Material de apoyo - Cálculo Multivariable 1

David Gabriel Corzo Mcmath

2020-01-06

Índice general

Parte I

Exámenes cortos

Capítulo 1

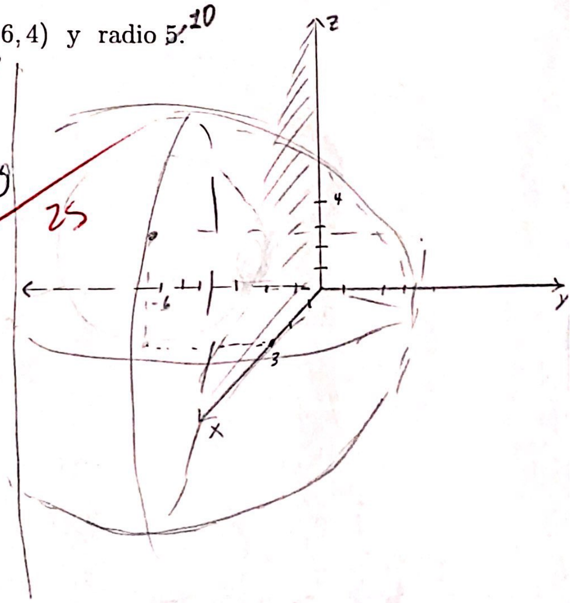
Exámen corto #01

Corto #1 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: David Corzo **Carnet:** 20190432

Resuelva las siguientes problemas:

1. (50 pts.) Halle la ecuación de la esfera con centro $(3, -6, 4)$ y radio 5. 10
   ¿Cuál es la intersección de esta esfera con el plano xz?



Ecuación : $\sqrt{(x-3)^2 + (y+6)^2 + (z-4)^2} = 10$

25

Se asume $y = 0$;

$$\sqrt{(x-3)^2 + (z-4)^2 + (6)^2} = 10$$

$$(x-3)^2 + (z-4)^2 + 36 = 10^2$$

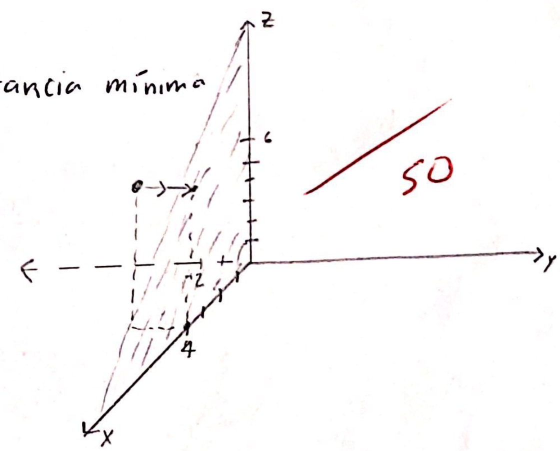
$$(x-3)^2 + (z-4)^2 = 100 - 36$$

Intersección: $(x-3)^2 + (z-4)^2 = 64$

25

2. (50 pts.) Determine la distancia mínima del punto $(4, -2, 6)$ al plano xz.

La distancia mínima es 2.



50

100/100

Corto #1 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: Sección A. **Carnet:** ______________

Resuelva las siguientes problemas:

1. (50 pts.) Halle la ecuación de la esfera con centro $(3, -6, 4)$ y radio 10.
   ¿Cuál es la intersección de esta esfera con el plano xz?

Ec. esfera: $(x-3)^2 + (y+6)^2 + (z-4)^2 = 10^2 = 100.$

Intersección con el plano xz: $y=0$ en la ec. esfera

$(x-3)^2 + 36 + (z-4)^2 = 100$

$(x-3)^2 + (z-4)^2 = 64$

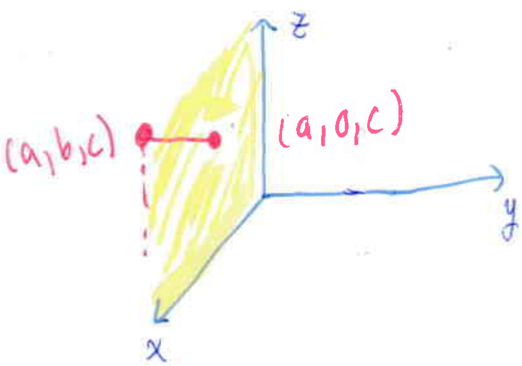
Circunferencia de radio 8 y centro $(3,4)$.

Observación si $r=5$.

$(x-3)^2 + (z-4)^2 = -11$ no tiene solución

No hay intersección entre la esfera y el plano xz.

2. (50 pts.) Determine la distancia mínima del punto $P(4, -2, 6)$ al plano xz.



Proyección al plano xz es $Q(4,0,6)$

Distancia mínima $|PQ| = |QP|$

$d = \sqrt{0^2 + 4 + 0} = 2.$

Corto #1 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: Sección 13. **Carnet:** ______________

Resuelva las siguientes problemas:

1. (50 pts.) Halle el radio y ~~centro~~ la ec. de la esfera que pasa por el punto $(2, 3, -1)$ y tiene centro en $(5, 9, 1)$.

radio = distancia entre el punto y el centro

$r = 7$ $\quad d = \sqrt{(2-5)^2 + (3-9)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{9+36+4} = \sqrt{49} = 7.$

Ec. Esfera: $(x-5)^2 + (y-9)^2 + (z-1)^2 = 49$

2. (50 pts.) Determine la distancia mínima del punto $(4, -2, 6)$ al eje z.

Encuentre la proyección del punto P sobre el eje - z.

coordenadas $(0, 0, c)$

$P(4, -2, 6)$ es $Q(0, 0, 6)$

Distancia mínima $|PQ| = \sqrt{16+4+0} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Capítulo 2

Exámen corto #02

20/100

Corto #2 Cálculo Multivariable (15 min)

Nombre: David Corzo **Carnet:** 20190432

Resuelva las siguientes problemas:

1. (50 pts.) Considere los vectores $a = \langle -2, 3, -6 \rangle$ y $b = \langle 1, 2, 3 \rangle$. Encuentre la proyección escalar y la vectorial de **b** sobre **a**.

$\text{proy}_a b = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot a$ vectorial $\qquad \text{proy}_b a = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$

$$\underset{\text{vectorial}}{\text{Proy}_a b} = \frac{(-2 \cdot 1) + (3 \cdot 2) + (-6 \cdot 3)}{\left(\sqrt{(-2)^2 + (3)^2 + (-6)^2}\right)^2} \cdot a = \frac{\overbrace{\overbrace{-1 + 6}^{5} - 18}^{23}}{\underbrace{\underbrace{4 + 9}_{13} + 36}_{49}} a = \frac{23}{49} a =$$

$$= \frac{23}{49} \cdot \langle -2, 3, -6 \rangle = \left\langle -\frac{46}{49}, \frac{69}{49}, -\frac{138}{49} \right\rangle$$

$$\underset{\text{Escalar}}{\text{Proy}_a b} = \frac{23}{49}$$

10

2. (50 pts.) Encuentre el ángulo entre los vectores $a = \langle -2, 1, 3 \rangle$ y $b = \langle 1, 3, 2 \rangle$.

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a \cdot b}{|a||b|}\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(-2 \cdot 1) + (1 \cdot 3) + (3 \cdot 2)}{\sqrt{(-2+1)^2 + (1+3)^2 + (3+2)^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1 + 3 + 6}{\sqrt{1 + 16 + 25}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{8}{\sqrt{42}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2 \cdot 4}{\sqrt{42}}\right)$$

10

Corto #2 Cálculo Multivariable (15 min)

Nombre: Sección A. **Carnet:** ________

Resuelva las siguientes problemas:

1. (50 pts.) Considere los vectores $a = \langle -2, 3, -6 \rangle$ y $b = \langle 1, 2, 3 \rangle$. Encuentre la proyección escalar y la vectorial de **b** sobre **a**.

$\frac{b \cdot a}{a}$

Escalar $\text{comp}_a b = \frac{a \cdot b}{|a|}$ Vectorial $\text{proy}_a b = \underbrace{\frac{a \cdot b}{|a|}}_{\text{comp}} \frac{a}{|a|}$

10 $a \cdot b = -2 + 6 - 18 = -14$ $|a| = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7.$ 10

$\text{comp}_a b = \frac{-14}{7} = -2.$ 10.

$\text{proy}_a b = \frac{-2}{7.} \langle -2, 3, -6 \rangle. = \langle \frac{4}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{12}{7} \rangle$ 20.

Aclaración tarea 2: ¿$\text{proy}_a b = \text{proy}_b a$? $\frac{a}{|a|} \frac{(a \cdot b)}{|a|} \neq \frac{a \cdot b}{|b|} \cdot \frac{b}{|b|}$

No.

2. (50 pts.) Encuentre el ángulo entre los vectores $a = \langle -2, 1, 3 \rangle$ y $b = \langle 1, 3, 2 \rangle$.

$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$ $a \cdot b = -2 + 3 + 6 = 7$ 10

$|a| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$ $|b| = \sqrt{14}$ 10.

$\cos\theta = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}$ 10.

$\cos\theta = \frac{7}{14} = \frac{1}{2.}$ 10.

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ ó $60°$.

	0	30	45	60	90
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\sin\theta$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$ $1/\sqrt{2}$.	$\sqrt{3}/2$	1

Producto Cruz. Bono 10 pts.

$\sin\theta = \frac{|a \times b|}{|a||b|.}$

$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -7\hat{i} - 7\hat{j} - 7\hat{k}$

$|a \times b| = 7 |\langle -1, -1, -1 \rangle|$

$= 7\sqrt{3}$

$\sin\theta = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{3}}{2.}$

Corto #2 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: Sección B **Carnet:** ____________

Resuelva las siguientes problemas:

1. (50 pts.) Dados los vectores $\mathbf{a} = \langle -3, 9, 6, 2\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -4, 2, 8, -1\rangle$ encuentre un vector $\mathbf{c}$ paralelo a $\mathbf{a}$ y un vector $\mathbf{d}$ (diferente de cero) perpendicular a $\mathbf{b}$.

Vector Paralelo a $\vec{a}$: $\vec{c} = k\langle -3, 9, 6, 2\rangle$.

Cualquier ejemplo como $\langle 3, -9, -6, -2\rangle$, $\langle -6, 18, 12, 4\rangle$, ...

Vector perpendicular a $\vec{b}$ $\quad \vec{d}\cdot\vec{b} = 0$

Varios ejemplos como $\langle 1, 1, 1, 6\rangle$, $\langle 1, 2, 0, 0\rangle$, $\langle 2, 1, 2, 2\rangle$, ...

Sólo compruebe que $\vec{d}\cdot\vec{b} = 0$

2. (50 pts.) Considere los vectores $\mathbf{a} = \langle -2, 3, -6\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 1, 2, 3\rangle$.
Encuentre la proyección escalar y la vectorial de $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{b}$.

Proyección Escalar de a sobre b.

$$\text{comp}_b\,\vec{a} = \frac{a\circ b}{|b|} = \frac{-2+6-18}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{-14}{\sqrt{14}} = \text{comp}_b\,\vec{a}$$

Proyección vectorial de a sobre b

$$\text{proy}_b\,\vec{a} = \frac{a\circ b}{|b|}\,\frac{b}{|b|} = \frac{-14}{14}\langle 1, 2, 3\rangle = \langle -1, -2, -3\rangle$$

Capítulo 3

Exámen corto #03

Corto #3 Cálculo Multivariable (20 min)

~~100~~ 90/100

Nombre: David Corzo **Carnet:** 20190432

Resuelva los siguientes problemas:

$$\begin{array}{r} 169 \\ +\ 496 \\ \hline 665 \\ 25 \\ \hline 690 \end{array}$$

1. (50 pts.) Determine el área del triángulo entre los puntos $P = (0, -2, 0)$, $Q = (4, 1, -2)$ y $R = (5, 3, 1)$.

$$T_\Delta = \frac{1}{2} \left| \vec{u} \times \vec{w} \right|$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (4-0), (1-(-2)), (-2-0) \rangle = \langle 4, 3, -2 \rangle$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{PR} = \langle (5-0), (3-(-2)), (1-0) \rangle = \langle 5, 5, 1 \rangle$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \cdot\ 14 \\ \hline 56 \\ 44 \\ \hline 496 \end{array}$$

$$\left| \vec{u} \times \vec{w} \right| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(3\cdot 1)-(-2\cdot 5)\right] - \hat{j}\left[(4\cdot 1)-(-2\cdot 5)\right] + \hat{k}\left[(4\cdot 5)-(3\cdot 5)\right]$$

$$= \hat{i}\left[3+10\right] - \hat{j}\left[4+10\right] + \hat{k}\left[20-15\right]$$

$$= 13\hat{i} - 14\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$= \langle 13, -14, 5 \rangle$$

$$= \sqrt{(13)^2 + (-14)^2 + (5)^2}$$

$$= \sqrt{169 + 496 + 25}$$

$$= \sqrt{690}$$

$$\boxed{\therefore \frac{1}{2}\sqrt{690}}$$

40

2. (50 pts.) Encuentre el volumen del paralelelípipedo determinado por los vectores $a = \langle 1, 5, -2 \rangle$, $b = \langle 3, -1, 0 \rangle$, y $c = \langle 5, 9, -4 \rangle$.

$$P_\square = \left| c \cdot (a \times b) \right|$$

$$(a \times b) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(5\cdot 0)-(-2\cdot -1)\right] - \hat{j}\left[(1\cdot 0)-(-2\cdot 3)\right] + \hat{k}\left[(1\cdot -1)-(5\cdot 3)\right]$$

$$= \hat{i}\left[0-2\right] - \hat{j}\left[0+6\right] + \hat{k}\left[-1-15\right]$$

$$= -2\hat{i} - 6\hat{j} - 16\hat{k}$$

$$= \langle -2, -6, -16 \rangle$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ \cdot\ 54 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 64 \\ \cdot\ 64 \\ \hline 1246 \\ 384 \\ \hline 4086 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2916 \\ +\ 4086 \\ \hline 7002 \\ +\ 100 \\ \hline 7{,}102 \end{array}$$

$$\cancel{\left| c \cdot (a \times b) \right| = \sqrt{(-10)^2 + (-54)^2 + (-64)^2}}$$

$$\cancel{= \sqrt{100 + 2916 + 4086}}$$

$$= \sqrt{7102}$$

$$c \cdot (a \times b) = \langle 5, 9, -4 \rangle \cdot \langle -2, -6, -16 \rangle$$

$$= (5 \cdot -2) + (9 \cdot -6) + (-4 \cdot -16)$$

$$= (-10) + (-54) + 64$$

$$= -64 + 64 = 0$$ Hay un plano no un paralelelípipedo

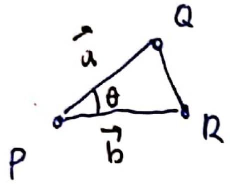
50

Corto #3 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: Sección A. **Carnet:** ____________

Resuelva los siguientes problemas:

1. (50 pts.) Determine el área del triángulo entre los puntos $P = (0, -2, 0)$, $Q = (4, 1, -2)$ y $R = (5, 3, 1)$.



$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \langle 4, 3, -2 \rangle$

$\vec{b} = \overrightarrow{PR} = \langle 5, 5, 1 \rangle.$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 13\hat{i} - 14\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\sqrt{13^2 + 14^2 + 5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{390}$$

+5 pts.

2. (50 pts.) Encuentre el volumen del paralelelípipedo determinado por los vectores $a = \langle 1, 5, -2 \rangle$, $b = \langle 3, -1, 0 \rangle$, y $c = \langle 5, 9, -4 \rangle$.

$$V = |a \cdot (b \times c)| = |c \cdot (a \times b)| = |(a \times b) \cdot c|$$

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 9 & -4 \end{vmatrix} = 1(4) - 5(-12) - 2(32)$$

$$V = 4 + 60 - 64 = 0$$

No hay paralelelípedo. (figura 2-D)

Los tres vectores son coplanares (están en el mismo plan

Capítulo 4

Exámen corto #04

30/100

Corto #4 Cálculo Multivariable (15 min)

Nombre: David Corzo **Carnet:** 20190432

Resuelva los siguientes problemas:

$\vec{u} = \langle 1, \frac{22}{10}$

$\underbrace{\vec{u}}_{PQ} = \langle (1-0), (1+\frac{12}{10}), (0+\frac{7}{5}) \rangle$

1. Considere los planos $3x - 2y + z = 1$ y $2x + y - 3z = 3$.
   $\underset{QP}{\vec{w}} = \langle (0-1), (-\frac{12}{10} - 1), (\frac{7}{5} - 0) \rangle$
   (a) (50 pts.) Encuentre el ángulo de intersección entre los dos planos.
   (b) (50 pts.) Encuentre la recta de intersección entre los dos planos.

a) $\boxed{x = 0}$

$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a \cdot b}{|a||b|}\right)$

1) $-2y + z = 1$

2) $y - 3z = 3$

2) $y = 3 + 3z$

1) $-2(3 + 3z) + z = 1$

$-6 - 6z + z = 1$

$-5z = 1 + 6$

$\boxed{z = -\frac{7}{5}}$

$-2y = \frac{5}{5} - (-\frac{7}{5})$

$-2y = \frac{5}{5} + \frac{7}{5}$

$y = \frac{\frac{12}{5}}{-2} = \boxed{-\frac{12}{10}}$

$P(0, -\frac{12}{10}, -\frac{7}{5})$ $Q(1, 1, 0)$

$\boxed{x = 1}$

$3 - 2y + z = 1$

$2 + y - 3z = 3$

$y = 3 + 3z - 2$

$y = 1 + 3z \Rightarrow \boxed{y = 1}$

$3 - 2(1 + 3z) + z = 1$

$3 - 2 - 6z + z = 1$

$1 - 5z = 1$

$-5z = 0$

$\boxed{z = 0}$

b) $2(3x - 2y + z = 1)$

$3(2x + y - 3z = 9)$

$6x - 4y + 2z = 2$

$-(6x + 3y - 3z = 9)$

$\cancel{6x} - 4y + 2z = 2$

$-\cancel{6x} - 3y + 3z = 9$

$0 - 7y + 5z = 11$

$-7y = 11 - 5z$

$y = \frac{11 - 5z}{-7}$

$z = t$

30

$3x - 2\left(\frac{11 - 5t}{-7}\right) + t = 1$

$3x - 2\left(-\frac{11}{7} + \frac{5}{7}t\right) + t = 1$

$3x + \frac{22}{7} - \frac{10}{7}t + t = 1$

$3x = \frac{7}{7} - \frac{22}{7} + \frac{10}{7}t - \frac{7}{7}t$

$3x = \frac{15}{7} + \frac{3}{7}t$

$\boxed{x = \frac{\frac{15}{7} + \frac{3}{7}t}{3}}$

Corto #4 Cálculo Multivariable (15 min)

Nombre:____________________________________ **Carnet:** ____________

Resuelva los siguientes problemas:

1. Considere los planos $3x - 2y + z = 1$ y $2x + y - 3z = 3$.
   (a) (50 pts.) Encuentre el ángulo de intersección entre los dos planos.
   (b) (50 pts.) Encuentre la recta de intersección entre los dos planos.

a)

$$\cos\theta = \frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1|\,|\hat{n}_2|} \qquad \hat{n}_1 = \langle 3, -2, 1 \rangle \qquad \hat{n}_2 = \langle 2, 1, -3 \rangle$$

$$\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2 = 6 - 2 - 3 = 1 \qquad |\hat{n}_1| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

$$|\hat{n}_2| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{14} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{14}\right) \approx 86^\circ$$

b) Solución 1: Resuelva el sistema de ecuaciones.

$R_1 : 3x - 2y + z = 1$

$R_2 : 2x + y - 3z = 3 \Rightarrow y = 3 + 3z - 2x$

$R_1 + 2R_2 : 7x - 5z = 7 \Rightarrow x = 1 + \frac{5}{7}z$ $\qquad z = 7t.$ ✓

$x = 1 + 5t.$ ✓

$y = 3 + 21t - 2 - 10t = 1 + 11t.$ ✓

Ec. Vectorial $\boxed{\vec{r} = \langle 1, 1, 0 \rangle + t\langle 5, 11, 7 \rangle.}$ $\qquad V_1 = \left(\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, 1\right)$

$$x = 1 + 5t$$
$$y = 1 + 11t$$
$$z = 7t.$$

Solución 2: Producto Cruz

$\hat{n}_1 = \langle 3, -2, 1 \rangle \qquad \hat{n}_2 = \langle 2, 1, -3 \rangle$

$\vec{v}$ tiene que ser perpendicular a $\hat{n}_1$ y a $\hat{n}_2$.

$$\vec{v} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 5\hat{i} + 11\hat{j} + 7\hat{k} \quad ✓$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

$R_1: \; 3x - 2y + z = 1$

$R_2: \; 2x + y - 3z = 3$

$2R_1 - 3R_2: \; -7y + 11z = -7 \Rightarrow 7y = 11z + 7$

$$y = \frac{11}{7}z + 1$$

$z = t$

$y = \frac{11}{7}t + 1$

$x = \frac{5}{7}t + 1.$

$z = 0, \; y = 1 \Rightarrow 2x + 1 + 0 = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{2} = 1.$

$$\boxed{\vec{r} = \langle 1, 1, 0 \rangle + t\langle 5, 11, 7 \rangle}$$

Scanned by CamScanner

Corto #4 Cálculo Multivariable (15 min)

Nombre:________________________________ **Carnet:** ____________

Resuelva los siguientes problemas:

1. (50 pts.) Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto R. $(6,0,-2)$ y contiene a la recta $x = 4-2t,\ y = 3+5t,\ z = 7+4t$.

t=0 en la recta. t=1 en la recta

Dos pts. sobre la recta $P(4,3,7)$ y $Q(2,8,11)$

dos vectores sobre el plano $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$

$\overrightarrow{PQ} = \langle -2, 5, 4\rangle \qquad \overrightarrow{PR} = \langle 2, -3, -9\rangle$

$\hat{n}$ debe ser normal a $\overrightarrow{PQ}$ y a $\overrightarrow{PR}$

$$\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -33\hat{i} - 10\hat{j} - 4\hat{k} \quad \text{ó} \quad \langle 33, 10, 4\rangle.$$

Ec. Plano $\langle 33,10,4\rangle \cdot \langle x-6, y, z+2\rangle = 0.$

2. (50 pts.) Analice si las rectas $L_1:\ x = 1+2t,\ y = 2+t,\ z = 4+t,$ $L_2:\ x = 5-s,\ y = -1+2s,\ z = 11-3s$ tienen un punto de intersección.

L_1 y L_2 se intersectan entonces $x = x,\ y = y,\ z = z$

$$\left.\begin{aligned} 1+2t &= 5-s \\ 2+t &= -1+2s \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} 2t+s &= 4 \\ t-2s &= -3 \end{aligned}$$

$$4+t = 11-3s \qquad R_1-2R_2:\ 5s = 10 \Rightarrow s = 2$$

$$t = -3+2s = 1$$

3 ecs. y 2 incógnitas.

verifique que R_3 se satisface $4+1 = 11-6 \Rightarrow \boxed{5=5}$

Las rectas L_1 y L_2 se intersectan.

El punto de intersección es $(3,3,5)$

Bono (5 pts)

Capítulo 5

Exámen corto #05

80/100

Corto #5 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: David Corzo **Carnet:** 20190432

1. Analice si la función $\mathbf{r} = \langle 3e^{-t}, \ln(2t^2 - 1), \tan(2\pi)\rangle$ es continua en $t = 1$.

$$\lim_{t\to 1}(r) = \left\langle \underbrace{\lim_{t\to 1}(3e^{-t})}_{f(t)}, \underbrace{\lim_{t\to 1}(\ln(2t^2-1))}_{g(t)}, \underbrace{\lim_{t\to 1}(\tan(2\pi))}_{h(t)} \right\rangle$$

$$\lim_{t\to 1}(f(t)) = \frac{3}{e}$$

$$\lim_{t\to 1}(f(t)) = \ln(2(1)^2 - 1) = \ln(2-1) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{t\to 1}(h(t)) = \tan(2\pi) = \frac{\sin(2\pi)}{\cos(2\pi)} \leftarrow 0 = 0$$

r(1)

20/40

Sí es continua en $t=1$ $\left\langle \frac{3}{e}, 0, 0 \right\rangle$

2. Encuentre la ec. de la recta tangente a $\mathbf{r}(t) = \left\langle te^{t-1}, \frac{8}{\pi}\arctan(t), 2\ln(t)\right\rangle$ en $t = 1$.

$$\vec{r}_T = \vec{r}(a) + t\,\vec{r}\,'(a)$$

$$\vec{r}(1) = \left\langle 1\, e^{(1-1)}, \frac{8}{\pi}\underbrace{\arctan(1)}_{\frac{\pi}{4}}, 2\underbrace{\ln(1)}_{0} \right\rangle$$

$$\frac{\sin(\pi/4)}{\cos(\pi/4)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \left\langle 1, \frac{8}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{\cancel{\pi}}{4}, 0 \right\rangle$$

$$= \langle 1, 2, 0 \rangle$$

$$\boxed{\vec{r}_T(1) = \langle 1, 2, 0\rangle + t\left\langle 2, \frac{4}{\pi}, 2\right\rangle}$$

60

$$\vec{r}\,'(t) = \left\langle \left(e^{t-1} + te^{t-1}\cdot 1\right), \left(\frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{t^2+1}\right), \left(\frac{2}{t}\right) \right\rangle$$

$$\vec{r}\,'(t) = \left\langle e^{t-1} + te^{t-1}, \frac{8}{\pi(t^2+1)}, \frac{2}{t} \right\rangle$$

$$\vec{r}\,'(1) = \left\langle e^0 + 1\cdot e^0, \frac{8}{\pi(1+1)}, \frac{2}{1} \right\rangle = \left\langle 1+1, \frac{8}{2\pi}, 2 \right\rangle$$

$$= \left\langle 2, \frac{4}{\pi}, 2 \right\rangle$$

Capítulo 6

Exámen corto #07

//

Corto #7 Cálculo Multivariable

Nombre: David Corzo **Carnet:** 20190432

1. Encuentre el dominio de la función vectorial $\vec{r}(t) = \frac{t+4}{t-4}\hat{\imath} + \frac{2}{\sqrt{1-t}}\hat{\jmath} + \ln(t+2)\hat{k}$.

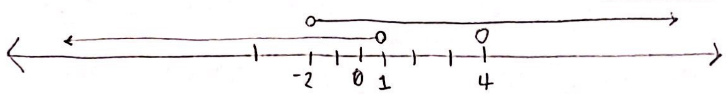
$\vec{r}(t) = \left\langle \frac{t+4}{t-4}, \frac{2}{\sqrt{1-t}}, \ln(t+2) \right\rangle$

$t - 4 \neq 0$ $\quad$ $1 - t > 0$ $\quad$ $t + 2 > 0$

$t \neq 4$ $\quad$ $-t > -1$ $\quad$ $t > -2$

$t < 1$

$\therefore \{ \vec{r}(t) \in \mathbb{R} \mid (t \neq 4) \wedge (t < 1) \wedge (t > -2) \}$



$\mathbb{D}: (-2, 1)$

2. Considere la función $g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$.

(a) Encuentre y bosqueje el dominio de g.

(b) Encuentre y bosqueje las curvas de nivel para $k = \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{9}}$. en otra hoja

a) $g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$

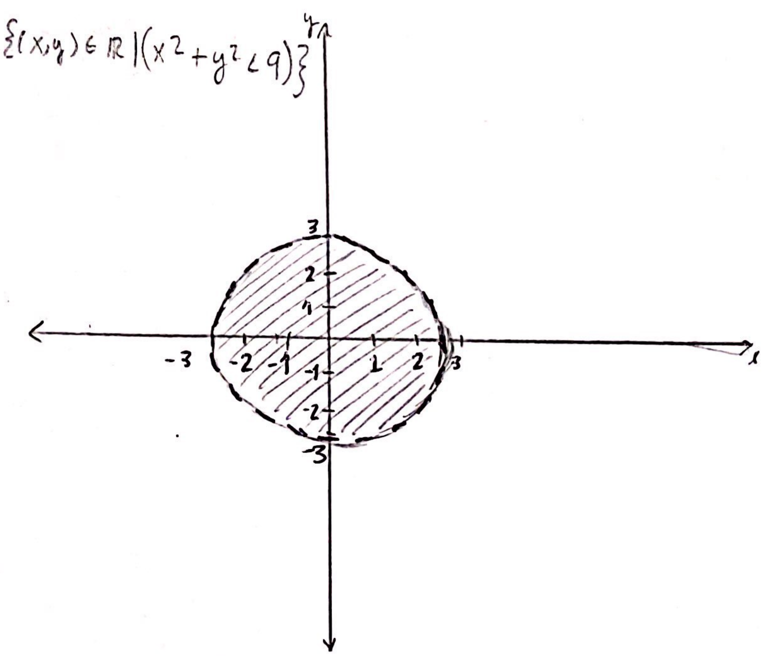
$9 - x^2 - y^2 > 0$

$-x^2 - y^2 > -9$

$x^2 + y^2 < 9$

a) $x^2 + y^2 < 3^2$

$\mathbb{D}: \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid (x^2 + y^2 < 9)\}$



3. Considere la función de producción $P = 10e^{K+L-KL}$

(a) Encuentre las funciones de productividad marginal del trabajo y del capital.
L K

(b) Encuentre y simplifique $P_{LL} + P_{KK}$.

a) $P_L = 10e^{(K+L-KL)} \cdot (1-K)$

$P_K = 10e^{(K+L-KL)} \cdot (1-L)$

b) $10e^{K+L-KL} \cdot (2-2K+K^2-2L+L^2)$

b) $P_L = 10e^{(K+L-KL)} \cdot (1-K)$

$= 10e^{(K+L-KL)} - 10Ke^{(K+L-KL)}$

$P_{LL} = 10e^{(K+L-KL)} \cdot (1-K) - 10Ke^{(K+L-KL)} \cdot (1-K)$

$P_K = 10e^{(K+L-KL)} - 10Le^{(K+L-KL)}$

$P_{KK} = 10e^{(K+L-KL)} \cdot (1-L) - 10Le^{(K+L-KL)} \cdot (1-L)$

continuación en hoja

4. Encuentre la longitud de arco de la curva descritas por las función vectorial $\mathbf{s}(t) = \langle t\sin t + \cos t,\ t\cos t - \sin t\rangle$, $-2 \leqslant t \leqslant 0$

$s'(t) = \langle \cancel{\sin(t)} + t\cos(t) - \cancel{\sin(t)},\ \cancel{\cos(t)} - t\sin(t) - \cancel{\cos(t)} \rangle = \langle t\cos(t), -t\sin(t) \rangle$

$|s'(t)| = \sqrt{(t\cos(t))^2 + (-t\sin(t))^2}$

$= \sqrt{t^2\cos^2(t) + t^2\sin^2(t)}$

$= \sqrt{t^2} = |t|$

$$\sqrt{t^2} = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ -t & t < 0 \end{cases}$$

$$L = \int_{-2}^{0} t\,dt = -\frac{1}{2}t^2 \Big|_{-2}^{0} = -\frac{1}{2}\{0^2 - (-2)^2\} = -\frac{1}{2}(-2)^2 = 2$$

$\boxed{L = 2}$

5. La curva C es descrita por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \left\langle \ln(t-2), \frac{1}{t-4}, 10\tan^{-1} t \right\rangle$.

(a) Encuentre la ec. vectorial de la recta tangente a C en $t = 3$.

(b) ¿Es perpendicular la recta tangente a la recta $2x - 1 = \frac{z}{-3}$, $y = 10$?

$$\vec{r}_T = \vec{r}(a) + t\vec{r}\,'(a)$$

$$\vec{r}\,'(t) = \left\langle \frac{1}{t-2}, -1(t-4)^{-2}, \frac{10}{t^2+1} \right\rangle$$

$$\vec{r}\,'(3) = \left\langle \frac{1}{3-2}, -1(3-4)^{-2}, \frac{10}{9+1} \right\rangle = \left\langle 1, -\frac{1}{(-1)^2}, \frac{10}{10} \right\rangle = \langle 1, -1, 1 \rangle$$

$$\vec{r}(3) = \langle 0, -1, 10\tan^{-1}(3) \rangle$$

a) $\vec{r}_T = \langle 0, -1, 10\tan^{-1}(3) \rangle + t\langle 1, -1, 1 \rangle$

b) No es perpendicular.

6. Una partícula dentro de un campo eléctrico experimenta la siguiente aceleración.

$$\mathbf{a}(t) = -6t^2\mathbf{i} + 8\sinh(2t)\mathbf{j} + e^{t/2}\mathbf{k}$$

(a) Encuentre la función de velocidad si $\mathbf{v}(0) = 10\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$.

(b) Encuentre la función de posición si $\mathbf{r}(0) = 10\mathbf{j}$.

$$v(t) = \int a(t)\,dt = \int \langle \underbrace{-6t^2}_{f_1}, \underbrace{8\sinh(2t)}_{2}, \underbrace{e^{\frac{t}{2}}}_{3} \rangle\,dt$$

a) $v(t) = \langle -2t^3 + 10,\ 4\cosh(2t) - 4,\ 2e^{\frac{t}{2}} - 4 \rangle$

$$\int f_1\,dt = -6\int t^2\,dt = -\frac{6}{3}t^3 + C_1$$

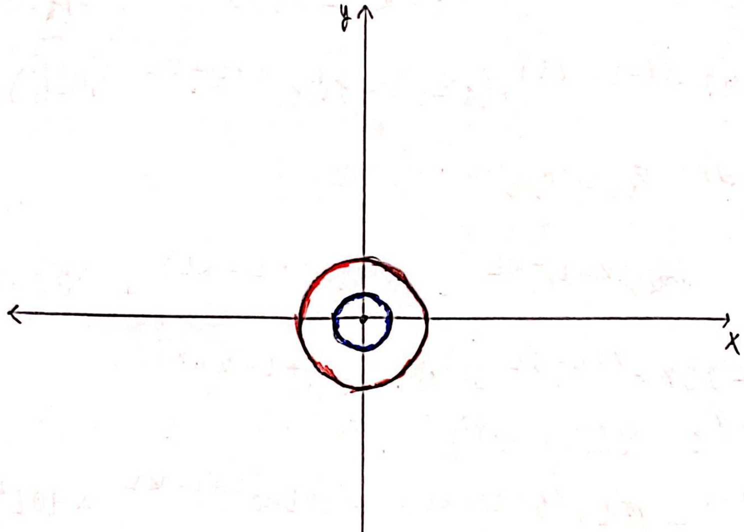
$$\int f_2\,dt = 8\int \sinh(2t)\,dt = \frac{8}{2}\int \sinh(u)\,du = 4\cosh(2t) + C_2$$

$u = 2t$
$du = 2dt$
$\frac{1}{2}du = dt$

b) $r(t) = \langle -\frac{1}{2}t^4 + 10t,\ 2\sinh(2t) - 4t + 10,\ 4e^{\frac{t}{2}} - 4t \rangle$

$$\int f_3\,dt = \int e^{\frac{t}{2}}dt = 2\int e^u\,du = 2e^{\frac{t}{2}} + C_3$$

$u = \frac{t}{2}$
$du = \frac{1}{2}dt \Rightarrow 2du = dt$



$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

$$\frac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{\sqrt{5}} = 1$$

$$\sqrt{9-x^2-y^2} = \sqrt{5}$$

$$9-x^2-y^2 = 5$$

$$-x^2-y^2 = 5-9$$

$$-x^2-y^2 = -4$$

$$x^2+y^2 = 4$$

$$x^2+y^2 = 2^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

$$\sqrt{9-x^2-y^2} = \sqrt{8}$$

$$9-x^2-y^2 = 8$$

$$-x^2-y^2 = 8-9$$

$$x^2+y^2 = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

$$\sqrt{9-x^2-y^2} = \sqrt{9}$$

$$9-x^2-y^2 = 9$$

$$x^2+y^2 = 0$$

3) $P_{LL} + P_{KK} = 10e^{(K+L-KL)} \cdot (1-K) - 10Ke^{(K+L-KL)} \cdot (1-K) + ($ ↳

$10e^{(K+L-KL)} \cdot (1-L) - 10Le^{(K+L-KL} \cdot (1-L)$

Simplificación de $P_{LL} + P_{KK}$

$$P_{LL} = 10e^{K+L-KL} - 10Ke^{K+L-KL} - 10Ke^{(K+L-KL)} + 10K^2e^{(K+L-KL)}$$

$$= 10e^{K+L-KL} - 20Ke^{K+L-KL} + 10K^2e^{(K+L-KL)}$$

$$= 10e^{K+L-KL}(1 - 2K + K^2)$$

$$P_{KK} = 10e^{(K+L-KL)} - 10Le^{(K+L-KL)} - 10Le^{K+L-KL} + 10L^2e^{K+L-KL}$$

$$= 10e^{K+L-KL} - 20Le^{K+L-KL} + 10Le^{K+L-KL}$$

$$= 10e^{K+L-KL}(1 - 2L + L^2)$$

$$P_{LL} + P_{KK} = 10e^{K+L-KL}(1-2K+K^2) + 10e^{K+L-KL}(1-2L+L^2)$$

$$= 10e^{K+L-KL}([1-2K+K^2] + [1-2L+L^2])$$

$$= 10e^{K+L-KL} \cdot (2-2K+K^2-2L+L^2)$$

b)

$v(t) = \langle -2t^3 + C_1,\ 4\cosh(2t) + C_2,\ 2e^{\frac{t}{2}} + C_3 \rangle$

$v(0) = \langle 10, 0, -2 \rangle$

$\cancel{-2(0)^3}^{0} + C_1 = 10$ $\quad$ $\boxed{C_1 = 10}$

$4\,\cancel{\cosh(2(0))}^{?\ 1} + C_2 = 0$

$4 + C_2 = 0$

$\boxed{C_2 = -4}$

$2\cancel{e^{\frac{0}{2}}}^{1} + C_3 = -2$

$2 + C_3 = -2$

$C_3 = -2 - 2$

$\boxed{C_3 = -4}$

$v(t) = \langle -2t^3 + 10,\ 4\cosh(2t) - 4,\ 2e^{\frac{t}{2}} - 4 \rangle$

$\int v(t)\,dt = r(t) = \int \langle \underbrace{-2t^3 + 10}_{f_1},\ \underbrace{4\cosh(2t) - 4}_{f_2},\ \underbrace{2e^{\frac{t}{2}} - 4}_{f_3} \rangle\, dt$

$\int f_1\,dt = \int (-2t^3 + 10)\,dt = -\frac{2}{4}t^4 + 10t + C_1$

$\int f_2\,dt = \int (4\cosh(2t) - 4)\,dt = 2\sinh(2t) - 4t + C_2$

$\int f_3\,dt = \int (2e^{\frac{t}{2}} - 4)\,dt = 4e^{\frac{t}{2}} - 4t + C_3$

$r(t) = \langle -\frac{1}{2}t^4 + 10t + C_1,\ 2\sinh(2t) - 4t + C_2,\ 4e^{\frac{t}{2}} - 4t + C_3 \rangle$

$r(0) = \langle 0, 10, 0 \rangle$

$-\cancel{\frac{1}{2}(0)^2}^{0} + \cancel{10(0)}^{0} + C_1 = 0$ $\quad$ $\boxed{C_1 = 0}$

$2\,\cancel{\sinh(2(0))}^{0} - \cancel{4(0)}^{0} + C_2 = 10$ $\quad$ $\boxed{C_2 = 10}$

$-\cancel{4(0)}^{0} + C_3 = 0$ $\quad$ $\boxed{C_3 = 0}$

$r(t) = \langle -\frac{1}{2}t^4 + 10t,\ 2\sinh(2t) - 4t + 10,\ 4e^{\frac{t}{2}} - 4t \rangle$

b) $2x - 1 = \frac{z}{-3}, \quad y = 10$

$t = 2x - 1 \rightarrow \frac{t+1}{2} = x$

$t = \frac{z}{-3} \rightarrow -3t = z \qquad \vec{u} = \langle \frac{t+1}{2}, 10, -3t \rangle$

$y = 10 \qquad y = 10 + 0(t) \qquad \vec{w} = \langle t, -1-t, 10\tan^{-1}(3) + t \rangle$

$\langle \frac{1}{2}, 0, -3 \rangle$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{t+1}{2} & 10 & -3t \\ t & -1-t & 10\tan^{-1}(3)+t \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(10)(10\tan^{-1}(3)+t) - (-3t)(-1-t)\right]$$

$$- \hat{j}\left[\left(\frac{t+1}{2}\right)(10\tan^{-1}(3)+t) - (-3t)(t)\right] +$$

$$\hat{k}\left[\left(\frac{t+1}{2}\right)(-1-t) - (10)(t)\right]$$

$= \hat{i}\left[100\tan^{-1}(3) + 10t - (3t + 3t^2)\right] -$

$\hat{j}\,[$

$$\langle 1, -1, 1 \rangle \cdot \langle \tfrac{1}{2}, 0, -3 \rangle = (1)(\tfrac{1}{2}) + (-1)(0) + (1)(-3)$$

$$= \tfrac{1}{2} + 0 - 3$$

$$= \tfrac{1}{2} - 3 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3 \cdot 2}{2} = \tfrac{1-6}{2} = -\tfrac{5}{2}$$

no es perpendicular

Corto #7 Cálculo Multivariable

Nombre:____ **Carnet:** ______________

1. Encuentre el dominio de la función vectorial $r(t) = \frac{t+4}{t-4}\hat{\imath} + \frac{2}{\sqrt{1-t}}\hat{\jmath} + \ln(t+2)\hat{k}$.

Dominio f: $t \neq 4$ $(-\infty,4)\cup(4,\infty)$

Dominio g: $1-t>0$ $(-\infty,1)$

$t<1$

Dominio h: $t+2>0$ $(-2,\infty)$

$t>-2$

$(-2,1)$

Encuentre el dominio en común entre las tres

Dominio $-2<x<1$ ó $(-2,1)$

$\lim_{t\to a} r(t)$

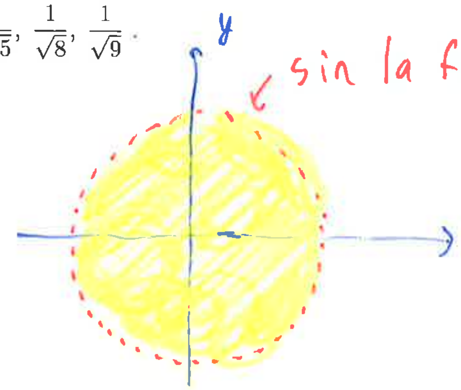
2. Considere la función $g(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$.

(a) Encuentre y bosqueje el dominio de g.

(b) Encuentre y bosqueje las curvas de nivel para $k = \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{8}}, \dfrac{1}{\sqrt{9}}$.

D es una región.

sin la frontera



a) $9 - x^2 - y^2 > 0$

$9 > x^2 + y^2$.

$x^2 + y^2 < 9$.

~~circunfere~~ disco radio 3

b) Curvas de nivel $g(x,y) = K$

$$\frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}} = K \Rightarrow \frac{1}{K} = \sqrt{9-x^2-y^2}$$

$$\frac{1}{K^2} = 9 - x^2 - y^2.$$

$$\frac{1}{\frac{1}{9}} = a,$$

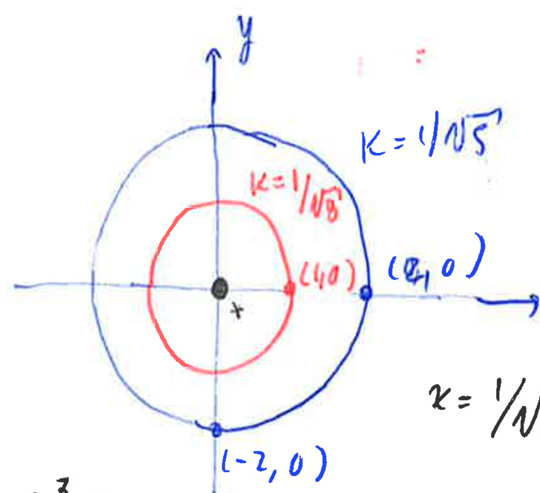
circunferencias radio $\sqrt{9 - \frac{1}{K^2}}$

$$x^2 + y^2 = 9 - \frac{1}{K^2}.$$

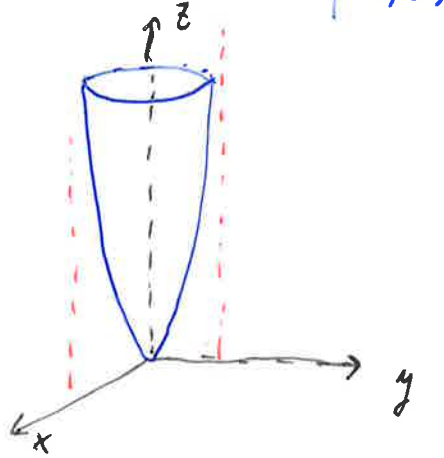
$K = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \frac{1}{K^2} = 5 \qquad x^2 + y^2 = 9 - 5 = \underbrace{4}_{2^2}$

$K = \frac{1}{\sqrt{8}} \qquad \frac{1}{K^2} = 8 \qquad x^2 + y^2 = 1$

$K = \frac{1}{\sqrt{9}} \qquad \frac{1}{K^2} = 9 \qquad x^2 + y^2 = 0$



$x = 1/\sqrt{9}$



3. Considere la función de producción $P = 10e^{K+L-KL}$ $K+L-KL$

(a) Encuentre las funciones de productividad marginal del trabajo y del capital.

