Material de apoyo - Cálculo Multivariable

David Gabriel Corzo Mcmath

2020-01-06

Índice general

Parte I

Exámenes cortos

Capítulo 1

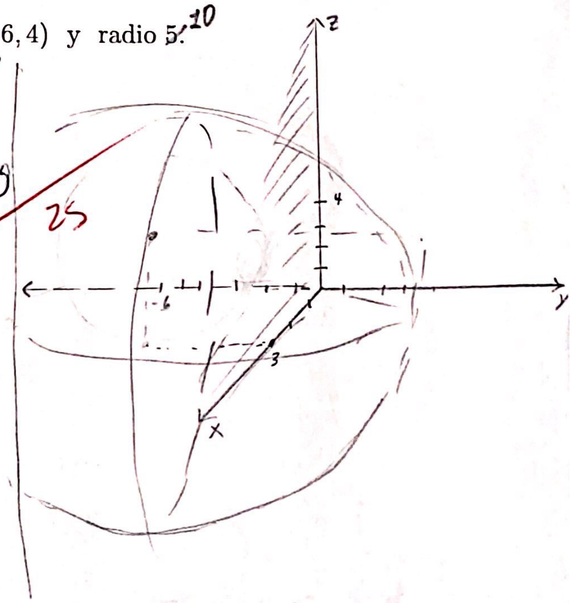
Exámen corto #01

Corto #1 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: David Corzo **Carnet:** 20190432

Resuelva las siguientes problemas:

1. (50 pts.) Halle la ecuación de la esfera con centro $(3, -6, 4)$ y radio ~~5~~ 10.
   ¿Cuál es la intersección de esta esfera con el plano xz?



Ecuación : $\sqrt{(x-3)^2+(y+6)^2+(z-4)^2} = 10$ 25

Se asume $y = 0$;

$\sqrt{(x-3)^2+(z-4)^2+(6)^2} = 10$

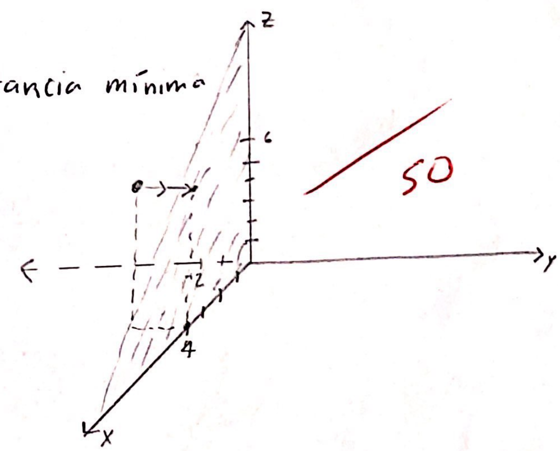
$(x-3)^2 + (z-4)^2 + 36 = 10^2$

$(x-3)^2 + (z-4)^2 = 100 - 36$

Intersección : $(x-3)^2 + (z-4)^2 = 64$ 25

2. (50 pts.) Determine la distancia mínima del punto $(4, -2, 6)$ al plano xz.

La distancia mínima es 2.



50

100/100

Corto #1 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: Sección A. **Carnet:** ____________

Resuelva las siguientes problemas:

1. (50 pts.) Halle la ecuación de la esfera con centro $(3, -6, 4)$ y radio 10.
   ¿Cuál es la intersección de esta esfera con el plano xz?

Ec. esfera: $(x-3)^2 + (y+6)^2 + (z-4)^2 = 10^2 = 100.$

Intersección con el plano xz: $y=0$ en la ec. esfera

$(x-3)^2 + 36 + (z-4)^2 = 100$

$(x-3)^2 + (z-4)^2 = 64$

Circunferencia de radio 8 y centro $(3,4)$.

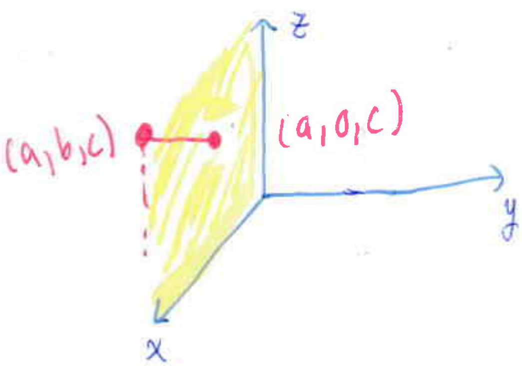
Observación si $r=5$.

$(x-3)^2 + (z-4)^2 = -11$

no tiene solución

No hay intersección entre la esfera y el plano xz.

2. (50 pts.) Determine la distancia mínima del punto $P(4, -2, 6)$ al plano xz.



Proyección al plano xz es $Q(4,0,6)$

Distancia mínima $|PQ| = |QP|$

$d = \sqrt{0^2 + 4 + 0} = 2.$

Corto #1 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: Sección 13. **Carnet:** ____________

Resuelva las siguientes problemas:

1. (50 pts.) Halle el radio y ~~centro~~ la ec. de la esfera que pasa por el punto $(2,3,-1)$ y tiene centro en $(5,9,1)$.

radio = distancia entre el punto y el centro

$r = 7$

$$d = \sqrt{(2-5)^2 + (3-9)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{9+36+4} = \sqrt{49} = 7.$$

Ec. Esfera: $(x-5)^2 + (y-9)^2 + (z-1)^2 = 49$

2. (50 pts.) Determine la distancia mínima del punto $(4,-2,6)$ al eje z.

Encuentre la proyección del punto P sobre el eje-z.

coordenadas $(0,0,c)$

$P(4,-2,6)$ es $Q(0,0,6)$

Distancia mínima $|PQ| = \sqrt{16+4+0} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Capítulo 2

Exámen corto #02

20/100

Corto #2 Cálculo Multivariable (15 min)

Nombre: David Corzo **Carnet:** 20190432

Resuelva las siguientes problemas:

1. (50 pts.) Considere los vectores $a = \langle -2, 3, -6\rangle$ y $b = \langle 1, 2, 3\rangle$. Encuentre la proyección escalar y la vectorial de **b** sobre **a**.

$\text{proy}_a b = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot a$ vectorial $\qquad \text{proy}_b a = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$

$$\text{Proy}_a b \text{ vectorial} = \frac{(-2\cdot 1)+(3\cdot 2)+(-6\cdot 3)}{\left(\sqrt{(-2)^2+(3)^2+(-6)^2}\right)^2}\cdot a = \frac{\overbrace{\overbrace{-1+6}^{5}-18}^{23}}{\underbrace{\underbrace{4+9}_{13}+36}_{49}}a = \frac{23}{49}a =$$

$$= \frac{23}{49}\cdot\langle -2, 3, -6\rangle = \left\langle -\frac{46}{49}, \frac{69}{49}, -\frac{138}{49}\right\rangle$$

$$\text{Proy}_a b \text{ Escalar} = \frac{23}{49}$$

10

2. (50 pts.) Encuentre el ángulo entre los vectores $a = \langle -2, 1, 3\rangle$ y $b = \langle 1, 3, 2\rangle$.

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a\cdot b}{|a||b|}\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(-2\cdot 1)+(1\cdot 3)+(3\cdot 2)}{\sqrt{(-2+1)^2+(1+3)^2+(3+2)^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1+3+6}{\sqrt{1+16+25}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{8}{\sqrt{42}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2\cdot 4}{\sqrt{42}}\right)$$

10

Corto #2 Cálculo Multivariable (15 min)

Nombre: Sección A. **Carnet:** ____________

Resuelva las siguientes problemas:

1. (50 pts.) Considere los vectores $a = \langle -2, 3, -6\rangle$ y $b = \langle 1, 2, 3\rangle$. Encuentre la proyección escalar y la vectorial de **b** sobre **a**.

$\frac{b \cdot a}{a}$

Escalar $\text{comp}_a b = \frac{a \cdot b}{|a|}$ Vectorial $\text{proy}_a b = \underbrace{\frac{a \cdot b}{|a|}}_{\text{comp}} \frac{a}{|a|}$

10 $a \cdot b = -2 + 6 - 18 = -14$ $|a| = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7.$ 10

$\text{comp}_a b = \frac{-14}{7} = -2.$ 10.

$\text{proy}_a b = -\frac{2}{7.} \langle -2, 3, -6\rangle. = \langle \frac{4}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{12}{7} \rangle$ 20.

Aclaración tarea 2: ¿$\text{proy}_a b = \text{proy}_b a$? $\frac{a}{|a|}\frac{(a \cdot b)}{|a|} \neq \frac{a \cdot b}{|b|} \cdot \frac{b}{|b|}$

No.

2. (50 pts.) Encuentre el ángulo entre los vectores $a = \langle -2, 1, 3\rangle$ y $b = \langle 1, 3, 2\rangle$.

$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$ $a \cdot b = -2 + 3 + 6 = 7$ 10

$|a| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$ $|b| = \sqrt{14}$ 10.

$\cos\theta = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}$ 10.

$\cos\theta = \frac{7}{14} = \frac{1}{2.}$ 10.

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ ó $60°.$

	0	30	45	60	90
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

$1/\sqrt{2}.$

Producto Cruz. Bono 10 pts.

$\sin\theta = \frac{|a \times b|}{|a||b|.}$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -7\hat{i} - 7\hat{j} - 7\hat{k}$$

$|a \times b| = 7|\langle -1, -1, -1\rangle|$

$= 7\sqrt{3}$

$\sin\theta = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{3}}{2.}$

Corto #2 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: Sección B **Carnet:** ____________

Resuelva las siguientes problemas:

1. (50 pts.) Dados los vectores $\mathbf{a} = \langle -3, 9, 6, 2\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -4, 2, 8, -1\rangle$ encuentre un vector $\mathbf{c}$ paralelo a $\mathbf{a}$ y un vector $\mathbf{d}$ (diferente de cero) perpendicular a $\mathbf{b}$.

Vector Paralelo a $\vec{a}$: $\vec{c} = k\langle -3, 9, 6, 2\rangle$.

cualquier ejemplo como $\langle 3, -9, -6, -2\rangle$, $\langle -6, 18, 12, 4\rangle$, ...

Vector perpendicular a $\vec{b}$ $\vec{d} \cdot \vec{b} = 0$

Varios ejemplos como $\langle 1, 1, 1, 6\rangle$, $\langle 1, 2, 0, 0\rangle$, $\langle 2, 1, 2, 2\rangle$, ...

sólo compruebe que $\vec{d} \cdot \vec{b} = 0$

2. (50 pts.) Considere los vectores $\mathbf{a} = \langle -2, 3, -6\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 1, 2, 3\rangle$. Encuentre la proyección escalar y la vectorial de $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{b}$.

Proyección Escalar de a sobre b.

$$\text{comp}_b\, \vec{a} = \frac{a \cdot b}{|b|} = \frac{-2+6-18}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{-14}{\sqrt{14}} = \text{comp}_b\, \vec{a}$$

Proyección vectorial de a sobre b

$$\text{proy}_b\, \vec{a} = \frac{a \cdot b}{|b|}\,\frac{b}{|b|} = \frac{-14}{14}\langle 1, 2, 3\rangle = \langle -1, -2, -3\rangle$$

Capítulo 3

Exámen corto #03

Corto #3 Cálculo Multivariable (20 min)

~~100~~ 90/100

Nombre: David Corzo **Carnet:** 20190432

Resuelva los siguientes problemas:

1. (50 pts.) Determine el área del triángulo entre los puntos $P = (0, -2, 0)$, $Q = (4, 1, -2)$ y $R = (5, 3, 1)$.

$$T_\Delta = \frac{1}{2}\left|\vec{u} \times \vec{w}\right|$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (4-0), (1-(-2)), (-2-0) \rangle = \langle 4, 3, -2 \rangle$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{PR} = \langle (5-0), (3-(-2)), (1-0) \rangle = \langle 5, 5, 1 \rangle$$

$$\left|\vec{u} \times \vec{w}\right| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(3\cdot1)-(-2\cdot5)\right] - \hat{j}\left[(4\cdot1)-(-2\cdot5)\right] + \hat{k}\left[(4\cdot5)-(3\cdot5)\right]$$

$$= \hat{i}\left[3+10\right] - \hat{j}\left[4+10\right] + \hat{k}\left[20-15\right]$$

$$= 13\hat{i} - 14\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$= \langle 13, -14, 5 \rangle$$

$$= \sqrt{(13)^2 + (-14)^2 + (5)^2}$$

$$= \sqrt{169 + 496 + 25}$$

$$= \sqrt{690}$$

$$\boxed{\therefore \frac{1}{2}\sqrt{690}}$$

40

$$\begin{array}{r} 11 \\ 169 \\ +\ 496 \\ \hline 665 \\ 25 \\ \hline 690 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 14 \\ \cdot\ 14 \\ \hline 56 \\ 44 \\ \hline 496 \end{array}$$

2. (50 pts.) Encuentre el volumen del paralelelípipedo determinado por los vectores $a = \langle 1, 5, -2 \rangle$, $b = \langle 3, -1, 0 \rangle$, y $c = \langle 5, 9, -4 \rangle$.

$$P_\square = \left| c \cdot (a \times b) \right|$$

$$(a \times b) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(5\cdot0)-(-2\cdot-1)\right] - \hat{j}\left[(1\cdot0)-(-2\cdot3)\right] + \hat{k}\left[(1\cdot-1)-(5\cdot3)\right]$$

$$= \hat{i}\left[0-2\right] - \hat{j}\left[0+6\right] + \hat{k}\left[-1-15\right]$$

$$= -2\hat{i} - 6\hat{j} - 16\hat{k}$$

$$= \langle -2, -6, -16 \rangle$$

$$\cancel{\left|c\cdot(a\times b)\right| = \sqrt{(-10)^2 + (-54)^2 + (-64)^2}}$$

$$\cancel{= \sqrt{100 + 2916 + 4086}}$$

$$= \sqrt{7102}$$

$$c\cdot(a\times b) = \langle 5, 9, -4 \rangle \cdot \langle -2, -6, -16 \rangle$$

$$= (5\cdot-2) + (9\cdot-6) + (-4\cdot-16)$$

$$= (-10) + (-54) + 64$$

$$= -64 + 64 = 0$$ Hay un plano no un paralelelipipedo

50

$$\begin{array}{r} 2 \\ 1 \\ 54 \\ \cdot\ 54 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 1 \\ 64 \\ \cdot\ 64 \\ \hline 1246 \\ 384 \\ \hline 4086 \end{array}$$

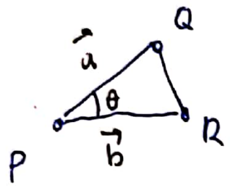
$$\begin{array}{r} 111 \\ 2916 \\ +\ 4086 \\ \hline 7002 \\ +\ 100 \\ \hline 7{,}102 \end{array}$$

Corto #3   Cálculo Multivariable   (20 min)

Nombre: Sección A.   **Carnet:** ____________

Resuelva los siguientes problemas:

1. (50 pts.) Determine el área del triángulo entre los puntos $P = (0, -2, 0)$, $Q = (4, 1, -2)$ y $R = (5, 3, 1)$.



$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \langle 4, 3, -2 \rangle$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{PR} = \langle 5, 5, 1 \rangle.$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 13\hat{i} - 14\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\sqrt{13^2 + 14^2 + 5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{390}$$

+5 pts.

2. (50 pts.) Encuentre el volumen del paralelelípipedo determinado por los vectores $a = \langle 1, 5, -2 \rangle$, $b = \langle 3, -1, 0 \rangle$, y $c = \langle 5, 9, -4 \rangle$.

$$V = |a \cdot (b \times c)| = |c \cdot (a \times b)| = |(a \times b) \cdot c| \checkmark$$

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 9 & -4 \end{vmatrix} = 1(4) - 5(-12) - 2(32)$$

$$V = 4 + 60 - 64 = 0 //$$

No hay paralelelípedo. (figura 2-D)

Los tres vectores son coplanares (están en el mismo plano

Capítulo 4

Exámen corto #04

30/100

Corto #4 Cálculo Multivariable (15 min)

Nombre: David Corzo **Carnet:** 20190432

Resuelva los siguientes problemas:

$\vec{u} = \langle 1, \frac{22}{10}$

$\underbrace{\vec{u}}_{PQ} = \langle (1-0), (1+\frac{12}{10}), (0+\frac{7}{5}) \rangle$

1. Considere los planos $3x - 2y + z = 1$ y $2x + y - 3z = 3$.

$\underbrace{\vec{w}}_{QP} = \langle (0-1), (-\frac{12}{10} - 1), (\frac{7}{5} - 0) \rangle$

   (a) (50 pts.) Encuentre el ángulo de intersección entre los dos planos.

   (b) (50 pts.) Encuentre la recta de intersección entre los dos planos.

a) $\boxed{x = 0}$

$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a \cdot b}{|a||b|}\right)$

1) $-2y + z = 1$

2) $y - 3z = 3$

2) $y = 3 + 3z$

1) $-2(3 + 3z) + z = 1$

$-6 - 6z + z = 1$

$-5z = 1 + 6$

$\boxed{z = -\frac{7}{5}}$

$-2y = \frac{5}{5} - \left(-\frac{7}{5}\right)$

$-2y = \frac{5}{5} + \frac{7}{5}$

$y = \frac{\frac{12}{5}}{-2} = \boxed{-\frac{12}{10}}$

$P(0, -\frac{12}{10}, -\frac{7}{5})$ $Q(1, 1, 0)$

$\boxed{x = 1}$

$3 - 2y + z = 1$

$2 + y - 3z = 3$

$y = 3 + 3z - 2$

$y = 1 + 3z \Rightarrow \boxed{y = 1}$

$3 - 2(1 + 3z) + z = 1$

$3 - 2 - 6z + z = 1$

$1 - 5z = 1$

$-5z = 0$

$\boxed{z = 0}$

b) $2(3x - 2y + z = 1)$

$3(2x + y - 3z = 9)$

$6x - 4y + 2z = 2$

$-(6x + 3y - 3z = 9)$

$\cancel{6x} - 4y + 2z = 2$

$-\cancel{6x} - 3y + 3z = 9$

$0 - 7y + 5z = 11$

$-7y = 11 - 5z$

$y = \frac{11 - 5z}{-7}$

$z = t$

30

$3x - 2\left(\frac{11 - 5t}{-7}\right) + t = 1$

$3x - 2\left(-\frac{11}{7} + \frac{5}{7}t\right) + t = 1$

$3x + \frac{22}{7} - \frac{10}{7}t + t = 1$

$3x = \frac{7}{7} - \frac{22}{7} + \frac{10}{7}t - \frac{7}{7}t$

$3x = \frac{15}{7} + \frac{3}{7}t$

$\boxed{x = \frac{\frac{15}{7} + \frac{3}{7}t}{3}}$

Corto #4 Cálculo Multivariable (15 min)

Nombre:____________________________________ **Carnet:** _____________

Resuelva los siguientes problemas:

1. Considere los planos $3x - 2y + z = 1$ y $2x + y - 3z = 3$.
   (a) (50 pts.) Encuentre el ángulo de intersección entre los dos planos.
   (b) (50 pts.) Encuentre la recta de intersección entre los dos planos.

a)

$$\cos\theta = \frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1|\,|\hat{n}_2|} \qquad \hat{n}_1 = \langle 3, -2, 1 \rangle \qquad \hat{n}_2 = \langle 2, 1, -3 \rangle$$

$$\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2 = 6 - 2 - 3 = 1 \qquad |\hat{n}_1| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

$$|\hat{n}_2| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{14} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{14}\right) \approx 86^\circ$$

b) Solución 1: Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$R_1 : 3x - 2y + z = 1$$

$$R_2 : 2x + y - 3z = 3 \Rightarrow y = 3 + 3z - 2x$$

$$R_1 + 2R_2 : 7x - 5z = 7 \Rightarrow x = 1 + \frac{5}{7}z \qquad z = 7t. \checkmark$$

$$x = 1 + 5t. \checkmark$$

$$y = 3 + 21t - 2 - 10t = 1 + 11t. \checkmark$$

Ec. Vectorial $\boxed{\vec{r} = \langle 1, 1, 0 \rangle + t\langle 5, 11, 7 \rangle.}$ $\quad v_1 = \langle \frac{5}{7}, \frac{11}{7}, 1 \rangle$

$$x = 1 + 5t$$
$$y = 1 + 11t$$
$$z = 7t.$$

Solución 2: Producto Cruz

$\hat{n}_1 = \langle 3, -2, 1 \rangle \qquad \hat{n}_2 = \langle 2, 1, -3 \rangle$

$\vec{v}$ tiene que ser perpendicular a $\hat{n}_1$ y a $\hat{n}_2$.

$$\vec{v} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 5\hat{i} + 11\hat{j} + 7\hat{k} \quad \checkmark$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

$R_1: \; 3x - 2y + z = 1$

$R_2: \; 2x + y - 3z = 3$

$2R_1 - 3R_2: \; -7y + 11z = -7 \quad \Rightarrow \quad 7y = 11z + 7$

$$y = \frac{11}{7} z + 1$$

$z = t$

$y = \frac{11}{7} t + 1$

$x = \frac{5}{7} t + 1.$

$z = 0, \; y = 1 \Rightarrow 2x + 1 + 0 = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{2} = 1.$

$$\boxed{\vec{r} = \langle 1, 1, 0 \rangle + t\langle 5, 11, 7 \rangle}$$

Corto #4 Cálculo Multivariable (15 min)

Nombre:______________________ **Carnet:** ____________

Resuelva los siguientes problemas:

1. (50 pts.) Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto R. $(6, 0, -2)$ y contiene a la recta $x = 4 - 2t$, $y = 3 + 5t$, $z = 7 + 4t$.

t=0 en la recta. t=1 en la recta

Dos pts. sobre la recta $P(4,3,7)$ y $Q(2,8,11)$

dos vectores sobre el plano $\vec{PQ}$ y $\vec{PR}$

$\vec{PQ} = \langle -2, 5, 4 \rangle$ $\vec{PR} = \langle 2, -3, -9 \rangle$

$\hat{n}$ debe ser normal a $\vec{PQ}$ y a $\vec{PR}$

$$\hat{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -33\hat{i} - 10\hat{j} - 4\hat{k} \quad \text{ó} \quad \langle 33, 10, 4 \rangle.$$

Ec. Plano $\langle 33, 10, 4 \rangle \cdot \langle x-6, y, z+2 \rangle = 0.$

2. (50 pts.) Analice si las rectas $L_1: \; x = 1 + 2t,\; y = 2 + t,\; z = 4 + t$, $L_2: \; x = 5 - s,\; y = -1 + 2s,\; z = 11 - 3s$ tienen un punto de intersección.

L_1 y L_2 se intersectan entonces $x = x$, $y = y$, $z = z$

$$\left.\begin{aligned} 1 + 2t &= 5 - s \\ 2 + t &= -1 + 2s \\ 4 + t &= 11 - 3s \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} 2t + s &= 4 \\ t - 2s &= -3 \\ \hline R_1 - 2R_2: \quad 5s &= 10 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} s &= 2 \\ t &= -3 + 2s = 1 \end{aligned}$$

3 ecs. y 2 incógnitas.

verifique que R_3 se satisface $4 + 1 = 11 - 6 \Rightarrow \boxed{5 = 5}$

Las rectas L_1 y L_2 se intersectan.

El punto de intersección es $(3, 3, 5)$ Bono (5 pts)

Capítulo 5

Exámen corto #05

80/100

Corto #5 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: David Corzo **Carnet:** 20190432

1. Analice si la función $\mathbf{r} = \langle 3e^{-t}, \ln(2t^2-1), \tan(2\pi)\rangle$ es continua en $t=1$.

$$\lim_{t\to 1}(r) = \left\langle \underbrace{\lim_{t\to 1}(3e^{-t})}_{f(t)}, \underbrace{\lim_{t\to 1}(\ln(2t^2-1))}_{g(t)}, \underbrace{\lim_{t\to 1}(\tan(2\pi))}_{h(t)} \right\rangle$$

$$\lim_{t\to 1}(f(t)) = \frac{3}{e}$$

$$\lim_{t\to 1}(h(t)) = \tan(2\pi)$$

$$= \frac{\sin(2\pi)}{\cos(2\pi)} \leftarrow 0$$

r(1)

$$= 0$$

$$\lim_{t\to 1}(f(t)) = \ln(2(1)^2-1)$$

$$= \ln(2-1)$$

$$= \ln(1)$$

$$= 0$$

20/40

Sí es continua en $t=1$ $\left\langle \frac{3}{e}, 0, 0\right\rangle$

2. Encuentre la ec. de la recta tangente a $\mathbf{r}(t) = \left\langle te^{t-1}, \frac{8}{\pi}\arctan(t), 2\ln(t)\right\rangle$ en $t=1$.

$$\vec{r}_T = \vec{r}(a) + t\,\vec{r}\,'(a)$$

$$\vec{r}(1) = \left\langle 1\, e^{(1-1)}, \frac{8}{\pi}\underbrace{\arctan(1)}_{\frac{\pi}{4}}, 2\underbrace{\ln(1)}_{0}\right\rangle$$

$$\frac{\sin(\pi/4)}{\cos(\pi/4)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \left\langle 1, \frac{8}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{4}, 0\right\rangle$$

$$= \langle 1, 2, 0\rangle$$

$$\boxed{\vec{r}_T(1) = \langle 1, 2, 0\rangle + t\left\langle 2, \frac{4}{\pi}, 2\right\rangle}$$

60

$$\vec{r}\,'(t) = \left\langle (e^{t-1} + te^{t-1}\cdot 1), \left(\frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{t^2+1}\right), \left(\frac{2}{t}\right)\right\rangle$$

$$\vec{r}\,'(t) = \left\langle e^{t-1} + te^{t-1}, \frac{8}{\pi(t^2+1)}, \frac{2}{t}\right\rangle$$

$$\vec{r}\,'(1) = \left\langle e^0 + 1\cdot e^0, \frac{8}{\pi(1+1)}, \frac{2}{1}\right\rangle = \left\langle 1+1, \frac{8}{2\pi}, 2\right\rangle$$

$$= \left\langle 2, \frac{4}{\pi}, 2\right\rangle$$

Capítulo 6

Exámen corto #07

//

Corto #7 Cálculo Multivariable

Nombre: David Corzo **Carnet:** 20190432

1. Encuentre el dominio de la función vectorial $\vec{r}(t) = \dfrac{t+4}{t-4}\hat{\imath} + \dfrac{2}{\sqrt{1-t}}\hat{\jmath} + \ln(t+2)\hat{k}$.

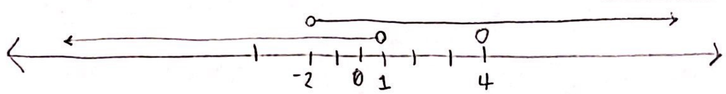
$\vec{r}(t) = \left\langle \dfrac{t+4}{t-4}, \dfrac{2}{\sqrt{1-t}}, \ln(t+2) \right\rangle$

$t-4 \neq 0$ $\quad$ $1-t > 0$ $\quad$ $t+2>0$

$t \neq 4$ $\quad$ $-t > -1$ $\quad$ $t > -2$

$t < 1$

$\therefore \{\vec{r}(t) \in \mathbb{R} \mid (t \neq 4) \wedge (t < 1) \wedge (t > -2)\}$



$\mathbb{D}: (-2, 1)$

2. Considere la función $g(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$.

   (a) Encuentre y bosqueje el dominio de g.

