedores.

Paso 4. En la columna 5 se calculan las probabilidades posteriores usando la relación básica de la probabilidad condicional.

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

Observe que las probabilidades conjuntas $P(A_i \cap B)$ están en la columna 4 y que la probabilidad $P(B)$ es la suma de la columna 4.

TABLA 4.7 MÉTODO TABULAR PARA LOS CÁLCULOS DEL TEOREMA DE BAYES APLICADO AL EJEMPLO DE LOS DOS PROVEEDORES

(1) Eventos A_i	(2) Probabilidades previas $P(A_i)$	(3) Probabilidades condicionales $P(B A_i)$	(4) Probabilidades conjuntas $P(A_i \cap B)$	(5) Probabilidades posteriores $P(A_i B)$
A_1	0.65	0.02	0.0130	0.0130/0.0305 = 0.4262
A_2	0.35	0.05	0.0175	0.0175/0.0305 = 0.5738
	1.00		$P(B) = 0.0305$	1.0000

NOTAS Y COMENTARIOS

1. El teorema de Bayes se usa mucho en la toma de decisiones. Las probabilidades previas suelen ser estimaciones subjetivas dadas por la persona que toma las decisiones. Se obtiene información muestral y se usan las probabilidades posteriores para emplearlas en la toma de decisiones.
2. Un evento y su complemento son mutuamente excluyentes y su unión es todo el espacio muestral. Por tanto, el teorema de Bayes siempre se emplea para calcular la probabilidad posterior de un evento y su complemento.

Ejercicios

Métodos

Autoexamen

39. Las probabilidades previas de los eventos A_1 y A_2 son $P(A_1) = 0.40$ y $P(A_2) = 0.60$. Sabe también que $P(A_1 \cap A_2) = 0$. Suponga que $P(B | A_1) = 0.20$ y $P(B | A_2) = 0.05$.
 - a. ¿ A_1 y A_2 son eventos mutuamente excluyentes? Explique.
 - b. Calcule $P(A_1 \cap B)$ y $P(A_2 \cap B)$.
 - c. Calcule $P(B)$.
 - d. Emplee el teorema de Bayes para calcular $P(A_1 | B)$ y $P(A_2 | B)$.
40. Las probabilidades previas de los eventos A_1, A_2 y A_3 son $P(A_1) = 0.20$, $P(A_2) = 0.50$ y $P(A_3) = 0.30$. Las probabilidades condicionales del evento B dados los eventos A_1, A_2 y A_3 son $P(B | A_1) = 0.50$, $P(B | A_2) = 0.40$ y $P(B | A_3) = 0.30$.
 - a. Calcule $P(B \cap A_1)$, $P(B \cap A_2)$ y $P(B \cap A_3)$.
 - b. Emplee el teorema de Bayes, ecuación (4.19), para calcular la probabilidad posterior $P(A_2 | B)$.
 - c. Use el método tabular para emplear el teorema de Bayes en el cálculo de $P(A_1 | B)$, $P(A_2 | B)$ y $P(A_3 | B)$.

Aplicaciones

Autoexamen

41. Una empresa de consultoría presenta una oferta para un gran proyecto de investigación. El director de la firma piensa inicialmente que tiene 50% de posibilidades de obtener el proyecto. Sin embargo, mas tarde, el organismo al que se le hizo la oferta pide más información sobre la oferta. Por experiencia se sabe que en 75% de las ofertas aceptadas y en 40% de las ofertas no aceptadas, este organismo solicita más información.
 - a. ¿Cuál es la probabilidad previa de que la oferta sea aceptada (es decir, antes de la solicitud dé más información)?
 - b. ¿Cuál es la probabilidad condicional de que se solicite más información dado que la oferta será finalmente aceptada?
 - c. Calcule la probabilidad posterior de que la oferta sea aceptada dado que se solicitó más información.
42. Un banco local revisa su política de tarjetas de crédito con objeto de retirar algunas de ellas. En el pasado aproximadamente 5% de los tarjetahabientes incumplieron, dejando al banco sin posibilidad de cobrar el saldo pendiente. De manera que el director estableció una probabilidad previa de 0.05 de que un tarjetahabiente no cumpla. El banco encontró también que la probabilidad de que un cliente que es cumplido no haga un pago mensual es 0.20. Por supuesto la probabilidad de no hacer un pago mensual entre los que incumplen es 1.
 - a. Dado que un cliente no hizo el pago de uno o más meses, calcule la probabilidad posterior de que el cliente no cumpla.
 - b. El banco deseará retirar sus tarjetas si la probabilidad de que un cliente no cumpla es mayor que 0.20. ¿Debe retirar el banco una tarjeta si el cliente no hace un pago mensual?