(b) Encuentre y simplifique $P_{LL} + P_{KK}$.

a) Productividad Marginal es la derivada.

$$P_L = 10(1-K)e^{K+L-KL}$$

$$P_K = 10(1-L)e^{K+L-KL}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial L^2} = P_{LL}$$

b) Encuentre y simplifique $P_{LL} + P_{KK}$

$$\left.\begin{aligned} P_{LL} &= 10(1-K)(1-K)e^{K+L-KL} \\ P_{KK} &= 10(1-L)^2 e^{K+L-KL} \end{aligned}\right\} \text{2das derivadas}$$

$$P_{LL} + P_{KK} = \underline{10}(1-K)^2 \underline{e}^{K+L-KL} + \underline{10}(1-L)^2 \underline{e}^{K+L-KL}$$

$$10e^{K+L-KL}\left[(1-K)^2 + (1-L)^2\right]$$

¿ P_{LK} ó P_{KL}?

regla del producto

$$P_{LK} = -10e^{K+L-KL} + 10(1-K)(1-L)e^{K+L-KL}.$$

$$\underbrace{P_{KL}}_{\text{derivadas cruzadas.}} = -10e^{K+L-KL} + 10(1-L)(1-K)e^{K+L-KL}.$$

4. Encuentre la longitud de arco de la curva descritas por las función vectorial:
$\mathrm{s}(t) \quad \langle t\sin t + \cos t,\ t\cos t - \sin t\rangle$, $-2 \leqslant t \leqslant 0$.

Longitud de arco $\quad L = \int_{-2}^{0} |s'(t)|\, dt.$

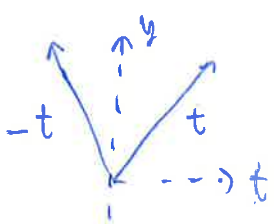
2-D $\quad \sqrt{(x')^2+(y')^2} \qquad$ 3-D $\quad \sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}$

$$s'(t) = \langle \cancel{\sin t} + t\cos t - \cancel{\sin t},\ \cancel{\cos t} - t\sin t - \cancel{\cos t} \rangle$$

$$s'(t) = \langle t\cos t,\ -t\sin t \rangle$$ velocidad.

$$|s'(t)| = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} = \sqrt{t^2} = |t|$$

$$L = \int_{-2}^{0} |t|\, dt. = -\int_{-2}^{0} t\, dt. = -\frac{t^2}{2}\Big]_{-2}^{0} = \frac{0+4}{2} = 2.$$



$$\int_{0}^{-2} t\, dt = \frac{1}{2} t^2 \Big]_{0}^{-2} = 2 - 0 = 2.$$

$(t-4)^{-1}$

5. La curva C es descrita por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \left\langle \ln(t-2), \frac{1}{t-4}, 10\tan^{-1} t \right\rangle$.

✓ (a) Encuentre la ec. vectorial de la recta tangente a C en $t = 3$.

(b) ¿Es perpendicular la recta tangente a la recta $2x - 1 = \frac{z}{-3}$, $y = 10$?

Ec. Recta Tangente a una curva. $a = 3$

$$r(t) = r(a) + t\, r'(a)$$

Punto: $r(3) = \langle \ln 1, \frac{1}{-1}, 10\tan^{-1}(3) \rangle = \langle 0, -1, 10\tan^{-1}(3) \rangle$

Derivada: $r'(t) = \left\langle \frac{1}{t-2}, \frac{-1}{(t-4)^2}, \frac{10}{1+t^2} \right\rangle$

Pendientes: $r'(3) = \langle 1, -1, 1 \rangle$

Ec. vectorial: $r(t) = \langle 0, -1, 10\tan^{-1}(3) \rangle + t\langle 1, -1, 1 \rangle$

Ecs. Paramétricas

$x = 0 + t$

$y = -1 - t$

$z = 10\tan^{-1}(3) + t.$

$t = -1 - y.$

Ecs. simétricas

$t = x = -1 - y = z - 10\tan^{-1}(3)$

b. ¿Es perpendicular a la recta $2x - 1 = \frac{z}{-3}$, $y = 10$?

Tangente $v_1 = \langle 1, -1, 1 \rangle.$

2da recta $v_2 = \langle \frac{1}{2}, 0, -3 \rangle$

$2x - 1 = t \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{t}{2}.$

$y = 10 \Rightarrow y = 10 + 0 \cdot t$

$\frac{z}{-3} = t \Rightarrow z = -3t$

$v_1 \cdot v_2 = \frac{1}{2} + 0 - 3 = \frac{-5}{2} \neq 0.$

Las dos rectas no son perpendiculares

$t^{1/2}$.

6. Una partícula dentro de un campo eléctrico experimenta la siguiente aceleración.

$$\mathbf{a}(t) = -6t^2\mathbf{i} + 8\sinh(2t)\mathbf{j} + e^{t/2}\mathbf{k}$$

$\cosh 0 = 1, \sinh 0 = 0$

(a) Encuentre la función de velocidad si $\mathbf{v}(0) = 10\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$.

(b) Encuentre la función de posición si $\mathbf{r}(0) = 10\mathbf{j}$.

$$v(t) = \int a(t)\,dt = \langle -2t^3 + c_1,\ 4\cosh(2t) + c_2,\ 2e^{t/2} + c_3 \rangle$$

Use $v(0) = \langle 10, 0, -2 \rangle$

$$v(0) = \langle c_1,\ 4 + c_2,\ 2 + c_3 \rangle = \langle 10, 0, -2 \rangle$$

$c_1 = 10$ $\quad$ $4 + c_2 = 0$, $c_2 = -4$ $\quad$ $2 + c_3 = -2$, $c_3 = -4$.

$$v(t) = \langle 10 - 2t^3,\ 4\cosh(2t) - 4,\ 2e^{t/2} - 4 \rangle$$

$$r(t) = \int v(t)\,dt = \langle 10t - \tfrac{1}{2}t^4 + c_1,\ 2\cosh(2t) - 4t + c_2,\ 4e^{t/2} - 4t + c_3 \rangle$$

Use $r(0) = 10\hat{j}$

$$r(0) = \langle 0 - 0 + c_1,\ 2 - 0 + c_2,\ 4 - 0 + c_3 \rangle = \langle 0, 10, 0 \rangle$$

$c_1 = 0,$ $\quad$ $c_2 = -2,$ $\quad$ $c_3 = -4$.

$$r(t) = \langle 10t - \tfrac{1}{2}t^4,\ 2\cosh(2t) - 4t - 2,\ 4e^{t/2} - 4t - 4 \rangle$$

Capítulo 7

Exámen corto #08

Corto #8   Cálculo Multivariable

Nombre: David Lazo **Carnet:** 20190432

1. Encuentre la ecuación del plano tangente a $z = 10 - \cos(\pi x^2) + 4(y^2+3)^{3/2}$ en el punto $(1,1)$.

$$z - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$f_x(x_0,y_0) = -\sin(\pi x^2)\cdot 2\pi x \Big|_{(1,1)} = -\sin(\pi)\cdot 2\pi = \emptyset$$

$$f_y(x_0,y_0) = \frac{12}{2}(y^2+3)^{\frac{1}{2}}\cdot 2y \Big|_{(1,1)} = 6\,(1+3)^{\frac{1}{2}}\cdot 2 = 6\cdot 2\cdot 2 = 24$$

$$f(1,1) = 10 - \cos(\pi) + 4(4)^{\frac{3}{2}}$$
$$= 10 + 1 + 4(4)^{\frac{3}{2}}$$
$$= 11 + 4(2)^3 = 11 + 4(8) = 11 + 32 = \boxed{43}$$

$$z - 43 = (\emptyset)(x-1) - 24(y-1)$$
$$z = -24y + 24 + 43$$
$$z = -24y + 67$$
$$z =$$
$$\cancel{z = 48y + 91}$$

$$z = -24y + 67$$

90/100

Corto #8 Cálculo Multivariable

Nombre:____ **Carnet:** ____________

1. Encuentre la ecuación del plano tangente a $z = 10 - \cos(\pi x^2) + 4(y^2+3)^{3/2}$ en el punto $(1,1)$.

$$z = f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1)$$

$$f(1,1) = 10 - \cos(\pi) + 4\cdot(2^2)^{3/2} = 10 + 1 + 4\cdot 8 = 43.$$

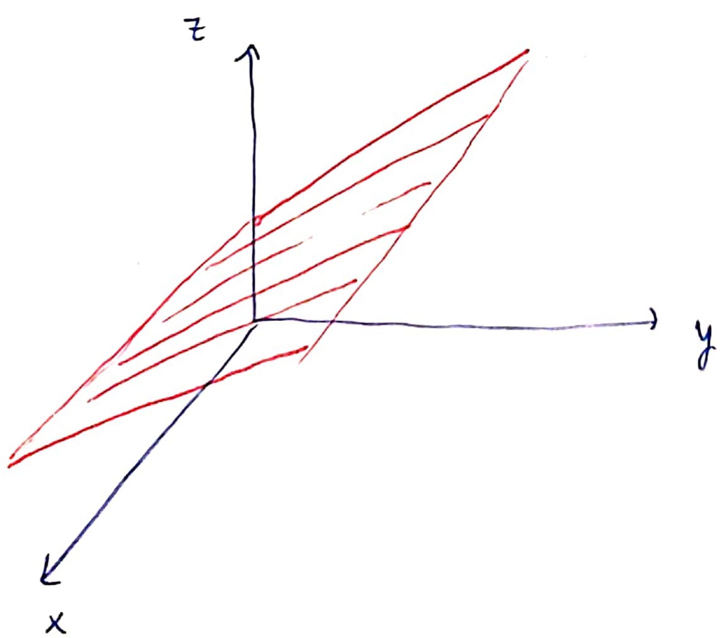
$$f_x = 0 + 2\pi x \sin(\pi x^2) + 0$$

$$f_x(1,1) = 2\pi \sin(\pi) = 0$$

$$f_y = 0 - 0 + 6(y^2+3)^{1/2}\, 2y.$$

$$f_y(1,1) = 6\sqrt{4}\cdot 2 = 24$$

Plano Tangente: $z = 43 + 24(y-1).$



Corto #8 Cálculo Multivariable

Nombre:______________________________________ **Carnet:** ____________

1. Encuentre las derivadas parciales de z en $\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2-2} = 4xyz+8$.

z - dependiente x, y independientes z_x, z_y.

$$\underbrace{0.5\ln(x^2+y^2+z^2-2) - 4xyz}_{F(x,y,z)} = 8$$

$$F(x,y,z) = 8$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2-2} - 4yz}{\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2-2} - 4xy.}$$

$$= \left.\frac{-x + 4yz(x^2+y^2+z^2-2)}{z - 4xy(x^2+y^2+z^2-2)}\right\} +5.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_y}{F_z} = \frac{-\left(\dfrac{y}{x^2+y^2+z^2-2} - 4xz\right)}{\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2-2} - 4xy.}$$

$$= \left.\frac{-y + 4xz(x^2+y^2+z^2-2)}{z - 4xy(x^2+y^2+z^2-2)}\right\} +5.$$

Capítulo 8

Exámen corto #09

100/100

Corto #9 Cálculo Multivariable (15 min)

Nombre: David Corzo **Carnet:** 20190432

1. Halle la derivada direccional de la función $f(x,y) = e^x \cos y$ en el punto $(0,0)$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \langle \cos\theta,\ \sin\theta \rangle$, $\theta = \pi/4$.

$\vec{u} = \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle \qquad |u| = \sqrt{\cos(\theta)^2 + \sin^2(\theta)} = 1$

Derivada direccional: $\quad P(0,0) \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

$f(x,y) = e^x \cos(y)$

$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle \longrightarrow \left\langle e^x \cos(y), -e^x \sin(y) \right\rangle$

$D_u = \nabla f \cdot \vec{u}$

$= \left\langle e^0 \cos(0), \cancel{-e^0 \sin 0} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

$= \langle 1, 0 \rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Corto #9 Cálculo Multivariable (15 min)

Nombre: Sección A. **Carnet:** ______________

1. Halle la derivada direccional de la función $f(x,y) = e^x \cos y$ en el punto $(0,0)$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \langle \cos\theta,\ \sin\theta \rangle$, $\theta = \pi/4$.

$D_u f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{u}$ $\quad |u| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

$\nabla f = \langle e^x \cos y, -e^x \sin y \rangle$

$\nabla f(0,0) = \langle 1, -0 \rangle$

$u = \langle \cos \pi/4, \sin \pi/4 \rangle = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

$D_u f(0,0) = \langle 1, 0 \rangle \cdot \langle \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

CORTO #9 Cálculo Multivariable (15 min)

Nombre: Sección B **Carnet:** ____________

1. Halle la derivada direccional de la función $f(x,y) = x^3y^4 + x^4y^3$ en el punto $(1,1)$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \langle \cos\theta,\ \sin\theta \rangle$, $\theta = \pi/2$.

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u}$$

$$\nabla f = \langle 3x^2y^4 + 4x^3y^3,\ 4x^3y^3 + 3x^4y^2 \rangle$$

$$\nabla f(1,1) = \langle 3+4,\ 4+3 \rangle = \langle 7, 7 \rangle.$$

$$\vec{u} = \langle \cos \pi/2,\ \sin \pi/2 \rangle = \langle 0, 1 \rangle.$$

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u} = \langle 7,7 \rangle \cdot \langle 0,1 \rangle = 0 + 7 = 7.$$

Capítulo 9

Exámen corto #10

Empresa produce A, B:

A: Q2
B: Q3

$$q_A = 400(P_B - P_A) \qquad q_B = 400(9 + P_A - 2P_B)$$

P_A & P_B son precios de venta

Maximizar precios de venta:

$$q_A = 400P_B - 400P_A \qquad I: \text{ Demanda} \times \text{Precio}$$

$$q_B = 3{,}600 + 400P_A - 800P_B$$

Ingresos: $q_A P_A + q_B P_B$

Costos: $2q_A + 3q_B$

$$U(P_A, P_B) = (q_A P_A + q_B P_B) - (2q_A + 3q_B)$$

$$U(P_A, P_B) = \left[P_A 400(P_B - P_A) + P_B 400(9 + P_A - 2P_B)\right] - \left[800(P_B - P_A) + 1{,}200(9 - P_A - 2P_B)\right]$$

$$U(P_A, P_B) = 400P_B P_A - P_A^2 + 10{,}800 - 1{,}200P_A - 2{,}400P_B$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_A} = 400P_B - 2P_A - 1{,}200 = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_B} = 400P_A - 2{,}400 = 0$$

$$P_A = \frac{2{,}400}{400} = 6$$

$$400P_B - 2(6) - 1{,}200 = 0$$

$$P_B = \frac{1{,}212}{400} = \frac{606}{200} = \frac{303}{100}$$

$$P_A = 6 \qquad P_B = \frac{303}{100}$$

CORTO #10 Cálculo Multivariable

Nombre: Sección A. **Carnet:** ______________

Una empresa produce dos tipos de dulces, A y B, para los cuales los costos unitarios de producción son de Q2 y Q3 por libra, respectivamente. Las cantidades q_A y q_B (en libras) de A y B que pueden venderse cada semana están dadas por las funciones de demanda conjunta

$$q_A = 400(p_B - p_A), \qquad q_B = 400(9 + p_A - 2p_B)$$

donde p_A y p_B son los precios de venta (por libra) de A y B, respectivamente.
Determine los precios de venta que maximizan la utilidad P de la compañía.
No realice la prueba de la Segunda Derivada.

Utilidad = Ingresos - Costos

$= p_A q_A + p_B q_B - 2q_A - 3q_B$

$U(p_A, p_B) = 400p_A(p_B - p_A) + 400p_B(9 + p_A - 2p_B)$
$- 800(p_B - p_A) - 1200(9 + p_A - 2p_B)$

$U(p_A, p_B) = 400p_Ap_B - 400p_A^2 + 3600p_B + 400p_Bp_A - 800p_B^2 - 10800$
$- 800p_B \qquad + 800p_A$
$2400p_B \qquad - 1200p_A$

$U(p_A, p_B) = 800p_Ap_B - 400p_A^2 + 5200p_B - 800p_B^2 - 400p_A - 10,800$

Puntos críticos.

$0 = U_{p_A}: \; 800p_B - 800p_A = 400$ Sume $R_1 + R_2$.

$U_{p_B} = 0: \; 800p_A - 1600p_B = -5200$

$-800p_B = -4800 \Rightarrow p_B = 6$

$800p_A = 1600p_B - 5200 = 4400 \Rightarrow p_A = \frac{4400}{800} = \frac{44}{8} = 5.5$

2da Derivada

$D(p_A, p_B) = \begin{vmatrix} -800 & 800 \\ 800 & -1600 \end{vmatrix} = 1600(800) - 800(800) = (800)^2 > 0$

$U_{p_Ap_A} < 0$ Máximo Relativo.

Corto #10 Cálculo Multivariable

Nombre: Sección B. **Carnet:** ______________

Sea P una función de producción dada por

$$P(L,K) = 10L - 0.5L^2 + 9K^2 - K^3$$

donde l y k son las cantidades de mano de obra y capital, respectivamente, y P es la cantidad producida. Encuentre los valores de L y K que maximizan P.
Utilice la prueba de la 2da derivada para clasificar cada punto crítico.

Puntos críticos

$$P_L = 10 - L = 0 \Rightarrow L = 10$$

$$P_K = 18K - 3K^2 = 0 \Rightarrow 3K(6-K) = 0 \Rightarrow K=0,\ K=6$$

puntos críticos $(10,0)$ y $(10,6)$

Prueba 2nda Derivada

$$D(L,K) = \begin{vmatrix} D_{LL} & D_{LK} \\ D_{KL} & D_{KK} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 18-6K \end{vmatrix}$$

$$D(10,0) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} = -18 < 0$$

$(10,0)$ es un punto desilla

$P_{LL} < 0 \quad P_{KK} > 0.$

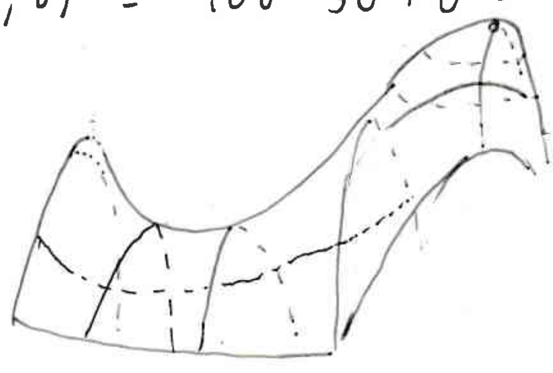
$$D(10,6) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -18 \end{vmatrix} = 18 > 0$$

$P_{LL}, P_{KK} < 0.$

$(10,6)$ es un máximo relativo

$$P_{max}(10,6) = 100 - 50 + 324 - 216 = 50 + 108 = 158.$$

$$P(10,0) = 100 - 50 + 0 = 50$$



Capítulo 10

Exámen corto #11

CORTO #11 - DAVID CORZO

1) $\int_0^1 \int_0^2 5x\,(y + x^2)^4 \, dy \, dx$

$5x \int_0^2 (y + x^2)^4 \, dy = 5x \int u^4 \, dy = \frac{5}{5} x \, u^5 =$

$u = y + x^2$

$du = dy$

$= x\,(y + x^2)^5 \Big]_0^2$

$= x \left\{ (2 + x^2)^5 - (0 + x^2)^5 \right\}$

$= x\,(2 + x^2)^5 - x\,(x^2)^5$

$\int \underset{①}{x\,(2 + x^2)^5} - \underset{②}{x\,(x^2)^5} \, dx$

① $\int_0^1 x\,(2 + x^2)^5 \, dx = \frac{1}{2} \int u^5 \, du = \frac{1}{12} u^6 = \frac{1}{12} (2 + x^2)^6$

$u = 2 + x^2$

$du = 2x \, dx$

$\frac{du}{2} = x\,dx$

$= \frac{1}{12} \left\{ (2 + 1)^6 - (2)^6 \right\}$

$= \frac{1}{12} \, 665 = \frac{665}{12}$

② $\int x\,(x^2)^5 = \frac{1}{2} \int u^5 \, du = \frac{1}{12} u^6 = \frac{1}{4} (x^2)^6$

$u = x^2$

$\frac{du}{2} = x\,dx$

$= \frac{1}{4} \left\{ (0^2)^6 - ((1)^2)^6 \right\} = \frac{1}{4}$

$\frac{665}{12} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{331}{6}}$

Corto #11 Cálculo Multivariable (15 min)

Nombre:____ **Carnet:** ______________

1. $\int_0^1 \int_0^2 5x(y + x^2)^4 \, dydx$

Corto #11 Cálculo Multivariable (15 min)

Nombre: Sección A. **Carnet:** ______________

1. $\int_0^1 \int_0^2 5x(y+x^2)^4 \, dydx = \int_0^1 x(y+x^2)^5 \Big]_{y=0}^{y=2} dx.$

$$= \int_0^1 x(2+x^2)^5 - x(x^2)^5 \, dx.$$

$$= \int_0^1 \underbrace{(2+x^2)}_{u}{}^5 \underbrace{x\,dx}_{du/2} - \int_0^1 x^{11} \, dx$$

$$= \frac{(2+x^2)^6}{12}\Big]_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{12} x^{12}\Big]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{3^6-2^6}{12} - \frac{1}{12} = \frac{3^6-2^6-1}{12} = \frac{664}{12}$$

$$= \frac{166}{3}$$

+10

en menos de 20 min.

CORTO #11 Cálculo Multivariable (15 min)

Nombre: Sección B. **Carnet:** ____________

1. $\displaystyle\int_0^3\int_0^4 4xy\underbrace{\sqrt{y^2+x^2}}_{u}\,\overset{2ydy}{\underline{\underline{dydx}}} = \int_0^3 \frac{4}{3}x\,(y^2+x^2)^{3/2}\Big]_{y=0}^{y=4}\,dx.$

$$I_1 = \int_0^3\left[\frac{4}{3}x\,(16+x^2)^{3/2} - \frac{4}{3}\underbrace{x\cdot(x^2)^{3/2}}_{x^4}\right]dx \qquad x\cdot x^{6/2} = x^4$$

$$I_1 = \frac{2}{3}\int_0^3 \underbrace{(16+x^2)}_{u}{}^{3/2}\,\underbrace{2x\,dx}_{du.} - \frac{4}{3}\int_0^3 x^4\,dx$$

$$I_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\,(16+x^2)^{5/2}\Big]_{x=0}^{x=3} - \frac{4}{15}x^5\Big]_{x=0}^{x=3.}$$

$$I_1 = \frac{4}{15}\underbrace{(25)^{5/2.}}_{3,125} - \frac{4}{15.}\underbrace{(16)^{5/2}}_{1024} - \frac{4}{15}3^5 + 0. \qquad 100\ pts$$

$$I_1 = \frac{12,500}{15}. - \frac{4096}{15} - \frac{972}{15} = \frac{7,432}{15} = \underbrace{495.4666}_{+10}$$

Capítulo 11

Exámen corto #12

1) Ec. Plano tangente

$$z^2 - 2x - 2y - 12 = 0 \qquad P(1,-1,4)$$

Plano tangente:

$$z - \underbrace{f(x_0, y_0)}_{4} = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$f_x(x_0,y_0) = -2 \Big|_{(1,-1)} = -2$$

$$f_y(x_0,y_0) = -2 \Big|_{(1,-1)} = -2$$

$$z - 4 = -2(x-1) - 2(y+1)$$

2) Primeras derivadas par. de z:

$$\cos(xy) + 1 = \sec(zx) + \sin(yz)$$

$$\cos(xy) + 1 - \sec(zx) - \sin(yz) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-\sin(xy)\cdot y - \sec(zx)\tan(zx)\cdot z}{-\sec(zx)\tan(zx)\cdot x + \cos(yz)\cdot y}$$

$$= \frac{\sin(xy)\cdot y + \sec(zx)\tan(zx)\cdot z}{-\sec(zx)\tan(zx)\cdot x + \cos(yz)\cdot y}$$

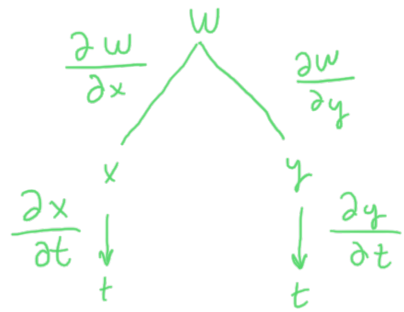
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-\sin(xy)\cdot x + \cos(yz)\cdot z}{-\sec(zx)\tan(zx)\cdot x + \cos(yz)\cdot y}$$

3)

$$w(x,y) = \tan^{-1}(yx)$$

$$x = e^{2t-6}$$

$$y = \ln(2t-5) + t - 2$$



$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{y}{(xy)^2+1} \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = e^{2t-6}\cdot 2$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{x}{(xy)^2+1} \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{2}{2t-5} + 1$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\frac{y}{(xy)^2+1}\right)\left(e^{2t-6}\cdot 2\right) + \left(\frac{x}{(xy)^2+1}\right)\left(\frac{2}{2t-5}+1\right)$$

$$\Big|_{\substack{t=3\\x=1\\y=1}} = \frac{1}{1+1}\cdot \cancel{e^{2(3)-6}}^{\,1}\cdot 2 + \frac{1}{\cancel{1+1}}\cdot\left(\frac{\cancel{2}}{1}+1\right)$$

$$= 2 + 1 = 3$$

4) Temperatura en un lago punto $P(x,y,z)$ es :

$$T(x,y,z) = x\sin(\pi y z)$$

Encontrar razón de cambio en $P(1,1,2)$

en $\vec{u} = \langle 1, 4, 8\rangle$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1+16+64}$$
$$= \sqrt{81}$$
$$= 9$$

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) = \nabla f \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} = \frac{1}{9}\langle 1, 4, 8\rangle$$

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\rangle$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(\pi y z) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(\pi y z)\cdot z\pi$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x\cos(\pi y z)\cdot \pi y$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1,2)} = \sin(\pi 2) = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1,2)} = \cos(\pi 2)\cdot 2\pi = 2\pi \qquad \nabla f(\vec{x}) = \langle 0, 2\pi, \pi \rangle$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,1,2)} = \cos(\pi 2)\cdot \pi = \pi$$

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}) = \langle 0, 2\pi, \pi \rangle \cdot \left\langle \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9} \right\rangle$$

$$= (0)\left(\frac{1}{9}\right) + (2\pi)\left(\frac{4}{9}\right) + (\pi)\left(\frac{8}{9}\right)$$

$$= \frac{8\pi}{9} + \frac{8\pi}{9}$$

$$= \frac{16\pi}{9}$$

5) Demanda:

$$x = 16 - P_A + P_B \qquad y = 24 - 2P_A - 4P_B$$

Costo

$$A = 2 \quad ; \quad B = 4$$

$$u = (x P_A + y P_B) - (2x + 4y)$$

$$= \left[(16 - P_A + P_B)P_A + (24 - 2P_A - 4P_B)P_B\right] - \left[2(16 - P_A + P_B) + 4(24 - 2P_A - 4P_B)\right]$$

$$= 16P_A - P_A^2 + P_BP_A + 24P_B - 2P_AP_B - 4P_B^2 - (32 - 2P_A + 2P_B + 96 - 8P_A - 16P_B$$

$$= \cancel{16P_A} - \cancel{P_A^2} + \cancel{P_BP_A} + \cancel{24P_B} - \cancel{2P_AP_B} - 4P_B^2 - \cancel{32} + \cancel{2P_A} - \cancel{2P_B} - \cancel{96} + 8\cancel{P_A} - \cancel{16P_B}$$

$$= 16P_A + 2P_A + 8P_A$$

$$\ldots P_A + \ldots P_A + \ldots P_A - 16P_B - 2P_B + 24P_B - 32 - 96 + P_BP_A - 2P_AP_B$$

$$= 26P_A - 6P_B - 128 + P_AP_B - P_A^2 - 4P_B^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial P_A} = -2P_A + P_B + 26 = 0$$

$$P_B = -26 + 2P_A$$

$$\frac{\partial u}{\partial P_B} = -6 + P_A - 8P_B = 0$$

$$-6 + P_A - 8(-26 + 2P_A) = 0$$

$$-6 + P_A + 208 - 16P_A = 0$$

$$-15P_A + 202 = 0$$

$$P_A = \frac{202}{15} \longrightarrow P_B = -26 + 2\left(\frac{202}{15}\right) = \frac{14}{15}$$

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = (-2)(-8) - 1 = 16 - 1$$

$$= 15 > 0$$

$f_{xx} = -2 < 0$ máx relativo

6) Publicidad Q 20,000 $\rightarrow y$

Periódico x

Utilidad = Ingresos − Costos

Corto #12 Cálculo Multivariable

Nombre:____ **Carnet:** ______________

1. (20 pts.) Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie $z^2 - 2x - 2y - 12 = 0$ en el punto $(1, -1, 4)$.

2. (20 pts.) Encuentre las primeras derivadas parciales de z para la función implícita:

$$\cos(yx) + 1 = \sec(zx) + \sin(yz)$$

3. (25 pts.) El trabajo que realiza una partícula en el punto $P(x, y)$ es:

$$W(y, x) = \tan^{-1}(yx)$$

La posición de la partícula en el tiempo t es:

$$x = e^{2t-6} \qquad\qquad y = \ln(2t - 3) + t - 2$$

Encuentre la razón instantánea del trabajo respecto al tiempo en $t = 3$.

4. (25 pts.) La temperatura de un lago en el punto $P(x, y, z)$ es: $T(x, y, z) = x\sin(\pi yz)$. Encuentre la razón de cambio de la temperatura de en el punto $(1, 1, 2)$ en la dirección del vector $(1, 4, 8)$.

5. (30 pts.) Un monopolista vende dos productos competitivos, A y B, para los cuales las funciones de demanda son $x = 16 - p_A + p_B$ y $y = 24 - 2p_A - 4p_B$ Si el costo promedio constante de producir una unidad de A es 2 y para una unidad de B es 4, ¿cuántas unidades de A y de B deben venderse para maximizar la utilidad del monopolista? Compruebe su respuesta utilizando la Prueba de la 2da Derivada.

6. (30 pts.) Una compañía de computadoras tiene un presupuesto mensual para publicidad de $Q20000$. Su departamento de marketing estima que si cada mes se gastan x en publicidad en periódicos y y mensuales en publicidad por televisión, entonces las ventas mensuales estarán dadas por $S = 80x^{1/4}y^{3/4}$. Si la utilidad es el 10 % de las ventas, menos el costo de la publicidad, determine cómo asignar el presupuesto publicitario para maximizar la utilidad mensual.

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z} = \dfrac{+2}{2z}$ en $(1,-1,4)$ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = +\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z} = \dfrac{+2}{2z}$ en $(1,-1,4)$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{4}$

Ec. plano tangente: $L(x,y) = z(1,-1) + z_x(x-1) + z_y(y+1)$

$L(x,y) = 4 + \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(y+1)$

2. Reescriba como $F(x,y,z) = \sec(zx) + \sin(yz) - \cos(yx) = 1.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{-z\sec(zx)\tan(zx) + y\sin(yx)}{x\sec(zx)\tan(zx) + y\cos(yz)}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{-z\cos(yz) - x\sin(yx)}{x\sec(zx)\tan(zx) + y\cos(yz)}$$

3. $w(y,x) = \tan^{-1}(yx)$, $x = e^{2t-6}$, $y = \ln(2t-5) + t - 2$, $t = 3.$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$ use $\dfrac{d}{du}(\tan^{-1}(Ku)) = \dfrac{K}{1+K^2u^2}$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{y}{1+y^2x^2}2e^{2t-6} + \frac{x}{1+y^2x^2}\left[\frac{2}{2t-5} + 1\right]$$

En $t = 3$ $x = e^{6-6} = 1$, $y = \ln(6-5) + 3 - 2 = 0 + 1 = 1$

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=1} \frac{1}{1+1}2\cdot 1 + \frac{1}{1+1}\left[\frac{2}{1} + 1\right] = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

La razón instantánea de cambio del Trabajo es de $\frac{5}{2}$. Joules/s.

4. $T(x,y,z) = x\sin(\pi yz)$, punto $(1,1,2)$, vector $(1,4,8)$.

La razón de cambio de la Temperatura es la derivada direccional.

$$D_u T = \nabla T \cdot \vec{u}$$

Gradiente: $\nabla T = \langle \sin(\pi yz), \pi xz\cos(\pi yz), \pi xy\cos(\pi yz)\rangle$

en el punto P. $\nabla T(1,1,2) = \langle \sin(2\pi), 2\pi\cos(2\pi), \pi\cos(2\pi)\rangle$

$$\nabla T(1,1,2) = \langle 0, 2\pi, \pi\rangle$$

Vector unitario $|\langle 1,4,8\rangle| = \sqrt{1+16+64} = \sqrt{81} = 9$

$$\vec{u} = \frac{\langle 1,4,8\rangle}{|\langle 1,4,8\rangle|} = \frac{1}{9}\langle 1,4,8\rangle$$

Razón de Cambio: $D_u T(1,1,2) = \langle 0, 2\pi, \pi\rangle \cdot \frac{1}{9}\langle 1,4,8\rangle$

$$= \frac{1}{9}\left(0 + 8\pi + 8\pi\right) = \frac{16\pi}{9}$$

5. Demandas $x = 16 - p_A + p_B$ $\quad y = 24 - 2p_A - 4p_B$.

Costos $C(x,y) = 2x + 4y$.

Encuentre la función de utilidad y la utilidad máxima.

Utilidad = Ingresos − Costos $= p_A x + p_B y - (2x + 4y)$

Reemplace las funciones x & y en $U(x,y)$, simplifique U.

$$U(p_A, p_B) = p_A(16 - p_A + p_B) + p_B(24 - 2p_A - 4p_B)$$
$$- 2(16 - p_A + p_B) - 4(24 - 2p_A - 4p_B)$$

$$U(p_A, p_B) = 16p_A - p_A^2 + p_A p_B + 24p_B - 2p_A p_B - 4p_B^2$$
$$-32 + 2p_A - 2p_B - 96 + 8p_A + 16p_B.$$

$$U(p_A, p_B) = 26p_A - p_A^2 - p_A p_B - 4p_B^2 + 38p_B - 128$$

Puntos críticos. $U_{p_A} = U_{p_B} = 0$

$$U_{p_A} = 26 - 2p_A - p_B = 0 \Rightarrow \quad 2p_A + p_B = 26 \quad -R_1$$
$$U_{p_B} = 38 - p_A - 8p_B = 0 \qquad p_A + 8p_B = 38 \quad +2R_2$$

$$15p_B = 50 \Rightarrow p_B = \frac{10}{3}.$$

$$p_A = 38 - \frac{80}{3} = \frac{34}{3} \approx 11.\overline{33} \quad \& \quad p_B = \frac{10}{3} = 3.\overline{33}$$

Cantidades: $x = 16 - \frac{34}{3} + \frac{10}{3} = 16 - 8 = 8$, $\quad y = 24 - \frac{68}{3} - \frac{40}{3} = -12.$

Prueba 2da Derivada: $D = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15 > 0$ y $U_{p_A p_A} < 0$

Hay un máximo relativo en el punto $\left(\frac{34}{3}, \frac{10}{3}\right)$

6. Presupuesto 20 mil
Periódicos x Televisión y.
Ventas $S = 80x^{1/4}y^{3/4}$
Utilidad $U = 0.10S$ - Presupuesto.

Función Utilidad: $U(x,y) = 8x^{1/4}y^{3/4} - 20{,}000$
Restricción $x + y = 20{,}000.$

Problema Optimización Max $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 8x^{1/4}y^{3/4} - 2000 + \lambda(20000 - x - y)$

Encuentre el punto crítico.

$\mathcal{L}_x = 2x^{-3/4}y^{3/4} - \lambda = 0$
$\mathcal{L}_y = 6x^{1/4}y^{-1/4} - \lambda = 0$ $\Rightarrow$
$\mathcal{L}_\lambda = 20000 - x - y = 0$

$\lambda = 2x^{-3/4}y^{3/4}$ (1)
$\lambda = 6x^{1/4}y^{-1/4}$ (2)
$x + y = 20000$ (3)

Iguale (1) y (2) y resuelva para x: ó para y.

$$\frac{2y^{3/4}}{x^{3/4}} = \frac{6x^{1/4}}{y^{1/4}} \Rightarrow 2y = 6x \Rightarrow y = 3x \quad (4)$$

Sustituya (4) en (3) y resuelva para x. $4x = 20{,}000$

$x = 5000$ & $y = 15{,}000$ $\lambda \approx 6\sqrt[4]{\frac{5000}{15000}} = \frac{6}{\sqrt[4]{3}} \approx 4.56$

Se deben asignar Q5000 en periódicos y Q15,000 en televisión.

La utilidad máxima es

$$U(500, 1500) = 8\underbrace{\sqrt[4]{500\cdot(1500)^3}}_{9{,}118.02} - 20{,}000 \approx -10{,}881.97$$

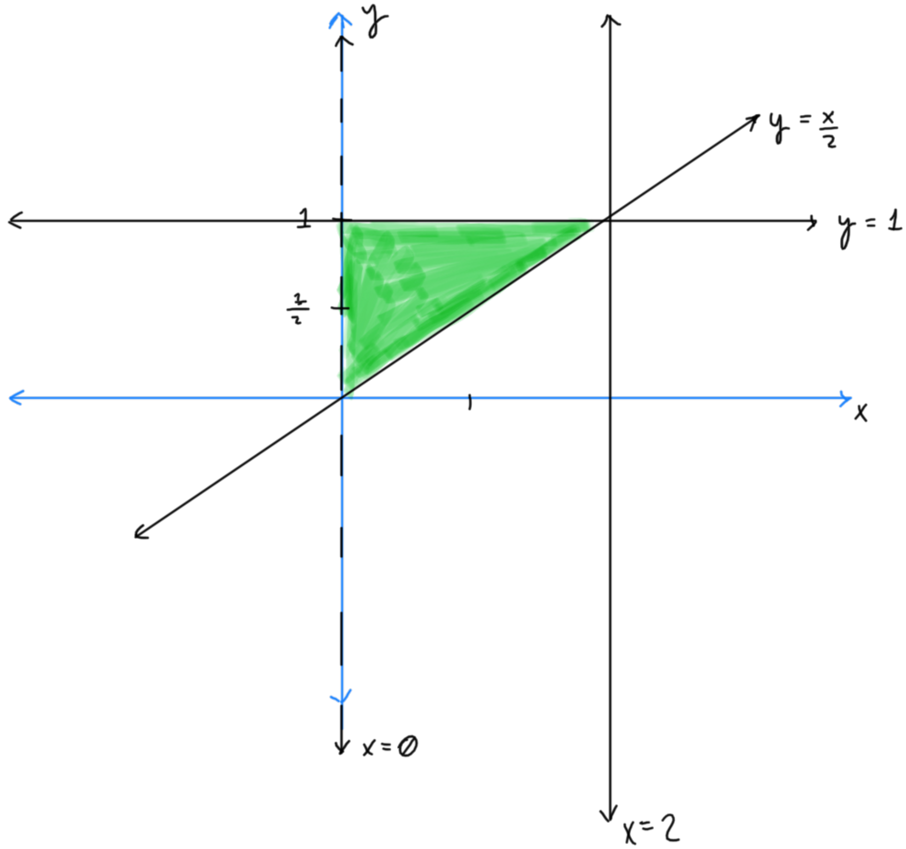
Capítulo 12

Exámen corto #13

■ $$\int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^1 \sin(y^2)\,dy\,dx$$

$y = \frac{x}{2}$ $\quad$ $y = 1$

$x = 0$ $\quad$ $x = 2$



■ $$\int_{\substack{0\\ \shortparallel \\ x}}^{\substack{x\\ \shortparallel \\ 2}} \int_{\frac{x}{2}=y}^{1=y} \sin(y^2)\,dy\,dx$$

$y = 1$ $\quad$ $y = \frac{x}{2}$ $\quad$ $x = 2$

$x = 0$ $\quad$ $x = 2y$ $\quad$ $x = 0$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=2y} \sin(y^2)\,dx\,dy$$

$\boxed{1}$ $$\int_0^{2y} \sin(y^2)\,dx = \sin(y^2)\left[2y - 0\right]$$

$$= 2y\sin(y^2)$$

$\boxed{2}$ $2\int_0^2 y\sin(y^2)\,dy = \int_0^2 \sin(u)\,du = -\cos(u)\Big]_{u(0)=0}^{u(2)=4}$

$u = y^2 \rightarrow u(2) = 4$

$du = 2y\,dy \rightarrow u(0) = 0$

$= -\cos(4) + \cos(0) = \boxed{-\cos(4) + 1}$

Corto #13 Cálculo Integral (15 min)

Nombre: Sección A. **Carnet:** ______________

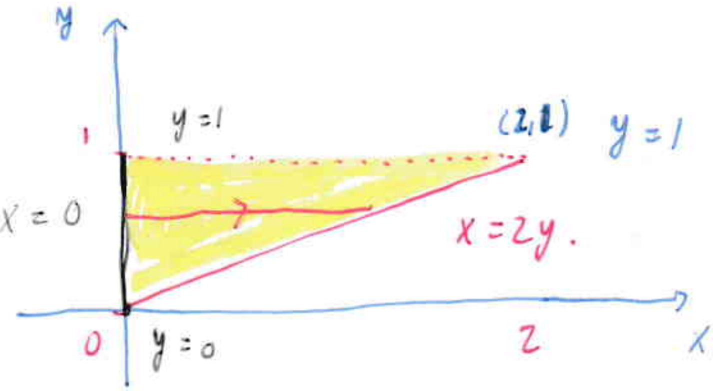
1. Dada $\int_0^2 \left(\int_{x/2}^1 \sin(y^2) dy \right) dx$

   (a) (30 pts.) Gráfique la región delimitada por los limites de integración.

   (b) (40 pts.) Intercambio el orden de los limites de integración.

   (c) (30 pts.) Evalúe la integral.

$D: \frac{x}{2} \leq y \leq 1 \qquad 0 \leq x \leq 2.$



$x = 2y$

Intercambio el orden

$D: 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 2y.$

$$\iint_D \sin y^2 \, dA = \int_0^1 \int_0^{2y} \sin(y^2) \, dx \, dy. \qquad \int_0^{2y} dx = 2y.$$

$$= \int_0^1 \sin(\underbrace{y^2}_{u}) \underbrace{(2y \, dy)}_{du.}$$

$$= \int_0^1 \sin u \, du. = -\cos u \Big]_0^1 = 1 - \cos 1$$

Corto #13 Cálculo Integral (15 min)

Nombre: Sección B. **Carnet:** ____________

1. Dada $\int_0^2 6\left(\int_{x^3}^8 \sqrt{1+y^{4/3}}\, dy\right) dx$

   (a) (30 pts.) Gráfique la región delimitada por los limites de integración .

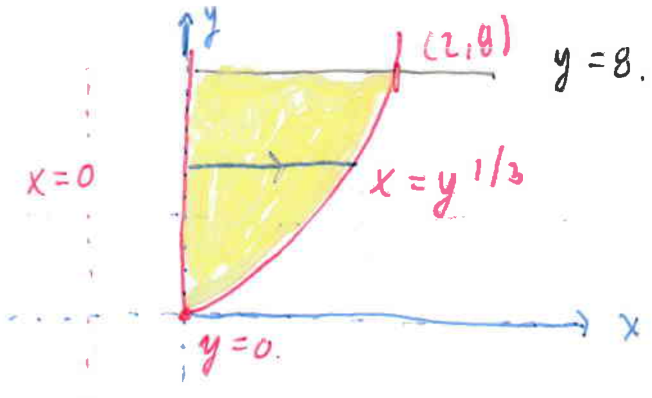
   (b) (40 pts.) Intercambie el orden de los limites de integración .

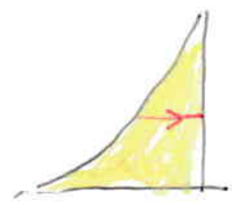
   (c) (30 pts.) Evalúe la integral.