   (b) Encuentre y bosqueje las curvas de nivel para $k = \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{8}}, \dfrac{1}{\sqrt{9}}$. en otra hoja

a) $g(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$

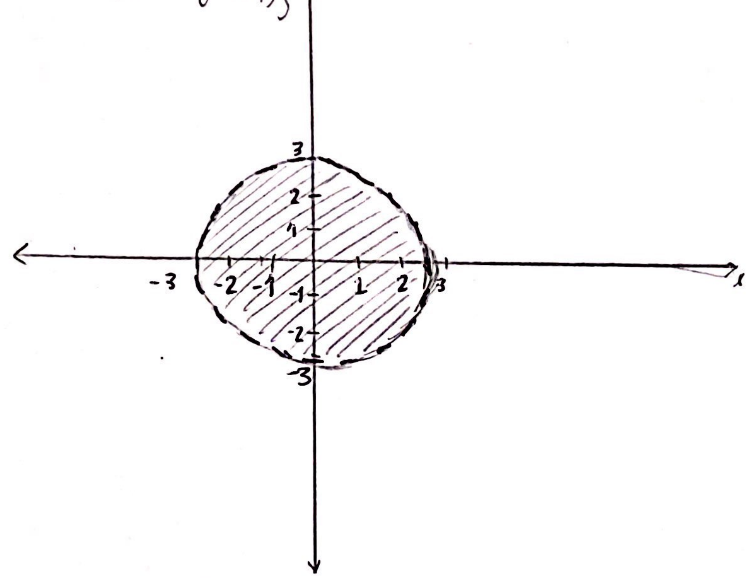
$9 - x^2 - y^2 > 0$

$-x^2 - y^2 > -9$

$x^2 + y^2 < 9$

a) $x^2 + y^2 < 3^2$

$\mathbb{D}: \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid (x^2+y^2<9)\}$



3. Considere la función de producción $P = 10e^{K+L-KL}$

(a) Encuentre las funciones de productividad marginal del trabajo y del capital.

L K

(b) Encuentre y simplifique $P_{LL} + P_{KK}$.

a) $P_L = 10e^{(K+L-KL)} \cdot (1-K)$

$P_K = 10e^{(K+L-KL)} \cdot (1-L)$

b) $10e^{K+L-KL} \cdot (2-2K+K^2-2L+L^2)$

b) $P_L = 10e^{(K+L-KL)} \cdot (1-K)$

$= 10e^{(K+L-KL)} - 10Ke^{(K+L-KL)}$

$P_{LL} = 10e^{(K+L-KL)} \cdot (1-K) - 10Ke^{(K+L-KL)} \cdot (1-K)$

$P_K = 10e^{(K+L-KL)} - 10Le^{(K+L-KL)}$

$P_{KK} = 10e^{(K+L-KL)} \cdot (1-L) - 10Le^{(K+L-KL)} \cdot (1-L)$

continuación en hoja

4. Encuentre la longitud de arco de la curva descritas por las función vectorial $\mathbf{s}(t) = \langle t\sin t + \cos t,\ t\cos t - \sin t\rangle$, $-2 \leqslant t \leqslant 0$

$s'(t) = \langle \cancel{\sin(t)} + t\cos(t) - \cancel{\sin(t)},$
$\cancel{\cos(t)} - t\sin(t) - \cancel{\cos(t)} \rangle = \langle t\cos(t), -t\sin(t) \rangle$

$|s'(t)| = \sqrt{(t\cos(t))^2 + (-t\sin(t))^2}$

$= \sqrt{t^2\cos^2(t) + t^2\sin^2(t)}$

$= \sqrt{t^2} = |t|$

$\sqrt{t^2} = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ -t & t < 0 \end{cases}$

$\mathcal{L} = \int_{-2}^{0} t\,dt = -\frac{1}{2}t^2 \Big|_{-2}^{0} = -\frac{1}{2}\{0^2 - (-2)^2\} = -\frac{1}{2}(-2)^2 = 2$

$\boxed{\mathcal{L} = 2}$

5. La curva C es descrita por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \left\langle \ln(t-2), \frac{1}{t-4}, 10\tan^{-1} t \right\rangle$.

(a) Encuentre la ec. vectorial de la recta tangente a C en $t = 3$.

(b) ¿Es perpendicular la recta tangente a la recta $2x - 1 = \frac{z}{-3}$, $y = 10$?

$\vec{r}_T = \vec{r}(a) + t\vec{r}'(a)$

$\vec{r}'(t) = \left\langle \frac{1}{t-2}, -1(t-4)^{-2}, \frac{10}{t^2+1} \right\rangle$

$\vec{r}'(3) = \left\langle \frac{1}{3-2}, -1(3-4)^{-2}, \frac{10}{9+1} \right\rangle = \left\langle 1, -\frac{1}{(-1)^2}, \frac{10}{10} \right\rangle = \langle 1, -1, 1 \rangle$

$\vec{r}(3) = \langle 0, -1, 10\tan^{-1}(3) \rangle$

a) $\vec{r}_T = \langle 0, -1, 10\tan^{-1}(3) \rangle + t\langle 1, -1, 1 \rangle$

b) No es perpendicular.

6. Una partícula dentro de un campo eléctrico experimenta la siguiente aceleración.

$$\mathbf{a}(t) = -6t^2\mathbf{i} + 8\sinh(2t)\mathbf{j} + e^{t/2}\mathbf{k}$$

(a) Encuentre la función de velocidad si $\mathbf{v}(0) = 10\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$.

(b) Encuentre la función de posición si $\mathbf{r}(0) = 10\mathbf{j}$.

$v(t) = \int a(t)\,dt = \int \langle \underbrace{-6t^2}_{f_1}, \underbrace{8\sinh(2t)}_{2}, \underbrace{e^{\frac{t}{2}}}_{3} \rangle \, dt$

a) $v(t) = \langle -2t^3 + 10, 4\cosh(2t) - 4, 2e^{\frac{t}{2}} - 4 \rangle$

$\int f_1\,dt = -6\int t^2\,dt = -\frac{6}{3}t^3 + C_1$

$\int f_2\,dt = 8\int \sinh(2t)\,dt = \frac{8}{2}\int \sinh(u)\,du = 4\cosh(2t) + C_2$

$u = 2t$

$du = 2dt$

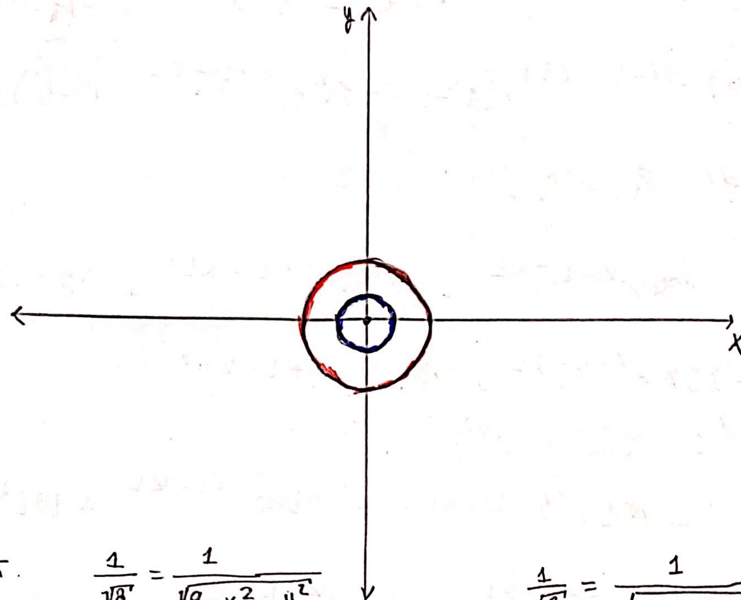
$\frac{1}{2}du = dt$

b) $r(t) = \langle -\frac{1}{2}t^4 + 10t, 2\sinh(2t) - 4t + 10, 4e^{\frac{t}{2}} - 4t \rangle$

$\int f_3\,dt = \int e^{\frac{t}{2}}dt = 2\int e^u\,du = 2e^{\frac{t}{2}} + C_3$

$u = \frac{t}{2}$

$du = \frac{1}{2}dt \Rightarrow 2du = dt$



$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

$$\frac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{\sqrt{5}} = 1$$

$$\sqrt{9-x^2-y^2} = \sqrt{5}$$

$$9-x^2-y^2 = 5$$

$$-x^2-y^2 = 5-9$$

$$-x^2-y^2 = -4$$

$$x^2+y^2 = 4$$

$$x^2+y^2 = 2^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

$$\sqrt{9-x^2-y^2} = \sqrt{8}$$

$$9-x^2-y^2 = 8$$

$$-x^2-y^2 = 8-9$$

$$x^2+y^2 = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

$$\sqrt{9-x^2-y^2} = \sqrt{9}$$

$$9-x^2-y^2 = 9$$

$$x^2+y^2 = 0$$

3) $P_{LL} + P_{KK} = 10e^{(K+L-KL)} \cdot (1-K) - 10Ke^{(K+L-KL)} \cdot (1-K) + ($ ↳

$10e^{(K+L-KL)} \cdot (1-L) - 10Le^{(K+L-KL} \cdot (1-L)$

Simplificación de $P_{LL} + P_{KK}$

$$P_{LL} = 10e^{K+L-KL} - 10Ke^{K+L-KL} - 10Ke^{(K+L-KL)} + 10K^2e^{(K+L-KL)}$$

$$= 10e^{K+L-KL} - 20Ke^{K+L-KL} + 10K^2e^{(K+L-KL)}$$

$$= 10e^{K+L-KL}(1-2K+K^2)$$

$$P_{KK} = 10e^{(K+L-KL)} - 10Le^{(K+L-KL)} - 10Le^{K+L-KL} + 10L^2e^{K+L-KL}$$

$$= 10e^{K+L-KL} - 20Le^{K+L-KL} + 10Le^{K+L-KL}$$

$$= 10e^{K+L-KL}(1-2L+L^2)$$

$$P_{LL} + P_{KK} = 10e^{K+L-KL}(1-2K+K^2) + 10e^{K+L-KL}(1-2L+L^2)$$

$$= 10e^{K+L-KL}\left([1-2K+K^2] + [1-2L+L^2]\right)$$

$$= 10e^{K+L-KL} \cdot (2-2K+K^2-2L+L^2)$$

b)

$$v(t) = \langle -2t^3 + C_1,\ 4\cosh(2t) + C_2,\ 2e^{\frac{t}{2}} + C_3 \rangle$$

$$v(0) = \langle 10, 0, -2 \rangle$$

$$\cancel{-2(0)^3}^{0} + C_1 = 10 \qquad 4\cancel{\cosh(2(0))}^{?\ 1} + C_2 = 0 \qquad 2\cancel{e^{\frac{0}{2}}}^{1} + C_3 = -2$$

$$\boxed{C_1 = 10} \qquad 4 + C_2 = 0 \qquad 2 + C_3 = -2$$

$$\boxed{C_2 = -4} \qquad C_3 = -2 - 2$$

$$v(t) = \langle -2t^3 + 10,\ 4\cosh(2t) - 4,\ 2e^{\frac{t}{2}} - 4 \rangle \qquad \boxed{C_3 = -4}$$

$$\int v(t)\,dt = r(t) = \int \langle \underbrace{-2t^3 + 10}_{f_1},\ \underbrace{4\cosh(2t) - 4}_{f_2},\ \underbrace{2e^{\frac{t}{2}} - 4}_{f_3} \rangle\, dt$$

$$\int f_1\,dt = \int(-2t^3 + 10)\,dt = -\frac{2}{4}t^4 + 10t + C_1$$

$$\int f_2\,dt = \int(4\cosh(2t) - 4)\,dt = 2\sinh(2t) - 4t + C_2$$

$$\int f_3\,dt = \int(2e^{\frac{t}{2}} - 4)\,dt = 4e^{\frac{t}{2}} - 4t + C_3$$

$$r(t) = \langle -\frac{1}{2}t^4 + 10t + C_1,\ 2\sinh(2t) - 4t + C_2,\ 4e^{\frac{t}{2}} - 4t + C_3 \rangle$$

$$r(0) = \langle 0, 10, 0 \rangle$$

$$\cancel{-\frac{1}{2}(0)^2}^{0} + \cancel{10(0)}^{0} + C_1 = 0 \qquad 2\cancel{\sinh(2(0))}^{0} - \cancel{4(0)}^{0} + C_2 = 10 \qquad \cancel{-4(0)}^{0} + C_3 = 0$$

$$\boxed{C_1 = 0} \qquad \boxed{C_2 = 10} \qquad \boxed{C_3 = 0}$$

$$r(t) = \langle -\frac{1}{2}t^4 + 10t,\ 2\sinh(2t) - 4t + 10,\ 4e^{\frac{t}{2}} - 4t \rangle$$

b) $2x - 1 = \frac{z}{-3}$, $y = 10$

$t = 2x - 1 \rightarrow \frac{t+1}{2} = x$

$t = \frac{z}{-3} \longrightarrow -3t = z$ $\qquad \vec{u} = \langle \frac{t+1}{2}, 10, -3t \rangle$

$y = 10 \qquad y = 10 + 0(t) \qquad \vec{w} = \langle t, -1 - t, 10\tan^{-1}(3) + t \rangle$

$\langle \frac{1}{2}, 0, -3 \rangle$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{t+1}{2} & 10 & -3t \\ t & -1-t & 10\tan^{-1}(3)+t \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(10)(10\tan^{-1}(3) + t) - (-3t)(-1-t)\right]$$

$$- \hat{j}\left[\left(\frac{t+1}{2}\right)(10\tan^{-1}(3) + t) - (-3t)(t)\right] +$$

$$\hat{k}\left[\left(\frac{t+1}{2}\right)(-1-t) - (10)(t)\right]$$

$$= \hat{i}\left[100\tan^{-1}(3) + 10t - (3t + 3t^2)\right] -$$

$\hat{j}\,[$

$$\langle 1, -1, 1 \rangle \cdot \langle \frac{1}{2}, 0, -3 \rangle = (1)\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)(0) + (1)(-3)$$

$$= \frac{1}{2} + 0 - 3$$

$$= \frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2} - \frac{3 \cdot 2}{2} = \frac{1-6}{2} = -\frac{5}{2}$$

no es perpendicular

Corto #7 Cálculo Multivariable

Nombre:____ **Carnet:** ______________

1. Encuentre el dominio de la función vectorial $r(t) = \frac{t+4}{t-4}\hat{\imath} + \frac{2}{\sqrt{1-t}}\hat{\jmath} + \ln(t+2)\hat{k}$.

Dominio f: $t \neq 4$ $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

Dominio g: $1 - t > 0$ $(-\infty, 1)$

$t < 1$

Dominio h: $t + 2 > 0$ $(-2, \infty)$

$t > -2$

$(-2, 1)$

Encuentre el dominio en común entre las tres

Dominio $-2 < x < 1$ ó $(-2, 1)$

$\lim_{t \to a} r(t)$

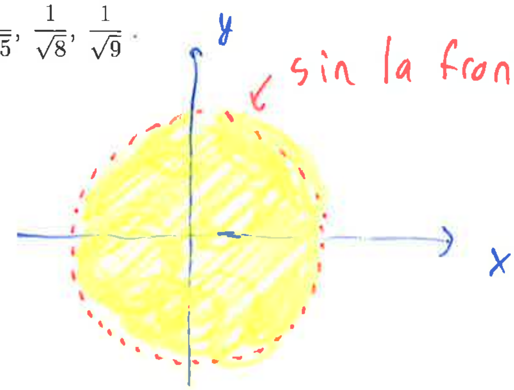
2. Considere la función $g(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$.

(a) Encuentre y bosqueje el dominio de g.

(b) Encuentre y bosqueje las curvas de nivel para $k = \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{8}}, \dfrac{1}{\sqrt{9}}$.

ID es una región.

sin la frontera



a) $9 - x^2 - y^2 > 0$

$9 > x^2 + y^2$.

$x^2 + y^2 < 9$.

~~Circunfere~~ disco radio 3

b) Curvas de nivel $g(x,y) = K$

$$\frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}} = K \Rightarrow \frac{1}{K} = \sqrt{9-x^2-y^2}$$

$$\frac{1}{K^2} = 9 - x^2 - y^2.$$

$$\frac{1}{\frac{1}{9}} = a,$$

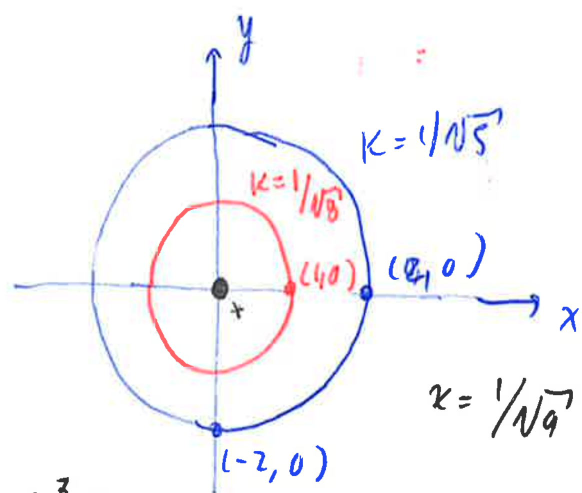
circunferencias radio $\sqrt{9 - \frac{1}{K^2}}$

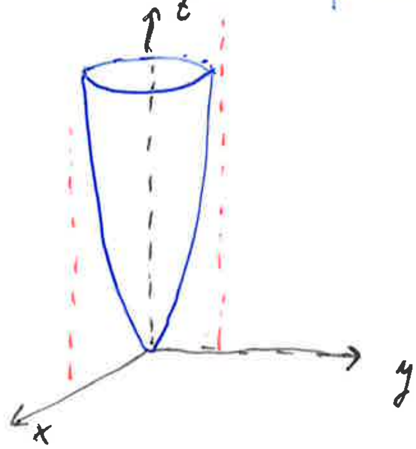
$$x^2 + y^2 = 9 - \frac{1}{K^2}.$$

$K = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\dfrac{1}{K^2} = 5$ $\quad x^2 + y^2 = 9 - 5 = \underbrace{4}_{2^2}$

$K = \dfrac{1}{\sqrt{8}}$ $\quad \dfrac{1}{K^2} = 8$ $\quad x^2 + y^2 = 1$

$K = \dfrac{1}{\sqrt{9}}$ $\quad \dfrac{1}{K^2} = 9$ $\quad x^2 + y^2 = 0$





3. Considere la función de producción $P = 10e^{K+L-KL}$ $K+L-KL$

(a) Encuentre las funciones de productividad marginal del trabajo y del capital.

(b) Encuentre y simplifique $P_{LL} + P_{KK}$.

a) Productividad Marginal es la derivada.

$P_L = 10(1-K)e^{K+L-KL}$

$P_K = 10(1-L)e^{K+L-KL}$

$\frac{\partial^2 P}{\partial L^2} = P_{LL}$

b) Encuentre y simplifique $P_{LL} + P_{KK}$

$$\left.\begin{aligned} P_{LL} &= 10(1-K)(1-K)e^{K+L-KL} \\ P_{KK} &= 10(1-L)^2 e^{K+L-KL} \end{aligned}\right\}$$ 2das derivadas

$P_{LL} + P_{KK} = \underline{\underline{10}}(1-K)^2 \underline{\underline{e}}^{K+L-KL} + \underline{\underline{10}}(1-L)^2 \underline{\underline{e}}^{K+L-KL}$

$10e^{K+L-KL}\left[(1-K)^2 + (1-L)^2\right]$

¿ P_{LK} ó P_{KL}?

regla del producto

$P_{LK} = -10e^{K+L-KL} + 10(1-K)(1-L)e^{K+L-KL}$.

$P_{KL} = -10e^{K+L-KL} + 10(1-L)(1-K)e^{K+L-KL}$.

derivadas cruzadas.

4. Encuentre la longitud de arco de la curva descritas por las función vectorial:
$\mathbf{s}(t) = \langle t\sin t + \cos t,\ t\cos t - \sin t\rangle,\ -2 \leqslant t \leqslant 0.$

Longitud de arco $\quad L = \int_{-2}^{0} |s'(t)|\,dt.$

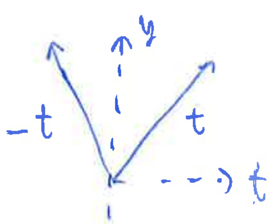
2-D $\sqrt{(x')^2+(y')^2}$ $\qquad$ 3-D $\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}$

$$s'(t) = \langle \cancel{\sin t} + t\cos t - \cancel{\sin t},\ \cancel{\cos t} - t\sin t - \cancel{\cos t} \rangle$$

$$s'(t) = \langle t\cos t, -t\sin t \rangle$$ velocidad.

$$|s'(t)| = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} = \sqrt{t^2} = |t|$$

$$L = \int_{-2}^{0} |t|\,dt. = -\int_{-2}^{0} t\,dt. = -\frac{t^2}{2}\Big]_{-2}^{0} = \frac{0+4}{2} = 2.$$



$$\int_{0}^{-2} t\,dt = \frac{1}{2}t^2\Big]_{0}^{-2} = 2 - 0 = 2.$$

$(t-4)^{-1}$

5. La curva C es descrita por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \left\langle \ln(t-2), \frac{1}{t-4}, 10\tan^{-1} t \right\rangle$.

✓ (a) Encuentre la ec. vectorial de la recta tangente a C en $t = 3$.

(b) ¿Es perpendicular la recta tangente a la recta $2x - 1 = \frac{z}{-3}$, $y = 10$?

Ec. Recta Tangente a una curva. $a = 3$

$$r(t) = r(a) + t\, r'(a)$$

Punto: $r(3) = \langle \ln 1, \frac{1}{-1}, 10\tan^{-1}(3) \rangle = \langle 0, -1, 10\tan^{-1}(3) \rangle$

Derivada: $r'(t) = \left\langle \frac{1}{t-2}, \frac{-1}{(t-4)^2}, \frac{10}{1+t^2} \right\rangle$

Pendientes: $r'(3) = \langle 1, -1, 1 \rangle$

Ec. vectorial: $r(t) = \langle 0, -1, 10\tan^{-1}(3) \rangle + t\langle 1, -1, 1 \rangle$

Ecs. Paramétricas

$x = 0 + t$

$t = -1 - y.$ $\quad y = -1 - t$

$z = 10\tan^{-1}(3) + t.$

Ecs. simétricas

$t = x = -1 - y = z - 10\tan^{-1}(3)$

b. ¿Es perpendicular a la recta $2x - 1 = \frac{z}{-3}$, $y = 10$?

Tangente $V_1 = \langle 1, -1, 1 \rangle.$

2da recta $V_2 = \langle \frac{1}{2}, 0, -3 \rangle$

$2x - 1 = t \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{t}{2}.$

$y = 10 \Rightarrow y = 10 + 0 \cdot t$

$\frac{z}{-3} = t \Rightarrow z = -3t$

$V_1 \cdot V_2 = \frac{1}{2} + 0 - 3 = \frac{-5}{2} \neq 0.$

Las dos rectas no son perpendiculares

6. Una partícula dentro de un campo eléctrico experimenta la siguiente aceleración.

$t^{1/2}$.

$$\mathbf{a}(t) = -6t^2\mathbf{i} + 8\sinh(2t)\mathbf{j} + e^{t/2}\mathbf{k}$$

$\cosh 0 = 1, \sinh 0 = 0$

(a) Encuentre la función de velocidad si $\mathbf{v}(0) = 10\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$.

(b) Encuentre la función de posición si $\mathbf{r}(0) = 10\mathbf{j}$.

$$v(t) = \int a(t)\,dt = \langle -2t^3 + c_1,\ 4\cosh(2t) + c_2,\ 2e^{t/2} + c_3 \rangle$$

Use $v(0) = \langle 10, 0, -2 \rangle$

$$v(0) = \langle c_1,\ 4 + c_2,\ 2 + c_3 \rangle = \langle 10, 0, -2 \rangle$$

$c_1 = 10$ $\qquad$ $4 + c_2 = 0$, $c_2 = -4$ $\qquad$ $2 + c_3 = -2$, $c_3 = -4$.

$$v(t) = \langle 10 - 2t^3,\ 4\cosh(2t) - 4,\ 2e^{t/2} - 4 \rangle$$

$$r(t) = \int v(t)\,dt = \langle 10t - \tfrac{1}{2}t^4 + c_1,\ 2\cosh(2t) - 4t + c_2,\ 4e^{t/2} - 4t + c_3 \rangle$$

Use $r(0) = 10\hat{j}$

$$r(0) = \langle 0 - 0 + c_1,\ 2 - 0 + c_2,\ 4 - 0 + c_3 \rangle = \langle 0, 10, 0 \rangle$$

$c_1 = 0,$ $\qquad$ $c_2 = -2,$ $\qquad$ $c_3 = -4.$

$$r(t) = \langle 10t - \tfrac{1}{2}t^4,\ 2\cosh(2t) - 4t - 2,\ 4e^{t/2} - 4t - 4 \rangle$$

Capítulo 7

Exámen corto #08

Corto #8 Cálculo Multivariable

Nombre: David Lozo **Carnet:** 20190432

1. Encuentre la ecuación del plano tangente a $z = 10 - \cos(\pi x^2) + 4(y^2+3)^{3/2}$ en el punto $(1,1)$.

$$z - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$f_x(x_0,y_0) = -\sin(\pi x^2)\cdot 2\pi x \Big|_{(1,1)} = -\sin(\pi)\cdot 2\pi = 0$$

$$f_y(x_0,y_0) = \frac{12}{2}(y^2+3)^{\frac{1}{2}}\cdot 2y \Big|_{(1,1)} = 6(1+3)^{\frac{1}{2}}\cdot 2 = 6\cdot 2\cdot 2 = 24$$

$$f(1,1) = 10 - \cos(\pi) + 4(4)^{\frac{3}{2}}$$

$$= 10 + 1 + 4(4)^{\frac{3}{2}}$$

$$= 11 + 4(2)^3 = 11 + 4(8) = 11 + 32 = \boxed{43}$$

$$z - 43 = (0)(x-1) - 24(y-1)$$

$$z = -24y + 24 + 43$$

$$z = -24y + 67$$

$$z =$$

$$\cancel{z = 48y + 91}$$

$$z = -24y + 67$$

90/100

Corto #8 Cálculo Multivariable

Nombre:__________________________________ **Carnet:** ____________

1. Encuentre la ecuación del plano tangente a $z = 10 - \cos(\pi x^2) + 4(y^2+3)^{3/2}$ en el punto $(1, 1)$.

$z = f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1)$

$f(1,1) = 10 - \cos(\pi) + 4\cdot(2^2)^{3/2} = 10 + 1 + 4\cdot 8 = 43.$

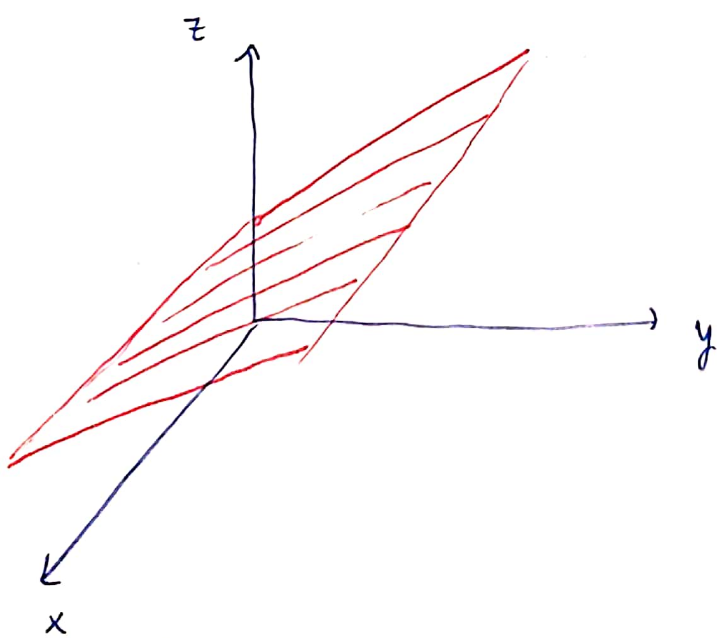
$f_x = 0 + 2\pi x \sin(\pi x^2) + 0$

$f_x(1,1) = 2\pi \sin(\pi) = 0$

$f_y = 0 - 0 + 6(y^2+3)^{1/2}\, 2y.$

$f_y(1,1) = 6\sqrt{4}\cdot 2 = 24$

Plano Tangente: $z = 43 + 24(y-1).$



Corto #8 Cálculo Multivariable

Nombre:________________________________ **Carnet:** ____________

1. Encuentre las derivadas parciales de z en $\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2-2} = 4xyz + 8$.

z - dependiente x, y independientes z_x, z_y.

$$\underbrace{0.5\ln(x^2+y^2+z^2-2) - 4xyz}_{F(x,y,z)} = 8$$

$F(x,y,z) = 8$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\frac{x}{x^2+y^2+z^2-2} - 4yz}{\frac{z}{x^2+y^2+z^2-2} - 4xy}$$

$$= \frac{-x + 4yz(x^2+y^2+z^2-2)}{z - 4xy(x^2+y^2+z^2-2)} \Big\} +5.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_y}{F_z} = \frac{-\left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2-2} - 4xz\right)}{\frac{z}{x^2+y^2+z^2-2} - 4xy}$$

$$= \frac{-y + 4xz(x^2+y^2+z^2-2)}{z - 4xy(x^2+y^2+z^2-2)} \Big\} +5.$$

Capítulo 8

Exámen corto #09

100/100

Corto #9 Cálculo Multivariable (15 min)

Nombre: David Carzo **Carnet:** 20190437

1. Halle la derivada direccional de la función $f(x, y) = e^x \cos y$ en el punto $(0, 0)$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$, $\theta = \pi/4$.

