13.2 Cálculo.

Derivadas: $\vec{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$.

Vector Tangente $\vec{r}'(t)$ Tangente Unitario $\vec{T}(t) = \dfrac{r'(t)}{|r'(t)|}$.

Recta Tangente a la curva. $\vec{L}(t) = \vec{r}(a) + \vec{r}'(a)t$.

$$x = f(a) + t f'(a)$$
$$y = g(a) + t g'(a)$$
$$z = h(a) + t h'(a).$$

Integrales: $\int \langle f, g, h \rangle dt = \langle F + C_1, G + C_2, H + C_3 \rangle$

$$\int \vec{r}(t) dt = \vec{R}(t) + \vec{C}$$

$\vec{R}$ vector de antiderivadas

$\vec{C}$ vector de constantes

Definida: $\int_a^b \vec{r}(t) dt = \hat{i}\int_a^b f(t) dt + \hat{j}\int_a^b g(t) dt + \hat{k}\int_a^b h(t) dt$

Ejercicio 4: Evalúe los sigs. integrales.

a. $\int_0^1 \left[\frac{4}{1+t^2} \hat{i} + \sec^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)\hat{k} \right] dt. = I,$ $\tan(\pi/4) = 1$, $\tan(0) = 0$, $\tan^{-1} 1 = \pi/4$, $\tan^{-1} 0 = 0$.

$$I_1 = 4\hat{i} \tan^{-1} t \Big]_0^1 + \hat{k}\frac{4}{\pi}\tan\left(\frac{\pi t}{4}\right)\Big]_0^1$$

$$I_1 = 4\hat{i}\frac{\pi}{4} + \hat{k}\frac{4}{\pi}1 = \pi\hat{i} + \hat{k}\frac{4}{\pi} = \langle \pi, 0, \frac{4}{\pi} \rangle$$

b. $\int \langle te^{t^2}, te^t, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \rangle dt.$

Integre cada función.

x: $\int e^{t^2}(t\,dt) = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^{t^2} + C_1$

$u = t^2 \quad du = 2t\,dt.$

y: $\int te^t dt. = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C_2.$

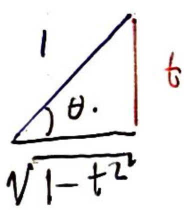
$u\,dv = uv - \int v\,du.$

$u = t \quad dv = e^t dt.$

$du = dt \quad v = e^t$

z: $\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\cos\theta} = \int d\theta = \theta + C_3.$

$= \sin^{-1}(t) + C_3.$



$t = \sin\theta.$

$dt = \cos\theta\, d\theta.$

$\sqrt{1-t^2} = \cos\theta.$

$$\int \langle te^{t^2}, te^t, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \rangle dt = \langle \frac{1}{2}e^{t^2} + C_1, te^t - e^t + C_2, \sin^{-1}t + C_3 \rangle$$

Movimiento en el espacio.

Dado el vector de posición $\vec{r}(t)$. de un objeto.

Vector Velocidad: $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$

Vector Aceleración $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t)$

Rapidez: $|\vec{v}(t)|$ Distancia $|\vec{r}(t)|$

Dado el vector de aceleración $\vec{a}(t)$

velocidad: $\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)\,dt + \vec{C_1}$

desplazamiento o posición: $\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)\,dt + \vec{C_2}$.

Las CI's $\vec{v}(0)$ y $\vec{r}(0)$ nos permiten encontrar el valor de $\vec{C_1}$ y $\vec{C_2}$ resp.

Ejercicio 1: Encuentre la velocidad, aceleración y rapidez dada la posición del objeto. y la distacia

$$\vec{r}(t) = \hat{\imath}\, t + 2\hat{\jmath} \cosh(4t) + 3\hat{k} \sinh(3t).$$

Velocidad: $\vec{r}\,'(t) = \vec{v}(t) = \hat{\imath} + 8\hat{\jmath} \sinh(4t) + 9\hat{k} \cosh(3t)$.

Aceleración: $\vec{r}\,''(t) = \vec{a}(t) + 32\hat{\jmath} \cosh(4t) + 27\hat{k} \sinh(3t)$

Rapidez: $|\vec{v}(t)| = \sqrt{1 + 64\sinh^2(4t) + 81\cosh^2(3t)}$

Distancia: $|\vec{r}(t)| = \sqrt{t^2 + 4\cosh^2(4t) + 9\sinh^2(3t)}$

Tarea 6 Integrales Func. Vectoriales

14.1 Funciones en Varias Variables.

Tarea Opcional Consolidado 12, 13, 14.1.

Ejercicio 2: Encuentre la velocidad y posición del objeto dada $\vec{a}(t)$ y las condiciones iniciales.

$$\vec{a}(t) = 6t\,\hat{i} + \hat{j}\cos t - \hat{k}\sin(2t), \qquad \vec{v}(0) = \hat{i} + \hat{k}$$
$$\vec{r}(0) = 2\hat{j} - \hat{k}$$

velocidad: $\int \vec{a}(t)\,dt$

$$\vec{v}(t) = \left\langle 3t^2 + \underset{1}{c_1},\ \sin t + \overset{0}{\cancel{c_2}},\ \frac{1}{2}\cos(2t) + \overset{1/2}{\cancel{c_3}} \right\rangle$$

$$\vec{v}(0) = \left\langle c_1,\ c_2,\ \frac{1}{2} + c_3 \right\rangle = \langle 1, 0, 1 \rangle$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad \frac{1}{2} + c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{2}$$

Posición: $\int \vec{v}(t)\,dt$.