$D: 0 \leq x \leq 2, \quad x^3 \leq y \leq 8$

$0 \leq y \leq x^3, \quad 0 \leq x \leq 2.$

a)





b) $D: 0 \leq y \leq 8, \quad 0 \leq x \leq y^{1/3}.$

$$\iint_D 6\sqrt{1+y^{4/3}}\, dA = \int_0^8 \int_0^{y^{1/3}} 6\,(1+y^{4/3})^{1/2}\, dx\, dy.$$

c) $\int_0^{y^{1/3}} dx = y^{1/3}.$

$$I = \int_0^8 6(1+y^{4/3})^{1/2} \underbrace{y^{1/3}\, dy}_{\frac{3}{4}du}. \qquad u = 1+y^{4/3}, \quad du = \frac{4}{3} y^{1/3}\, dy$$

$u(8) = 1+(2^3)^{4/3} = 1+16 = 17 \qquad u(0) = 1+0 = 1$

$$I = \int_1^{17} \frac{9}{2} u^{1/2}\, du = \frac{9}{2}\cdot\frac{2}{3}\, u^{3/2}\Big]_1^{17} = 3\left(17^{3/2} - 1\right)$$

Capítulo 13

Exámen corto #14

1) $I_1 = \int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2} \sin\underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2} \underbrace{dy\,dx}_{r\,dr\,d\theta}$

$$y = \sqrt{9-x^2} \qquad\qquad y = 0$$

$$y^2 = 9 - x^2$$

$$0 \le y \le \sqrt{9-x^2}$$

$$y^2 + x^2 = \underbrace{3}_{r}{}^2 \qquad\qquad \boxed{0 \le r \le 3}$$

$$0 \le \theta \le \pi$$

$$r = 3$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{3} r^2 \sin(r^2)\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{3} r^3 \sin(r)\, dr\, d\theta$$

$\boxed{1}$ $\int_0^3 r^3 \sin(r^2)\, dr$

$$u = r^2 \qquad\qquad dv = r\sin(r^2)$$

$$du = 2r\,dr \qquad\qquad v = -\frac{1}{2}\cos(r^2)$$

$$= -\frac{r^2}{2}\cos(r^2) + \int_0^3 r\cos(r^2)\,dr \qquad \begin{matrix} w = r^2 \\ \frac{dw}{2} = r\,dr \end{matrix}$$

$$= -\frac{r^2}{2}\cos(r^2) + \frac{1}{2}\sin(r^2)\Big]_0^3$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-9\cos(9) + \sin(9)\right\}$$

$\boxed{2}$ $\frac{1}{2}\left(-9\cos(9) + \sin(9)\right)\int_0^{\pi} 1\, d\theta$

$$= \frac{1}{2}\left(-9\cos(9) + \sin(9)\right)\, \theta\Big]_0^{\pi}$$

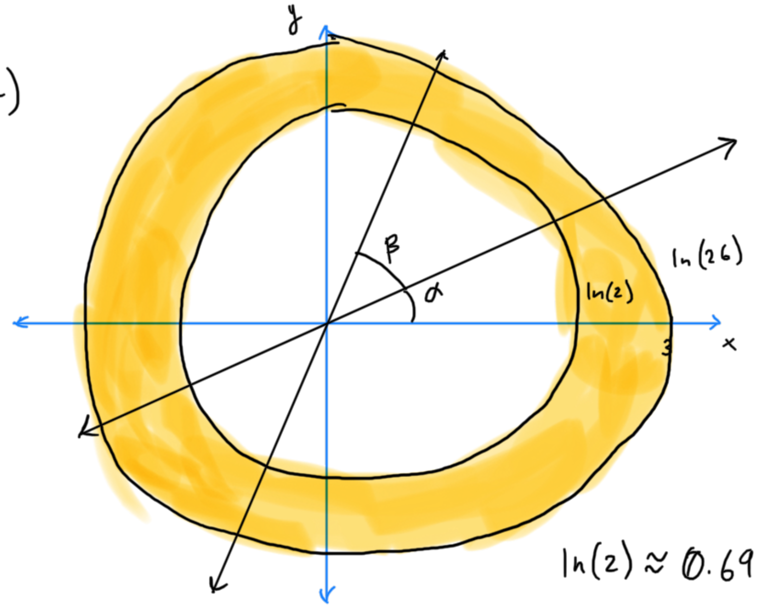
$$= \frac{1}{2}\left(-9\cos(9) + \sin(9)\right)(\pi - 0)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(-9\cos(9) + \sin(9)\right)$$

2) $\iint_D e^{x^2+y^2}\, dA$

$D: \{ \left(y = \frac{x}{\sqrt{3}}\right) \wedge \left(y = \sqrt{3}x\right) \wedge \left(\ln(2) \le x^2+y^2 \le \ln(26)\right) \}$

a)



$y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$

$y = \sqrt{3}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = 1$

$\ln(2) \approx 0.69$

$\ln(26) \approx 3.25$

$\sqrt{3}\,y = x$

$y = \sqrt{3}x$

$\ln(2) \le \underbrace{x^2+y^2}_{r^2} \le \ln(26)$

$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3})$

$\theta = \frac{\pi}{3}$

$\sqrt{\ln(2)} \le r \le \sqrt{\ln(26)}$

$\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$

b)

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\theta = \frac{\pi}{6}$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \int_{\sqrt{\ln(2)}}^{\sqrt{\ln(26)}} e^{r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$\boxed{1}$ $\int_{\sqrt{\ln(2)}}^{\sqrt{\ln(26)}} e^{r^2}\, r\, dr = \frac{1}{2}\int e^u\, du = \frac{e^u}{2} = \frac{e^{r^2}}{2}\Big]_{\sqrt{\ln(2)}}^{\sqrt{\ln(26)}} =$

$u = r^2$

$\frac{du}{2} = r\,dr$

c)

$$= \frac{1}{2}\left\{ e^{(\ln(26))^2} - e^{(\ln(2))^2} \right\} = \frac{1}{2}\left\{ 26 - 2 \right\}$$

$$= 12$$

$\boxed{2}$ $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 12 \, d\theta = 12\,\theta \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{12\pi}{3} - \frac{12\pi}{6} = 2\pi$$

3) $$I_3 = \int_0^{e-1} \left(\int_{\ln(y+1)}^{1} 3\sqrt{e^x - x}\, dx \right) dy$$

$x = \ln(y+1)$ $\qquad \boxed{x = 1}$

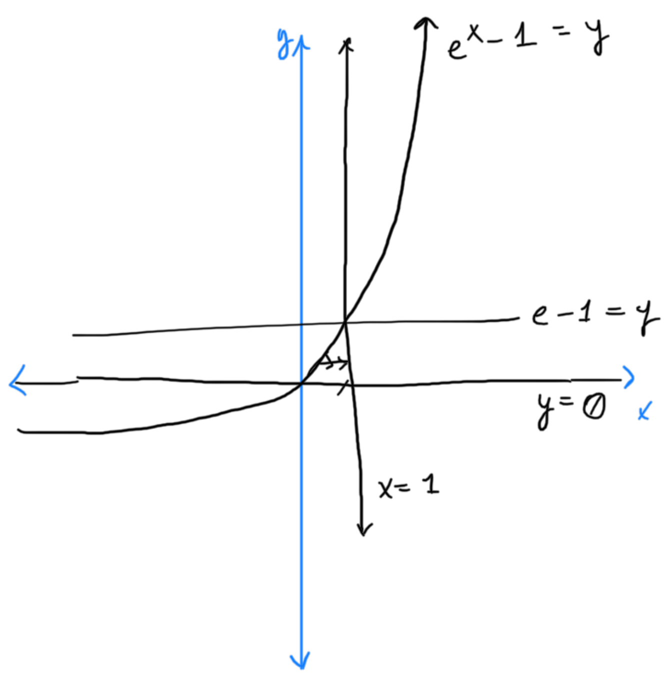
$e^x = y + 1$

$\boxed{e^x - 1 = y}$

$y = e - 1$

$y = 0$

a)



b) tipo 1: respecto y :

$$\int^{x=1} \int^{e^x - 1 = y}$$

$\int_{x=0} \int_{0=y} 3\sqrt{e^x - x} \; dy \, dx$

tipo 2: respecto x:

$$\int_{y=0}^{y=e-1} \int_{x=\ln(y+1)}^{x=1} 3\sqrt{e^x - x} \, dx \, dy$$

c) $\boxed{1}$ $\int_0^{e^x-1} 3\sqrt{e^x - x} \, dy = 3\sqrt{e^x - x} \; y \Big]_0^{e^x-1}$

$= 3\sqrt{e^x - x} \left\{ e^x - 1 \right\}$

$\boxed{2}$ $3\int \sqrt{e^x - x} \; e^x - 1 \; dx = 3\int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{3}{\left(\frac{2}{3}\right)} u^{\frac{3}{2}}.$

$u = e^x - x$

$du = e^x - 1 \; dx$

$= \frac{9}{2} u^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2}(e^x - x)^{\frac{3}{2}} \Big]_0^1$

$= \frac{9}{2} \left\{ (e^1 - 1) - (e^0 - 0) \right\} = \frac{9}{2} \left\{ e - 1 - 1 \right\}$

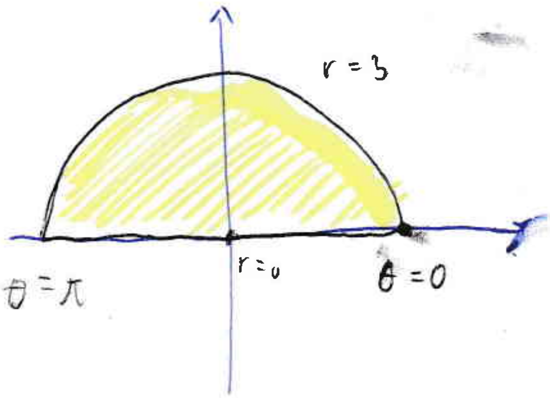
d) $= \frac{9}{2} \left\{ e - 2 \right\}$ área

Corto #14 Cálculo Multivariable

Nombre:________________________________ **Carnet:** ____________

1. (50 pts.) Evalué $I_1 = \int_{-3}^{3}\left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)dy\right)dx.$

$-3 \leq x \leq 3 \qquad 0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2}$ (semicircunferencia superior $r=3$)



$0 \leq r \leq 3 \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$

$y=0 \Rightarrow \quad r\sin\theta = 0, \quad \theta = 0, \pi.$

use $x^2+y^2 = r^2.$

$$I_1 = \iint_D (x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)\,dA. = \int_0^{\pi}\int_0^3 r^2\sin(r^2)\,r\,dr\,d\theta.$$

$$I_1 = \left(\int_0^{\pi} d\theta\right)\left(\int_0^3 r^2\sin(r^2)\,r\,dr.\right)$$

$\pi.$

$u = r^2 \qquad u(3) = 9$

$du = 2r\,dr \qquad u(0) = 0$

$$I_1 = \pi\,\frac{1}{2}\int_0^9 u\sin(u)\,du. = \frac{\pi}{2}\left(-u\cos u\Big]_0^9 + \int_0^9 \cos u\,du\right)$$

IPP.

$$I_1 = \frac{\pi}{2}\left(-9\cos 9 + 0\cos 0 + \sin u\Big]_0^9\right) = \frac{\pi}{2}\left(\sin 9 - 9\cos 9\right)$$

$y = 2$ $\boxed{r\sin\theta = 2}$

$\sin\theta = \frac{2}{4}$

2. (50 pts.) Considere $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}\, dA$,

D está entre $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}\, x$ & el semianillo superior $\ln(2) \leqslant x^2+y^2 \leqslant \ln(26)$

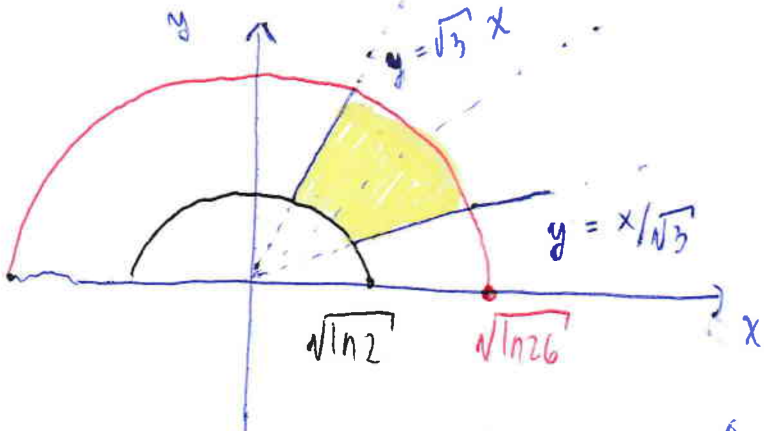
20 (a) Escriba y dibuje la región de integración.

10 (b) Plantee la integral doble en coordenadas polares.

20 (c) Evalúe la integral doble.

dos circunferencias de radio $\sqrt{\ln 2}$ y $\sqrt{\ln 26}$

dos rectas en el primer cuadrante.



Rectángulo Polar.

$y = bx$

$\dfrac{y}{x} = \dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = b. \ni \tan\theta = b.$

encuentre los ángulos.

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ $\quad \theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

Limites $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$.

$\sqrt{\ln 2} \leq r \leq \sqrt{\ln 26}$

b. $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}\, dA. = \int_{\pi/6}^{\pi/3}\left(\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 26}} e^{r^2}\, r\, dr\right) d\theta.$ $\quad \frac{1}{2}e^{r^2}\Big]_{\sqrt{}}^{\sqrt{}}$

c. $\displaystyle\underbrace{\left(\int_{\pi/6}^{\pi/3} d\theta\right)}_{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}.}\left(\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 26}} e^{r^2}\, r\, dr\right) = \frac{\pi}{6}\int_{\ln 2}^{\ln 26} \frac{1}{2} e^{u}\, du.$

$u = r^2$ $\quad u(\sqrt{\ln 26}) = \ln 26$

$du = 2r\,dr$ $\quad u(\sqrt{\ln 2}) = \ln 2.$

$I_2 = \dfrac{\pi}{12}\, e^{u}\Big]_{\ln 2}^{\ln 26.} = \dfrac{\pi}{12}\left(e^{\ln 26} - e^{\ln 2}\right) = \dfrac{\pi}{12}(26-2) = 2\pi.$

3. (50 pts.) Considere la integral doble:

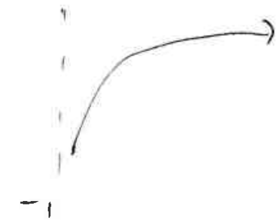
$$I_3 = \int_0^{e-1} \left(\int_{\ln(y+1)}^{1} 3\sqrt{e^x - x}\, dx \right) dy$$

10 (a) Dibuje la región de integración.

10. (b) Escriba la región como una tipo I y uno tipo II.

(c) Evalúe la integral.

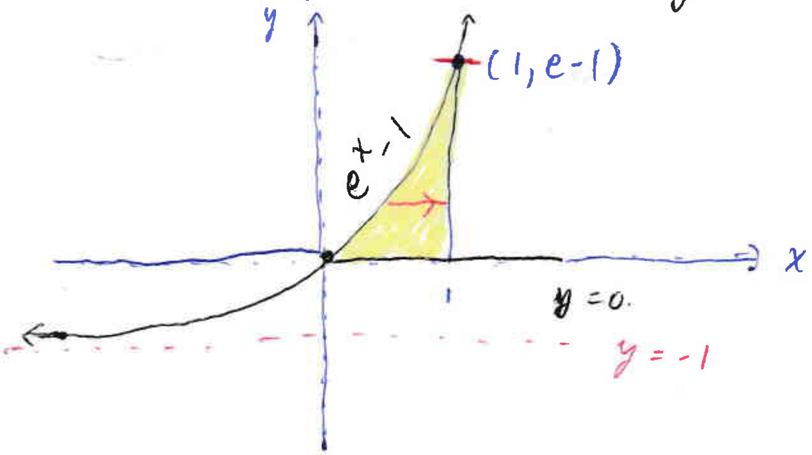
(d) Encuentre el área de la región de integración.



a. $0 \leq y \leq e-1$ $\quad \ln(y+1) \leq x \leq 1$

abajo $\quad$ izquierda $\quad$ derecha.

$x = \ln(y+1) \qquad e^x = y+1 \qquad y = e^x - 1$ (misma $\ln(y+1)$)



b. Tipo I: $0 \leq y \leq e^x - 1$, $0 \leq x \leq 1$ ← de último $\quad dy\,dx$

Tipo II: $0 \leq y \leq e-1$, $\ln(y+1) \leq x \leq 1$ $\quad dx\,dy.$

último.

c. $\displaystyle\iint_D 3(e^x - x)^{1/2}\, dA. = \int_0^1 \left(\int_0^{e^x - 1} 3(e^x - x)^{1/2}\, dy \right) dx$

$$I_3 = \int_0^1 3(e^x - x)^{1/2}\, y \Big]_{y=0}^{y=e^x-1} dx = \int_0^1 3(e^x - x)^{1/2} \underbrace{(e^x - 1)\, dx}_{du}$$

$u = e^x - x \qquad u(1) = e - 1$

$du = (e^x - 1)\, dx \qquad u(0) = 1$

$$I_3 = 3\int_1^{e-1} u^{1/2}\, du = \frac{3 \cdot 2}{3}\, u^{3/2} \Big]_1^{e-1} = 2\left[(e-1)^{3/2} - 1\right]$$

d. Área. $A = \iint_D dA.$

$0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq e^x - 1.$

$$A = \int_0^1 \int_0^{e^x - 1} dy\, dx = \int_0^1 (e^x - 1)\, dx$$

$$A = e^x - x \Big]_0^1 = e - 1 - 1 + 0 = e - 2$$

≈ 0.70

Parte II

Parciales

Capítulo 14

Parcial #01

Cálculo Multivariable

Parcial 1

5to Semestre 2020 **(2 horas)**

Nombre: David Corzo **Carnet:** 20190432

Tema:	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos:	18	16	16	16	18	16	100
Nota:	18	14	13	12	18	16	89

~~87~~ 91

1. Considere la función en dos variables $f(x,y) = \ln(10 - x^2 - y)$.

   (a) (06 **pts.**) Encuentre y bosqueje el dominio de la función.

   (b) (12 **pts.**) Encuentre y bosqueje las curvas de nivel de f para $k = 0,\ \ln(6),\ \ln(10)$.

B en hoja.

a) $f(x,y) = \ln(10 - x^2 - y)$

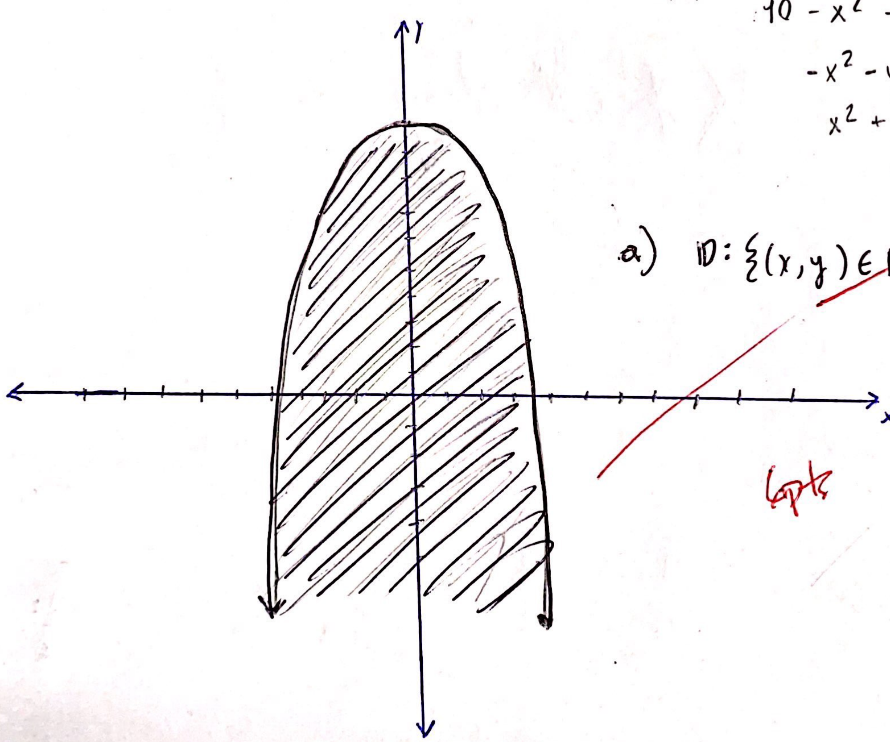
$\mathbb{D}$

$10 - x^2 - y > 0$

$-x^2 - y > -10$

$x^2 + y < 10$

$y < 10 - x^2$



a) $\mathbb{D}: \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid (y < 10 - x^2)\}$

6pts

1. b) $K = \emptyset, \ln(6), \ln(10)$

$\emptyset = \ln(10 - x^2 - y)$

$e^0 = 10 - x^2 - y$

$1 = 10 - x^2 - y$

$1 - 10 = -x^2 - y$

$-9 = -x^2 - y$

$9 = x^2 + y$

$\boxed{9 - x^2 = y}$

$\ln(6) = \ln(10 - x^2 - y)$

$6 = 10 - x^2 - y$

$6 - 10 = -x^2 - y$

$-4 = -x^2 - y$

$4 = x^2 + y$

$\boxed{4 - x^2 = y}$

$\ln(10) = \ln(10 - x^2 - y)$

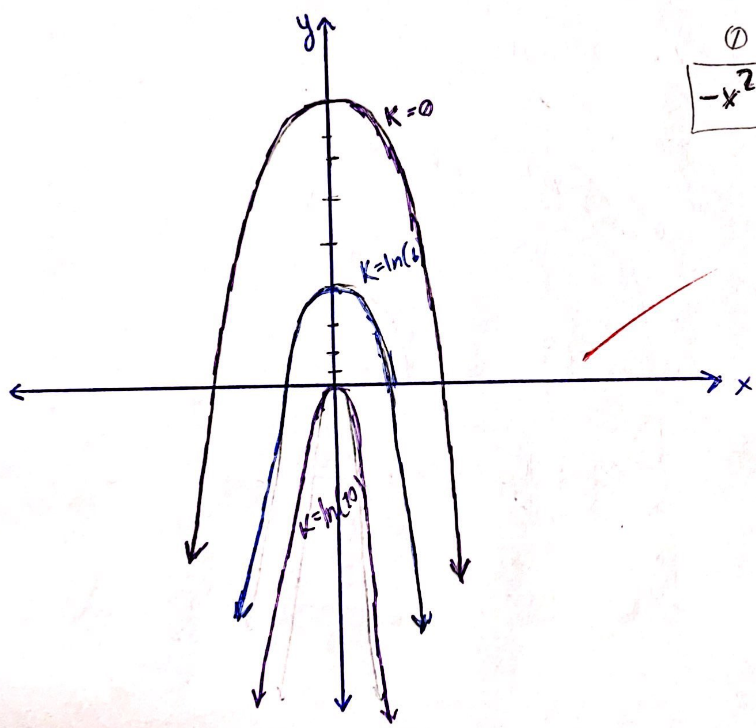
$10 = 10 - x^2 - y$

$10 - 10 = -x^2 - y$

$\emptyset = -x^2 - y$

$\emptyset = x^2 + y$

$\boxed{-x^2 = y}$



12ptT

3)

$$|r(t)| = \sqrt{\underbrace{\frac{16t^2}{9}(1+t^2) + \frac{16t^2}{9}(1-t^2) + \frac{1}{9}t^2}}$$

$$\frac{1}{9}t^2\left[16(1+t^2) + 16(1-t^2)\right]$$

$$\frac{1}{9}t^2\left[\underbrace{16 + \cancel{16t^2} + 16 - \cancel{16t^2}}_{\underbrace{16+16}_{32}}\right]$$

$$\frac{32}{9}t^2$$

$2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16 \cdot 2 = 32$

2^5

$$|r'(t)| = \sqrt{\frac{32}{9}t^2} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{9}}\sqrt{t^2} = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{3}t$$

$$L = \int_2^8 \frac{2^{\frac{5}{2}}}{3}|t|\,dt = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{3}\int_5^8 |t|\,dt = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{6}|t|^2 + C$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{2}}}{6}\left\{8^2 - 5^2\right\}$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{2}}}{6}\left\{64 - 25\right\}$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{2}}}{6}\left\{39\right\} = \frac{\sqrt{32} \cdot 39}{6}$$

2. **(16 pts.)** Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta tangente a $\mathbf{r(t)} = \langle\, 2\sqrt{t+2},\ \sin(\pi t),\ t\ln(t-1) - 2t\,\rangle$ en el punto donde $t = 2$.

$$\vec{r}_t = \vec{r}(a) + t\,\vec{r}\,'(a)$$

$$r'(t) = \left\langle 2 \cdot \tfrac{1}{2}(t+2)^{-\frac{1}{2}},\ \cos(\pi t),\ \ln(t-1) + t \cdot \frac{1}{t-1} - 2 \right\rangle$$

$$= \left\langle 1\,(t+2)^{-\frac{1}{2}},\ \cos(\pi t),\ \ln(t-1) + \frac{t}{t-1} - 2 \right\rangle$$

$$r'(2) = \left\langle (2+2)^{-\frac{1}{2}},\ \cos(2\pi),\ \ln(2-1) + \frac{2}{2-1} - 2 \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{1}{\sqrt{4}},\ 1,\ \ln(1) \cancel{+ 2 - 2} \right\rangle$$

$$= \left\langle \tfrac{1}{2},\ 1,\ 0 \right\rangle$$

$$r(2) = \left\langle 2\sqrt{2+2},\ \sin(2\pi),\ 2\ln(2-1) - 2(2) \right\rangle$$

$$= \langle 2 \cdot 2,\ 0,\ 2\ln(1) - 4 \rangle$$

$$= \langle 4,\ 0,\ -4 \rangle$$

$$\vec{r}_T = \langle 4, 0, -4 \rangle + t \left\langle \tfrac{1}{2}, 1, 0 \right\rangle$$

$x = 4 + t\,\frac{1}{2} \longrightarrow 2x - 8 = t$

$y = 0 + t \longrightarrow y = t$

$z = -4 + 0t \longrightarrow z - 4 = 0t$

$$\boxed{2x - 8 = y\ ,\ z = 4}$$

13pts

3. (16 **pts.**) Encuentre la longitud (simplifique a un entero) de la curva descrita por la ecuación vectorial: $\mathbf{r(t)} = \frac{4}{9}(1+t^2)^{3/2}\mathbf{i} + \frac{4}{9}(1-t^2)^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{6}t^2\mathbf{k}$ en $2 \leqslant t \leqslant 8$.

$$r(t) = \underbrace{\frac{4}{9}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\hat{\imath}}_{f(t)} + \underbrace{\frac{4}{9}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\hat{\jmath}}_{g(t)} + \underbrace{\frac{1}{6}t^2\hat{k}}_{h(t)}$$

$$f'(t) = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}(1+t^2)^{\frac{3}{2}-\frac{2}{2}}\cdot 2t$$

$$= \frac{12}{18}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2t = \frac{2}{3}\cdot 2t\,(1+t^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4t}{3}(1+t^2)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{2} \frac{16t^2}{9}(1+t^2)$$

$$g'(t) = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\cdot -2t$$

$$= \frac{12}{18}\cdot -2t\,(1-t^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{24t}{18}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{4\cdot\cancel{6}t}{3\cdot\cancel{6}}(1-t^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{4t}{3}(1-t^2)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{2} \frac{16t^2}{9}(1-t^2)$$

$$h'(t) = \frac{1}{6}\cdot 2t = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 3}t = \frac{1}{3}t \xrightarrow{2} \frac{1}{9}t^2$$

3).

$$r(t) = \left\langle \underbrace{\frac{4}{9}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}_{f(t)},\ \underbrace{\frac{4}{9}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}_{g(t)},\ \underbrace{\frac{1}{6}t^2}_{h(t)} \right\rangle \qquad 2 \leq t \leq 8$$

$$f'(t) = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2t$$

$$= \frac{12}{18}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2t = \frac{24t}{18}(1+t^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\cancel{6}\cdot 4t}{\cancel{6}\cdot 3}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4t}{3}(1+t^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{4t}{3}\sqrt{1+t^2}$$

$$g'(t) = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\cdot -2t = \frac{12}{18}\sqrt{1-t^2}\cdot -2t = -\frac{24t}{18}\sqrt{1-t^2}$$

$$= -\frac{4}{3}t\sqrt{1-t^2}$$

$$h'(t) = \frac{1}{6}\cdot 2t = \frac{1}{3}t$$

$$|r'(t)| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}t\sqrt{1+t^2}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}t\sqrt{1-t^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}t\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{9}t^2(1+t^2) + \left(\frac{16}{9}t^2(1-t^2)\right) + \left(\frac{1}{9}t^2\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9}t^2\left(16(1+t^2) + 16(1-t^2)\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9}t^2\left(16 + \cancel{16t^2} + 16 - \cancel{16t^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9}t^2(32)} = \frac{1}{3}\cdot t\cdot\sqrt{32} = \frac{\sqrt{32}}{3}t$$

$$L = \int |r'(t)|\,dt = \frac{\sqrt{32}}{3}\int t\,dt = \frac{\sqrt{32}}{6}t^2 + C\Big]_2^8$$

14
~~10~~pts

$$\frac{\sqrt{32}}{6}\{64 - 4\} = \frac{\sqrt{32}}{6}\cdot 60 = \boxed{10\cdot\sqrt{32}}$$

4. Considere la función vectorial: $\mathbf{r}(t) = \left\langle \overbrace{\ln(t^2-1)}^{f(t)}, \overbrace{\frac{5t-15}{t^2-9}}^{g(t)}, \overbrace{\frac{\sinh(2t-4)}{t-2}}^{h(t)} \right\rangle$.

(a) (10 **pts.**) Encuentre el dominio de $\mathbf{r}$. Utilice notación de intervalo.

(b) (06 **pts.**) Evalúe $\lim_{t\to 2} \mathbf{r}(t)$.

ID $f(t)$:

$t^2 - 1 > 0$

$t^2 > 1$

$t > \pm 1$

$-1 > t > 1$ ~~1~~

ID $g(t)$:

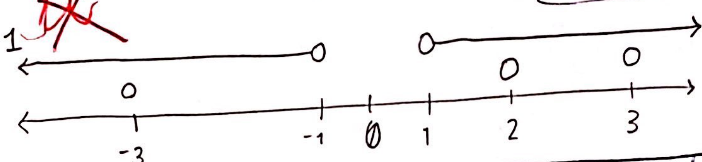
$t^2 - 9 \neq 0$

$t^2 \neq 9$

$t \neq \pm 3$ ~~ID: $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$~~

ID $h(t)$:

$t \neq 2$



$\boxed{D: (-\infty, -3) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)}$

6
6pts

b) $\lim_{t\to 2} \left\langle \ln(t^2-1), \frac{5t-15}{t^2-9}, \frac{\sinh(2t-4)}{t-2} \right\rangle$

$\lim_{t\to 2} (f(t)) \stackrel{LH}{=} \ln(4-1) = \ln(3)$

$\boxed{\lim_{t\to 2} (r) = \langle \ln(3), 1, 2 \rangle}$

6pts

$\lim_{t\to 2} (g(t)) = \frac{5(2)-15}{(2)^2-9} = \frac{10-15}{4-9} = \frac{-5}{-5} = 1$

$\lim_{t\to 2} (h(t)) = \frac{\sinh(2(2)-4)}{2-2}$ $\quad \frac{0}{0}$ indef.

$\stackrel{LH}{=} \lim_{t\to 2} \left(\frac{\cosh(2t-4)\cdot 2}{1} \right) = \frac{1\cdot 2}{1} = 2$

5. Encuentre las operaciones indicadas para las funciones dadas.

(a) (08 **pts.**) $T(x,y,z) = \dfrac{-200}{x^2+y^2+z^2}$, Simplifique $\dfrac{x}{2}\dfrac{\partial T}{\partial x} + \dfrac{y}{2}\dfrac{\partial T}{\partial y} + \dfrac{z}{2}\dfrac{\partial T}{\partial z}$.

(b) (10 **pts.**) $u(w,x,y,z) = \sinh(w^2+x^3)\ln(\sec(y)+\tan(z))$, u_{ww}, u_{zx} .

a) $$\frac{\partial T}{\partial x} = T_x = -200 \cdot -1\,(x^2+y^2+z^2)^{-2} \cdot 2x$$
$$= 400x\,(x^2+y^2+z^2)^{-2}$$
$$= \frac{400x}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{x}{2}\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{x}{2} \cdot \frac{400x}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{400x^2}{2(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = T_y = -200 \cdot -1\,(x^2+y^2+z^2)^{-2} \cdot 2y$$
$$= \frac{400y}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{y}{2}\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{400y^2}{2(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -200 \cdot -1\,(x^2+y^2+z^2)^{-2} \cdot 2z$$
$$= \frac{400z}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{z}{2}\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{400z^2}{2(x^2+y^2+z^2)^2}$$

Respuesta en hoja

5) a)

$$\frac{x}{2}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{z}{2}\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{200x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{200y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{200z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$= \frac{200}{(x^2+y^2+z^2)^2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

8pts

b) $u(w,x,y,z) = \sinh(w^2+x^3)\ln(\sec(y)+\tan(z))$ $\quad u_{ww}, u_{zx}$

$$U_w = \ln(\sec(y)+\tan(z))\cosh(w^2+x^3)\cdot 2w$$

$$U_{ww} = \ln(\sec(y)+\tan(z))(\sinh(w^2+x^3)\cdot 2^2w^2 + \cosh((w^2+x^3)\cdot 2)$$

$$U_z = \sinh(w^2+x^3)\frac{\sec^2(z)}{\sec(y)+\tan(z)}$$

$$U_{zx} = \frac{\sec^2(z)}{\sec(y)+\tan(z)}\cdot\cosh(w^2+x^3)\cdot 3x^2$$

10

6. Un proyectil se lanza con una velocidad inicial v_o y con un ángulo θ respecto a la horizontal. Si se toma en cuenta su velocidad terminal mg/k, su función de velocidad es:

$$v(t) = \left\langle\ v_o \cos\theta,\ \frac{mg}{k} + \left(v_o \sin\theta - \frac{mg}{k}\right) e^{-kt/m}\ \right\rangle$$

Los términos v_o, m, g, θ y k son constantes.

(a) (**05 pts.**) Encuentre la función de aceleración del objeto.

(b) (**11 pts.**) Encuentre la función de posición del objeto si $\mathbf{r}(0) = 10\mathbf{i}$.

$v'(t) = a(t)$

$$v(t) = \langle \underbrace{V_0 \cos(\theta)}_{f(t)},\ \underbrace{\frac{mg}{K} + \left(V_0 \sin\theta - \frac{mg}{K}\right) e^{\frac{-Kt}{m}}}_{g(t)} \rangle$$

$f'(t) = 0$ $\qquad g'(t) = 0 + \left(V_0 \sin(\theta) - \frac{mg}{K}\right) e^{\frac{-Kt}{m}} \cdot -\frac{K}{m}$

a) $a(t) = \left\langle 0,\ \left(V_0 \sin(\theta) - \frac{mg}{K}\right) e^{\frac{-Kt}{m}} \cdot -\frac{K}{m} \right\rangle$

$\int v(t)dt = r(t)$

$r(t) = \langle V_0 \cos(\theta) t + C_1,$

Resp. en hoja

$\int g(t)\,dt = \frac{mg}{K}t + \left(V_0 \sin(\theta) - \frac{mg}{K}\right) \int e^{\frac{-Kt}{m}} dt$

$u = -\frac{K}{m}t$

$du = -\frac{K}{m} dt$

$-\frac{m}{K} du = dt$

6) $\int g(t)\,dt = \frac{mg}{K}t + \left(V_0 \sin(\theta) - \frac{mg}{K}\right)\left(-\frac{m}{K}\int e^{u}\,du\right)$

$= \frac{mg}{K}t + \left(V_0 \sin(\theta) - \frac{mg}{K}\right)\left(-\frac{m}{K}e^{-\frac{K}{m}t}\right) + C$

$r(0) = \langle 10, 0 \rangle$

$\cancel{V_0 \cos(\theta)(0)}^{0} + C_1 = 10$

$C_1 = 10$

$\cancel{\frac{mg}{K}(0)}^{0} + \left(V_0 \sin(\theta) - \frac{mg}{K}\right)\left(-\frac{m}{K}e^{-\frac{K}{m}(0)}\right) + C_2 = 0$

$\left(V_0 \sin(\theta) - \frac{mg}{K}\right)\left(-\frac{m}{K}\right) + C_2 = 0$

$-\frac{V_0 m \sin(\theta)}{k} + \frac{m^2 g}{K^2} + C_2 = 0$

$C_2 = \frac{V_0 m \sin(\theta)}{k} - \frac{m^2 g}{K^2} = \frac{m}{K}\left(V_0 \sin(\theta) - \frac{m}{K}g\right)$

b)

$r(t) = \Big\langle V_0 \cos(\theta)\,t + 10,$

$\frac{mg}{K}t + \left(V_0 \sin(\theta) - \frac{mg}{K}\right)\left(-\frac{m}{K}e^{-\frac{K}{m}t}\right) + \frac{m}{K}\left(V_0 \sin(\theta) - \frac{m}{K}g\right)\Big\rangle$

11 pts

Cálculo Multivariable

Parcial 1

5to Semestre 2020 **(2 horas)**

Nombre:_______________________________________ **Carnet:** __________________

Tema:	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos:	18	16	16	16	18	16	100
Nota:							

1. Considere la función en dos variables $f(x, y) = \ln(10 - x^2 - y)$.

   (a) (06 **pts.**) Encuentre y bosqueje el dominio de la función.

Solución:

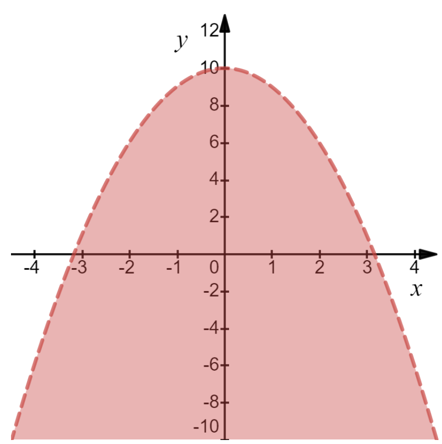
La función está definida cuando $10 - x^2 - y > 0$ ó $y < 10 - x^2$ **(2 pts.)**

El dominio consiste de todos los puntos debajo de la parábola $y = 10 - x^2$.

(2 pts.) Región sombreada.

(1 pt.) Parábola graficada con sus interceptos.

(1 pt.) Indicar que la parábola no es parte del dominio.

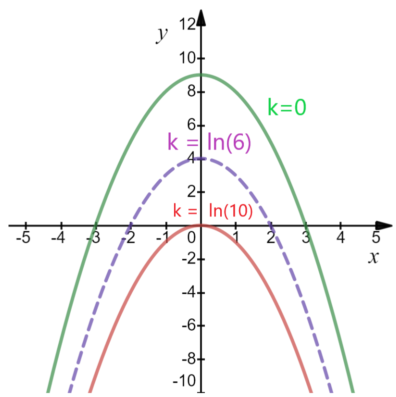


(b) (12 **pts.**) Encuentre y bosqueje las curvas de nivel de f para $k = 0,\ \ln(6),\ \ln(10)$.

Solución:

Curvas de Nivel	$\ln(10 - x^2 - y) = k$	**(1 pt.)**
Simplifique:	$10 - x^2 - y = e^k$	**(1 pt.)**
	$10 - e^k + x^2 = y$	
$k = 0:$	$9 - x^2 = y$	**(1 pt.)**
$k = \ln(6):$	$4 - x^2 = y$	**(1 pt.)**
$k = \ln(10):$	$-x^2 = y$	**(1 pt.)**

(2 pts.) por graficar cada curva de nivel.
(1 pt.) por indicar las curvas de nivel.



2. (16 **pts.**) Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta tangente a $\mathbf{r(t)} = \langle\ 2\sqrt{t+2},\ \sin(\pi t),\ t\ln(t-1) - 2t\ \rangle$ en el punto donde $t = 2$.

Solución:

Pto. sobre la curva: $\mathbf{r}(t) = \langle 4, 0, -4\rangle$ **(3 pts.)**

Derivada: $\mathbf{r}'(t) = \left\langle \dfrac{1}{\sqrt{t+2}}, \pi\cos(\pi t), \ln(t-1) + \dfrac{t}{t-1} - 2 \right\rangle$ **(6 pts.)**

Vector Tangente: $\mathbf{r}'(2) = \left\langle \dfrac{1}{2},\ \pi,\ 2-2 \right\rangle$ **(3 pts.)**

Ec. Recta Tangente: $\mathbf{r}(t) = \left\langle 4 + \dfrac{t}{2},\ 2t,\ -4 \right\rangle$ **(1 pt.)**

Ecs. Simétricas: $\dfrac{x-4}{1/2} = \dfrac{y}{2}, \quad z = -4$ **(3 pts.)**

3. (16 **pts.**) Encuentre la longitud de la curva descrita por la función vectorial:
$\mathbf{r(t)} \;=\; \frac{4}{9}(1+t^2)^{3/2}\mathbf{i} \;+\; \frac{4}{9}(1-t^2)^{3/2}\mathbf{j} \;+\; \frac{1}{6}t^2\mathbf{k}$ en $2 \leqslant t \leqslant 8$.

Solución:

Vector Tangente: $\mathbf{r}'(t) = \dfrac{4t}{3}(1+t^2)^{1/2}\mathbf{i} - \dfrac{4t}{3}(1-t^2)^{1/2}\mathbf{j} + \frac{1}{3}t\mathbf{k}$ **(3 pts.)**

Magnitud Vector: $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\dfrac{16t^2}{9}(1+t^2) + \dfrac{16t^2}{9}(1-t^2) + \dfrac{t^2}{9}}$ **(2 pts.)**

Simplifique: $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\dfrac{16t^2}{9} + \dfrac{16t^4}{9} + \dfrac{16t^2}{9} - \dfrac{16t^4}{9} + \dfrac{t^2}{9}}$ **(1 pt.)**

$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\dfrac{33t^2}{9}} = t$ **(2 pts.)**

Longitud de Arco: $L = \dfrac{\sqrt{33}}{3}\displaystyle\int_2^8 |\mathbf{r}'(t)|\; dt \;=\; \int_2^8 tdt$ **(2 pts.)**

Integre: $L = \dfrac{\sqrt{33}}{3}\;\dfrac{t^2}{2}\Big]_2^8$ **(3 pts.)**

Evalúe y Simplifique: $L = \dfrac{64-4}{6}\sqrt{33} = 10\sqrt{33}$ **(3 pts.)**

4. Considere la función vectorial: $\mathbf{r}(t) = \left\langle \ln(t^2-1),\ \dfrac{5t-15}{t^2-9},\ \dfrac{\sinh(2t-4)}{t-2} \right\rangle$.

(a) (10 **pts.**) Encuentre el dominio de $\mathbf{r}$. Utilice notación de intervalo.

> **Solución:**
> Encuentre el dominio de cada función componente.
>
> | | | | |
> |---|---|---|---|
> | Dominio de f: | $t^2 > 1$ | $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ | **(2 pts.)** |
> | Dominio de g: | $t^2 \neq 9$ | $(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty)$ | **(2 pts.)** |
> | Dominio de h: | $t \neq 2$ | $(-\infty,\ 2)\cup(2,\infty)$ | **(1 pt.)** |
>
> El dominio de $\mathbf{r}(t)$ es la intersección entre los tres dominios. **(5 pts.)**
>
> $$(-\infty,-3)\cup(-3,-1)\cup(1,2)\cup(2,3)\cup(3,\infty)$$

(b) (06 **pts.**) Evalúe $\lim\limits_{t\to 2} \mathbf{r}(t)$.

> **Solución:**
> Evalúe el límite en cada función componente.
>
> $$\lim_{t\to 2} \ln(t^2-1) = \ln(3) \qquad \textbf{(1 pt.)}$$
> $$\lim_{t\to 2} \frac{5t-15}{t^2-9} = \frac{-5}{-5} = 1 \qquad \textbf{(1 pt.)}$$
> $$\lim_{t\to 2} \frac{\sinh(2t-4)}{t-2} \underbrace{=}_{LH} \frac{2\cosh(2t-4)}{1} = 2 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$
> $$\lim_{t\to 2} \mathbf{r}(t) = \langle \ln(3),\ 1,\ 2\rangle \qquad \textbf{(1 pt.)}$$

5. Encuentre las operaciones indicadas para las funciones dadas.

(a) (08 **pts.**) $T(x, y, z) = \dfrac{-200}{x^2 + y^2 + z^2}$, Simplifique $\dfrac{x}{2}\dfrac{\partial T}{\partial x} + \dfrac{y}{2}\dfrac{\partial T}{\partial y} + \dfrac{z}{2}\dfrac{\partial T}{\partial z}$.

