CÁLCULO MULTIVARIABLE PARCIAL 3

Debe enviar su examen escaneado antes de las 4 pm al profesor (cfketelaar@ufm.edu) y al auxiliar (josuerodas@ufm.edu).

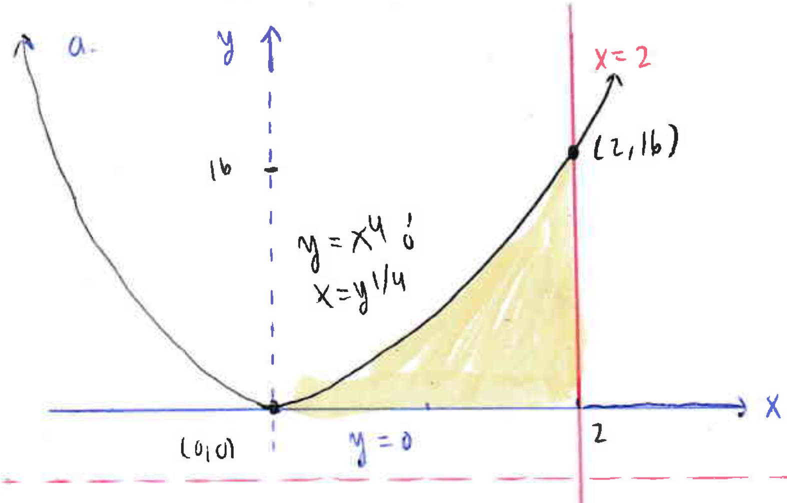
1. Considere la región D entre la curva $x = y^{1/4}$, la recta $x = 2$ & $y = 0$.

   (a) (10 **pts.**) Dibuje la región de integración.

   (b) (10 **pts.**) Escriba la región como una tipo I y uno tipo II.

   (c) (10 **pts.**) Evalúe $I_1 = 30 \iint_D \sqrt{x^5+4}\ dA$. Simplifique a un entero.

   (d) (5 **pts.**) Encuentre el área de la región D. El área no es un entero.



(1pt). Intersección (0,0)
(1pt) Intersección (2,16)
(3pts.) Gráfica de $x = y^{1/4}$
(3pts.) Región sombreada.
(1pt.) Gráfica de $x = 2$
(1pt.) $y = 0$ es un borde.

b. Tipo I: de abajo a arriba. $dy\,dx$ — $0 \le x \le 2$ (2pts.) — $0 \le y \le x^4$ (3pts.)

Tipo II: de izquierda a derecha. $dx\,dy$. — $0 \le y \le 16$ (2pts.) — $y^{1/4} \le x \le 2$ (3pts.)

c. Integre como tipo I, no se puede integrar $\int \sqrt{x^5+4}\ dx$.

$$I_1 = 30 \iint_D (x^5+4)^{1/2} dA = 30 \int_0^2 \int_0^{x^4} (x^5+4)^{1/2} dy\, dx = 30 \int_0^2 (\underbrace{x^5+4}_{u})^{1/2} \underbrace{x^4 dx}_{du/5}$$

(2pts.)

$$I_1 = 6 \cdot \frac{2}{3} (x^5+4)^{3/2} \Big]_0^2 = 4\left(36^{3/2} - 4^{3/2}\right) = 4(216 - 8) = 832$$

(2pts) (2pts.) (2pts.) (2pts.)

d. $A = \iint_D dA = \int_0^2 \int_0^{x^4} dy\, dx = \int_0^2 x^4 dx = \frac{1}{5} x^5 \Big]_0^2 = \frac{32}{5}$

(1pt.) (1pt.) (1pt.) (1pt.) (1pt.)

pueden usar sólo $\int_a^b f(x)\,dx$.

2. Considere $I_2 = \iint_D \dfrac{16}{x^2+y^2+1}\, dA$.

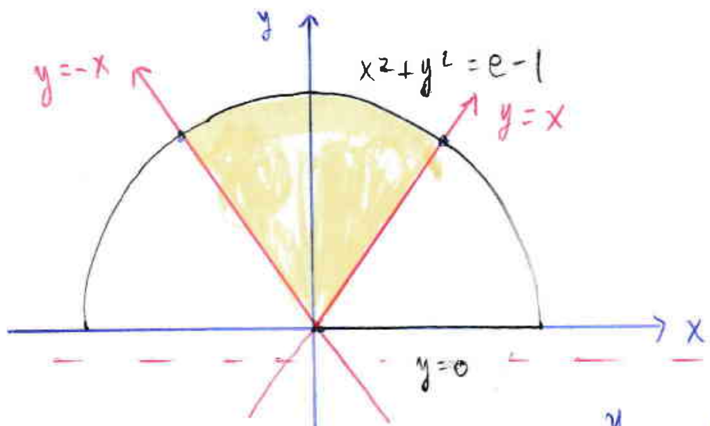
D está entre $y=-x$, $y=x$ & el semidisco superior $0 \leqslant x^2+y^2 \leqslant e-1$.

(a) (**09 pts.**) Dibuje la región de integración.

(b) (10 **pts.**) Reescriba la región usando un sistema de coordenadas apropiado.

(c) (**10 pts.**) Evalúe la integral. Simplifique a un entero de π.

a.



