20. LA MINIMIZACIÓN DE LOS COSTES

Nuestro objetivo es estudiar el comportamiento de las empresas maximizadoras del beneficio en los mercados competitivos y en los no competitivos. En el capítulo anterior iniciamos este estudio analizando directamente el problema de la maximización del beneficio.

Sin embargo, veremos que también pueden extraerse algunas conclusiones importantes adoptando un enfoque más indirecto. Nuestra estrategia consiste en dividir el problema de la maximización del beneficio en dos partes. Primero analizaremos el problema de la minimización de los costes de un nivel dado de producción y, a continuación, veremos cómo se elige el más rentable. En este capítulo estudiaremos el primer paso, es decir, la minimización de los costes de un nivel dado de producción.

20.1 La minimización de los costes

Supongamos que tenemos dos factores de producción, x_1 y x_2, cuyos precios son w_1 y w_2, y que queremos averiguar la forma más barata de producir una determinada cantidad y. Si x_1 y x_2 miden las cantidades utilizadas de los dos factores y $f(x_1, x_2)$ es la función de producción de la empresa, este problema puede expresarse de la forma siguiente:

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2$$
$$\text{sujeta a } f(x_1, x_2) = y.$$

Deben hacerse las mismas advertencias que mencionamos en el capítulo anterior sobre este tipo de análisis: cuando calculamos los costes, hemos de asegurarnos de que los incluimos todos y de que el periodo de tiempo estudiado es el mismo.

La solución de este problema de minimización de los costes —los costes mínimos necesarios para obtener el nivel de producción deseado— depende de w_1, w_2, e y, por lo que lo expresamos de la forma siguiente: $c(w_1, w_2, y)$. Esta función, denominada **función de costes**, nos será de enorme utilidad, ya que mide los costes mínimos necesarios para producir y unidades cuando los precios de los factores son (w_1, w_2).

Para comprender la solución de este problema, representemos en el mismo gráfico los costes y las restricciones tecnológicas a los que se enfrenta la empresa. Las isocuantas muestran las restricciones tecnológicas, es decir, todas las combinaciones de x_1 y x_2 que pueden producir y.

Supongamos que queremos representar todas las combinaciones de factores que tienen un nivel dado de costes, C. Éstas satisfacen la ecuación siguiente:

$$w_1x_1 + w_2x_2 = C,$$

de la que se deduce que

$$x_2 = \frac{C}{w_2} - \frac{w_1}{w_2}x_1.$$

Es fácil ver que se trata de una recta cuya pendiente es $-w_1/w_2$ y cuya ordenada en el origen es C/w_2. Variando C obtenemos una familia de **rectas isocoste**. Todos los puntos de una misma recta tienen el mismo coste, C, y cuanto más arriba estén las rectas, mayor será éste.

Por lo tanto, nuestro problema de minimización de los costes también puede formularse de la manera siguiente: hállese el punto de la isocuanta que se encuentra en la recta isocoste más baja posible. La figura 20.1 muestra ese punto.

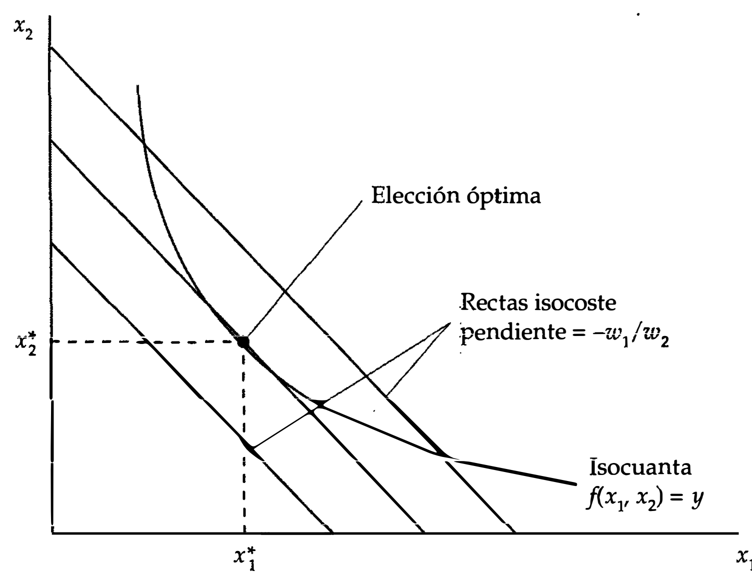

Figura 20.1. La minimización de los costes. Las cantidades de los factores que minimizan los costes de producción pueden determinarse hallando el punto de la isocuanta al que corresponde la menor recta isocoste.