Solución:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{400x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{400y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{400z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Encuentre $0.5xT_x + 0.5yT_y + 0.5zTz$ **(2 pts.)**

$$\frac{x}{2}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{z}{2}\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{200x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{200y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{200z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

$$\frac{x}{2}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{z}{2}\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{200x^2 + 200y^2 + 200z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{200}{x^2 + y^2 + z^2} = -T$$

(4 pts.) extra por simplificar y **(1 pt.)** por escribirla como $-T$.

(b) (10 **pts.**) $u(w, x, y, z) = \sinh(w^2 + x^3)\ln(\sec(y) + \tan(z))$, u_{ww}, u_{zx} .

Solución:

$$u_w = 2w\cosh(w^2 + x^3)\ln(\sec(y) + \tan(z)) \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$u_z = \sinh(w^2 + x^3)\frac{\sec^2 z}{\sec(y) + \tan(z)} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$\begin{aligned} u_{ww} &= 2\cosh(w^2 + x^3)\ln(\sec(y) + \tan(z)) \\ &\quad + 4w^2\sinh(w^2 + x^3)\ln(\sec(y) + \tan(z)) \qquad \textbf{(4 pts.)} \end{aligned}$$

$$u_{zx} = 3x^2\cosh(w^2 + x^3)\frac{\sec^2 z}{\sec(y) + \tan(z)} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

6. Un proyectil se lanza con una velocidad inicial v_o y con un ángulo θ respecto a la horizontal. Si se toma en cuenta su velocidad terminal mg/k, su función de velocidad es:

$$v(t) = \left\langle \; v_o \cos\theta, \;\; \frac{mg}{k} + \left(v_o \sin\theta - \frac{mg}{k}\right) e^{-kt/m} \; \right\rangle$$

Los términos v_o, m, g, θ y k son constantes.

(a) (05 **pts.**) Encuentre la función de aceleración del objeto.

Solución:
Derive la función de velocidad para encontrar la aceleración.
Note que la velocidad es constante en x.

$$a(t) = v'(t) = \left\langle \; 0, \;\; -\frac{k}{m}\left(v_o \sin\theta - \frac{mg}{k}\right) e^{-kt/m} \; \right\rangle$$

(2 pts.) por la derivada en x.
(3 pts.) por la derivada en y.

(b) (11 **pts.**) Encuentre la función de posición del objeto si $\mathbf{r}(0) = 10\mathbf{i}$.

Solución:
Integre la función de velocidad para encontrar la posición.

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle \; t v_o \cos\theta + C_1, \;\; \frac{mg}{k}t - \frac{m}{k}\left(v_o \sin\theta - \frac{mg}{k}\right) e^{-kt/m} + C_2 \; \right\rangle \quad \textbf{(5 pts.)}$$

Evalúe en $\mathbf{r}(0) = 10\mathbf{i}$ para encontrar C_1 y C_2.

$$\mathbf{r}(0) = \left\langle \; 0 + C_1, \; -\frac{m}{k}\left(v_o \sin\theta - \frac{mg}{k}\right) + C_2 \; \right\rangle = \langle 10, \; 0 \rangle \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

Se encuentra que $C_1 = 10$ y $C_2 = \dfrac{m}{k}\left(v_o \sin\theta - \dfrac{mg}{k}\right)$. **(2 pts.)**

La función de posición es: **(1 pt.)**

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle \; t v_o \cos\theta + 10, \;\; \frac{mg}{k}t + \frac{m}{k}\left(v_o \sin\theta - \frac{mg}{k}\right)\left(1 - e^{-kt/m}\right) \; \right\rangle$$

Capítulo 15

Parcial #02

1) Superficie S.   1, 3, 5, 7, 11

$$z^2 + zx + y^2 = 9 \rightarrow z^2 + zx + y^2 - 9 = 0$$

Encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}$ & $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

$F_x = z$

$F_z = 2z + x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{2z + x}$$

$F_y = 2y$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2z + x}$$

- Encuentre la ecuación del plano tangente en $P(4,2,1)$ $\quad z^2 + zx + y^2 = 9$

$f(4,2) = 1$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x_1, y_1, z_1} = -\frac{(1)}{2(1) + (4)} = -\frac{1}{2+4} = -\frac{1}{6}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x_1, y_1, z_1} = -\frac{2(2)}{2(1) + (4)} = -\frac{4}{2+4} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$z = 1 - \frac{1}{6}(x-4) - \frac{2}{3}(y-2)$$

3) Temperatura $P(x, y)$

$T(x,y) = 6\ln(x^3 + 2y^2 - 34)$

Punto : $(3, 2)$

dirección $\vec{u} = \langle 12, 5 \rangle$

La derivada direccional

$\ulcorner D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u} \lrcorner$

$$T_x = \frac{6 \cdot 3x^2}{x^3 + 2y^2 - 34}$$

$$T_x \Big|_{P(x,y)} = \frac{18(3)^2}{(3)^3 + 2(2)^2 - 34} = \frac{162}{27 + 8 - 34} = \underline{162}$$

$$T_y = \frac{6 \cdot 4y}{x^3 + 2y^2 - 34}$$

$$\nabla f = \langle 162, 24 \rangle$$

$$T_y \Big|_{x,y} = \frac{12(2)}{(3)^3 + 2(2)^2 - 34} = \underline{48}$$

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{12^2 + 5^2}} \langle 12, 5 \rangle = \left\langle \frac{12}{13}, \frac{5}{13} \right\rangle$$ vector unitario

$$D_{\vec{u}} f = \langle 162, 48 \rangle \cdot \left\langle \frac{12}{13}, \frac{5}{13} \right\rangle$$

$$= (162)\left(\frac{12}{13}\right) + (48)\left(\frac{5}{13}\right)$$

$$= 168$$

5) $f(x,y) = (y^2 - 4)(e^x - 2)$

Sí :

$$f(x,y) = (y^2-4)e^x - 2(y^2-4)$$

$D(x,y) > 0$
$f_x > 0$ min

$D(x,y) > 0$
$f_x < 0$ máx

$D(x,y) = 0$ inconcluso

$D(x,y) < 0$ silla

$$f_x = (y^2-4)e^x = 0$$

$e^x = 0$ indef

$$\downarrow$$

$$y^2 - 4 = 0$$

$$y^2 = 4 \rightarrow \boxed{y = \pm 2}$$

$$f(x,y) = y^2(e^x-2) - 4(e^x-2)$$

$$f_y = 2y(e^x-2) = 0 \longrightarrow e^x - 2 = 0$$

$$\boxed{y = 0} \qquad e^x = 2$$

$$\boxed{x = \ln(2)}$$

Puntos críticos $(\ln(2), \pm 2)$

el punto $y=0$ no hace 0 las dos derivadas parciales.

$$f_{xx} = (y^2-4)e^x \Big|_{(\ln(2),0)} = (0-4)2 = -8$$

$$f_{xy} = 2ye^x \Big|_{(\ln(2),0)} = 2(0)2 = 0$$

$$f_{yy} = 2(e^x-2)\Big|_{(\ln(2),0)} = 2(2-2) = 0$$

$$f_{yx} = 2ye^x \Big|_{(\ln(2),0)} = 2(0)(2) = 0$$

$$D(\ln(2),0) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-8)(0) - (0)(0) = 0$$

Inconcluso en $(\ln(2),0)$

Pt. $(\ln(2), -2)$

$f_{xx} = (4-4)e^{\ln(2)}$ ...

$f_{xx} = (4-4)e = \emptyset$

$f_{yy} = 2(2-2) = \emptyset$

$f_{yx} = 2(-2)e^{\ln(2)} = -4 \cdot 2 = -8$

$f_{xy} = 2(-2)e^{\ln(2)} = -4(2) = -8$

$$D(\ln(2), -2) = \begin{vmatrix} \emptyset & -8 \\ -8 & \emptyset \end{vmatrix} = (0)(0) - (-8)(-8) = -64 < \emptyset$$

Punto de silla en $(\ln(2), -2)$

Pt. $(\ln(2), 2)$

$f_{xx} = (y^2 - 4)e^x \Big|_{\ln(2),2} = (4-4)e^{\ln(2)} = \emptyset$

$f_{xy} = 2ye^x \Big|_{\ln(2),2} = 2(2)(2) = 8$

$f_{yy} = 2(e^x - 2)\Big|_{(\ln(2),2)} = 2(2-2) = \emptyset$

$f_{yx} = 2ye^x \Big|_{(\ln(2),2)} = 2(2)(2) = 8$

$$D(\ln(2), 2) = \begin{vmatrix} \emptyset & 8 \\ 8 & \emptyset \end{vmatrix} = (\emptyset)(0) - (8)(8) = -64 < \emptyset$$

Punto de silla en $(\ln(2), 2)$

7) función producción:

$$Q = LK$$

Presupuesto = 640 mil

$L = 10$ mil $\quad K = 8$ mil

restricción:

$$10L + 8K = 640$$

Lagrange

$$F(x,y,\lambda) = \underbrace{f(x,y)}_{\text{objetivo}} + \lambda(\overset{640}{c} - \overset{10L+8k}{g(x,y)})$$

$$= LK + \lambda(640 - 10L - 8K)$$
$$= LK + \lambda 640 - \lambda L 10 - 8\lambda K$$

$F_L = K - \lambda 10 = 0$

$K = \lambda 10$

$\frac{K}{10} = \lambda$

$F_K = L - \lambda 8 = 0$

$L = \lambda 8$

$\frac{L}{8} = \lambda$

$\frac{K}{10} = \frac{L}{8}$

$8K = 10L$

$\frac{8}{10}K = L$

$L = \frac{8}{10}(40) = 32$

$F_\lambda = 640 - L10 - 8K = 0$

$640 - \frac{8 \cdot \cancel{10}}{\cancel{10}}K - 8K = 0$

$640 - 8K - 8K = 0$

$640 = 16K$

$40 = K$

$\lambda = 4$

$K = 40$

$L = 32$

40 mil máquinas y 32 mil trabajadores.

11)

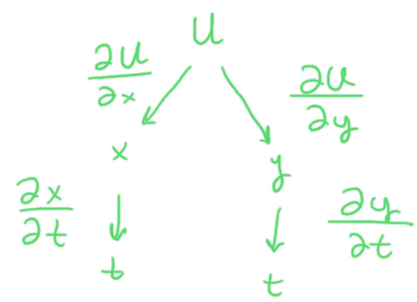
x: iphones y: air books

$$U(x,y) = 400(x+y)^{\frac{3}{2}} - 2x^2 - 3y^2$$

$$x(t) = 10e^{(t-1)/10} + 2\ln(t)\Big|_1 = 10 = x(1)$$

$$y(t) = 14\sqrt{t} + t^2\Big|_1 = 14 + 1 = 15 = y(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$



$$\frac{\partial u}{\partial x} = 400\cdot\frac{3}{2}(x+y)^{\frac{1}{2}} - 4x$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = 600\sqrt{x+y} - 4x}\Bigg|_{t=1} = 600\sqrt{10+15} - 4(10)$$

$$= 2960$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = 600\sqrt{x+y} - 6y}\Bigg|_{t=1} = 600\sqrt{10+15} - 6(15)$$

$$= 2910$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \cancel{10}e^{\frac{t-1}{10}}\cdot\frac{1}{\cancel{10}} + \frac{2}{t} \longrightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = \boxed{e^{\frac{t-1}{10}} + \frac{2}{t}}$$

$$\Big|_{t=1} = 1 + 2 = 3$$

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial t} = 7(t)^{-\frac{1}{2}} + 2t}$$

$$\Big|_1 = 7 + 2 = 9$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (2960)(3) + (2910)(9) = 35{,}070$$

CÁLCULO MULTIVARIABLE PARCIAL 2

Resuelva SÓLO los problemas indicados (20 pts. c/u) en el mensaje recibido en su correo. Debe enviar su examen escaneado antes de las 2 pm al profesor (cfketelaar@ufm.edu) y al auxiliar (josuerodas@ufm.edu).

1. La ecuación implícita de una superficie S es $z^2 + zx + y^2 = 9$, encuentre:
   (a) Encuentre las primeras derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.
   (b) Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $P(4, 2, 1)$.

2. La ecuación implícita de una superficie S es $z^3 + x^2 z + y = 8$, encuentre:
   (a) Encuentre las primeras derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.
   (b) Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $P(2, 3, 1)$.

3. La temperatura que experimenta una partícula en el punto $P(x, y)$ está dada por $T(x, y) = 6 \ln \left(x^3 + 2y^2 - 34\right)$. Encuentre la razón de cambio (es un entero) de la temperatura en el punto $P(3, 2)$ en la dirección del vector $\langle 12,\ 5 \rangle$.

4. Un alpinista escala el volcán de Atitlán cuya altura en el punto $P(x, y)$ está dada por $H(x, y) = 3535 - 10(x^2 + 4 + 4y^2)^{1/2}$. Encuentre la razón de cambio de la altura en el punto $P(4, 2)$ en la dirección del vector suroeste $\langle -1,\ -1 \rangle$.

5. Considere la función $f(x, y) = (y^2 - 4)(e^x - 2)$.
   (a) Encuentre los puntos críticos.
   (b) Clasifique cada pto. crítico como máximo relativo, mínimo relativo o punto de silla.

6. Considere la función $g(x, y) = (9 - x^2)(1 - \ln y)$.
   (a) Encuentre los puntos críticos.
   (b) Clasifique cada pto. crítico como máximo relativo, mínimo relativo o punto de silla.

7. La función de producción de una fábrica es $Q = LK$. La empresa dispone de un presupuesto anual de \$ 640 mil para contratar L trabajadores y K máquinas a un costo anual de \$ 10 mil por trabajador y \$ 8 mil por máquina. Encuentre la producción máxima y cuántos trabajadores y máquinas se deben adquirir.

8. Una empresa tiene costos fijos diarios de \$ 250 y contrata cada L trabajador a \$ 10 diarios y cada K máquina a \$ 8 diarios. La función de producción de la empresa es $Q = KL$. Si la empresa debe producir a diario 2000 unidades de su producto, determine el costo mínimo y cuántos trabajadores y máquinas debe adquirir la empresa.

9. Los ingresos mensuales (en dólares) que percibe una granja por vender x toneladas de trigo & y toneladas de maíz está dada por:

$$I(x, y) = 200(x^2 - 10x) + 150(y^2 - 8y)$$

Las toneladas de trigo y maíz que se producen con L trabajadores y K máquinas son:

$$x(L, K) = 10L^{1/2}K^{1/2} \qquad\qquad y(L, K) = 20L^{1/2}K^{1/4}$$

Determine la razón de cambio instantánea en el ingreso respecto al número de trabajadores para $L = 25$ y $K = 16$.

10. En una fábrica metalúrgica, el costo (en quetzales) de producir x libras de acero & y libras de aluminio está dado por:

$$c = 60(x^2 + 2y^2 + 400)^{1/3}$$

Las funciones de demanda para el precio p_1 del acero y el precio p_2 del aluminio es:

$$x(p_1, p_2) = 22 - p_1 + p_2^2 \qquad\qquad y(p_1, p_2) = 24 + p_1 - 10p_2$$

Determine la razón de cambio instantánea en el costo respecto al precio p_2 del aluminio para $p_1 = 6$ y $p_2 = 2$.

11. La utilidad semanal de una tienda Apple (en dólares) al vender x Iphones & y Airbooks está dada por:

$$U(x, y) = 400(x + y)^{3/2} - 2x^2 - 3y^2$$

Los pronósticos de ventas para los Iphones y Airbooks a las t semanas son

$$x(t) = 10e^{(t-1)/10} + 2\ln(t) \qquad\qquad y(t) = 14\sqrt{t} + t^2$$

Determine la razón de cambio instantánea en la utilidad respecto al tiempo para $t = 1$.

CÁLCULO MULTIVARIABLE PARCIAL 2

Resuelva SÓLO los problemas indicados (20 pts. c/u) en el mensaje recibido en su correo. Debe enviar su examen escaneado antes de las 2 pm al profesor (cfketelaar@ufm.edu) y al auxiliar (josuerodas@ufm.edu).

1. La ecuación implícita de una superficie S es $z^2 + zx + y^2 = 9$, encuentre:
   (a) Encuentre las primeras derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución:
Realice derivación implícita

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{z}{2z+x} \qquad \textbf{(4 pts.)}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y}{2z+x} \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

   (b) Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $P(4,2,1)$.

Solución:
Evalúe las derivadas parciales en $P(4,2,1)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2+4} = -\frac{1}{6} \qquad \textbf{(3 pts.)}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4}{2+4} = -\frac{2}{3} \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

La ecuación del plano tangente es:

$$z = z_0 + z_x(x-x_0) + z_y(y-y_0) \qquad \textbf{(2 pts.)}$$
$$z = 1 - \frac{1}{6}(x-4) - \frac{2}{3}(y-2) \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

2. La ecuación implícita de una superficie S es $z^3 + x^2 z + y = 8$, encuentre:

(a) Encuentre las primeras derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución:

Realice derivación implícita.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2xz}{3z^2 + x^2} \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{1}{3z^2 + x^2} \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

(b) Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $P(2, 3, 1)$.

Solución:

Evalúe las derivadas parciales en $P(4, 2, 1)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4}{3+4} = -\frac{4}{7} \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{3+4} = -\frac{1}{7} \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

La ecuación del plano tangente es:

$$z = z_0 + z_x(x - x_0) + z_y(y - y_0) \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$z = 1 - \frac{4}{7}(x - 2) - \frac{1}{7}(y - 3) \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

3. La temperatura en que experimenta una partícula en el punto $P(x,y)$ está dada por $T(x,y) = 6\ln\left(x^3+2y^2-34\right)$. Encuentre la razón de cambio (es un entero) de la temperatura en el punto $P(3,2)$ en la dirección del vector $\langle 12,\ 5\rangle$.

Solución:

$$\nabla T(x,y) = \left\langle \frac{18x^2}{x^3+2y^2-34}, \frac{24y}{x^3+2y^2-34} \right\rangle \qquad \textbf{(6 pts.)}$$

$$x^3+2y^2-34 = 27+8-34 = 43-34 = 1$$

$$\nabla T(3,2) = \left\langle \frac{18(9)}{1}, \frac{24(2)}{1} \right\rangle = \langle 162,\ 48\rangle \qquad \textbf{(6 pts.)}$$

$$|\langle 12,\ 5\rangle| = \sqrt{144+25} = 13 \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$\mathbf{u} = \tfrac{1}{13}\langle 12,\ 5\rangle \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$D_{\mathbf{u}}T = \nabla T\cdot\mathbf{u} = \tfrac{1}{13}\left(162(12)+48(5)\right) \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$D_{\mathbf{u}}T = \frac{2184}{13} = 168 \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

4. Un alpinista escala el volcán de Atitlán cuya altura en el punto $P(x,y)$ está dada por $H(x,y) = 3535 - 10(x^2+4+4y^2)^{1/2}$. Encuentre la razón de cambio de la altura en el punto $P(4,2)$ en la dirección del vector suroeste $\langle -1,\ -1\rangle$.

Solución:

$$\nabla H(x,y) = \left\langle \frac{-10x}{\sqrt{x^2+x+4y^2}}, \frac{-40y}{\sqrt{x^2+4+4y^2}} \right\rangle \qquad \textbf{(6 pts.)}$$

$$\sqrt{x^2+4+4y^2} = \sqrt{16+4+4(4)} = \sqrt{36} = 6$$

$$\nabla H(4,2) = \left\langle \frac{-10(4)}{6}, \frac{-40(2)}{6} \right\rangle = \left\langle -\frac{20}{3}, -\frac{40}{3} \right\rangle \qquad \textbf{(6 pts.)}$$

$$|\langle -1,\ 1\rangle| = \sqrt{2} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$\mathbf{u} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\langle -1,\ -1\rangle \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$D_{\mathbf{u}}T = \nabla T\cdot\mathbf{u} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\tfrac{20}{3}+\tfrac{40}{3}\right) \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$D_{\mathbf{u}}T = \frac{20}{\sqrt{2}} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

5. Considere la función $f(x,y) = (y^2-4)(e^x-2)$.

(a) Encuentre los puntos críticos.

Solución:
Iguale las derivadas parciales de f a cero.

$$\begin{array}{llll} f_x = (y^2-4)e^x = 0 & \Rightarrow & e^x \neq 0 \quad y = \sqrt{4} = \pm 2 & \textbf{(4 pts.)} \\ f_y = 2y(e^x-2) = 0 & \Rightarrow & y = 0 \quad x = \ln 2 & \textbf{(4 pts.)} \end{array}$$

Puntos críticos: $(\ln 2, 2)$ **(2 pts.)** y $(\ln 2, -2)$ **(2 pts.)**.

(b) Clasifique cada pto. crítico como máximo relativo, mínimo relativo o punto de silla.

Solución:
Encuentre el Hessiano.

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (y^2-4)e^x & 2ye^x \\ 2ye^x & 2(e^x-1) \end{vmatrix} \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

Análisis para cada punto crítico.

$$D(\ln 2, +2) = \begin{vmatrix} 0 & +8 \\ +8 & 0 \end{vmatrix} = -64 < 0 \qquad \textbf{(1 pt.)} \quad \text{Punto de Silla} \qquad \textbf{(1 pt.)}$$

$$D(\ln 2, -2) = \begin{vmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} = -64 < 0 \qquad \textbf{(1 pt.)} \quad \text{Punto de Silla} \qquad \textbf{(1 pt.)}$$

6. Considere la función $g(x,y) = (9-x^2)(1-\ln y)$.

(a) Encuentre los puntos críticos.

Solución:

$$g_x = -2x(1-\ln y) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0 \qquad y = e \qquad \textbf{(4 pts.)}$$
$$g_y = -\frac{(9-x^2)}{y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 3 \qquad x = -3 \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

Puntos críticos: $(3,e)$ **(2 pts.)** y $(-3,e)$ **(2 pts.)**.

(b) Clasifique cada pto. crítico como máximo relativo, mínimo relativo o punto de silla.

Solución:
Encuentre el Hessiano.

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2(1-\ln y) & 2x/y \\ 2x/y & \dfrac{(9-x^2)}{y^2} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

Análisis para cada punto crítico.

$$D(-3,e) = \begin{vmatrix} 0 & -6/e \\ -6/e & 0 \end{vmatrix} = -\frac{36}{e} < 0 \qquad \textbf{(1 pt.)} \quad \text{Punto de Silla} \qquad \textbf{(1 pt.)}$$
$$D(+3,e) = \begin{vmatrix} 0 & +6/e \\ +6/e & 0 \end{vmatrix} = -\frac{36}{e} < 0 \qquad \textbf{(1 pt.)} \quad \text{Punto de Silla} \qquad \textbf{(1 pt.)}$$

7. La función de producción de una fábrica es $Q = LK$. La empresa dispone de un presupuesto anual de \$ 640 mil para contratar L trabajadores y K máquinas a un costo anual de \$ 10 mil por trabajador y \$ 8 mil por máquina. Encuentre la producción máxima y cuántos trabajadores y máquinas se deben adquirir.

Solución:

La producción se debe maximizar sujeta a una restricción de presupuesto.

$$\max Q = LK, \qquad 10L + 8K = 640 \qquad \textbf{(2 pts.)}$$
$$F(L, K, \lambda) = LK + \lambda(640 - 10L - 8K) \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Encuentre los puntos críticos.

$$F_L = K - 10\lambda = 0 \qquad K = 10\lambda \qquad \textbf{(2 pts.)}$$
$$F_K = L - 8\lambda = 0 \qquad L = 8\lambda \qquad \textbf{(2 pts.)}$$
$$F_\lambda = 640 - 10L - 8K = 0 \qquad 10L + 8K = 640 \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Reemplace K & L en la restricción y resuelva para λ.

$$80\lambda + 80\lambda = 160\lambda = 640 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 4 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

Por lo que $L = 32$ & $K = 40$. **(4 pts.)**

La producción máxima es $Q = 32 \cdot 40 = 1280$. **(3 pts.)**

Dado un presupuesto anual de \$ 640 mil, se deben contratar 32 trabajadores y 40 máquinas para tener una producción máxima de \$ 1280.

8. Una empresa tiene costos fijos diarios de \$ 250 y contrata cada L trabajador a \$ 10 diarios y cada K máquina a \$ 8 diarios. La función de producción de la empresa es $Q = KL$. Si la empresa debe producir a diario 2000 unidades de su producto, determine el costo mínimo y cuántos trabajadores y máquinas debe adquirir la empresa.

Solución:

El costo se debe minimizar sujeto a un nivel de producción

$$\min C = 10L + 8K + 250, \qquad KL = 2000 \qquad \textbf{(2 pts.)}$$
$$F(L, K, \lambda) = 10L + 8K + \lambda(200 - KL) \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Encuentre los puntos críticos.

$$F_L = 10 - K\lambda = 0 \qquad K = 10/\lambda \qquad \textbf{(2 pts.)}$$
$$F_K = 8 - L\lambda = 0 \qquad L = 8/\lambda \qquad \textbf{(2 pts.)}$$
$$F_\lambda = 2000 - KL = 0 \qquad KL = 2000 \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Sustituya K & L en la restricción y resuelva para λ.

$$\frac{80}{\lambda^2} = 2000 \qquad \lambda^2 = \frac{1}{25} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Los valores de lambda son $\pm\frac{1}{5}$ (descarte el valor negativo). **(2 pts.)**

Por lo que $L = 8/0.2 = 40$ & $K = 10/0.2 = 50$. **(2 pts.)**

El costo mínimo es de $Q = 10(40) + 8(50) + 250 = 1050$. **(3 pts.)**

Sujeto una producción diaria de 2000, se deben contratar 40 trabajadores y 50 máquinas para tener el costo mínimo de \$ 1050.

9. Los ingresos mensuales (en dólares) que percibe una granja por vender x toneladas de trigo & y toneladas de maíz está dada por:

$$I(x,y) = 200(x^2 - 10x) + 150(y^2 - 8y)$$

Las toneladas de trigo y maíz que se producen con L trabajadores y K máquinas son:

$$x(L,K) = 10L^{1/2}K^{1/2} \qquad\qquad y(L,K) = 20L^{1/2}K^{1/4}$$

Determine la razón de cambio instantánea en el ingreso respecto al número de trabajadores para $L = 25$ y $K = 16$.

Solución:

Utilice la regla de la cadena para encontrar I_L.

$$\frac{\partial I}{\partial L} = \frac{\partial I}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial L} + \frac{\partial I}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial L} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Encuentre los valores de x & y.

$$x(25,16) = 10(5)(4) = 200 \qquad y(25,16) = 20(5)(2) = 200 \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Evalúe los ingresos marginales en $x = 200$ & $y = 200$.

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 400x - 2000 \qquad \frac{\partial I}{\partial x} = 80,000 - 2000 = 78,000 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$
$$\frac{\partial I}{\partial y} = 300y - 1200 \qquad \frac{\partial I}{\partial y} = 60,000 - 1200 = 58,800 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

Evalúe los x_L & y_L en $L = 25$ & $K = 16$.

$$\frac{\partial x}{\partial L} = 5L^{-1/2}K^{1/2} \qquad \frac{\partial x}{\partial L} = 5(4)/5 = 4 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$
$$\frac{\partial y}{\partial L} = 10L^{-1/2}K^{1/4} \qquad \frac{\partial x}{\partial L} = 10(2)/5 = 4 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

La razón de cambio de I respecto a L es:

$$\frac{\partial I}{\partial L} = \frac{\partial I}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial L} + \frac{\partial I}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial L}$$
$$\frac{\partial I}{\partial L} = 78,000(4) + 58,800(4) = 4(136,800) = 547,200 \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

Los ingresos aumentan en \$ 547,200 si se aumenta el número de trabajadores a 26.

10. En una fábrica metalúrgica, el costo (en quetzales) de producir x libras de acero & y libras de aluminio está dado por:

$$c = 60(x^2 + 2y^2 + 400)^{1/3}$$

Las funciones de demanda para el precio p_1 del acero y el precio p_2 del aluminio es:

$$x(p_1, p_2) = 22 - p_1 + p_2^2 \qquad\qquad y(p_1, p_2) = 24 + p_1 - 10p_2$$

Determine la razón de cambio instantánea en el costo respecto al precio p_2 del aluminio para $p_1 = 6$ y $p_2 = 2$.

Solución:

Utilice la regla de la cadena para encontrar C_{p_2}.

$$\frac{\partial C}{\partial p_2} = \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p_2} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p_2} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Encuentre los valores de x & y.

$$x(6,2) = 22 - 6 + 4 = 20 \qquad y(6,2) = 24 + 6 - 20 = 10 \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Evalúe los costos marginales en $x = 20$ & $y = 10$.

$$(x^2 + 2y^2 + 400)^{1/3} = (400 + 200 + 400)^{1/3} = 1000^{1/3} = 10$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 40x(x^2 + 2y^2 + 400)^{-2/3} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 800(10)^{-2} = 8 \qquad \textbf{(1 pts.)}$$

$$\frac{\partial I}{\partial y} = 80y(x^2 + 2y^2 + 400)^{-2/3} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$\frac{\partial I}{\partial y} = 800(10)^{-2} = 8 \qquad \textbf{(1 pts.)}$$

Evalúe las x_{p_2} & y_{p_2} en $p_1 = 6$ & $p_2 = 2$.

$$\frac{\partial x}{\partial p_2} = 2p_2 \qquad \frac{\partial x}{\partial L} = 5(4)/5 = 4 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial p_2} = -10 \qquad \frac{\partial x}{\partial L} = 10(2)/5 = -10 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

La razón de cambio de C respecto a p_2 es:

$$\frac{\partial C}{\partial p_2} = \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p_2} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p_2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial p_2} = 8(4) - 8(10) = 32 - 80 = -48 \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

Los costos disminuyen en \$ 48 cuando el precio del aluminio aumenta a \$ 3.

11. La utilidad semanal de una tienda Apple (en dólares) al vender x Iphones & y Airbooks está dada por:

$$U(x, y) = 400(x + y)^{3/2} - 2x^2 - 3y^2$$

Los pronósticos de ventas para los Iphones y Airbooks a las t semanas son

$$x(t) = 10e^{(t-1)/10} + 2\ln(t) \qquad\qquad y(t) = 14\sqrt{t} + t^2$$

Determine la razón de cambio instantánea en la utilidad respecto al tiempo para $t = 1$.

Solución:

Utilice la regla de la cadena para encontrar U_t.

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Encuentre los valores de x & y.

$$x(1) = 10e^0 - 2\ln(1) = 10 \qquad y(1) = 14(1) + 1 = 15 \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Evalúe las utilidades marginales en $x = 10$ & $y = 15$.

$$(x + y)^{1/2} = (10 + 15)^{1/2} = 5$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 600(x + y)^{1/2} - 4x \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 600(5) - 40 = 2960 \qquad \textbf{(1 pts.)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 600(x + y)^{1/2} - 6y \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 600(5) - 90 = 2910 \qquad \textbf{(1 pts.)}$$

Evalúe las x_t & y_t en $t = 1$.

$$\frac{dx}{dt} = e^{(t-1)/10} + 2/t \qquad \frac{dx}{dt} = 1 + 2 = 3 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

$$\frac{dy}{dt} = 7/\sqrt{t} + 2t \qquad \frac{dy}{dt} = 7 + 2 = 9 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

La razón de cambio de C respecto a p_2 es:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dU}{dt} = 2960(3) + 2910(9) = 35,070 \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

La utilidad aumenta en \$ 35,070 en la segunda semana.

Capítulo 16

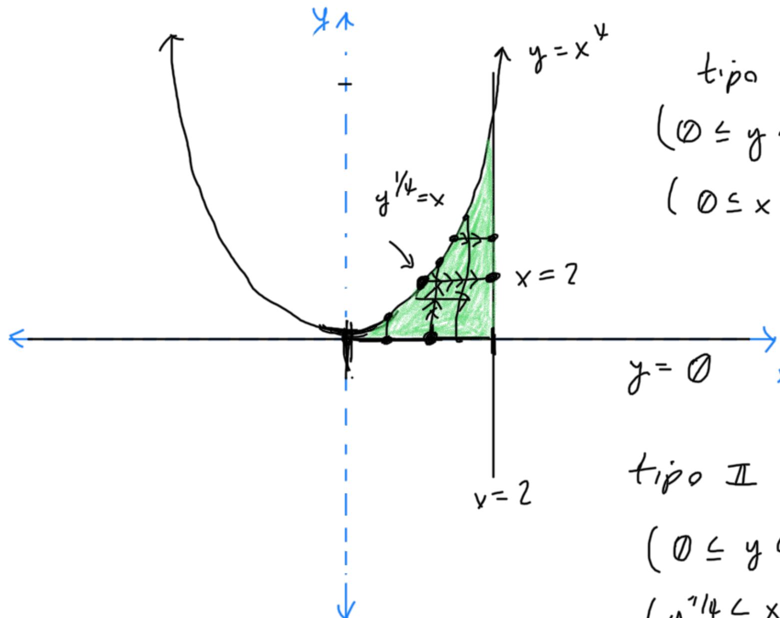
Parcial #03

tipo 1 abajo para arriba $dy\,dx$

tipo 2 izquierda a derecha $dx\,dy$

$$x = y^{1/4} \qquad x = 2 \qquad \& \qquad y = \emptyset$$

a)



tipo I

$(\emptyset \leq y \leq x^4)$

$(0 \leq x \leq 2)$

tipo II

$(0 \leq y \leq 16)$

$(y^{1/4} \leq x \leq 2)$

$x^4 = y$

$x = 2$

$y = 0$

b)

tipo 1 $\longrightarrow$ $$\int_{x=\emptyset}^{x=2} \int_{y=\emptyset}^{y=x^4} f(x)\,dy\,dx$$

$$D: \{ (0 \leq x \leq 2) \wedge (0 \leq y \leq x^4) \}$$

tipo 2 $\longrightarrow$ $$\int_{y=\emptyset}^{y=16} \int_{x=y^{1/4}}^{x=2} f(x)\,dx\,dy$$

$$D: \{ (y^{1/4} \leq x \leq 2) \wedge (0 \leq y \leq 16) \}$$

c)

$$I_1 = 30 \iint_D \sqrt{x^5 + 4}\, dA$$

$$\int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=x^4} 30\sqrt{x^5+4}\; dy\, dx$$

$\boxed{1}$ $$\int_0^{x^4} 30\sqrt{x^5+4}\; dy$$

$$= 30\sqrt{x^5+4}\; y \Big]_0^{x^4} = 30\sqrt{x^5+4}\,(x^4)$$

$\boxed{2}$ $$\int_0^2 30\sqrt{x^5+4}\; x^4\, dx = \int_{u(0)}^{u(2)} 6\sqrt{u}\, du$$

$$u = x^5 + 4 \qquad \frac{du}{5} = x^4\, dx$$

$$= \frac{6 \cdot 2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big]_{u(0)}^{u(2)}$$

$$= 4\, u^{\frac{3}{2}} \Big]_4^{36} = 4\left\{(36)^{\frac{3}{2}} - 8\right\} =$$

$$= 4\{216 - 8\} = 4\{208\} = \boxed{832}$$

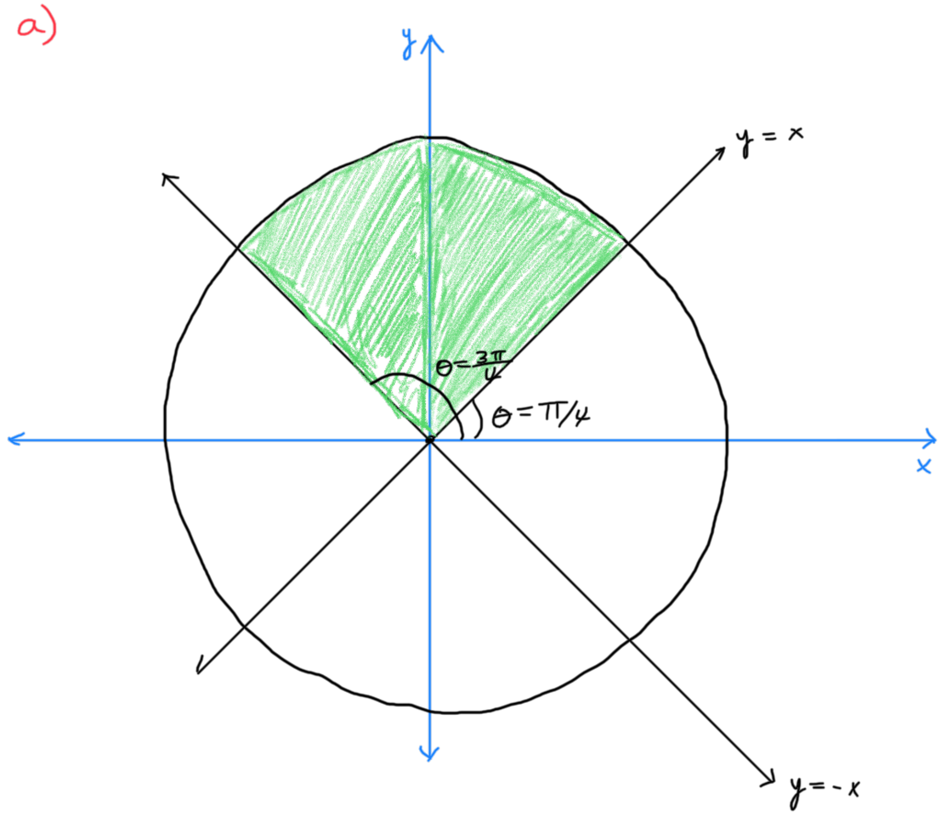
d) $$\int_0^2 x^4\, dx = \frac{x^5}{5}\Big]_0^2 = \frac{1}{5}\{2^5 - 0\} = \frac{32}{5}$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \int_0^{x^4} 1\; dy\, dx = \int_0^2 x^4\, dx = \boxed{\frac{32}{5}}$$

2) $$I_2 = \iint_D \frac{16}{x^2+y^2+1}\, dA$$

$$D: \{(y=-x) \wedge (y=x) \wedge (0 \leq x^2+y^2 \leq e-1)\}$$

a)



$$I_2 = \iint_D \frac{16}{\underbrace{x^2+y^2}_{r^2}+1}\, dA$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x = r\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\theta)$$

$$x^2+y^2 = r^2$$

$$D: \{(y=-x) \wedge (y=x) \wedge (0 \leq \overbrace{x^2+y^2}^{r^2} \leq e-1)\}$$

$$\boxed{\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}}$$

$$0 \leq r^2 \leq e-1$$

$$\boxed{0 \leq r \leq \sqrt{e-1}}$$

$$dA = r\, dr\, d\theta$$

b) $$\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{3\pi}{4}} \int_{r=0}^{r=\sqrt{e-1}} \frac{16}{r^2+1}\, r\, dr\, d\theta$$

$\boxed{1}$ $$\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{16r}{r^2+1}\, dr = 8\int^{\sqrt{e-1}} \frac{du}{u}$$

$$u = r^2 + 1$$
$$du = 2r\,dr$$
$$8\,du = 16r\,dr$$

$$= 8 \ln|u| \Big]_{u(0)}^{u(\sqrt{e-1})}$$

$$= 8 \ln|r^2 + 1| \Big]_{0}^{\sqrt{e-1}}$$

$$= 8 \left\{ \ln|(\sqrt{e-1})^2 + 1| - \cancel{\ln|0+1|}^{0} \right\}$$

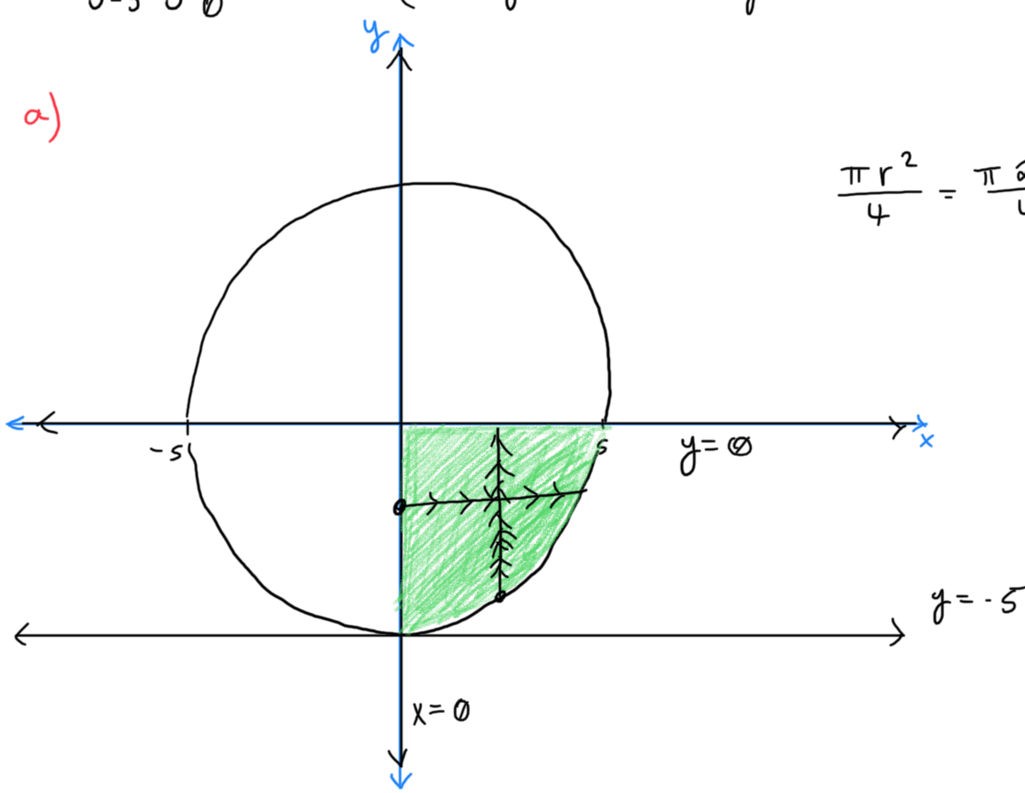
$$= 8 \left\{ \ln|e - \cancel{1} + \cancel{1}| \right\} = 8 \cancel{\ln|e|}^{1} = 8$$

$\boxed{2}$ $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 8\,d\theta = 8\theta \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = 8\left\{\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right\} = 8\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

c) $= 4\pi$

3) $$\int_{-5}^{0} \int_{0}^{\sqrt{25-y^2}} 8(x^2+y^2)^{3/2}\,dx\,dy$$

a)



$$\frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi\, 25}{4}$$

$x = \sqrt{25 - y^2}$ $\quad$ $x = 0$ $\quad$ $y = -5$ $\quad$ $y = 0$

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

$$r^2 = 5^2$$

$$r = 5$$

$$(0 \leq r \leq 5)$$

$$\sqrt{x^2 - 5^2} = y$$

$$\int_{-5}^{0} \int_{0}^{\sqrt{25-y^2}} 8 \underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2}^{3/2} \, dx \, dy$$

b) tipo 1: abajo para arriba (dy dx)

$$\int_{x=0}^{x=5} \int_{y=\sqrt{x^2-25}}^{y=0} 8(x^2+y^2)^{3/2} \, dy \, dx$$

tipo 2: izquierda a derecha (dx dy)

$$\int_{y=-5}^{y=0} \int_{x=0}^{x=\sqrt{25-y^2}} 8(x^2+y^2)^{3/2} \, dx \, dy$$

$$\int_{-5}^{0} \int_{0}^{\sqrt{25-y^2}} 8(x^2+y^2)^{3/2} \, dx \, dy$$

en polares:

$$\int_{\theta=\frac{3\pi}{2}}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=5} 8 \underbrace{(r^2)^{\frac{3}{2}}}_{r^{\cancel{2}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}}} r \, dr \, d\theta$$

$$r^3 \cdot r = r^4$$

$$\int_{\theta=\frac{3\pi}{2}}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=5} 8r^4 \, dr \, d\theta$$

c) $\int^{2\pi} \int^{5} \; 8r^4 \, dr \, d\theta$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}} \int_0 8r \, dr \, d\theta$$

$\boxed{1}$ $$\int_0^5 8r^4 \, dr = \frac{8r^5}{5}\Big]_0^5 =$$

$$= \frac{8}{5}\{5^5 - 0\} = \frac{8}{5}\{3125\} = 5{,}000$$

$\boxed{2}$ $$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 5{,}000 \, d\theta = 5000\,\theta\Big]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 5000\left\{2\pi - \frac{3\pi}{2}\right\}$$

$$= \frac{5000}{2}\pi = 2500\pi$$

d) $$\int_{\theta=\frac{3\pi}{2}}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=5} 1 \, r \, dr \, d\theta$$

$\boxed{1}$ $$\int_0^5 r \, dr = \frac{r^2}{2}\Big]^5 = \frac{25}{2}$$

$\boxed{2}$ $$\frac{25}{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 1 \, d\theta = \frac{25}{2}\,\theta\Big]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \frac{25}{2}\left\{2\pi - \frac{3\pi}{2}\right\}$$

$$= \frac{25}{2}\left\{\frac{\pi}{2}\right\} = \frac{25\pi}{4}$$

fórmula círculo πr^2

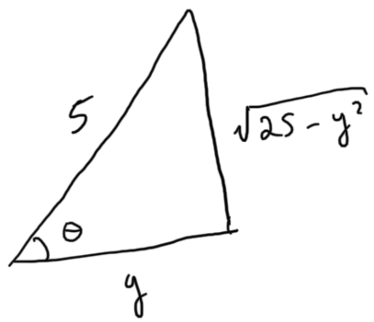
Para este $\frac{\pi r^2}{4} \to \frac{\pi}{4}(5)^2 = \frac{25\pi}{4}$

integración trigonométrica intento:

$$\to \int_{y=-5}^{y=0} \int_{x=0}^{x=\sqrt{25-y^2}} 1 \quad dx\,dy$$

$\boxed{1}$ $$\int_0^{\sqrt{25-y^2}} dx = \sqrt{25-y^2}$$

$\boxed{2}$ $$\int_{-5}^{0} \sqrt{25-y^2}\, dy$$



$S\frac{O}{H}$ $C\frac{A}{H}$ $T\frac{O}{A}$

$C\frac{H}{O}$ $S\frac{H}{A}$ $C\frac{A}{O}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{y}{5}\right)$

$$\cos(\theta) = \frac{y}{5}$$

$$-\sin(\theta) = \frac{1}{5}\frac{dy}{d\theta}$$

$$-5\sin(\theta) = dy$$

$$5\sin(\theta) = \sqrt{25-y^2}$$

$$\int -25\sin(\theta)\sin(\theta)\, dy = -25\int \sin^2(\theta)$$

$$= -25\int\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta$$

$$= -25\int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\theta)}{2}\, d\theta$$

$$= -25\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4}\right)$$

$$= -25\left(\cos^{-1}\left(\frac{y}{5}\right) - \frac{\sin\left(2\cos^{-1}\left(\frac{y}{5}\right)\right)}{4}\right]_{-5}^{0}$$

$$= -25\left\{\cos^{-1}(0) - \frac{\sin\left(2\cos^{-1}(0)\right)}{4} - \right.$$

$$\cos\ (-1) - \frac{\sin\left(2\cos^{-1}(-1)\right)}{4} \Big\}$$

$$= -25\left\{\frac{\pi}{2} - \emptyset - \pi - \emptyset\right\} = 25\frac{\pi}{4}$$

CÁLCULO MULTIVARIABLE PARCIAL 3

Debe enviar su examen escaneado antes de las 4 pm al profesor (cfketelaar@ufm.edu) y al auxiliar (josuerodas@ufm.edu).