43. En los automóviles pequeños el rendimiento de la gasolina es mayor, pero no son tan seguros como los coches grandes. Los automóviles pequeños constituyen 18% de los vehículos en circulación, pero en accidentes con automóviles pequeños se registraron 11 898 víctimas mortales en uno de los últimos años (*Reader's Digest*, mayo de 2000). Suponga que la probabilidad de que un automóvil pequeño tenga un accidente es 0.18. La probabilidad de que en un accidente con un automóvil pequeño haya una víctima mortal es 0.128 y la probabilidad de que haya una víctima mortal si el automóvil no es pequeño es 0.05. Usted se entera de un accidente en el que hubo una víctima mortal. ¿Cuál es la probabilidad de que el accidente lo haya tenido un automóvil pequeño?
44. La American Council of Education informa que en Estados Unidos 47% de los estudiantes que ingresan en la universidad terminan sus estudios en un lapso de cinco años (Associated Press, 6 de mayo de 2002). Suponga que en los registros de terminación de estudios encuentra que 50% de los estudiantes que terminan sus estudios en cinco años son mujeres y 45% de quienes no terminan sus estudios en cinco años son mujeres. Los estudiantes que no terminan sus estudios en cinco años son estudiantes que han abandonado sus estudios o que están por terminarlos.
- Sea A_1 = el estudiante termina sus estudios en cinco años
 A_2 = el estudiante no termina sus estudios en cinco
 W = el estudiante es mujer
Empleando la información dada, dé las probabilidades siguientes: $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(W|A_1)$ y $P(W|A_2)$.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que una estudiante termine sus estudios en cinco años?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante termine sus estudios en cinco años?
 - Dados los resultados anteriores, ¿cuál es el porcentaje de mujeres y cuál es el porcentaje de hombres que entran en la universidad?
45. En un artículo acerca del crecimiento de las inversiones, la revista *Money* informa que las acciones en medicamentos muestran una poderosa tendencia de largo plazo y ofrecen a los inversores potenciales inigualables y duraderas ganancias. La Health Care Financing Administration confirma estas conclusiones con su pronóstico de que para 2010 el consumo de medicamentos llegará a \$366 mil millones, cuando en 2000 era de \$117 mil millones. Muchas de las personas de 65 años o más necesitan medicamentos. Entre estas personas, 82% necesita medicamentos de manera regular, 55% usa tres o más medicamentos de manera regular y 40% necesita cinco o más medicamentos regularmente. En cambio entre las personas menores de 65 años, 49% usa medicamentos de manera regular, 37% necesita tres o más medicamentos de manera regular y 28% usa cinco o más medicamentos regularmente (*Money*, septiembre de 2001). La Oficina de Censos de Estados Unidos informa que de los 281 421 906 habitantes de Estados Unidos, 34 991 753 son personas de 65 años o mayores (U.S. Census Bureau, *Census 2000*).
a. Calcule la probabilidad de que en Estados Unidos una persona tenga 65 años o más.
b. Calcule la probabilidad de que una persona necesite medicamentos de manera regular.
c. Calcule la probabilidad de que una persona tenga 65 años o más y necesite cinco o más medicamentos.
d. Dado que una persona usa cinco o más medicamentos, calcule la probabilidad de que tenga 65 años o más.

Resumen

En este capítulo se introdujeron conceptos básicos de probabilidad y se ilustró cómo usar el análisis de probabilidad para obtener información útil para la toma de decisiones. Se describió cómo interpretar la probabilidad como una medida numérica de la posibilidad de que ocurra un evento. Además, se vio que la probabilidad de un evento se puede calcular, ya sea sumando las probabilidades de los resultados experimentales (puntos muestrales) que comprende el evento o usando las relaciones que establecen las leyes de probabilidad de la adición, de la probabilidad condicional y de la multiplicación. En el caso de que se obtenga información adicional, se mostró cómo usar el teorema de Bayes para obtener probabilidades revisadas o posteriores.

Glosario

Probabilidad Medida numérica de la posibilidad de que ocurra un evento.

Experimento Proceso para generar resultados bien definidos.