Obsérvese que si la solución óptima exige utilizar ambos factores y si la isocuanta es lisa, el punto de minimización de los costes se caracteriza por una condición de tangencia: la pendiente de la isocuanta debe ser igual a la pendiente de la curva isocoste. O utilizando la terminología del capítulo 18 *la relación técnica de sustitución debe ser igual a la relación de precios de los factores:*

$$-\frac{PM_1(x_1^*, x_2^*)}{PM_1(x_1^*, x_2^*)} = RTS(x_1^*, x_2^*) = -\frac{w_1}{w_2}. \qquad [20.1]$$

Si tenemos una solución de esquina en la que no se utiliza uno de los factores, no es necesario que se satisfaga esta condición de tangencia. Del mismo modo, si la función de producción tiene vértices, la condición de tangencia no tiene sentido. Estas situaciones son similares a las que encontramos en el caso del consumidor, por lo que en este capítulo no insistiremos más en ellas.

No es fácil comprender las operaciones algebraicas en las que se basa la ecuación [20.1]. Consideremos el caso de una variación de la forma de producción $(\Delta x_1, \Delta x_2)$ que mantiene constante el nivel de producción. Esa variación debe satisfacer la condición siguiente:

$$PM_1(x_1^*, x_2^*)\Delta x_1 + PM_2(x_1^*, x_2^*)\Delta x_2 = 0. \qquad [20.2]$$

Obsérvese que Δx_1 y Δx_2 deben tener signos opuestos, de tal manera que si se aumenta la cantidad del factor 1 debe disminuirse la cantidad del factor 2, con el fin de mantener constante el volumen de producción.

Si nos encontramos en el coste mínimo, esta variación no puede reducir los costes, por lo que

$$w_1\Delta x_1 + w_2\Delta x_2 \geq 0. \qquad [20.3]$$

Consideremos ahora la variación $(-\Delta x_1, -\Delta x_2)$. Ésta también da lugar a un nivel de producción constante y tampoco puede reducir los costes, lo que implica que

$$-w_1\Delta x_1 - w_2\Delta x_2 \geq 0. \qquad [20.4]$$

Uniendo las expresiones [20.3] y [20.4], tenemos que

$$w_1\Delta x_1 + w_2\Delta x_2 = 0. \qquad [20.5]$$

Despejando $\Delta x_2/\Delta x_1$, en las ecuaciones [20.2] y [20.5], se obtiene

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{w_1}{w_2} = -\frac{PM_1(x_1^*, x_2^*)}{PM_2(x_1^*, x_2^*)},$$

que es exactamente la condición de la minimización de los costes obtenidos antes mediante un argumento geométrico.

Obsérvese que la figura 20.1 tiene un cierto parecido con la del problema de la elección del consumidor examinado anteriormente. Sin embargo, aunque las soluciones parecen iguales, en realidad no se trata del mismo tipo de problema. En el del consumidor, la recta representaba la restricción presupuestaria y el consumidor se desplazaba a lo largo de ella para hallar la posición que prefería. En el problema del productor, la isocuanta representa la restricción tecnológica y el productor se desplaza a lo largo de ella para hallar la posición óptima.

La elección de aquellos factores que generan costes mínimos a la empresa depende, en general, de los precios y del nivel de producción deseado, por lo que las expresamos de la siguiente manera: $x_1(w_1, w_2, y)$ y $x_2(w_1, w_2, y)$. Estas funciones se denominan **funciones de demanda condicionadas de los factores o demandas derivadas de los factores** y miden la relación entre los precios y la producción y la elección óptima de los factores por parte de la empresa, *condicionada* a que ésta produzca una cantidad dada, y.