$\vec{u} = \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$ $\quad |u| = \sqrt{\cos(\theta)^2 + \sin^2(\theta)} = 1$

Derivada direccional: $\quad P(0,0) \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

$f(x,y) = e^x \cos(y)$

$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle \longrightarrow \left\langle e^x \cos(y), -e^x \sin(y) \right\rangle$

$D_u = \nabla f \cdot \vec{u}$

$= \left\langle \cancel{e^0 \cos(0)}^{1}, \cancel{-e^0 \sin 0}^{0} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

$= \langle 1, 0 \rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Corto #9 Cálculo Multivariable (15 min)

Nombre: Sección A. **Carnet:** ______________

1. Halle la derivada direccional de la función $f(x,y) = e^x \cos y$ en el punto $(0,0)$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \langle \cos\theta,\ \sin\theta \rangle$, $\theta = \pi/4$.

$$D_u f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{u}$$

$$|u| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

$$\nabla f = \langle e^x \cos y, -e^x \sin y \rangle$$

$$\nabla f(0,0) = \langle 1, -0 \rangle$$

$$u = \langle \cos \pi/4, \sin \pi/4 \rangle = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$$

$$D_u f(0,0) = \langle 1, 0 \rangle \cdot \langle \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

CORTO #9 Cálculo Multivariable (15 min)

Nombre: Sección B **Carnet:** ______________

1. Halle la derivada direccional de la función $f(x,y) = x^3y^4 + x^4y^3$ en el punto $(1,1)$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \langle \cos\theta,\ \sin\theta \rangle$, $\theta = \pi/2$.

$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u}$

$\nabla f = \langle 3x^2y^4 + 4x^3y^3,\ 4x^3y^3 + 3x^4y^2 \rangle$

$\nabla f(1,1) = \langle 3+4,\ 4+3 \rangle = \langle 7, 7 \rangle.$

$\vec{u} = \langle \cos \pi/2,\ \sin \pi/2 \rangle = \langle 0, 1 \rangle.$

$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u} = \langle 7,7 \rangle \cdot \langle 0, 1 \rangle = 0 + 7 = 7.$

Capítulo 9

Exámen corto #10

Empresa produce A, B:

A: Q2
B: Q3

$$q_A = 400(P_B - P_A) \qquad q_B = 400(9 + P_A - 2P_B)$$

P_A & P_B son precios de venta

Maximizar precios de venta:

$$q_A = 400P_B - 400P_A$$

I: Demanda x Precio

$$q_B = 3{,}600 + 400P_A - 800P_B$$

Ingresos: $q_A P_A + q_B P_B$

Costos: $2q_A + 3q_B$

$$U(P_A, P_B) = (q_A P_A + q_B P_B) - (2q_A + 3q_B)$$

$$U(P_A, P_B) = \left[P_A 400(P_B - P_A) + P_B 400(9 + P_A - 2P_B)\right] - \left[800(P_B - P_A) + 1{,}200(9 - P_A - 2P_B)\right]$$

$$U(P_A, P_B) = 400P_B P_A - P_A^2 + 10{,}800 - 1{,}200P_A - 2{,}400P_B$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_A} = 400P_B - 2P_A - 1{,}200 = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_B} = 400P_A - 2{,}400 = 0$$

$$P_A = \frac{2{,}400}{400} = 6$$

$$400P_B - 2(6) - 1{,}200 = 0$$

$$P_B = \frac{1{,}212}{400} = \frac{606}{200} = \frac{303}{100}$$

$$\boxed{P_A = 6 \qquad P_B = \frac{303}{100}}$$

CORTO #10 Cálculo Multivariable

Nombre: Sección A. **Carnet:** ______________

Una empresa produce dos tipos de dulces, A y B, para los cuales los costos unitarios de producción son de Q2 y Q3 por libra, respectivamente. Las cantidades q_A y q_B (en libras) de A y B que pueden venderse cada semana están dadas por las funciones de demanda conjunta

$$q_A = 400(p_B - p_A), \qquad q_B = 400(9 + p_A - 2p_B)$$

donde p_A y p_B son los precios de venta (por libra) de A y B, respectivamente.
Determine los precios de venta que maximizan la utilidad P de la compañía.
No realice la prueba de la Segunda Derivada.

Utilidad = Ingresos − Costos

$= p_A q_A + p_B q_B - 2q_A - 3q_B$

$U(p_A, p_B) = 400p_A(p_B - p_A) + 400p_B(9 + p_A - 2p_B)$
$- 800(p_B - p_A) - 1200(9 + p_A - 2p_B)$

$U(p_A, p_B) = 400p_Ap_B - 400p_A^2 + 3600p_B + 400p_Bp_A - 800p_B^2 - 10800$
$- 800p_B \qquad + 800p_A$
$2400p_B \qquad - 1200p_A$

$U(p_A, p_B) = 800p_Ap_B - 400p_A^2 + 5200p_B - 800p_B^2 - 400p_A - 10{,}800$

Puntos críticos.

$0 = U_{p_A}: \; 800p_B - 800p_A = 400$ Sume $R_1 + R_2$.

$U_{p_B} = 0: \; 800p_A - 1600p_B = -5200$.

$-800p_B = -4800 \Rightarrow p_B = 6$.

$800p_A = 1600p_B - 5200 = 4400 \Rightarrow p_A = \dfrac{4400}{800} = \dfrac{44}{8} = 5.5$

2da Derivada

$D(p_A, p_B) = \begin{vmatrix} -800 & 800 \\ 800 & -1600 \end{vmatrix} = 1600(800) - 800(800) = (800)^2 > 0$

$U_{p_Ap_A} < 0$ Máximo Relativo.

Corto #10 Cálculo Multivariable

Nombre: Sección B. **Carnet:** ______________

Sea P una función de producción dada por

$$P(L, K) = 10L - 0.5L^2 + 9K^2 - K^3$$

donde l y k son las cantidades de mano de obra y capital, respectivamente, y P es la cantidad producida. Encuentre los valores de L y K que maximizan P.
Utilice la prueba de la 2da derivada para clasificar cada punto crítico.

Puntos críticos

$$P_L = 10 - L = 0 \Rightarrow L = 10$$

$$P_K = 18K - 3K^2 = 0 \Rightarrow 3K(6-K) = 0 \Rightarrow K=0, K=6.$$

puntos críticos $(10,0)$ y $(10,6)$

Prueba 2nda Derivada

$$D(L,K) = \begin{vmatrix} D_{LL} & D_{LK} \\ D_{KL} & D_{KK} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 18-6K \end{vmatrix}$$

$$D(10,0) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} = -18 < 0$$

$(10,0)$ es un punto desilla

$P_{LL} < 0 \qquad P_{KK} > 0.$

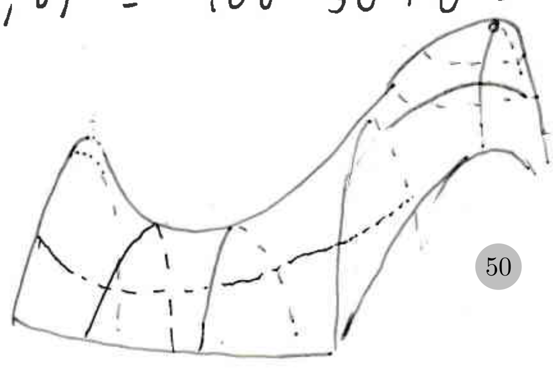
$$D(10,6) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -18 \end{vmatrix} = 18 > 0$$

$P_{LL}, P_{KK} < 0.$

$(10,6)$ es un máximo relativo

$$P_{max}(10,6) = 100 - 50 + 324 - 216 = 50 + 108 = 158.$$

$$P(10,0) = 100 - 50 + 0 = 50$$



Parte II

Parciales

Capítulo 10

Parcial #01

Cálculo Multivariable
Parcial 1
5to Semestre 2020 **(2 horas)**

Nombre: David Corzo **Carnet:** 20190432

Tema:	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos:	18	16	16	16	18	16	100
Nota:	18	14	13	12	18	16	89

~~89~~
91

1. Considere la función en dos variables $f(x,y) = \ln(10 - x^2 - y)$.
   (a) (06 **pts.**) Encuentre y bosqueje el dominio de la función.
   (b) (12 **pts.**) Encuentre y bosqueje las curvas de nivel de f para $k = 0,\ \ln(6),\ \ln(10)$.

B en hoja.

a) $f(x,y) = \ln(10 - x^2 - y)$

$\neq \mathbb{D}$

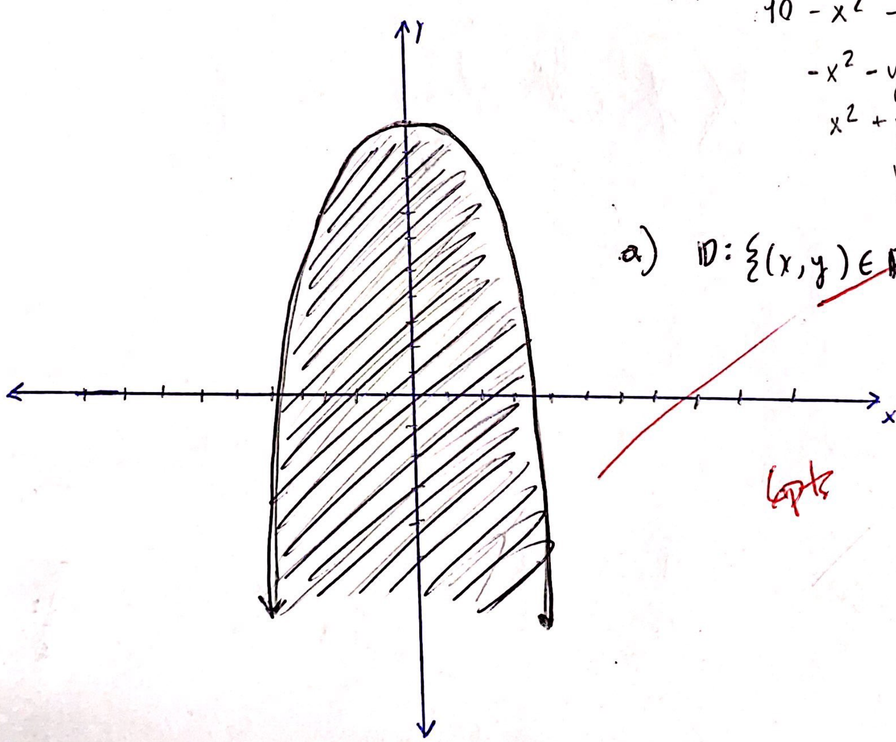
$10 - x^2 - y > \emptyset$

$-x^2 - y > -10$

$x^2 + y < 10$

$y < 10 - x^2$

a) $\mathbb{D}: \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid (y < 10 - x^2)\}$



6pts

1. b) $K = 0, \ln(6), \ln(10)$

$0 = \ln(10 - x^2 - y)$

$e^0 = 10 - x^2 - y$

$1 = 10 - x^2 - y$

$1 - 10 = -x^2 - y$

$-9 = -x^2 - y$

$9 = x^2 + y$

$\boxed{9 - x^2 = y}$

$\ln(6) = \ln(10 - x^2 - y)$

$6 = 10 - x^2 - y$

$6 - 10 = -x^2 - y$

$-4 = -x^2 - y$

$4 = x^2 + y$

$\boxed{4 - x^2 = y}$

$\ln(10) = \ln(10 - x^2 - y)$

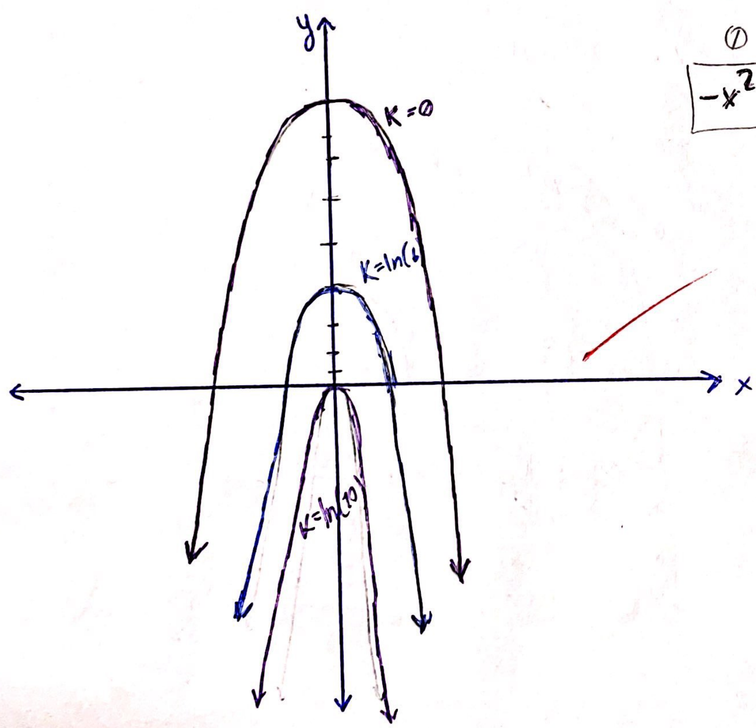
$10 = 10 - x^2 - y$

$10 - 10 = -x^2 - y$

$0 = -x^2 - y$

$0 = x^2 + y$

$\boxed{-x^2 = y}$



12pt

3)

$$|r(t)| = \sqrt{\underbrace{\frac{16t^2}{9}(1+t^2) + \frac{16t^2}{9}(1-t^2) + \frac{1}{9}t^2}}$$

$$\frac{1}{9}t^2\left[16(1+t^2) + 16(1-t^2)\right]$$

$$\frac{1}{9}t^2\left[\underbrace{16 + \cancel{16t^2} + 16 - \cancel{16t^2}}\right]$$

$$\underbrace{16 + 16}_{32}$$

$$\frac{32}{9}t^2$$

$2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16 \cdot 2 = 32$

2^5

$$|r'(t)| = \sqrt{\frac{32}{9}t^2} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{9}}\sqrt{t^2} = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{3}t$$

$$L = \int_2^8 \frac{2^{\frac{5}{2}}}{3}|t|\,dt = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{3}\int_5^8 |t|\,dt = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{6}|t|^2 + C$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{2}}}{6}\left\{8^2 - 5^2\right\}$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{2}}}{6}\left\{64 - 25\right\}$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{2}}}{6}\left\{39\right\} = \frac{\sqrt{32} \cdot 39}{6}$$

2. **(16 pts.)** Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta tangente a $\mathbf{r(t)} = \langle\, 2\sqrt{t+2},\ \sin(\pi t),\ t\ln(t-1) - 2t \,\rangle$ en el punto donde $t = 2$.

$\vec{r}_t = \vec{r}(a) + t\,\vec{r}\,'(a)$

$r'(t) = \left\langle 2\cdot\frac{1}{2}(t+2)^{-\frac{1}{2}},\ \cos(\pi t),\ \ln(t-1) + t\cdot\frac{1}{t-1} - 2 \right\rangle$

$= \left\langle 1\,(t+2)^{-\frac{1}{2}},\ \cos(\pi t),\ \ln(t-1) + \frac{t}{t-1} - 2 \right\rangle$

$r'(2) = \left\langle (2+2)^{-\frac{1}{2}},\ \cos(2\pi),\ \ln(2-1) + \frac{2}{2-1} - 2 \right\rangle$

$= \left\langle \frac{1}{\sqrt{4}},\ 1,\ \ln(1) \cancel{+2-2} \right\rangle$

$= \left\langle \frac{1}{2},\ 1,\ 0 \right\rangle$

$r(2) = \left\langle 2\sqrt{2+2},\ \sin(2\pi),\ 2\ln(2-1) - 2(2) \right\rangle$

$= \langle 2\cdot 2,\ 0,\ 2\ln(1) - 4 \rangle$

$= \langle 4,\ 0,\ -4 \rangle$

$\vec{r}_T = \langle 4, 0, -4\rangle + t\left\langle \frac{1}{2}, 1, 0 \right\rangle$

$x = 4 + t\,\frac{1}{2} \longrightarrow 2x - 8 = t$

$y = 0 + t \longrightarrow y = t$

$z = -4 + 0t \longrightarrow z - 4 = 0t$

$\boxed{2x - 8 = y\ ,\ z = 4}$

13p 15

3. (16 **pts.**) Encuentre la longitud (simplifique a un entero) de la curva descrita por la ecuación vectorial: $\mathbf{r(t)} = \frac{4}{9}(1+t^2)^{3/2}\mathbf{i} + \frac{4}{9}(1-t^2)^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{6}t^2\mathbf{k}$ en $2 \leqslant t \leqslant 8$.

$$r(t) = \underbrace{\frac{4}{9}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\hat{\imath}}_{f(t)} + \underbrace{\frac{4}{9}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\hat{\jmath}}_{g(t)} + \underbrace{\frac{1}{6}t^2\hat{k}}_{h(t)}$$

$$f'(t) = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}(1+t^2)^{\frac{3}{2}-\frac{2}{2}}\cdot 2t$$

$$= \frac{12}{18}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2t = \frac{2}{3}\cdot 2t\,(1+t^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4t}{3}(1+t^2)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{2} \frac{16t^2}{9}(1+t^2)$$

$$g'(t) = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\cdot -2t$$

$$= \frac{12}{18}\cdot -2t\,(1-t^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{24t}{18}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{4\cdot\cancel{6}t}{3\cdot\cancel{6}}(1-t^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{4t}{3}(1-t^2)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{2} \frac{16t^2}{9}(1-t^2)$$

$$h'(t) = \frac{1}{6}\cdot 2t = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 3}t = \frac{1}{3}t \xrightarrow{2} \frac{1}{9}t^2$$

3).

$$r(t) = \langle \underbrace{\tfrac{4}{9}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}_{f(t)}, \underbrace{\tfrac{4}{9}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}_{g(t)}, \underbrace{\tfrac{1}{6}t^2}_{h(t)} \rangle \qquad 2 \le t \le 8$$

$$f'(t) = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2t$$

$$= \frac{12}{18}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2t = \frac{24t}{18}(1+t^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\cancel{6}\cdot 4t}{\cancel{6}\cdot 3}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4t}{3}(1+t^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{4t}{3}\sqrt{1+t^2}$$

$$g'(t) = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\cdot -2t = \frac{12}{18}\sqrt{1-t^2}\cdot -2t = -\frac{24t}{18}\sqrt{1-t^2}$$

$$= -\frac{4}{3}t\sqrt{1-t^2}$$

$$h'(t) = \frac{1}{6}\cdot 2t = \frac{1}{3}t$$

$$|r'(t)| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}t\sqrt{1+t^2}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}t\sqrt{1-t^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}t\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{9}t^2(1+t^2) + \left(\frac{16}{9}t^2(1-t^2)\right) + \left(\frac{1}{9}t^2\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9}t^2\left(16(1+t^2) + 16(1-t^2)\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9}t^2\left(16 + \cancel{16t^2} + 16 - \cancel{16t^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9}t^2(32)} = \frac{1}{3}\cdot t\cdot\sqrt{32} = \frac{\sqrt{32}}{3}t$$

$$L = \int|r'(t)|\,dt = \frac{\sqrt{32}}{3}\int t\,dt = \frac{\sqrt{32}}{6}t^2 + C\Big]_2^8$$

14 ~~13~~pts

$$\frac{\sqrt{32}}{6}\{64 - 4\} = \frac{\sqrt{32}}{6}\cdot 60 = \boxed{10\cdot\sqrt{32}}$$

4. Considere la función vectorial: $\mathbf{r}(t) = \left\langle \overbrace{\ln(t^2-1)}^{f(t)}, \overbrace{\frac{5t-15}{t^2-9}}^{g(t)}, \overbrace{\frac{\sinh(2t-4)}{t-2}}^{h(t)} \right\rangle$.

(a) (10 **pts.**) Encuentre el dominio de $\mathbf{r}$. Utilice notación de intervalo.

(b) (06 **pts.**) Evalúe $\lim_{t\to 2} \mathbf{r}(t)$.

ID $f(t)$:

$t^2 - 1 > 0$

$t^2 > 1$

$t > \pm 1$

$-1 > t > 1$ ~~1K~~

ID $g(t)$:

$t^2 - 9 \neq 0$

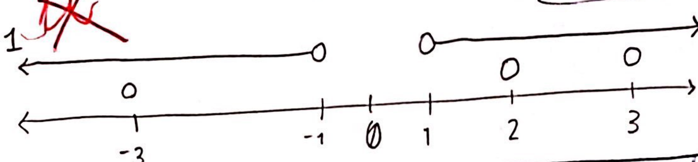
$t^2 \neq 9$

$t \neq \pm 3$

ID $h(t)$:

$t \neq 2$

~~$D: (-\infty, -1) \cup (1,2) \cup (2,3) \cup (3,\infty)$~~



$\boxed{D: (-\infty, -3) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)}$

6
6pts

b) $\lim_{t\to 2} \left\langle \ln(t^2-1), \frac{5t-15}{t^2-9}, \frac{\sinh(2t-4)}{t-2} \right\rangle$

$\lim_{t\to 2} (f(t)) \overset{LH}{=} \ln(4-1) = \ln(3)$

$\boxed{\lim_{t\to 2} (r) = \langle \ln(3), 1, 2 \rangle}$

6pts

$\lim_{t\to 2} (g(t)) = \frac{5(2)-15}{(2)^2-9} = \frac{10-15}{4-9} = \frac{-5}{-5} = 1$

$\lim_{t\to 2} (h(t)) = \frac{\sinh(2(2)-4)}{2-2}$ $\quad \frac{0}{0}$ indef.

$\overset{LH}{=} \lim_{t\to 2} \left(\frac{\cosh(2t-4)\cdot 2}{1} \right) = \frac{1\cdot 2}{1} = 2$

5. Encuentre las operaciones indicadas para las funciones dadas.

(a) (08 **pts.**) $T(x,y,z) = \dfrac{-200}{x^2+y^2+z^2}$, Simplifique $\dfrac{x}{2}\dfrac{\partial T}{\partial x} + \dfrac{y}{2}\dfrac{\partial T}{\partial y} + \dfrac{z}{2}\dfrac{\partial T}{\partial z}$.

(b) (10 **pts.**) $u(w,x,y,z) = \sinh(w^2+x^3)\ln(\sec(y)+\tan(z))$, u_{ww}, u_{zx} .

a) $$\frac{\partial T}{\partial x} = T_x = -200 \cdot -1\,(x^2+y^2+z^2)^{-2} \cdot 2x$$

$$= 400x\,(x^2+y^2+z^2)^{-2}$$

$$= \frac{400x}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{x}{2}\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{x}{2} \cdot \frac{400x}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{400x^2}{2\,(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = T_y = -200 \cdot -1\,(x^2+y^2+z^2)^{-2} \cdot 2y$$

$$= \frac{400y}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{y}{2}\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{400y^2}{2\,(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -200 \cdot -1\,(x^2+y^2+z^2)^{-2} \cdot 2z$$

$$= \frac{400z}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{z}{2}\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{400z^2}{2(x^2+y^2+z^2)^2}$$

Respuesta en hoja

5) a)

$$\frac{x}{2}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{z}{2}\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{200x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{200y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{200z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$= \frac{200}{(x^2+y^2+z^2)^2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

8pts

b) $u(w,x,y,z) = \sinh(w^2+x^3)\ln(\sec(y)+\tan(z))$ $\quad u_{ww}, u_{zx}$

$$u_w = \ln(\sec(y)+\tan(z))\cosh(w^2+x^3)\cdot 2w$$

$$u_{ww} = \ln(\sec(y)+\tan(z))\left(\sinh(w^2+x^3)\cdot 2^2w^2 + \cosh((w^2+x^3)\cdot 2)\right)$$

$$u_z = \sinh(w^2+x^3)\frac{\sec^2(z)}{\sec(y)+\tan(z)}$$

$$u_{zx} = \frac{\sec^2(z)}{\sec(y)+\tan(z)}\cdot\cosh(w^2+x^3)\cdot 3x^2$$

10

6. Un proyectil se lanza con una velocidad inicial v_o y con un ángulo θ respecto a la horizontal. Si se toma en cuenta su velocidad terminal mg/k, su función de velocidad es:

$$v(t) = \left\langle\, v_o \cos\theta,\ \frac{mg}{k} + \left(v_o \sin\theta - \frac{mg}{k}\right) e^{-kt/m} \,\right\rangle$$

Los términos v_o, m, g, θ y k son constantes.

(a) (05 **pts.**) Encuentre la función de aceleración del objeto.

(b) (11 **pts.**) Encuentre la función de posición del objeto si $\mathbf{r}(0) = 10\mathbf{i}$.

$v'(t) = a(t)$

$$v(t) = \langle \underbrace{V_o \cos(\theta)}_{f(t)},\ \underbrace{\frac{mg}{k} + \left(V_o \sin\theta - \frac{mg}{k}\right) e^{\frac{-kt}{m}}}_{g(t)} \rangle$$

$f'(t) = \emptyset$

$$g'(t) = \emptyset + \left(V_o \sin(\theta) - \frac{mg}{k}\right) e^{\frac{-kt}{m}} \cdot -\frac{k}{m}$$

a) $a(t) = \left\langle \emptyset,\ \left(V_o \sin(\theta) - \frac{mg}{k}\right) e^{\frac{-kt}{m}} \cdot -\frac{k}{m} \right\rangle$

$\int v(t)\,dt = r(t)$

$r(t) = \langle V_o \cos(\theta)\, t + C_1,$

Resp. en hoja

$$\int g(t)\,dt = \frac{mg}{k}t + \left(V_o \sin(\theta) - \frac{mg}{k}\right) \int e^{\frac{-kt}{m}}\,dt$$

$u = -\frac{k}{m}t$

$du = -\frac{k}{m}\,dt$

$-\frac{m}{k}\,du = dt$

6) $\int g(t)\,dt = \frac{mg}{k}t + \left(V_0 \sin(\theta) - \frac{mg}{k}\right)\left(-\frac{m}{k}\int e^{u}\,du\right)$

$= \frac{mg}{k}t + \left(V_0 \sin(\theta) - \frac{mg}{k}\right)\left(-\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right) + C$

$r(0) = \langle 10, 0 \rangle$

$\cancel{V_0 \cos(\theta)(0)}^{\,0} + C_1 = 10$

$C_1 = 10$

$\cancel{\frac{mg}{k}(0)}^{\,0} + \left(V_0 \sin(\theta) - \frac{mg}{k}\right)\left(-\frac{m}{k}e^{\cancel{-\frac{k}{m}(0)}^{\,0}}\right) + C_2 = 0$

$\left(V_0 \sin(\theta) - \frac{mg}{k}\right)\left(-\frac{m}{k}\right) + C_2 = 0$

$-\frac{V_0 m \sin(\theta)}{k} + \frac{m^2 g}{k^2} + C_2 = 0$

$C_2 = \frac{V_0 m \sin(\theta)}{k} - \frac{m^2 g}{k^2} = \frac{m}{k}\left(V_0 \sin(\theta) - \frac{m}{k}g\right)$

b)

$r(t) = \Big\langle V_0 \cos(\theta)t + 10,$

$\frac{mg}{k}t + \left(V_0 \sin(\theta) - \frac{mg}{k}\right)\left(-\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right) + \frac{m}{k}\left(V_0 \sin(\theta) - \frac{m}{k}g\right)\Big\rangle$

11 pts

Cálculo Multivariable

Parcial 1

5to Semestre 2020 **(2 horas)**

Nombre:______________________________ **Carnet:** ________________

Tema:	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos:	18	16	16	16	18	16	100
Nota:							

1. Considere la función en dos variables $f(x, y) = \ln(10 - x^2 - y)$.

   (a) (06 **pts.**) Encuentre y bosqueje el dominio de la función.