Espacio muestral Conjunto de todos los resultados experimentales.

Punto muestral Un elemento del espacio muestral. Un punto muestral que representa un resultado experimental.

Diagrama de árbol Representación gráfica que ayuda a visualizar un experimento de pasos múltiples.

Requerimientos básicos en la asignación de probabilidades Dos requerimientos que restringen la manera en que se asignan probabilidades son: 1) Para cada resultado experimental E_i se debe tener $0 \leq P(E_i) \leq 1$; 2) si E_1, E_2, \dots, E_n son todos los resultados experimentales, se debe tener que $P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n) = 1.0$.

Método clásico Sirve para la asignación de probabilidades, es apropiado cuando todos los resultados experimentales son igualmente posibles.

Método de las frecuencias relativas Útil para la asignación de probabilidades, es conveniente cuando se tienen datos para estimar la proporción de veces que se presentará un resultado experimental si se repite un gran número de veces.

Método subjetivo Método para la asignación de probabilidades basado en un juicio.

Evento Colección de puntos muestrales

Complemento de A El evento que consta de todos los puntos muestrales que no están en A .

Diagrama de Venn Una representación gráfica para mostrar de manera simbólica el espacio muestral y las operaciones con eventos en la cual el espacio muestral se representa como un rectángulo y los eventos se representan como círculos dentro del espacio muestral.

Unión de A y B Evento que contiene todos los puntos muestrales que pertenecen a A o a B o a ambos. La unión se denota $A \cup B$.

Intersección de A y B Evento que contiene todos los puntos muestrales que pertenecen tanto a A como a B . La intersección se denota $A \cap B$.

Ley de la adición Ley de probabilidad que se usa para calcular la unión de dos eventos. Es $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Si los eventos son mutuamente excluyentes, $P(A \cap B) = 0$; en este caso la ley de la adición se reduce a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Eventos mutuamente excluyentes Eventos que no tienen puntos muestrales en común; es decir, $A \cap B$ es vacío y $P(A \cap B) = 0$.

Probabilidad condicional Probabilidad de un evento dado que otro evento ya ocurrió. La probabilidad condicional de A dado B es $P(A | B) = P(A \cap B)/P(B)$.

Probabilidad conjunta La probabilidad de que dos eventos ocurran al mismo tiempo; es decir, la probabilidad de la intersección de dos eventos.

Probabilidad marginal Los valores en los márgenes de una tabla de probabilidad conjunta que dan las probabilidades de cada evento por separado.

Eventos independientes Son dos eventos, A y B , para los que $P(A | B) = P(A)$ o $P(B | A) = P(B)$; es decir, los eventos no tienen ninguna influencia uno en otro.

Ley de la multiplicación Una ley de probabilidad que se usa para calcular la probabilidad de la intersección de dos eventos. Esto es $P(A \cap B) = P(B)P(A | B)$ o $P(A \cap B) = P(A)P(B | A)$. Para eventos independientes se reduce a $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Probabilidades previas Estimaciones iniciales de las probabilidades de eventos.

Probabilidades posteriores Probabilidades revisadas de eventos basadas en informaciones adicionales.

Teorema de Bayes Método usado para calcular las probabilidades posteriores.

Fórmulas clave

Regla de conteo para combinaciones

$$C_n^N = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \quad (4.1)$$

Regla de conteo para permutaciones

$$P_n^N = n! \binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!} \quad (4.2)$$

Cálculo de la probabilidad usando el complemento

$$P(A) = 1 - P(A^c) \quad (4.5)$$

Ley de la adición

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (4.6)$$

Probabilidad condicional

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (4.7)$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (4.8)$$

Ley de la multiplicación

$$P(A \cap B) = P(B)P(A | B) \quad (4.11)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B | A) \quad (4.12)$$

Ley de la multiplicación para eventos independientes

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (4.13)$$

Teorema de Bayes

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i)P(B | A_i)}{P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2) + \cdots + P(A_n)P(B | A_n)} \quad (4.19)$$

