5.3 Valor esperado y varianzas

Valor esperado

El **valor esperado**, o media, de una variable aleatoria es una medida de la localización central de la variable aleatoria. A continuación se da la fórmula para obtener el valor esperado de una variable aleatoria x.

El valor esperado es un promedio ponderado de los valores que toma la variable aleatoria. Los pesos son las probabilidades.

VALOR ESPERADO DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

$$E(x) = \mu = \Sigma x f(x) \tag{5.4}$$

Las dos notaciones $E(x)$ y μ se usan para denotar el valor esperado de una variable aleatoria x.

El valor esperado no tiene que ser un valor que pueda tomar la variable aleatoria.

La ecuación (5.4) indica que para calcular el valor esperado de una variable aleatoria discreta se multiplica cada valor de la variable aleatoria por su probabilidad correspondiente $f(x)$ y después se suman estos productos. Usando el ejemplo de la sección 5.2 sobre las ventas de automóviles en DiCarlo Motors, en la tabla 5.5 se muestra cómo se calcula el valor esperado del número de automóviles vendidos en un día. La suma de las entradas en la columna $xf(x)$ indica que el valor esperado es 1.50 automóviles por día. Por tanto, aunque se sabe que en un día las ventas pueden ser de 0, 1, 2, 3, 4 o 5 automóviles, DiCarlo prevé que a la larga se venderán 1.50 automóviles por día. Si en un mes hay 30 días de operación, el valor esperado, 1.50, se emplea para pronosticar que las ventas promedio mensuales serán de 30(1.5) = 45 automóviles.

Varianza

Aunque el valor esperado proporciona el valor medio de una variable aleatoria, también suele ser necesaria una medida de la variabilidad o dispersión. Así como en el capítulo 3 se usó la varianza para resumir la variabilidad de los datos, ahora se usa la **varianza** para resumir la variabilidad en los valores de la variable aleatoria. A continuación se da la fórmula para calcular la

La varianza es un promedio ponderado de los cuadrados de las desviaciones de una variable aleatoria de su media. Los pesos son las probabilidades.

VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = \Sigma(x - \mu)^2 f(x) \tag{5.5}$$

TABLA 5.5 CÁLCULO DEL VALOR ESPERADO PARA EL NÚMERO DE AUTOS QUE SE VENDEN EN UN DÍA EN DICARLO MOTORS

x	$f(x)$	$xf(x)$
0	0.18	0(.18) = 0.00
1	0.39	1(.39) = 0.39
2	0.24	2(.24) = 0.48
3	0.14	3(.14) = 0.42
4	0.04	4(.04) = 0.16
5	0.01	5(.01) = 0.05
		1.50

$E(x) = \mu = \Sigma x f(x)$

TABLA 5.6 CÁLCULO DE LA VARIANZA PARA EL NÚMERO DE AUTOS QUE SE VENDEN EN UN DÍA EN DICARLO MOTORS

x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$	$f(x)$	$(x - \mu)^2 f(x)$
0	$0 - 1.50 = -1.50$	2.25	0.18	$2.25(0.18) = 0.4050$
1	$1 - 1.50 = -0.50$	0.25	0.39	$0.25(0.39) = 0.0975$
2	$2 - 1.50 = 0.50$	0.25	0.24	$0.25(0.24) = 0.0600$
3	$3 - 1.50 = 1.50$	2.25	0.14	$2.25(0.14) = 0.3150$
4	$4 - 1.50 = 2.50$	6.25	0.04	$6.25(0.04) = 0.2500$
5	$5 - 1.50 = 3.50$	12.25	0.01	$12.25(0.01) = 0.1225$
				1.2500

$$\sigma^2 = \Sigma(x - \mu)^2 f(x)$$

varianza de una variable aleatoria. Como indica la ecuación (5.5), un parte esencial de la fórmula de la varianza es la desviación $x - \mu$, la cual mide qué tan alejado del valor esperado, o media μ, se encuentra un valor determinado de la variable aleatoria. Para calcular la varianza de una variable aleatoria, estas desviaciones se elevan al cuadrado y después se ponderan con el correspondiente valor de la función de probabilidad. A la suma de estas desviaciones al cuadrado, ponderadas, se le conoce como *varianza*. Para denotar la varianza de una variable aleatoria se usan las notaciones Var(x) y σ^2.

En la tabla 5.6 aparece en forma resumida el cálculo de la varianza de la distribución de probabilidad del número de automóviles vendidos en un día en DiCarlo Motors. Como ve, la varianza es 1.25. La **desviación estándar**, σ, se define como la raíz cuadrada positiva de la varianza. Por tanto, la desviación estándar del número de automóviles vendidos en un día es

$$\sigma = \sqrt{1.25} = 1.118$$

La desviación estándar se mide en las mismas unidades que la variable aleatoria ($\sigma = 1.1180$ automóviles) y por tanto suele preferirse para describir la variabilidad de una variable aleatoria. La varianza σ^2 se mide en unidades al cuadrado por lo que es más difícil de interpretar.