Solución:

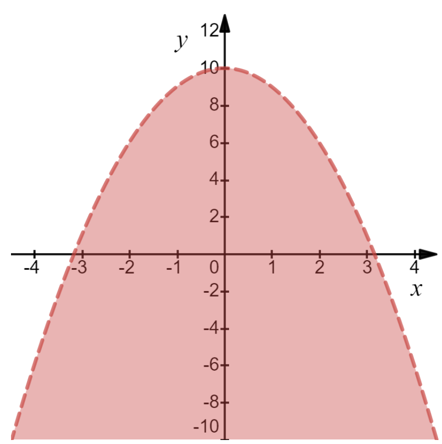
La función está definida cuando $10 - x^2 - y > 0$ ó $y < 10 - x^2$ **(2 pts.)**

El dominio consiste de todos los puntos debajo de la parábola $y = 10 - x^2$.

(2 pts.) Región sombreada.

(1 pt.) Parábola graficada con sus interceptos.

(1 pt.) Indicar que la parábola no es parte del dominio.

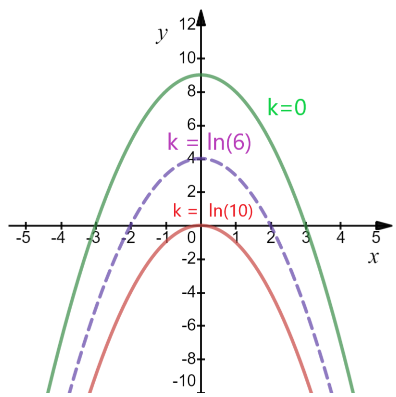


(b) (12 **pts.**) Encuentre y bosqueje las curvas de nivel de f para $k = 0,\ \ln(6),\ \ln(10)$.

Solución:

Curvas de Nivel	$\ln(10 - x^2 - y) = k$	**(1 pt.)**
Simplifique:	$10 - x^2 - y = e^k$	**(1 pt.)**
	$10 - e^k + x^2 = y$	
$k = 0:$	$9 - x^2 = y$	**(1 pt.)**
$k = \ln(6):$	$4 - x^2 = y$	**(1 pt.)**
$k = \ln(10):$	$-x^2 = y$	**(1 pt.)**

(2 pts.) por graficar cada curva de nivel.
(1 pt.) por indicar las curvas de nivel.



2. (16 **pts.**) Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta tangente a $\mathbf{r(t)} = \langle\ 2\sqrt{t+2},\ \sin(\pi t),\ t\ln(t-1) - 2t\ \rangle$ en el punto donde $t = 2$.

Solución:

Pto. sobre la curva:	$\mathbf{r}(t) = \langle 4, 0, -4\rangle$	**(3 pts.)**
Derivada:	$\mathbf{r}'(t) = \left\langle \dfrac{1}{\sqrt{t+2}}, \pi\cos(\pi t), \ln(t-1) + \dfrac{t}{t-1} - 2 \right\rangle$	**(6 pts.)**
Vector Tangente:	$\mathbf{r}'(2) = \left\langle \dfrac{1}{2},\ \pi,\ 2-2 \right\rangle$	**(3 pts.)**
Ec. Recta Tangente:	$\mathbf{r}(t) = \left\langle 4 + \dfrac{t}{2},\ 2t,\ -4 \right\rangle$	**(1 pt.)**
Ecs. Simétricas:	$\dfrac{x-4}{1/2} = \dfrac{y}{2}, \quad z = -4$	**(3 pts.)**

3. (16 **pts.**) Encuentre la longitud de la curva descrita por la función vectorial: $\mathbf{r(t)} \;=\; \frac{4}{9}(1+t^2)^{3/2}\mathbf{i} \;+\; \frac{4}{9}(1-t^2)^{3/2}\mathbf{j} \;+\; \frac{1}{6}t^2\mathbf{k}$ en $2 \leqslant t \leqslant 8$.

Solución:

Vector Tangente: $$\mathbf{r}'(t) = \frac{4t}{3}(1+t^2)^{1/2}\mathbf{i} - \frac{4t}{3}(1-t^2)^{1/2}\mathbf{j} + \tfrac{1}{3}t\mathbf{k} \quad \textbf{(3 pts.)}$$

Magnitud Vector: $$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\frac{16t^2}{9}(1+t^2) + \frac{{}^16t^2}{9}(1-t^2) + \frac{t^2}{9}} \quad \textbf{(2 pts.)}$$

Simplifique: $$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\frac{16t^2}{9} + \frac{16t^4}{9} + \frac{16t^2}{9} - \frac{16t^4}{9} + \frac{t^2}{9}} \quad \textbf{(1 pt.)}$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\frac{33t^2}{9}} = t \quad \textbf{(2 pts.)}$$

Longitud de Arco: $$L = \frac{\sqrt{33}}{3}\int_2^8 |\mathbf{r}'(t)|\; dt \;=\; \int_2^8 tdt \quad \textbf{(2 pts.)}$$

Integre: $$L = \frac{\sqrt{33}}{3}\; \frac{t^2}{2}\Bigg]_2^8 \quad \textbf{(3 pts.)}$$

Evalúe y Simplifique: $$L = \frac{64-4}{6}\sqrt{33} = 10\sqrt{33} \quad \textbf{(3 pts.)}$$

4. Considere la función vectorial: $\mathbf{r}(t) = \left\langle \ln(t^2-1),\ \dfrac{5t-15}{t^2-9},\ \dfrac{\sinh(2t-4)}{t-2} \right\rangle$.

(a) (10 **pts.**) Encuentre el dominio de $\mathbf{r}$. Utilice notación de intervalo.

Solución:

Encuentre el dominio de cada función componente.

Dominio de f:	$t^2 > 1$	$(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$	**(2 pts.)**
Dominio de g:	$t^2 \neq 9$	$(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty)$	**(2 pts.)**
Dominio de h:	$t \neq 2$	$(-\infty,\ 2)\cup(2,\infty)$	**(1 pt.)**

El dominio de $\mathbf{r}(t)$ es la intersección entre los tres dominios. **(5 pts.)**

$$(-\infty,-3)\cup(-3,-1)\cup(1,2)\cup(2,3)\cup(3,\infty)$$

(b) (06 **pts.**) Evalúe $\lim\limits_{t\to 2}\mathbf{r}(t)$.

Solución:

Evalúe el límite en cada función componente.

$$\lim_{t\to 2}\ln(t^2-1) = \ln(3) \qquad \textbf{(1 pt.)}$$

$$\lim_{t\to 2}\frac{5t-15}{t^2-9} = \frac{-5}{-5} = 1 \qquad \textbf{(1 pt.)}$$

$$\lim_{t\to 2}\frac{\sinh(2t-4)}{t-2} \underbrace{=}_{LH} \frac{2\cosh(2t-4)}{1} = 2 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

$$\lim_{t\to 2}\mathbf{r}(t) = \langle \ln(3),\ 1,\ 2\rangle \qquad \textbf{(1 pt.)}$$

5. Encuentre las operaciones indicadas para las funciones dadas.

(a) (08 **pts.**) $T(x, y, z) = \dfrac{-200}{x^2 + y^2 + z^2}$, Simplifique $\dfrac{x}{2}\dfrac{\partial T}{\partial x} + \dfrac{y}{2}\dfrac{\partial T}{\partial y} + \dfrac{z}{2}\dfrac{\partial T}{\partial z}$.

Solución:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{400x}{(x^2+y^2+z^2)^2} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{400y}{(x^2+y^2+z^2)^2} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{400z}{(x^2+y^2+z^2)^2} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Encuentre $0.5xT_x + 0.5yT_y + 0.5zTz$ **(2 pts.)**

$$\frac{x}{2}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{z}{2}\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{200x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{200y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{200z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{x}{2}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{z}{2}\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{200x^2+200y^2+200z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{200}{x^2+y^2+z^2} = -T$$

(4 pts.) extra por simplificar y **(1 pt.)** por escribirla como $-T$.

(b) (10 **pts.**) $u(w, x, y, z) = \sinh(w^2 + x^3)\ln(\sec(y) + \tan(z))$, u_{ww}, u_{zx} .

Solución:

$$u_w = 2w\cosh(w^2+x^3)\ln(\sec(y)+\tan(z)) \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$u_z = \sinh(w^2+x^3)\frac{\sec^2 z}{\sec(y)+\tan(z)} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$\begin{aligned} u_{ww} &= 2\cosh(w^2+x^3)\ln(\sec(y)+\tan(z)) \\ &\quad + 4w^2\sinh(w^2+x^3)\ln(\sec(y)+\tan(z)) \end{aligned} \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

$$u_{zx} = 3x^2\cosh(w^2+x^3)\frac{\sec^2 z}{\sec(y)+\tan(z)} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

6. Un proyectil se lanza con una velocidad inicial v_o y con un ángulo θ respecto a la horizontal. Si se toma en cuenta su velocidad terminal mg/k, su función de velocidad es:

$$v(t) = \left\langle\ v_o\cos\theta,\ \ \frac{mg}{k} + \left(v_o\sin\theta - \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}\ \right\rangle$$

Los términos $v_o,\ m,\ g,\ \theta$ y k son constantes.

(a) (05 **pts.**) Encuentre la función de aceleración del objeto.

Solución:
Derive la función de velocidad para encontrar la aceleración.
Note que la velocidad es constante en x.

$$a(t) = v'(t) = \left\langle\ 0,\ \ -\frac{k}{m}\left(v_o\sin\theta - \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}\ \right\rangle$$

(2 pts.) por la derivada en x.
(3 pts.) por la derivada en y.

(b) (11 **pts.**) Encuentre la función de posición del objeto si $\mathbf{r}(0) = 10\mathbf{i}$.

Solución:
Integre la función de velocidad para encontrar la posición.

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle\ tv_o\cos\theta + C_1,\ \ \frac{mg}{k}t - \frac{m}{k}\left(v_o\sin\theta - \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m} + C_2\ \right\rangle \quad \textbf{(5 pts.)}$$

Evalúe en $\mathbf{r}(0) = 10\mathbf{i}$ para encontrar C_1 y C_2.

$$\mathbf{r}(0) = \left\langle\ 0 + C_1,\ -\frac{m}{k}\left(v_o\sin\theta - \frac{mg}{k}\right) + C_2\ \right\rangle = \langle 10,\ 0\rangle \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

Se encuentra que $C_1 = 10$ y $C_2 = \dfrac{m}{k}\left(v_o\sin\theta - \dfrac{mg}{k}\right)$. **(2 pts.)**

La función de posición es: **(1 pt.)**

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle\ tv_o\cos\theta + 10,\ \ \frac{mg}{k}t + \frac{m}{k}\left(v_o\sin\theta - \frac{mg}{k}\right)(1 - e^{-kt/m})\ \right\rangle$$

Parte III

Laboratorios

Capítulo 11

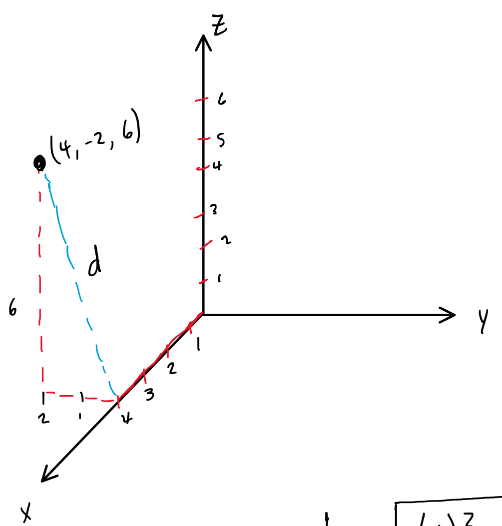
Laboratorio #01

LABORATORIO #01

Wednesday, January 15, 2020
13:03

DAVID CORZO 20190432

1) Punto $(4, -2, 6)$ al eje x:

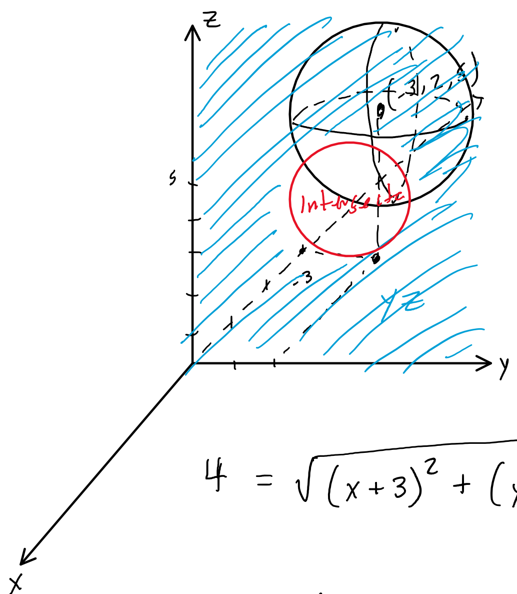


$$d = \sqrt{(6)^2 + (2)^2}$$

$$d = \sqrt{36 + 4}$$

$$d = \sqrt{40}$$

2) Ecuación de la esfera con centro $(-3, 2, 5)$ & radio 4. Intersección de la esfera con el plano yz.



$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2$$

$$= \sqrt{(x-(-3))^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}$$

$$= \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}$$

...

$$4 = \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}$$

Se asume $x = 0$

$$(4)^2 = \left(\sqrt{(0+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}\right)^2$$

$$16 = 9 + (y-2)^2 + (z-5)^2$$

$$16 - 9 = (y-2)^2 + (z-5)^2$$

$$7 = (y-2)^2 + (z-5)^2$$

Queda la ecuación de un círculo correspondiente a el círculo que deja la esfera en el plano yz.

3) Encuentre el radio y centro de la esfera cuya ec. es $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15$.

$x: \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$

$y: \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4$

$z: \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$

$$[x^2 - 2x + 1] + [y^2 - 4y + 4] + [z^2 + 8z + 16] = 21 + 15$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 36$$

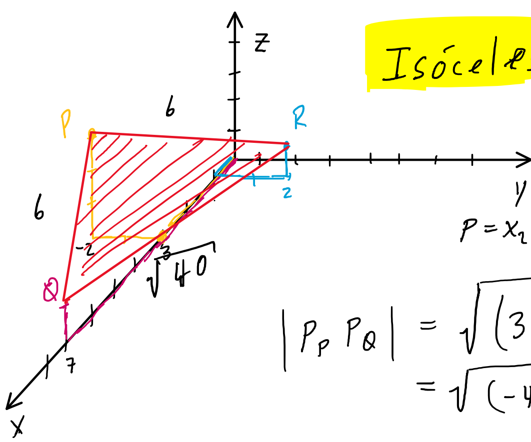
$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2} = 6$$

radio: 6

centro: $(1, 2, -4)$

4) Longitud de los lados del triángulo $P(3,-2,-3)$, $Q(7,0,1)$, $R(1,2,1)$. ¿Isósceles, triángulo rectángulo?

$$|P_A \,\&\, P_B| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$



Isósceles

$P = x_2 \quad Q = x_1$

$$|P_P P_Q| = \sqrt{(3-7)^2+(-2-0)^2+(-3-1)^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(-4)^2} = \sqrt{16+4+16}$$

$$= \sqrt{36} = 6$$

$Q = x_2 \quad R = x_1$

$$|P_Q P_R| = \sqrt{(7-1)^2+(0-2)^2+(1-1)^2}$$

$$= \sqrt{(6)^2+(-2)^2+(0)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$$

$R = x^2 \quad P = x_1$

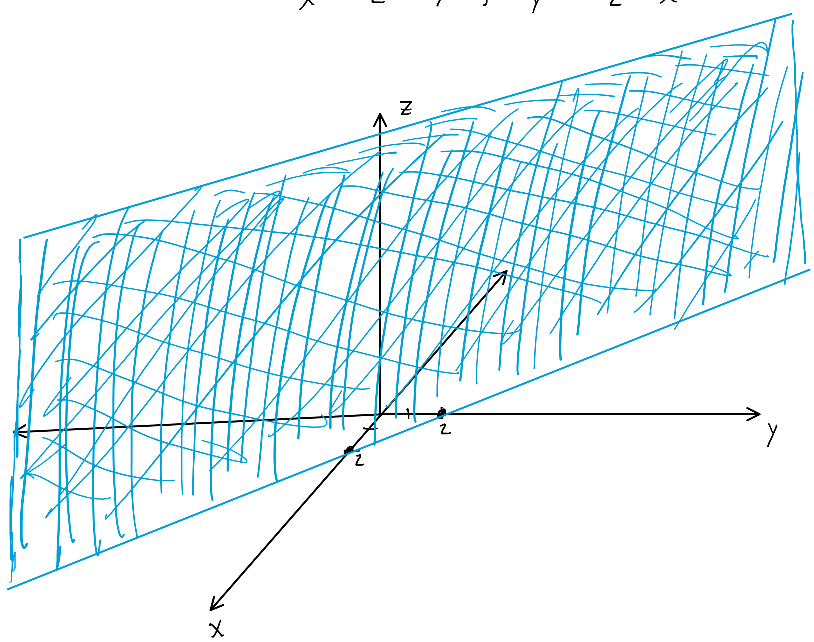
$$|P_R P_P| = \sqrt{(1-3)^2+(2+2)^2+(1+3)^2}$$

$$= \sqrt{(2)^2+(4)^2+(4)^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$$

5) Describa & bosqueje la superficie en R^3 representada por la ecuación $x + y = 2$

$x = 2 - y$; $y = 2 - x$

$x + y + 0z = 2$



6) Describa y bosqueje la superficie $\mathbb{R}^3$ representada por la ecuación $2z = 8 - 4x$

I; $x = 0$

$2z - 8 = 0$

$z = \frac{+8}{2}$

$z = +4$

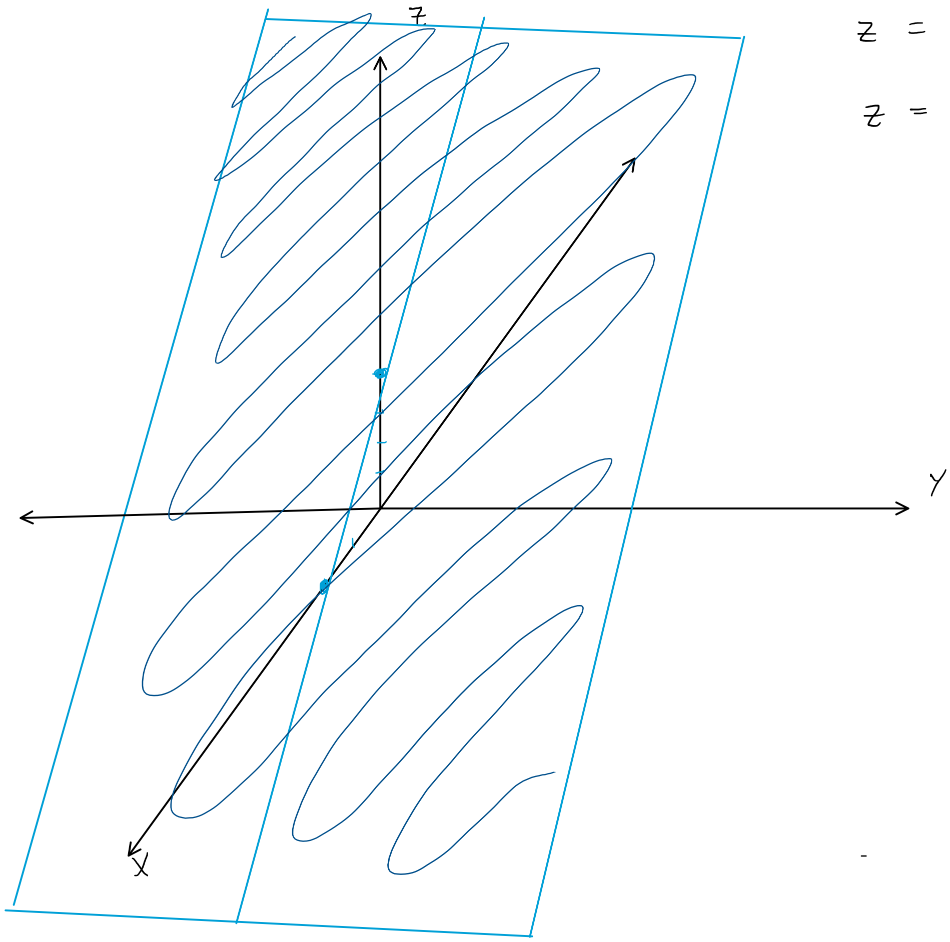
I; $z = 0$

$0 = 8 - 4x$

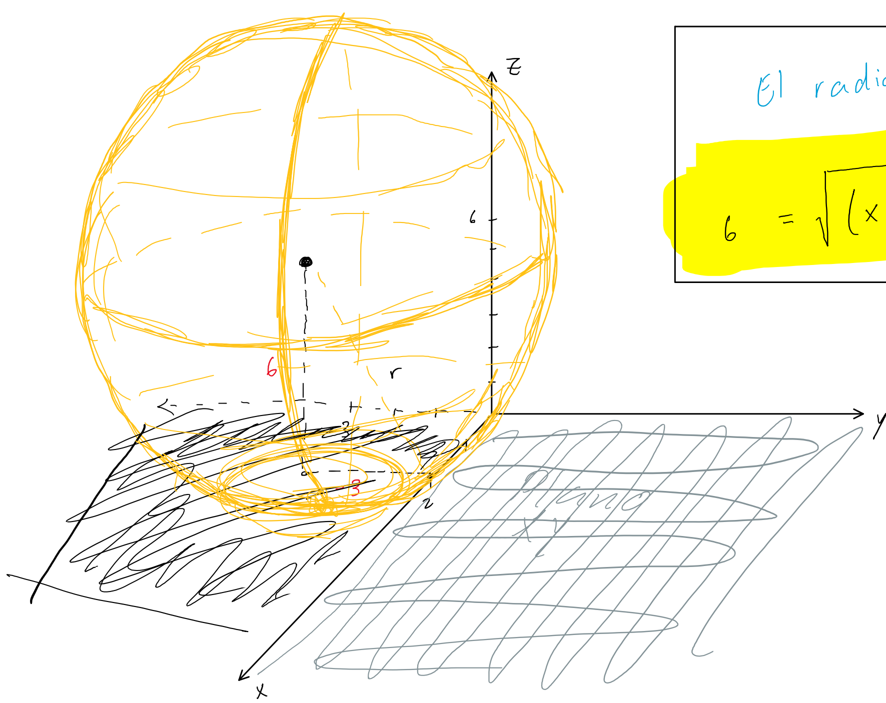
$-8 = -4x$

$\frac{-8}{-4} = x$

$x = 2$



7) Bono: La ecuación de la esfera con centro $(2,-3,6)$ que toca el plano xy.



El radio es 6.

$$6 = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2}$$

Laboratorio #1 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 16 de enero

Nombre:____ **Carnet:** ________________

Tema:	1	2	3	4	5	6	7	Total
Puntos:	20	20	20	20	10	10	10	110
Nota:								

Resuelva las siguientes ejercicios:

1. (20 pts.) Determine la distancia del punto $(4, -2, 6)$ al eje x

2. (20 pts.) Halle la ecuación de la esfera con centro $(-3, 2, 5)$ y radio 4.
   ¿Cuál es la intersección de esta esfera con el plano yz?

3. (20 pts.) Encuentre el radio y centro de la esfera cuya ecuación es $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15$.

4. (20 pts.) Halle la longitud de los lados del triángulo $P(3, -2, -3), Q(7, 0, 1), R(1, 2, 1)$.
   ¿Es un triángulo isósceles? ¿Es un triángulo rectángulo? Utilice el Teorema de Pitágoras.

5. (10 pts.) Describa y bosqueje la superficie en R^3 representada por la ecuación $x + y = 2$.

6. (10 pts.) Describa y bosqueje la superficie en R^3 representada por la ecuación $2z = 8 - 4x$.

7. (10 pts.) **BONO:**
   Encuentre la ecuación de la esfera con centro $(2, -3, 6)$ que toca el plano x.