Ejercicios complementarios

46. En un sondeo se les pidió a 1035 adultos su opinión respecto a los negocios (*BusinessWeek*, 11 de septiembre de 2000). Una de las preguntas era: “¿Cómo califica usted a las empresas estadounidenses respecto a la calidad de los productos y competitividad a nivel mundial?” Las respuestas fueron: excelentes, 18%; bastante buenas, 50%; regulares, 26%; malas, 5% y no saben o no contestaron 1%.
- ¿Cuál es la probabilidad de que un interrogado considere a las empresas estadounidenses bastante buenas o excelentes?
 - ¿Cuántos de los interrogados consideraron malas a las empresas estadounidenses?
 - ¿Cuántos de los interrogados dijo no saber o no contestó?
47. Un administrador financiero realiza dos nuevas inversiones, una en la industria del petróleo y otra en bonos municipales. Después de un año cada una de las inversiones se clasificará como buena o no. Considere como un experimento el resultado que se obtiene con estas dos acciones.
- ¿Cuántos puntos muestrales hay en este experimento?
 - Presente un diagrama de árbol y enumere los puntos muestrales.
 - Sea O = el evento la inversión en la industria del petróleo es buena y M = el evento la inversión en los fondos municipales es buena. Dé los puntos muestrales de O y de M .
 - Enumere los puntos muestrales de la unión de los eventos ($O \cup M$).
 - Cunte los puntos muestrales de la intersección de los eventos ($O \cap M$).
 - ¿Son mutuamente excluyentes los eventos O y M ? Explique.

48. A principios de 2003, el presidente de Estados Unidos propuso eliminar los impuestos a los dividendos de los accionistas con el argumento de que era un doble impuesto. Las corporaciones pagan impuestos sobre las ganancias que luego son repartidas como dividendos. En un sondeo realizado a 671 estadounidenses, Techno Metrica Market Intelligence halló que 47% estaban a favor de la propuesta, 44% se oponían a ella y 9% no estaban seguros (*Investor's Business Daily*, 13 de enero de 2003). Al analizar las respuestas de acuerdo con la pertenencia a los partidos políticos, se encontró en el sondeo que 29% de los demócratas estaban a favor, 64% de los republicanos estaban a favor y 48% de los independientes estaban a favor.
- ¿Cuántos de los encuestados estuvieron a favor de la eliminación de los impuestos a los dividendos?
 - ¿Cuál es la probabilidad condicional de que una persona esté a favor de la propuesta dado que es demócrata?
 - ¿Es la afiliación partidaria independiente de que una persona esté a favor de la propuesta?
 - Si se supone que las respuestas de las personas estuvieron de acuerdo con sus propios intereses, ¿qué grupo se beneficiará más con la aceptación de la propuesta?
49. En un estudio realizado con 31 000 ingresos a hospitales en el estado de Nueva York se encontró que 4% de los ingresados sufrieron daños a causa del tratamiento. Un séptimo de estos daños condujeron a la muerte y un cuarto se debió a negligencia médica. En uno de cada 7.5 casos de negligencia médica se levantó una demanda y en una de cada dos demandas se tuvo que pagar una indemnización.
- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que ingresa en un hospital sufra un daño a causa del tratamiento debido a negligencia médica?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que ingresa en un hospital muera a causa de daños producidos por el tratamiento?
 - En el caso de daños causado por negligencia médica, ¿cuál es la probabilidad de que la demanda ocasione una indemnización?
50. En una encuesta por teléfono para determinar la opinión de los televidentes respecto a un nuevo programa de televisión se obtuvieron las opiniones siguientes:

Opinión	Frecuencia
Malo	4
Regular	8
Bueno	11
Muy bueno	14
Excelente	13

- ¿Cuál es la probabilidad de que un televidente tomado aleatoriamente opine que el nuevo programa es bueno o le dé un calificativo mejor.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que un televidente tomado aleatoriamente opine que el nuevo programa es regular o le dé un calificativo inferior?
51. En la siguiente tabulación cruzada se muestra el ingreso familiar de acuerdo con el nivel de estudios del cabeza de familia (*Statistical Abstract of the United States: 2002*).

Nivel de estudios	Ingreso familiar (en miles de \$)					
	Menos de 25	25.0– 49.9	50.0– 74.9	75.0– 99.9	100 o más	Total
Preparatoria sin terminar	9 285	4 093	1 589	541	354	15 862
Preparatoria terminada	10 150	9 821	6 050	2 737	2 028	30 786
Estudios universitarios sin terminar	6 011	8 221	5 813	3 215	3 120	26 380
Estudios universitarios terminados	2 138	3 985	3 952	2 698	4 748	17 521
Estudios de posgrado	813	1 497	1 815	1 589	3 765	9 479
Total	28 397	27 617	19 219	10 780	14 015	100 028

