Repaso de estadística 1 - parcial 2

David Gabriel Corzo Mcmath

2020 April 13, 04:24PM

---

1. Variables aleatorias

- ***Definición de "Variable aleatoria":*** *Auna variable aleatoria que asuma ya sea un número finito de valores o una sucesión infinita de valores tales como 0, 1, 2, . . ., se le llama variable aleatoria discreta*
- ***Definición de "Variable aleatoria continua":*** *Auna variable que puede tomar cualquier valor numérico dentro de un intervalo o colección de intervalos se le llama variable aleatoria continua. Los resultados experimentales basados en escalas de medición tales como tiempo, peso, distancia y temperatura pueden ser descritos por variables aleatorias continuas*

---

2. Distribuciones de probabilidad discreta

- ***Definición de "Distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta":*** *La disribución de probabilidad de una variable aleatoria describe cómo se distribuyen las probabilidades entre los valores de la variable aleatoria, esta se describe por una función de probabilidad.*
- Ejemplo: **Venta de vehículos**

Días	Cantidad de autos vendidos
54	0
117	1
72	2
42	3
12	4
3	5
Total: 300	

- x = número de automóviles vendidos en un día.

f(x)	Probabilidad
f(0)	54/300 = 0.18
f(1)	117/300 = 0.39
f(2)	72/300 = 0.24
f(3)	42/300 = 0.14
f(4)	12/300 = 0.04
f(5)	3/300 = 0.01

- Una función de probabilidad:
  - Es: $f(x) \geq 0$
  - Es: $\sum f(x) = 1$

3. Función de probabilidad uniforme discreta

3.1. Fórmula

$$f(x) = \frac{1}{n}$$

Donde n es el número de valores que puede tomar la variable aleatoria.

3.2. Valor esperado

$$E(x) = \mu = \sum x \cdot f(x)$$

Es equivalente al promedio.

3.3. Varianza

$$Var(x) = \sigma^2 = \sum \left(x - \underbrace{\mu}_{\text{Valor esperado}} \right)^2 f(x)$$

3.4. Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

---

4. Distribución de probabilidad binomial

- Propiedades de un experimento binomial:
  1. Consiste en una serie de n ensayos **idénticos**.
  2. En cada ensayo hay dos resultados posibles. Auno de estos resultados se le llama *éxito* y al otro se le llama *fracaso*.
  3. La probabilidad de éxito p, no cambia de ensayo a otro. Por ende, la probabilidad de fracaso, que se denota $1 - p$, tampoco cambia de un ensayo a otro.
  4. Los ensayos son independientes.
- Componentes:
  - n número de ensayos
  - x variable aleatoria
  - p probabilidad de éxito
  - $1 - p$ probabilidad de fracaso
- El número de resultados experimentales es una combinación:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

donde $n! = n(n-1)(n-2)...(2)(1)(0)$ y $0! = 1$

- Martin clothing store:
  - Componentes:
    - $n = 3$, tres ensayos
    - $p = 0{,}30$, probabilidad de que compren de 0,30 (éxito)
    - $1 - p = 0{,}70$, probabilidad que no compren (fracaso)
  - Calcular el número de resultados experimentales en los que hay dos éxitos:

$$\binom{n}{x} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

- Función de probabilidad binomial:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}$$

  donde:

  - $f(x)$: Probabilidad de x éxitos en n ensayos.
  - n: número de ensayos
  - $\binom{n}{x}$: combinaciónes de x en n elementos.
  - p: probabilidad de éxito
  - $1 - p$: probabilidad de fracaso

- Ejemplo de Martin clothing store con probabilidades binomiales:

x	$f(x)$
0	$(3!/0! \cdot 3!)\,(0{,}03)^0\,(0{,}70)^3 = 0{,}343$
1	$(3!/1! \cdot 2!)\,(0{,}03)^1\,(0{,}70)^2 = 0{,}441$
2	$(3!/2! \cdot 1!)\,(0{,}03)^2\,(0{,}70)^1 = 0{,}189$
3	$(3!/3! \cdot 0!)\,(0{,}03)^3\,(0{,}70)^0 = 0{,}027$