Ejercicios

Métodos

15. La tabla siguiente muestra la distribución de probabilidad de una variable aleatoria x.

x	$f(x)$
3	0.25
6	0.50
9	0.25

a. Calcule $E(x)$, el valor esperado de x.
b. Calcule σ^2, la varianza de x.
c. Calcule σ, la desviación estándar de x.

Auto examen

16. La tabla siguiente muestra la distribución de probabilidad de una variable aleatoria y.

y	$f(y)$
2	0.20
4	0.30
7	0.40
8	0.10

a. Calcule $E(y)$.
b. Calcule $\text{Var}(y)$ y σ.

Aplicaciones

17. Una ambulancia de voluntarios realiza de 0 a 5 servicios por día. A continuación se presenta la distribución de probabilidad de los servicios por día.

Número de servicios	Probabilidad	Número de servicios	Probabilidad
0	0.10	3	0.20
1	0.15	4	0.15
2	0.30	5	0.10

a. ¿Cuál es el valor esperado del número de servicios?
b. ¿Cuál es la varianza del número de servicios? ¿Cuál es la desviación estándar?

Auto examen

18. Los datos siguientes son el número de recámaras en casas rentadas y en casas propias en ciudades centrales de Estados Unidos (www.census.gov, 31 de marzo de 2003).

	Número de casas (en miles)	
Recámaras	**Rentadas**	**Propias**
0	547	23
1	5012	541
2	6100	3832
3	2644	8690
4 o más	557	3783

a. Defina una variable aleatoria x = número de recámaras en casas rentadas y elabore una distribución de probabilidad para esta variable. ($x = 4$ representará 4 recámaras o más.)
b. Calcule el valor esperado y la varianza del número de recámaras en casas rentadas.
c. Defina una variable aleatoria y = número de recámaras en casas propias y elabore una distribución de probabilidad para esta variable. ($y = 4$ representará 4 recámaras o más.)
d. Calcule el valor esperado y la varianza del número de recámaras en casas propias.
e. ¿Qué observaciones resultan al comparar el número de recámaras en casas rentadas y en casas propias?

19. La National Basketball Association (NBA) lleva diversas estadísticas de cada equipo. Dos se refieren al porcentaje de tiros de campo hechos por un equipo y el porcentaje de tiros de tres puntos hechos por un equipo. En parte de la temporada del 2004, el registro de tiros de los 29 equipos de la NBA indicaba que la probabilidad de anotar dos puntos en un tiro de campo era 0.44, y que la probabilidad de anotar tres puntos en un tiro de tres puntos era 0.34 (www.nba.com, 3 de enero de 2004).

a. ¿Cuál es el valor esperado para un tiro de dos puntos de estos equipos?
b. ¿Cuál es el valor esperado para un tiro de tres puntos de estos equipos?
c. Si la probabilidad de hacer un tiro de dos puntos es mayor que la probabilidad de hacer uno de tres puntos, ¿por qué los entrenadores permiten a algunos jugadores hacer un tiro de tres puntos si tienen oportunidad? Use el valor esperado para explicar su respuesta.

20. A continuación se presenta la distribución de probabilidad para los daños pagados por una empresa de seguros para automóviles, en seguros contra choques.

Pago	**Probabilidad**
0	0.85
500	0.04
1 000	0.04
3 000	0.03
5 000	0.02
8 000	0.01
10 000	0.01

a. Use el pago esperado para determinar la prima en el seguro de choques que le permitirá a la empresa cubrir los gastos.
b. La empresa de seguros cobra una tasa anual de $520 por la cobertura de choques. ¿Cuál es el valor esperado de un seguro de choques para un asegurado? (*Indicación*: son los pagos esperados de la empresa menos el costo de cobertura.) ¿Por qué compran los asegurados un seguro de choques con este valor esperado?

21. La siguiente distribución de probabilidad sobre puntuaciones dadas a la satisfacción con el trabajo por una muestra de directivos de alto nivel y de nivel medio en sistemas de la información va desde 1 (muy insatisfecho) hasta 5 (muy satisfecho).