- a. Elabore una tabla de probabilidad conjunta.
 - b. ¿Cuál es la probabilidad de que el cabeza de familia no haya terminado la preparatoria?
 - c. ¿Cuál es la probabilidad de que el cabeza de familia haya terminado la universidad o tenga estudios de posgrado?
 - d. ¿Cuál es la probabilidad de que si el cabeza de familia terminó la universidad, el ingreso familiar sea \$100 000 o más?
 - e. ¿Cuál es la probabilidad de que el ingreso familiar sea menor a \$25 000?
 - f. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia en la que el cabeza de familia terminó la universidad, tenga un ingreso familiar menor a \$25 000?
 - g. ¿El ingreso familiar es independiente del nivel de educación?
52. En un estudio realizado entre los 2010 nuevos estudiantes inscritos a las maestrías de negocios se obtuvieron los datos siguientes.

**Hizo solicitudes
en varias universidades**

Grupos de edades		
	Sí	No
23 o menos	207	201
24–26	299	379
27–30	185	268
31–35	66	193
36 o más	51	169

- a. Para un estudiante de maestría tomado en forma aleatoria elabore una tabla de probabilidad conjunta para el experimento que consiste en observar la edad del estudiante y si hizo solicitudes en varias universidades.
 - b. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante tomado en forma aleatoria tenga 23 años o menos?
 - c. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante tomado en forma aleatoria tenga más de 26 años?
 - d. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante tomado en forma aleatoria haya hecho solicitud en varias universidades?
53. Vaya nuevamente a los datos de los nuevos estudiantes inscritos a las maestrías de negocios del ejercicio 52.
- a. Dado que una persona hizo solicitudes en varias universidades, ¿cuál es la probabilidad de que tenga entre 24 y 26 años?
 - b. Ya que una persona tiene 36 años o más, ¿cuál es la probabilidad de que haya hecho solicitudes en varias universidades?
 - c. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona entre 24 y 26 años haya hecho solicitudes en varias universidades?
 - d. Suponga que la persona sólo hizo solicitud para una universidad. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona tenga 31 años o más?
 - e. ¿La edad y el hacer solicitudes en varias universidades son independientes? Explique.
54. En una encuesta realizada por IBD/TIPP para obtener información sobre la opinión respecto a las inversiones para el retiro (*Investor's Business Daily*, 5 de mayo de 2000) se les preguntó a los hombres y mujeres interrogados qué tan importante les parecía que era el nivel de riesgo al elegir una inversión para el retiro. Con los datos obtenidos se elaboró la siguiente tabla de probabilidades conjuntas. “Importante” significa que el interrogado respondió que el nivel de riesgo era importante o muy importante.

	Hombre	Mujer	Total
Importante	0.22	0.27	0.49
No importante	0.28	0.23	0.51
Total	0.50	0.50	1.00

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los interrogados diga que es importante?
 - b. ¿Cuál es la probabilidad de que una de las mujeres interrogadas diga que es importante?
 - c. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los hombres interrogados diga que es importante?
 - d. ¿El nivel de riesgo es independiente del género del interrogado?
 - e. ¿La opinión de hombres y mujeres difiere respecto al riesgo?
55. Una empresa grande de productos de consumo transmite por televisión publicidad para uno de sus jabones. De acuerdo con una encuesta realizada, se asignaron probabilidades a los eventos siguientes.

B = una persona compra el producto

S = una persona recuerda haber visto la publicidad

$B \cap S$ = una persona compra el producto y recuerda haber visto la publicidad.

Las probabilidades fueron $P(B) = 0.20$, $P(S) = 0.40$ y $P(B \cap S) = 0.12$.

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona compre el producto dado que recuerda haber visto la publicidad? ¿Ver la publicidad aumenta la probabilidad de que el individuo compre el producto? Si usted tuviera que tomar la decisión, ¿recomendaría que continuara la publicidad (suponiendo que los costos sean razonables)?
 - b. Si una persona que no compra el producto de la empresa compra el de la competencia. ¿Cuál sería su estimación de la participación de la empresa en el mercado? ¿Esperaría que continuando con la publicidad aumentara la participación de la empresa en el mercado? ¿Por qué sí o por qué no?
 - c. La empresa probó también otra publicidad y los valores de probabilidad asignados fueron $P(S) = 0.30$, $P(B \cap S) = 0.10$. Dé $P(B | S)$ en el caso de esta otra publicidad. ¿Qué publicidad parece tener mejor efecto en la compra de los clientes?
56. Cooper Realty es una empresa inmobiliaria pequeña que se encuentra en Albany, Nueva York y que se especializa en la venta de casas residenciales. Últimamente quiso saber cuál era la posibilidad de que una de las casas que tiene en venta se vendiera en menos de un determinado número de días. Mediante un análisis de 800 casas vendidas por la empresa en los años anteriores se obtuvieron los datos siguientes.