Parte IV

Tareas

Capítulo 12

Tarea #02

Tarea #2
David Gabriel Corzo Mcmath - 20190432
Cálculo Multivariable

1) Vectores:

$a = \langle 5, -12, 0 \rangle$

$b = \langle 0, -3, -6 \rangle$

$c = \langle 1, 0, 2 \rangle$

$2b = \langle 0, -6, -12 \rangle$

a) $a + 2(b+c) - (a-2b) =$

$= a + 2[(0+1), (-3+0), (-6+2)] - [(5-0), (-12+6), (0+12)]$

$= a + 2\langle 1, -3, -4 \rangle - \langle 5, -6, 12 \rangle$

$= a + \langle 2, -6, -8 \rangle - \langle 5, -6, 12 \rangle$

$= a + [(2-5), (-6+6), (-8-12)]$

$= a + \langle -3, 0, -20 \rangle$

$= \langle 5, -12, 0 \rangle + \langle -3, 0, -20 \rangle$

$= [(5-3), (-12+0), (0-20)]$

$= \langle 2, -12, -20 \rangle$

b) $2a \cdot (3b + 4c) - 2c \cdot (4a + 0b)$

$2a = \langle 16, -24, 0 \rangle$ $4a = \langle 20, -48, 0 \rangle$

$3b = \langle 0, -9, -24 \rangle$ $0b = \langle 0, 0, 0 \rangle$

$2c = \langle 2, 0, 4 \rangle$ # Sacar nuevos vectores

$4c = \langle 4, 0, 8 \rangle$

$= 2a \cdot \langle (0 + 4), (-9 + 0), (-24 + 8) \rangle - 2c \cdot \langle (20 + 0), (-48 + 0), (0 + 0) \rangle$

$= 2a \cdot \langle 4, -9, -16 \rangle - 2c \cdot \langle 20, -48, 0 \rangle$

$= \langle (10 \cdot 4), (-24 \cdot -9), (0 \cdot -16) \rangle - \langle (2 \cdot 20), (0 \cdot -48), (4 \cdot 0) \rangle$

$= \langle 40, 216, 0 \rangle - \langle 40, 0, 0 \rangle$

$= \langle (40 - 40), (216 - 0), (0, 0) \rangle$

$= \langle 0, 216, 0 \rangle$

c) $|a + c - (a+b)| =$

$a = \langle 5, -12, 0\rangle \quad b = \langle 0, -3, -6\rangle \quad c = \langle 1, 0, 2\rangle$

$= |\langle (5+1), (-12+0), (0+2)\rangle - (\langle (5+0), (-12-3), (0-6)\rangle)|$

$= |\langle 6, -12, 2\rangle - \langle 5, -15, -6\rangle|$

$= |\langle (6-5), (-12+15), (2+6)\rangle|$

$= |\langle 1, 3, 8\rangle|$

$\sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (8)^2}$

$= \sqrt{1 + 9 + 64}$

$= \sqrt{74}$

d) $|a + c| - |a + b|$

$= |\langle (5+1), (-12+0), (0+2)\rangle| - |\langle (5+0), (-12-3), (0-6)\rangle|$

$= |\langle 6, -12, 2\rangle| - |\langle 5, -15, -6\rangle|$

$= \sqrt{6^2 + (-12)^2 + 2^2} - \sqrt{5^2 + (-15)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{36 + 144 + 4} - \sqrt{25 + 225 + 36}$

$= \sqrt{184} - \sqrt{286}$

$\cos\theta = \dfrac{A \cdot B}{|A||B|}$

2) Misma dirección que el vector $\langle -3, 4, 6, -8 \rangle$

$$= |\langle -3, 4, 6, -8 \rangle|$$

Calcular magnitud

$$= \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (6)^2 + (-8)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16 + 36 + 64}$$

$$= \sqrt{125}$$

Entonces...

$$\left|\left\langle -\frac{3}{\sqrt{125}}, \frac{4}{\sqrt{125}}, \frac{6}{\sqrt{125}}, -\frac{8}{\sqrt{125}} \right\rangle\right| = 1$$

Comprobar...

$$= \sqrt{\frac{9}{125} + \frac{16}{125} + \frac{36}{125} + \frac{64}{125}} = \sqrt{\frac{1}{1}\ 5} = 1$$

3) Encuentre el ángulo de los vectores

a) $a = \langle 3, 0 \rangle$, $b = \langle 5, 5 \rangle$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{A \cdot B}{|A||B|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{\langle (3 \cdot 5), (0 \cdot 5) \rangle}{|\langle 3, 0 \rangle||\langle 5, 5 \rangle|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{15 + 0}{3 \cdot \sqrt{50}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{15}{3 \cdot \sqrt{2 \cdot 25}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{15}{3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\cancel{\frac{15}{15}} \cdot (2)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

b)

$a = \langle 2, -4, 5 \rangle$

$b = \langle -2, 4, -5 \rangle$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|a||b|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{-45}{(45)^{1/2}(45)^{1/2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{-45}{45}\right)$$

$$= \cos^{-1}(-1)$$

$$= \pi$$

$\vec{a} \cdot \vec{b}$

$\hookrightarrow$

2	-4	5
-2	4	-5
-4	-16	-25

$$= (-4) + (-16) + (-25)$$

$$= -20 - 25$$

$$= -45$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$|a|$

$$= \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (5)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 16 + 25} = \sqrt{45}$$

$|b|$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (4)^2 + (-5)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 16 + 25} = \sqrt{45}$$

4) Determine si los vectores son ortogonales, paralelos o ninguno.

a) $a = \langle -5, 3, 7 \rangle$ $b = \langle 6, -8, 2 \rangle$

Producto punto de a & b

-5	3	7
$\cdot\ 6$	$\cdot -8$	$\cdot\ 2$
-30	-24	$+14$

$(-30) + (-24) + (14) = -40$ Ninguno

b) $a = \langle 4, 6 \rangle$

$b = \langle -3, 2 \rangle$

4	6
-3	2
-12	12

$\underbrace{(-12) + 12}_{\emptyset}$

Son ortogonales

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \dots a_n b_n$$

c) $a = -i + 2j + 5K$

$b = 3i + 4j - K$

$a = \langle -1, 2, 5 \rangle$

$b = \langle 3, 4, -1 \rangle$

-1	2	5
3	4	-1
-3	8	-5

$\underbrace{(-3) + 8 + (-5)}$

$\underbrace{-8 + 8}$

0

Son ortogonales

d) $a = 2i + 6j - 4K$

$b = -3i - 9j + 6K$

$a = \langle 2, 6, -4 \rangle$

$b = \langle -3, -9, 6 \rangle$

2	6	-4
-3	-9	6
-6	54	-24

$(-6) + 54 + (-24)$

$-30 + 54$

24

Son paralelos por $\vec{a} \cdot \vec{b}$ son multiplos en tre sí.

5) Considerar vectores:

$a = \langle 3, 6, -2 \rangle$ esc: $\text{Proy}_a b = \frac{a \circ b}{|a|}$

$b = \langle 1, 2, 3 \rangle$ vec: $\text{Proy}_a b = \frac{a \circ b}{|a|} \frac{a}{|a|}$

a) Proyección de b sobre a:

Escalar:

$$\text{proy}_a b = \frac{3 + 12 - 6}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{9 + 36 + 4}} =$$

$$= \frac{9}{\sqrt{49}} = \boxed{\frac{9}{7}}$$

Vectorial:

$$\text{proy}_a b = \frac{9}{7} \circ \frac{1}{\sqrt{49}} \langle 3, 6, -2 \rangle$$

$$= \frac{9}{(49)^{\frac{1}{2}} \cdot (49)^{\frac{1}{2}}} \langle 3, 6, -2 \rangle$$

$$= \frac{9}{49} \langle 3, 6, -2 \rangle$$

$$= \left\langle \frac{27}{49}, \frac{54}{49}, -\frac{18}{49} \right\rangle$$

b) a sobre b:

$a = \langle 3, 6, -2 \rangle$

$b = \langle 1, 2, 3 \rangle$

$$\text{proy}_b\, a = \frac{a \cdot b}{|b|} \cdot \frac{b}{|b|}$$

$$\text{proy}_b\, a = \frac{a \cdot b}{|b|}$$

escalar: $$\text{proy}_b\, a = \frac{9}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}}$$

vectorial: $$\text{proy}_b\, a = \frac{9}{\sqrt{14}} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}\left[\langle 1, 2, 3 \rangle\right]$$

$$= \frac{9}{(14)^{\frac{1}{2}} \cdot (14)^{\frac{1}{2}}} \langle 1, 2, 3 \rangle$$

$$= \frac{9}{14} \langle 1, 2, 3 \rangle$$

$$= \left\langle \frac{9}{14}, \frac{18}{14}, \frac{27}{14} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{9}{14}, \frac{9}{7}, \frac{27}{14} \right\rangle$$

c) proyección de b sobre a no es igual a proyección de a sobre b; si estos cumplen la condición de $\vec{a} \cdot \vec{b} = \emptyset$ si resultan ser la misma proyección.

* el lab decía proyab = proyab que sí serían iguales pero asumí que quería decir proyab = $\text{proy}_b a$ que en cuyo caso no siempre son iguales.

BONO: Encontrar tal valor de x que $\langle 2, 1, -1\rangle$ & $\langle 1, x, 0\rangle$ es de $45°$.

θ tiene que ser igual a $45°$ ó $\frac{\pi}{4}$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{[(2\cdot 1)+(1\cdot x)+\cancel{(-1\cdot 0)}]}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+x^2+0^2}}\right)$$

$\emptyset$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{2+x}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{2+x}{\sqrt{6}\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2+x}{\sqrt{6}\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{1+x^2} = 2+x$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{6}\right)\sqrt{1+x^2}$$

$$\frac{\sqrt{12}}{2}\sqrt{1+x^2} = 2+x$$

$$\left(\frac{\sqrt{12}}{2}\sqrt{1+x^2}\right)^2 = (2+x)^2$$

$$3(1+x^2) = x^2+4x+4$$

$$3+3x^2 = x^2+4x+4$$

$$3+3x^2 = x^2+4x+4$$

$$\emptyset = x^2-3x+4x+4-3$$

$$\emptyset = -2x^2+4x+1$$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(4)\pm\sqrt{16-4(-2)(1)}}{2(-2)}$$

$$= \frac{-4\pm\sqrt{24}}{-4}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{-4} \approx -0.22$$

$$\approx 2.22$$

Tarea #2 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 23 de enero

Nombre:____ **Carnet:** ________________

Tema:	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos:	20	20	20	20	22	0	102
Nota:							

Resuelva las siguientes ejercicios:

1. Dados los vectores: $a = \langle 5, -12, 0\rangle$, $b = \langle 0, -3, -6\rangle$, $c = \langle 1, 0, 2\rangle$ encuentre:
   (a) (5 pts.) $a + 2(b + c) - (a - 2b)$
   (b) (5 pts.) $2a \cdot (3b + 4c) - 2c \cdot (4a + 0b)$
   (c) (5 pts.) $|a + c - (a + b)|$
   (d) (5 pts.) $|a + c| \ - \ |a + b|$

2. (20 pts.) Halle un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector $\langle -3,\ 4,\ 6,\ -8\rangle$

3. Encuentre el ángulo entre los siguientes vectores.
   No necesita utilizar calculadora para encontrar el ángulo.
   (a) (10 pts.) $\mathbf{a} = \langle 3,\ 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5,\ 5\rangle$
   (b) (10 pts.) $\mathbf{b} = \langle 2,\ -4,\ 5\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2,\ 4,\ -5\rangle$

4. Determine si los vectores son ortogonales, paralelos o ninguno.
   (a) (5 pts.) $a = \langle -5, 3, 7\rangle, b = \langle 6, -8, 2\rangle$
   (b) (5 pts.) $a = \langle 4, 6\rangle, b = \langle -3, 2\rangle$
   (c) (5 pts.) $a = -i + 2j + 5k, b = 3i + 4j - k$
   (d) (5 pts.) $a = 2i + 6j - 4k, b = -3i - 9j + 6k$

5. Considere los vectores $a = \langle 3, 6, -2\rangle$ y $b = \langle 1, 2, 3\rangle$. Encuentre las proyecciones escalar y vectorial:
   (a) (8 pts.) de **b** sobre **a** .
   (b) (8 pts.) de **a** sobre **b** .
   (c) (6 pts.) Explique si $\text{proy}_a b \ = \ \text{proy}_a b$.

6. **BONO: (10 pts.)**
   Encuentre los valores de x tales que el ángulo entre los vectores $\langle 2, 1, -1\rangle$ y $\langle 1, x, 0\rangle$ es de 45° .

Capítulo 13

Tarea #03

1) a. $(a \cdot b) \cdot c$

asumiendo que a, b, c son vectores.

Resulta en un escalar. productos punto resultan en escalares siempre

b. $(a \cdot b) \times c$

El producto cruz es entre vectores no se puede hacer entre escalares, $a \cdot b$ resulta en un escalar por ende no tiene sentido.

c. $(a \times b) \times c$

Resulta en un vector

d. $(a \times c) \cdot b$

Resulta en un escalar. producto cruz de a, c resulta en vector, ese vector con producto punto b resulta en escalar

2) Encuentre vectores unitarios ortogonales a $\langle 3, 2, 1 \rangle$ & $\langle -1, 1, 0 \rangle$.

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(2 \cdot 0) - (1 \cdot 1)\right] - \hat{j}\left[(3 \cdot 0) - (1 \cdot -1)\right] + \dots$$

$$+ \hat{k}\left[(3 \cdot 1) - (2 \cdot -1)\right]$$

$$= \hat{i}\left[0 - 1\right] - \hat{j}\left[0 - (-1)\right] + \hat{k}\left[3 - (-2)\right]$$

$$= -\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\therefore \langle -1, -1, 5 \rangle$$

Este es el vector ortogonal a
$\langle 3,2,1\rangle$ & $\langle -1,1,0\rangle$ Ahora sólo
falta la división por la magnitud
para que sea ortogonal unitario.

$$|O_\perp| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (5)^2} = \sqrt{1+1+25}$$
$$= \sqrt{27}$$

unit $\Rightarrow$ $O_\perp \cdot \frac{1}{\sqrt{27}} \Rightarrow \langle -1, -1, 5\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{27}} =$

$$R_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{1}{\sqrt{27}}, -\frac{5}{\sqrt{27}} \right\rangle$$

invierto signos para encontrar segundo vector

$$R_2 = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{27}}, -\frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{5}{\sqrt{27}} \right\rangle$$

Comprobación de ser unitario.

$$1 = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^2 + \left(-\frac{5}{\sqrt{27}}\right)^2}$$
$$1 = \sqrt{\left(\frac{1}{27}\right) + \left(\frac{1}{27}\right) + \left(\frac{25}{27}\right)}$$
$$1 = \sqrt{\frac{1+1+25}{27}}$$
$$1 = \sqrt{\frac{27}{27}}$$
$$1 = 1$$

$\therefore$ es unitario & ortogonal.

3) Calcule el triple producto escalar entre $a = \langle 1,2,3\rangle$ & $b = \langle 3,2,5\rangle$ & $c = \langle 0,4,3\rangle$ ¿ $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$

$b \times c = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \end{vmatrix}$

$$b \times c = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(2\cdot 3)-(5\cdot 4)\right] - \hat{j}\left[(3\cdot 3)-(5\cdot 0)\right] + \hat{k}\left[(3\cdot 4)-(2\cdot 0)\right]$$

$$= \hat{i}\left[6-20\right] - \hat{j}\left[9-0\right] + \hat{k}\left[12-0\right]$$

$$= \hat{i}\left[-14\right] - \hat{j}\left[9\right] + \hat{k}\left[12\right]$$

$$= -14\hat{i} - 9\hat{j} + 12\hat{k}$$

$$= \langle -14, -9, 12\rangle$$

$$a\cdot(b\times c) = \langle 1,2,3\rangle \cdot \langle -14,-9,12\rangle$$

$$= \langle (1\cdot -14), (2\cdot -9), (3\cdot 12)\rangle$$

$$= -14 - 18 + 36 = 4$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(2\cdot 5)-(3\cdot 2)\right] - \hat{j}\left[(1\cdot 5)-(3\cdot 3)\right] + \hat{k}\left[(1\cdot 2)-(3\cdot 2)\right]$$

$$= \hat{i}\left[10-6\right] - \hat{j}\left[5-9\right] + \hat{k}\left[2-6\right]$$

$$= \hat{i}\left[4\right] - \hat{j}\left[-4\right] + \hat{k}\left[-4\right]$$

$$= 4\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$= \langle 4, 4, -4\rangle$$

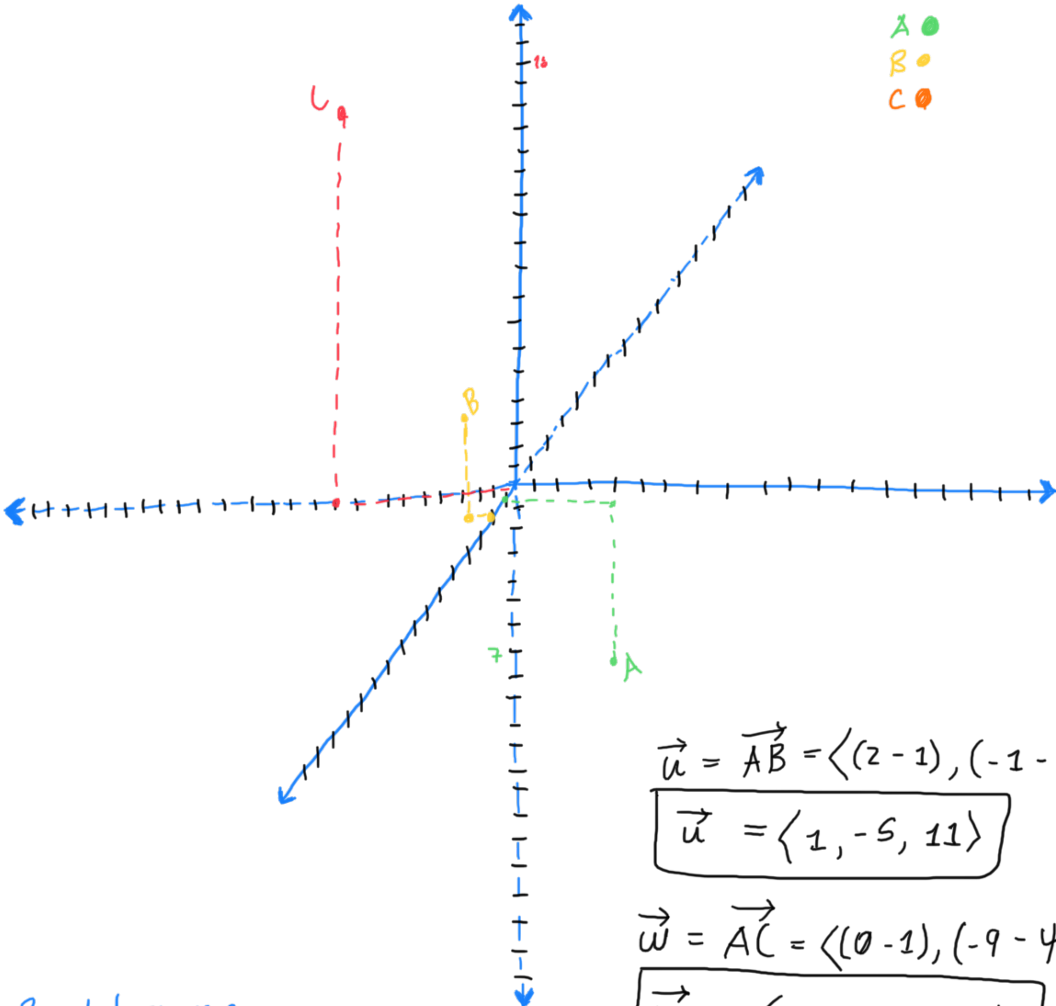
$$(a\times b)\cdot c = \langle 4,4,-4\rangle \cdot \langle 0,4,3\rangle$$

$$= 0 + 16 - 12 = 4$$

$\therefore \quad a\cdot(b\times c) = (a\times b)\cdot c$ Sí es igual ya que las dos dan 4, el mismo resultado.

4) Calcule el área del paralelogramo entre los puntos A(1, 4, -3), B(2, -1, 4) y C(0, 2, -1)

$A(1,4,-7)$, $B(2,-1,4)$ & $C(0,-9,18)$.



$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \langle (2-1), (-1-4), (4+7) \rangle$

$\boxed{\vec{u} = \langle 1, -5, 11 \rangle}$

$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = \langle (0-1), (-9-4), (18+7) \rangle$

$\boxed{\vec{w} = \langle -1, -13, 25 \rangle}$

Paralelogramo

$P = b \cdot a$

base $= |\vec{a}|$

altura $= |b| \sin\theta$

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -5 & 11 \\ -1 & -13 & 25 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{i}\left[(-5 \cdot 25) - (11 \cdot -13)\right] - \hat{j}\left[(1 \cdot 25) - (11 \cdot -1)\right] + \hat{k}\left[(1 \cdot -13) - (-5 \cdot -1)\right]$$

$$= \hat{i}\left[-125 + 143\right] - \hat{j}\left[25 + 11\right] + \hat{k}\left[-13 - 5\right] =$$

$$= 18\hat{i} - 36\hat{j} - 18\hat{k}$$

$$= \langle 18, -36, -18 \rangle$$

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = \sqrt{18^2 + (-36^2) + (-18^2)} = 18\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} = 9\sqrt{6}$$

5) Considere los puntos $P(1,0,1)$ & $Q(-2,1,3)$ & $R(4,2,5)$.

a) Encontrar el vector no cero ortogonal al plano

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (-2-1), (1-0), (3-1) \rangle$$

$$\boxed{\vec{u} = \langle -3, 1, 2 \rangle}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{PR} = \langle (4-1), (2-0), (5-1) \rangle$$

$$\boxed{\vec{w} = \langle 3, 2, 4 \rangle}$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(1\cdot 4)-(2\cdot 2)\right] - \hat{j}\left[(-3\cdot 4)-(3\cdot 2)\right] + \hat{k}\left[(-3\cdot 2)-(3\cdot 1)\right]$$

$$= \hat{i}\left[4-4\right] - \hat{j}\left[-12-6\right] + \hat{k}\left[-6-3\right]$$

$$= 0\hat{i} + 18\hat{j} - 9\hat{k}$$

$\therefore \langle 0, 18, -9 \rangle$ es el vector ortogonal no cero al plano.

b) Determine el área del triángulo PQR

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\left|\vec{v} \times \vec{w}\right| = \frac{1}{2}\underbrace{\left|\langle 0, 18, -9 \rangle\right|}_{\sqrt{0^2+18^2+(-9)^2}}$$

$$\sqrt{324+81}$$

$$\sqrt{405}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{405} = \frac{1}{2}\,9\cdot\sqrt{5} = \frac{9\cdot\sqrt{5}}{2}$$

es el

≈ 10.06 área del triángulo PQR

6) Volúmen del paralelelipípedo determinado por los vectores $a = \langle 1,2,3 \rangle$; $b = \langle -1,1,2 \rangle$; $c = \langle 2,1,4 \rangle$.

$$V_p = |a \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \ldots$$

$$\ldots = \hat{i}\left[(1\cdot 4)-(1\cdot 2)\right] - \hat{j}\left[(-1\cdot 4)-(2\cdot 2)\right] + \hat{k}\left[(-1\cdot 1)-(2\cdot 1)\right]$$

$$\ldots = \hat{i}\left[4-2\right] - \hat{j}\left[-4-4\right] + \hat{k}\left[-1-2\right] = 2\hat{i} + 8\hat{j} - 3\hat{k}$$

Ahora $\hat{i} = 1$; $\hat{j} = 2$; $\hat{k} = 3$; (por vector a)

$$= 2(1) + 8(2) - 3(3)$$

$$= 2 + 16 - 9 = 18 - 9 = 9$$ es el volúmen del paralelelipípedo a, b, c.

7) ¿Están los pts. $A(1,4,-7)$; $B(2,-1,4)$; $C(0,-9,18)$; $D(0,0,0)$ sobre el mismo plano?

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \langle (2-1), (-1-4), (4+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{u} = \langle 1, -5, 11 \rangle}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = \langle (0-1), (-9-4), (18+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{w} = \langle -1, -13, 25 \rangle}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AD} = \langle (0-1), (0-4), (0+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{v} = \langle -1, -4, 7 \rangle}$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v})}$$

$$\vec{u}\,(\vec{w} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & -13 & 25 \\ -1 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{\imath}\left[(-13 \cdot 7) - (-4 \cdot 25)\right] - \hat{\jmath}\left[(-1 \cdot 7) - (25 \cdot -1)\right] + \hat{k}\left[(-1 \cdot -4) - (-1 \cdot -13)\right]$$

$$= 9\hat{\imath} - 18\hat{\jmath} - 9\hat{k}$$

\# remplazar $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ con $\vec{u}$.

$$= 9(1) - 18(-5) - 9(11)$$

$$= 9 + 90 - 99$$

$$= 9 - 99 + 90$$

$$= -90 + 90 = 0$$

$\therefore$ sí son parte del mismo plano.

8) $(a \cdot b) = \sqrt{3}$ & $(a \times b) = \langle 1, 2, 2 \rangle$

\# encontra ángulo entre a & b.

$$\underbrace{a \cdot b}_{\sqrt{3}} = |a||b|\cos\theta$$

$$|\underbrace{a \times b}_{|\langle 1,2,2 \rangle|}| = |a||b|\sin\theta$$

$$|a||b|\cos\theta = \sqrt{3}$$

$$|a||b| = \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$$

\# Sustituir en

$$|\langle 1,2,2 \rangle| = \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}\sin\theta$$

$$\frac{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}{\sqrt{3}} = \underbrace{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}_{\tan\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{1 + 4 + 4}}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = 3 \cdot 3^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tan\theta = \ldots$$
$$= 3^{1-\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{3}$$
$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3})$$
$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore$ El ángulo es $\theta = \frac{\pi}{3}$

BONO:

9) a) $|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2$

Partimos desde la siguiente propiedad.

$\hookrightarrow |a \times b| = |a||b| \sin\theta$ # Elevamos al cuadrado

$\Rightarrow |a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 \sin^2\theta$

Propiedad pitagórica

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$
$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

Sustituir

$$|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2(1 - \cos^2\theta) \quad \text{\# Distribuyo}$$
$$|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - \underbrace{|a|^2|b|^2\cos^2\theta}_{(a \cdot b)^2}$$

$$\therefore \quad |a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2 \quad \square$$

b) $(a - b) \times (a + b) = 2(a \times b)$ # Quiero llegar a eso

$$= (a - b) \times (a + b)$$

Propiedad distributiva

$$= (a - b) \times (a + b)$$

$$= \cancel{(a \times a)}^{0} + (a \times b) - (b \times a) - \cancel{(b \times b)}^{0}$$

$$= (a \times b) - (b \times a)$$

$\# \; (a \times b) = -(b \times a)$

$= (a \times b) + (a \times b)$

$\therefore \; 2(a \times b) \quad \square$

Tarea #3 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 30 de enero

Nombre:____ **Carnet:** ________________

Tema:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Puntos:	20	10	10	10	20	10	10	10	0	100
Nota:										

Resuelva las siguientes ejercicios:

1. Diga si cada expresión tiene sentido. Si no, explique por qué. En caso afirmativo, diga si la expresión es un vector ó un escalar.
   (a) (5 pts.) $(a \cdot b) \cdot c$
   (b) (5 pts.) $(a \cdot b) \times c$
   (c) (5 pts.) $(a \times b) \times c$
   (d) (5 pts.) $(a \times c) \cdot b$

2. (10 pts.) Encuentre dos vectores unitarios ortogonales a $\langle 3, 2, 1\rangle$ y $\langle -1, 1, 0\rangle$.

3. (10 pts.) Calcule el triple producto escalar entre $a = \langle 1, 2, 3\rangle$, $b = \langle 3, 2, 5\rangle$, y $c = \langle 0, 4, 3\rangle$. ¿Es $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$?

4. (10 pts.) Calcule el área del paralelogramo entre los puntos $A(1, 4, -7)$, $B(2, -1, 4)$ y $C(0, -9, 18)$.

5. Considere los puntos $P = (1, 0, 1)$, $Q = (-2, 1, 3)$ y $R = (4, 2, 5)$.
   (a) (10 pts.) Encuentre un vector no cero ortogonal al plano que contiene los tres puntos.
   (b) (10 pts.) Determine el área del triángulo PQR.

6. (10 pts.) Encuentre el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $a = \langle 1, 2, 3\rangle$, $b = \langle -1, 1, 2\rangle$ y $c = \langle 2, 1, 4\rangle$.

7. (10 pts.) ¿Están los puntos $A(1, 4{-}7)$, $B(2, -1, 4)$, $C(0, -9, 18)$ y $D(0, 0, 0)$ sobre el mismo plano?

8. (10 pts.) Si $(a \cdot b) = \sqrt{3}$ y $(a \times b) = \langle 1, 2, 2\rangle$ encuentre el ángulo entre a y b.