Es necesario diferenciar claramente las demandas *condicionadas* y las demandas de los factores maximizadoras del beneficio analizadas en el capítulo anterior. Las demandas condicionadas muestran las elecciones minimizadoras del coste correspondiente a un *nivel* dado de producción; las demandas de factores maximizadoras del beneficio muestran las elecciones maximizadoras del beneficio correspondiente a un *precio* dado del producto.

Las demandas condicionadas de los factores no suelen observarse directamente; son un instrumento analítico hipotético. Nos indica qué cantidad de cada factor *utilizaría* si quisiera obtener un determinado nivel de producción de la manera más barata posible. Sin embargo, las demandas condicionadas de los factores son útiles para distinguir el problema de la determinación del nivel óptimo de producción del problema de la determinación del método de producción más eficaz desde el punto de vista de los costes.

Ejemplo: Minimización de los costes con tecnologías concretas

Supongamos que consideramos una tecnología en la que los factores son complementarios perfectos, de manera que $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$. En ese caso, si queremos obtener y unidades de producción, es evidente que necesitamos y unidades de x_1 y y unidades de x_2. Por lo tanto, los costes mínimos de producción son

$$c(w_1, w_2, y) = w_1y + w_2y = (w_1 + w_2)y.$$

¿Qué ocurre con la tecnología en la que los factores son sustitutivos perfectos, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$? Dado que los factores 1 y 2 son sustitutivos perfectos en la producción, es evidente que la empresa utilizará el más barato. Por lo tanto, el coste mínimo de y unidades de producción será el menor de w_1y o w_2y. En otras palabras,

$$c(w_1, w_2, y) = \min\{w_1 y, w_2 y\} = \min\{(w_1, w_2\}y.$$

Finalmente, consideremos la tecnología Cobb-Douglas, que se describe mediante la fórmula $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$. En este caso, podemos utilizar el cálculo diferencial para mostrar que la función de coste tendrá la forma

$$c(w_1, w_2, y) = K w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}},$$

donde K es una constante que depende de a y b. Los detalles del cálculo se presentan en el apéndice.

20.2 La minimización revelada del coste

El supuesto de que la empresa elige factores que minimizan el coste de producción tiene consecuencias importantes en cuanto a la forma en que varían las elecciones observadas cuando varían los precios de los factores.

Supongamos que tenemos dos conjuntos de precios, (w_1^t, w_2^t) y (w_1^s, w_2^s) y las elecciones correspondientes de la empresa (x_1^t, x_2^t) y (x_1^s, x_2^s). Supongamos también que cada una de estas elecciones genera el mismo nivel de producción y. En este caso, si cada elección minimiza el coste a sus precios correspondientes, deben cumplirse las siguientes desigualdades:

$$w_1^t x_1^t + w_2^t x_2^t \leq w_1^t x_1^s + w_2^t x_2^s$$

y

$$w_1^s x_1^s + w_2^s x_2^s \leq w_1^s x_1^t + w_2^s x_2^t.$$

Si la empresa siempre elige la forma de producir y unidades que supone un coste menor, las decisiones tomadas en los periodos t y s deben satisfacer estas desigualdades, a las que llamaremos **axioma débil de la minimización del coste**. Si expresamos la segunda ecuación de la forma siguiente:

$$-w_1^s x_1^t - w_2^s x_2^t \leq -w_1^s x_1^s - w_2^s x_2^s$$

y la sumamos a la primera, obtenemos

$$(w_1^t - w_1^s)x_1^t + (w_2^t - w_2^s)x_2^t \leq (w_1^t - w_1^s)x_1^s + (w_2^t - w_2^s)x_2^s,$$

de donde se deduce que

$$(w_1^t - w_1^s)(x_1^t - x_1^s) + (w_2^t - w_2^s)(x_2^t - x_2^s) \leq 0.$$

Utilizando Δ para representar las *variaciones* de las demandas de los dos factores, tenemos que

$$\Delta w_1 \Delta x_1 + \Delta w_2 \Delta x_2 \leq 0.$$

Esta ecuación se deduce únicamente del supuesto de la conducta minimizadora del coste. Implica la existencia de restricciones sobre la forma en que puede variar el comportamiento de la empresa cuando varían los precios de los factores y la producción permanece constante.

