Clase 2020-01-30

David Gabriel Corzo Mcmath

2020-Jan-30 10:22:58

1. Resolución de corto

- Determine el área del triángulo entre los puntos P(), Q(), R():

$$\begin{aligned}\vec{a} = \overrightarrow{PQ} &= \langle 4, 3, -2 \rangle \\ \vec{b} = \overrightarrow{PR} &= \langle 5, 5, 1 \rangle \\ \text{Área } &= \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \\ \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} &= 13\hat{i} - 14\hat{j} + 5\hat{k} \\ \text{Área } &= \frac{1}{2}\sqrt{}\end{aligned}$$

2. Rectas y planos

- Ecs. Rectas: $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$

$$\text{si } a \neq b \neq c \neq 0 \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

- Paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$

- Ecuación de plano:

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \cdot\vec{r} - \vec{r_0} \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\ \hat{n} &= \vec{a} \times \vec{b} \end{aligned}$$

2.1. Ejercicios

1. Considere los planos $x + y = 0$ & $x + 2y + z = 1$.

   a) Determine si los planos son paralelos so no lo son encuentre el ángulo entr ellos:

$$\hat{n_1} = \langle 1, 1, 0 \rangle$$
$$\hat{n_2} = \langle 1, 2, 1 \rangle$$
$$\therefore \text{ Los dos planos no son paralelos}$$

   - El $\hat{n_1}$ & $\hat{n_2}$ no son necesariamente ortogonales.

$$\cos\theta = \frac{\hat{n_1} \cdot \hat{n_2}}{|\hat{n_1}|\,|\hat{n_2}|} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$
$$\cos\theta = \frac{3}{\cancel{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

2. Encuentre la ec. de la recta que interseca a ambos planos $x + y = 0$ & $x + 2y + z = 1$:

$$r = \vec{r_0} + t\vec{v}$$

Dos puntos sobre la recta

Como la recta esta en ambos planos, se debe resolver el sig. sistema de ecuaciones

$$x + y = 0 \implies x = -y$$
$$x + 2y + z = 1 \implies y = z - 1$$

z tiene cualquier valor, ahora encontrar escogiendo cualquier punto sobre la recta, en este caso 0

Primer punto $z = 0$
$y = 1$
$x = -1$
$\therefore \langle -1, 1, 0 \rangle$

Segundo punto $z = 1$
$y = 0$
$x = 0$
$\therefore \langle 0, 0, 1 \rangle$

3. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por P(-1,1,0) y Q$\underbrace{(0, 0, 1)}_{r_0}$:

$$\vec{r_0} = \langle 0, 0, 1 \rangle \langle -1, 1, 0 \rangle$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{QP} 0 \, \langle -1, 1, -1 \rangle$$

Ecuaciones paramétricas de la recta:

$$x = 0 - t \quad y = 0 + t \quad z = 1 - t$$

4. Solución alterna:

$$x = -y \quad y = 1 - z \quad \text{Más incognitas que ecuaciones.}$$
$$x, y \text{ ó } z \quad \text{pueden tener cualquier valor} \quad z = t$$
$$\begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 1 - t \;\; \therefore v_2 = \langle 1, -1, 1 \rangle \quad \vec{r_0} = \langle -1, 1 - 0 \rangle \\ t &= t \end{aligned}$$

5. Solución geométrica:
   - Encuentre un punto en ambos planos (0,0,1).
   - L arecta está en el plano I, entonces la recta es perpendicular al vector normal del plano I.
   - Está en el plano z, entonces también es perpendicular al segundo vector normal.
   - $\therefore$ la recta es perpendicular a ambos $\hat{n_1}$ & $\hat{n_2}$

$$\vec{v} = \hat{n_1} \times \hat{n_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$
$$\text{Ecuación de la recta:} \quad r = \langle 0, 0, 1 \rangle + t \langle 1, -1, 0 \rangle$$

6. Ejercicio 3: Encuentre el punto en el que la línea recta $x = 1 + 2t$, $y = 4t$, $z = 5t$ interseca al plano. $x - y + 2z = 17$.

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 4t \\ z &= 5t \end{aligned}$$
$$\text{Plano}$$
$$x - y + 2z = 17 \quad 1 + 2t - 4t + 10t = 17$$
$$8t = 16 \implies \therefore t = 2$$

   El punto de intersección es (5,8,10).

7. Ejercicio 4: Encuentre una ec. del plano que contiene la recta $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 4 - 3t$ y es paralela a plano $5x + 2y + z = 1$.
   - Cualquier punto sobre la recta que también esté sobre el plano, t= 0.

$$\text{Evaluemos en t=0} \quad x = 1,\ y = 2,\ z = 4$$
$$\vec{r_0} = \langle 1, 2, 4 \rangle$$

   - **Nos preguntamos:** ¿Cómo se encuentra $\hat{n}$?
   - El vectos de dirección de la recta $v = \langle 1, -1, -2 \rangle$ es paralelo al plano.
   - Como es paralelo al seguno plano, entonces tiene que ser perpendicular $\hat{n_2} = \langle 5, 2, 1 \rangle$
   - Lo que ocurre entonces es:

$$\vec{r_0} = \langle 1, 2, 4 \rangle \quad \hat{n} = \langle 5, 2, 1 \rangle$$
$$\text{Ec. Plano:} \quad \implies 5(x - 1) + 2(y - 2) + 1(z - 4) = 0$$

8. Ejercicio 5: Encuentre los números directores para la recta de intersección entre los planos $x+y+z=1$ & $x+2y+3z=1$.

   - ***Definición de "numeros directores":*** *a,b,c del vector de dirección* $\langle a,b,c\rangle$
   - La recta es ortogonal a ambos vectores normales:

$$\hat{n_1}=\langle 1,1,1\rangle \quad text\&\hat{n_2}=\langle 1,2,3\rangle \qquad \text{de ambos planos}$$

$$\vec{v}=\hat{n_1}\times\hat{n_2}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$$

$$\text{Los números directores:} \quad a=1,b=2,c=1$$

9. Ejercicio 6: Encuentre las ecs. aparamétricas de la recta que pasa por el punto (0,1,2), que es paralelo al plano $x+y+z=2$ y es perpendicular a la recta $r=\langle -2t,0,3t\rangle$.

$$L_1 r=\vec{r_0}+t\vec{v} \quad r_0=\langle 0,1,2\rangle$$

   - Aclaraciones: L_1 es la incógnita que tenemos que encontrar.
   - **Nos preguntamos:** ¿Cómo se encuentra r?
   - Plano I: $\hat{n}=\langle 1,1,1\rangle$ es perpendicular al plano, es paralelo a L_1.
   - Recta II: $\hat{v_2}=\langle -2,0,3\rangle$ es perpendicular a L_1
   - La recta es perpendiculae a $\hat{n}$ y a $\vec{v_2}$

$$v=\hat{n}\times\vec{v_2}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 3\end{vmatrix}=3\hat{i}-5\hat{j}+2\hat{k}$$

$$r_0=\langle 0,1,2\rangle$$

$$v=\hat{v_2}\times\hat{n} \qquad \text{Ecuaciones paramétricas:}$$

$$x=0-3t$$
$$y=1-5t$$
$$z=2+2t$$