	Probabilidad	
Puntuación de la satisfacción con el trabajo	**Directivo de nivel alto**	**Directivo de nivel medio**
1	0.05	0.04
2	0.09	0.10
3	0.03	0.12
4	0.42	0.46
5	0.41	0.28

a. ¿Cuál es el valor esperado en las puntuaciones dadas a la satisfacción con el trabajo por los ejecutivos de nivel alto?
b. ¿Cuál es el valor esperado en las puntuaciones dadas a la satisfacción con el trabajo por los directivos de nivel medio?
c. Calcule la varianza de las puntuaciones dadas a la satisfacción con el trabajo por los directivos de nivel medio.
d. Calcule la desviación estándar de las puntuaciones dadas a la satisfacción con el trabajo en las dos distribuciones de probabilidad.
e. Compare la satisfacción con el trabajo de los directivos de alto nivel con la que tienen los directivos de nivel medio.

22. La demanda de un producto de una empresa varía enormemente de mes a mes. La distribución de probabilidad que se presenta en la tabla siguiente, basada en los datos de los dos últimos años, muestra la demanda mensual de la empresa.

Demanda unitaria	**Probabilidad**
300	0.20
400	0.30
500	0.35
600	0.15

a. Si la empresa basa las órdenes mensuales en el valor esperado de la demanda mensual, ¿cuál será la cantidad ordenada mensualmente por la empresa para este producto?
b. Suponga que cada unidad demandada genera $70 de ganancia y que cada unidad ordenada cuesta $50. ¿Cuánto ganará o perderá la empresa en un mes si coloca una orden con base en su respuesta al inciso a y la demanda real de este artículo es de 300 unidades?

23. El estudio 2002 New York City Housing and Vacancy Survey indicó que había 59 324 viviendas con renta controlada y 236 263 unidades con renta estabilizada construidas en 1947 o después. A continuación se da la distribución de probabilidad para el número de personas que viven en estas unidades (www.census.gov, 12 de enero de 2004).

Número de personas	**Renta controlada**	**Renta estabilizada**
1	0.61	0.41
2	0.27	0.30
3	0.07	0.14
4	0.04	0.11
5	0.01	0.03
6	0.00	0.01

a. ¿Cuál es el valor esperado para el número de personas que viven en cada tipo de unidad?
b. ¿Cuál es la varianza para el número de personas que viven en cada tipo de unidad?
c. Haga comparaciones entre el número de personas que viven en una unidad de renta controlada y el número de personas que viven en una unidad de renta estabilizada.

24. J. R. Ryland Computer Company está considerando hacer una expansión a la fábrica para empezar a producir una nueva computadora. El presidente de la empresa debe determinar si hacer un proyecto de expansión a mediana gran escala. La demanda del producto nuevo es incierta, la cual, para los fines de planeación puede ser demanda pequeña, mediana o grande. Las probabilidades estimadas para la demanda son 0.20, 0.50 y 0.30, respectivamente. Con x y y representando ganancia anual en miles de dólares, los encargados de planeación en la empresa elaboraron el siguiente pronóstico de ganancias para los proyectos de expansión a mediana y gran escala.

		Ganancia con la expansión a mediana escala		**Ganancia con la expansión a gran escala**	
		x	$f(x)$	y	$f(y)$
	Baja	50	0.20	0	0.20
Demanda	**Mediana**	150	0.50	100	0.50
	Alta	200	0.30	300	0.30

a. Calcule el valor esperado de las ganancias correspondientes a las dos alternativas de expansión. ¿Cuál de las decisiones se prefiere para el objetivo de maximizar la ganancia esperada?
b. Calcule la varianza de las ganancias correspondientes a las dos alternativas de expansión. ¿Cuál de las decisiones se prefiere para el objetivo de minimizar el riesgo o la incertidumbre?

5.4 Distribución de probabilidad binomial

La distribución de probabilidad binomial es una distribución de probabilidad que tiene muchas aplicaciones. Está relacionada con un experimento de pasos múltiples al que se le llama experimento binomial.

Un experimento binomial

Un **experimento binomial** tiene las cuatro propiedades siguientes.

PROPIEDADES DE UN EXPERIMENTO BINOMIAL

1. El experimento consiste en una serie de n ensayos idénticos.
2. En cada ensayo hay dos resultados posibles. A uno de estos resultados se le llama *éxito* y al otro se le llama *fracaso*.
3. La probabilidad de éxito, que se denota p, no cambia de un ensayo a otro. Por ende, la probabilidad de fracaso, que se denota $1 - p$, tampoco cambia de un ensayo a otro.
4. Los ensayos son independientes.

Jacob Bernoulli (1654-1705), el primero de la familia Bernoulli de matemáticos suizos, publicó un tratado sobre probabilidad que contenía la teoría de las permutaciones y de las combinaciones, así como el teorema del binomio.