Por ejemplo, si sube el precio del primer factor y se mantiene constante el del segundo, entonces $\Delta w_2 = 0$, por lo que la desigualdad se convierte en

$$\Delta w_1 \Delta x_1 \leq 0.$$

Si sube el precio del factor 1, esta desigualdad implica que debe disminuir su demanda. Por tanto, las funciones de demanda condicionadas deben tener pendiente negativa.

¿Qué podemos decir sobre la forma en que varían los costes mínimos cuando alteramos los parámetros del problema? Es fácil ver que si sube el precio de cualquiera de los dos factores, deben aumentar los costes: si se encarece un bien y el precio del otro no varía, los costes mínimos nunca pueden disminuir y, en general, aumentarán. Del mismo modo, si la empresa decide incrementar su producción, los costes tendrán que aumentar.

20.3 Los rendimientos de escala y la función de costes

En el capítulo 18 analizamos el concepto de rendimientos de escala relativo a la función de producción. Recuérdese que una tecnología tiene rendimientos crecientes de escala, decrecientes o constantes cuando $f(tx_1, tx_2)$ es mayor, menor o igual que $tf(x_1, x_2)$, respectivamente, cualquiera que sea $t > 1$. Como veremos, existe una curiosa relación entre el tipo de rendimientos de escala que muestra una función de producción y la conducta de la función de costes.

Consideremos primero los rendimientos constantes de escala. Imaginemos que hemos resuelto el problema de la minimización del coste para obtener 1 unidad de producción, por lo que conocemos la **función de coste unitario,** $c(w_1, w_2, 1)$. ¿Cuál es la forma más barata de obtener y unidades de producción? La respuesta es sencilla: basta multiplicar por y la cantidad de cada factor que estábamos utilizando para obtener 1 unidad de producción. Eso significa que el coste mínimo necesario para producir y unidades es $c(w_1, w_2, 1)y$. En el caso de los rendimientos constantes de escala, la función de costes es lineal con respecto a la producción.

¿Qué ocurre si hay rendimientos crecientes de escala? En ese caso, los costes aumentan menos que proporcionalmente en relación con la producción. Si la empresa decide duplicar su producción. puede hacerlo incurriendo en un coste *inferior* al doble, siempre que los precios de los factores permanezcan fijos. Ésta es una consecuencia natural de los rendimientos crecientes de escala: si la empresa duplica sus factores, duplica con creces su producción. Por lo tanto, si quiere duplicar su producción puede hacerlo utilizando menos del doble de cada factor.

Pero utilizando el doble de cada factor se duplican exactamente los costes. Por lo tanto, utilizando menos del doble de cada uno, los costes suben menos del doble, lo que equivale a decir que la función de costes aumenta menos que proporcionalmente en relación con la producción.

Estos hechos pueden expresarse en relación con la conducta de la **función de coste medio** que es simplemente el coste *unitario* de y unidades de producción:

$$CMe(y) = \frac{c(w_1, w_2, y)}{y}.$$

Hemos visto antes que si la tecnología tiene rendimientos constantes de escala, la función de costes tiene la forma $c(w_1, w_2, y) = c(w_1, w_2, 1)y$, lo que significa que la función de coste medio es

$$CMe(w_1, w_2, y) = \frac{c(w_1, w_2, 1)y}{y} = c(w_1, w_2, 1).$$

Es decir, el coste por unidad de producción es constante, cualquiera que sea el nivel de producción que desee la empresa.

Si la tecnología tiene rendimientos crecientes de escala, los costes aumentan menos que proporcionalmente con respecto a la producción, por lo que a medida que aumenta ésta los costes medios decrecen.

Del mismo modo, si la tecnología tiene rendimientos decrecientes de escala, los costes medios aumentan conforme aumenta la producción.