$$\vec{r}(t) = \left\langle t^3 + t + d_1,\ -\cos t + d_2,\ \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2} + d_3 \right\rangle$$

$$\vec{r}(0) = \langle d_1,\ -1 + d_2,\ d_3 \rangle = \langle 0, 2, -1 \rangle$$

$$d_1 = 0, \quad -1 + d_2 = 2, \quad d_3 = -1$$
$$d_2 = 3.$$

Posición: $\vec{r}(t) = \left\langle t^3 + t,\ 3 - \cos t,\ \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2} - 1 \right\rangle$.

b. $\vec{a}(t) = 8t\,\hat{i} + \sinh t\,\hat{j} - \hat{k}\,e^{t/2}$, $\quad \frac{1}{2}e^{t/2}$

$\vec{v}(0) = \vec{0} \qquad \vec{s}(0) = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$

"En reposo"

Velocidad: $\vec{v}(t) = \langle 4t^2 + C_1, \cosh t + C_2, -2e^{t/2} + C_3 \rangle$

$\vec{v}(0) = \langle C_1, 1 + C_2, -2 + C_3 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$.

$C_1 = 0, \quad C_2 = -1 \quad C_3 = 2$

$\vec{v}(t) = \langle 4t^2, \cosh t - 1, -2e^{t/2} + 2 \rangle$

Posición: $\vec{r}(t) = \langle \frac{4}{3}t^3 + C_1, \sinh t - t + C_2, -4e^{t/2} + 2t + C_3 \rangle$

$\vec{r}(0) = \langle C_1, C_2, -4 + C_3 \rangle = \langle 2, 1, -3 \rangle$

$C_2 = 1 \qquad C_3 = -3 + 4 = 1$

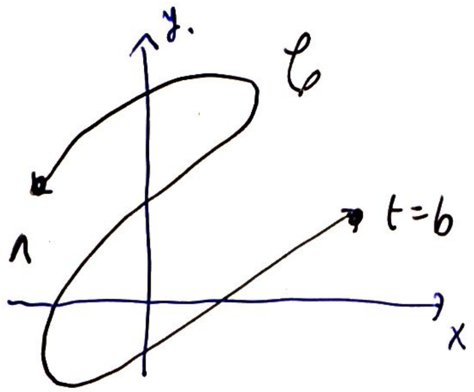
$\vec{r}(t) = \langle \frac{4}{3}t^3 + 2, \sinh t - t + 1, -4e^{t/2} + 2t + 1 \rangle$

13.3 Longitud de Arco.

10.4. Ecs. paramétricas de una curva en el plano.

$x = f(t)$

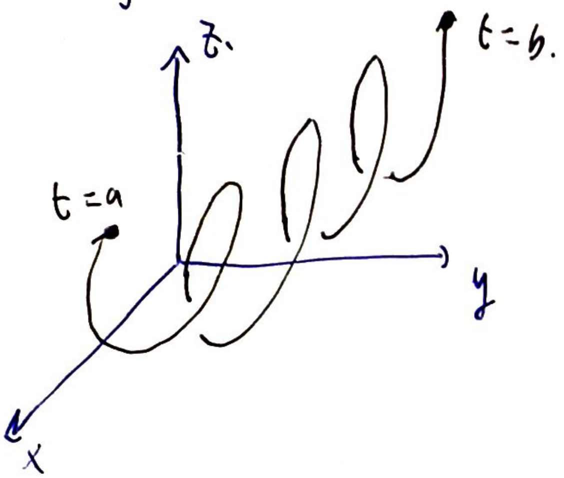
$y = g(t)$



Longitud de arco.

$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt.$$

Longitud de una curva en el espacio



$x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$

$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, dt.$$

Función vectorial: $\vec{r} = \langle f, g, h \rangle = \langle x, y, z \rangle.$

Derivada: $\vec{r}\,' = \langle x', y', z' \rangle.$

Magnitud: $|\vec{r}\,'| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$

$$\boxed{L = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\, dt.}$$

integre la magnitud del vector tangente.

Ejercicio 1: p 63 Encuentre la longitud de las sigs. curvas.

a. $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, \ln(\cos t) \rangle \quad 0 \leq t \leq \pi/4.$

$$L = \int_0^{\pi/4} |r'(t)|\, dt.$$

$$r'(t) = \left\langle -\sin t, \cos t, \overbrace{\frac{-\sin t}{\cos t}}^{-\tan t.} \right\rangle$$

$$|r'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \tan^2 t}$$

$$= \sqrt{1 + \tan^2 t} = \sqrt{\sec^2 t} = \sec t.$$

$$L = \int_0^{\pi/4} \sec t \, dt = \ln(\sec t + \tan t)\Big]_0^{\pi/4.}$$

$$= \ln(\sec \pi/4 + \tan \pi/4)$$
$$- \ln(\sec 0 + \tan 0)$$

$$L = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right) - \overset{0}{\cancel{\ln(1)}} = \ln|\sqrt{2} + 1|$$

b. $\vec{r}(t) = \langle 12t, 8t^{3/2}, 3t^2 \rangle \quad$ en $\quad 0 \leq t \leq 1$

$$r'(t) = \langle 12, 12t^{1/2}, 6t \rangle = 6\langle 2, 2t^{1/2}, t \rangle.$$

$$|r'(t)| = 6\sqrt{4 + 4t + t^2} = 6\sqrt{(t+2)^2} = 6(t+2)$$

$$L = \int_0^1 (6t + 12)\, dt = 3t^2 + 12t\Big]_0^1 = 3 + 12 = 15$$