Si se presentan las propiedades 2, 3 y 4, se dice que los ensayos son generados por un proceso de Bernoulli. Si, además, se presenta la propiedad 1, se trata de un experimento binomial. En la figura 5.2 se presenta una sucesión de éxitos y fracasos de un experimento binomial con ocho ensayos.

En un experimento binomial lo que interesa es el *número de éxitos en* n *ensayos*. Si x denota el número de éxitos en n ensayos, es claro que x tomará los valores 0, 1, 2, 3, ..., n. Dado que el número de estos valores es finito, x es una variable aleatoria *discreta*. A la distribución de probabilidad correspondiente a esta variable aleatoria se le llama **distribución de probabilidad binomial**. Por ejemplo, considere el experimento que consiste en lanzar una moneda cinco veces y observar si la cara de la moneda que cae hacia arriba es cara o cruz. Suponga que se desea contar el número de caras que aparecen en los cinco lanzamientos. ¿Presenta este experimento las propiedades de un experimento binomial? ¿Cuál es la variable aleatoria que interesa? Observe que:

1. El experimento consiste en cinco ensayos idénticos; cada ensayo consiste en lanzar una moneda.
2. En cada ensayo hay dos resultados posibles: cara o cruz. Se puede considerar cara como éxito y cruz como fracaso.
3. La probabilidad de éxito y la probabilidad de fracaso son iguales en todos los ensayos, siendo $p = 0.5$ y $1 - p = 0.5$.
4. Los ensayos o lanzamientos son independientes porque al resultado de un ensayo no afecta a lo que pase en los otros ensayos o lanzamientos.

FIGURA 5.2 UNA POSIBLE SUCESIÓN DE ÉXITOS Y FRACASOS EN UN EXPERIMENTO BINOMIAL DE OCHO ENSAYOS

Propiedad 1: El experimento consiste en $n = 8$ ensayos idénticos.

Propiedad 2: En cada ensayo se obtiene como resultado un éxito o un fracaso.

Ensayos $\longrightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8
Resultados $\longrightarrow$	S	F	F	S	S	F	S	S

Por tanto, se satisfacen las propiedades de un experimento binomial. La variable aleatoria que interesa es x = número de caras que aparecen en cinco ensayos. En este caso, x puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4 o 5.

Otro ejemplo, considere a un vendedor de seguros que visita a 10 familias elegidas en forma aleatoria. El resultado correspondiente de la visita a cada familia se clasifica como éxito si la familia compra un seguro y como fracaso si la familia no compra ningún seguro. Por experiencia, el vendedor sabe que la probabilidad de que una familia tomada aleatoriamente compre un seguro es 0.10. Al revisar las propiedades de un experimento binomial aparece que:

1. El experimento consiste en 10 ensayos idénticos; cada ensayo consiste en visitar a una familia.
2. En cada ensayo hay dos resultados posibles: la familia compra un seguro (éxito) o la familia no compra ningún seguro (fracaso).
3. Las probabilidades de que haya compra y de que no haya compra se supone que son iguales en todas las visitas, siendo $p = 0.10$ y $1 - p = 0.90$.
4. Los ensayos son independientes porque las familias se eligen en forma aleatoria.

Como estos cuatro puntos se satisfacen, este ejemplo es un experimento binomial. La variable aleatoria que interesa es el número de ventas al visitar a las 10 familias. En este caso los valores que puede tomar x son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

La propiedad 3 de un experimento binomial se llama *suposición de estacionaridad* y algunas veces se confunde con la propiedad 4, independencia de los ensayos. Para ver la diferencia entre estas dos propiedades, reconsidere el caso del vendedor que visita a las familias para venderles un seguro. Si a medida que el día avanza, el vendedor se va cansando y va perdiendo entusiasmo, la probabilidad de éxito puede disminuir, por ejemplo, a 0.05 en la décima llamada. En tal caso la propiedad 3 (estacionaridad) no se satisface, y no se tiene un experimento binomial. Incluso si la propiedad 4 se satisface —en cada familia la decisión de comprar o no se hizo de manera independiente— si no se satisface la propiedad 3, no se trata de un experimento binomial.

En las aplicaciones de los experimentos binomiales se emplea una fórmula matemática llamada *función de probabilidad binomial* que sirve para calcular la probabilidad de x éxitos en n ensayos. Empleando los conceptos de probabilidad presentados en el capítulo 4, se mostrará, en el contexto de un ilustrativo problema, cómo se desarrolla la fórmula.