Como hemos visto antes, una tecnología dada puede tener *áreas* de rendimientos de escala constantes, crecientes o decrecientes, es decir, la producción puede aumentar en la misma proporción, más o menos deprisa, respectivamente, que la escala de operaciones de la empresa. Del mismo modo, la función de costes puede aumentar igual, menos o más rápidamente que la producción, lo que implica que la función de coste medio puede permanecer constante, disminuir o aumentar, según sea el nivel de producción. En el siguiente capítulo analizaremos más detalladamente estas posibilidades.

A continuación, centraremos nuestra atención, fundamentalmente, en la función de costes en relación a la variable producción. En la mayoría de los casos consideraremos que los precios son fijos y están predeterminados y que los costes dependen únicamente de la decisión que tome la empresa respecto a la producción. Por lo tanto, en lo que sigue, expresaremos la función de costes exclusivamente en función de la producción: $c(y)$.

20.4 Los costes a largo y a corto plazo

La función de costes se define como el coste mínimo necesario para conseguir un nivel dado de producción. Muchas veces es importante distinguir entre los costes mínimos en que incurre la empresa cuando puede ajustar todos sus factores de producción y los costes mínimos en que incurre cuando sólo puede ajustar algunos.

Hemos definido el corto plazo como el periodo de tiempo en el que algunos de los factores de producción deben utilizarse en una cantidad fija, y el largo plazo como el periodo de tiempo en el que es posible alterarlos todos. **La función de costes a corto plazo** se define como el coste mínimo necesario para conseguir un nivel dado de producción, ajustando únicamente los factores variables; y **la función de costes a largo plazo**, como el coste mínimo necesario para conseguir un nivel dado de producción, ajustando *todos* los factores.

Supongamos que, a corto plazo, el factor 2 es fijo y tiene un nivel predeterminado, $\bar{x}_2$ pero que, a largo plazo, puede variar. En este caso, la función de costes a corto plazo se define de la forma siguiente:

$$c_s(y, \bar{x}_2) = \min_{x_1} w_1x_1 + w_2\bar{x}_2$$

$$\text{sujeta a } f(x_1, \bar{x}_2) = y.$$

Obsérvese que, en general, el coste mínimo necesario a corto plazo para obtener y unidades de producción depende de la cantidad existente del factor fijo y de su coste.

En el caso en que hay dos factores, es fácil resolver este problema de minimización: basta encontrar la cantidad menor de x_1 tal que $f(x_1, \bar{x}_2) = y$. Sin embargo, si hay muchos factores de producción que son variables a corto plazo, el problema de minimización de los costes exige la realización de cálculos más complejos.

La función de demanda a corto plazo del factor 1 es la cantidad de dicho factor que minimiza los costes. Depende, normalmente, tanto de los precios de los factores como de los niveles de los factores fijos, por lo que las demandas de los factores a corto plazo son

$$x_1 = x_1^s(w_1, w_2, \bar{x}_2, y)$$
$$x_2 = \bar{x}_2.$$

Estas ecuaciones nos dicen, por ejemplo, que si el tamaño de una fábrica es fijo a corto plazo, el número de trabajadores que desee contratar la empresa, dado un conjunto de precios y una decisión sobre el nivel de producción, depende, por lo general, de la capacidad de la fábrica.

Obsérvese que, de acuerdo con la definición de la función de costes a corto plazo,

$$c_s(y, \bar{x}_2) = w_1x_1^s(w_1, w_2, \bar{x}_2, y) + w_2\bar{x}_2.$$

Esta expresión significa simplemente que el coste mínimo necesario para obtener el nivel de producción y es el que corresponde a la elección de factores minimizadora del coste. Esto, además de ser cierto por definición, es útil.

