

*Algunos de los primeros trabajos sobre probabilidad se dieron en una serie de cartas entre Pierre de Fermat y Blaise Pascal durante el año de 1650.*

La **probabilidad** es una medida numérica de la posibilidad de que ocurra un evento. Por tanto, las probabilidades son una medida del grado de incertidumbre asociado con cada uno de los eventos previamente enunciados. Si cuenta con las probabilidades, tiene la capacidad de determinar la posibilidad de ocurrencia que tiene cada evento.

Los valores de probabilidad se encuentran en una escala de 0 a 1. Los valores cercanos a 0 indican que las posibilidades de que ocurra un evento son muy pocas. Los cercanos a 1 indican que es casi seguro que ocurra un evento. Otras probabilidades entre cero y uno representan distintos grados de posibilidad de que ocurra un evento. Por ejemplo, si considera el evento “que llueva mañana”, se entiende que si el pronóstico del tiempo dice “la probabilidad de que llueva es cercana a cero”, implica que casi no hay posibilidades de que llueva. En cambio, si informan que la probabilidad de que llueva es 0.90, sabe que es muy posible que llueva. La probabilidad de 0.50 indica que es igual de posible que llueva como que no llueva. En la figura 4.1 se presenta la probabilidad como una medida numérica de la posibilidad de que ocurra un evento.

## 4.1

## Experimentos, reglas de conteo y asignación de probabilidades

En el contexto de la probabilidad, un **experimento** es definido como un proceso que genera resultados definidos. Y en cada una de las repeticiones del experimento, habrá uno y sólo uno de los posibles resultados experimentales. A continuación se dan varios ejemplos de experimentos con sus correspondientes resultados.

Experimento	Resultado experimental
Lanzar una moneda	Cara, cruz
Tomar una pieza para inspeccionarla	Con defecto, sin defecto
Realizar una llamada de ventas	Hay compra, no hay compra
Lanzar un dado	1, 2, 3, 4, 5, 6
Jugar un partido de fútbol	Ganar, perder, empatar

Al especificar todos los resultados experimentales posibles, está definiendo el **espacio muestral** de un experimento.

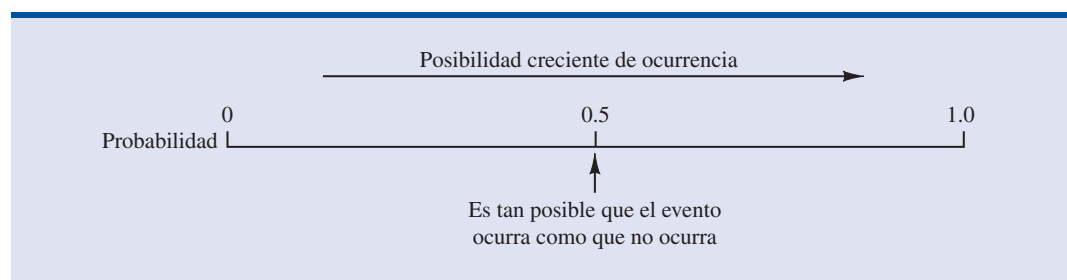
### ESPACIO MUESTRAL

El espacio muestral de un experimento es el conjunto de todos los resultados experimentales.

*A los resultados experimentales también se les llama puntos muestrales.*

A un resultado experimental también se le llama **punto muestral** para identificarlo como un elemento del espacio muestral.

**FIGURA 4.1** PROBABILIDAD COMO MEDIDA NUMÉRICA DE LA POSIBILIDAD DE QUE UN EVENTO OCURRA



Considere el primer experimento presentado en la tabla anterior, lanzar una moneda. La cara de la moneda que caiga hacia arriba —cara o cruz— determina el resultado experimental (puntos muestrales). Si denota con  $S$  el espacio muestral, puede emplear la notación siguiente para describir el espacio muestral.

$$S = \{\text{Cara, cruz}\}$$

En el segundo experimento de la tabla —tomar una pieza para revisarla— puede describir el espacio muestral como sigue:

$$S = \{\text{Defectuosa, no defectuosa}\}$$

Los dos experimentos descritos tienen dos resultados experimentales (puntos muestrales). Pero, observe ahora el cuarto experimento enumerado en la tabla, lanzar un dado. Los resultados experimentales, definidos por el número de puntos del dado en la cara que cae hacia arriba, son los seis puntos del espacio muestral de este experimento.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

## Reglas de conteo, combinaciones y permutaciones

Al asignar probabilidades es necesario saber identificar y contar los resultados experimentales. A continuación tres reglas de conteo que son muy utilizadas.