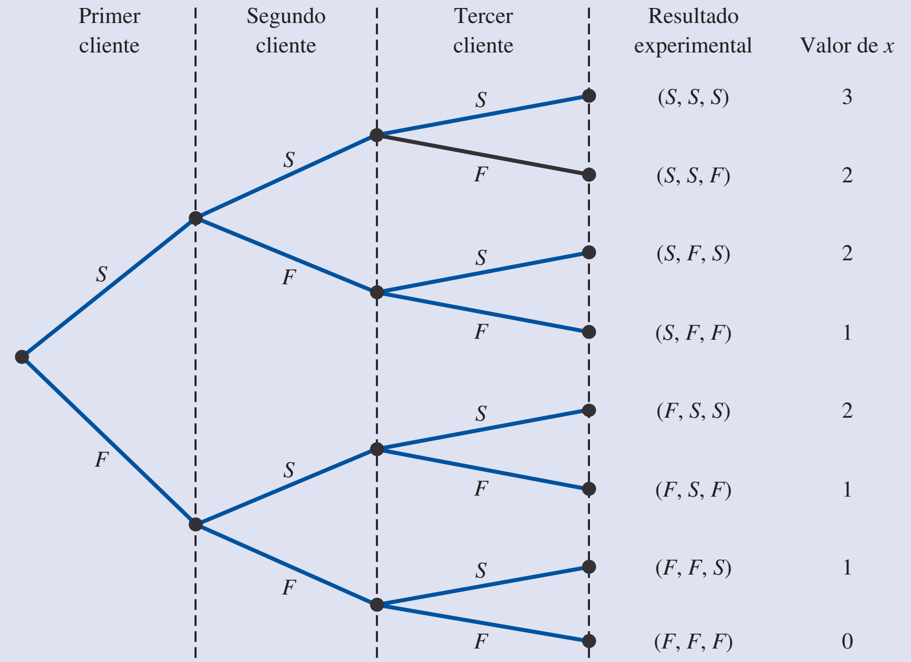
El problema de la tienda de ropa Martin Clothing Store

Considere las decisiones de compra de los próximos tres clientes que lleguen a la tienda de ropa Martin Clothing Store. De acuerdo con la experiencia, el gerente de la tienda estima que la probabilidad de que un cliente realice una compra es 0.30. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de los próximos tres clientes realicen una compra?

Un diagrama de árbol (figura 5.3), permite advertir que el experimento de observar a los tres clientes para ver si cada uno de ellos decide realizar una compra tiene ocho posibles resultados. Entonces, si S denota éxito (una compra) y F fracaso (ninguna compra), lo que interesa son los resultados experimentales en los que haya dos éxitos (decisiones de compra) en los tres ensayos. A continuación verifique que el experimento de las tres decisiones de compra es un experimento binomial. Al verificar los cuatro requerimientos de un experimento binomial, se observa que:

1. Es posible describir el experimento como una serie de tres ensayos idénticos, un ensayo por cada uno de los tres clientes que llegan a la tienda.
2. Cada ensayo tiene dos posibles resultados: el cliente hace una compra (éxito) o el cliente no hace ninguna compra (fracaso).
3. La probabilidad de que el cliente haga una compra (0.30) o de que no haga una compra (0.70) se supone que es la misma para todos los clientes.
4. La decisión de comprar de cada cliente es independiente de la decisión de comprar de los otros clientes.

FIGURA 5.3 DIAGRAMA DE ÁRBOL PARA EL PROBLEMA DE LA TIENDA DE ROPA MARTIN CLOTHING STORE



S = Compra
F = Ninguna compra
x = número de clientes que realizan una compra.

En consecuencia, se satisfacen las propiedades de un experimento binomial.

Con la fórmula siguiente* se calcula el número de resultados experimentales en los que hay exactamente x éxitos en n ensayos.

NÚMERO DE RESULTADOS EXPERIMENTALES EN LOS QUE HAY EXACTAMENTE x ÉXITOS EN n ENSAYOS

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \tag{5.6}$$

donde

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)$$

y por definición,

$$0! = 1$$

Ahora regrese al experimento de las decisiones de compra de tres clientes de la tienda Martin Clothing Store. La ecuación (5.6) sirve para determinar el número de resultados experimentales

* Esta fórmula presentada en el capítulo 4, determina el número de combinaciones de n objetos tomados de x a la vez. En el experimento binomial esta fórmula combinatoria da el número de resultados experimentales (series de n ensayos) en los que hay x éxitos.

en los que hay dos compras; el número de maneras en que son posibles $x = 2$ éxitos en $n = 3$ ensayos. De acuerdo con la ecuación (5.6)

$$\binom{n}{x} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{(3)(2)(1)}{(2)(1)(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

La ecuación (5.6) indica que en tres de los resultados experimentales hay dos éxitos. En la figura 5.3 aparecen denotados por (*S, S, F*), (*S, F, S*) y (*F, S, S*).