- Valor esperado o promedio de la distribución binomial:

$$E(x) = \mu = n \cdot p$$

- Varianza de la distribución binomial:

$$Var(x) = \sigma^2 = n \cdot p\,(1-p)$$

4.1. Argumentos en excel de las probabilidades binomiales

$$\texttt{=DISTR.BINOM.N(}\quad \overbrace{x}^{\text{variable aleatoria}} \quad ; \quad \underbrace{n}_{\text{número de ensayos}} \quad ; \quad \overbrace{p}^{\text{probabilidad de éxito}} \quad ;\ \text{FALSO}\ )$$

---

5. Distribución Poisson

5.1. Se usa cuando...

En esta sección estudiará una variable aleatoria discreta que se suele usar para estimar el número de veces que sucede un hecho determinado (ocurrencias) en un intervalo de tiempo o de espacio. Ocurrencias / tiempo ó espacio

5.2. Condiciones de uso de Poisson

Si se satisfacen las condiciones siguientes, el número de ocurrencias es una variable aleatoria discreta, descrita por la distribución de probabilidad de Poisson:

1. La probabilidad de ocurrencia es la misma para cualesquiera dos intervalos de la misma longitud.
2. La ocurrencia o no-ocurrencia en cualquier intervalo es independiente de la ocurrencia o no-ocurrencia en cualquier otro intervalo.

5.3. Función de probabilidad de Poisson

Función de probabilidad de Poisson:

$$f(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

en donde:

- $f(x)$: probabilidad de x ocurrencias en un intervalo
- μ: valor esperado o número medio de ocurrencias
- e el número de Euler, 2.71...

5.4. Formula en excel

$$\texttt{=POISSON.DIST(}\ \underbrace{x}_{\text{Variable aleatoria}}\ ,\ \overbrace{\mu}^{\text{media}}\ ,\ \underbrace{\text{FALSO}}_{\text{Acumulado}}\ \texttt{)}$$

---

6. Probabilidad hipergeométrica

6.1. La distribución hipergeométrica es...

La distribución de probabilidad hipergeométrica está estrechamente relacionada con la distribución binomial. Pero difieren en dos puntos: **en la distribución hipergeométrica los ensayos no son independientes y la probabilidad de éxito varía de ensayo a ensayo.**

6.2. Componentes

- r: número éxitos
- N: población total
- $N - r$: número de fracasos
- n: muestra
- x: variable aleatoria

6.3. Función de probabilidad geométrica

$$f(x) = \frac{\binom{r}{n}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

donde $0 \leq x \leq r$

- $f(x)$: probabilidad de x éxitos en n ensayos.
- n: número de ensayos
- N: número de elementos en la población
- r: número de elementos en la población considerados éxitos.

6.4. Consideraciones

- $\binom{N}{n}$: número de maneras que es posible tomar n de N
- $\binom{r}{x}$: número de maneras que es posible tomar x éxitos de un total de r éxitos en una población.
- $\binom{N-r}{n-x}$: número de veces que se pueden tomar $n-x$ de $N-r$.

6.5. Ejemplo

Se tienen empaques de 12 unidades, in inspector quiere seleccionar aleatoriamente tres de estas 12 unidades, si la caja tiene cinco fusibles defectuosos, ¿Cuál es la probabilidad que le salga uno de los tres fusibles sdefectuoso? . Considerar:

- $N = 12$ el tamaño de la población
- $n = 3$ el tamaño de la muestra del inspector
- $r = 5$ consideramos defecto como éxito
- $x = 1$ se quiere saber la probabilidad de encontrar sólo uno

$$f(1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{7}{2}}{\binom{12}{3}} = 0{,}4773$$

¿Cuál es la posibilidad de encontrar **por lo menos uno defectuoso**?

- Defecto es r, entonces queremos que $r = 0$

$$f(0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{7}{3}}{\binom{12}{3}} = 0{,}1591$$

$f(x = 0)$ es la probabilidad de tener 0 defectos, la probabilidad es que encontremos uno, dos o incluso tres defectos. Entonces $1 - f(x = 0)$ por complemento encontramos $f(x < 0) = 0{,}8409$

6.6. Fórmula con excel

$$\texttt{=DISTR.HIPERGEOM(}\quad \underbrace{x}_{\text{Variable aleatoria}} \quad ; \quad \overbrace{n}^{\text{Muestra}} \quad ; \quad \underbrace{r}_{\text{Población de éxito}} \quad ; \quad \overbrace{N}^{\text{Población}} \quad \texttt{)}$$

7. Distribución de probabilidad uniforme

7.1. La distribución es...

Hace uso de variables aleatorias contínuas. Se asume que todos los valores son igualmete probables.