9. **BONO: (10 pts.)** Utilice propiedades del producto punto y cruz para demostrar que
   (a) $\mid a \times b \mid^2 = \mid a \mid^2 \mid b \mid^2 - (a \cdot b)^2$
   (b) $(a - b) \times (a + b) = 2(a \times b)$

Propiedades del producto punto y del producto cruz

Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores y k es un escalar, entonces

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
4. $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b})$
5. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{b} = 0$
6. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$
7. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$
8. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \pm \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \pm (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$
9. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$
10. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$

Capítulo 14

Tarea #04

1) Planos $\underbrace{x + 3y + 2z = 3}_{\hat{n}_1}$ & $\underbrace{-2x + y + 3z = 8}_{\hat{n}_2}$

a) Encontrar el ángulo de intersección.

$$\hat{n}_1 = \langle 1, 3, 2 \rangle$$
$$\hat{n}_2 = \langle -2, 1, 3 \rangle$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1||\hat{n}_2|}}$$

$$\cos\theta = \frac{(1\cdot -2)+(3\cdot 1)+(2\cdot 3)}{\left[\sqrt{(1)^2+(3)^2+(2)^2}\right]\left[\sqrt{(-2)^2+(1)^2+(3)^2}\right]}$$

$$= \frac{-2+3+6}{\left(\sqrt{1+9+4}\right)\left(\sqrt{4+1+9}\right)}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{7}{}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{7}{14}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$ ✓

B) Recta de intersección:

Resta de ecuaciones

$r = \vec{r_0} + t\underbrace{\vec{v}}_{\text{vector director}}$

$$2(x + 3y + 2z = 3)$$
$$-2x + y + 3z = 8$$

$$2x + 6y + 4z = 6$$
$$-2x + y + 3z = 8$$

$$\tfrac{1}{7}(0x + 7y + 7z = 14)$$

$$y + z = 2$$
$$y = 2 - z$$

\# Encuentro dos puntos en común para
\# encontrar el vector director

Cuando $\boxed{z = 0}$ $\boxed{y = 2}$ $\langle -3, 2, 0 \rangle$

$$x = 3 - 3(2) - 2(0)$$
$$x = 3 - 6$$
$$\boxed{x = -3}$$

Cuando $\boxed{z = 1}$ $\boxed{y = 1}$ $\langle -2, 1, 1 \rangle$

$$x = 3 - 3(1) - 2(1)$$
$$x = 3 - 3 - 2$$
$$\boxed{x = -2}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle (-2+3), (1-2), (1-0) \rangle$$
$$\vec{v} = \langle 1, -1, 1 \rangle$$

$$\vec{r}_0 = \langle -3, 2, 0 \rangle - t\langle 1, -1, 1 \rangle \quad \checkmark$$

2) Considere: $P(-2, 5, 7)$ & $Q(1, 3, 4)$.

¿Es perpendicular $A(4,3,2)$ $B(3,-1,8)$

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (-2-1), (5-3), (7-4) \rangle$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \langle (4-3), (3+1), (2-8) \rangle$$

$$\vec{u} = \langle -3, 2, 3 \rangle$$

$$\vec{w} = \langle 1, 4, -6 \rangle$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{w} &= \langle -3, 2, 3 \rangle \cdot \langle 1, 4, -6 \rangle \\ &= (-3 \cdot 1) + (2 \cdot 4) + (3 \cdot -6) \\ &= -3 + 8 - 18 \\ &= -21 + 8 \\ &= -13 \end{aligned}$$

No son perpendiculares

---

3) Encuentre la ecuación del plano: $A(0,1,1)$ & $B(1,0,1)$ & $C(1,1,0)$:

$$\begin{aligned} \vec{u} = \overrightarrow{AB} &= \langle (1-0), (0-1), (1-1) \rangle \\ &= \langle 1, -1, 0 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{w} = \overrightarrow{AC} &= \langle (1-0), (1-1), (0-1) \rangle \\ &= \langle 1, 0, -1 \rangle \end{aligned}$$

$$\hat{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \ldots$$

$$\ldots = \hat{i}\left[(-1 \cdot -1) - (0 \cdot 0)\right] - \hat{j}\left[(1 \cdot -1) - (1 \cdot 0)\right] + \hat{k}\left[(1 \cdot 0) - (1 \cdot -1)\right]$$

$$= \hat{i}\,[1] - \hat{j}\,[-1] + \hat{k}\,[1]$$

$$= \langle 1, 1, 1 \rangle$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\hat{i}(x - x_0) + \hat{j}(y - y_0) + \hat{k}(z - z_0) = 0$$

$$1(x-1) + 1(y-1) + 1(z-1) = 0$$

$$x - 1 + y - 1 + z - 1 = 0$$

$$\boxed{x + y + z - 3 = 0}$$

4) Encuentre la ec. del plano que pasa $Q(1,4,-7)$ & contiene a $z = 2y = 3x$

\# Empieza en el origen $(0,0,0)$ ¿es porque si

\# $z=0 \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 0$

$$z = 2y$$
$$z = 3x \qquad \vec{w} = \underbrace{\left\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \right\rangle}_{\text{El recíproco}}$$

$P(0,0,0)$
$Q(1,4,-7)$

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (1-0), (4-0), (-7-0) \rangle$$

$$\vec{u} = \langle 1, 4, -7 \rangle$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = \quad \dots$$

$$= \hat{i}\left[\left(\tfrac{1}{2} \cdot -7\right) - (1 \cdot 4)\right] - \hat{j}\left[\left(\tfrac{1}{3} \cdot -7\right) - (1 \cdot 1)\right] + \hat{k}\left[\left(\tfrac{1}{3} \cdot 4\right) - \left(\tfrac{1}{2} \cdot 1\right)\right] =$$

$$= -\frac{15}{2}\hat{i} + \frac{10}{3}\hat{j} + \frac{5}{6}\hat{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \left\langle -\frac{15}{2}, \frac{10}{3}, \frac{5}{6} \right\rangle$$

$$= -\frac{15}{2}(x - \underbrace{x_0}_{q.x}) + \frac{10}{3}(y - \underbrace{y_0}_{q.y}) + \frac{5}{6}(z - \underbrace{z_0}_{q.z})$$

$$= -\frac{15}{2}(x-1) + \frac{10}{3}(y-4) + \frac{5}{6}(z+7)$$

5) Considere los planos:

$P_1: \; 3x + 6y - 3z = 3$

$P_2: \; 2y = x - z - 2$

$P_3: \; 4x - 12y + 5z = 8$

$P_4: \; 9y = 3x + 6z - 6$

a) ¿Paralelas?

b) ¿idénticas?

$(P_1 \,\&\, P_3) \vee (P_3 \,\&\, P_1)$:

$$\begin{aligned} 3x + 6y - 3z &= 3 \\ 4x - 12y + 5z &= 8 \end{aligned}$$

$$x\left(\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right. \quad \left(\begin{matrix}6\\-12\end{matrix}\right. \quad \left(\begin{matrix}-3\\5\end{matrix}\right. \quad \left(\begin{matrix}3\\8\end{matrix}\right.$$

no son paralelas

$(P_1 \,\&\, P_2) \vee (P_2 \,\&\, P_1)$:

$$\begin{aligned} 3x + 6y - 3z &= 3 \\ x - 2y - z &= 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right. \quad \left(\begin{matrix}6\\-2\end{matrix}\right. \quad \left(\begin{matrix}-3\\-1\end{matrix}\right. \quad \left(\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right.$$

no son paralelas

$(P_1 \,\&\, P_4) \vee (P_4 \,\&\, P_1)$:

$$\begin{aligned} 3x + 6y - 3z &= 3 \\ 3x - 9y + 6z &= 6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{matrix}3\\3\end{matrix}\right. \quad \left(\begin{matrix}6\\-9\end{matrix}\right. \quad \begin{matrix}-3\\6\end{matrix} \quad \begin{matrix}3\\6\end{matrix}$$

No son paralelas

$(P_2 \,\&\, P_3) \vee (P_3 \,\&\, P_2)$:

$$\begin{aligned} x - 2y - z &= 2 \\ 4x - 12y + 5z &= 8 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right. \quad \left(\begin{matrix}-2\\-12\end{matrix}\right. \quad \left(\begin{matrix}-7\\5\end{matrix}\right. \quad \left(\begin{matrix}2\\8\end{matrix}\right.$$

No son paralelas

$(P_2 \,\&\, P_4) \vee (P_4 \,\&\, P_2)$:

$$\begin{aligned} x - 2y - z &= 2 \\ 3x - 9y + 6z &= 6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right. \quad \left(\begin{matrix}-2\\-9\end{matrix}\right. \quad \left(\begin{matrix}-1\\6\end{matrix}\right. \quad \left(\begin{matrix}2\\6\end{matrix}\right.$$

No son paralelas

$(P_3 \,\&\, P_4) \vee (P_4 \,\&\, P_3)$:

$$\begin{aligned} 4x - 12y + 5z &= 8 \\ 3x - 9y + 6z &= 6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right. \quad \left(\begin{matrix}-12\\-9\end{matrix}\right. \quad \left(\begin{matrix}5\\6\end{matrix}\right. \quad \left(\begin{matrix}8\\6\end{matrix}\right.$$

No son paralelas

b) No hay idénticas

b)

$\mathcal{L}_1: \quad x = 1 + 6t$

$\quad\quad y = 1 - 3t$

$\quad\quad z = 12t + 5$

$\mathcal{L}_2: \quad 2x - 2 = 4 - 4y = z + 1$

$\mathcal{L}_3: \quad x = 1 + 2t$

$\quad\quad y = t$

$\quad\quad z = 1 + 4t$

$\mathcal{L}_4: \quad r = \langle 3, 1, 5 \rangle + t \langle 4, 2, 8 \rangle$

a) ¿Paralelas?

b) ¿idénticas?

```
if ( paralelas ) {
    verificar si son identicas,
    todos tienen que ser
    iguales;
} else {
    ¬paralelas & ¬idénticas;
}
```

$\underline{\mathcal{L}_1 \ \& \ \mathcal{L}_3:}$

$\mathcal{L}_1: \quad x = 1 + 6t$

$\quad\quad y = 1 - 3t$

$\quad\quad z = 12t + 5$

$\mathcal{L}_3: \quad x = 1 + 2t$

$\quad\quad y = t$

$\quad\quad z = 1 + 4t$

$\mathcal{L}_1$ & $\mathcal{L}_3$ No son paralelas

$\mathcal{L}_1$ & $\mathcal{L}_2$:

$$\mathcal{L}_1: \quad \begin{aligned} x &= 1 + 6t \\ y &= 1 - 3t \\ z &= 12t + 5 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_2: \quad \begin{aligned} t &= 2x - 2 &\Rightarrow\quad x &= \frac{t + 2}{2} \\ t &= 4 - 4y &\Rightarrow\quad y &= \frac{4 - t}{4} \\ t &= z + 1 &\Rightarrow\quad z &= t - 1 \end{aligned}$$

$\mathcal{L}_1$ & $\mathcal{L}_2$ son paralelas

Agarro los cohefiicientes $(1, 1, 5)$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} \\ y &= \frac{4 - 1}{4} = \frac{3}{4} \\ z &= 5 - 1 = 4 \end{aligned}\right\} \text{No iguales}$$

$\mathcal{L}_1$ & $\mathcal{L}_2$: Son paralelas pero no iguales

$\mathcal{L}_1$ & $\mathcal{L}_4$:

$\mathcal{L}_1$: $x = 1 + 6t$

$y = 1 - 3t$

$\mathcal{L}_4$: $r = \langle 3, 1, 5\rangle + t\langle 4, 2, 8\rangle$

$x = 3 + 4t$

$z = 12t + 5$ | $y = 1 + 2t$
$z = 5 + 8t$

L_1 & L_4 no son paralelas.

L_3 & L_4:

L_3: $x = 1 + 2t$
$y = t$
$z = 1 + 4t$

L_4: $r = \langle 3, 1, 5 \rangle + t \langle 4, 2, 8 \rangle$
$x = 3 + 4t$
$y = 1 + 2t$
$z = 5 + 8t$

de L_3 extraigo pt. $(1, 0, 1)$

$x = 3 + 4 = 7$

$y = 1 + 0 = 1$

$z = 5 + 8 = 13$

L_3 & L_4 son paralelas pero no iguales

L_3 & L_2:

L_2: $x = \dfrac{t + 2}{2}$

$y = \dfrac{4 - t}{4}$

$z = t - 1$

L_4: $x = 3 + 4t$
$y = 1 + 2t$
$z = 5 + 8t$

...alelas.

$\mathcal{L}_3$ & $\mathcal{L}_2$ no son para...

7) a)

$\mathcal{L}_1$: $x = 3 + 2t$
$y = 4 - t$
$z = 12t + 5$

$\mathcal{L}_2$: $x = 1 + 4s$
$y = 3 - 2s$
$z = 4 + 5s$

$\mathcal{L}_1$: $(3, 4, 1) + t(2, -1, 3)$ $\quad \vec{v} = \langle 2, -1, 3 \rangle$

$\mathcal{L}_2$: $(1, 3, 4) + s(4, -2, 5)$ $\quad \vec{u} = \langle 4, -2, 5 \rangle$

a.1) ¿Paralelas?

$$\underbrace{\vec{u} = k\vec{v}}_{\text{Para ser paralelas}}$$

$$(4, -2, 5) = k(2, -1, 3)$$

$4 = 2k \Rightarrow k = 2$
$-2 = -1k \Rightarrow k = 2$
$5 = 3k \Rightarrow k = 5/3$

$\therefore$ No son vectores paralelos

a.2) ¿Pts en común?

Tarea #3 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 06 de febrero

Nombre:____ **Carnet:** ________________

Tema:	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Puntos:	20	10	10	10	15	15	20	0	100
Nota:									

1. Considere los planos $x + 3y + 2z = 3$ & $-2x + y + 3z = 8$.
   (a) (10 pts.) Encuentre el ángulo de intersección entre los dos planos.
   (b) (10 pts.) Encuentre la recta de intersección entre los dos planos.

2. (10 pts.) Considere la recta que pasa por $(-2, 5, 7)$ y $(1, 3, 4)$. ¿Es perpendicular a la recta que pasa por $(4, 3, 2)$ y $(3 - 1, 8)$?

3. (10 pts.) Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ y $(1, 1, 0)$.

4. (10 pts.) Encuentre una ec. del plano que pasa por $(1, 4, -7)$ y contiene a la recta $z = 2y = 3x$.

5. Considere los planos.

$$P_1 : \ 3x + 6y - 3z = 3 \qquad P_2 : \ 2y = x - z - 2$$
$$P_3 : \ 4x - 12y + 8z = 8 \qquad P_4 : \ 9y = 3x + 6z - 6$$

   (a) (05 pts.) ¿Cuáles de los siguientes cuatro planos son paralelos.
   (b) (10 pts.) ¿Cuáles de ellos son idénticos?

6. Considere las rectas.

$$L_1 : \ x = 1 + 6t, \ y = 1 - 3t, \ z = 12t + 5 \qquad L_2 : \ 2x - 2 = 4 - 4y = z + 1$$
$$L_3 : \ x = 1 + 2t, \ y = t, \quad z = 1 + 4t \qquad L_4 : \ \mathbf{r} = \langle 3, \ 1, \ 5\rangle + t\langle 4, 2, 8\rangle$$

   (a) (05 pts.) ¿Cuáles de los siguientes cuatro rectas son paralelas.
   (b) (10 pts.) ¿Cuáles de ellas son idénticas?

7. Determine si el par de rectas dadas son paralelas, oblicuas o se cortan.
   (a) (10 pts.) $L_1 : \ x = 3 + 2t, \ y = 4 - t, \ z = 1 + 3t,$ $\qquad L_2 : \ x = 1 + 4s, \ y = 3 - 2s, \ z = 4 + 5s$
   (b) (10 pts.) $L_1 : \ x - 1 = 1 - y = \dfrac{z}{2},$ $\qquad L_2 : \ z = 0, \quad 2 - x = y$

8. **(10 pts.)** Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por el punto $(0, 1, 2)$, es perpendicular a la recta $x = 1 + t, \ y = 1 - t, \ z = 2t$ y corta a esta recta.

Capítulo 15

Tarea #05

1.a) $r = \left\langle 3e^{-t}, \frac{\sin^2(\pi t)}{t}, \tan(2\pi t) \right\rangle$

¿Continua en $t = 0$?

$$\lim_{a\to 0}(r) = \left\langle \underbrace{\lim_{a\to 0}\left(3e^{-t}\right)}_{f(t)}, \underbrace{\lim_{a\to 0}\left(\frac{\sin^2(\pi t)}{t}\right)}_{g(t)}, \underbrace{\lim_{a\to 0}\left(\tan(2\pi t)\right)}_{h(t)} \right\rangle$$

$$\lim_{a\to 0}\left(f(t)\right) = \lim_{a\to 0}\left(3e^{-t}\right)$$

$$= 3e^{-0}$$

$$= \boxed{3}$$

$$\lim_{a\to 0}\left(g(t)\right) = \lim_{a\to 0}\left(\frac{\sin^2(\pi t)}{t}\right) \qquad \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{LH}{=} \lim_{a\to 0}\left(\frac{2\sin(\pi t)\cdot\cos(\pi t)\cdot\pi}{1}\right)$$

$$= \lim_{a\to 0}\left(2\sin(\pi t)\cos(\pi t)\cdot\pi\right)$$

$$= 2\sin(\pi\cdot 0)\cos(\pi\cdot 0)\cdot\pi = \boxed{0}$$

$$\lim_{a\to 0}\left(h(t)\right) = \lim_{a\to 0}\left(\tan(2\pi t)\right)$$

$$= \tan(2\pi\cdot 0) = \boxed{0}$$

$$\lim_{a\to 0}(r) = \langle 3, 0, 0\rangle$$

Discontinuidad

$$r(0) = \left\langle 3, \frac{0}{0}, 0 \right\rangle$$

$\therefore$ No es continua en $t=0$ ya que $\lim_{a\to 0}(r) \neq r(0)$

1.b) $$\lim_{a\to 1}(r) = \lim_{a\to 1}\left(\left\langle \underbrace{3e^{-t}}_{f(t)}, \underbrace{\frac{\sin^2(\pi t)}{t}}_{g(t)}, \underbrace{\tan(2\pi t)}_{h(t)} \right\rangle\right)$$

$$\lim_{a\to 1}(f(t)) = \lim_{a\to 1}(3e^{-t})$$

$$= 3e^{-1} = \frac{3}{e}$$

$$\lim_{a\to 1}(g(t)) = \lim_{a\to 1}\left(\frac{\sin^2(\pi t)}{t}\right)$$

$$= \frac{\sin^2(\pi)}{1} = \sin^2(\pi) = 0$$

$$\lim_{a\to 1}(h(t)) = \lim_{a\to 1}(\tan(2\pi t))$$

$$= \tan(2\pi) = 0$$

$$\lim_{a\to 1}(r) = \left\langle \frac{3}{e}, 0, 0 \right\rangle$$

$$r(1) = \left\langle \frac{3}{e}, 0, 0 \right\rangle$$

Sí es continua en $t = 1$ ya que
$\lim_{a\to 1}(r) = r(0)$

2) Determine el límite de las sigs funciones.

2a) $$\lim_{t\to 0}\left(\left\langle \underbrace{e^{-3t}}_{f(t)}, \underbrace{\frac{t^2}{\sin^2(t)}}_{g(t)}, \underbrace{\cos(2t)}_{h(t)} \right\rangle\right)$$

$$\lim_{a\to 0}(f(t)) = \lim_{a\to 0}\left(e^{-3t}\right)$$

$$= e^{-3\cdot 0} = e^0 = \boxed{1}$$

$$\lim_{a\to 0}(g(t)) = \lim_{a\to 0}\left(\frac{t^2}{\sin^2(t)}\right) \leftarrow \frac{0}{0} \text{ indef.}$$

$$\overset{LH}{=} \lim_{a\to 0}\left(\frac{\cancel{2}t}{\cancel{2}\sin(t)\cos(t)}\right) \leftarrow \frac{0}{0} \text{ indef}$$

$f'g + fg'$ $$\overset{LH}{=} \lim_{a\to 0}\left(\frac{1}{\cos^2(t) - \sin^2(t)}\right)$$

$$= \frac{1}{1^2 - 0} = \boxed{1}$$

$$\lim_{a \to 0} \left(h(t) \right) = \lim_{a \to 0} \left(\cos(2t) \right)$$

$$= \boxed{1}$$

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \left(\left\langle e^{-3t} , \frac{t^2}{\sin^2(t)} , \cos(2t) \right\rangle \right) = \left\langle 1, 1, 1 \right\rangle}$$

2 b) $$\lim_{t \to \infty} \left(\left\langle \underbrace{\frac{1 + t^2}{1 - t^2}}_{f(t)} , \underbrace{\arctan(t)}_{g(t)} , \underbrace{\frac{1 - e^{-2t}}{t}}_{h(t)} \right\rangle \right)$$

$$\lim_{a \to \infty} \left(f(t) \right) = \lim_{a \to \infty} \left(\frac{1 + t^2}{1 - t^2} \right) \leftarrow \frac{\infty}{\infty}$$

$$\overset{LH}{=} \lim_{a \to \infty} \left(\frac{0 + 2t}{0 - 2t} \right)$$

$$= \lim_{a \to \infty} \left(\frac{2t}{-2t} \right) = \boxed{-1}$$

$$\lim_{a \to \infty} \left(g(t) \right) = \lim_{a \to \infty} \left(\arctan(t) \right)$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{a \to \infty} \left(h(t) \right) = \lim_{a \to \infty} \left(\frac{1 - e^{-2t}}{t} \right) \leftarrow \frac{1^{\infty}}{\infty}$$ algo así.

$$\overset{LH}{=} \lim_{a \to \infty} \left(\frac{-e^{-2t} \cdot 2}{1} \right)$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(e^{-2t}\right) = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{e^{2t}}\right) \leftarrow \frac{1}{\infty} \to 0$$

$$= \boxed{0}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\left\langle \frac{1+t^2}{1-t^2},\ \arctan(t),\ \frac{1-e^{-2t}}{t}\right\rangle\right) = \left\langle -1, \frac{\pi}{2}, 0\right\rangle$$

3) $r = \langle \sin(2t),\ t^2,\ \cos(2t)\rangle$

a) $r'(t)$

$$r'(t) = \langle 2\cos(2t),\ 2t,\ -\sin(2t)\cdot 2\rangle$$

b) $r''(t)$

$$r''(t) = \langle -4\sin(2t),\ 2,\ -\cos(2t)\cdot 4\rangle$$

c) $r''(t)\cdot r'''(t)$

$$r'''(t) = \langle -8\cos(2t),\ 0,\ \sin(2t)\cdot 8\rangle$$

$$= \langle -4\sin(2t),\ 2,\ -4\cos(2t)\rangle \cdot \langle -8\cos(2t),\ 0,\ 8\sin(2t)\rangle$$

$$= [-4\sin(2t)\cdot -8\cos(2t)] + [2\cdot 0] + [-4\cos(2t)\cdot 8\sin(2t)]$$

$$= 32\sin(2t)\cos(2t) - 32\sin(2t)\cos(2t)$$

$$= \boxed{0}$$

d) $r''(t) \times r'(t)$

$$r''(t) = \langle -4\sin(2t),\ 2,\ -\cos(2t)\cdot 4 \rangle$$

$$r'(t) = \langle 2\cos(2t),\ 2t,\ -\sin(2t)\cdot 2 \rangle$$

$$r''(t) \times r'(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -4\sin(2t) & 2 & -4\cos(2t) \\ 2\cos(2t) & 2t & -2\sin(2t) \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{i}\Big[(2)(-2\sin(2t)) - (2t)(-4\cos(2t))\Big] -$$

$$\hat{j}\Big[(-4\sin(2t))(-2\sin(2t)) - (2\cos(2t))(-4\cos(2t))\Big] +$$

$$\hat{k}\Big[(-4\sin(2t))(2t) - (2\cos(2t))(2)\Big] =$$

$$= \hat{i}\big[-4\sin(2t) + 8t\cos(2t)\big] -$$

$$\hat{j}\big[8\sin^2(2t) + 8\cos^2(2t)\big] +$$

$$\hat{k}\big[-8t\sin(2t) - 4\cos(2t)\big]$$

$$= \langle -4\sin(2t) + 8t\cos(2t),\ -8,\ -8t\sin(2t) - 4\cos(2t) \rangle$$

4) $x = t$ $\quad (0,1,0)$

$y = e^{-t}$

$z = 2t - t$

Encontramos t

$x: \quad t = 0 \Rightarrow t = 0$

$y: \quad e^{-t} = 1 \Rightarrow t = 0$

$z: \quad 2t - t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$

Armamos $\vec{r}$

$\vec{r}(t) = \langle t, e^{-t}, 2t - t^2 \rangle$

$\vec{r}(0) = \langle 0, 1, 0 \rangle$

Derivamos:

$\vec{r}\,'(t) = \langle 1, -e^{-t}, 2 - 2t \rangle$

$\vec{r}\,'(0) = \langle 1, -1, 2 \rangle$

Armamos la fórmula de recta tangente a vector:

$$\vec{r}_T = \vec{r}(a) + t\,\vec{r}\,'(a)$$

$a = 0$

$$\vec{r}_T = \langle 0, 1, 0 \rangle + t \langle 1, -1, 2 \rangle$$

Ecs. Paramétricas:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 0 + 1t \\ y &= 1 - 1t \\ z &= 0 + 2t \end{aligned}}$$

5) $r_1 = \langle \sin(t), t^2, t^4 \rangle$

$r_2 = \langle \sin(t), \sin(2t), t^3 \rangle$

$\vec{r}_1\,'(t) = \langle \cos(t), 2t, 4t^3 \rangle$

$\vec{r}_1\,'(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle$

$\vec{r}_2\,'(t) = \langle \cos(t), 2\cos(2t), 3t^2 \rangle$

$$\vec{r}_2{}'(0) = \langle 1, 2, 0 \rangle$$

Evaluar el ángulo:

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle 1, 0, 0 \rangle \cdot \langle 1, 2, 0 \rangle}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{1 + 0 + 0}{1 \cdot \sqrt{5}}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

Tarea #5 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 13 de febrero

Nombre:____ **Carnet:** ________________

Tema:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	10	20	30	20	20	100
Nota:						

1. Analice si la función $\mathbf{r} = \left\langle 3e^{-t}, \dfrac{\sin^2(\pi t)}{t}, \tan(2\pi t) \right\rangle$ es continua en:
   (a) (6 pts.) $t = 0$
   (b) (4 pts.) $t = 1$

2. Determine el límite de las siguientes funciones
   (a) (10 pts.) $\lim\limits_{t\to 0} \left\langle e^{-3t}, \dfrac{t^2}{\sin^2(t)}, \cos(2t) \right\rangle$
   (b) (10 pts.) $\lim\limits_{t\to\infty} \left\langle \dfrac{1+t^2}{1-t^2}, \arctan(t), \dfrac{1-e^{-2t}}{t} \right\rangle$

3. Dada $\mathbf{r}(t) = \langle \sin(2t), t^2, \cos(2t) \rangle$, encuentre:
   (a) (5 pts.) $r'(t)$
   (b) (8 pts.) $r''(t)$
   (c) (8 pts.) $r''(t) \cdot r'''(t)$
   (d) (9 pts.) $r'' \times r'(t)$

4. (20 pts.) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva $x = t,\ y = e^{-t},\ z = 2t - t^2$ en el punto $(0, 1, 0)$.

5. (20 pts.) Las curvas $\mathbf{r}_1 = \langle \sin t, t^2, t^4 \rangle$ y $\mathbf{r}_2 = \langle \sin t, \sin(2t), t^3 \rangle$ se cortan en el origen. Encuentre el coseno del ángulo de intersección entre las dos rectas tangentes a $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$.