**Experimentos de pasos múltiples** La primera regla de conteo sirve para experimentos de pasos múltiples. Considere un experimento que consiste en lanzar dos monedas. Defina los resultados experimentales en términos de las caras y cruces que se observan en las dos monedas. ¿Cuántos resultados experimentales tiene este experimento? El experimento de lanzar dos monedas es un experimento de dos pasos: el paso 1 es lanzar la primera moneda y el paso 2 es lanzar la segunda moneda. Si se emplea  $H$  para denotar cara y  $T$  para denotar cruz,  $(H, H)$  será el resultado experimental en el que se tiene cara en la primera moneda y cara en la segunda moneda. Si continúa con esta notación, el espacio muestral ( $S$ ) en este experimento del lanzamiento de monedas será el siguiente:

$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

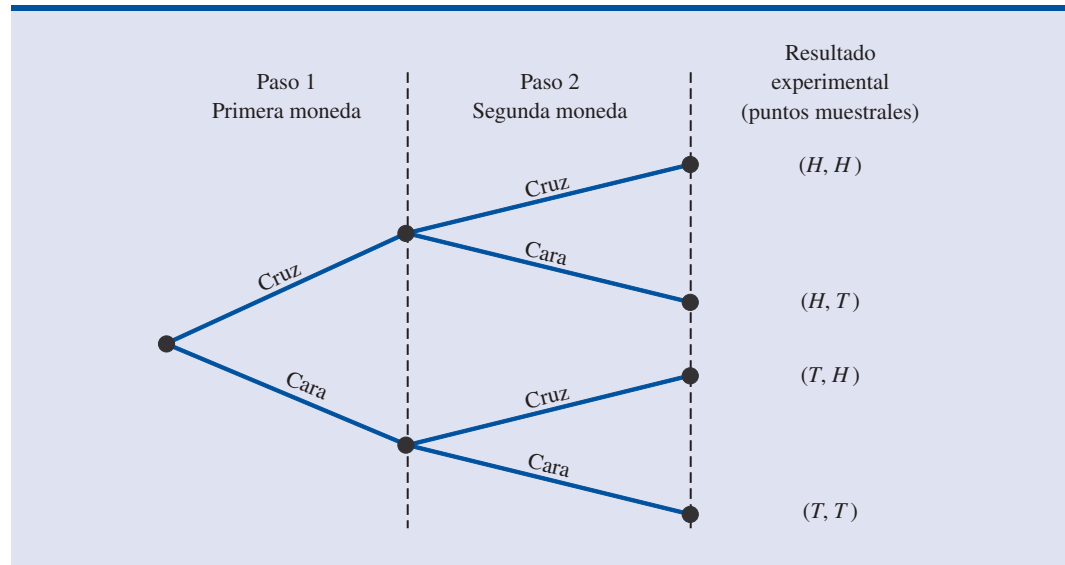
Por tanto, hay cuatro resultados experimentales. En este caso es fácil enumerar todos los resultados experimentales.

La regla de conteo para experimentos de pasos múltiples permite determinar el número de resultados experimentales sin tener que enumerarlos.

### REGLA DE CONTEO PARA EXPERIMENTOS DE PASOS MÚLTIPLES

Un experimento se describe como una sucesión de  $k$  pasos en los que hay  $n_1$  resultados posibles en el primer paso,  $n_2$  resultados posibles en el segundo paso y así en lo sucesivo, entonces el número total de resultados experimentales es  $(n_1)(n_2) \dots (n_k)$ .

Si considera el experimento del lanzamiento de dos monedas como la sucesión de lanzar primero una moneda ( $n_1 = 2$ ) y después lanzar la otra ( $n_2 = 2$ ), siguiendo la regla de conteo  $(2)(2) = 4$ , entonces hay cuatro resultados distintos. Como ya se mostró, estos resultados son  $S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$ . El número de resultados experimentales de seis monedas es  $(2)(2)(2)(2)(2)(2) = 64$ .