Empleando la ecuación (5.6) para determinar en cuántos resultados experimentales hay tres éxitos (compras) en tres ensayos, se obtiene

$$\binom{n}{x} = \binom{3}{3} = \frac{3!}{3!(3-3)!} = \frac{3!}{3!0!} = \frac{(3)(2)(1)}{3(2)(1)(1)} = \frac{6}{6} = 1$$

El único resultado experimental con tres éxitos es el identificado por (*S, S, S*) mostrado en la figura 5.3.

Ya sabe que usando la ecuación (5.6) es posible determinar el número de resultados experimentales en los que hay x éxitos. Sin embargo, si va a determinar la probabilidad de x éxitos en n ensayos, es necesario conocer también la probabilidad correspondiente a cada uno de estos resultados experimentales. Como en un experimento binomial, los ensayos son independientes, para hallar la probabilidad de una determinada sucesión de éxitos y fracasos simplemente se multiplican las probabilidades correspondientes al resultado de cada ensayo.

La probabilidad de que los dos primeros clientes compren y el tercero no compre, denotada por (*S, S, F*) está dada por

$$pp(1 - p)$$

Puesto que la probabilidad de compra en cualquier ensayo es 0.30, la probabilidad de que haya una compra en los dos primeros ensayos y que no haya compra en el tercer ensayo es

$$(0.30)(0.30)(0.70) = (0.30)^2(0.70) = 0.063$$

Hay otros dos resultados experimentales en los que también se obtienen dos éxitos y un fracaso. A continuación se presentan las probabilidades de los tres resultados experimentales en los que hay dos éxitos.

Resultados de los ensayos				
1er. cliente	**2o. cliente**	**3er. cliente**	**Resultado experimental**	**Probabilidad de este resultado experimental**
Compra	Compra	No hay compra	(S, S, F)	$pp(1-p) = p^2(1-p) = (0.30)^2(0.70) = 0.063$
Compra	No hay compra	Compra	(S, F, S)	$p(1-p)p = p^2(1-p) = (0.30)^2(0.70) = 0.063$
No hay compra	Compra	Compra	(F, S, S)	$(1-p)pp = p^2(1-p) = (0.30)^2(0.70) = 0.063$

Observe que los tres resultados experimentales en los que hay dos éxitos tienen la misma probabilidad. Esto se cumple en general. En cualquier experimento binomial todas las series de resultados de ensayos en las que hay x éxitos en n ensayos tienen la *misma probabilidad* de ocurrencia. A continuación se presenta la probabilidad de cada una de las series de ensayos en las que hay x éxitos en n ensayos.

$$\begin{array}{l}\text{Probabilidad de una}\\ \text{determinada serie de}\\ \text{resultados de ensayos}\end{array} = p^x(1-p)^{(n-x)}$$

En el caso de la tienda de ropa Martin Clothing Store, esta fórmula indica que la probabilidad de cualquier resultado experimental con dos éxitos es $p^2(1-p)^{(3-2)} = p^2(1-p)^1 = (0.30)^2(0.70^1) = 0.63$.

Como la ecuación (5.6) da el número de resultados de un experimento binomial en el que hay x éxitos, y la ecuación (5.7) da la probabilidad de cada serie en la que hay x éxitos, combinando las ecuaciones (5.6) y (5.7) se obtiene la **función de probabilidad binomial** siguiente.

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD BINOMIAL

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{(n-x)} \tag{5.8}$$

donde

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{probabilidad de } x \text{ éxitos en } n \text{ ensayos} \\ n &= \text{número de ensayos} \\ \binom{n}{x} &= \frac{n!}{x!(n-x)!} \\ p &= \text{probabilidad de un éxito en cualquiera de los ensayos} \\ 1-p &= \text{probabilidad de un fracaso en cualquiera de los ensayos} \end{aligned}$$

