Clase 2020-02-04

David Gabriel Corzo Mcmath

2020-Feb-04 10:18:27

1. 13.1 Funciones vectoriales y curvas en el espacio

- Una función vectorial $\vec{r}: R \implies V_3$:

  $$\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), z(t) \rangle$$

  La variable t es un parámetro.

- Dominio: Números reales, Rango: vector 3D:

  $$\begin{gathered} \vec{r}\mathbb{IR} \implies V_3 \quad \vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle \\ \text{t es un parámetro} \quad \vec{r} = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath} + h(t)\hat{k} \end{gathered}$$

- Ejemplo de una función vectorial:

  $$\begin{aligned} \vec{r} &= \langle a, b, c \rangle + t \langle d, e, f \rangle \\ \vec{r} &= \langle a + td, b + et, c + tf \rangle \\ x = f(t), \quad y = g(t), \quad z &= h(t) \end{aligned}$$

- Ecs. Paramétricas de una función vectorial:

- Dominio de ina función vectorial: encuentre el dominio de cada función componente. El dominio de $\vec{r}$ es la intersección de los dominios de cada función componente.

1.1. Ejercicios

1. Encuentre el dominio:

   $$\begin{aligned} r(t) &= \left\langle \sqrt{r^2 - 9}, e^{5ln(t)}, ln(t+5) \right\rangle \\ &\text{Evadir raíces negativas, y ln(0)} \\ \sqrt{t^2 - 9} \quad &\implies \quad \text{Definida} \quad t^2 \geq 9 \\ e^{\sin(t)} \quad &\text{siempore definida} \\ ln(t+5) \quad \text{Definida cuando} \quad &t + 5 > 0 \qquad (-5, \infty) \\ \therefore \text{ El dominio es de} \quad &(-5, \infty) \cup (-5, -3) \cup (-3, 3) \cup [3, \infty) \end{aligned}$$

   Recordar: [a,b] el numero si es parte del dominio a,b son partes del dominio. (a,b) los puntos a,b no son parte del dominio.

2.

$$\vec{s}(t) = \left\langle \sin^3(t^2), \cosh(\frac{t}{t^2+1}), \frac{1}{e^t+4} \right\rangle$$
$$sin^3(t^2), ID_{f(t)} = IR$$
$$\cosh(\tfrac{t}{t^2+1}), ID_{g(t)} = IR$$
$$\tfrac{1}{e^t+4}, ID_{h(t)} = IR$$
$$\therefore \text{ Dominio de } \vec{s}(t) = (-\infty, \infty)$$
$$e^+4 \neq 0 \implies e^t = -4 \implies t = \underbrace{ln(-4)}_{\text{indefinido}}$$

2. Limites y continuidad

-
$$\lim_{t\to a} = \left\langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t) \right\rangle$$
- Evalúe el límite de cada función componente.
- Si no existe por lo menos un límite de una función componente, entonces $\lim_{t\to a} \vec{r}(t)$ no existe.
- f(t) está definida en t=a
$$\lim_{t\to a} f(t) = f(a)$$
- Si se indefine y tiene forma de $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ usar L'Hôpital.
$$\lim_{t\to a} \frac{f(t)}{g(t)} \underbrace{=}_{\frac{0}{0}} \lim_{t\to a} \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad \text{L'Hopital}$$
- Contínua en $t = a$ si $\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$
- Evite asíntotas verticales, saltos y agujeros. Ejemplo:
$$\lim_{t\to a} \frac{\sin(x)}{x} \underbrace{=}_{\text{LH}} \lim_{t\to a} \frac{cos(x)}{1} = 1$$

2.1. Ejercicios

- Sea $\vec{r}(t) = \left\langle \frac{\tan(\pi t)}{t}, e^{t-2}, \frac{ln(t-1)}{t^2-1} \right\rangle$.
- Analice si la función $\vec{r}(t)$ es contínua en $t = 2$.

$$\vec{r}(t) = \left\langle \frac{\tan 2\pi}{2}, e^0, \frac{ln(1)}{3} \right\rangle$$
$$\lim_{t\to 1} \underbrace{\frac{\tan \pi t}{t}}_{\frac{0}{2}} = 0$$
$$\lim_{t\to 2} e^{t-2} = 1$$
$$\lim_{t\to 2} \tfrac{ln(t-1)}{t^2-1} = 0$$
$$\therefore \vec{r} \text{ si es contínua en t=2 } \lim_{t\to 1} \vec{r}(t) = \vec{r}(2)$$

- Encuentre $\lim_{t\to 1}\vec{r}(t)$ analice el límite de cada función componente por separado.

$$f:\lim_{t\to 1}\frac{\tan 2\pi}{2}=\frac{0}{1}$$
$$g:\lim_{t\to 1}e^{t-2}=e^{-1}$$
$$h:\lim_{t\to 1}\frac{ln(t-1)}{t^2-1}=\text{ No existe, por ln(0) estar indefinido.}$$

- Analice si $\vec{r}(t)$ es contínua e t=1.

$$\underbrace{\lim_{t\to 1}\vec{r}(t)=\vec{r}(1)}_{\text{No es contínua en t=1, r(1) est+a indefinida.}}$$

- Agujero $\vec{s}(t)=\left\langle\frac{\tan\pi t}{t-1},e^{t-2},\frac{ln(2t-1)}{t^2-1}\right\rangle$
  No es contínua en t=1, pero su límite existe.

$$\lim_{t\to 1}\frac{\tan\pi t}{t-1}\underbrace{=}_{LH}\lim_{t\to 1}\frac{\pi\sec^2\pi t}{1}=\frac{\pi}{(\cos\pi)^2}=\pi$$
$$\lim_{t\to 1}e^{t-2}=e^{-}1=\frac{1}{e}$$
$$\lim_{t\to 1}\frac{2t-1}{t^2-1}\underbrace{=}_{\frac{0}{0}}=\lim_{t\to 1}\frac{\frac{2}{st-1}}{2t}=\lim_{t\to 1}\frac{2}{2t(2t-1)}=\frac{1}{1(2-1)}=1$$
$$\therefore\lim_{t\to 1}\left\langle\pi,\frac{1}{e},1\right\rangle\quad\text{es un agujero }\vec{s}(1)\text{ está indefinido}$$

3. Curvas en el espacio

$$x=f(t)$$
$$y=g(t)$$
$$z=h(t)$$

Figura 1: Curvas paramétricas en el espacio

3.1. Espirales

- Grafique la curva $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = \underbrace{2\hat{\imath}\sin(t)}_{x} + \underbrace{2\hat{\jmath}\cos(t)}_{y} + \underbrace{\hat{k}\frac{t}{\pi}}_{z}$$

t	x	y	z
0	0	2	$0{,}5$
$\frac{\pi}{2}$	2	0	$0{,}5$
π	0	-2	1
$\frac{3\pi}{2}$	2	0	$1{,}5$
2π	0	2	2

Figura 2: Curva paramétrica

- Grafique:

$$\vec{r}(t) = \langle \sin \pi t, t, \cos \pi t \rangle$$

Graficar la circumferencia $x^2 + z^2 = 1\,, y = 0$

$\vec{r}(0) = \langle 0, 0, 1 \rangle$ El vector que nos servirá para delimitar la gráfica del espiral

Por ejemplo: $\vec{s}(t) = \left\langle \sin t, t^2, \cos t \right\rangle$