**FIGURA 4.2** DIAGRAMA DE ÁRBOL PARA EL LANZAMIENTO DE DOS MONEDAS

*Sin el diagrama de árbol podría pensarse que sólo se pueden tener tres resultados experimentales en dos lanzamientos de una moneda: 0 caras, 1 cara y 2 caras.*

Un **diagrama de árbol** es una representación gráfica que permite visualizar un experimento de pasos múltiples. En la figura 4.2 aparece un diagrama de árbol para el experimento del lanzamiento de dos monedas. La secuencia de los pasos en el diagrama va de izquierda a derecha. El paso 1 corresponde al lanzamiento de la primera moneda, el paso 2 al de la segunda moneda. En cada paso, los dos resultados posibles son cruz o cara. Observe que a cada uno de los resultados posibles en el paso 1 pertenecen dos ramas por los dos posibles resultados en el paso 2. Cada uno de los puntos en el extremo derecho del árbol representa un resultado experimental. Cada trayectoria a través del árbol, desde el nodo más a la izquierda hasta uno de los nodos en el extremo derecho del árbol, muestra una secuencia única de resultados.

Ahora una aplicación de la regla de conteo para experimentos de pasos múltiples en el análisis de un proyecto de expansión de la empresa Kentucky Power & Light (KP&L). Kentucky Power & Light ha empezado un proyecto que tiene como objetivo incrementar la capacidad de generación de una de sus plantas en el norte de Kentucky. El proyecto fue dividido en dos etapas o pasos sucesivos: etapa 1 (diseño) y etapa 2 (construcción). A pesar de que cada etapa se planeará y controlará con todo el cuidado posible, a los administrativos no les es posible pronosticar el tiempo exacto requerido en cada una de las etapas del proyecto. En un análisis de proyectos de construcción similares encuentran que la posible duración de la etapa de diseño es de 2, 3, o 4 meses y que la duración de la construcción es de 6, 7 u 8 meses. Además, debido a la necesidad urgente de más energía eléctrica, los administrativos han establecido como meta 10 meses para la terminación de todo el proyecto.

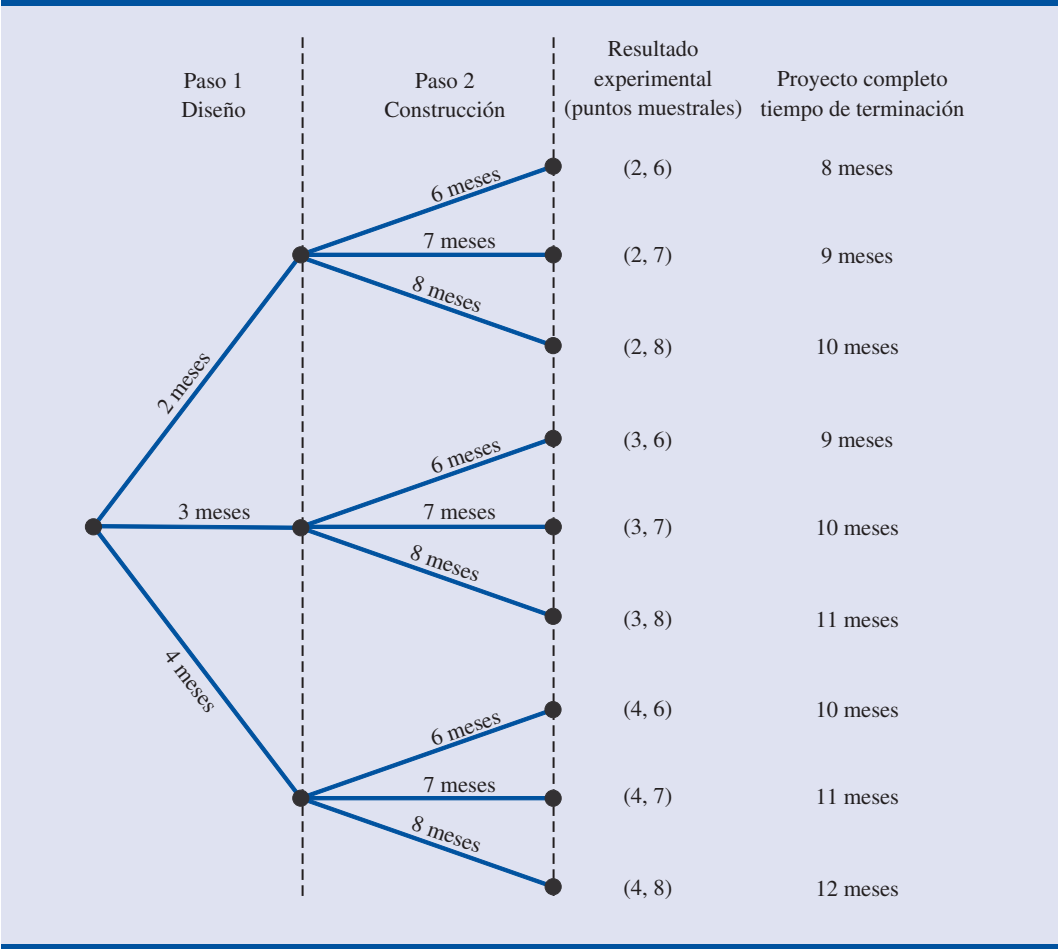
Como hay tres posibles periodos para la etapa del diseño (paso 1) y tres para la etapa de la construcción (paso 2) cabe aplicar la regla de conteo para experimentos de pasos múltiples, entonces el total de resultados posibles es  $(3)(3) = 9$ . Para describir los resultados experimentales emplean una notación de dos números; por ejemplo, (2, 6) significa que la etapa del diseño durará 2 meses y la etapa de la construcción 6. Esto da como resultado una duración de  $2 + 6 = 8$  meses para todo el proyecto. En la tabla 4.1 aparecen los nueve resultados experimentales que hay para el problema de KP&L. El diagrama de árbol de la figura 4.3 muestra como se presentan los nueve resultados (puntos muestrales).