1. No se habla de una variable aleatoria tomando un valor si no un intervalo.
2. Si se toma un valor esa probabilidad tiende a 0.

7.2. Función de densidad de probabilidad uniforme

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{Para } \ a \leq x \leq b \\ 0 & \text{En cualquier otro caso} \end{cases}$$

7.3. Fórmulas para esta distribución

7.3.1. Valor esperado

$$E(x) = \frac{a+b}{2}$$

7.3.2. Varianza

$$\frac{(b-a)^2}{12}$$

7.4. Fórmulas con excel

No hay.

---

8. Distribución de probabilidad normal

8.1. La distribución es...

Consiste de variables aleatorias contínuas.

8.2. Función de densidad de probabilidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\mu^2}$$

donde:

- μ: media
- σ: desviación estándar
- π: número de circunferencia unitaria (3.14...)
- e: número de Euler (2.71...)

8.3. Propiedades de las curvas normales

1. Las distribuciones normales se diferencian por medio de dos parámetros: μ (media) & σ (desviación estándar).
2. El punto más alto de la curva normal se encuentra sobre la media, la cuenta coincide con la mediana y la moda.
3. La media de una distribución normal puede tener cualquier valor, de $-\infty$ a ∞.
4. La distribución normal es simétrica. Su sesgo es cero.
5. La desviación estándar σ determina qué tan plana o ancha sea la curva, mientras más grande la desviación más plana.
6. El área de $-\infty$ a la media(μ) es siempre 0.5, al igual que el área entre la media (μ) a ∞ es siempre 0.5.
7. Los porcentajes de los valores que se encuentran en algunos intervalos comúnmente usados son:
   a) 68.3 % de los valores pertinentes a la variable aleatoria se encuentran a $\pm$ una desviación estándar de la media.
   b) 95.4 % de los valores pertinentes a la variable aleatoria se encuentran a $\pm$ dos desviaciones estándar de la media.
   c) 99.7 % de los valore pertinentes a la variable aleatoria se encuentran $\pm$ tres desviaciones estándar de la media.

---

9. Distribución de probabilidad normal estándar

Es una distribución de probabilidad normal solo que con la media (μ) igual a 0 y la desviación estándar igual a 1; $\mu = 0$, $\sigma = 1$

9.1. Función de probabilidad normal estándar

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{z^2/2}$$

9.2. Tres probabilidades necesarias para calcular

1. Probabilidad que la variable aleatoria normal estándar z sea menor o igual que un valor dado.
2. Probabilidad de z esté entre dos valores dados.
3. Probabilidad que z sea mayor o igual que un valor dado.

9.3. Conversión de variables aleatorias normales a variables aleatorias estándares

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

9.4. Fórmulas en excel

$$\texttt{=DISTR.NORM.ESTAND.N(} \underbrace{z}_{\text{Punto z}} \; ; \; \overbrace{\text{FALSO}}^{\text{Acumulado}} \texttt{)}$$

---

10. Aproximación normal de las probabilidades binomiales

10.1. Se usa para...

Tener una aproximación a las probabilidades sacadas de la binomial.

10.2. Fórmulas

- La media: $\mu = n \cdot p$ donde n es número de ensayos y p es probabilidad de éxitos.
- La desviación estándar: $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

---

11. Distribución de probabilidad exponencial

11.1. Propiedades de la distribución exponencial

- La media de la distribución y la desviación estándar de la distribución son iguales.
- La distribución exponencial está sesgada a la derecha.

11.2. Función de densidad de probabilidad exponencial

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}$$

para $x \geq 0, \mu > 0$
Donde $\mu =$ valor esperado o media

11.3. Relación entre la distribución de Poisson y la exponencial

- Poisson: una distribución de probabilidad discreta que se usa para examinar el número de ocurrencias de un evento en un determinado intervalo de tiempo o espacio.
- Distribución exponencial da una descripción de la longitud de los intervalos entre las ocurrencias.
- La media en Poisson $= 10 \rightarrow$ la media exponencial es $\frac{1}{10}$.

11.3.1. Media Poisson y media exponencial

$$\overbrace{\mu}^{\text{Media Poisson}} = k \qquad \overbrace{\lambda}^{\text{Media exponencial}} = \frac{1}{\mu}$$