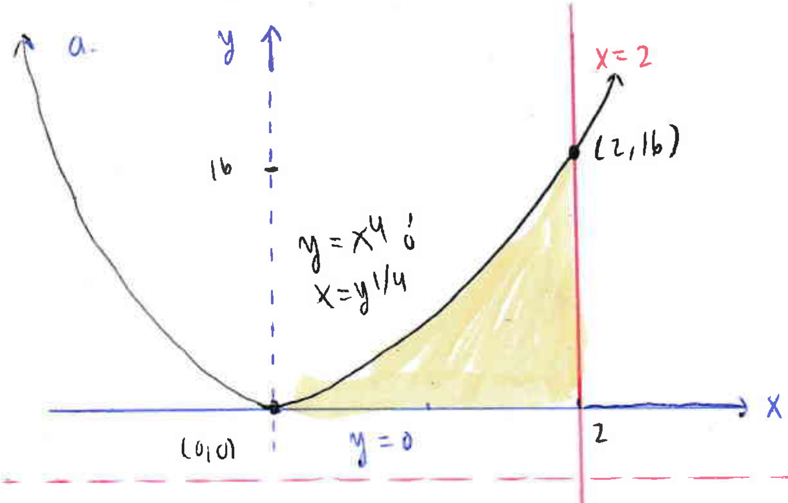
1. Considere la región D entre la curva $x = y^{1/4}$, la recta $x = 2$ & $y = 0$.

   (a) (10 **pts.**) Dibuje la región de integración.

   (b) (10 **pts.**) Escriba la región como una tipo I y uno tipo II.

   (c) (10 **pts.**) Evalúe $I_1 = 30 \iint_D \sqrt{x^5+4}\ dA$. Simplifique a un entero.

   (d) (5 **pts.**) Encuentre el área de la región D. El área no es un entero.



(1pt). Intersección (0,0)
(1pt) Intersección (2,16)
(3pts.) Gráfica de $x = y^{1/4}$
(3pts.) Región sombreada.
(1pt.) Gráfica de $x = 2$
(1pt.) $y = 0$ es un borde.

b. Tipo I: de abajo a arriba. $dy\,dx$ — $0 \le x \le 2$ (2pts.) $0 \le y \le x^4$ (3pts.)

Tipo II: de izquierda a derecha. $dx\,dy$. — $0 \le y \le 16$ (2pts.) $y^{1/4} \le x \le 2$ (3pts.)

c. Integre como tipo I, no se puede integrar $\int \sqrt{x^5+4}\, dx$. u, $du/5$

$$I_1 = 30 \iint_D (x^5+4)^{1/2} dA = 30 \int_0^2 \int_0^{x^4} (x^5+4)^{1/2} dy\, dx = 30 \int_0^2 (x^5+4)^{1/2} x^4 dx$$ (2pts.)

$$I_1 = 6 \cdot \frac{2}{3} (x^5+4)^{3/2} \Big]_0^2 = 4(36^{3/2} - 4^{3/2}) = 4(216-8) = 832$$ (2pts) (2pts.) (2pts.) (2pts.)

d. $A = \iint_D dA = \int_0^2 \int_0^{x^4} dy\, dx = \int_0^2 x^4 dx = \frac{1}{5} x^5 \Big]_0^2 = \frac{32}{5}$ (1pt.) (1pt.) (1pt.) (1pt.) (1pt.)

pueden usar sólo $\int_a^b f(x)\,dx$.

2. Considere $I_2 = \iint_D \frac{16}{x^2+y^2+1}\, dA$.

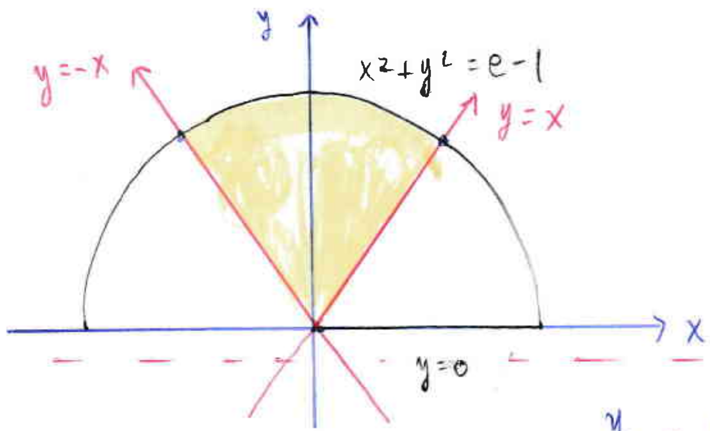
D está entre $y=-x$, $y=x$ & el semidisco superior $0 \leqslant x^2+y^2 \leqslant e-1$.

(a) (09 pts.) Dibuje la región de integración.

(b) (10 pts.) Reescriba la región usando un sistema de coordenadas apropiado.

(c) (10 pts.) Evalúe la integral. Simplifique a un entero de π.

a.



(2pts.) Gráfica de $x^2+y^2=e-1$

(2pts.) Gráfica de $y=x$

(2pts.) Gráfica de $y=-x$

(3pts.) Región Sombreada.

b. use $x^2+y^2=r^2$ & $\frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta$.

Pueden encontrarlos con geometría.

Circunferencia $x^2+y^2=e-1$ Polares $r=\sqrt{e-1}$ (2pts.)

Recta $y=x \Rightarrow \tan\theta=1$ Polares $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ (2pts.)

Recta $y=-x \Rightarrow \tan\theta=-1$ (2do cuadrante) Polares $\theta_2 = \frac{3\pi}{4}$ (2pts.)

Límites en Polares $\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{4}$ (2pts.) $0 \leqslant r \leqslant \sqrt{e-1}$ (2pts.)

c. Reescriba $x^2+y^2+1 = r^2+1$ (1pt.)

$$I_2 = \iint_D \frac{16}{x^2+y^2+1}\, dA = \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{16r}{r^2+1}\, dr\, d\theta. = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 8\ln(r^2+1)\Big]_{r=0}^{r=\sqrt{e-1}} d\theta.$$

(3pts.) (2pts.)

$\ln e = 1$

$$I_2 = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 8\cancel{\ln(e-1+1)} - 3\cancel{\ln(1)}^{\,0}\, d\theta = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 8\, d\theta. = 8\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 4\pi.$$

(1pt) (1 pt.) (1pt.) (2pts.)

3. Considere $I_3 = \int_{-5}^{0} \left(\int_{0}^{\sqrt{25-y^2}} 8(x^2+y^2)^{3/2}\, dx \right) dy$.

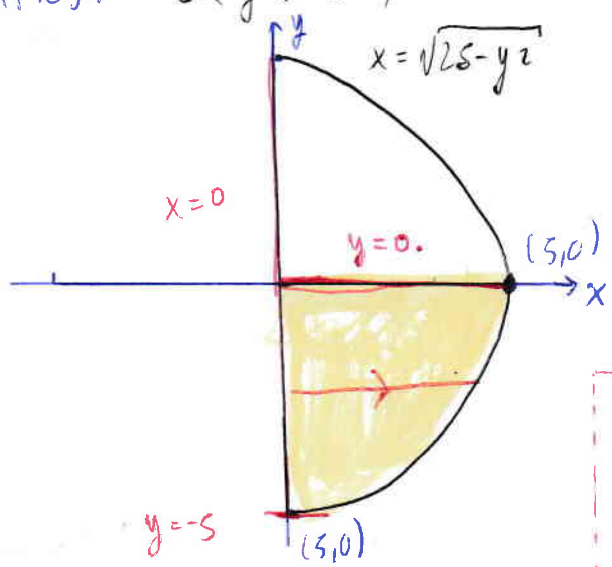
(a) (10 pts.) Dibuje la región de integración.

(b) (10 pts.) Escriba la región como una tipo I, tipo II y polar.

(c) (10 pts.) Evalúe la integral. Simplifique a un múltiplo de π.

(d) (05 pts.) Encuentre el área de la región de integración.

a. Límites: $0 \leq y \leq -5$, $0 \leq x \leq \sqrt{25-y^2}$ (2pts.)



(2pts.) Gráfica de $\sqrt{25-y^2}$

(3pts.) Región Sombreada.

(3pts) los bordes son $y=0$, $x>0$

$x=0$, $y<0$.

b. Tipo I : $0 \leq x \leq 5$, $-\sqrt{25-x^2} \leq y \leq 0$ (4pts.)

Tipo II $-5 \leq y \leq 0$, $0 \leq x \leq \sqrt{25-y^2}$ (2pts.)

b. Use coordenadas polares. $0 \leq r \leq 5$ (2 pts.)

La región está en el cuarto cuadrante. $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ (2 pts.)

c. Reescriba $8(x^2+y^2)^{3/2} = 8(r^2)^{3/2} = 8r^3$ (1pt.)

$$I_3 = \iint_D 8(x^2+y^2)^{3/2}\, dA = \int_{3\pi/2}^{2\pi} \int_0^5 8r^3\, r\, dr\, d\theta. = \int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{8}{5} r^5 \Big]_{r=0}^{5} d\theta = \int_{3\pi/2}^{2\pi} 8 \cdot 5^4\, d\theta.$$

(2pts.) (2pts) (1pt.)

$$I_3 = 8(3125)\,\theta \Big]_{3\pi/2}^{2\pi} = 8(3125)\frac{\pi}{2} = 4 \cdot 3125\,\pi = 12{,}500\,\pi$$ (2pts.)

(1pt.) (1pt.)

$$d.\quad A = \iint dA = \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \int_0^5 r\, dr\, d\theta = \left(\int_{3\pi/2}^{\pi/2} d\theta\right)\left(\frac{r^2}{2}\Big]_{r=0}^{r=5}\right) = \frac{\pi}{2}\,\frac{25}{2} = \frac{25\pi}{4}$$

(1pt.) (1pt.) (2pts) (1pt.)

El área es igual a un cuarto del área de un círculo de radio 5. Pueden usar geometría.

Parte III

Laboratorios

Capítulo 17

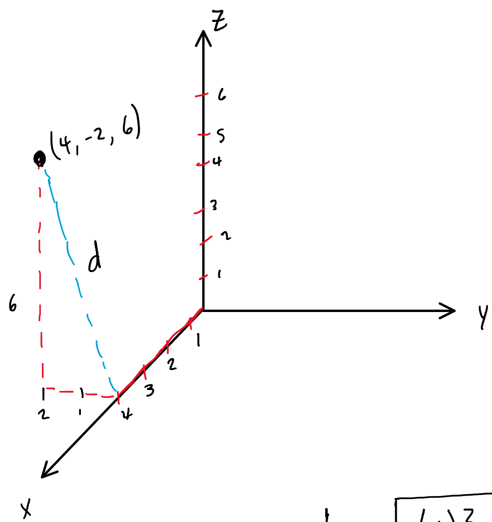
Laboratorio #01

LABORATORIO #01

Wednesday, January 15, 2020
13:03

DAVID CORZO 20190432

1) Punto $(4, -2, 6)$ al eje x:



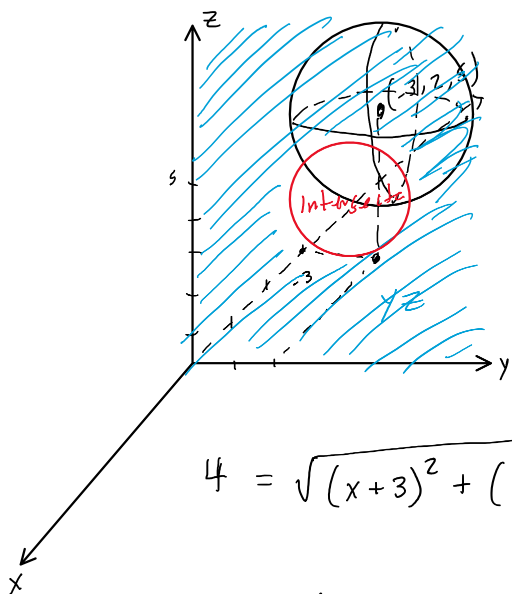
$$d = \sqrt{(6)^2 + (2)^2}$$

$$d = \sqrt{36 + 4}$$

$$d = \sqrt{40}$$

0

2) Ecuación de la esfera con centro $(-3, 2, 5)$ & radio 4. Intersección de la esfera con el plano yz.



$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2$$

$$= \sqrt{(x-(-3))^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}$$

$$= \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}$$

...

$$4 = \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}$$

Se asume $x = 0$

$$(4)^2 = \left(\sqrt{(0+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}\right)^2$$

$$16 = 9 + (y-2)^2 + (z-5)^2$$

$$16 - 9 = (y-2)^2 + (z-5)^2$$

$$7 = (y-2)^2 + (z-5)^2$$

Queda la ecuación de un círculo correspondiente a el círculo que deja la esfera en el plano yz.

3) Encuentre el radio y centro de la esfera cuya ec. es $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15.$

$x: \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$

$y: \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4$

$z: \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$

$$\left[x^2 - 2x + 1\right] + \left[y^2 - 4y + 4\right] + \left[z^2 + 8z + 16\right] = 21 + 15$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 36$$

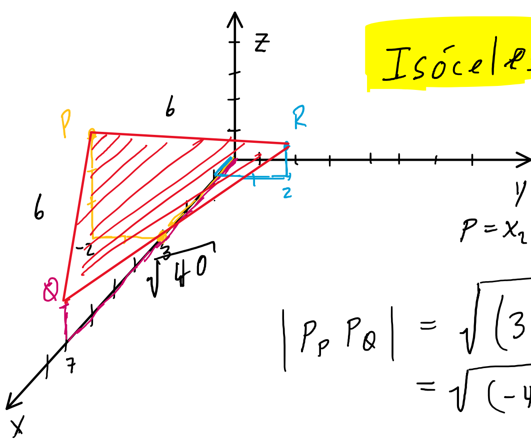
$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2} = 6$$

radio: 6

centro: $(1, 2, -4)$

4) Longitud de los lados del triángulo $P(3,-2,-3)$, $Q(7,0,1)$, $R(1,2,1)$. ¿Isósceles, triángulo rectángulo?

$$|P_A \& P_B| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Isósceles

$P = x_2 \quad Q = x_1$

$$|P_P P_Q| = \sqrt{(3-7)^2 + (-2-0)^2 + (-3-1)^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 4 + 16}$$
$$= \sqrt{36} = 6$$

$Q = x_2 \quad R = x_1$

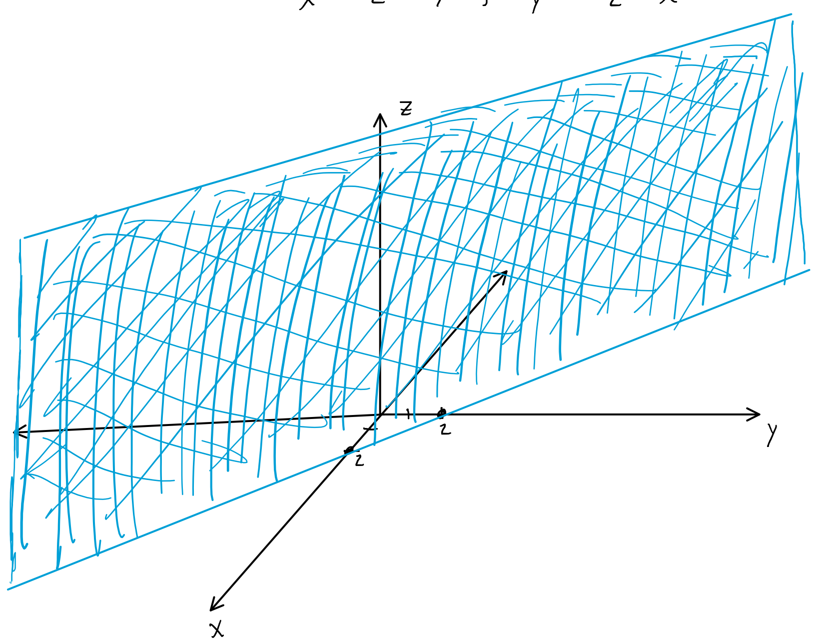
$$|P_Q P_R| = \sqrt{(7-1)^2 + (0-2)^2 + (1-1)^2}$$
$$= \sqrt{(6)^2 + (-2)^2 + (0)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$$

$R = x^2 \quad P = x_1$

$$|P_R P_P| = \sqrt{(1-3)^2 + (2+2)^2 + (1+3)^2}$$
$$= \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (4)^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

5) Describa & posqueje la superficie en $\mathbb{R}^3$ representada por la ecuación $x + y = 2$

$x = 2 - y \; ; \; y = 2 - x$ $\qquad x + y + 0z = 2$



6) Describa y bosqueje la superficie $\mathbb{R}^3$ representada por la ecuación $2z = 8 - 4x$

I; $x = 0$

$2z - 8 = 0$

$z = \frac{+8}{2}$

$z = +4$

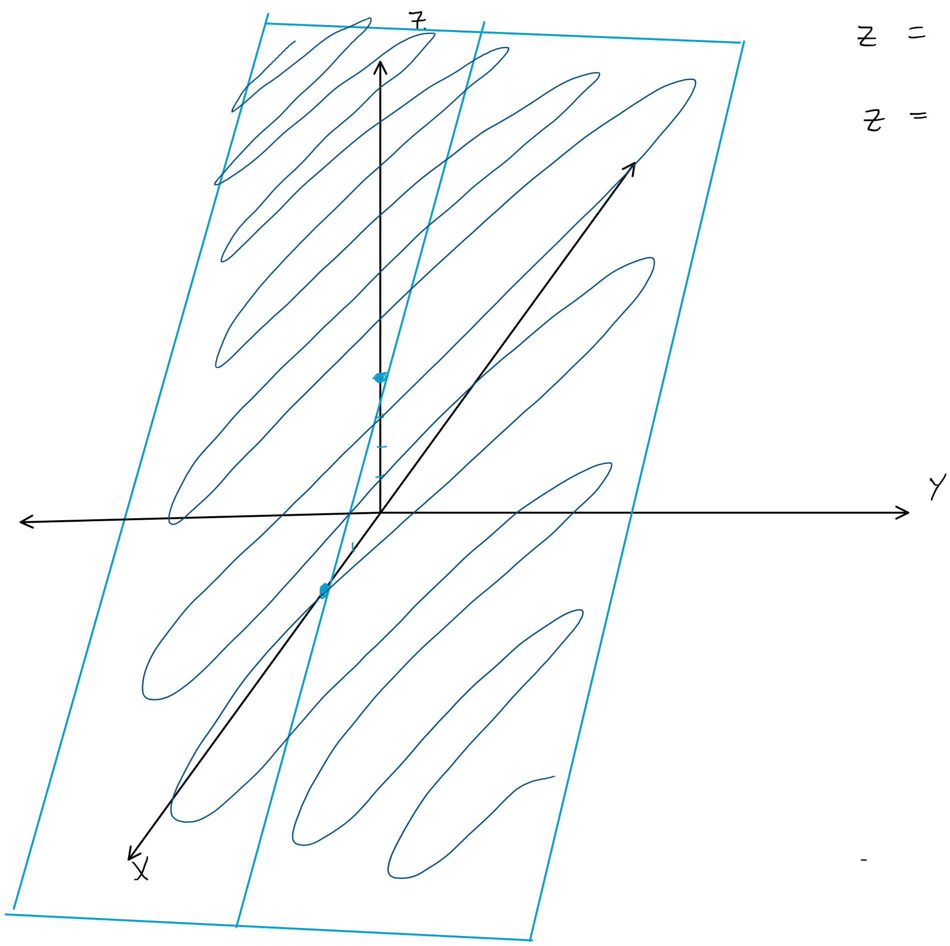
I; $z = 0$

$0 = 8 - 4x$

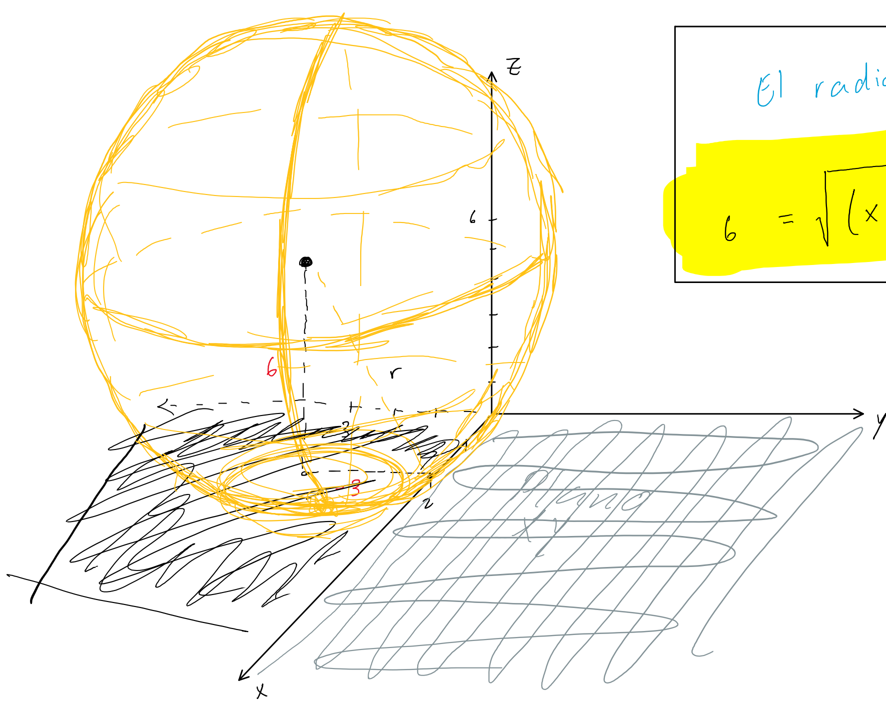
$-8 = -4x$

$\frac{-8}{-4} = x$

$x = 2$



7) Bono: La ecuación de la esfera con centro $(2,-3,6)$ que toca el plano xy.



El radio es 6.

$$6 = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2}$$

Laboratorio #1 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 16 de enero

Nombre:____ **Carnet:** ________________

Tema:	1	2	3	4	5	6	7	Total
Puntos:	20	20	20	20	10	10	10	110
Nota:								

Resuelva las siguientes ejercicios:

1. (20 pts.) Determine la distancia del punto $(4, -2, 6)$ al eje x

2. (20 pts.) Halle la ecuación de la esfera con centro $(-3, 2, 5)$ y radio 4.
   ¿Cuál es la intersección de esta esfera con el plano yz?

3. (20 pts.) Encuentre el radio y centro de la esfera cuya ecuación es $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15$.

4. (20 pts.) Halle la longitud de los lados del triángulo $P(3, -2, -3), Q(7, 0, 1), R(1, 2, 1)$.
   ¿Es un triángulo isósceles? ¿Es un triángulo rectángulo? Utilice el Teorema de Pitágoras.

5. (10 pts.) Describa y bosqueje la superficie en R^3 representada por la ecuación $x + y = 2$.

6. (10 pts.) Describa y bosqueje la superficie en R^3 representada por la ecuación $2z = 8 - 4x$.

7. (10 pts.) **BONO:**
   Encuentre la ecuación de la esfera con centro $(2, -3, 6)$ que toca el plano x.

Parte IV

Tareas

Capítulo 18

Tarea #02

Tarea #2

David Gabriel Corzo Mcmath - 20190432

Cálculo Multivariable

1) Vectores:

$a = \langle 5, -12, 0 \rangle$

$b = \langle 0, -3, -6 \rangle$

$c = \langle 1, 0, 2 \rangle$

$2b = \langle 0, -6, -12 \rangle$

a) $a + 2(b + c) - (a - 2b) =$

$= a + 2[(0+1), (-3+0), (-6+2)] - [(5-0), (-12+6), (0+12)]$

$= a + 2\langle 1, -3, -4 \rangle - \langle 5, -6, 12 \rangle$

$= a + \langle 2, -6, -8 \rangle - \langle 5, -6, 12 \rangle$

$= a + [(2-5), (-6+6), (-8-12)]$

$= a + \langle -3, 0, -20 \rangle$

$= \langle 5, -12, 0 \rangle + \langle -3, 0, -20 \rangle$

$= [(5-3), (-12+0), (0-20)]$

$= \langle 2, -12, -20 \rangle$

b) $2a \cdot (3b + 4c) - 2c \cdot (4a + 0b)$

$2a = \langle 16, -24, 0 \rangle$ $\quad 4a = \langle 20, -48, 0 \rangle$

$3b = \langle 0, -9, -24 \rangle$ $\quad 0b = \langle 0, 0, 0 \rangle$

$2c = \langle 2, 0, 4 \rangle$ $\quad$ # Sacar nuevos vectores

$4c = \langle 4, 0, 8 \rangle$

$= 2a \cdot \langle (0+4), (-9+0), (-24+8) \rangle - 2c \cdot \langle (20+0), (-48+0), (0+0) \rangle$

$= 2a \cdot \langle 4, -9, -16 \rangle - 2c \cdot \langle 20, -48, 0 \rangle$

$= \langle (10 \cdot 4), (-24 \cdot -9), (0 \cdot -16) \rangle - \langle (2 \cdot 20), (0 \cdot -48), (4 \cdot 0) \rangle$

$= \langle 40, 216, 0 \rangle - \langle 40, 0, 0 \rangle$

$= \langle (40 - 40), (216 - 0), (0, 0) \rangle$

$= \langle 0, 216, 0 \rangle$

c) $|a + c - (a+b)| =$

$a = \langle 5, -12, 0\rangle \quad b = \langle 0, -3, -6\rangle \quad c = \langle 1, 0, 2\rangle$

$= \left|\langle (5+1), (-12+0), (0+2)\rangle - (\langle (5+0), (-12-3), (0-6)\rangle)\right|$

$= |\langle 6, -12, 2\rangle - \langle 5, -15, -6\rangle|$

$= |\langle (6-5), (-12+15), (2+6)\rangle|$

$= |\langle 1, 3, 8\rangle|$

$\sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (8)^2}$

$= \sqrt{1 + 9 + 64}$

$= \sqrt{74}$

d) $|a + c| - |a + b|$

$= |\langle (5+1), (-12+0), (0+2)\rangle| - |\langle (5+0), (-12-3), (0-6)\rangle|$

$= |\langle 6, -12, 2\rangle| - |\langle 5, -15, -6\rangle|$

$= \sqrt{6^2 + (-12)^2 + 2^2} - \sqrt{5^2 + (-15)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{36 + 144 + 4} - \sqrt{25 + 225 + 36}$

$= \sqrt{184} - \sqrt{286}$

$\cos\theta = \dfrac{A \cdot B}{|A||B|}$

2) Misma dirección que el vector $\langle -3, 4, 6, -8 \rangle$

$$= |\langle -3, 4, 6, -8 \rangle|$$

Calcular magnitud

$$= \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (6)^2 + (-8)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16 + 36 + 64}$$

$$= \sqrt{125}$$

Entonces...

$$\left|\left\langle -\frac{3}{\sqrt{125}}, \frac{4}{\sqrt{125}}, \frac{6}{\sqrt{125}}, -\frac{8}{\sqrt{125}} \right\rangle\right| = 1$$

Comprobar...

$$= \sqrt{\frac{9}{125} + \frac{16}{125} + \frac{36}{125} + \frac{64}{125}} = \sqrt{\frac{1}{1}}\ 5 = 1$$

3) Encuentre el ángulo de los vectores

a) $a = \langle 3, 0 \rangle$, $b = \langle 5, 5 \rangle$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{A \cdot B}{|A||B|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{\langle (3 \cdot 5), (0 \cdot 5) \rangle}{|\langle 3, 0 \rangle||\langle 5, 5 \rangle|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{15 + 0}{3 \cdot \sqrt{50}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{15}{3 \cdot \sqrt{2 \cdot 25}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{15}{3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\cancel{15}}{\cancel{15}} \cdot (2)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

b)

$a = \langle 2, -4, 5 \rangle$

$b = \langle -2, 4, -5 \rangle$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|a||b|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{-45}{(45)^{1/2}(45)^{1/2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{-45}{45}\right)$$

$$= \cos^{-1}(-1)$$

$$\boxed{= \pi}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b}$

$\hookrightarrow$

2	-4	5
-2	4	-5
-4	-16	-25

$= (-4) + (-16) + (-25)$

$= -20 - 25$

$= -45$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$|a|$

$= \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (5)^2}$

$= \sqrt{4 + 16 + 25} = \sqrt{45}$

$|b|$

$= \sqrt{(-2)^2 + (4)^2 + (-5)^2}$

$= \sqrt{4 + 16 + 25} = \sqrt{45}$

4) Determine si los vectores son ortogonales, paralelos o ninguno.

a) $a = \langle -5, 3, 7 \rangle \quad b = \langle 6, -8, 2 \rangle$

Producto punto de a & b

-5	3	7
$\cdot\ 6$	$\cdot\ -8$	$\cdot\ 2$
-30	-24	$+14$

$(-30) + (-24) + (14) = -40$ Ninguno

b) $a = \langle 4, 6 \rangle$

$b = \langle -3, 2 \rangle$

4	6
-3	2
-12	12

$\underbrace{(-12) + 12}_{\emptyset}$

Son ortogonales

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \dots a_n b_n$$

c) $a = -i + 2j + 5k$

$b = 3i + 4j - k$

$a = \langle -1, 2, 5 \rangle$

$b = \langle 3, 4, -1 \rangle$

-1	2	5
3	4	-1
-3	8	-5

$\underbrace{(-3) + 8 + (-5)}$

$\underbrace{-8 + 8}$

0

Son ortogonales

d) $a = 2i + 6j - 4k$

$b = -3i - 9j + 6k$

$a = \langle 2, 6, -4 \rangle$

$b = \langle -3, -9, 6 \rangle$

2	6	-4
-3	-9	6
-6	54	-24

$(-6) + 54 + (-24)$

$-30 + 54$

24

Son paralelos por $\vec{a} \cdot \vec{b}$ son multiplos entre sí.

5) Considerar vectores:

$a = \langle 3, 6, -2 \rangle$ esc: $\text{Proy}_a b = \dfrac{a \cdot b}{|a|}$

$b = \langle 1, 2, 3 \rangle$ vec: $\text{Proy}_a b = \dfrac{a \cdot b}{|a|} \dfrac{a}{|a|}$

a) Proyección de b sobre a:

Escalar:

$$\text{proy}_a b = \frac{3 + 12 - 6}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{9 + 36 + 4}} =$$

$$= \frac{9}{\sqrt{49}} = \boxed{\frac{9}{7}}$$

Vectorial:

$$\text{proy}_a b = \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{49}} \langle 3, 6, -2 \rangle$$

$$= \frac{9}{(49)^{\frac{1}{2}} \cdot (49)^{\frac{1}{2}}} \langle 3, 6, -2 \rangle$$

$$= \frac{9}{49} \langle 3, 6, -2 \rangle$$

$$= \boxed{\left\langle \frac{27}{49}, \frac{54}{49}, -\frac{18}{49} \right\rangle}$$

b) a sobre b:

$a = \langle 3, 6, -2 \rangle$
$b = \langle 1, 2, 3 \rangle$

$$\text{proy}_b\, a = \frac{a \cdot b}{|b|} \qquad \text{proy}_b\, a = \frac{a \cdot b}{|b|} \cdot \frac{b}{|b|}$$

escalar: $$\text{proy}_b\, a = \frac{9}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}}$$

vectorial: $$\text{proy}_b\, a = \frac{9}{\sqrt{14}} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \left[\langle 1, 2, 3 \rangle \right]$$

$$= \frac{9}{(14)^{\frac{1}{2}} \cdot (14)^{\frac{1}{2}}} \langle 1, 2, 3 \rangle$$

$$= \frac{9}{14} \langle 1, 2, 3 \rangle$$

$$= \left\langle \frac{9}{14}, \frac{18}{14}, \frac{27}{14} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{9}{14}, \frac{9}{7}, \frac{27}{14} \right\rangle$$

c) proyección de b sobre a no es igual a proyección de a sobre b; si estos cumplen la condición de $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ si resultan ser la misma proyección.

* el lab decía proyab = proyab que sí serían iguales pero asumí que quería decir proyab = $\text{proy}_b a$ que en cuyo caso no siempre son iguales.

BONO: Encontrar tal valor de x que $\langle 2, 1, -1\rangle$ & $\langle 1, x, 0\rangle$ es de $45°$.

θ tiene que ser igual a $45°$ ó $\frac{\pi}{4}$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{[(2\cdot 1) + (1\cdot x) + \cancel{(-1\cdot 0)}^{\emptyset}]}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{1^2 + x^2 + 0^2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{2 + x}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{2 + x}{\sqrt{6}\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 + x}{\sqrt{6}\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{1+x^2} = 2 + x$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{6}\right)\sqrt{1+x^2}$$

$$\frac{\sqrt{12}}{2}\sqrt{1+x^2} = 2 + x$$

$$\left(\frac{\sqrt{12}}{2}\sqrt{1+x^2}\right)^2 = (2+x)^2$$

$$3(1+x^2) = x^2 + 4x + 4$$

$$3 + 3x^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$3 + 3x^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$\emptyset = x^2 - 3x + 4x + 4 - 3$$

$$\emptyset = -2x^2 + 4x + 1$$

$$x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(4) \pm\sqrt{16 - 4(-2)(1)}}{2(-2)}$$

$$= \frac{-4 \pm\sqrt{24}}{-4}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{-4} \approx -0.22$$

$$\approx 2.22$$

Tarea #2 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 23 de enero

Nombre:____ **Carnet:** _________________

Tema:	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos:	20	20	20	20	22	0	102
Nota:							

Resuelva las siguientes ejercicios:

1. Dados los vectores: $a = \langle 5, -12, 0\rangle$, $b = \langle 0, -3, -6\rangle$, $c = \langle 1, 0, 2\rangle$ encuentre:
   (a) (5 pts.) $a + 2(b + c) - (a - 2b)$
   (b) (5 pts.) $2a \cdot (3b + 4c) - 2c \cdot (4a + 0b)$
   (c) (5 pts.) $|a + c - (a + b)|$
   (d) (5 pts.) $|a + c| \; - \; |a + b|$

2. (20 pts.) Halle un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector $\langle -3,\ 4,\ 6,\ -8\rangle$

3. Encuentre el ángulo entre los siguientes vectores.
   No necesita utilizar calculadora para encontrar el ángulo.
   (a) (10 pts.) $\mathbf{a} = \langle 3,\ 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5,\ 5\rangle$
   (b) (10 pts.) $\mathbf{b} = \langle 2,\ -4,\ 5\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2,\ 4,\ -5\rangle$

4. Determine si los vectores son ortogonales, paralelos o ninguno.
   (a) (5 pts.) $a = \langle -5, 3, 7\rangle, b = \langle 6, -8, 2\rangle$
   (b) (5 pts.) $a = \langle 4, 6\rangle, b = \langle -3, 2\rangle$
   (c) (5 pts.) $a = -i + 2j + 5k, b = 3i + 4j - k$
   (d) (5 pts.) $a = 2i + 6j - 4k, b = -3i - 9j + 6k$

5. Considere los vectores $a = \langle 3, 6, -2\rangle$ y $b = \langle 1, 2, 3\rangle$. Encuentre las proyecciones escalar y vectorial:
   (a) (8 pts.) de $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{a}$.
   (b) (8 pts.) de $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{b}$.
   (c) (6 pts.) Explique si $\text{proy}_a b \; = \; \text{proy}_a b$.

6. **BONO: (10 pts.)**
   Encuentre los valores de x tales que el ángulo entre los vectores $\langle 2, 1, -1\rangle$ y $\langle 1, x, 0\rangle$ es de $45°$.

Capítulo 19

Tarea #03

1) a. $(a \cdot b) \cdot c$

#asumiendo que a, b, c son vectores.

Resulta en un escalar. productos punto resultan en escalares siempre

b. $(a \cdot b) \times c$

El producto cruz es entre vectores no se puede hacer entre escalares, $a \cdot b$ resulta en un escalar por ende no tiene sentido.

c. $(a \times b) \times c$

Resulta en un vector

d. $(a \times c) \cdot b$

Resulta en un escalar. producto cruz de a, c resulta en vector, ese vector con producto punto b resulta en escalar

2) Encuentre vectores unitarios ortogonales a $\langle 3,2,1\rangle$ & $\langle -1,1,0\rangle$.

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(2\cdot 0)-(1\cdot 1)\right] - \hat{j}\left[(3\cdot 0)-(1\cdot -1)\right] + \ldots$$

$$+\hat{k}\left[(3\cdot 1)-(2\cdot -1)\right]$$

$$= \hat{i}\left[0-1\right] - \hat{j}\left[0-(-1)\right] + \hat{k}\left[3-(-2)\right]$$

$$= -\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\therefore \langle -1, -1, 5\rangle$$

Este es el vector ortogonal a
⟨3,2,1⟩ & ⟨-1,1,0⟩ Ahora sólo
falta la división por la magnitud
para que sea ortogonal unitario.

$$|O_\perp| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (5)^2} = \sqrt{1+1+25}$$
$$= \sqrt{27}$$

unit $\Rightarrow$ $O_\perp \cdot \frac{1}{\sqrt{27}} \Rightarrow \langle -1, -1, 5 \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{27}} =$

$$R_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{1}{\sqrt{27}}, -\frac{5}{\sqrt{27}} \right\rangle$$

invierto signos para encontrar segundo vector

$$R_2 = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{27}}, -\frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{5}{\sqrt{27}} \right\rangle$$

Comprobación de ser unitario.

$$1 = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^2 + \left(-\frac{5}{\sqrt{27}}\right)^2}$$

$$1 = \sqrt{\left(\frac{1}{27}\right) + \left(\frac{1}{27}\right) + \left(\frac{25}{27}\right)}$$

$$1 = \sqrt{\frac{1+1+25}{27}}$$

$$1 = \sqrt{\frac{27}{27}}$$

$$1 = 1$$

$\therefore$ es unitario & ortogonal.

3) Calcule el triple producto escalar entre $a = \langle 1,2,3 \rangle$ & $b = \langle 3,2,5 \rangle$ & $c = \langle 0,4,3 \rangle$ ¿ $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$

$b \times c = | \hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k} |$

$$b \times c = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left[(2\cdot3)-(5\cdot4)\right]-\hat{\jmath}\left[(3\cdot3)-(5\cdot0)\right]+\hat{k}\left[(3\cdot4)-(2\cdot0)\right]$$

$$= \hat{\imath}\left[6-20\right]-\hat{\jmath}\left[9-0\right]+\hat{k}\left[12-0\right]$$

$$= \hat{\imath}\left[-14\right]-\hat{\jmath}\left[9\right]+\hat{k}\left[12\right]$$

$$= -14\hat{\imath}-9\hat{\jmath}+12\hat{k}$$

$$= \langle -14, -9, 12 \rangle$$

$$a\cdot(b\times c) = \langle 1,2,3\rangle \cdot \langle -14,-9,12\rangle$$

$$= \langle (1\cdot -14), (2\cdot -9), (3\cdot 12)\rangle$$

$$= -14 - 18 + 36 = 4$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left[(2\cdot5)-(3\cdot2)\right]-\hat{\jmath}\left[(1\cdot5)-(3\cdot3)\right]+\hat{k}\left[(1\cdot2)-(3\cdot2)\right]$$

$$= \hat{\imath}\left[10-6\right]-\hat{\jmath}\left[5-9\right]+\hat{k}\left[2-6\right]$$

$$= \hat{\imath}\left[4\right]-\hat{\jmath}\left[-4\right]+\hat{k}\left[-4\right]$$

$$= 4\hat{\imath}+4\hat{\jmath}-4\hat{k}$$

$$= \langle 4,4,-4\rangle$$

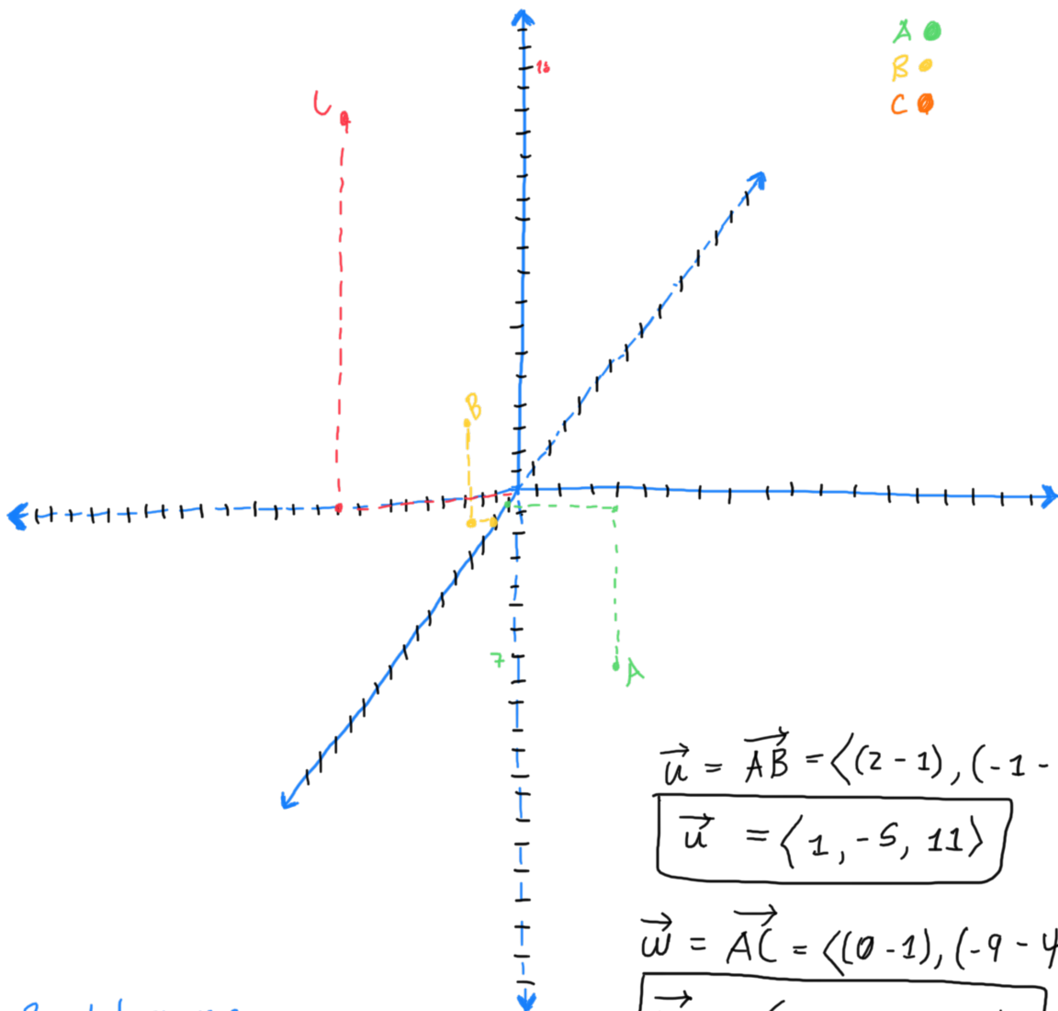
$$(a\times b)\cdot c = \langle 4,4,-4\rangle\cdot\langle 0,4,3\rangle$$

$$= 0 + 16 - 12 = 4$$

$\therefore \quad a\cdot(b\times c) = (a\times b)\cdot c$ Sí es igual ya que los dos dan 4, el mismo resultado.