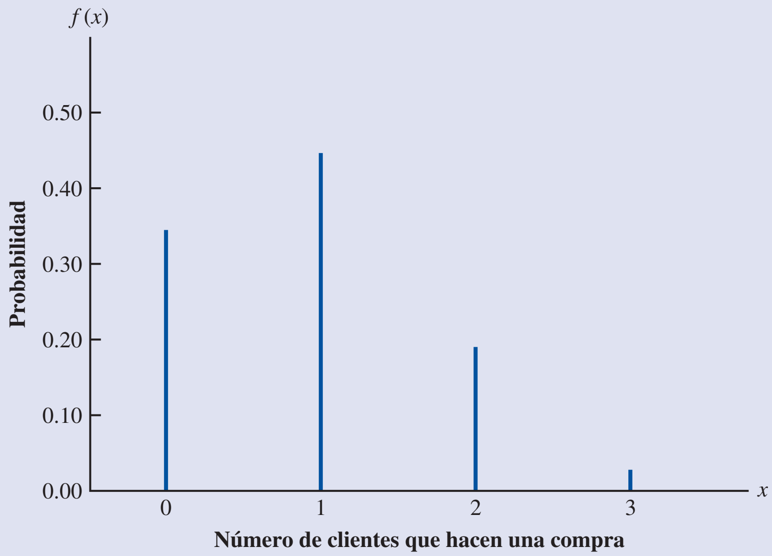
En el ejemplo de la tienda de ropa Martin Clothing Store se calculará ahora la probabilidad de que ningún cliente realice una compra, de que exactamente un cliente realice una compra, de que exactamente dos clientes realicen una compra y de que los tres clientes realicen una compra. Los cálculos se presentan en forma resumida en la tabla 5.7, que da la distribución de probabilidad para el número de clientes que hacen una compra. La figura 5.4 es una gráfica de esta distribución de probabilidad.

La función de probabilidad binomial es aplicable a *cualquier* experimento binomial. Si encuentra que una situación presenta las propiedades de un experimento binomial y conoce los valores de n y p, use la ecuación (5.8) para calcular la probabilidad de x éxitos en n ensayos.

TABLA 5.7 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD BINOMIAL PARA EL NÚMERO DE CLIENTES QUE HACEN UNA COMPRA

x	$f(x)$
0	$\frac{3!}{0!3!}(0.30)^0(0.70)^3 = 0.343$
1	$\frac{3!}{1!2!}(0.30)^1(0.70)^2 = 0.441$
2	$\frac{3!}{2!1!}(0.30)^2(0.70)^1 = 0.189$
3	$\frac{3!}{3!0!}(0.30)^3(0.70)^0 = 0.027$
	1.000

FIGURA 5.4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD BINOMIAL PARA EL NÚMERO DE CLIENTES QUE HACEN UNA COMPRA



Si considera variaciones del experimento de la tienda de ropa, por ejemplo, que lleguen a la tienda 10 clientes en lugar de tres clientes, también se emplea la función de probabilidad binomial dada por la ecuación (5.8). Suponga que tiene un experimento binomial con $n = 10$, $x = 4$ y $p = 0.30$. La probabilidad de que cuatro de los 10 clientes que entran en la tienda de ropa realicen una compra es

$$f(4) = \frac{10!}{4!6!}(0.30)^4(0.70)^6 = 0.2001$$

Uso de las tablas de probabilidades binomiales

Existen tablas que dan la probabilidad de x éxitos en n ensayos de un experimento binomial. Estas tablas son fáciles de usar y los resultados se obtienen más rápidamente que con la ecuación (5.8). La tabla 5 del apéndice B es una de estas tablas de probabilidades binomiales. Una parte de esta tabla se presenta en la tabla 5.8. Para usarla es necesario especificar los valores de n, p y x en el experimento binomial de que se trate. En el ejemplo que se presenta en la parte superior de la tabla 5.8 se ve que la probabilidad de $x = 3$ éxitos en un experimento binomial con $n = 10$ y $p = 0.40$ es 0.2150. Use la ecuación (5.8) para verificar que este mismo resultado se obtiene si usa la función de probabilidad binomial directamente.

Ahora se usará la tabla 5.8 para corroborar la probabilidad de 4 éxitos en 10 ensayos en el problema de la tienda de ropa Martin Clothing Store. Observe que el valor de $f(4) = 0.2001$ se lee directamente de la tabla de probabilidades binomiales, eligiendo $n = 10$, $x = 4$ y $p = 0.30$.

Con las calculadoras modernas estas tablas son casi innecesarias. Es muy fácil evaluar la ecuación (5.8) directamente.

Aun cuando las tablas de probabilidades binomiales son relativamente fáciles de utilizar, es imposible contar con tablas que tengan todos los valores de n y p de un experimento binomial. Sin embargo, con las calculadoras de hoy en día, usar la ecuación (5.8) para calcular la probabilidad deseada no es difícil, en especial si el número de ensayos no es grande. En los ejercicios tendrá la oportunidad de usar la ecuación (5.8) para calcular probabilidades binomiales, a menos que el problema pida que use la tabla de probabilidad binomial.