En este ejemplo, la función de costes a largo plazo se define de la forma siguiente:

$$c(y) = \min_{x_1, x_2} w_1x_1 + w_2x_2$$

$$\text{sujeta a } f(x_1, x_2) = y.$$

En este caso, los factores pueden variar. Los costes a largo plazo sólo dependen del nivel de producción que desee obtener la empresa y de los precios de los factores. Sea la función de costes a largo plazo $c(y)$ y expresemos la demanda de los factores a largo plazo de la forma siguiente:

$$x_1 = x_1(w_1, w_2, y)$$
$$x_2 = x_2(w_1, w_2, y).$$

La función de costes a largo plazo también puede expresarse:

$$c(y) = w_1x_1(w_1, w_2, y) + w_2x_2(w_1, w_2, y),$$

lo que, al igual que antes, significa que los costes mínimos son aquellos en que incurre la empresa cuando su elección de los factores es minimizadora de los costes.

Existe una interesante relación entre la función de costes a corto plazo y la función de costes a largo plazo que utilizaremos en el siguiente capítulo. Para mayor sencillez, supongamos que los precios de los factores son fijos y están predeterminados y expresemos sus demandas a largo plazo de la forma siguiente:

$$x_1 = x_1(y)$$
$$x_2 = x_2(y).$$

En ese caso, la función de costes a largo plazo también puede expresarse mediante la siguiente ecuación,

$$c(y) = c_s(y, x_2(y)).$$

La ecuación nos dice que los costes mínimos en que incurre la empresa cuanto todos los factores son variables son los mismos que aquellos en que incurre cuando el factor 2 es fijo e igual al *nivel que minimiza los costes a largo plazo.* De ello se deduce que la demanda a largo plazo del factor variable —la elección minimizadora de los costes— es

$$x_1(w_1, w_2, y) = x_1^s(w_1, w_2, x_2(y), y).$$

Esta ecuación muestra que la cantidad del factor variable que, a largo plazo, minimiza los costes es aquella que la empresa elegiría si tuviera, a corto plazo, la cantidad del factor fijo que minimiza los costes a largo plazo.

20.5 Costes fijos y cuasifijos

En el capítulo 19 distinguimos los factores fijos de los cuasifijos: los primeros son aquellos que deben pagarse siempre, independientemente de que la empresa produzca o no, mientras que los segundos son los que deben pagarse sólo si la empresa decide producir algo.

Es natural que definamos ahora los costes fijos y los cuasifijos de una manera parecida. Los **costes fijos** son los costes de los factores fijos: no dependen del nivel de producción y, en particular, deben pagarse produzca o no produzca la empresa. Los **costes cuasifijos** tampoco dependen del nivel de producción, pero sólo es necesario pagarlos si la empresa produce una cantidad positiva.

Por definición, a largo plazo no existen costes fijos. Sin embargo, es fácil que existan costes cuasifijos. Si es necesario gastar una cantidad fija de dinero antes de poder producir, habrá costes cuasifijos.

20.6 Los costes irrecuperables

Los costes irrecuperables (*sunk costs*) son otro tipo de costes fijos. Como mejor se explica el concepto es poniendo un ejemplo. Supongamos que hemos decidido alquilar una oficina durante un año. El alquiler mensual que nos hemos comprometido a pagar es un coste fijo, ya que estamos obligados a pagarlo independientemente de la cantidad que produzcamos. Supongamos ahora que decidimos hacer reformas en la oficina pintándola y comprando mobiliario. El coste de la pintura es un coste fijo, pero también es un **coste irrecuperable**, ya que es un pago que no puede recuperarse. En cambio, el coste de la adquisición del mobiliario no es totalmente irrecuperable, ya que podemos revenderlo cuando deje de interesarnos. Lo único irrecuperable es la *diferencia* entre el coste del mobiliario nuevo y el del usado.

Para expresarlo más detalladamente, supongamos que pedimos un préstamo de 2.000.000 de pesetas a comienzos de año, por ejemplo, a un tipo de interés del 10 por ciento. Firmamos un contrato de arrendamiento de una oficina y pagamos 1.200.000 pesetas por adelantado en concepto de alquiler por un año. Gastamos 600.000 en mobiliario de oficina y 200.000 en pintar la oficina. A finales de año, devolvemos el préstamo de 2.000.000 más 200.000 de intereses y vendemos los muebles usados por 500.000.