Capítulo 16

Tarea #06

1) Evalúe las integrales:

a) $$\int_0^1 \left(\underbrace{\frac{4}{1+t^2}}_{f(t)} \hat{j} + \underbrace{\frac{2t}{1+t^2}}_{g(t)} \hat{k} \right) dt$$

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \left(\frac{4}{1+t^2} \right) dt$$

$$= 4 \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^2} \right) dt$$

$$= 4 \arctan(t) \Big|_0^1$$

$$= 4 \left\{ \arctan(1) - \arctan(0) \right\}$$

$$= 4 \left\{ \frac{\pi}{4} - 0 \right\} = \boxed{\pi}$$

$$\int_0^1 g(t)\,dt = \int_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2} \right) dt$$

$$u = 1 + t^2$$
$$du = 2t\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{du}{u} \right)$$

$$= \ln|1+t^2| \Big|_0^1$$

$$= \left\{ \ln(2) - \cancelto{0}{\ln(1)} \right\} = \boxed{\ln(2)}$$

$$\therefore \left\langle 0, \pi, \ln(2) \right\rangle$$

b) $$\int^{\frac{\pi}{2}} \left(3\sin^2(t)\cos(t)\hat{\imath} + 3\sin(t)\cos^2(t)\hat{j} + 2\sin(t)\cos(t)\hat{k} \right) dt$$

$$\int_0 \Big(\underbrace{\qquad\qquad}_{f(t)} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{g(t)} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{h(t)} \Big)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\, dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos(t)\, dt$$

$u = \sin(t)$

$du = \cos(t)\, dt$

$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2\, du$$

$$= \frac{3}{3} u^3 = \sin^3(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left\{ \sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin^3(0) \right\}$$

$$= \boxed{1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\, dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\sin(t) \cos^2(t) \Big) dt$$

$u = \cos(t)$

$-du = \sin(t)\, dt$

$$= -3 \int_{u(0)}^{u(\frac{\pi}{2})} u^2\, du$$

$$= -\frac{3}{3} u^3 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0) \right\}$$

$$= -\{ 0 - 1 \} = \boxed{1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t)\, dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t) \cos(t) \big) dt$$

$u = \sin(t)$

$du = \cos(t)\, dt$

$$= 2 \int_{u(0)}^{u(\frac{\pi}{2})} u\, du$$

$$= u^2 \Big|^{u(\frac{\pi}{2}) = 1} = \{ 1^2 - 0 \} = \boxed{1}$$

$u(0) = 0$

$$\therefore \left\langle 1, 1, 1 \right\rangle$$

3) $$\int \Big(\underbrace{te^t}_{f(t)} \hat{i} + \underbrace{t^2 \ln(t)}_{g(t)} \hat{j} + \underbrace{\frac{e^t}{\sqrt{1 - e^{2t}}}}_{h(t)} \hat{k} \Big) dt$$

$$\int f(t)\, dt = \int \underbrace{te^t}\, dt$$

$u = t \qquad dv = e^t\, dt$

$du = dt \qquad v = e^t$

$$= te^t - \int e^t\, dt$$

$$= \boxed{te^t - e^t + C_1}$$

$$\int g(t)\, dt = \int t^2 \ln(t)\, dt$$

$u = \ln(t) \qquad dv = t^2\, dt$

$du = \frac{1}{t}\, dt \qquad v = \frac{1}{3} t^3$

$$= \ln(t) \cdot \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{3} \int \frac{t^3}{t}\, dt$$

$$= \frac{1}{3} t^3 \ln(t) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} t^3 + C_2$$

$$\boxed{= \frac{1}{3} t^3 \ln(t) - \frac{1}{9} t^3 + C_2}$$

$$\int h(t)\, dt = \int \frac{e^t}{\sqrt{1 - e^{2t}}}\, dt$$

$u = e^t$

$du = e^t\, d$

$\int \frac{du}{\quad}$

$$= \int \frac{\ }{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \arcsin(u) + C_3$$

$$\boxed{= \arcsin(e^t) + C_3}$$

$$\therefore \left\langle te^t - e^t + C_1,\ \frac{1}{3}t^3 \ln(t) - \frac{1}{9}t^3 + C_2,\ \arcsin(e^t) + C_3 \right\rangle$$

2) Dada la posición $r(t) = t\hat{\imath} + \sin(3t)\hat{\jmath} + \cos(3t)\hat{k}$

a) Encuentre la función de velocidad:

$$r'(t) = v(t) = \hat{\imath} + \cos(3t)\cdot 3\,\hat{\jmath} + \sin(3t)\cdot 3\,\hat{k}$$

b) Encuentre la función de aceleración:

$$r''(t) = a(t) = 0\hat{\imath} - 3\sin(3t)\cdot 3\,\hat{\jmath} + 3\cdot 3\cos(3t)\,\hat{k}$$

c) Encuentre la función de rapidez:

$$|v(t)| = \sqrt{(1)^2 + (3\cos(3t))^2 + (3\sin(3t))^2}$$

$$= \sqrt{1 + 9\cos^2(3t) + 9\sin^2(3t)}$$

$$= \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

3) Dada la función de aceleración:

$$a(t) = \left\langle e^t,\ \sin(t)\cos(t),\ \frac{1}{(t+1)^2} \right\rangle$$

$$v(0) = \langle 3, -1, 2 \rangle$$

$$p(0) = \langle 0, 2, 0 \rangle$$

a) Encontrar la función de aceleración:

$$\int a(t)\,dt = v(t)$$

$$a(t) = \langle \underbrace{e^t}_{f(t)}, \underbrace{\sin(t)\cos(t)}_{g(t)}, \underbrace{\frac{1}{(t+1)^2}}_{h(t)} \rangle$$

$$\int f(t)\,dt = \boxed{e^t + C_1}$$

$$\int g(t)\,dt = \int \sin(t)\cos(t)\,dt = \boxed{\frac{1}{2}\sin^2(t) + C_2}$$

$u = \sin(t)$

$du = \cos(t)dt$

$$\int h(t)\,dt = \int \frac{1\,dt}{(t+1)^2} = \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{-2+1}u^{-2+1} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{t+1} + C_3$$

$u = t + 1$

$du = 1\,dt$

$$\boxed{= -\frac{1}{t+1} + C_3}$$

$$v(t) = \langle e^t + C_1, \frac{1}{2}\sin^2(t) + C_2, -\frac{1}{t+1} + C_3 \rangle$$

Encontrar constantes

$$v(0) = \langle 3, -1, 2 \rangle$$

$e^0 + C_1 = 3$

$1 + C_1 = 3$

$C_1 = 3 - 1$

$C_1 = 2$

$\frac{1}{2}\sin^2(0) + C_2 = -1$

$0 + C_2 = -1$

$C_2 = -1$

$$-\frac{1}{0+1} + C_3 = 2$$

$$-1 + C_3 = 2$$

$$C_3 = 2 + 1$$

$$C_3 = 3$$

función de velocidad:

$$v(t) = \left\langle e^t + 2,\ \frac{1}{2}\sin^2(t) - 1,\ -\frac{1}{t+1} + 3 \right\rangle$$

---

b) función posición:

$$\int v(t)\,dt = r(t)$$

$$v(t) = \left\langle \underbrace{e^t + 2}_{f(t)},\ \underbrace{\frac{1}{2}\sin^2(t) - 1}_{g(t)},\ \underbrace{-\frac{1}{t+1} + 3}_{h(t)} \right\rangle$$

$$\int f(t)\,dt = \int (e^t + 2)\,dt$$

$$\boxed{= e^t + 2t + C_1}$$

$$\int g(t)\,dt = \frac{1}{2}\int (\sin^2(t) - 1)\,dt = -\frac{1}{2}\int \cos^2(t)\,dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int (1 - \cos(2t))\,dt$$

$$\boxed{= -\frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right) + C_2}$$

$$\int h(t)\,dt = -\int\left(\frac{1}{t+1} + 3\right)dt = -\left(\ln|t+1| + 3t\right) + C_3$$

$$\boxed{= -\ln|t+1| + 3t + C_3}$$

\# Encontrar constantes

$$r(0) = \langle 0, 2, 0 \rangle$$

$$e^0 + 2(0) + C_1 = 0$$

$$1 + 0 + C_1 = 0$$

$$-\frac{1}{4}\left(0 - \frac{1}{2}\sin(2\cdot 0)\right) + C_2 = 2$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\cancel{0} + \frac{1}{2}\cancel{\sin(0)} + C_2 = 2$$

$$C_2 = -1$$

$$C_2 = 2$$

$$-\ln|0+1| + 3(0) + C_3 = 0$$

$$0 + 0 + C_3 = 0$$

$$C_3 = 0$$

funcione posición :

$$r(t) = \left\langle e^t + 2t - 1,\ -\frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right) + 2,\ -\ln|t+1| + 3t + 0 \right\rangle$$

4) Calcule la longitud de arco de la helice circular de la ecuación vectorial:

$$r(t) = \cos(t)\,\hat{i} + \sin(t)\,\hat{j} + t\,\hat{k}$$

desde el punto $(1, 0, 0)$ hasta el punto $(1, 0, 2\pi)$.

$$L = \int_a^b |r'(t)|\, dt$$

$$r'(t) = -\sin(t)\,\hat{i} + \cos(t)\,\hat{j} + \hat{k}$$

$$|r'(t)| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1}$$

$$= \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\,t \Big|_{a=0}^{b=2\pi}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \{2\pi - 0\} = \sqrt{2} \cdot 2\pi$$

$P(1,0,0)$ & $Q(1,0,2\pi)$

$$r(t) = \langle \cos(t), \sin(t), t \rangle$$

$x = \cos(t)$ $\qquad \cos(t) = 1 \rightarrow t = 0$

$y = \sin(t)$ $\qquad \sin(t) = 0 \rightarrow t = 0$

$z = t$ $\qquad t = 0 \longrightarrow t = 0$

$\cos(t) = 1 \rightarrow t = 2\pi$

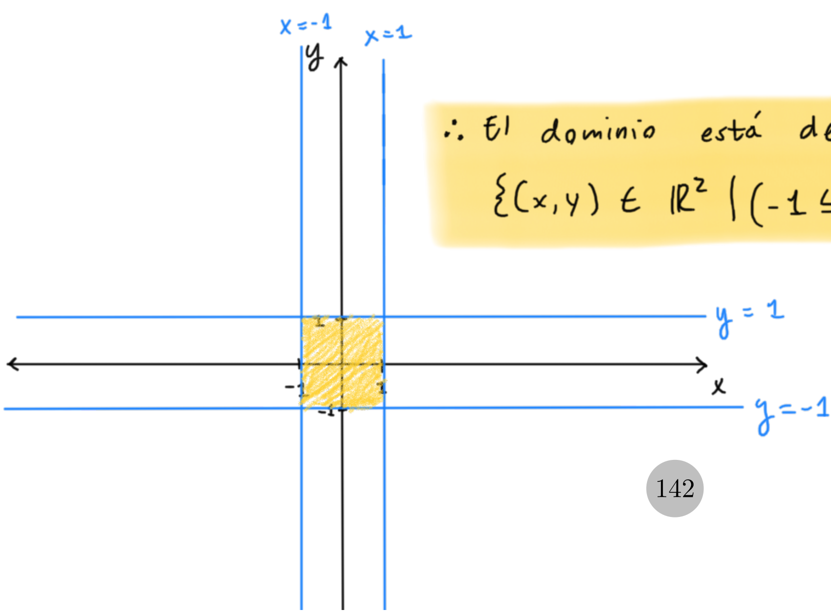
$\sin(t) = 0 \rightarrow t = 2\pi$

$t = 2\pi \rightarrow t = 2\pi$

5) a) $f(x,y) = \sqrt{\underbrace{1-x^2}} - \sqrt{1-y^2}$

$$1 - x^2 \geq 0 \qquad\qquad 1 - y^2 \geq 0$$
$$-x^2 \geq -1 \qquad\qquad -y^2 \geq -1$$
$$x^2 \leq 1 \qquad\qquad y^2 \leq 1$$
$$x \leq \pm 1 \qquad\qquad y \leq \pm 1$$
$$-1 \leq x \leq 1 \qquad\qquad -1 \leq y \leq 1$$

$\mathbb{D}: \mathbb{R}^2 - \{1 - x^2 \leq 0\}$ & $\{1 - y^2 \leq 0\}$



$\therefore$ El dominio está definido tal que:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-1 \leq x \leq 1) \ \& \ (-1 \leq y \leq 1)\}$$

b) $g(x,y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

$y - x^2 \geq 0$

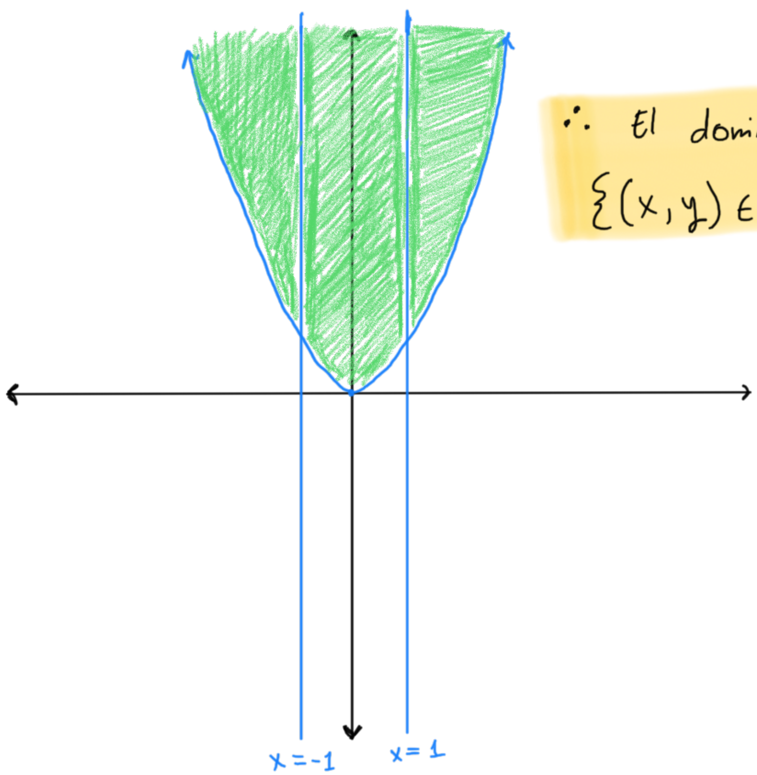
$y \geq x^2$

$1 - x^2 \neq 0$

$-x^2 \neq -1$

$x^2 \neq 1$

$x \neq \pm 1$



$\therefore$ El dominio está definido tal que:

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y \geq x^2)\ \&\ (x \neq \pm 1)\}$

c) $h(x,y) = \dfrac{9}{9 - x - y}$

$9 - x - y \neq 0$

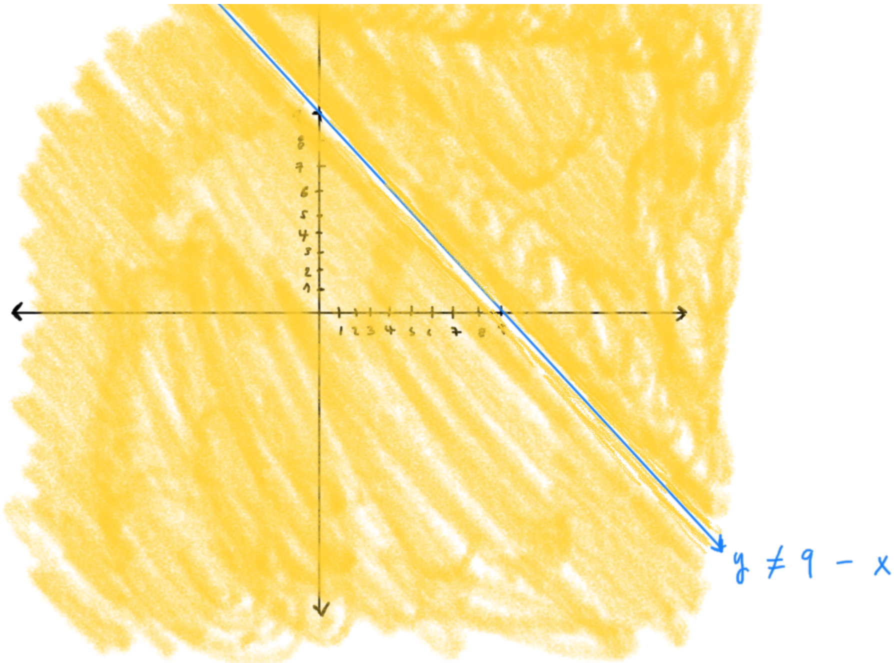
$-x - y \neq -9$

$x + y \neq 9$

$\neg(\ y = 9 - x\ )$ #excluir

$\therefore$ El dominio está definido tal que:

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y \neq 9)\}$


1
2
3
4
5
6
7
8
1
2
3
4
5
6
7
8
$y \neq 9 - x$

Tarea #6 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 20 de febrero

Nombre:____ **Carnet:** ________________

Tema:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	25	15	15	15	30	100
Nota:						

1. Evalúe las siguientes integrales:
   (a) (8 pts.) $\int_0^1 \left(\frac{4}{1+t^2} j + \frac{2t}{1+t^2} k \right) dt$
   (b) (9 pts.) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin^2(t)\cos(t) i + 3\sin(t)\cos^2(t) j + 2\sin(t)\cos(t) k) dt$
   (c) (8 pts.) $\int \left(te^t i + t^2 \ln(t) j + \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}} k \right) dt$

2. Dada la posición $\mathbf{r}(t) = ti + \sin(3t)j + \cos(3t)k$ encuentre:
   (a) (5 pts.) la función de velocidad.
   (b) (5 pts.) la función de aceleración.
   (c) (5 pts.) la función de rápidez.

3. Dada la aceleración $\mathbf{a}(t) = \langle e^t,\ \sin t \cos t,\ \frac{1}{(t+1)^2} \rangle$, la velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = \langle 3, -1, 2 \rangle$ y la posición inicial $\mathbf{r}(0) = \langle 0, 2, 0 \rangle$, encuentre:
   (a) (7 pts.) la función de velocidad.
   (b) (8 pts.) la función de posición.

4. (15 pts.) Calcule la longitud de arco de la helice circular de la ecuación vectorial $r(t) = \cos(t)i + \sin(t)ij + tk$ desde el punto $(1, 0, 0,)$ hasta el punto $(1, 0, 2\pi)$.

5. Encuentre y bosqueje el dominio de las siguientes funciones:
   (a) (10 pts.) $f(x, y) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}$
   (b) (10 pts.) $g(x, y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$
   (c) (10 pts.) $h(x, y) = \frac{9}{9-x-y}$

Capítulo 17

Tarea #08

1) Encontrar $\dfrac{dy}{dx}$

a) $y\tan^{-1}(x) = x\sin^{-1}(y) + x^2y^2$

$$\emptyset = x\sin^{-1}(y) + x^2y^2 - y\tan^{-1}(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}: \quad \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + x^2\cdot 2y - \tan^{-1}(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}: \quad \sin^{-1}(y) + 2xy^2 - \frac{y}{x^2+1}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}} + x^2 2y - \tan^{-1}(x)}{\sin^{-1}(y) + 2xy^2 - \dfrac{y}{x^2+1}}$$

b) $yx + x^3\ln(y) = (x^2+y^2)^2$

$$\emptyset = (x^2+y^2)^2 - yx - x^3\ln(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = 2(x^2+y^2)\cdot 2y - x - \frac{x^3}{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 2(x^2+y^2)\cdot 2x - y - 3x^2\ln(y)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{4y(x^2+y^2) - x - \dfrac{x^3}{y}}{4x(x^2+y^2) - y - 3x^2\ln(y)}$$

2) Encontrar derivadas parciales de z.

a) $\sin(xy) + \cos(yz) = \cot(zx)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \emptyset = \sin(xy) + \cos(yz) - \cot(zx)$$

$$F_x = \cos(xy)\,y + \csc^2(zx)\cdot z$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

$$F_z = -\sin(yz)\cdot y + \csc^2(zx)\cdot x$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(\frac{\cos(xy)y + \csc^2(zx)z}{-\sin(yz)y + \csc^2(zx)x}\right)}$$

$$F_y = \cos(xy)x - \sin(yz)z$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\left(\frac{\cos(xy)x - \sin(yz)z}{-\sin(yz)y + \csc^2(zx)x}\right)}$$

b) $\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2} = \dfrac{1}{x-2y-3z}$

$$0 = \frac{1}{x-2y-3z} - \sqrt{x^2y^2 + y^2z^2}$$

$$= (x-2y-3z)^{-1} - (x^2y^2 + y^2z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$F_x = -1(x-2y-3z)^{-2} - \frac{1}{2}(x^2y^2+y^2z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2xy^2)$$

$$F_y = -1(x-2y-3z)^{-2} \cdot (-2) - \frac{1}{2}(x^2y^2+y^2z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2yx^2 + 2yz^2)$$

$$F_z = -1(x-2y-3z)^{-2} \cdot (-3) - \frac{1}{2}(x^2y^2+y^2z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2zy^2)$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(\frac{\dfrac{-1}{(x-2y-3z)^2} - \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2y^2+y^2z^2}}}{\dfrac{3}{(x-2y-3z)^2} - \dfrac{zy^2}{\sqrt{x^2y^2+y^2z^2}}}\right)}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\left(\frac{\dfrac{2}{(x-2y-3z)^2} - \dfrac{yx^2+yz^2}{\sqrt{x^2y^2+y^2z^2}}}{\dfrac{3}{(x-2y-3z)^2} - \dfrac{zy^2}{\sqrt{x^2y^2+y^2z^2}}}\right)}$$

3) Encontrar ec. plano tangente.

a) $z = \dfrac{2x+3}{4y+1}$ $\qquad (0,0,0)$

$$z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) - f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

$$f(a,b) = \frac{2(0)+3}{4(0)+1} = 3$$

$$f_x = \frac{2}{4y+1}\Bigg|_{(0,0)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$f_y = (2x+3)\left[-1(4y+1)^{-2} \cdot 4\right] = (2x+3)\left(\frac{-4}{(4y+1)^2}\right)\Bigg|_{(0,0)}$$

$$= \frac{-4(3)}{1} = -12$$

$$z = 2x - 12y + 3$$

b) $z = \sec(xy^2) \qquad \left(\frac{\pi}{3}, 1, 2\right)$

$$f\left(\frac{\pi}{3}, 1\right) = \sec\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 2$$

$$f_x = \sec(xy^2)\tan(xy^2)\,y^2 \Bigg|_{\left(\frac{\pi}{3},1\right)} = \sec\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$$

$$f_y = \sec(xy^2)\tan(xy^2)\,2xy\Bigg|_{\left(\frac{\pi}{3},1\right)} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$$

$$z = 2 + 2\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}(y-1)$$

4) Encuentre la aproximación lineal.

a) $z = \dfrac{x}{x+y} \qquad (4, -2)$

$$L = f(a,b) + f_x(a,b)(\quad a) + f_y(a,b)(y-b)$$

$f(a,b) = 4$

$$\frac{\quad}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$f_x(a,b) = \frac{(x+y)+x}{(x+y)^2}\Bigg|_{(a,b)} = \frac{2(-2)-2}{(4-2)^2} = \frac{-4-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$f_y(a,b) = -x(x+y)^{-2}\Big|_{(a,b)} = -4(4-2)^{-2} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$z = 2 - \frac{1}{2}(x-4) - 1(y+2)$$

b) $z = e^{-xy}\sin(y) \qquad \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$$f(a,b) = e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)(0)}\sin(0) = 0$$

$$f_x(a,b) = -y\,e^{-xy}\sin(y)\Big|_{(a,b)} = 0$$

$$f_y(a,b) = -x\,e^{-xy}\sin(y) + e^{-xy}\cos(y)\Big|_{(a,b)} =$$

$$= \cancel{-\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)(0)}\sin(0)} + 1 = 1$$

$$z = y + 1$$

5) Encuentre las ec. paramétricas de la recta tangente

$L_1 \rightarrow$ tangente en la dirección de x.

$L_2 \rightarrow$ tangente en la dirección de y.

a) $z = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (3,4)$

Dirección de x no hay cambio en y.

$$x = t$$

$$y = 4$$

$$z = f(t,4) = \sqrt{t^2 + 4^2}$$

$$f_x = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \Big|_{(3,4)} = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}$$

$$f_y = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y \Big|_{(3,4)} = \frac{4}{5}$$

$$\ell_1 = \vec{r}(x) + t\,\vec{r}\,'(x)$$

$$= \langle 3, 4, \sqrt{13} \rangle + t \left\langle 1, 0, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$$

$x = t$

$y = 4$

$z = \sqrt{t^2+4}$

$\vec{r}(t) = \langle t, 4, \sqrt{t^2+4} \rangle$

$\vec{r}\,'(t) = \left\langle 1, 0, \frac{t}{\sqrt{t^2+4}} \right\rangle$

$\vec{r}(3) = \langle 3, 4, \sqrt{13} \rangle$

$\vec{r}\,'(3) = \left\langle 1, 0, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$

direción x

$x = 3 + t$

$y = 4$

$z = \sqrt{13} + t\frac{3}{\sqrt{13}}$

Dirección de y no hay cambio en x

$$\ell_2 = \vec{r}(t) + t\,\vec{r}\,'(t)$$

$\vec{r}(t) = \langle 3, t, \sqrt{9+t^2} \rangle$

$\vec{r}\,'(t) = \left\langle 0, 1, \frac{2t}{\sqrt{9+t^2}} \right\rangle$

$x = 3$

$y = t$

$z = \sqrt{9+t^2}$

$t = 4$

$\vec{r}(4) = \langle 3, 4, 5 \rangle$

$\vec{r}\,'(4) = \left\langle 0, 1, \frac{8}{5} \right\rangle$

dirección y:

$x = 3$

$y = 4 + t$

$z = 5 + \frac{8}{5}t$

b) $z = 2\sin(3x - 2y) + \underbrace{4\cos^2(x+y)}_{4(\cos(x+y))^2}$ $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

$f_x = 2\cos(3x-2y)\cdot 3 + 8\cos(x+y)\sin(x+y)$

$f_y = 2\cos(3x-2y)\cdot 2 + 8\cos(x+y)\sin(x+y)$

dir. x $t = \frac{\pi}{4}$

$x = t$

$y = \frac{\pi}{4}$

$z = 2\sin\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) + 4\cos^2\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$

$\vec{r}(t) = \left\langle t, \frac{\pi}{4}, 2\sin\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) + 4\cos^2\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right.$

$\vec{r}\,'(t) = \left\langle 1, 0, 2\cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right)\cdot 3 + 8\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right\rangle$

$\vec{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 2\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + 4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\rangle$

$= \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \sqrt{2} + \frac{3}{2}\right\rangle$

$\vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left\langle 1, 0, 2\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\cdot 3 + 8\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\rangle$

$= \left\langle 1, 0, 3\sqrt{2}\right\rangle$

$l_1 = \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \sqrt{2} + \frac{3}{2}\right\rangle + t\left\langle 1, 0, 3\sqrt{2}\right\rangle$

$x = \frac{\pi}{4} + t$ dir x

$y = \frac{\pi}{4}$

$z = \sqrt{2} + \frac{3}{2} + t\,3\sqrt{2}$

dir y:

$t = \frac{\pi}{4}$ $\quad x = \frac{\pi}{4}$

$y = t$

$z = 2\sin\left(\frac{3\pi}{4} - 2t\right) + 4\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + t\right)$

$\vec{r}(t) = \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 2\sin\left(\frac{3\pi}{4} - 2(\pi/4)\right) + 4\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rangle$

$= \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right\rangle$

$\vec{r}(t) = \left\langle 0, 1, 2\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \right)\cdot(-2) + 8\cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right)\right\rangle$

$= \left\langle 0, 1, -2\sqrt{2}\right\rangle$

$$\ell_2 = \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \sqrt{2} \right\rangle + t\left\langle 0, 1, -2\sqrt{2} \right\rangle$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

$$y = \frac{\pi}{4} + t$$

$$z = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,2t$$

Tarea #8 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 05 de marzo

Nombre:____ **Carnet:** ________________

Tema:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	20	32	24	24	20	120
Nota:						

1. Encuentre dy/dx.

   (a) (10 pts.) $y\tan^{-1}(x) = x\sin^{-1}(y) + x^2y^2$

   (b) (10 pts.) $yx + x^3\ln y = (x^2+y^2)^2$

2. Encuentre las derivadas parciales de z para las sigs. funciones implícitas.

   (a) (16 pts.) $\sin(xy) + \cos(yz) = \cot(zx)$

   (b) (16 pts.) $\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2} = \dfrac{1}{x - 2y - 3z}$

3. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.