TABLA 5.8 ALGUNOS VALORES DE LA TABLA DE PROBABILIDAD BINOMIAL
EJEMPLO: $n = 10, x = 3, p = 0.40; f(3) = 0.2150$

						p					
n	***x***	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1004	0.0605	0.0339	0.0176
	2	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2162	0.1612	0.1110	0.0703
	3	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2716	0.2508	0.2119	0.1641
	4	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2194	0.2508	0.2600	0.2461
	5	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.1181	0.1672	0.2128	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0424	0.0743	0.1160	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0098	0.0212	0.0407	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0035	0.0083	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0020
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.3151	0.3874	0.3474	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098
	2	0.0746	0.1937	0.2759	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439
	3	0.0105	0.0574	0.1298	0.2013	0.2503	0.2668	0.2522	0.**2150**	0.1665	0.1172
	4	0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051
	5	0.0001	0.0015	0.0085	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051
	7	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	0.0229	0.0439
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010

Los paquetes de software para estadística como Minitab y los paquetes de hojas de cálculo como Excel también están habilitadas para calcular probabilidades binomiales. Considere el ejemplo de la tienda de ropa Martin Clothing Store con $n = 10$ y $p = 0.30$. En la figura 5.5 se muestran las probabilidades binomiales para todos los valores posibles de x, generadas por Minitab. Observe que estos valores son los mismos que se encuentran en la columna $p = 0.30$ de la tabla 5.8. En el apéndice 5.1 se da paso por paso el procedimiento en Minitab para generar el resultado que se muestra en la figura 5.5. En el apéndice 5.2 se describe cómo usar Excel para calcular probabilidades binomiales.

Valor esperado y varianza en la distribución binomial

En la sección 5.3 se dieron las fórmulas para calcular el valor esperado y la varianza de una variable aleatoria discreta. En el caso especial de que la variable aleatoria tenga una distribución binomial para la que se conoce el número de ensayos n y la probabilidad de éxito p, las fórmulas generales para el valor esperado y la varianza se simplifican. El resultado se muestra a continuación.

VALOR ESPERADO Y VARIANZA EN LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

$$E(x) = \mu = np \tag{5.9}$$

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = np(1 - p) \tag{5.10}$$

FIGURA 5.5 RESULTADOS DE MINITAB QUE MUESTRAN LAS PROBABILIDADES BINOMIALES PARA EL PROBLEMA DE LA TIENDA DE ROPA MARTIN CLOTHING STORE

x	P(X = x)
0.00	0.0282
1.00	0.1211
2.00	0.2335
3.00	0.2668
4.00	0.2001
5.00	0.1029
6.00	0.0368
7.00	0.0090
8.00	0.0014
9.00	0.0001
10.00	0.0000

Para el problema de los tres clientes de la tienda de ropa Martin Clothing Store, use la ecuación (5.9) para calcular el número esperado de clientes que harán una compra.

$$E(x) = np = 3(0.30) = 0.9$$

Suponga que Martin Clothing Store pronostica que el mes próximo 1000 clientes visitarán la tienda. ¿Cuál es el número esperado de clientes que harán una compra? La respuesta es $\mu = np = (1000)(0.30) = 300$. Así, para aumentar el número esperado de compras, Martin debe hacer que más clientes visiten su tienda o de alguna manera aumentar la probabilidad de que una persona que visite la tienda haga una compra.

En el caso de los tres clientes de la tienda de ropa Martin Clothing Store, la varianza y la desviación estándar del número de clientes que harán una compra son

$$\sigma^2 = np(1 - p) = 3(0.3)(0.7) = 0.63$$
$$\sigma = \sqrt{0.63} = 0.79$$

Para los próximos 1000 clientes que visiten la tienda, la varianza y la desviación estándar del número de clientes que harán una compra son

$$\sigma^2 = np(1 - p) = 1000(0.3)(0.7) = 210$$
$$\sigma = \sqrt{210} = 14.49$$

NOTAS Y COMENTARIOS

1. En las tablas binomiales del apéndice B los valores de p llegan sólo hasta 0.50. Es posible pensar que estas tablas no son útiles cuando la probabilidad de éxito es mayor a 0.50. Sin embargo, puede usarlas observando que la probabilidad de $n - x$ fracasos es también la probabilidad de x éxitos. Cuando la probabilidad de éxito es mayor que $p = 0.50$, en lugar de la probabilidad de éxito calcule la probabilidad de $n - x$ fracasos. Cuando $p > 0.50$, la probabilidad de fracaso, $1 - p$, será menor que 0.50.

2. En algunas fuentes se presentan tablas binomiales en forma acumulada. Al usar estas tablas para hallar la probabilidad de x éxitos en n ensayos hay que hacer una resta. Por ejemplo, $f(2) = P(x \leq 2) - P(x \leq 1)$. Las tablas que se presentan en este libro dan estas probabilidades. Para calcular probabilidades acumuladas usando las tablas de este libro, sume las probabilidades individuales. Por ejemplo, para calcular $P(x \leq 2)$ usando las tablas del libro, sume $f(0) + f(1) + f(2)$.