		Días en venta hasta la compra			Total
		Menos de 30	31–90	Más de 90	
Precio pedido inicialmente	Menos de \$150 000	50	40	10	100
	\$150 000–\$199 999	20	150	80	250
	\$200 000–\$250 000	20	280	100	400
	Más de \$250 000	10	30	10	50
	Total	100	500	200	800

- a. Si A se define como el evento de que la casa esté en venta más de 90 días antes de ser vendida, estime la probabilidad de A .
- b. Si B se define como el evento de que el precio inicial sea menor que \$150 000, estime la probabilidad de B .
- c. ¿Cuál es la probabilidad de $A \cap B$?
- d. Suponga que se acaba de firmar un contrato para vender una casa en un precio inicial menor que \$150 000, ¿cuál es la probabilidad de que a Cooper Realty le tome menos de 90 días venderla?
- e. ¿Los eventos A y B son independientes?

57. Una empresa estudió el número de accidentes ocurridos en su planta de Brownsville, Texas. De acuerdo con información anterior, 6% de los empleados sufrieron accidentes el año pasado. Los directivos creen que un programa especial de seguridad reducirá este año los accidentes a 5%. Se estima además que 15% de los empleados que sufrieron un accidente el año pasado tendrán un accidente este año.
- ¿Qué porcentaje de los empleados sufrirá accidentes en los dos años?
 - ¿Qué porcentaje de los empleados sufrirá por lo menos un accidente en este periodo de dos años?
58. El departamento de recolección de impuestos de Estados Unidos en Dallas, preocupado por las declaraciones de impuestos fraudulentas, cree que la probabilidad de hallar una declaración de impuestos fraudulenta, dado que la declaración contiene deducciones que exceden el estándar, es 0.20. Dado que las deducciones no exceden el estándar, la probabilidad de una declaración fraudulenta disminuye a 0.02. Si 8% de las declaraciones exceden el estándar de deducciones, ¿cuál es la mejor estimación del porcentaje de declaraciones fraudulentas?
59. Una empresa petrolera compra una opción de tierra en Alaska. Los estudios geológicos preliminares asignaron las probabilidades previas siguientes.

$$P(\text{petróleo de alta calidad}) = 0.50$$

$$P(\text{petróleo de calidad media}) = 0.20$$

$$P(\text{que no haya petróleo}) = 0.30$$

- ¿Cuál es la probabilidad de hallar petróleo?
- Después de 200 pies de perforación en el primer pozo, se toma una prueba de suelo. Las probabilidades de hallar el tipo de suelo identificado en la prueba son las siguientes.

$$P(\text{suelo} \mid \text{petróleo de alta calidad}) = 0.20$$

$$P(\text{suelo} \mid \text{petróleo de calidad media}) = 0.80$$

$$P(\text{suelo} \mid \text{que no haya petróleo}) = 0.20$$

¿Cómo debe interpretar la empresa la prueba de suelo? ¿Cuáles son las probabilidades revisadas y cuáles son las nuevas probabilidades de hallar petróleo?

60. Las empresas que hacen negocios por Internet suelen obtener información acerca del visitante de un sitio Web a partir de los sitios visitados previamente. El artículo “Internet Marketing” (*Interfaces*, marzo/abril de 2001) describe cómo los datos sobre el flujo de clics en los sitios Web visitados se usan junto a un modelo de actualización Bayesiano para determinar el género de una persona que visita la Web. ParFore creó un sitio Web para la venta de equipo y ropa para golf. A los directivos de la empresa les gustaría que apareciera una determinada oferta para los visitantes del sexo femenino y otra oferta determinada para los visitantes del sexo masculino. En una muestra de visitas anteriores al sitio Web se sabe que 60% de las personas que visitan el sitio son hombres y 40% mujeres.
- ¿Cuál es la probabilidad previa de que el siguiente visitante del sitio Web sea mujer?
 - Suponga que el actual visitante de ParFore.com visitó previamente el sitio de la Web de Dillard, y que es tres veces más probable que ese sitio sea visitado por mujeres que por hombres. ¿Cuál es la probabilidad revisada de que el visitante actual de ParFore.com sea mujer? ¿Desplegaría la oferta que está dirigida más a hombres o a mujeres?