Nuestros costes irrecuperables totales consisten en 1.200.000 pesetas de alquiler, 200.000 de intereses, 200.000 de pintura, pero sólo 100.000 de mobiliario, ya que 500.000 del gasto inicial en muebles son recuperables.

La diferencia entre los costes irrecuperables y los recuperables puede ser importante. Un gasto de 10.000.000 para comprar tres camiones ligeros parece mucho dinero, pero si los podemos vender más tarde en el mercado de camiones usados por 8.000.000, el coste irrecuperable efectivo es de 2.000.000 solamente. Un gasto de 10.000.000 en una prensa hecha de encargo que sólo sirve para fabricar un producto muy especial, y cuyo valor de reventa sea nulo es muy diferente; en este caso, todo el gasto es irrecuperable.

La mejor manera de no equivocarse es asegurarse de que todos los gastos se consideran un flujo: ¿cuánto cuesta realizar las actividades de la empresa durante un año? De esa forma, es menos probable que olvidemos el valor de reventa del equipo de capital y más probable que mantengamos clara la distinción entre costes irrecuperables y costes recuperables.

Resumen

1. La función de costes, $c(w_1, w_2, y)$, mide los costes mínimos necesarios para conseguir un determinado nivel de producción, dados los precios de factores.
2. La conducta minimizadora de los costes impone restricciones observables sobre las decisiones que toma la empresa. En particular, exige que las funciones de demanda condicionada de los factores tengan pendiente negativa.
3. Existe una estrecha relación entre los rendimientos de escala de una tecnología determinada y la forma de la función de costes. Si hay rendimientos *crecientes* de escala, el coste medio es *decreciente;* si hay rendimientos *decrecientes* de escala, el coste medio es *creciente;* y si hay rendimientos *constantes* de escala, el coste medio es constante.

Problemas

1. Demostremos que una empresa maximizadora del beneficio siempre minimizará los costes.
2. Si una empresa está produciendo en un punto en el que $PM_1/w_1 > PM_2/w_2$, ¿qué puede hacer para reducir los costes y mantener el mismo nivel de producción?
3. Supongamos que una empresa minimizadora del coste utiliza dos factores que son sustitutivos perfectos: Si tienen el mismo precio, ¿cómo son las demandas condicionadas de los factores?
4. Sube el precio del papel que utiliza una empresa minimizadora de los costes. Ésta responde alterando su demanda de determinados factores, pero mantiene constante la producción. ¿Qué ocurre con su utilización de papel?

5. Si una empresa utiliza n factores ($n > 2$), ¿qué desigualdad se deriva de la teoría de la minimización revelada del coste, en relación con las variaciones de los precios de los factores (Δw_i) y las variaciones de sus demandas (Δx_i), dado el nivel de producción?

Apéndice

Estudiamos el problema de la minimización de los costes planteado en este capítulo utilizando las técnicas de optimización explicadas en el capítulo 5. Se trata de un problema de minimización sujeta a restricciones del tipo

$$\min_{x_1, x_2} w_1x_1 + w_2x_2$$

$$\text{sujeta a } f(x_1, x_2) = y.$$

Recuérdese que existen varias técnicas para resolver esta clase de problemas. Una de ellas consiste en introducir la restricción en la función objetivo. Esta técnica también puede utilizarse cuando tenemos una forma funcional concreta de $f(x_1, x_2)$, pero generalmente no resulta muy práctica.

El segundo método es el de los multiplicadores de Lagrange, que resulta perfectamente adecuado. Para aplicarlo, formulemos el lagrangiano

$$L = w_1x_1 + w_2x_2 - \lambda(f(x_1, x_2) - y)$$

y derivemos con respecto a x_1, x_2 y λ; de esta forma obtenemos las condiciones de primer orden:

$$w_1 - \lambda\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0$$

$$w_2 - \lambda\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$$

$$f(x_1, x_2) - y = 0.$$

La última condición es simplemente la restricción. Reordenando las dos primeras ecuaciones y dividiendo la primera por la segunda, tenemos que

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}.$$

Obsérvese que este resultado es igual que la condición de primer orden que hemos obtenido en este capítulo: la relación técnica de sustitución debe ser igual a la relación de precios de los factores.