4) Calcule el área del paralelogramo entre los puntos A(1, 4, -7), B(2, -1, 4) y C(0, -9, 18)

$A(1,4,-7)$, $B(2,-1,4)$ & $C(0,-9,18)$.



$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \langle (2-1), (-1-4), (4+7) \rangle$

$\boxed{\vec{u} = \langle 1, -5, 11 \rangle}$

$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = \langle (0-1), (-9-4), (18+7) \rangle$

$\boxed{\vec{w} = \langle -1, -13, 25 \rangle}$

Paralelogramo

$P = b \cdot a$

base $= |\vec{a}|$

altura $= |b| \sin\theta$

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -5 & 11 \\ -1 & -13 & 25 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{i}\left[(-5 \cdot 25) - (11 \cdot -13)\right] - \hat{j}\left[(1 \cdot 25) - (11 \cdot -1)\right] + \hat{k}\left[(1 \cdot -13) - (-5 \cdot -1)\right]$$

$$= \hat{i}\left[-125 + 143\right] - \hat{j}\left[25 + 11\right] + \hat{k}\left[-13 - 5\right] =$$

$$= 18\hat{i} - 36\hat{j} - 18\hat{k}$$

$$= \langle 18, -36, -18 \rangle$$

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = \sqrt{18^2 + (-36^2) + (-18^2)} = 18\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} = 9\sqrt{6}$$

5) Considere los puntos $P(1,0,1)$ & $Q(-2,1,3)$ & $R(4,2,5)$.

a) Encontrar el vector no cero ortogonal al plano

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (-2-1), (1-0), (3-1) \rangle$$

$$\boxed{\vec{u} = \langle -3, 1, 2 \rangle}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{PR} = \langle (4-1), (2-0), (5-1) \rangle$$

$$\boxed{\vec{w} = \langle 3, 2, 4 \rangle}$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left[(1\cdot 4)-(2\cdot 2)\right] - \hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow \hat{\jmath}\left[(-3\cdot 4)-(3\cdot 2)\right] + \hat{k}\left[(-3\cdot 2)-(3\cdot 1)\right]$$

$$= \hat{\imath}\left[4-4\right] - \hat{\jmath}\left[-12-6\right] + \hat{k}\left[-6-3\right]$$

$$= 0\hat{\imath} + 18\hat{\jmath} - 9\hat{k}$$

$\therefore \langle 0, 18, -9 \rangle$ es el vector ortogonal no cero al plano.

b) Determine el área del triángulo PQR

$$A_\triangle = \frac{1}{2}\left|\vec{u} \times \vec{w}\right| = \frac{1}{2}\left|\underbrace{\langle 0, 18, -9 \rangle}\right|$$

$$\sqrt{0^2 + 18^2 + (-9)^2}$$

$$\sqrt{324 + 81}$$

$$\sqrt{405}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{405} = \frac{1}{2}\, 9\cdot\sqrt{5} = \frac{9\cdot\sqrt{5}}{2}$$ es el

≈ 10.06

área del triángulo PQR

6) Volúmen del paralelelipípedo determinado por los vectores $a = \langle 1,2,3 \rangle$; $b = \langle -1,1,2 \rangle$; $c = \langle 2,1,4 \rangle$.

$$V_p = |a \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{\imath}\left[(1\cdot 4)-(1\cdot 2)\right] - \hat{\jmath}\left[(-1\cdot 4)-(2\cdot 2)\right] + \hat{k}\left[(-1\cdot 1)-(2\cdot 1)\right]$$

$$\dots = \hat{\imath}\left[4-2\right] - \hat{\jmath}\left[-4-4\right] + \hat{k}\left[-1-2\right] = 2\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

Ahora $\hat{\imath} = 1$; $\hat{\jmath} = 2$; $\hat{k} = 3$; (por vector a)

$$= 2(1) + 8(2) - 3(3)$$

$$= 2 + 16 - 9 = 18 - 9 = 9$$ es el volúmen del paralelelipípedo a, b, c.

7) ¿Están los pts. $A(1,4,-7)$; $B(2,-1,4)$; $C(0,-9,18)$; $D(0,0,0)$ sobre el mismo plano?

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \langle (2-1), (-1-4), (4+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{u} = \langle 1, -5, 11 \rangle}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = \langle (0-1), (-9-4), (18+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{w} = \langle -1, -13, 25 \rangle}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AD} = \langle (0-1), (0-4), (0+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{v} = \langle -1, -4, 7 \rangle}$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v})}$$

$$\vec{u}\,(\vec{w} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & -13 & 25 \\ -1 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{\imath}\left[(-13 \cdot 7) - (-4 \cdot 25)\right] - \hat{\jmath}\left[(-1 \cdot 7) - (25 \cdot -1)\right] + \hat{k}\left[(-1 \cdot -4) - (-1 \cdot -13)\right]$$

$$= 9\hat{\imath} - 18\hat{\jmath} - 9\hat{k}$$

remplazar $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ con $\vec{u}$.

$$= 9(1) - 18(-5) - 9(11)$$

$$= 9 + 90 - 99$$

$$= 9 - 99 + 90$$

$$= -90 + 90 = 0$$ ∴ sí son parte del mismo plano.

8) $(a \cdot b) = \sqrt{3}$ & $(a \times b) = \langle 1, 2, 2 \rangle$

encontra ángulo entre a & b.

$$\underbrace{a \cdot b}_{\sqrt{3}} = |a||b|\cos\theta$$

$$\underbrace{|a \times b|}_{|\langle 1,2,2\rangle|} = |a||b|\sin\theta$$

$$|a||b|\cos\theta = \sqrt{3}$$

$$|a||b| = \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$$

Sustituir en

$$|\langle 1,2,2\rangle| = \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}\sin\theta$$

$$\frac{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Big\} \tan\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{1+4+4}}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = 3 \cdot 3^{-\frac{1}{2}}$$

$\tan\theta = \ldots$

$= 3^{1-\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{3}$

$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3})$

$\theta = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ El ángulo es $\theta = \frac{\pi}{3}$

BONO:

9) a) $|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2$

\# Partimos desde la siguiente propiedad.

↳ $|a \times b| = |a||b| \sin\theta$ # Elevamos al cuadrado

$\Rightarrow |a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 \sin^2\theta$

\# Propiedad pitagórica

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

\# Sustituir

$|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2(1 - \cos^2\theta)$ # Distribuyo

$|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - \underbrace{|a|^2|b|^2\cos^2\theta}_{(a \cdot b)^2}$

$\therefore \quad |a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2 \quad \square$

b) $(a - b) \times (a + b) = 2(a \times b)$ # Quiero llegar a eso

$= (a - b) \times (a + b)$

\# Propiedad distributiva

$= (a - b) \times (a + b)$

$= \cancel{(a \times a)}^{0} + (a \times b) - (b \times a) - \cancel{(b \times b)}^{0}$

$= (a \times b) - (b \times a)$

$\# \ (a \times b) = -(b \times a)$

$= (a \times b) + (a \times b)$

$\therefore \ 2(a \times b) \quad \square$

Tarea #3 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 30 de enero

Nombre:____ **Carnet:** ________________

Tema:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Puntos:	20	10	10	10	20	10	10	10	0	100
Nota:										

Resuelva las siguientes ejercicios:

1. Diga si cada expresión tiene sentido. Si no, explique por qué. En caso afirmativo, diga si la expresión es un vector ó un escalar.
   (a) (5 pts.) $(a \cdot b) \cdot c$
   (b) (5 pts.) $(a \cdot b) \times c$
   (c) (5 pts.) $(a \times b) \times c$
   (d) (5 pts.) $(a \times c) \cdot b$

2. (10 pts.) Encuentre dos vectores unitarios ortogonales a $\langle 3, 2, 1\rangle$ y $\langle -1, 1, 0\rangle$.

3. (10 pts.) Calcule el triple producto escalar entre $a = \langle 1, 2, 3\rangle$, $b = \langle 3, 2, 5\rangle$, y $c = \langle 0, 4, 3\rangle$. ¿Es $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$?

4. (10 pts.) Calcule el área del paralelogramo entre los puntos $A(1, 4, -7)$, $B(2, -1, 4)$ y $C(0, -9, 18)$.

5. Considere los puntos $P = (1, 0, 1)$, $Q = (-2, 1, 3)$ y $R = (4, 2, 5)$.
   (a) (10 pts.) Encuentre un vector no cero ortogonal al plano que contiene los tres puntos.
   (b) (10 pts.) Determine el área del triángulo PQR.

6. (10 pts.) Encuentre el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $a = \langle 1, 2, 3\rangle$, $b = \langle -1, 1, 2\rangle$ y $c = \langle 2, 1, 4\rangle$.

7. (10 pts.) ¿Están los puntos $A(1, 4 - 7)$, $B(2, -1, 4)$, $C(0, -9, 18)$ y $D(0, 0, 0)$ sobre el mismo plano?

8. (10 pts.) Si $(a \cdot b) = \sqrt{3}$ y $(a \times b) = \langle 1, 2, 2\rangle$ encuentre el ángulo entre a y b.

9. **BONO: (10 pts.)** Utilice propiedades del producto punto y cruz para demostrar que
   (a) $\mid a \times b \mid^2 = \mid a \mid^2 \mid b \mid^2 - (a \cdot b)^2$
   (b) $(a - b) \times (a + b) = 2(a \times b)$

Propiedades del producto punto y del producto cruz

Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores y k es un escalar, entonces

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
4. $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b})$
5. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{b} = 0$
6. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$
7. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$
8. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \pm \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \pm (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$
9. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$
10. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$

Capítulo 20

Tarea #04

1) Planos $\underbrace{x+3y+2z=3}_{\hat{n}_1}$ & $\underbrace{-2x+y+3z}_{\hat{n}_2}=8$

a) Encontrar el ángulo de intersección.

$$\hat{n}_1 = \langle 1, 3, 2 \rangle$$

$$\hat{n}_2 = \langle -2, 1, 3 \rangle$$

$$\cos\theta = \frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1||\hat{n}_2|}$$

$$\cos\theta = \frac{(1\cdot -2)+(3\cdot 1)+(2\cdot 3)}{\left[\sqrt{(1)^2+(3)^2+(2)^2}\right]\left[\sqrt{(-2)^2+(1)^2+(3)^2}\right]}$$

$$= \frac{-2+3+6}{\left(\sqrt{1+9+4}\right)\left(\sqrt{4+1+9}\right)}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{7}{}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{7}{14}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$ ✓

B) Recta de intersección:

Resta de ecuaciones

$r = \vec{r_0} + t\underbrace{\vec{v}}_{\text{vector director}}$

$$
\begin{array}{rl}
2(x + 3y + 2z & = 3) \\
-2x + y + 3z & = 8 \\
\hline
2x + 6y + 4z & = 6 \\
-2x + y + 3z & = 8 \\
\hline
\frac{1}{7}(\emptyset x + 7y + 7z & = 14) \\
\hline
\end{array}
$$

$$y + z = 2$$

$$y = 2 - z$$

Encuentro dos puntos en común para

encontrar el vector director

Cuando $\boxed{z = \emptyset}$ $\boxed{y = 2}$ $\langle -3, 2, \emptyset \rangle$

$$x = 3 - 3(2) - 2(0)$$

$$x = 3 - 6$$

$$\boxed{x = -3}$$

Cuando $\boxed{z = 1}$ $\boxed{y = 1}$ $\langle -2, 1, 1 \rangle$

$$x = 3 - 3(1) - 2(1)$$

$$x = 3 - 3 - 2$$

$$\boxed{x = -2}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle (-2+3), (1-2), (1-\emptyset) \rangle$$

$$\vec{v} = \langle 1, -1, 1 \rangle$$

$$\vec{r}_0 = \langle -3, 2, \emptyset \rangle - t\langle 1, -1, 1 \rangle$$

✓

2) Considere: $P(-2,5,7)$ & $Q(1,3,4)$.

¿Es perpendicular $A(4,3,2)$ $B(3,-1,8)$

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (-2-1), (5-3), (7-4) \rangle$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \langle (4-3), (3+1), (2-8) \rangle$$

$$\vec{u} = \langle -3, 2, 3 \rangle$$

$$\vec{w} = \langle 1, 4, -6 \rangle$$

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{w} &= \langle -3, 2, 3 \rangle \cdot \langle 1, 4, -6 \rangle \\
&= (-3 \cdot 1) + (2 \cdot 4) + (3 \cdot -6) \\
&= -3 + 8 - 18 \\
&= -21 + 8 \\
&= -13
\end{aligned}$$

No son perpendiculares

3) Encuentre la ecuación del plano: $A(0,1,1)$ & $B(1,0,1)$ & $C(1,1,0)$:

$$\begin{aligned}
\vec{u} = \overrightarrow{AB} &= \langle (1-0), (0-1), (1-1) \rangle \\
&= \langle 1, -1, 0 \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{w} = \overrightarrow{AC} &= \langle (1-0), (1-1), (0-1) \rangle \\
&= \langle 1, 0, -1 \rangle
\end{aligned}$$

$$\hat{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \ldots$$

$$\ldots = \hat{\imath}\left[(-1 \cdot -1) - (0 \cdot 0)\right] - \hat{\jmath}\left[(1 \cdot -1) - (1 \cdot 0)\right] + \hat{k}\left[(1 \cdot 0) - (1 \cdot -1)\right]$$

$$= \hat{\imath}\left[1\right] - \hat{\jmath}\left[-1\right] + \hat{k}\left[1\right]$$

$$= \langle 1, 1, 1 \rangle$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$

$$\hat{\imath}(x - x_0) + \hat{\jmath}(y - y_0) + \hat{k}(z - z_0) = 0$$

$$1(x-1) + 1(y-1) + 1(z-1) = 0$$

$$x - 1 + y - 1 + z - 1 = 0$$

$$\boxed{x + y + z - 3 = 0}$$

4) Encuentre la ec. del plano que pasa $Q(1,4,-7)$ & contiene a $z = 2y = 3x$

Empieza en el origen $(0,0,0)$ ¿es porque si

$z=0 \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 0$

$z = 2y$

$z = 3x$ $\quad \vec{w} = \underbrace{\left\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \right\rangle}_{\text{El recíproco}}$

$P(0,0,0)$
$Q(1,4,-7)$

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (1-0), (4-0), (-7-0) \rangle$$

$$\vec{u} = \langle 1, 4, -7 \rangle$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = \quad \ldots$$

$$= \hat{i}\left[\left(\tfrac{1}{2} \cdot -7\right) - (1 \cdot 4)\right] - \hat{j}\left[\left(\tfrac{1}{3} \cdot -7\right) - (1 \cdot 1)\right] + \hat{k}\left[\left(\tfrac{1}{3} \cdot 4\right) - \left(\tfrac{1}{2} \cdot 1\right)\right] =$$

$$= -\frac{15}{2}\hat{i} + \frac{10}{3}\hat{j} + \frac{5}{6}\hat{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \left\langle -\frac{15}{2}, \frac{10}{3}, \frac{5}{6} \right\rangle$$

$$= -\frac{15}{2}(x - \overbrace{x_0}^{q.x}) + \frac{10}{3}(y - \overbrace{y_0}^{q.y}) + \frac{5}{6}(z - \overbrace{z_0}^{q.z})$$

$$= -\frac{15}{2}(x-1) + \frac{10}{3}(y-4) + \frac{5}{6}(z+7)$$

5) Considere los planos:

$P_1: \; 3x + 6y - 3z = 3$

$P_2: \; 2y = x - z - 2$

$P_3: \; 4x - 12y + 5z = 8$

$P_4: \; 9y = 3x + 6z - 6$

a) ¿Paralelas?

b) ¿idénticas?

$(P_1 \& P_3) \vee (P_3 \& P_1)$:

$$\begin{aligned} 3x + 6y - 3z &= 3 \\ 4x - 12y + 5z &= 8 \end{aligned}$$

$x\left(\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right. \quad \left(\begin{smallmatrix}6\\-12\end{smallmatrix}\right. \quad \left(\begin{smallmatrix}-3\\5\end{smallmatrix}\right. \quad \left(\begin{smallmatrix}3\\8\end{smallmatrix}\right.$

no son paralelas

$(P_1 \& P_2) \vee (P_2 \& P_1)$:

$$\begin{aligned} 3x + 6y - 3z &= 3 \\ x - 2y - z &= 2 \end{aligned}$$

$\left(\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}\right. \quad \left(\begin{smallmatrix}6\\-2\end{smallmatrix}\right. \quad \left(\begin{smallmatrix}-3\\-1\end{smallmatrix}\right. \quad \left(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\right.$

no son paralelas

$(P_1 \& P_4) \vee (P_4 \& P_1)$:

$$\begin{aligned} 3x + 6y - 3z &= 3 \\ 3x - 9y + 6z &= 6 \end{aligned}$$

$\left(\begin{smallmatrix}3\\3\end{smallmatrix}\right. \quad \left(\begin{smallmatrix}6\\-9\end{smallmatrix}\right. \quad \begin{smallmatrix}-3\\6\end{smallmatrix} \quad \begin{smallmatrix}3\\6\end{smallmatrix}$

No son paralelas

$(P_2 \& P_3) \vee (P_3 \& P_2)$:

$$\begin{aligned} x - 2y - 7 &= 2 \\ 4x - 12y + 5z &= 8 \end{aligned}$$

$\left(\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\right. \quad \left(\begin{smallmatrix}-2\\-12\end{smallmatrix}\right. \quad \left(\begin{smallmatrix}-7\\5\end{smallmatrix}\right. \quad \left(\begin{smallmatrix}2\\8\end{smallmatrix}\right.$

No son paralelas

$(P_2 \& P_4) \vee (P_4 \& P_2)$:

$$\begin{aligned} x - 2y - z &= 2 \\ 3x - 9y + 6z &= 6 \end{aligned}$$

$\left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right. \quad \left(\begin{smallmatrix}-2\\-9\end{smallmatrix}\right. \quad \left(\begin{smallmatrix}-1\\6\end{smallmatrix}\right. \quad \left(\begin{smallmatrix}2\\6\end{smallmatrix}\right.$

No son paralelas

$(P_3 \& P_4) \vee (P_4 \& P_3)$:

$$\begin{aligned} 4x - 12y + 5z &= 8 \\ 3x - 9y + 6z &= 6 \end{aligned}$$

$\left(\begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}\right. \quad \left(\begin{smallmatrix}-12\\-9\end{smallmatrix}\right. \quad \left(\begin{smallmatrix}5\\6\end{smallmatrix}\right. \quad \left(\begin{smallmatrix}8\\6\end{smallmatrix}\right.$

No son paralelas

b) No hay idénticas

b)

L_1: $x = 1 + 6t$
$y = 1 - 3t$
$z = 12t + 5$

L_2: $2x - 2 = 4 - 4y = z + 1$

L_3: $x = 1 + 2t$
$y = t$
$z = 1 + 4t$

L_4: $r = \langle 3, 1, 5 \rangle + t\langle 4, 2, 8 \rangle$

a) ¿Paralelas?
b) ¿idénticas?

if (paralelas) {
verificar si son identicas,
todos tienen que ser iguales;
} else {
¬paralelas & ¬idénticas;
}

L_1 & L_3:

L_1: $x = 1 + 6t$
$y = 1 - 3t$
$z = 12t + 5$

L_3: $x = 1 + 2t$
$y = t$
$z = 1 + 4t$

L_1 & L_3 No son paralelas

$\mathcal{L}_1$ & $\mathcal{L}_2$:

$\mathcal{L}_1$: $x = 1 + 6t$
$y = 1 - 3t$
$z = 12t + 5$

$\mathcal{L}_2$: $t = 2x - 2 \Rightarrow x = \frac{0t + 2}{2}$
$t = 4 - 4y \Rightarrow y = \frac{4 - 0t}{4}$
$t = z + 1 \Rightarrow z = 0t - 1$

$\mathcal{L}_1$ & $\mathcal{L}_2$ son paralelas

Agarro los coheficientes (1, 1, 5)

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \\ y &= \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4} \\ z &= 5 - 1 = 4 \end{aligned}\right\} \text{No iguales}$$

$\mathcal{L}_1$ & $\mathcal{L}_2$: Son paralelas pero no iguales

$\mathcal{L}_1$ & $\mathcal{L}_4$:

$\mathcal{L}_1$: $x = 1 + 6t$
$y = 1 - 3t$

$\mathcal{L}_4$: $r = \langle 3, 1, 5 \rangle + t\langle 4, 2, 8 \rangle$
$x = 3 + 4t$

$z = 12t + 5$ | $x = 3 + 4t$

$y = 1 + 2t$

$z = 5 + 8t$

$\mathcal{L}_1$ & $\mathcal{L}_4$ no son paralelas.

$\mathcal{L}_3$ & $\mathcal{L}_4$:

$\mathcal{L}_3$: $x = 1 + 2t$

$y = t$

$z = 1 + 4t$

$\mathcal{L}_4$: $r = \langle 3, 1, 5\rangle + t\langle 4, 2, 8\rangle$

$x = 3 + 4t$

$y = 1 + 2t$

$z = 5 + 8t$

de $\mathcal{L}_3$ extraigo pt. $(1, 0, 1)$

$x = 3 + 4 = 7$

$y = 1 + 0 = 1$

$z = 5 + 8 = 13$

$\mathcal{L}_3$ & $\mathcal{L}_4$ son paralelas pero no iguales

---

$\mathcal{L}_3$ & $\mathcal{L}_2$:

$\mathcal{L}_2$: $x = \dfrac{t + 2}{2}$

$y = \dfrac{4 - t}{4}$

$z = t - 1$

$\mathcal{L}_4$: $x = 3 + 4t$

$y = 1 + 2t$

$z = 5 + 8t$

...lelas.

L_3 & L_2 no son para...

7) a)

L_1 : $x = 3 + 2t$
$y = 4 - t$
$z = 12t + 5$

L_2 : $x = 1 + 4s$
$y = 3 - 2s$
$z = 4 + 5s$

L_1 : $(3, 4, 1) + t(2, -1, 3)$ $\quad \vec{v} = \langle 2, -1, 3 \rangle$

L_2 : $(1, 3, 4) + s(4, -2, 5)$ $\quad \vec{u} = \langle 4, -2, 5 \rangle$

a.1) ¿Paralelas?

$$\underbrace{\vec{u} = k\vec{v}}_{\text{Para ser paralelas}}$$

$$(4, -2, 5) = k(2, -1, 3)$$

$4 = 2k \Rightarrow k = 2$
$-2 = -1k \Rightarrow k = 2$
$5 = 3k \Rightarrow k = 5/3$

$\therefore$ No son vectores paralelos

a.2) ¿Pts en común?

Tarea #3 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 06 de febrero

Nombre:____ **Carnet:** ________________

Tema:	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Puntos:	20	10	10	10	15	15	20	0	100
Nota:									

1. Considere los planos $x + 3y + 2z \;=\; 3 \quad \& \quad -2x + y + 3z \;=\; 8.$
   (a) (10 pts.) Encuentre el ángulo de intersección entre los dos planos.
   (b) (10 pts.) Encuentre la recta de intersección entre los dos planos.

2. (10 pts.) Considere la recta que pasa por $(-2, 5, 7)$ y $(1, 3, 4)$. ¿Es perpendicular a la recta que pasa por $(4, 3, 2)$ y $(3 - 1, 8)$?

3. (10 pts.) Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ y $(1, 1, 0)$.

4. (10 pts.) Encuentre una ec. del plano que pasa por $(1, 4, -7)$ y contiene a la recta $z = 2y = 3x$.

5. Considere los planos.

$$P_1 : \; 3x + 6y - 3z = 3 \qquad\qquad P_2 : \; 2y = x - z - 2$$
$$P_3 : \; 4x - 12y + 8z = 8 \qquad\qquad P_4 : \; 9y = 3x + 6z - 6$$

   (a) (05 pts.) ¿Cuáles de los siguientes cuatro planos son paralelos.
   (b) (10 pts.) ¿Cuáles de ellos son idénticos?

6. Considere las rectas.

$$L_1 : \; x = 1 + 6t, \; y = 1 - 3t, \; z = 12t + 5 \qquad\qquad L_2 : \; 2x - 2 = 4 - 4y = z + 1$$
$$L_3 : \; x = 1 + 2t, \; y = t, \quad z = 1 + 4t \qquad\qquad L_4 : \; \mathbf{r} = \langle 3,\; 1,\; 5\rangle + t\langle 4, 2, 8\rangle$$

   (a) (05 pts.) ¿Cuáles de los siguientes cuatro rectas son paralelas.
   (b) (10 pts.) ¿Cuáles de ellas son idénticas?

7. Determine si el par de rectas dadas son paralelas, oblicuas o se cortan.
   (a) (10 pts.) $L_1 : \; x = 3 + 2t, \; y = 4 - t, \; z = 1 + 3t,$ $\qquad L_2 : \; x = 1 + 4s, \; y = 3 - 2s, \; z = 4 + 5s$
   (b) (10 pts.) $L_1 : \; x - 1 = 1 - y = \dfrac{z}{2},$ $\qquad L_2 : \; z = 0, \quad 2 - x = y$

8. **(10 pts.)** Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por el punto $(0, 1, 2)$, es perpendicular a la recta $x = 1 + t, \; y = 1 - t, \; z = 2t$ y corta a esta recta.

Capítulo 21

Tarea #05

TAREA #5 - DAVID CORZO - 20190432 - 2020-02-10

1.a) $r = \left\langle 3e^{-t}, \dfrac{\sin^2(\pi t)}{t}, \tan(2\pi t) \right\rangle$

¿Continua en $t = 0$?

$$\lim_{a \to 0} (r) = \left\langle \underbrace{\lim_{a \to 0} \left(3e^{-t}\right)}_{f(t)}, \underbrace{\lim_{a \to 0} \left(\frac{\sin^2(\pi t)}{t}\right)}_{g(t)}, \underbrace{\lim_{a \to 0} \left(\tan(2\pi t)\right)}_{h(t)} \right\rangle$$

$$\lim_{a \to 0} \left(f(t)\right) = \lim_{a \to 0} \left(3e^{-t}\right)$$

$$= 3e^{-0}$$

$$= 3$$

$$\lim_{a \to 0} \left(g(t)\right) = \lim_{a \to 0} \left(\frac{\sin^2(\pi t)}{t}\right) \qquad \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{LH}{=} \lim_{a \to 0} \left(\frac{2\sin(\pi t) \cdot \cos(\pi t) \cdot \pi}{1}\right)$$

$$= \lim_{a \to 0} \left(2\sin(\pi t) \cos(\pi t) \cdot \pi\right)$$

$$= 2\sin(\pi \cdot 0) \cos(\pi \cdot 0) \cdot \pi = 0$$

$$\lim_{a \to 0} \left(h(t)\right) = \lim_{a \to 0} \left(\tan(2\pi t)\right)$$

$$= \tan(2\pi \cdot 0) = 0$$

$$\lim_{a \to 0} (r) = \langle 3, 0, 0 \rangle$$

Discontinuidad

$$r(0) = \left\langle 3 \;,\; \frac{0}{0} \;,\; 0 \right\rangle$$

$\therefore$ No es continua en $t = 0$ ya que $\lim_{a \to 0} (r) \neq r(0)$

1.b) $$\lim_{a \to 1} (r) = \lim_{a \to 1} \left(\left\langle \underbrace{3e^{-t}}_{f(t)}, \underbrace{\frac{\sin^2(\pi t)}{t}}_{g(t)}, \underbrace{\tan(2\pi t)}_{h(t)} \right\rangle \right)$$

$$\lim_{a \to 1} (f(t)) = \lim_{a \to 1} (3e^{-t})$$

$$= 3e^{-1} = \frac{3}{e}$$

$$\lim_{a \to 1} (g(t)) = \lim_{a \to 1} \left(\frac{\sin^2(\pi t)}{t} \right)$$

$$= \frac{\sin^2(\pi)}{1} = \sin^2(\pi) = 0$$

$$\lim_{a \to 1} (h(t)) = \lim_{a \to 1} (\tan(2\pi t))$$

$$= \tan(2\pi) = 0$$

$$\lim_{a\to 1}(r) = \left\langle \frac{3}{e}, 0, 0 \right\rangle$$

$$r(1) = \left\langle \frac{3}{e}, 0, 0 \right\rangle$$

Sí es continua en $t = 1$ ya que

$$\lim_{a\to 1}(r) = r(0)$$

2) Determine el límite de las sigs funciones.

2a) $$\lim_{t\to 0}\left(\left\langle \underbrace{e^{-3t}}_{f(t)}, \underbrace{\frac{t^2}{\sin^2(t)}}_{g(t)}, \underbrace{\cos(2t)}_{h(t)} \right\rangle\right)$$

$$\lim_{a\to 0}(f(t)) = \lim_{a\to 0}\left(e^{-3t}\right)$$

$$= e^{-3\cdot 0} = e^0 = \boxed{1}$$

$$\lim_{a\to 0}(g(t)) = \lim_{a\to 0}\left(\frac{t^2}{\sin^2(t)}\right) \leftarrow \frac{0}{0} \text{ indef.}$$

$$\overset{LH}{=} \lim_{a\to 0}\left(\frac{\cancel{2}t}{\cancel{2}\sin(t)\cos(t)}\right) \leftarrow \frac{0}{0} \text{ indef}$$

$f'g + fg'$ $$\overset{LH}{=} \lim_{a\to 0}\left(\frac{1}{\cos^2(t) - \sin^2(t)}\right)$$

$$= \frac{1}{1^2 - 0} = \boxed{1}$$

$$\lim_{a\to 0}(h(t)) = \lim_{a\to 0}\left(\cos(2t)\right)$$

$$= \boxed{1}$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\left\langle e^{-3t}, \frac{t^2}{\sin^2(t)}, \cos(2t)\right\rangle\right) = \langle 1, 1, 1\rangle$$

2 b) $$\lim_{t\to\infty}\left(\left\langle \underbrace{\frac{1+t^2}{1-t^2}}_{f(t)}, \underbrace{\arctan(t)}_{g(t)}, \underbrace{\frac{1-e^{-2t}}{t}}_{h(t)}\right\rangle\right)$$

$$\lim_{a\to\infty}(f(t)) = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right) \leftarrow \frac{\infty}{\infty}$$

$$\overset{LH}{=} \lim_{a\to\infty}\left(\frac{0+2t}{0-2t}\right)$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(\frac{2t}{-2t}\right) = \boxed{-1}$$

$$\lim_{a\to\infty}(g(t)) = \lim_{a\to\infty}\left(\arctan(t)\right)$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{a\to\infty}(h(t)) = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1-e^{-2t}}{t}\right) \leftarrow \frac{1^{\infty}}{\infty}$$ algo así

$$\overset{LH}{=} \lim_{a\to\infty}\left(\frac{-e^{-2t}\cdot -2}{1}\right)$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(e^{-2t}\right) = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{e^{2t}}\right) \leftarrow \frac{1}{\infty} \to 0$$

$$= \boxed{0}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\left\langle \frac{1+t^2}{1-t^2},\ \arctan(t),\ \frac{1-e^{-2t}}{t}\right\rangle\right) = \left\langle -1, \frac{\pi}{2}, 0\right\rangle$$

3) $r = \langle \sin(2t),\ t^2,\ \cos(2t)\rangle$

a) $r'(t)$

$$r'(t) = \langle 2\cos(2t),\ 2t,\ -\sin(2t)\cdot 2\rangle$$

b) $r''(t)$

$$r''(t) = \langle -4\sin(2t),\ 2,\ -\cos(2t)\cdot 4\rangle$$

c) $r''(t) \cdot r'''(t)$

$$r'''(t) = \langle -8\cos(2t),\ 0,\ \sin(2t)\cdot 8\rangle$$

$$= \langle -4\sin(2t),\ 2,\ -4\cos(2t)\rangle \cdot \langle -8\cos(2t),\ 0,\ 8\sin(2t)\rangle$$

$$= [-4\sin(2t)\cdot -8\cos(2t)] + [2\cdot 0] + [-4\cos(2t)\cdot 8\sin(2t)]$$

$$= 32\sin(2t)\cos(2t) - 32\sin(2t)\cos(2t)$$

$$= \boxed{0}$$

d) $r''(t) \times r'(t)$

$$r''(t) = \langle -4\sin(2t),\ 2,\ -\cos(2t)\cdot 4 \rangle$$

$$r'(t) = \langle 2\cos(2t),\ 2t,\ -\sin(2t)\cdot 2 \rangle$$

$$r''(t) \times r'(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -4\sin(2t) & 2 & -4\cos(2t) \\ 2\cos(2t) & 2t & -2\sin(2t) \end{vmatrix} = \ldots$$

$$\ldots = \hat{i}\left[(2)(-2\sin(2t)) - (2t)(-4\cos(2t))\right] -$$

$$\hat{j}\left[(-4\sin(2t))(-2\sin(2t)) - (2\cos(2t))(-4\cos(2t))\right] +$$

$$\hat{k}\left[(-4\sin(2t))(2t) - (2\cos(2t))(2)\right] =$$

$$= \hat{i}\left[-4\sin(2t) + 8t\cos(2t)\right] -$$

$$\hat{j}\left[8\sin^2(2t) + 8\cos^2(2t)\right] +$$

$$\hat{k}\left[-8t\sin(2t) - 4\cos(2t)\right]$$

$$= \langle -4\sin(2t) + 8t\cos(2t),\ -8,\ -8t\sin(2t) - 4\cos(2t) \rangle$$

4) $x = t$ $\qquad$ $P(0,1,0)$

$y = e^{-t}$

$z = 2t - t$

Encontramos t

x: $t = 0 \Rightarrow t = 0$

y: $e^{-t} = 1 \Rightarrow t = 0$

z: $2t - t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$

Armamos $\vec{r}$

$\vec{r}(t) = \langle t, e^{-t}, 2t - t^2 \rangle$

$\vec{r}(0) = \langle 0, 1, 0 \rangle$

Deriuamos:

$\vec{r}'(t) = \langle 1, -e^{-t}, 2 - 2t \rangle$

$\vec{r}'(0) = \langle 1, -1, 2 \rangle$

Armamos la fórmula de recta tangente a vector:

$$\vec{r}_T = \vec{r}(a) + t\,\vec{r}'(a)$$

$a = 0$

$$\vec{r}_T = \langle 0, 1, 0 \rangle + t\langle 1, -1, 2 \rangle$$

Ecs. Paramétricas:

$x = 0 + 1t$

$y = 1 - 1t$

$z = 0 + 2t$

5) $r_1 = \langle \sin(t), t^2, t^4 \rangle$

$r_2 = \langle \sin(t), \sin(2t), t^3 \rangle$

$\vec{r}_1'(t) = \langle \cos(t), 2t, 4t^3 \rangle$

$\vec{r}_1'(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle$

$\vec{r}_2'(t) = \langle \cos(t), 2\cos(2t), 3t^2 \rangle$

$$\vec{r}_2'(0) = \langle 1, 2, 0 \rangle$$

Evaluar el ángulo:

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle 1, 0, 0 \rangle \cdot \langle 1, 2, 0 \rangle}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{1 + 0 + 0}{1 \cdot \sqrt{5}}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

Tarea #5 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 13 de febrero

Nombre:____ **Carnet:** ________________

Tema:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	10	20	30	20	20	100
Nota:						

1. Analice si la función $\mathbf{r} = \left\langle 3e^{-t}, \dfrac{\sin^2(\pi t)}{t}, \tan(2\pi t) \right\rangle$ es continua en:
   (a) (6 pts.) $t = 0$
   (b) (4 pts.) $t = 1$

2. Determine el límite de las siguientes funciones
   (a) (10 pts.) $\lim\limits_{t\to 0} \left\langle e^{-3t}, \dfrac{t^2}{\sin^2(t)}, \cos(2t) \right\rangle$
   (b) (10 pts.) $\lim\limits_{t\to \infty} \left\langle \dfrac{1+t^2}{1-t^2}, \arctan(t), \dfrac{1-e^{-2t}}{t} \right\rangle$

3. Dada $\mathbf{r}(t) = \langle \sin(2t), t^2, \cos(2t) \rangle$, encuentre:
   (a) (5 pts.) $r'(t)$
   (b) (8 pts.) $r''(t)$
   (c) (8 pts.) $r''(t) \cdot r'''(t)$
   (d) (9 pts.) $r'' \times r'(t)$

4. (20 pts.) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva $x = t,\ y = e^{-t},\ z = 2t - t^2$ en el punto $(0, 1, 0)$.

5. (20 pts.) Las curvas $\mathbf{r}_1 = \langle \sin t, t^2, t^4 \rangle$ y $\mathbf{r}_2 = \langle \sin t, \sin(2t), t^3 \rangle$ se cortan en el origen. Encuentre el coseno del ángulo de intersección entre las dos rectas tangentes a $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$.

Capítulo 22

Tarea #06

1) Evalúe las integrales:

a) $$\int_0^1 \left(\underbrace{\frac{4}{1+t^2}}_{f(t)} \hat{j} + \underbrace{\frac{2t}{1+t^2}}_{g(t)} \hat{k} \right) dt$$

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \left(\frac{4}{1+t^2}\right) dt$$

1

$$= 4 \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

$$= 4 \arctan(t) \Big|_0^1$$

$$= 4 \left\{ \arctan(1) - \arctan(0) \right\}$$

$$= 4 \left\{ \frac{\pi}{4} - 0 \right\} = \boxed{\pi}$$

$$\int_0^1 g(t)\,dt = \int_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt$$

$$u = 1 + t^2$$
$$du = 2t\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{du}{u}\right)$$

$$= \ln|1+t^2| \Big|_0^1$$

$$= \{ \ln(2) - \cancel{\ln(1)}^{0} \} = \boxed{\ln(2)}$$

$$\therefore \left\langle 0, \pi, \ln(2) \right\rangle$$

b) $$\int^{\frac{\pi}{2}} \Big(3\sin^2(t)\cos(t)\hat{\imath} + 3\sin(t)\cos^2(t)\hat{j} + 2\sin(t)\cos(t)\hat{k} \Big)\, dt$$

$$\int_0 \Big(\underbrace{\qquad\qquad}_{f(t)} \underbrace{\qquad\qquad}_{g(t)} \underbrace{\qquad\qquad}_{h(t)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos(t)\,dt$$

$$u = \sin(t)$$
$$du = \cos(t)\,dt$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2\,du$$

$$= \frac{3}{3}u^3 = \sin^3(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left\{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin^3(0)\right\}$$

$$= \boxed{1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\sin(t)\cos^2(t)\Big)\,dt$$

$$u = \cos(t)$$
$$-du = \sin(t)\,dt$$

$$= -3\int_{u(0)}^{u(\frac{\pi}{2})} u^2\,du$$

$$= -\frac{3}{3}u^3 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0)\right\}$$

$$= -\{0 - 1\} = \boxed{1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t)\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\sin(t)\cos(t)\Big)\,dt$$

$$u = \sin(t)$$
$$du = \cos(t)\,dt$$

$$= 2\int_{u(0)}^{u(\frac{\pi}{2})} u\,du$$

$$= u^2\Big|^{u(\frac{\pi}{2})=1} = \{1^2 - 0\} = \boxed{1}$$

$|u(0)=0 \quad (\qquad)$

$$\therefore \left\langle 1,\ 1,\ 1 \right\rangle$$

3) $$\int \left(\underbrace{t e^t \hat{\imath}}_{f(t)} + \underbrace{t^2 \ln(t)\, \hat{\jmath}}_{g(t)} + \underbrace{\frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}} \hat{k}}_{h(t)} \right) dt$$

$$\int f(t)\,dt = \int \underbrace{t e^t}\, dt$$

$$u = t \qquad dv = e^t\,dt$$
$$du = dt \qquad v = e^t$$

$$= t e^t - \int e^t\,dt$$

$$= \boxed{t e^t - e^t + C_1}$$

$$\int g(t)\,dt = \int t^2 \ln(t)\,dt$$

$$u = \ln(t) \qquad dv = t^2\,dt$$
$$du = \frac{1}{t}\,dt \qquad v = \frac{1}{3}t^3$$

$$= \ln(t) \cdot \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}\int \frac{t^3}{t}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3 \ln(t) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} t^3 + C_2$$

$$\boxed{= \frac{1}{3}t^3 \ln(t) - \frac{1}{9}t^3 + C_2}$$

$$\int h(t)\,dt = \int \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}\,dt$$

$$u = e^t$$
$$du = e^t\,dt$$

$$\int \frac{du}{\quad}$$

$$= \int \frac{\ }{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \arcsin(u) + C_3$$

$$\boxed{= \arcsin(e^t) + C_3}$$

$$\therefore \left\langle te^t - e^t + C_1,\ \frac{1}{3}t^3\ln(t) - \frac{1}{9}t^3 + C_2,\ \arcsin(e^t) + C_3 \right\rangle$$

---

2) Dada la posición $r(t) = t\hat{\imath} + \sin(3t)\hat{\jmath} + \cos(3t)\hat{k}$

a) Encuentre la función de velocidad:

$$r'(t) = v(t) = \hat{\imath} + \cos(3t)\cdot 3\,\hat{\jmath} + \sin(3t)\cdot 3\,\hat{k}$$

b) Encuentre la función de aceleración:

$$r''(t) = a(t) = 0\hat{\imath} - 3\sin(3t)\cdot 3\,\hat{\jmath} + 3\cdot 3\cos(3t)\,\hat{k}$$

c) Encuentre la función de rapidez:

$$|v(t)| = \sqrt{(1)^2 + (3\cos(3t))^2 + (3\sin(3t))^2}$$

$$= \sqrt{1 + 9\cos^2(3t) + 9\sin^2(3t)}$$

$$= \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

---

3) Dada la función de aceleración:

$$a(t) = \left\langle e^t,\ \sin(t)\cos(t),\ \frac{1}{(t+1)^2} \right\rangle$$

$$v(0) = \langle 3, -1, 2 \rangle$$

$v(0) = \langle 3, -1, 2 \rangle$

$$P(0) = \langle 0, 2, 0 \rangle$$

a) Encontrar la función de aceleración:

$$\int a(t)\,dt = v(t)$$

$$a(t) = \langle \underbrace{e^t}_{f(t)}, \underbrace{\sin(t)\cos(t)}_{g(t)}, \underbrace{\frac{1}{(t+1)^2}}_{h(t)} \rangle$$

$$\int f(t)\,dt = \boxed{e^t + C_1}$$

$$\int g(t)\,dt = \int \sin(t)\cos(t)\,dt = \boxed{\frac{1}{2}\sin^2(t) + C_2}$$

$u = \sin(t)$

$du = \cos(t)dt$

$$\int h(t)\,dt = \int \frac{1\,dt}{(t+1)^2} = \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{-2+1}u^{-2+1} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{t+1} + C_3$$

$u = t+1$

$du = 1\,dt$

$$\boxed{= -\frac{1}{t+1} + C_3}$$

$$v(t) = \langle e^t + C_1, \frac{1}{2}\sin^2(t) + C_2, -\frac{1}{t+1} + C_3 \rangle$$

Encontrar constantes

$v(0) = \langle 3, -1, 2 \rangle$

$e^0 + C_1 = 3$

$1 + C_1 = 3$

$C_1 = 3 - 1$

$C_1 = 2$

$\frac{1}{2}\sin^2(0) + C_2 = -1$

$0 + C_2 = -1$

$C_2 = -1$

$$-\frac{1}{0+1} + C_3 = 2$$

$$-1 + C_3 = 2$$

$$C_3 = 2 + 1$$

$$C_3 = 3$$

función de velocidad:

$$v(t) = \left\langle e^t + 2,\ \frac{1}{2}\sin^2(t) - 1,\ -\frac{1}{t+1} + 3 \right\rangle$$

b) función posición:

$$\int v(t)\, dt = r(t)$$

$$v(t) = \langle \underbrace{e^t + 2}_{f(t)},\ \underbrace{\tfrac{1}{2}\sin^2(t) - 1}_{g(t)},\ \underbrace{-\tfrac{1}{t+1} + 3}_{h(t)} \rangle$$

$$\int f(t)\, dt = \int (e^t + 2)\, dt$$

$$\boxed{= e^t + 2t + C_1}$$

$$\int g(t)\, dt = \frac{1}{2}\int (\sin^2(t) - 1)\, dt = -\frac{1}{2}\int \cos^2(t)\, dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int (1 - \cos(2t))\, dt$$

$$\boxed{= -\frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right) + C_2}$$

$$\int h(t)\, dt = -\int \left(\frac{1}{t+1} + 3\right) dt = -\left(\ln|t+1| + 3t\right) + C_3$$

$$\boxed{= -\ln|t+1| + 3t + C_3}$$

\# Encontrar constantes

$$r(0) = \langle 0, 2, 0 \rangle$$

$$e^0 + 2(0) + C_1 = 0$$

$$1 + 0 + C_1 = 0$$

$$-\frac{1}{4}\left(0 - \frac{1}{2}\sin(2\cdot 0)\right) + C_2 = 2$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\cancel{0}^{\,0} + \frac{1}{2}\cancel{\sin(0)}^{\,0} + C_2 = 2$$