   (a) (12 pts.) $z = \dfrac{2x+3}{4y+1}, \qquad (0,0,0)$

   (b) (12 pts.) $z = \sec(xy^2), \qquad \left(\dfrac{\pi}{3}, 1, 2\right)$

4. Encuentre la aproximación lineal $L(x,y)$ de la función en el punto indicado.

   (a) (12 pts.) $z = \dfrac{x}{x+y}, \qquad (\ 4, -2\ )$

   (b) (12 pts.) $z = e^{-xy}\sin(y), \qquad \left(\ \dfrac{\pi}{2},\ 0\ \right)$

5. Encuentre las ecuaciones paramétricas de las rectas tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto indicado. L_1 es la tangente en la dirección de x y L_2 es la tangente en la dirección de y.

   (a) (10 pts.) $z = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad (3,4)$

   (b) (10 pts.) $z = 2\sin^2(3x-2y) + 4\cos^2(x+y), \qquad \left(\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}\ \right)$

   Recuerde encontrar una función vectorial para encontrar la recta tangente a la superficie $z = f(x,y)$.

Dirección-x	Dirección-y
$x = t$	$x = a$
$y = b$	$y = t$
$z = f(t,b)$	$z = f(a,t)$

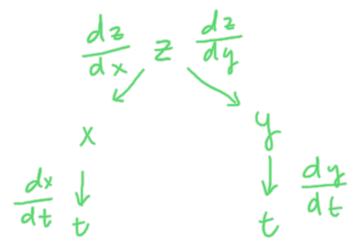
Capítulo 18

Tarea #09

1) Encuentre $\frac{\partial z}{\partial t}$

a) $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = \sin(t)$ $y = e^t$

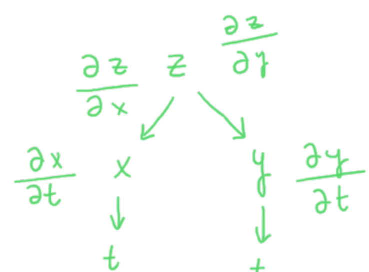
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$



$$\frac{\partial z}{\partial t} = (2x + y)\cos(t) + (2y + x)e^t$$

b) $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $x = \ln(t)$ $y = \cos(t)$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$



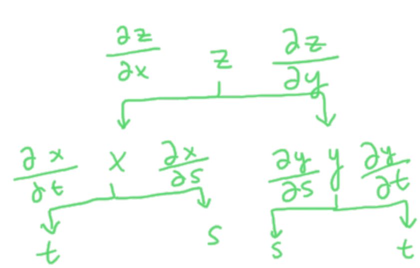
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{\cancel{2}}(1 + x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot \cancel{2}x \bullet \frac{1}{t} + \frac{1}{\cancel{2}}(1 + x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}y \bullet(-\sin(t))$$

$$= \frac{x}{t\sqrt{1 + x^2 + y^2}} - \frac{y\sin(t)}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$

2) Encuentre $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$

a) $z = x^2y^3$, $x = s\cos(t)$ $y = s\sin(t)$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$



$$\frac{\partial z}{\partial s} = (2xy^3)(\cos(t)) + (3y^2x^2)(\sin(t))$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2\cos(t)\,xy^3 + 3\sin(t)\,y^2x^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

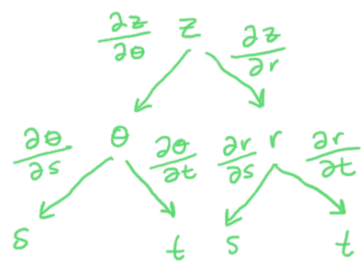
$$\frac{\partial z}{\partial t} = (2xy^3)(-s\sin(t)) + (3y^2x^2)(s\cos(t))$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -2sxy^3\sin(t) + 3sy^2x^2\cos(t)$$

b) $z = e^r\cos(\theta)\sin(\phi)$, $r = st$, $\theta = \sqrt{s^2+t^2}$,

$\phi = \ln[\tan(s) + \sinh(t)]$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial s}$$



$$= \left(-\sin(\theta)\, e^r\sin(\phi)\right)\left(\frac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}\right) +$$

$$\left(e^r\cos(\theta)\sin(\phi)\right)(t)$$

$$= -\frac{\sin(\theta)\,e^r\sin(\phi)\,s}{\sqrt{s^2+t^2}} + te^r\cos(\theta)\sin(\phi)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}$$

$$= \left(-e^r\sin(\theta)\sin(\phi)\right)\left(\frac{t}{\sqrt{s^2+t^2}}\right) + \left(e^r\cos(\theta)\sin(\phi)\right)(s)$$

$$= -\frac{e^r\sin(\theta)\sin(\phi)\,t}{\sqrt{s^2+t^2}} + e^r\cos(\theta)\sin(\phi)\,s$$

3) Determine la derivada direccional de $f(x,y) = x^3y^4 + x^4y^3$ en el punto $(1,1)$ en la dirección del vector unitario $\vec{u} = \langle\cos(\theta), \sin(\theta)\rangle$ $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$D_u = \nabla f\cdot\vec{u}$$

$$f_x = 3x^2y^4 + 4x^3y^3\Big|_{(1,1)} = 3+4 = \underline{7}$$

$$f_y = 4y^3 + 3y^2x^4\Big|_{(1,1)} = 4+3 = \underline{7}$$

$$D_u = \langle 7,7\rangle\cdot\langle\cos(\theta), \sin(\theta)\rangle \qquad \nabla f = \langle 7, 7\rangle$$

$= 7\cos(\theta) + 7\sin(\theta)$

$\vec{u} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2(\theta)} = 1$

$\vec{u} = \langle \cos(\theta), \sin(\theta) \rangle$

4) Encuentre la razon de cambio de $f(x,y,z) = e^{x-1}\sin(y) + (x+1)^2 \ln(z+1)$ en el punto $(1, \frac{\pi}{3}, 0)$ en la dirección del vector $\vec{v} = \langle -1, 4, -8 \rangle$

$$D_u f(1, \tfrac{\pi}{3}, 0) = \nabla f(1, \tfrac{\pi}{3}, 0) \cdot \vec{v}$$

$$\nabla f(x,y,z) = \left\langle e^{x-1}\sin(y) + 2(x+1)\ln(z+1),\ e^{x-1}\cos(y),\ \frac{(x+1)^2}{z+1} \right\rangle$$

$$\nabla f(1, \pi/3, 0) = \left\langle e^0 \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) + \cancel{4\ln(1)}^{0},\ e^0 \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right),\ \frac{4}{1} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 4 \right\rangle$$

$$\vec{v} = \frac{1}{9}\langle -1, 4, -8 \rangle$$

$$D_u f(1, \tfrac{\pi}{3}, 0) = \left\langle -\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{9} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 4 \right\rangle$$

$$= \left(-\frac{1}{9}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{8}{9}\right)\left(\frac{4}{1}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{18} + \frac{2}{9} - \frac{32}{9} = -\frac{\sqrt{3}}{18} - \frac{10}{3}$$

5) Dada la función:

$$f(x,y) = \sin(2x + 3y)$$

a) Determine el gradiente de f.

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$$

$f_x = 2\cos(2x + 3y)$

$$f_y = 3\cos(2x+3y)$$

$$\boxed{\nabla f = \langle 2\cos(2x+3y),\ 3\cos(2x+3y)\rangle}$$

b) Evalúe el gradiente en el pt. $P(-6\pi, 4\pi)$

$$\nabla f(-6\pi, 4\pi) = \langle 2\cos(-12\pi + 12\pi),\ 3\cos(-12\pi+12\pi)\rangle$$

$$= \langle 2\cancel{\cos(0)}^{1},\ 3\cancel{\cos(0)}^{1}\rangle = \boxed{\langle 2, 3\rangle}$$

c) Encuentre la razón de cambio de f en P en la dirección del vector $u = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\hat{i} - \hat{j})$.

$$\vec{u} = \underbrace{\frac{1}{2}\langle\sqrt{3}, -1\rangle}_{1?}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3+1} = 1 \ \checkmark$$

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u}$$

$$= \langle 2, 3\rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = (2)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (3)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{= \sqrt{3} - \frac{3}{2}}$$

Tarea #9 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 12 de marzo

Nombre:____ **Carnet:** ________________

Tema:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	20	20	20	20	20	100
Nota:						

1. Encuentre $\dfrac{dz}{dt}$.

   (a) (10 pts.) $z = x^2 + y^2 + xy, \qquad x = \sin t, \quad y = e^t$

   (b) (10 pts.) $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \quad x = \ln t, \quad y = \cos t$

2. Encuentre $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

   (a) (10 pts.) $z = x^2 y^3, \qquad x = s\cos t, \quad y = s\sin t$

   (b) (10 pts.) $z = e^r \cos\theta \sin(\phi), \qquad r = st, \quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}, \quad \phi = \ln[\ \tan(s) + \sinh(t)\ ]$

3. (20 pts.) Determine la derivada direccional de $f(x, y) = x^3y^4 + x^4y^3$ en el punto $(1, 1)$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \langle \cos\theta,\ \sin\theta \rangle, \quad \theta = \pi/6$.

4. (20 pts.) Encuentre la razón de cambio de $f(x, y, z) = e^{x-1}\sin y + (x + 1)^2 \ln(z + 1)$ en el punto $(1, \pi/3, 0)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = \langle -1, 4, -8 \rangle$.

5. Dada la función $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$.

   (a) (10 pts.) Determine el gradiente de f .

   (b) (05 pts.) Evalúe el gradiente en el punto $P(-6\pi,\ 4\pi)$.

   (c) (05 pts.) Encuentre la razón de cambio de f en P en la dirección del vector $u = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}i - j \right)$.

Capítulo 19

Tarea #11

1) $\int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2)\, dy\, dx$

- $\int_1^2 (x - 3y^2)\, dy = xy - y^3 \Big]_{y=1}^{y=2}$

$= \{[x(2) - (2)^3] - [x(1) - (1)^3]\}$

$= 2x - 8 - x + 1 = x - 7$

- $\int_0^2 (x-7)\, dx = \frac{x^2}{2} - 7x \Big]_{x=0}^{x=2} =$

$= \left\{\left[\frac{(2)^2}{2} - 7(2)\right] - [0]\right\} = \frac{4}{2} - 14 = 2 - 14 = \boxed{-12}$

2) $\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dy\, dx$

- $\int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dy = x \int_1^2 \frac{1}{y}\, dy + \frac{1}{x}\int_1^2 y\, dy = x \ln|y| + \frac{y^2}{2x}$

$= x\{\ln(2) - \ln(1)\} + \frac{1}{2x}\{4 - 1\} =$

$= x\ln(2) + \frac{3}{2x}$

- $\ln(2) \int_1^4 x\, dx + \frac{3}{2}\int_1^4 \frac{1}{x}\, dx = \frac{\ln(2)}{2} x^2 \Big]_{x=1}^{x=4} + \frac{3}{2} \ln|x| \Big]_{x=1}^{x=4}$

$= \frac{\ln(2)}{2}\{16 - 1\} + \frac{3}{2}\{\ln(4) - \cancel{\ln(1)}^{\,0}\} =$

$= \boxed{\ln(2)\frac{15}{2} + \frac{3}{2}\ln(4)}$

3) $\int_{-3}^{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y + y^2\cos(x))\, dx\, dy =$

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y + y^2 \cos(x))$ ...

$$\int_0 (y + y\cos(x))\,dx = yx + y^2\sin(x)\Big]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= y\Big[x + y\sin(x)\Big]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = y\Big\{\Big[\Big(\frac{\pi}{2}\Big) + y\sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big] - \Big[0\Big]\Big\} =$$

$$= y\Big\{\frac{\pi}{2} + y(1)\Big\} = \frac{\pi}{2}y + y^2$$

$$\int_{-3}^{3}\Big(\frac{\pi}{2}y + y^2\Big)\,dy = \frac{\pi}{2}\int_{-3}^{3} y\,dy + \int_{-3}^{3} y^2\,dy =$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big(\frac{y^2}{2}\Big)\Big]_{y=-3}^{y=3} + \Big(\frac{y^3}{3}\Big)\Big]_{y=-3}^{y=3}$$

$$= \frac{\pi}{4}\cancelto{0}{\{9 - 9\}} + \frac{1}{3}\{(3)^3 - (-3)^3\} =$$

$$= \frac{1}{3}\{27 + 27\} = \frac{54}{3} = 18$$

4) $\iint_R x\sin(x+y)\,dA$ $\quad R = [\underbrace{0}_{a}, \underbrace{\tfrac{\pi}{6}}_{b}] \times [\underbrace{0}_{c}, \underbrace{\tfrac{\pi}{3}}_{d}]$

$$\rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (x\sin(x+y))\,dx\,dy \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{6},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin(x+y)\,dx$$

$u = x \qquad dv = \sin(x+y)$

$\qquad\qquad v = -\cos(x+y)$

$du = dx$

$$= -x\cos(x+y) - \int_0^{\frac{\pi}{6}} -\cos(x++y)\,dx$$

$$= -x\cos(x+y) + \sin(x+y)\Big]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{6}}$$

$$= \Big\{\Big[-\frac{\pi}{6}\cos\Big(\frac{\pi}{6}+y\Big) + \sin\Big(\frac{\pi}{6}+y\Big)\Big] - \Big[\sin(y)\Big]\Big\}$$

$$= -\frac{\pi}{}\cos\Big(\frac{\pi}{} \ldots$$

$\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right) - \sin(y)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right) - \sin(y)\right) dy$$

$$= \underbrace{-\frac{\pi}{6}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right) dy}_{1} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right) dy}_{2} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(y)\, dy}_{3}$$

1 $-\frac{\pi}{6}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}\right) =$

$$= -\frac{\pi}{6}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\pi}{6}\left\{1 - \frac{1}{2}\right\} = -\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{12}$$

2 $-\cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} =$

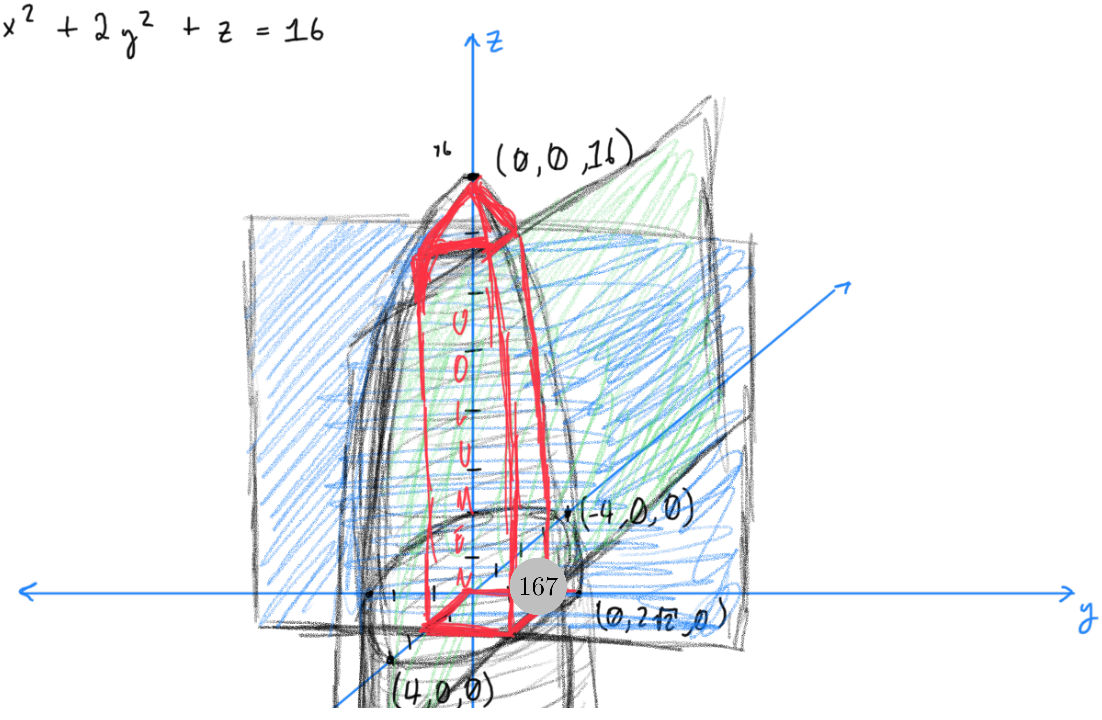
$$= -\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\} = -\left\{0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

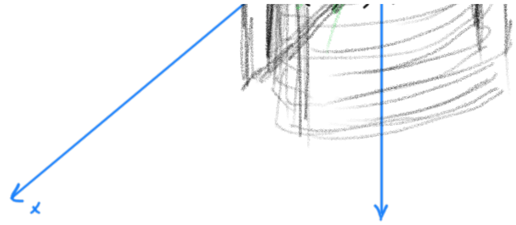
3 $\cos(y)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} =$

$$= \left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos(0)\right\} = \left\{\frac{1}{2} - 1\right\} = -\frac{1}{2}$$

$\therefore\ -\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$

5) $x^2 + 2y^2 + z = 16$





$x = 0, \quad y = 0$

$(0)^2 + 2(0)^2 + z = 16$

$z = 16$

$z = 0, \quad y = 0$

$x = \pm 4$

$z = 0, \quad x = 0$

$y = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

$0 \leq x \; 2$

$0 \leq y \leq 2$

$$= \underbrace{\int_0^2 \int_0^2 \left(16 - x^2 - 2y^2\right) dy\, dx}_{\int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dy\, dx}$$

$$\int_0^2 \left(16 - x^2 - 2y^2\right) dy = 16y - yx^2 - \frac{2}{3}y^3 \Big]_{y=0}^{y=2} =$$

$$= \left\{\left[16(2) - (2)x^2 - \frac{2}{3}(2)^3\right] - \left[0\right]\right\} = 32 - 2x^2 - \frac{16}{3}$$

$$\int_0^2 \left(32 - 2x^2 - \frac{16}{3}\right) dx$$

$$= 32x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{16}{3}x \Big]_{x=0}^{x=2}$$

$$= \left\{\left[32(2) - \frac{2}{3}(2)^3 - \frac{16}{3}(2)\right] - \left[0\right]\right\} = 64 - \frac{16}{3} - \frac{32}{3}$$

$$= 64 - \frac{48}{3} = 64 - 16 = \boxed{48}$$

Tarea #11 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 30 de enero

Nombre:____ **Carnet:** ________________

Tema:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	20	20	20	20	20	100
Nota:						

Resuelva las siguientes ejercicios:

1. (20 pts.) $\int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2) dy dx$
2. (20 pts.) $\int_1^4 \int_1^2 (\frac{x}{y} + \frac{y}{x}) dy dx$
3. (20 pts.) $\int_{-3}^3 \int_0^{\pi/2} (y + y^2 \cos x) dx dy$
4. (20 pts.) $\int \int_R x \sin(x + y) dA, R = [0, \pi/6]\, x\, [0, \pi/3]$
5. (20 pts.) Encuentre el volumen del sólido S acotado por el paraboloide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, los planos $x = 2$ y $y = 2$ y los tres planos coordenados.

Parte V

Cronograma

Capítulo 20

Cronograma

CÁLCULO MULTIVARIABLE 1er Semestre 2020

1. Información General del Curso

Libro de Texto:

- Stewart, James. Cálculo. Trascendentes Tempranas. Octava Edición. Cengage Learning. México, 2013. ISBN: 978-607-526-548-3
- Ketelaar, Christiaan. Cálculo Multivariable. Cuaderno de Trabajo. Editorial Arjé. 2018. ISBN: 978-1720958307.
- Cualquier otro texto de Cálculo (Leithold, Thomas y Anton) se puede utilizar como texto de apoyo.

Requisito: Cálculo Integral

Se recomienda utilizar una calculadora ó un software como Desmos o Geogebra para realizar ejercicios y laboratorios.

2. Descripción del Curso

El curso comprende cuatro unidades: en la primera se abordan los vectores y la geometría del espacio; en la segunda se tratan las funciones vectoriales, la tercera es acerca de las derivadas parciales y sus aplicaciones; por último, la cuarta unidad comprende las integrales múltiples y sus diversas aplicaciones. Para lograr comprender estos temas, es necesario que el estudiante comprenda los temas de Cálculo Diferencial e Integral.

Este curso está organizado en línea por medio de la plataforma MiU. En esta plataforma voy a hacer anuncios, mantener comunicación electrónica y publicar materiales del curso como notas de clase, laboratorios, soluciones de exámenes, etc.

3. Objetivos

Objetivo General: Proporcionar al estudiante una sólida base conceptual y práctica en el cálculo multivariable que le permita profundizar en las áreas de su competencia y estar capacitado para abordar áreas afines.

Objetivos Específicos

- Entender el concepto de un vector, operaciones vectoriales y aplicaciones de los vectores.
- Conocer y resolver problemas que involucren funciones vectoriales.
- Conocer el concepto de derivadas parciales y aplicarlas para resolver problemas aplicados a la ingeniería.
- Resolver problemas de optimización de varias variables y con restricciones.
- Conocer el concepto de integrales múltiples y aplicarlas en diversos contextos de ingeniería.

4. Evaluación

Se impartirán clases teóricas 2 días por semana y un día de laboratorio.

El curso tiene dos modalidades de evaluación. En la Modalidad A se realizan ejercicios en WebAssign de 5 pts. para tener un final de 20 pts, mientras que en la Modalidad B no se realizan ejercicios de WebAssign y se tiene un final de 25 pts.

Actividad	Modalidad A	Modalidad B
Exámenes Cortos (9)	9 %	9
Laboratorios (10)	10 %	10
Ejercicios WebAssign	5 %	0
Exámenes Parciales (4)	56 %	56
Examen Final	20 %	25
TOTAL	100 %	100

Ejercicios WebAssign: Cada semana se estarán subiendo ejercicios de WebAssign los cuales se deben realizar y entregar en línea.

Exámenes Cortos: Los exámenes cortos se pueden programar durante la sesión de laboratorio o los días martes durante la clase. El contenido de estos exámenes consistirá de los temas de clase, hojas de trabajo y laboratorios vistos en los días anteriores. Previo a los exámenes parciales, los exámenes cortos consistirán de exámenes parciales de simulacro de 1 hora que se realizarán durante la sesión de laboratorio. Van a haber más de diez exámenes cortos, por lo que sólo las nueve notas más altas entre todos los cortos se tomarán en cuenta.

Laboratorios: Durante la sesión de laboratorio semanal, los estudiantes completarán una serie de ejercicios sobre temas que se vieron en la semana anterior de clases. El estudiante deberá trabajar su laboratorio de manera individual pero puede recibir ayuda por parte del instructor. Van a haber más de 10 laboratorios, por lo que sólo los 10 notas más altas se tomarán en cuenta.

Exámenes Parciales: Van a haber tres exámenes parciales en las fechas y horarios listadas abajo. Los contenidos específicos de cada examen parcial serán anunciados con anticipación.

Examen Parcial 1: Miércoles, 19 de febrero, 2:30 PM
Examen Parcial 2: Miércoles, 18 de marzo, 2:30 PM
Examen Parcial 3: Viernes, 3 de abril, 11:30 AM
Examen Parcial 4: Jueves, 7 de mayo, 11:30 AM
Examen Final: Jueves, 14 de mayo,

Una vez entregado el examen parcial el estudiante tiene un período posterior de 2 DÍAS para solicitar la revisión del mismo.

5. Temas

1. **Vectores y Geometría en el Espacio**
2. **Funciones Vectoriales**
3. **Derivadas Parciales**
4. **Integrales Múltiples**

Algunos temas se pueden presentar en un orden diferente o con un enfoque diferente al del libro de texto (Consulte el cronograma tentativo en la página 3.)

CRONOGRAMA

Sesión	Dia	Fecha	Tema
01	Mar	07 Ene	12.1.1 Sistemas 3-D y Planos
02	Jue	09 Ene	12.1.2 Distancias y Superficies Básicas
03	Mar	14 Ene	12.2 Vectores
04	Jue	16 Ene	12.3 Producto Punto
05	Mar	21 Ene	12.4 Producto Cruz
06	Jue	23 Ene	12.5 Ecuaciones de Rectas y Planos
07	Mar	28 Ene	13.1 Funciones vectoriales y curvas en el espacio
08	Jue	30 Ene	13.2 Derivadas e integrales de funciones vectoriales
09	Mar	04 Feb	13.4 Movimiento en el espacio: velocidad y aceleración
10	Jue	06 Feb	13.3 Longitud de arco
11	Mar	11 Feb	14.1 Funciones de Varias Variables
12	Jue	13 Feb	12.6 Superficies Cuádricas
13	Mar	18 Feb	Repaso
	Mie	19 Feb	**EXAMEN PARCIAL 1**
14	Jue	20 Feb	14.3 Derivadas Parciales
15	Mar	25 Feb	14.4 Planos Tangentes y Aproximaciones Lineales
16	Jue	27 Mar	14.5 Regla de la Cadena
17	Mar	03 Mar	14.6 Derivadas Direccionales y Gradientes
18	Jue	05 Mar	14.7 Valores Máximos y mínimos
19	Mar	10 Mar	14.8 Multiplicadores de Lagrange
20	Jue	12 Mar	14.8 Multiplicadores de Lagrange
21	Mar	17 Mar	Repaso
	Mie	18 Mar	**EXAMEN PARCIAL 2**
22	Jue	19 Mar	15.1 Integrales Dobles
23	Mar	24 Mar	15.2 Integrales Iteradas
24	Jue	26 Mar	15.3 Integrales Dobles sobre regiones generales
25	Mar	31 Mar	15.4 Integrales Dobles coordenadas polares
26	Jue	02 Abr	Repaso
	Vie	03 Abr	**EXAMEN PARCIAL 3**
			Semana Santa 6-10 abril
27	Mar	14 Abr	15.6 Área Superficial
28	Jue	16 Abr	15.7 Integrales Triples Cartesianas
29	Mar	21 Abr	15.8 Integrales Triples Cilíndricas
30	Jue	23 Abr	15.8 Integrales Triples Cilíndricas
31	Mar	28 Abr	15.9 Integrales Triples Esféricas
32	Jue	30 Abr	15.9 Integrales Triples Esféricas
33	Mar	05 May	Repaso
34	Jue	07 May	**EXAMEN PARCIAL 4**
	Jue	14 May	**EXAMEN FINAL**

6. Políticas del Curso

- **Cambio de Fechas:** Cualquier cambio a las fechas y contenidos de los exámenes será notificada por escrito por parte del catedrático.

- **Exámenes Cortos o Laboratorios:** No habrá reposición de exámenes cortos o laboratorios en caso el estudiante se ausente estos días.

- **Exámenes Extemporáneos:** En caso de una ausencia a un examen parcial o final, ésta deberá ser debidamente justificada por el estudiante y el estudiante deberá solicitar un examen extemporáneo en la Facultad de Ciencias Económicas. Posteriormente el estudiante y el catedrático deberán acordar una fecha para realizar el examen extemporáneo.

- **Derecho a Examen Final:** Para tener derecho a examen final el estudiante deberá tener una zona de por lo menos 41 puntos.

- **Exoneración de Examen Final:** Para que un estudiante sea exonerado del examen final debe tener una zona mayor o igual a 74 puntos (no se redondearán zonas entre 73.5 y 73.9 puntos), ó de 70 pts si su zona es de 75 pts.. La exoneración consistirá en una nota de examen final correspondiente a 18 puntos. En caso un estudiante exonerado quiera optar a un punteo mayor en el examen final, puedo realizarlo pero pierde el derecho de exoneración al entregar el examen final).

- **Aprobación del Curso:** Para aprobar el curso el estudiante deberá tener una nota final mayor a igual a 61 puntos (no se redondearán notas finales entre 60.5 y 60.9 puntos). Una vez publicadas las notas finales, el estudiante puede solicitar una revisión de examen final en la Facultad de Ciencias Económicas.

- Puede haber algunos temas que el catedrático pueda asignar para que sean estudiados por cuenta del estudiante, dicho material también se evaluará.

El programa de este curso está sujeto a cambios.