(2 pts.) Gráfica de $x^2+y^2=e-1$

(2 pts.) Gráfica de $y=x$

(2 pts.) Gráfica de $y=-x$

(3 pts.) Región Sombreada.

---

b. use $x^2+y^2=r^2$ & $\dfrac{y}{x} = \dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta$.

Pueden encontrarlos con geometría.

Circunferencia $x^2+y^2=e-1$ Polares $r=\sqrt{e-1}$ (2 pts.)

Recta $y=x \Rightarrow \tan\theta = 1$ Polares $\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$ (2 pts.)

Recta $y=-x \Rightarrow \tan\theta=-1$ (2do cuadrante) Polares $\theta_2 = \dfrac{3\pi}{4}$ (2 pts.)

Límites en Polares $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{3\pi}{4}$ (2 pts.) $0 \leqslant r \leqslant \sqrt{e-1}$ (2 pts.)

---

c. Reescriba $x^2+y^2+1 = r^2+1$ (1 pt.)

$$I_2 = \iint_D \frac{16}{x^2+y^2+1}\, dA = \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{16r}{r^2+1}\, dr\, d\theta. = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 8\ln(r^2+1)\Big]_{r=0}^{r=\sqrt{e-1}} d\theta.$$

(3 pts.) (2 pts.)

$$I_2 = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 8\underbrace{\ln(e-1+1)}_{\ln e = 1} - 8\underbrace{\cancel{\ln(1)}}_{0}\, d\theta = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 8\, d\theta. = 8\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 4\pi.$$

(1 pt.) (1 pt.) (1 pt.) (2 pts.)

3. Considere $I_3 = \int_{-5}^{0} \left(\int_{0}^{\sqrt{25-y^2}} 8(x^2+y^2)^{3/2}\, dx \right) dy$.

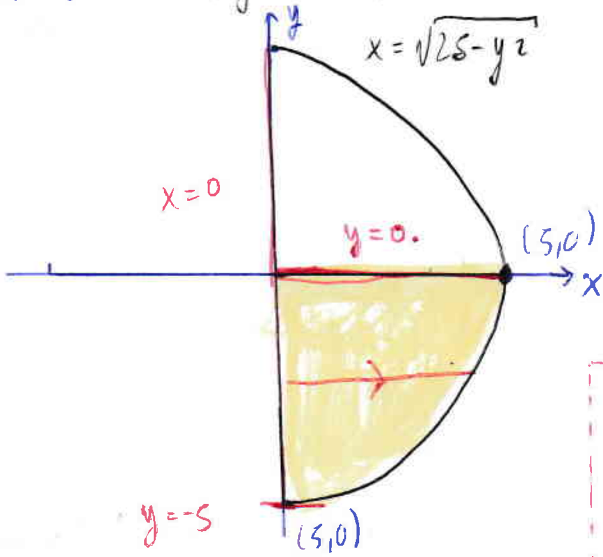
(a) (10 **pts.**) Dibuje la región de integración.

(b) (10 **pts.**) Escriba la región como una tipo I, tipo II y polar.

(c) (10 **pts.**) Evalúe la integral. Simplifique a un múltiplo de π.

(d) (05 **pts.**) Encuentre el área de la región de integración.

a. Límites: $0 \leq y \leq -5$, $0 \leq x \leq \sqrt{25-y^2}$ (2 pts.)



(2pts.) Gráfica de $\sqrt{25-y^2}$

(3pts.) Región Sombreada.

(3pts) los bordes son $y=0,\ x>0$

$x=0,\ y<0.$

b. Tipo I : $0 \leq x \leq 5$, $-\sqrt{25-x^2} \leq y \leq 0$ (4pts.)

Tipo II $-5 \leq y \leq 0$, $0 \leq x \leq \sqrt{25-y^2}$ (2pts.)

b. Use coordenadas polares. $0 \leq r \leq 5$ (2 pts.)

La región está en el cuarto cuadrante. $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ (2 pts.)

c. Reescriba $8(x^2+y^2)^{3/2} = 8(r^2)^{3/2} = 8r^3$ (1pt.)

$$I_3 = \iint_D 8(x^2+y^2)^{3/2}\, dA = \int_{3\pi/2}^{2\pi} \int_0^5 8r^3\, r\, dr\, d\theta = \int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{8}{5} r^5 \Big]_{r=0}^{5} d\theta = \int_{3\pi/2}^{2\pi} 8 \cdot 5^4\, d\theta.$$

(2 pts.) (2pts) (1 pt.)

$$I_3 = 8(3125)\,\theta \Big]_{3\pi/2}^{2\pi} = 8(3125)\frac{\pi}{2} = 4 \cdot 3125\,\pi = 12{,}500\,\pi$$ (2pts.)

(1pt.) (1pt.)

$$d.\quad A = \iint dA = \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \int_0^5 r\, dr\, d\theta = \left(\int_{3\pi/2}^{\pi/2} d\theta\right)\left(\frac{r^2}{2}\Big]_{r=0}^{r=5}\right) = \frac{\pi}{2}\,\frac{25}{2} = \frac{25\pi}{4}$$

(1pt.) (1 pt.) (2pts) (1pt.)

El área es igual a un cuarto del área de un círculo de radio 5. Pueden usar geometría.