$C_2 = -1$ $\qquad$ $C_2 = 2$

$$-\ln|0+1| + 3(0) + C_3 = 0$$

$$0 + 0 + C_3 = 0$$

$$\boxed{C_3 = 0}$$

funcione posición:

$$r(t) = \left\langle e^t + 2t - 1,\ -\frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right) + 2,\ -\ln|t+1| + 3t + 0 \right\rangle$$

4) Calcule la longitud de arco de la helice circular de la ecuación vectorial:

$$r(t) = \cos(t)\hat{\imath} + \sin(t)\hat{\jmath} + t\hat{k}$$

desde el punto $(1,0,0)$ hasta el punto $(1, 0, 2\pi)$.

$$L = \int_a^b |r'(t)|\, dt$$

$$r'(t) = -\sin(t)\hat{\imath} + \cos(t)\hat{\jmath} + \hat{k}$$

$$|r'(t)| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1}$$

$$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\, t \Big|_{a=0}^{b=2\pi}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \{2\pi - 0\} = \sqrt{2} \cdot 2\pi$$

$P(1,0,0)$ & $Q(1,0,2\pi)$

$$r(t) = \langle \cos(t), \sin(t), t \rangle$$

$x = \cos(t)$ $\quad$ $\cos(t) = 1 \rightarrow t = 0$

$y = \sin(t)$ $\quad$ $\sin(t) = 0 \rightarrow t = 0$

$z = t$ $\quad$ $t = 0 \longrightarrow t = 0$

$\cos(t) = 1 \rightarrow t = 2\pi$

$\sin(t) = 0 \rightarrow t = 2\pi$

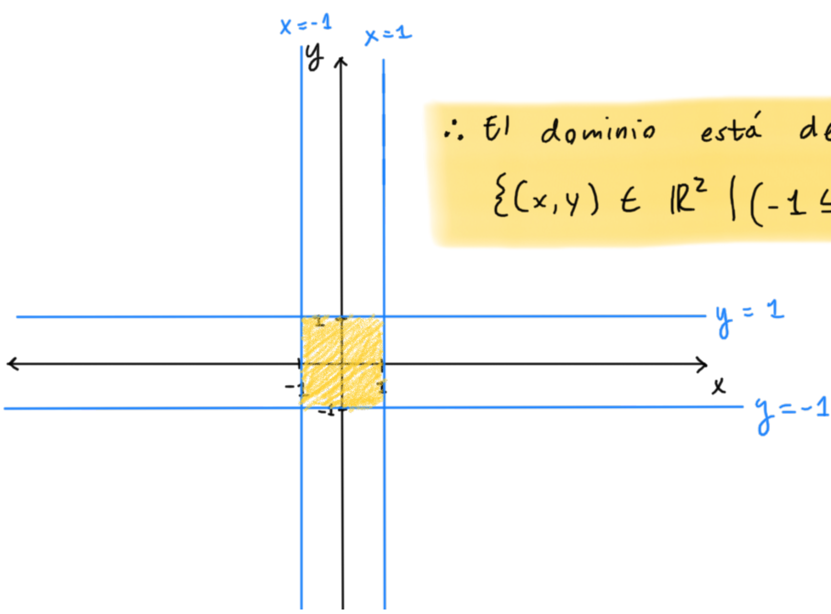
$t = 2\pi \rightarrow t = 2\pi$

5) a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}$

$$1 - x^2 \geq 0$$
$$-x^2 \geq -1$$
$$x^2 \leq 1$$
$$x \leq \pm 1$$
$$-1 \leq x \leq 1$$

$$1 - y^2 \geq 0$$
$$-y^2 \geq -1$$
$$y^2 \leq 1$$
$$y \leq \pm 1$$
$$-1 \leq y \leq 1$$

$\mathbb{D}: \mathbb{R}^2 - \{1-x^2 \leq 0\}$ & $\{1-y^2 \leq 0\}$



$\therefore$ El dominio está definido tal que:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-1 \leq x \leq 1) \ \& \ (-1 \leq y \leq 1)\}$$

b) $g(x,y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

$y - x^2 \geq \emptyset$

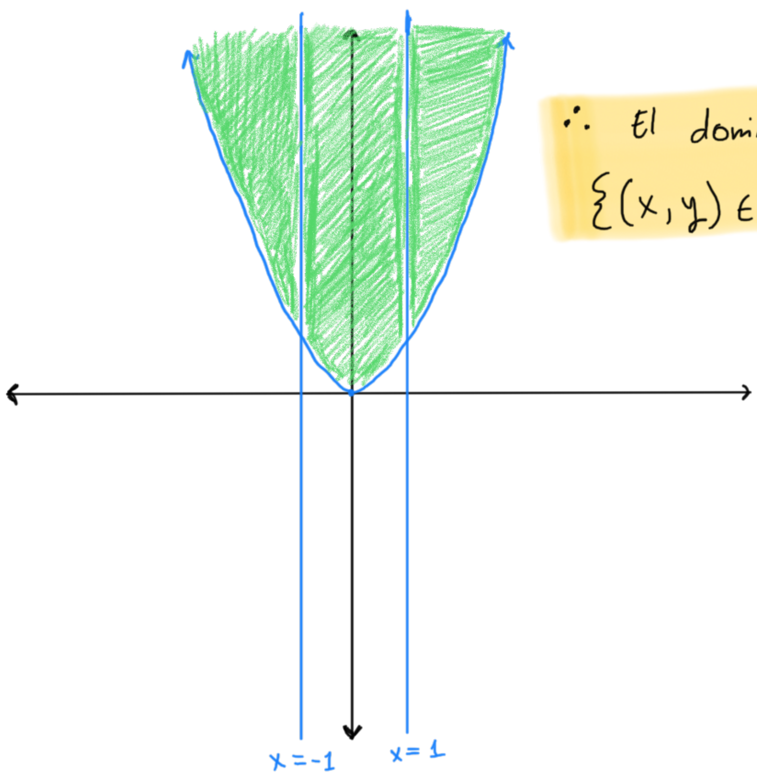
$y \geq x^2$

$1 - x^2 \neq \emptyset$

$-x^2 \neq -1$

$x^2 \neq 1$

$x \neq \pm 1$



∴ El dominio está definido tal que:

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y \geq x^2) \ \& \ (x \neq \pm 1)\}$

c) $h(x,y) = \dfrac{9}{9 - x - y}$

$9 - x - y \neq \emptyset$

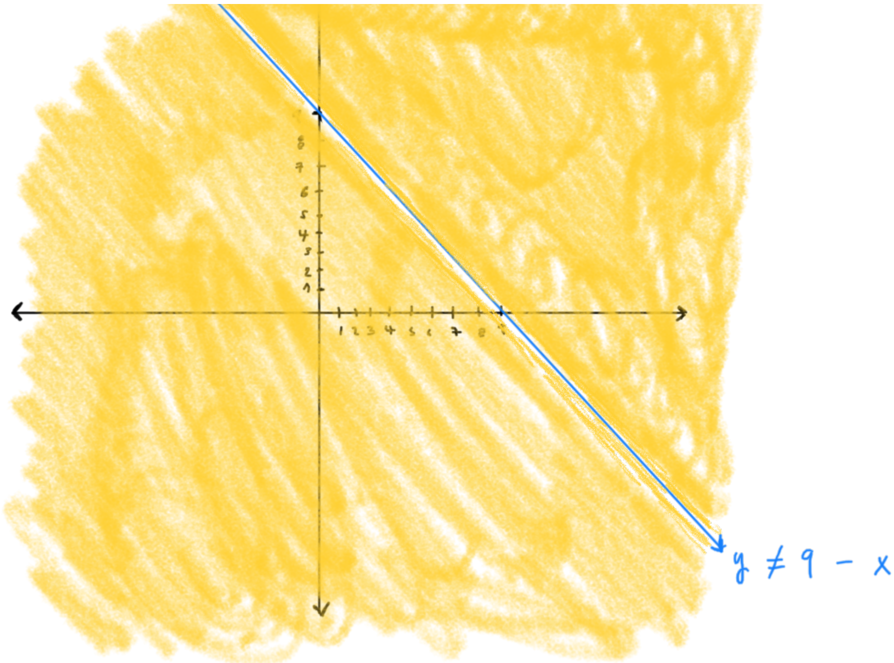
$-x - y \neq -9$

$x + y \neq 9$

$\neg(\ y = 9 - x\ )$ #excluir

∴ El dominio está definido tal que:

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y \neq 9)\}$



$y \neq 9 - x$

Tarea #6 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 20 de febrero

Nombre:____ **Carnet:** ________________

Tema:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	25	15	15	15	30	100
Nota:						

1. Evalúe las siguientes integrales:
   (a) (8 pts.) $\int_0^1 \left(\frac{4}{1+t^2} j + \frac{2t}{1+t^2} k \right) dt$
   (b) (9 pts.) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin^2(t)\cos(t) i + 3\sin(t)\cos^2(t) j + 2\sin(t)\cos(t) k) dt$
   (c) (8 pts.) $\int \left(te^t i + t^2 \ln(t) j + \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}} k \right) dt$

2. Dada la posición $\mathbf{r}(t) = ti + \sin(3t)j + \cos(3t)k$ encuentre:
   (a) (5 pts.) la función de velocidad.
   (b) (5 pts.) la función de aceleración.
   (c) (5 pts.) la función de rápidez.

3. Dada la aceleración $\mathbf{a}(t) = \langle e^t,\ \sin t \cos t,\ \frac{1}{(t+1)^2} \rangle$, la velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = \langle 3, -1, 2 \rangle$ y la posición inicial $\mathbf{r}(0) = \langle 0, 2, 0 \rangle$, encuentre:
   (a) (7 pts.) la función de velocidad.
   (b) (8 pts.) la función de posición.

4. (15 pts.) Calcule la longitud de arco de la helice circular de la ecuación vectorial $r(t) = \cos(t)i + \sin(t)ij + tk$ desde el punto $(1, 0, 0,)$ hasta el punto $(1, 0, 2\pi)$.

5. Encuentre y bosqueje el dominio de las siguientes funciones:
   (a) (10 pts.) $f(x, y) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}$
   (b) (10 pts.) $g(x, y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$
   (c) (10 pts.) $h(x, y) = \frac{9}{9-x-y}$

Capítulo 23

Tarea #08

TAREA #8 - David Corzo

1) Encontrar $\frac{dy}{dx}$

a) $y\tan^{-1}(x) = x\sin^{-1}(y) + x^2y^2$

$$\emptyset = x\sin^{-1}(y) + x^2y^2 - y\tan^{-1}(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}: \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + x^2 \cdot 2y - \tan^{-1}(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}: \sin^{-1}(y) + 2xy^2 - \frac{y}{x^2+1}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + x^2 2y - \tan^{-1}(x)}{\sin^{-1}(y) + 2xy^2 - \frac{y}{x^2+1}}$$

b) $yx + x^3\ln(y) = (x^2+y^2)^2$

$$\emptyset = (x^2+y^2)^2 - yx - x^3\ln(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = 2(x^2+y^2)\cdot 2y - x - \frac{x^3}{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 2(x^2+y^2)\cdot 2x - y - 3x^2\ln(y)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{4y(x^2+y^2) - x - \frac{x^3}{y}}{4x(x^2+y^2) - y - 3x^2\ln(y)}$$

2) Encontrar derivadas parciales de z.

a) $\sin(xy) + \cos(yz) = \cot(zx)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

$$\emptyset = \sin(xy) + \cos(yz) - \cot(zx)$$

$$F_x = \cos(xy)y + \csc^2(zx)\cdot z$$

$$F_z = -\sin(yz)\cdot y + \csc^2(zx)\cdot x$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(\frac{\cos(xy)\,y + \csc^2(zx)\,z}{-\sin(yz)\,y + \csc^2(zx)\,x}\right)}$$

$$F_y = \cos(xy)\,x - \sin(yz)\,z$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\left(\frac{\cos(xy)\,x - \sin(yz)\,z}{-\sin(yz)\,y + \csc^2(zx)\,x}\right)}$$

b) $\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2} = \dfrac{1}{x - 2y - 3z}$

$$\emptyset = \frac{1}{x - 2y - 3z} - \sqrt{x^2y^2 + y^2z^2}$$

$$= (x - 2y - 3z)^{-1} - (x^2y^2 + y^2z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$F_x = -1(x - 2y - 3z)^{-2} - \tfrac{1}{2}(x^2y^2 + y^2z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2xy^2)$$

$$F_y = -1(x - 2y - 3z)^{-2} \cdot (-2) - \tfrac{1}{2}(x^2y^2 + y^2z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2yx^2 + 2yz^2)$$

$$F_z = -1(x - 2y - 3z)^{-2} \cdot (-3) - \tfrac{1}{2}(x^2y^2 + y^2z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2zy^2)$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(\frac{\dfrac{-1}{(x-2y-3z)^2} - \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2}}}{\dfrac{3}{(x-2y-3z)^2} - \dfrac{zy^2}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2}}}\right)}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\left(\frac{\dfrac{2}{(x-2y-3z)^2} - \dfrac{yx^2 + yz^2}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2}}}{\dfrac{3}{(x-2y-3z)^2} - \dfrac{zy^2}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2}}}\right)}$$

3) Encontrar ec. plano tangente.

a) $z = \dfrac{2x + 3}{4y + 1}$ $\quad (0, 0, 0)$

$$z - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) - f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

$$f(a,b) = \frac{2(0)+3}{4(0)+1} = 3$$

$$f_x = \frac{2}{4y+1}\Big|_{(0,0)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$f_y = (2x+3)\left[-1(4y+1)^{-2} \cdot 4\right] = (2x+3)\left(\frac{-4}{(4y+1)^2}\right)\Big|_{(0,0)}$$

$$= \frac{-4(3)}{1} = -12$$

$$z = 2x - 12y + 3$$

b) $z = \sec(xy^2) \qquad \left(\frac{\pi}{3}, 1, 2\right)$

$$f\left(\frac{\pi}{3}, 1\right) = \sec\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 2$$

$$f_x = \sec(xy^2)\tan(xy^2)\,y^2\Big|_{(\frac{\pi}{3},1)} = \sec\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$$

$$f_y = \sec(xy^2)\tan(xy^2)\,2xy\Big|_{(\frac{\pi}{3},1)} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$$

$$z = 2 + 2\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}(y-1)$$

4) Encuentre la aproximación lineal.

a) $z = \frac{x}{x+y} \qquad (4, -2)$

$$L = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

$f(a,b) = 4$

$$f(a,b) = \frac{\quad}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$f_x(a,b) = \left.\frac{(x+y)+x}{(x+y)^2}\right|_{(a,b)} = \frac{2(-2)-2}{(4-2)^2} = \frac{-4-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$f_y(a,b) = -x(x+y)^{-2}\Big|_{(a,b)} = -4(4-2)^{-2} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\boxed{z = 2 - \tfrac{1}{2}(x-4) - 1(y+2)}$$

b) $z = e^{-xy}\sin(y) \qquad \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$$f(a,b) = e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)(0)}\sin(0) = 0$$

$$f_x(a,b) = -y\,e^{-xy}\sin(y)\Big|_{(a,b)} = 0$$

$$f_y(a,b) = -x\,e^{-xy}\sin(y) + e^{-xy}\cos(y)\Big|_{(a,b)} =$$

$$= \cancel{-\left(\tfrac{\pi}{2}\right)e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)(0)}\sin(0)} + 1 = 1$$

$$\boxed{z = y + 1}$$

5) Encuentre las ec. paramétricas de la recta tangente

$L_1 \rightarrow$ tangente en la dirección de x.

$L_2 \rightarrow$ tangente en la dirección de y.

a) $z = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (3,4)$

Dirección de x no hay cambio en y.

$$x = t$$

$$y = 4$$

$$z = f(t,4) = \sqrt{t^2 + 4^2}$$

$$f_x = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \Big|_{(3,4)} = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}$$

$$f_y = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y \Big|_{(3,4)} = \frac{4}{5}$$

$\vec{r}(t) = \langle t, 4, \sqrt{t^2+4} \rangle$

$\vec{r}'(t) = \left\langle 1, 0, \frac{t}{\sqrt{t^2+4}} \right\rangle$

$x = t$
$y = 4$
$z = \sqrt{t^2+4}$

$\vec{r}(3) = \langle 3, 4, \sqrt{13} \rangle$

$\vec{r}'(3) = \left\langle 1, 0, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$

$$\ell_1 = \vec{r}(x) + t\,\vec{r}'(x)$$
$$= \langle 3, 4, \sqrt{13} \rangle + t \left\langle 1, 0, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$$

direción x

$x = 3 + t$

$y = 4$

$z = \sqrt{13} + t\frac{3}{\sqrt{13}}$

Dirección de y no hay cambio en x

$$\ell_2 = \vec{r}(t) + t\,\vec{r}'(t)$$

$\vec{r}(t) = \langle 3, t, \sqrt{9+t^2} \rangle$

$\vec{r}'(t) = \left\langle 0, 1, \frac{2t}{\sqrt{9+t^2}} \right\rangle$

$x = 3$
$y = t$
$z = \sqrt{9+t^2}$

$t = 4$

$\vec{r}(4) = \langle 3, 4, 5 \rangle$

$\vec{r}'(4) = \left\langle 0, 1, \frac{8}{5} \right\rangle$

dirección y:

$x = 3$

$y = 4 + t$

$z = 5 + \frac{8}{5}t$

b) $z = 2\sin(3x - 2y) + \underbrace{4\cos^2(x+y)}_{4(\cos(x+y))^2}$ $\quad \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

$f_x = 2\cos(3x-2y)\cdot 3 + 8\cos(x+y)\sin(x+y)$

$f_y = 2\cos(3x-2y)\cdot 2 + 8\cos(x+y)\sin(x+y)$

dir. x $\quad t = \frac{\pi}{4}$

$$x = t$$
$$y = \frac{\pi}{4}$$
$$z = 2\sin\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) + 4\cos^2\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\vec{r}(t) = \left\langle t, \frac{\pi}{4}, 2\sin\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) + 4\cos^2\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right.$$
$$\vec{r}\,'(t) = \left\langle 1, 0, 2\cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right)\cdot 3 + 8\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right\rangle$$

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 2\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + 4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\rangle$$
$$= \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \sqrt{2} + \frac{3}{2}\right\rangle$$

$$\vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left\langle 1, 0, 2\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\cdot 3 + 8\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\rangle$$
$$= \left\langle 1, 0, 3\sqrt{2}\right\rangle$$

$$l_1 = \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \sqrt{2} + \frac{3}{2}\right\rangle + t\left\langle 1, 0, 3\sqrt{2}\right\rangle$$

$$x = \frac{\pi}{4} + t$$ dir x
$$y = \frac{\pi}{4}$$
$$z = \sqrt{2} + \frac{3}{2} + t\,3\sqrt{2}$$

dir y:

$t = \frac{\pi}{4}$

$$x = \frac{\pi}{4}$$
$$y = t$$
$$z = 2\sin\left(\frac{3\pi}{4} - 2t\right) + 4\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + t\right)$$

$$\vec{r}(t) = \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 2\sin\left(\frac{3\pi}{4} - 2(\pi/4)\right) + 4\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rangle$$
$$= \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right\rangle$$
$$\vec{r}(t) = \left\langle 0, 1, 2\cos\left(\frac{3\pi}{4} - 2t\right)\cdot(-2) + 8\cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right)\right\rangle$$
$$= \left\langle 0, 1, -2\sqrt{2}\right\rangle$$

$$L_2 = \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \sqrt{2} \right\rangle + t\left\langle 0, 1, -2\sqrt{2} \right\rangle$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

$$y = \frac{\pi}{4} + t$$

$$z = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,2t$$

Tarea #8   Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 05 de marzo

Nombre:____ **Carnet:** ________________

Tema:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	20	32	24	24	20	120
Nota:						

1. Encuentre dy/dx.

   (a) (10 pts.) $y\tan^{-1}(x) = x\sin^{-1}(y) + x^2y^2$

   (b) (10 pts.) $yx + x^3 \ln y = (x^2+y^2)^2$

2. Encuentre las derivadas parciales de z para las sigs. funciones implícitas.

   (a) (16 pts.) $\sin(xy) + \cos(yz) = \cot(zx)$

   (b) (16 pts.) $\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2} = \dfrac{1}{x-2y-3z}$

3. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.

   (a) (12 pts.) $z = \dfrac{2x+3}{4y+1}, \qquad (0,0,0)$

   (b) (12 pts.) $z = \sec(xy^2), \qquad \left(\dfrac{\pi}{3}, 1, 2\right)$

4. Encuentre la aproximación lineal $L(x,y)$ de la función en el punto indicado.

   (a) (12 pts.) $z = \dfrac{x}{x+y}, \qquad (\ 4, -2\ )$

   (b) (12 pts.) $z = e^{-xy}\sin(y), \qquad \left(\ \dfrac{\pi}{2},\ 0\ \right)$

5. Encuentre las ecuaciones paramétricas de las rectas tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto indicado. L_1 es la tangente en la dirección de x y L_2 es la tangente en la dirección de y.

   (a) (10 pts.) $z = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad (3,4)$

   (b) (10 pts.) $z = 2\sin^2(3x-2y) + 4\cos^2(x+y), \qquad \left(\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}\ \right)$

   Recuerde encontrar una función vectorial para encontrar la recta tangente a la superficie $z = f(x,y)$.

Dirección-x	Dirección-y
$x = t$	$x = a$
$y = b$	$y = t$
$z = f(t,b)$	$z = f(a,t)$

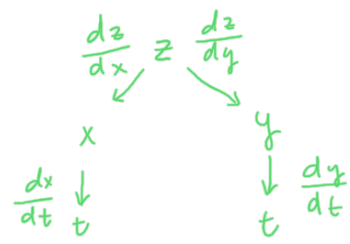
Capítulo 24

Tarea #09

1) Encuentre $\frac{\partial z}{\partial t}$

a) $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = \sin(t)$ $y = e^t$

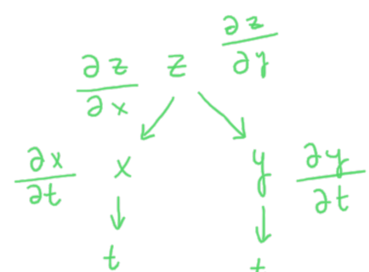
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$



$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial t} = (2x + y)\cos(t) + (2y + x)e^t}$$

b) $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $x = \ln(t)$ $y = \cos(t)$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$



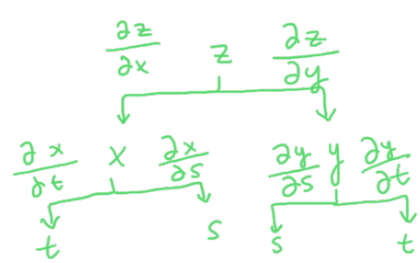
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{\cancel{2}}(1 + x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}x \bullet \frac{1}{t} + \frac{1}{\cancel{2}}(1 + x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}y \bullet(-\sin(t))$$

$$= \boxed{\frac{x}{t\sqrt{1 + x^2 + y^2}} - \frac{y\sin(t)}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}}$$

2) Encuentre $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$

a) $z = x^2 y^3$, $x = s\cos(t)$ $y = s\sin(t)$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$



$$\frac{\partial z}{\partial s} = (2xy^3)(\cos(t)) + (3y^2x^2)(\sin(t))$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial s} = 2\cos(t)\,xy^3 + 3\sin(t)\,y^2x^2}$$

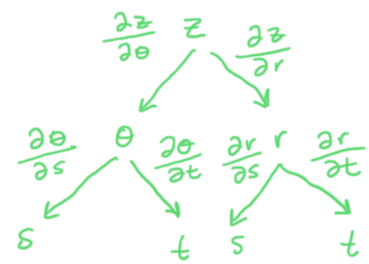
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (2xy^3)(-s\sin(t)) + (3y^2x^2)(s\cos(t))$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -2sxy^3\sin(t) + 3sy^2x^2\cos(t)$$

b) $z = e^r\cos(\theta)\sin(\phi)$, $r = st$, $\theta = \sqrt{s^2+t^2}$, $\phi = \ln[\tan(s) + \sinh(t)]$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s}$$



$$= \left(-\sin(\theta)e^r\sin(\phi)\right)\left(\frac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}\right) + \left(e^r\cos(\theta)\sin(\phi)\right)(t)$$

$$= -\frac{\sin(\theta)e^r\sin(\phi)s}{\sqrt{s^2+t^2}} + te^r\cos(\theta)\sin(\phi)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t}$$

$$= \left(-e^r\sin(\theta)\sin(\phi)\right)\left(\frac{t}{\sqrt{s^2+t^2}}\right) + \left(e^r\cos(\theta)\sin(\phi)\right)(s)$$

$$= -\frac{e^r\sin(\theta)\sin(\phi)t}{\sqrt{s^2+t^2}} + e^r\cos(\theta)\sin(\phi)s$$

3) Determine la derivada direccional de $f(x,y) = x^3y^4 + x^4y^3$ en el punto $(1,1)$ en la dirección del vector unitario $\vec{u} = \langle\cos(\theta), \sin(\theta)\rangle$ $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$D_u = \nabla f \cdot \vec{u}$$

$$f_x = 3x^2y^4 + 4x^3y^3 \Big|_{(1,1)} = 3 + 4 = 7$$

$$f_y = 4y^3x^3 + 3y^2x^4 \Big|_{(1,1)} = 4 + 3 = 7$$

$$\nabla f = \langle 7, 7\rangle$$

$$D_u = \langle 7, 7\rangle \cdot \langle\cos(\theta), \sin(\theta)\rangle$$

$= 7\cos(\theta) + 7\sin(\theta)$

$\vec{u} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2(\theta)} = 1$

$\vec{u} = \langle \cos(\theta), \sin(\theta) \rangle$

4) Encuentre la razon de cambio de $f(x,y,z) = e^{x-1}\sin(y) + (x+1)^2 \ln(z+1)$ en el punto $(1, \frac{\pi}{3}, 0)$ en la dirección del vector $\vec{v} = \langle -1, 4, -8 \rangle$

$$D_u f(1, \tfrac{\pi}{3}, 0) = \nabla f(1, \tfrac{\pi}{3}, 0) \cdot \vec{v}$$

$$\nabla f(x,y,z) = \left\langle e^{x-1}\sin(y) + 2(x+1)\ln(z+1),\ e^{x-1}\cos(y),\ \frac{(x+1)^2}{z+1} \right\rangle$$

$$\nabla f(1, \pi/3, 0) = \left\langle e^0 \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) + \cancel{4\ln(1)}^{0},\ e^0\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right),\ \frac{4}{1} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 4 \right\rangle$$

$$\vec{v} = \frac{1}{9}\langle -1, 4, -8 \rangle$$

$$D_u f(1, \tfrac{\pi}{3}, 0) = \left\langle -\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{9} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 4 \right\rangle$$

$$= \left(-\frac{1}{9}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{8}{9}\right)\left(\frac{4}{1}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{18} + \frac{2}{9} - \frac{32}{9} = -\frac{\sqrt{3}}{18} - \frac{10}{3}$$

5) Dada la función:

$$f(x,y) = \sin(2x + 3y)$$

a) Determine el gradiente de f.

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$$

$f_x = 2\cos(2x + 3y)$

$$f_y = 3\cos(2x+3y)$$

$$\boxed{\nabla f = \left\langle 2\cos(2x+3y),\ 3\cos(2x+3y) \right\rangle}$$

b) Evalúe el gradiente en el pt. $P(-6\pi, 4\pi)$

$$\nabla f(-6\pi, 4\pi) = \left\langle 2\cos(-12\pi + 12\pi),\ 3\cos(-12\pi + 12\pi) \right\rangle$$

$$= \left\langle 2\cancel{\cos(0)}^{1},\ 3\cancel{\cos(0)}^{1} \right\rangle = \boxed{\langle 2, 3 \rangle}$$

c) Encuentre la razón de cambio de f en P en la dirección del vector $u = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,\hat{\imath} - \hat{\jmath}\right)$.

$$\vec{u} = \underbrace{\frac{1}{2}\left\langle \sqrt{3}, -1 \right\rangle}_{1?}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3+1} = 1 \checkmark$$

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u}$$

$$= \langle 2, 3 \rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = (2)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (3)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{= \sqrt{3} - \frac{3}{2}}$$

Tarea #9 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 12 de marzo

Nombre:____ **Carnet:** ________________

Tema:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	20	20	20	20	20	100
Nota:						

1. Encuentre $\dfrac{dz}{dt}$.

   (a) (10 pts.) $z = x^2 + y^2 + xy, \qquad x = \sin t, \quad y = e^t$

   (b) (10 pts.) $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \quad x = \ln t, \quad y = \cos t$

2. Encuentre $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

   (a) (10 pts.) $z = x^2 y^3, \qquad x = s\cos t, \quad y = s\sin t$

   (b) (10 pts.) $z = e^r \cos\theta \sin(\phi), \qquad r = st, \quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}, \quad \phi = \ln[\ \tan(s) + \sinh(t)\ ]$

3. (20 pts.) Determine la derivada direccional de $f(x, y) = x^3y^4 + x^4y^3$ en el punto $(1, 1)$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \langle \cos\theta,\ \sin\theta \rangle, \quad \theta = \pi/6$.

4. (20 pts.) Encuentre la razón de cambio de $f(x, y, z) = e^{x-1}\sin y + (x + 1)^2 \ln(z + 1)$ en el punto $(1, \pi/3, 0)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = \langle -1, 4, -8 \rangle$.

5. Dada la función $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$.

   (a) (10 pts.) Determine el gradiente de f .

   (b) (05 pts.) Evalúe el gradiente en el punto $P(-6\pi,\ 4\pi)$.

   (c) (05 pts.) Encuentre la razón de cambio de f en P en la dirección del vector $u = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}i - j\right)$.

Capítulo 25

Tarea #10

TAREA #10 - DAVID CORZO

1.a) $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 3$

$$f_x = 4x + 2y - 2$$

$$4x + 2y - 2 = 0$$
$$4x + 2y = 2$$
$$y = \frac{1}{2}(2 - 4x)$$
$$y = 1 - 2x$$
$$y = 1 - 2(1)$$
$$y = -1$$

$$f_y = 2x + 2y$$

$$2x + 2y = 0$$
$$2x + 2(1-2x) = 0$$
$$2x + 2 - 4x = 2$$
$$\cancel{-}2x = \cancel{-}2$$
$$x = 1$$

Punto crítico en $y = -1$ $x = 1$

$f_{xx} = 4$ $f_{yy} = 2$

$f_{xy} = 2$ $f_{yx} = 2$

$$f(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (4)(2) - (2)(2) = 4$$

$$f(1,-1) = 2(1)^2 + 2(1)(-1) + (-1)^2 - 2(1) - 3$$
$$= \cancel{2 - 2} + 1 - 2 - 3$$
$$= -4$$

Mínimo en $f(1,-1) = -4$

1.b) $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$g_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad g_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$x = 0$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$y = 0$$

$$g_{xx} = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} - \left[\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x\right] x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \Bigg|_{(0,0)} = \text{indef.}$$

$$g_{yy} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \Bigg|_{(0,0)} = \text{indef.}$$

$$g_{xy} = -\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cancel{2}y\,x$$

$$= -\frac{y\,x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$g_{yx} = -\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cancel{2}x\,y$$

$$= -\frac{x\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \text{indef}$$

$$-\frac{y\,x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$= \text{indef.}$$

$$x = 0$$

$$y = 0$$

Hay punto de silla por que se indefinen todos los componentes de $D(x,y)$.

$\therefore$ No hay mínimo ni máximo

2. a.) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{1}{3}} + 2$

$$f_x = \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{-\frac{4}{3}} \cdot 2x \qquad f_y = \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{-\frac{4}{3}} \cdot 2y$$

$$= \frac{2x}{3(x^2+y^2)^{4/3}} \qquad = \frac{2y}{3(x^2+y^2)^{4/3}}$$

$$\frac{2x}{3(x^2+y^2)^{4/3}} = 0 \qquad \frac{2y}{3(x^2+y^2)^{4/3}} = 0$$

$$2x = 0 \qquad 2y = 0$$

$$x = 0 \qquad y = 0$$

$\therefore$ El punto $(0,0)$ es un punto de silla.

2.b) $g(x,y) = x^2 - 3xy - y^2$

$g_x = 2x - 3y$ $\quad$ $g_y = -3x - 2y$

$2x - 3y = 0$ $\quad$ $-3x - 2y = 0$

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 5$$

Punto mínimo en 0

3) $P(L,K) = 2LK - 3K^2 - 2L^2 - 2L + 21K$

$P_L = 2K - 4L - 2$ $\quad$ $P_K = 2L - 6K + 21$

$2K - 4L - 2 = 0$ $\quad$ $2L - 6K + 21 = 0$

$L = 1{,}500$ $\quad$ $K = 4{,}000$

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 20$$

máximo en
$L = 1{,}500$ & $K = 4{,}000$

4)

$q_A = 100 - 5x - 2y$ $\quad$ $q_B = 250 - 3x - 5y$

$u = x q_A + y q_B - 20 q_A - 10 q_B$

$U = x(100 - 5x - 2y) + y(250 - 3x - 5y) - 20(100 - 5x - 2y) - 10(250 - 3x - 5y)$

$u = -5x^2 - 5y^2 - 5xy + 230x + 340y - 4{,}500$

$U_x = -10x - 5y + 230$ $\quad$ $U_y = -10y - 5x + 340$

$-10x - 5y + 230 = 0$ $\quad$ $-10y - 5x + 340 = 0$

$x = 8$ $\quad$ $y = 30$

$$u(x,y) = \begin{vmatrix} -10 & -5 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} = 75$$

Precios de venta maximos $x = 8 \quad y = 30$

6) • función de producción

$$P(L,K) = 118L + 20K + 3LK - L^2 - 2K^2$$

• L: mano de obra
• K: Capital utilizado
• P: nivel de producción

• Costos unitarios:
$L = 80$
$K = 160$

• Presupuesto:
$5640

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$P_L = \lambda g_L \qquad P_L = 118 + 3K - 2L$

$P_K = \lambda g_K \qquad g_L = 80$

$P_K = 20 + 3L - 4K$

$g_K = 160$

$118 + 3K - 2L = 80\lambda \qquad 20 + 3L - 4K = 160\lambda$

$\frac{1}{80}(118 + 3K - 2L) = \lambda \qquad \frac{1}{160}(20 + 3L - 4K) = \lambda$

$$\frac{1}{80}(118 + 3K - 2L) = (20 + 3L - 4K)\frac{1}{160}$$

$$160(118 + 3K - 2L) = (20 + 3L - 4K)80$$

$$18{,}880 + 480K - 320L = 1600 + 240L - 320K$$

$$18{,}880 - 1{,}600 = 240L + 320L - 320K + 480K$$

$$17{,}280 = 560L - 160K$$

$$\frac{17{,}280 + 160K}{560} = L$$

$$80L + 160K = 5{,}640$$

$$80\left(\frac{17{,}280 + 160K}{560}\right) + 160K = 5{,}640$$

$$\frac{80 \cdot 17{,}280}{560} + \frac{80 \cdot 160K}{560} + 160K = 5640$$

$$\frac{160}{7}K + 160K = 5640 - \frac{80 \cdot 17{,}280}{560}$$

$$\frac{1280}{7}K = \frac{22{,}200}{7}$$

$$K = \frac{\cancel{7} \cdot 22{,}200}{\cancel{7} \cdot 1280}$$

$$K = \frac{555}{32}$$

$$80L + 160\left(\frac{555}{32}\right) = 5{,}640$$

$$L = \frac{5{,}640 - 160\left(\frac{555}{32}\right)}{80}$$

$$L = \frac{573}{16}$$

maximiza en $K = \frac{555}{32}$

& $L = \frac{573}{16}$

Tarea #10, Cálculo Multivariable

Entrega: Martes 24 de marzo, 2019

Nombre y Apellidos: ______________________________

Entregue sólo 5 ejercicios.

1. Encuentre y clasifique los extremos relativos de las siguientes funciones:
   - $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 3$
   - $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

2. Encuentre y clasifique los extremos relativos de las siguientes funciones:
   - $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{1/3} + 2$
   - $g(x,y) = x^2 - 3xy - y^2$

3. Sea P una función de producción dada por

$$P(L,K) = 2LK - 3K^2 - 2L^2 - 2L + 21K$$

   Encuentre los valores de L (en miles) y K (en miles) que maximizan la producción P.

4. Una compañía produce dos tipos de pasteles cuyos costos unitarios de producción son de $\mathcal{Q}20$ y $\mathcal{Q}10$. Las demandas para ambos pasteles son

$$q_A = 100 - 5x - 2y, \qquad q_B = 250 - 3x - 5y.$$

   Encuentre los precios de venta x y y que maximizan la utilidad de la compañía.

5. Una empresa puede elaborar su producto en dos de sus plantas. El costo de producir x unidades en su primera planta y el costo de producir y unidades en la segunda planta está dado por la función conjunta de costo:

$$C(x,y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$$

   ¿Cuántas unidades debe producir en cada planta con el objetivo de minimizar el costo total si la empresa tiene que suministrar una orden de 500 unidades?

6. La función de producción de una empresa es

$$P(L,K) = 118L + 20K + 3LK - L^2 - 2K^2$$

   donde L y K representan el número de unidades de mano de obra y de capital utilizados y P es el nivel de producción. Los costos unitarios de mano de obra y del capital son de \$ 80 y \$ 160, respectivamente. Encuentra cuánto trabajo y capital debe utilizar la empresa para maximizar la producción si sólo dispone de un presupuesto de \$ 5,640.

7. Durante los meses de zafra, un ingenio azucarero Emplea L trabajadores y K trituradoras y produce P kilogramos de caña de azúcar procesada.

$$P(L,K) = 50L^{2/3}K^{1/3}$$

   El ingenio contrata cada trabajador a Q 100 diarios por cada trabajador, gasta Q 50 diarios en el uso y mantenimiento de cada trituradora y dispone de un presupuesto diario de Q 450,000 para procesar la caña de azúcar. ¿Cuántos trabajadores se deben de contratar y trituradoras se deben usar a efecto de maximizar la producción?

Capítulo 26

Tarea #11

TAREA #11 - DAVID CORZO

1) $\int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2)\, dy\, dx$

- $\int_1^2 (x - 3y^2)\, dy = xy - y^3 \Big]_{y=1}^{y=2}$

$= \{[x(2) - (2)^3] - [x(1) - (1)^3]\}$

$= 2x - 8 - x + 1 = x - 7$

- $\int_0^2 (x - 7)\, dx = \frac{x^2}{2} - 7x \Big]_{x=0}^{x=2} =$

$= \left\{\left[\frac{(2)^2}{2} - 7(2)\right] - [0]\right\} = \frac{4}{2} - 14 = 2 - 14 = -12$

2) $\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dy\, dx$

- $\int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dy = x\int_1^2 \frac{1}{y}\, dy + \frac{1}{x}\int_1^2 y\, dy = x \ln|y| + \frac{y^2}{2x}$

$= x\{\ln(2) - \ln(1)\} + \frac{1}{2x}\{4 - 1\} =$

$= x\ln(2) + \frac{3}{2x}$

- $\ln(2)\int_1^4 x\, dx + \frac{3}{2}\int_1^4 \frac{1}{x}\, dx = \frac{\ln(2)}{2} x^2 \Big]_{x=1}^{x=4} + \frac{3}{2}\ln|x|\Big]_{x=1}^{x=4}$

$= \frac{\ln(2)}{2}\{16 - 1\} + \frac{3}{2}\{\ln(4) - \cancel{\ln(1)}^{\,0}\} =$

$= \ln(2)\frac{15}{2} + \frac{3}{2}\ln(4)$

3) $\int_{-3}^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y + y^2\cos(x))\, dx\, dy =$

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ldots$

$$\int_0 \left(y + y\cos(x)\right) dx = yx + y^2 \sin(x) \Big]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= y\left[x + y\sin(x)\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = y\left\{\left[\left(\frac{\pi}{2}\right) + y\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[0\right]\right\} =$$

$$= y\left\{\frac{\pi}{2} + y(1)\right\} = \frac{\pi}{2}y + y^2$$

■ $$\int_{-3}^{3}\left(\frac{\pi}{2}y + y^2\right) dy = \frac{\pi}{2}\int_{-3}^{3} y\, dy + \int_{-3}^{3} y^2 dy =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big]_{y=-3}^{y=3} + \left(\frac{y^3}{3}\right)\Big]_{y=-3}^{y=3}$$

$$= \frac{\pi}{4}\cancelto{0}{\left\{9 - 9\right\}} + \frac{1}{3}\left\{(3)^3 - (-3)^3\right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{27 + 27\right\} = \frac{54}{3} = \boxed{18}$$

4) $$\iint_R x\sin(x+y)\, dA \qquad R = [\underbrace{0}_{a}, \underbrace{\tfrac{\pi}{6}}_{b}] \times [\underbrace{0}_{c}, \underbrace{\tfrac{\pi}{3}}_{d}]$$

$$\rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(x\sin(x+y)\right) dx\, dy \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{6},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{3}$$

■ $$\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin(x+y)\, dx$$

$u = x \qquad dv = \sin(x+y)$

$\qquad\qquad v = -\cos(x+y)$

$du = dx$

$$= -x\cos(x+y) - \int_0^{\frac{\pi}{6}} -\cos(x++y)\, dx$$

$$= -x\cos(x+y) + \sin(x+y)\Big]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left\{\left[-\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6} + y\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + y\right)\right] - \left[\sin(y)\right]\right\}$$

$= -\frac{\pi}{\ }\cos(\frac{\pi}{\ }$ ...

$$\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)-\sin(y)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(-\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)-\sin(y)\right)dy$$

$$=\underbrace{-\frac{\pi}{6}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right)dy}_{1}+\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)dy}_{2}-\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin(y)\,dy}_{3}$$

1 $-\frac{\pi}{6}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}\right)=$

$$=-\frac{\pi}{6}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=-\frac{\pi}{6}\left\{1-\frac{1}{2}\right\}=-\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{12}$$

2 $-\cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=$

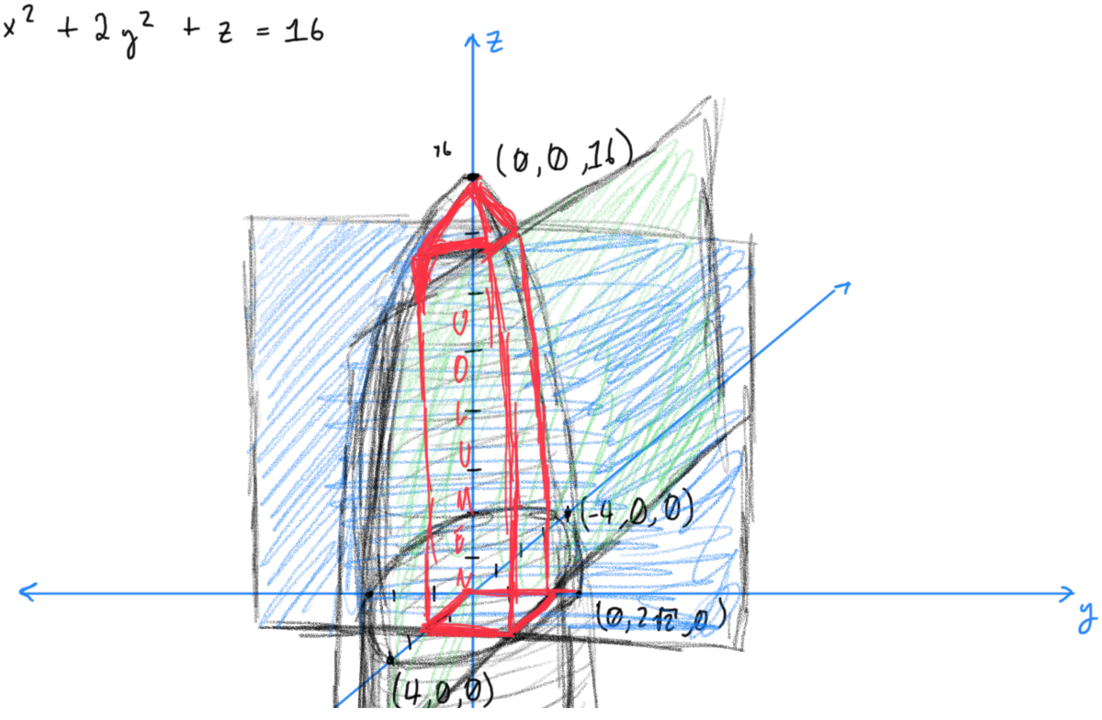
$$=-\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}=-\left\{0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

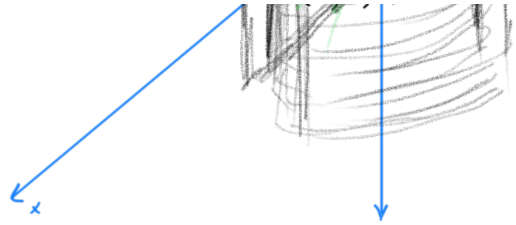
3 $\cos(y)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=$

$$=\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos(0)\right\}=\left\{\frac{1}{2}-1\right\}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ -\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$$

5) $x^2+2y^2+z=16$





$x = 0, \quad y = 0$

$(0)^2 + 2(0)^2 + z = 16$

$z = 16$

$z = 0, \quad y = 0$

$x = \pm 4$

$z = 0, \quad x = 0$

$y = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

$0 \leq x \, 2$

$0 \leq y \leq 2$

$$= \underbrace{\int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)\, dy\, dx}_{\int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dy\, dx}$$

$$\int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)\, dy = 16y - yx^2 - \frac{2}{3}y^3 \Big]_{y=0}^{y=2} =$$

$$= \left\{ \left[16(2) - (2)x^2 - \frac{2}{3}(2)^3\right] - [0] \right\} = 32 - 2x^2 - \frac{16}{3}$$

$$\int_0^2 \left(32 - 2x^2 - \frac{16}{3}\right) dx$$

$$= 32x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{16}{3}x \Big]_{x=0}^{x=2}$$

$$= \left\{ \left[32(2) - \frac{2}{3}(2)^3 - \frac{16}{3}(2)\right] - [0] \right\} = 64 - \frac{16}{3} - \frac{32}{3}$$

$$= 64 - \frac{48}{3} = 64 - 16 = \boxed{48}$$

Tarea #11 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 30 de enero

Nombre:____ **Carnet:** ________________

Tema:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	20	20	20	20	20	100
Nota:						

Resuelva las siguientes ejercicios:

1. (20 pts.) $\int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2) dydx$
2. (20 pts.) $\int_1^4 \int_1^2 (\frac{x}{y} + \frac{y}{x}) dydx$
3. (20 pts.) $\int_{-3}^3 \int_0^{\pi/2} (y + y^2 \cos x) dxdy$
4. (20 pts.) $\int\int_R x \sin(x + y) dA, R = [0, \pi/6]\, x\, [0, \pi/3]$
5. (20 pts.) Encuentre el volumen del sólido S acotado por el paraboloide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, los planos $x = 2$ y $y = 2$ y los tres planos coordenados.