Apliquemos este método a la función de producción Cobb-Douglas:

$$f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b.$$

En este caso, el problema de minimización de los costes es

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2$$

$$\text{sujeta a } x_1^a x_2^b = y.$$

Ahora tenemos una forma funcional concreta y podemos resolver el problema utilizando, bien el método de sustitución, bien el método lagrangiano. El primero consiste en primer lugar en despejar la restricción x_2 en función de x_1

$$x_2 = (y x_1^{-a})^{1/b}$$

e introducir, a continuación, este resultado en la función objetivo para obtener el siguiente problema de maximización sin restricciones:

$$\min_{x_1} w_1 x_1 + w_2 \, (y x_1^{-a})^{1/b}.$$

Ahora podríamos derivar con respecto a x_1 e igualar a cero la derivada resultante. A continuación resolveremos la ecuación resultante para obtener x_1 en función de w_1, w_2, e y, es decir, la demanda condicionada del factor x_1. Este cálculo no es difícil, pero las operaciones algebraicas resultan tediosas, por lo que no entraremos en más detalles.

Sin embargo, resolveremos el problema mediante el método lagrangiano. Las tres condiciones de primer orden son

$$\begin{aligned} w_1 &= \lambda a x_1^{a-1} x_2^b \\ w_2 &= \lambda b x_1^a x_2^{b-1} \\ y &= x_1^a x_2^b. \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por x_1 y la segunda por x_2 tenemos que

$$w_1 x_1 = \lambda a x_1^a x_2^b = \lambda a y$$

$$w_2 x_2 = \lambda b x_1^a x_2^b = \lambda b y,$$

por lo que

$$x_1 = \lambda \frac{ay}{w_1} \qquad [20.6]$$

$$x_2 = \lambda \frac{by}{w_2}. \qquad [20.7]$$

A continuación utilizamos la tercera ecuación para despejar λ. Introduciendo las soluciones de x_1 y x_1 en la tercera condición de primer orden, tenemos que

$$\left(\frac{\lambda a y}{w_1}\right)^a \left(\frac{\lambda b y}{w_2}\right)^b = y.$$

Despejamos λ en esta ecuación y obtenemos la larga expresión siguiente:

$$\lambda = (a^{-a} b^{-b} w_1^a w_2^b y^{1-a-b})^{\frac{1}{a+b}},$$

que, junto con las ecuaciones [20.6] y [20.7], nos proporciona las soluciones finales de x_1 y x_2. Estas funciones de demanda de los factores son las siguientes:

$$x_1(w_1, w_2, y) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}} w_1^{\frac{-b}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$

$$x_2(w_1, w_2, y) = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{a}{a+b}} w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{-a}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}.$$

La función de costes puede hallarse calculando los costes en que incurre la empresa cuando toma decisiones minimizadoras del coste:

$$c(w_1, w_2, y) = w_1 x_1(w_1, w_2, y) + w_2 x_2(w_1, w_2, y).$$

Tras algunas manipulaciones algebraicas, llegamos al siguiente resultado final:

$$c(w_1, w_2, y) = \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{-a}{a+b}}\right] w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}.$$

No se preocupe el lector si esta fórmula le parece muy complicada. Su único objetivo es demostrar cómo se obtiene una solución explícita del problema de minimización del coste aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange.

Obsérvese que los costes aumentan más que proporcionalmente, en la misma proporción o menos que proporcionalmente, con respecto a la producción, dependiendo de que $a + b$ sea menor, igual o mayor que 1, respectivamente. Este resultado tiene sentido, ya que la tecnología Cobb-Douglas muestra rendimientos decrecientes de escala, constantes o crecientes dependiendo del valor de $a + b$.

MICROECONOMÍA INTERMEDIA: UN ENFOQUE ACTUAL

Contiene: Caps. 21 y 22

AUTOR : **Varian, Hal R.**

FOTOCOPIADO DE : **Microeconomía intermedia : un enfoque actual / Hall R. Varian.-- 5a. ed. Barcelona : Antoni Bosch, 1999.**

SEMESTRE : **VERANO 2005**