Caso problema

Los jueces del condado de Hamilton

Los jueces del condado de Hamilton llevan miles de casos cada año. En su inmensa mayoría la sentencia queda dictada. Sin embargo, en algunos casos hay apelaciones y algunas apelaciones revocan la sentencia. Kristen DelGuzzi de *The Cincinnati Enquirer* realizó, durante tres años, un estudio sobre los casos llevados por los jueces del condado de Hamilton. En la tabla 4.8 se muestran los resultados de los 182 908 casos llevados por 38 jueces en tribunales de primera instan-

TABLA 4.8 CASOS DESPACHADOS, APELADOS Y REVOCADOS EN LOS TRIBUNALES DEL CONDADO DE HAMILTON

archivo en CD
Judge

Tribunal de primera instancia			
Juez	Casos despachados	Casos apelados	Casos revocados
Fred Cartolano	3 037	137	12
Thomas Crush	3 372	119	10
Patrick Dinkelacker	1 258	44	8
Timothy Hogan	1 954	60	7
Robert Kraft	3 138	127	7
William Mathews	2 264	91	18
William Morrissey	3 032	121	22
Norbert Nadel	2 959	131	20
Arthur Ney Jr.	3 219	125	14
Richard Niehaus	3 353	137	16
Thomas Nurre	3 000	121	6
John O'Connor	2 969	129	12
Robert Ruehlman	3 205	145	18
J. Howard Sundermann	955	60	10
Ann Marie Tracey	3 141	127	13
Ralph Winkler	3 089	88	6
Total	43 945	1 762	199
Tribunal de relaciones domésticas			
Juez	Casos despachados	Casos apelados	Casos revocados
Penelope Cunningham	2 729	7	1
Patrick Dinkelacker	6 001	19	4
Deborah Gaines	8 799	48	9
Ronald Panioto	12 970	32	3
Total	30 499	106	17
Tribunal municipal			
Juez	Casos despachados	Casos apelados	Casos revocados
Mike Allen	6 149	43	4
Nadine Allen	7 812	34	6
Timothy Black	7 954	41	6
David Davis	7 736	43	5
Leslie Isaiah Gaines	5 282	35	13
Karla Grady	5 253	6	0
Deidra Hair	2 532	5	0
Dennis Helmick	7 900	29	5
Timothy Hogan	2 308	13	2
James Patrick Kenney	2 798	6	1
Joseph Luebbers	4 698	25	8
William Mallory	8 277	38	9
Melba Marsh	8 219	34	7
Beth Mattingly	2 971	13	1
Albert Mestemaker	4 975	28	9
Mark Painter	2 239	7	3
Jack Rosen	7 790	41	13
Mark Schweikert	5 403	33	6
David Stockdale	5 371	22	4
John A. West	2 797	4	2
Total	108 464	500	104

cia, tribunales de relaciones domésticas y tribunales municipales. Dos de los jueces (Dinkelacker y Hogan) no prestaron sus servicios en el mismo tribunal durante los tres años completos.

El objetivo del estudio de este periódico fue evaluar el trabajo de los jueces. Las apelaciones suelen ser el resultado de errores cometidos por los jueces, y el periódico deseaba saber qué jueces realizan bien su trabajo y qué jueces cometían demasiados errores. Se le solicita su ayuda para realizar el análisis de datos. Emplee sus conocimientos de probabilidad y de probabilidad condicional para ayudar a la clasificación de los jueces. Podrá analizar también la posibilidad de apelación y de revocación en los casos tratados en los distintos tribunales.

Informe administrativo

Elabore un informe con su clasificación de los jueces. Incluya un análisis de la posibilidad de apelación y de revocación del caso en los tres tribunales. Como mínimo su informe debe contener lo siguiente:

1. La probabilidad de que los casos sean apelados y revocados en los distintos tribunales.
2. La probabilidad, para cada juez, de que un caso sea apelado.
3. La probabilidad, para cada juez, de que un caso sea revocado.
4. La probabilidad, para cada juez, de revocación dada una apelación.
5. Clasifique a los jueces de cada tribunal de mejor a peor. Dé el criterio que usa y proporcione el fundamento que justifique su elección.