Capítulo 27

Tarea #12

TAREA #12 - DAVID CORZO

1) Tema 1: Planos tangentes & aproximaciones lineales:

a) Encontrar la ec. plano tangente:

a.1) $z = x^2 + y^2$, $(1,1,3)$

$$\boxed{z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

$$f_x = 2x \Big|_{(1,1,3)} = 2(1) = 2$$

$$f_y = 2y \Big|_{(1,1,3)} = 2(1) = 2$$

$$f(1,1) = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1)$$
$$= \cancel{2} + 2x \cancel{-2} + 2y - 2$$
$$= 2x + 2y - 2$$
$$z = 2x + 2y - 2$$

a.1) $z = x\sin(x+y)$, $(-1,1,0)$

$$f_x(x_0,y_0) = \sin(x+y) + x\cos(x+y)\Big|_{(-1,1,0)} =$$
$$= \sin\cancel{(-1+1)}^{0} - 1\ \cancel{\cos(-1+1)}^{1} = -1$$

$$f_y(x_0,y_0) = x\cos(x+y)\Big|_{(-1,1,0)} = -1\cos(-1+1) = -1$$

$$f(-1,1) = \cancel{-1\sin(-1+1)}^{0} = 0$$

$$z = 0 - 1(x+1) - 1(y-1)$$
$$= -x \cancel{-1} - y \cancel{+1}$$
$$z = -x - y$$

b) Encontrar la aproximación lineal $L(x,y)$:

b.1) $z = xe^{xy}$, $($

b.1) $z = xe^{xy}$ $(1,0)$

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

$$f_x(1,0) = e^{xy} + xye^{xy}\Big|_{(1,0)} = 1$$

$$f_y(1,0) = x^2e^{xy}\Big|_{(1,0)} = 1$$

$$f(1,0) = 1\cancel{e^{1\cdot 0}}^{1} = 1$$

$$z = 1 + 1(x-1) + 1(y-0)$$

$$= \cancel{1} + x - \cancel{1} + y$$

$$z = x + y$$

b.2) $z = \sqrt{x + e^{4y}}$ $(3,0)$

$$f_x(3,0) = \frac{1}{\sqrt{x+e^{4y}}}\Bigg|_{(3,0)} = \frac{1}{\sqrt{3+1}} = \frac{1}{2}$$

$$f_y(3,0) = \frac{4e^{4y}}{\sqrt{x+e^{4y}}}\Bigg|_{(3,0)} = \frac{4}{\sqrt{3+1}} = 2$$

$$f(3,0) = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$z = 2 + \frac{1}{2}(x-3) + 2(y-0)$$

$$= 2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + 2y$$

$$= \frac{1}{2}x + 2y + \underbrace{\frac{4}{2} - \frac{3}{2}}_{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}x + 2y + \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{1}{2}x + 2y + \frac{1}{2}$$

2) Tema 2: Derivación Implícita

a) Encuentre $\frac{dy}{dx}$

a.1) $y\cos(x) = x^2 + y^2$

$$\emptyset = x^2 + y^2 - y\cos(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = 2y - \cos(x) \qquad \frac{\partial}{\partial x} = 2x + y\sin(x)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2y - \cos(x)}{2x + y\sin(x)}$$

a.2) $e^y \sin(x) = x + xy$

$$\emptyset = x + xy - e^y \sin(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = x - e^y \sin(x) \qquad \frac{\partial}{\partial x} = 1 + y - e^y \cos(x)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x - e^y \sin(x)}{1 + y - e^y \cos(x)}$$

b) Encuentre la derivada parcial de z de:

$$e^z + e^{xy} = xyz$$

$$e^z + e^{xy} - xyz = \emptyset$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = e^z - xy$$

c) Encontrar la derivada parcial de z:

$$\cos(yx) + \sin(yz) = zx$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \cos(yx) + \sin(yz) - zx = \emptyset$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-\sin(yx)\,y - z}{\cos(yz)\,y - x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{F_y}{F_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{-\sin(yx)\,x + \cos(yz)\,z}{\cos(yz)\,y - x}$$

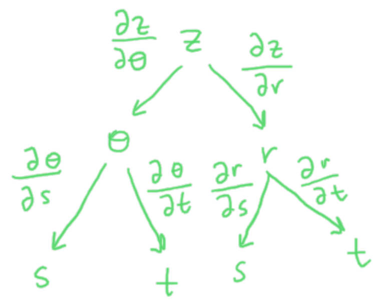
---

3) Tema 3: Regla de la cadena

a) Encuentre $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$

a.1) $z = e^{r}\cos(\theta)$ $\quad \theta = \sqrt{s^2+t^2}$ $\quad r = st$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial s}$$



$$\frac{\partial z}{\partial s} = \left(-e^{r}\sin(\theta)\right)\left(\tfrac{1}{2}(s^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}2s\right) + \left(e^{r}\cos(\theta)\right)(t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = -\frac{e^{r}\sin(\theta)\,s}{\sqrt{s^2+t^2}} + e^{r}\cos(\theta)\,t$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}$$

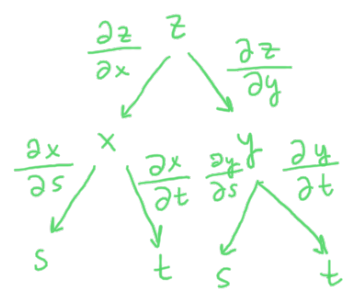
$$= \left(-e^{r}\sin(\theta)\right)\left(\tfrac{1}{\cancel{2}}(s^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}\cancel{2}t\right) + \left(e^{r}\cos(\theta)\right)(s)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = -\frac{e^{r}\sin(\theta)\,t}{\sqrt{s^2+t^2}} + e^{r}s\cos(\theta)$$

a.2) $z = \arcsin(x-y)$ $\quad x = s^2+t^2$ $\quad y = 1-2st$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$



$$\frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{1}{\quad}\right)\left(\quad\right)\left(\quad -1 \quad\right)\left(\quad\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} \quad \left(\frac{}{(x-y)^2+1}\right)(2t) + \left(\frac{}{(x-y)^2+1}\right)(-2s)$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{2t}{(x+y)^2+1} + \frac{2s}{(x-y)^2+1}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \left(\frac{1}{(x-y)^2+1}\right)(2s) + \left(\frac{-1}{(x-y)^2+1}\right)(-2s)$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{2s}{(x-y)^2+1} + \frac{2s}{(x-y)^2+1}}$$

b) función de Producción:

$$P(L,K) = 10\, L^{\frac{1}{2}}\, K^{\frac{1}{2}}$$

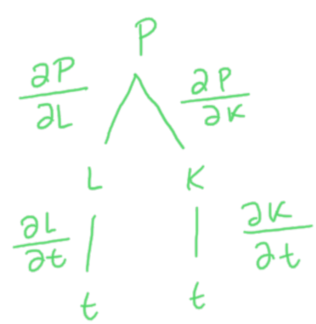
L : h en miles ; K : h de capital

$L = 25$; $K = 16$ $\quad$ $P(L,K)$ esta en toneladas

$\Delta L = -2$ $\qquad$ $\Delta K = 3$

Encontrar tasa de cambio de la producción:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial t}$$



$$\frac{\partial P}{\partial L} = \frac{5\sqrt{K}}{\sqrt{L}}\Bigg|_{L=25,\,K=16} = \frac{5\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \frac{5\sqrt{L}}{\sqrt{K}}\Bigg|_{L=25,\,K=16} = \frac{5\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{25}{4} = 5$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = (4)(-2) + (5)(3)$$

$$= -8 + 15$$

$= 7$

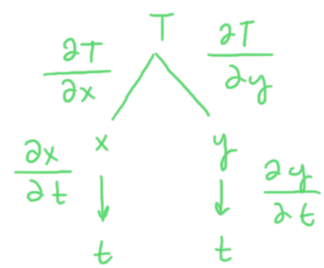
c) La temperatura (x,y) medida en Celsiurs,

$x = \sqrt{1+t}$ $\qquad y = 2 + \frac{1}{3}t$ $\qquad$ # x, y en cm.

$T_x(2,3) = 4 \qquad T_y(2,3) = 3$

¿Cuan rápido está aumentando la temperatura en $t = 3$?

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x}}_{4} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial y}}_{3} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$



$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{1+t}} \Bigg|_{t=3} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{3} \Bigg|_{t=3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (4)\left(\frac{1}{4}\right) + (3)\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + 1 = \boxed{2}$$

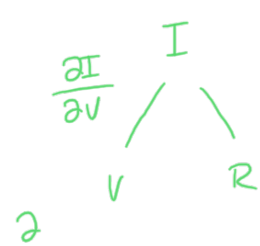
d) Voltage $\downarrow$; Resistencia $\uparrow$; ley Ohm : $V = IR$

$R = 400\,\Omega \qquad I = 0.08\,A$

I: Corriente
R: Resistencia
V: Voltage

$V = IR$ $\qquad \frac{dV}{dt} = -0.01\ V/s \qquad \frac{dR}{dt} = 0.03\ \Omega/s$

$\frac{\partial I}{\partial t}$



4) Tema 4: Derivada Direccional

a) Hallar la derivada direccional del vector $\vec{v}$

a.1) $f(x,y) = x^3 - y^3$ $\quad P(4,3)$ $\quad \vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{\imath} + \hat{\jmath})$

$f_x = 3x^2$ $\quad f_y = -3y$ $\quad \vec{v} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

$f_x(4,3) = 48$ $\quad f_y(4,3) = -9$

$\nabla f(4,3) = \langle 48, -9 \rangle$

$$D_u f = \langle 48, -9 \rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$$

$$= 24\sqrt{2} - \frac{9}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(24 - \frac{9}{2}\right) = \boxed{\sqrt{2}\,\frac{39}{2}}$$

a.2) $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ $\quad P(1,1,1)$

$\vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k})$

$f_x(1,1,1) = 2x \big|_{(1,1,1)} = 2$

$f_y(1,1,1) = 2y \big|_{(1,1,1)} = 2$ $\quad \vec{v} = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right\rangle$

$f_z(1,1,1) = 2z \big|_{(1,1,1)} = 2$ $\quad \nabla f = \langle 2, 2, 2 \rangle$

$$D_u f = \langle 2,2,2 \rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right\rangle$$

$$= \cancel{\frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3}}^{\,0} + \frac{2}{3}\sqrt{3} = \boxed{\frac{2}{3}\sqrt{3}}$$

b) Halle la razón de cambio instantánea de la función en P, la dirección $\vec{v}$:

b.1) $f(x,y) = e^x \sin(y)$ $\quad P\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad \vec{v} = -\hat{\imath}$

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{v}$$

$$\nabla f = \left\langle e^x \sin(y), e^x \cos(y) \right\rangle$$

$$\nabla f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \left\langle e \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), e \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\rangle$$

$$= \langle e, 0 \rangle$$

$\vec{v} = \langle -1, 0 \rangle$

$$D_u f = \langle e, 0 \rangle \cdot \langle -1, 0 \rangle$$
$$= -e + 0 = \boxed{-e}$$

b.2) $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ $\quad P(1,1,1)$ $\quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k})$

$$\nabla f(1,1,1) = \langle 2x, 2y, 2z \rangle \Big|_{(1,1,1)} = \langle 2,2,2 \rangle$$

$$\vec{v} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$$

$$D_u f = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \cdot \langle 2,2,2 \rangle$$
$$= \cancel{\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

c) Hallar la derivada direccional del vector unitario
$\vec{u} = \cos(\theta)\,\hat{\imath} + \sin(\theta)\,\hat{\jmath}$

c.1) $f(x,y) = \sin(2x + y)$ $\quad \theta = \frac{\pi}{3}$

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{v}$$

$$\nabla f = \langle 2\cos(2x+y), \cos(2x+y) \rangle$$

$$\vec{v} = \langle \cos(\theta), \sin(\theta) \rangle \Big|_{\theta = \frac{\pi}{3}} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$$

$$\boxed{D_u f = \sqrt{2}\cos(2x+y) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x+y)}$$

c.2) $f(x,y) = \frac{y}{x+y}$ $\quad \theta = -\frac{\pi}{6}$

$$y(x+y)^{-1} \qquad \frac{A}{B} = \frac{A'B - AB'}{(B)^2}$$

$$f_x = -y(x-y)^{-2} \cdot 1$$

$$f_y = \frac{1(x+\cancel{y}) - \cancel{y}}{(x+y)} = \frac{x}{x+y}$$

$$\nabla f = \left\langle -\frac{y}{(x-y)^2}, \frac{x}{x+y} \right\rangle$$

$$\vec{v} = \left\langle \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right\rangle = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$D_u f = \left\langle -\frac{y}{(x-y)^2}, \frac{x}{x+y} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2(x-y)^2} - \frac{x}{2(x+y)}$$

---

5) Tema 5: Optimización

Dulces A, B

$CP_A = 60 \qquad CP_B = 70$

Demanda A, B:

$q_A = 5(P_B - P_A)$

$q_B = 500 + 5(P_A - 2P_B)$

- maximizar precio

$$C = 60q_A + 70q_B$$

$$U(q_A, q_B) = P_A q_A + P_B q_B - (60q_A + 70q_B)$$

$$= P_A(5P_B - 5P_A) + P_B(500 + 5P_A - 10P_B) - 60q_A - 70q_B$$

$$= 5P_BP_A - 5P_A^2 + 500P_B + 5P_AP_B - 10P_B^2 - 60q_A - 70q_B$$

$$= -5P_A^2 + 10P_BP_A + 500P_B - 10P_B^2 - 60(5P_B - 5P_A) - 70(500 + 5P_A - 10P_B)$$

$$= -\cancel{5P_A^2} + \cancel{10P_BP_A} + \cancel{500P_B} - \cancel{10P_B^2} - \cancel{300P_B} + \cancel{300P_A} - 35{,}000 - \cancel{350P_A} + \cancel{700P_B}$$

$$= -5P_A^2 + 10P_BP_A + 500P_B - 300P_B + 700P_B - 10P_B^2 + 300P_A - 350P_A - 35{,}000$$

$$= -5P_A^2 + 10P_BP_A + 900P_B - 10P_B^2 - 50P_A - 35000$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_A} = -5 \cdot 2\, P_A + 10\, P_B - 50 = 0$$

$$= -10\, P_A + 10\, P_B - 50 = 0$$

$$10\, P_B - 50 = 10\, P_A$$

$$\boxed{P_B - 5 = P_A}$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_B} = 10\, P_A + 900 - 20\, P_B = 0$$

$$P_A = \frac{1}{10}\left(-900 + 20\, P_B\right)$$

$$\boxed{P_A = -90 + 2\, P_B}$$

$$P_B - 5 = -90 + 2 P_B$$

$$-5 + 90 = 2 P_B - P_B$$

$$85 = P_B$$

$$80 = P_A$$

Precios que maximizan

---

6) Tema 6: Multiplicadores La'Grange.

$$f(q_1, q_2) = 2 q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2 + 200$$

$$q_1 + q_2 = 200$$

$$F(q_1, q_2, \lambda) = 2 q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2 + 200 + \lambda (200 - q_2 - q_1)$$

$$= 2 q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2 + 200 + 200 \lambda - \lambda q_2 - \lambda q_1$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} = 4 q_1 + q_2 - \lambda = 0$$

$$4 q_1 + q_2 = \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_2} = q_1 + 2 q_2 - \lambda = 0$$

$$4 q_1 + q_2 = q_1 + 2 q_2$$

$$\boxed{3 q_1 = q_2}$$

$q_1 + 2q_2 - \lambda$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 200 - q_2 - q_1 = 0$$

$$200 - 3q_1 - q_1 = 0$$

$$4q_1 = 200$$

$$q_1 = \frac{200}{4}$$

$$q_1 = 50$$

distribución de producción

$$200 - 50 = q_2$$

$$150 = q_2$$

Tarea #12, Cálculo Multivariable

Entrega: Martes 14 de abril, 2019

Nombre y Apellidos: ______________________________

Entregue sólo un ejercicio de cada tema.
Se le recomienda como práctica realizar la mayor cantidad posible de ejercicios.

1. **Tema 1: Planos Tangentes y Aproximaciones Lineales**

   (a) Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.
   - $z = x^2 + y^2, \quad (1, 1, 3)$
   - $z = x\sin(x + y), \quad (-1, 1, 0)$

   (b) Encuentre la aproximación lineal $L(x, y)$ de la función en el punto indicado.
   - $z = xe^{xy}, \quad (1, 0)$
   - $z = \sqrt{x + e^{4y}}, \quad (3, 0)$

2. **Tema 2: Derivación Implícita**

   (a) Encuentre dy/dx:
   - $y\cos x = x^2 + y^2$
   - $e^y \sin x = x + xy$

   (b) Encuentre las primeras derivadas parciales de z dada la ecuación $e^z + e^{xy} = xyz$.

   (c) Encuentre la derivada parcial de z para función implícita $\cos yx + \sin yz = \cot zx$

3. **Tema 3: Regla de la Cadena**

   (a) Encuentre $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$
   - $z = e^r \cos\theta, \qquad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}, \qquad r = st$
   - $z = \arcsin(x - y), \qquad x = s^2 + t^2, \qquad y = 1 - 2st$

   (b) Un manufactor ha modelado su producción anual P como una función Cobb-Douglas de la forma

   $$P(L, K) = 10L^{1/2}K^{1/2}$$

   donde L es el número de horas (en miles), K son las horas de capital (en miles) y P está en toneladas. Suponga que $L = 25$ y que $K = 16$. La labor de horas está decreciendo con una tasa de 2 mil horas por año y el capital está aumentando con una tasa de 3 mil horas por año. Encuentre la tasa de cambio de la producción.

   (c) La temperatura en un punto (x, y) es medida en grados Celsius. Un bicho viaja tal que su posición después de t segundos está dada por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, donde x y y están dadas en cms. La función de temperatura satisface que $T_x(2, 3) = 4$ y $T_y(2, 3) = 3$. ¿Cuán rápido está aumentando la temperatura a lo largo de la trayectoria del bicho después de 3 segundos?

   (d) El voltaje V en un circuito simple decrece gradualmente a medida que la batería se agota. La resistencia R crece despacio a medida que el resistor se calienta. Utilice la ley de Ohm, $V = IR$, para encontrar como está cambiando la corriente I en el momento que la resistencia es $R = 400\ \Omega$, $I = 0.08A$, $dV/dt = -0.01\ V/s$ y $dR/dt = 0.03\ \Omega/s$.

4. **Tema 4: Derivada Direccional**

   (a) Halle la derivada direccional de la función en el punto P, en la dirección del vector $\vec{v}$.

   - $f(x,y) = x^3 - y^3$, $P(4,3)$, $\vec{v} = \sqrt{2}/2(\hat{\imath} + \hat{\jmath})$
   - $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $P(1,1,1)$, $\vec{v} = \sqrt{3}/3(\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k})$

   (b) Encuentre la razón de cambio instántanea de la función en P, en la dirección del vector $\vec{v}$.

   - $f(x,y) = e^x \sin y$, $P(1, \pi/2)$, $\vec{v} = -\hat{\imath}$
   - $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $P(1,1,1)$, $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}\right)$

   (c) Halle la derivada direccional de la función en la dirección del vector unitario $\vec{u} = \cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}$

   - $f(x,y) = \sin(2x+y)$, $\theta = \pi/3$
   - $f(x,y) = \dfrac{y}{x+y}$, $\theta = -\pi/6$

5. **Tema 5: Optimización**

   Una compañía produce dos variedades de dulces, A y B, para los cuales los costos promedio de producción son constantes de 60 y 70 (centavos por libra), respectivamente. Las funciones de demanda para A y B están dadas por $q_A = 5(p_B - p_A)$ y $q_B = 500 + 5(p_A - 2p_B)$. Encuentre los precios de venta p_A y p_B que maximicen la utilidad de la compañía.

6. **Tema 6: Multiplicadores de Lagrange**

   Suponga que una empresa ha recibido un pedido por 200 unidades de su producto y desea distribuir su fabricación entre dos de sus plantas, planta 1 y planta 2. Sean q_1 y q_2 las producciones de las plantas 1 y 2, respectivamente, y suponga que la función de costo total está dada por $c = f(q_1,q_2) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 200$ ¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos?

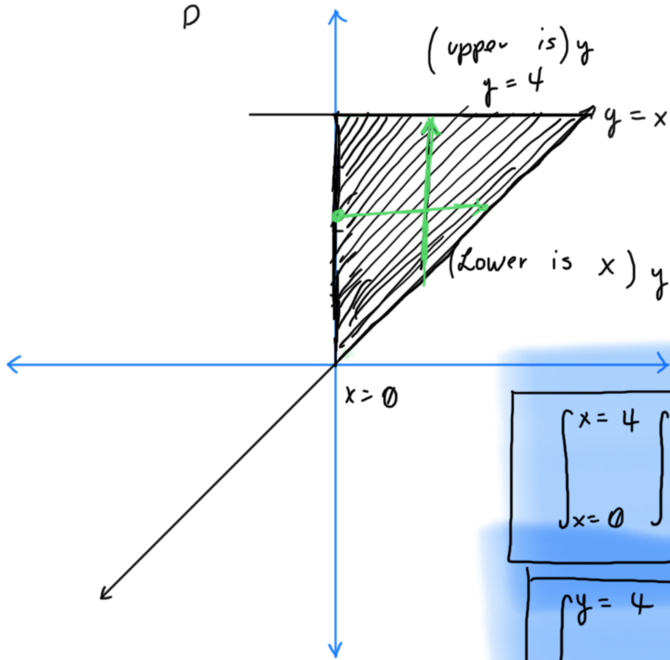
Capítulo 28

Tarea #13

TAREA #13 - DAVID CORZO

1. a)

$$\iint_D y^2 e^{xy} \, dA \, , \quad D \, \{(y = x) \wedge (y = 4) \wedge (x = 0)\}$$

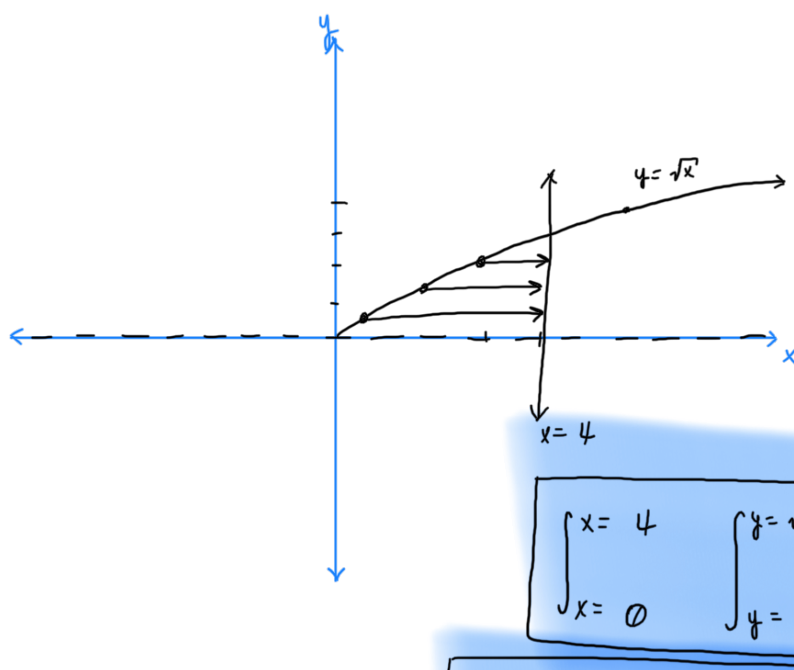


$$\boxed{\int_{x=0}^{x=4} \int_{y=x}^{y=4} y^2 e^{xy} \, dy \, dx}$$

$$\boxed{\int_{y=0}^{y=4} \int_{x=0}^{x=y} y^2 e^{xy} \, dy \, dx}$$

1. b)

$$\iint_D \frac{y}{1 + x^2} \, dA \qquad D : \{(y = 0) \wedge (y = \sqrt{x}) \wedge (x = 4)\}$$



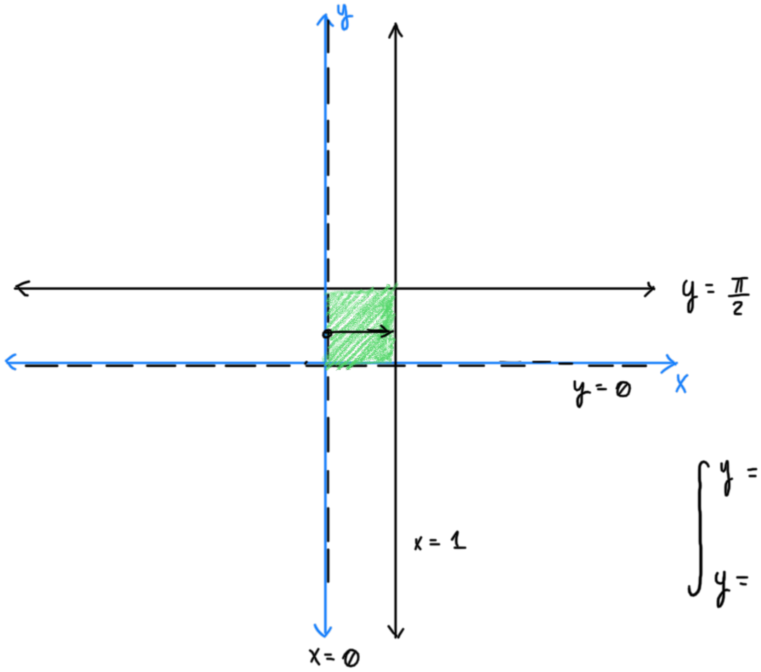
$\sqrt{x} = 4$

$x = 16$

$$\boxed{\int_{x=0}^{x=4} \int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \frac{y}{1 + x^2} \, dy \, dx}$$

$$\boxed{\int_{y=0}^{y=2} \int_{x=y^2}^{x=4} \frac{y}{1 + x^2} \, dx \, dy}$$

2. a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cos(xy)\, dy \right) dx$



$$\int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \int_{x=0}^{x=1} y\cos(xy)\, dx\, dy$$

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int_0^1 y\cos(xy)\, dx = \sin(xy)\Big]_0^1 = \left\{ \sin(y) - \cancel{\sin(0)}^{\,0} \right\}$

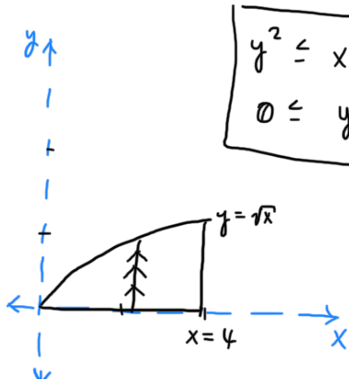
$= \sin(y)$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)\, dy = -\cos(y)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left\{ \cancel{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}^{\,0} - \cos(0) \right\}$

$= -\{-1\} = 1$

2. b) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^4 y^2 \sqrt{x} \sin(x)\, dx\, dy$

$$\boxed{\begin{array}{l} y^2 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 2 \end{array}} \qquad D: \begin{array}{l} 0 \le y \le \sqrt{x} \\ 0 \le x \le 4 \end{array}$$



$$= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y^2 \sqrt{x} \sin(x)\, dy\, dx$$

$\boxed{1}$ $$\int_0^{\sqrt{x}} y^2 \sqrt{x} \sin(x)\, dy = \frac{\sqrt{x}\sin(x)}{3} y^3 \Big]_0^{\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x}\sin(x)}{3} \left\{ (\sqrt{x})^3 - (0)^3 \right\} = \frac{x^2 \sin(x)}{3}$$

$\boxed{2}$ $$\int_0^4 \frac{x^2 \sin(x)}{3}\, dx = -x^2\cos(x) + \underbrace{2\int \cos(x)\, x\, dx}_{IPP}$$

$u = x^2 \qquad dv = \sin(x)$

$du = 2x\,dx \qquad v = -\cos(x)$

$$2\int \cos(x)\, x = 2\left(x\sin(x) - \int \sin(x)\, dx \right) = 2\left(x\sin(x) + \cos(x) \right)$$

$u = x \qquad dv = \cos(x)$

$du = dx \qquad v = \sin(x)$

$$= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) \Big]_0^4 =$$

$$= -(4)^2\cos(4) + 2(4)\sin(4) + 2\cos(4) - (0 + 0 + 2)$$

$$= -16\cos(4) + 8\sin(4) + 2\cos(4) - 2$$

$$= -14\cos(4) + 8\sin(4) - 2$$

3. a) $$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x - x^2}} \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{r}\, dy\, dx$$

$x = r\cos(\theta)$

$y = r\sin(\theta)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$dA = dy\,dx$

$y = \sqrt{2x - x^2}$

$y^2 + x^2 = 2x$

$y^2 + (x^2 - 2x + 1) = 1$

$y^2 + (x - 1)^2 = 1$

$dy\,dx = r\,dr\,d\theta$

$y^2 + (x-1)^2 = 1$ $\quad r\,dr\,d\theta$

$$r^2\sin^2(\theta) + (r\cos(\theta) - 1)^2 = 1$$

$$r^2\cancel{\sin^2(\theta)} + r^2\cancel{\cos^2(\theta)} - 2r\cos(\theta) + \cancel{1} = \cancel{1}$$

$$r^2 - 2\cos(\theta) = 0$$

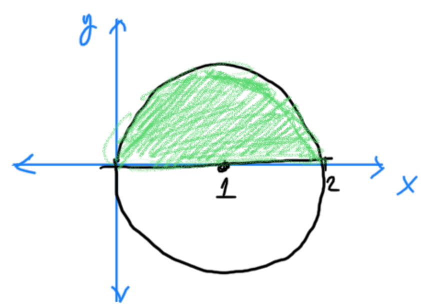
$$r = \sqrt{2\cos(\theta)}$$

$$r = 0$$

$$0 \le r \le \sqrt{2\cos(\theta)}$$

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

[redacted] $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2\cos(\theta)}} r^2\,dr\,d\theta$



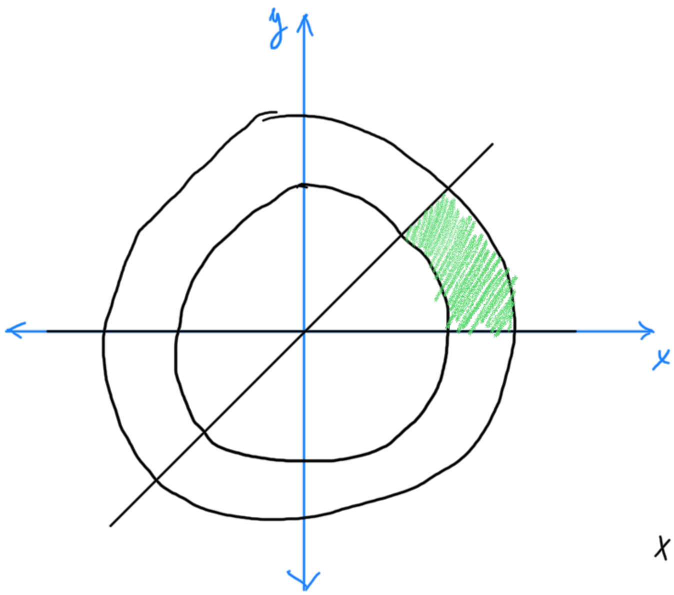
$\boxed{1}$ $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2\cos(\theta)}} r^2\,dr$

$$= \frac{r^3}{3}\Bigg]_0^{\sqrt{2\cos(\theta)}} = \frac{1}{3}\left\{(2\cos(\theta))^{\frac{3}{2}} - 0\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}\cos^{\frac{3}{2}}(\theta)\right) = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}\cos^{2/3}(\theta)$$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}\int_0^{\pi/2} (\cos(\theta))^{\frac{3}{2}}\,d\theta$

3.b) $\iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dA$ $\quad D: \{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4,$
$0 \le y \le x\}$



$1 \le r \le 2$
$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

$y = 0$
$y = x$

$x^2 + y^2 = 2^2$
$x^2 + y^2 = 1^2$

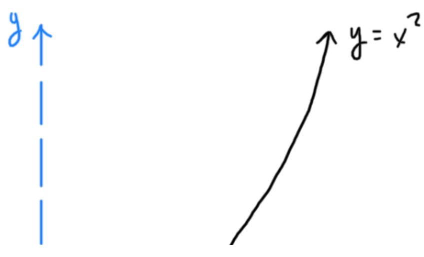
$$\int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta r \, d\theta \, dr$$

$\boxed{1}$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta r \, d\theta = r \left.\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8} r$

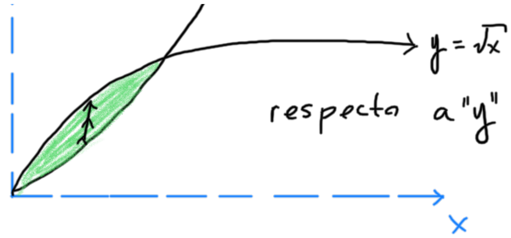
$\boxed{2}$ $\int_1^2 \frac{\pi^2}{8} r \, dr = \frac{\pi^2}{16} \{2^2 - 1^2\} = \frac{\pi^2}{16} \{4 - 1\} = \frac{\pi^2}{16}(3)$

$= \frac{3}{16}\pi^2$

4.a) $z = 7x + 2y$ $\quad D: \{(y = x^2) \wedge (x = y^2)\}$



$0 \le x \le 1$
$x^2 \le y \le \sqrt{x}$



[redacted] $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 7x + 2y \, dy \, dx$

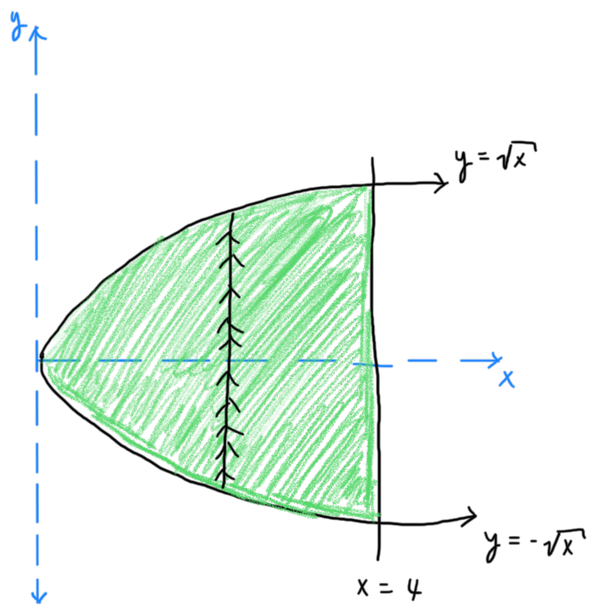
$\boxed{1}$ $\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 7x + 2y \, dy = 7xy + y^2 \Big]_{x^2}^{\sqrt{x}}$

$= 7x\sqrt{x} + x - 7x^3 - x^4 = 7x^{\frac{3}{2}} + x - 7x^3 - x^4$

$\boxed{2}$ $\int_0^1 7x^{\frac{3}{2}} + x - 7x^3 - x^4 \, dx$

$= \frac{35}{2} x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{2} - \frac{7}{4}x^4 - \frac{x^5}{5} \Big]_0^1 = \frac{27}{20}$

4.b) $z = 1 + x^2y^2$ $\quad x = y^2$ & $x = 4$



$\iint_D 1 + x^2y^2 \, dA$

$D: -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}$

$2 \left(0 \leq y \leq \sqrt{x} \right)$

$0 \leq x \leq 4$

[redacted] $2 \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} 1 + x^2y^2 \, dy \, dx$

$\boxed{1}$ $\int_0^{\sqrt{x}} 1 + x^2y^2 \, dy = y + \frac{x^2}{3}y^3 \Big]_0^{\sqrt{x}} =$

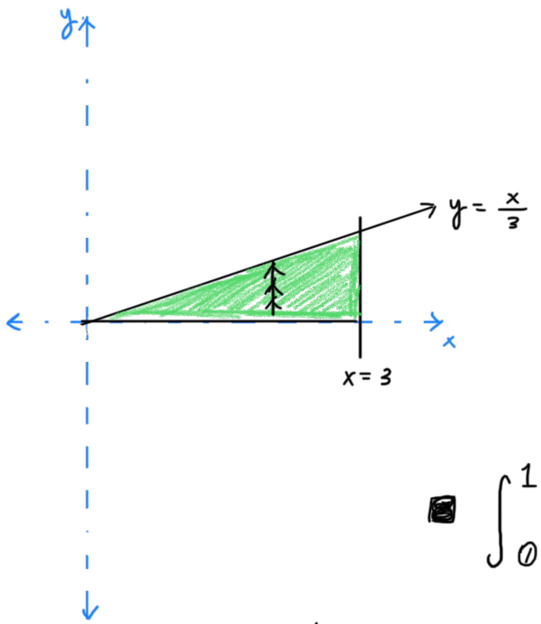
$= \left\{ \sqrt{x} + \frac{x^2}{3}(\sqrt{x})^3 - 0 \right\} = \left(\sqrt{x} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{3} \right) 2$

$\boxed{2}$ $2\int_0^4 \sqrt{x} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{3}\, dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{27}x^{\frac{9}{2}}\Big]_0^4$

$= 2\left(\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{27}(4)^{\frac{9}{2}} - 0\right) = \boxed{\frac{2336}{27}}$

5. a) $\int_0^1 \int_{3y}^3 5e^{x^2}\, dx\, dy$

$3y \le x \le 3$
$0 \le y \le 1$



$0 \le x \le 1$
$0 \le y \le \frac{x}{3}$

[redacted] $\int_0^1 \int_0^{\frac{x}{3}} 5e^{x^2}\, dy\, dx$

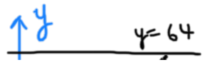
$\boxed{1}$ $\int_0^{\frac{x}{3}} 5e^{x^2}\, dy = 5e^{x^2}\left\{\frac{x}{3} - 0\right\} = \frac{5}{3}e^{x^2}x$

$\boxed{2}$ $\frac{5}{3}\int_0^1 e^{x^2}x\, dx = \frac{5}{6}\int_0^1 e^u\, du = \frac{5}{6}e^u\Big]_{u(0)}^{u(1)} =$

$u = x^2$
$\frac{du}{2} = x\,dx$

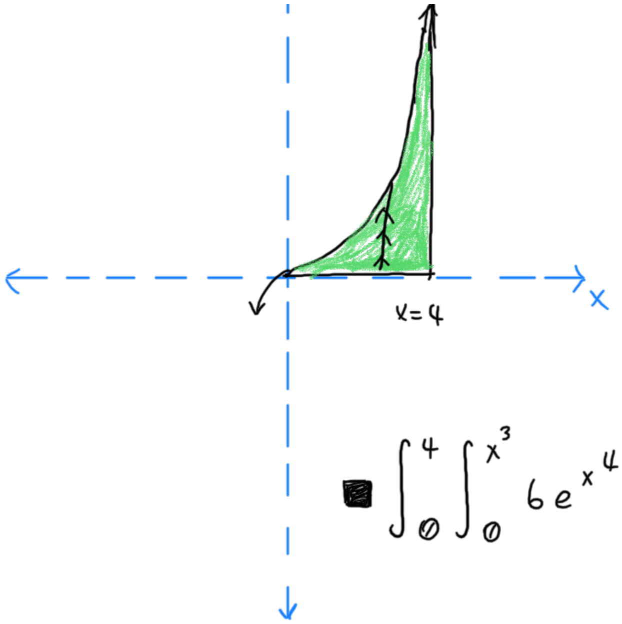
$= \frac{5}{6}\left[e^1 - e^0\right] = \boxed{\frac{5}{6}\left[e - 1\right]}$

5.b) $\int_0^{64} \int_{\sqrt[3]{y}}^4 6e^{x^4}\, dx\, dy$



$\sqrt[3]{y} \le x \le 4$

$$0 \le y \le 4$$



$$0 \le y \le x^3$$
$$0 \le x \le 4$$

[redacted] $\int_0^4 \int_0^{x^3} 6e^{x^4}\, dy\, dx$

$\boxed{1}$ $\int_0^{x^3} 6e^{x^4}\, dy = 6e^{x^4}\{x^3 - 0\}$

$= 6e^{x^4} x^3$

$\boxed{2}$ $\int_0^4 6e^{x^4} x^3\, dx = \frac{6}{4}\int_0^4 e^u\, du = \frac{6}{4} e^u \Big]_{u(0)}^{u(4)}$

$u = x^4$

$\frac{du}{4} = x^3 dx$

$= \frac{6}{4}\{e^{256} - 1\}$

$= \frac{6}{4}\left(e^{256} - 1\right)$

Tarea #13,
Cálculo Multivariable

Jueves 23 de abril 2019

Nombre y Apellidos: ____

Para cada problema realice uno de los siguientes incisos.

1. (20 pts.) Plantee integrales iteradas para ambos órdenes de integración.
   (a) $\iint_D y^2 e^{xy}\, dA$, D está acotada por $y = x$, $y = 4$, & $x = 0$.
   (b) $\iint_D \dfrac{y}{1+x^2}\, dA$, D entre $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, & $x = 4$.

2. (20 pts.) Evalúe la integral cambiando el orden de integración.
   (a) $\int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} y \cos(xy) dy \right) dx$
   (b) $\int_0^2 \left(\int_{y^2}^4 y^2 \sqrt{x} \sin x dx \right) dy$

3. (20 pts.) Evalúe la integral iterada convirtiendo a coordenadas polares.
   (a) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dydx$
   (b) $\iint_D \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)\, dA$, $R = \left\{ (x, y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant x \right\}$

4. (20 pts.) Encuentre el volumen de los siguientes sólidos.
   (a) El sólido formado debajo de la superficie $z = 7x + 2y$ y arriba de la región entre $y = x^2$ y $x = y^2$.
   (b) Bajo la superficie $z = 1 + x^2y^2$ y arriba de la región entre $x = y^2$ & $x = 4$.

5. (20 pts.) Evalúe la siguientes integrales intercambiando el orden de integración
   (a) (10 pts.) $\int_0^1 \int_{3y}^3 5e^{x^2}\, dx\, dy$
   (b) (10 pts.) $\int_0^{64} \int_{\sqrt[3]{y}}^4 6e^{x^4}\, dx\, dy$