La regla de conteo y el diagrama de árbol ayudan al administrador del proyecto a identificar los resultados experimentales y a determinar la posible duración del proyecto. De acuerdo con la

**TABLA 4.1** RESULTADOS EXPERIMENTALES (PUNTOS MUESTRALES) PARA EL PROYECTO KP&L

Duración (meses)			
Etapa 1 Diseño	Etapa 2 Construcción	Notación para los resultados experimentales	Proyecto completo: duración (meses)
2	6	(2, 6)	8
2	7	(2, 7)	9
2	8	(2, 8)	10
3	6	(3, 6)	9
3	7	(3, 7)	10
3	8	(3, 8)	11
4	6	(4, 6)	10
4	7	(4, 7)	11
4	8	(4, 8)	12

**FIGURA 4.3** DIAGRAMA DE ÁRBOL PARA EL PROYECTO KP&L



información de la figura 4.3, la duración del proyecto es de 8 a 12 meses, y seis de los nueve resultados experimentales tienen la duración deseada de 10 meses o menos. Aun cuando identificar los resultados experimentales ayuda, es necesario considerar cómo asignar los valores de probabilidad a los resultados experimentales antes de evaluar la probabilidad de que el proyecto dure los 10 meses deseados.

**Combinaciones** Otra regla de conteo útil le permite contar el número de resultados experimentales cuando el experimento consiste en seleccionar  $n$  objetos de un conjunto (usualmente mayor) de  $N$  objetos. Ésta es la regla de conteo para combinaciones.

#### REGLA DE CONTEO PARA COMBINACIONES

El número de combinaciones de  $N$  objetos tomados de  $n$  en  $n$  es

$$C_n^N = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \quad (4.1)$$

donde

$$N! = N(N-1)(N-2) \cdots (2)(1)$$

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots (2)(1)$$

y por definición,  $0! = 1$

*Cuando se hace un muestreo de una población finita de tamaño  $N$ , la regla de conteo para combinaciones sirve para hallar el número de muestras de tamaño  $n$  que pueden seleccionarse.*

La notación  $!$  significa *factorial*; por ejemplo, 5 factorial es  $5! = (5)(4)(3)(2)(1) = 120$ .

Como ejemplo del uso de la regla de conteo para combinaciones, considere un procedimiento de control de calidad en el que un inspector selecciona al azar dos de cinco piezas para probar que no tengan defectos. En un conjunto de cinco partes, ¿cuántas combinaciones de dos partes pueden seleccionarse? De acuerdo con la regla de conteo de la ecuación (4.1) es claro que con  $N = 5$  y  $n = 2$  se tiene

$$C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(2)(1)(3)(2)(1)} = \frac{120}{12} = 10$$

De manera que hay 10 resultados posibles en este experimento de la selección aleatoria de dos partes de un conjunto de cinco. Si etiqueta dichas partes como A, B, C, D y E, las 10 combinaciones o resultados experimentales serán AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE y DE.

Para ver otro ejemplo, considere la lotería de Florida en la que se seleccionan seis números de un conjunto de 53 números para determinar al ganador de la semana. Para establecer las distintas variables en la selección de seis enteros de un conjunto de 53, se usa la regla de conteo para combinaciones.

$$\binom{53}{6} = \frac{53!}{6!(53-6)!} = \frac{53!}{6!47!} = \frac{(53)(52)(51)(50)(49)(48)}{(6)(5)(4)(3)(2)(1)} = 22\,957\,480$$

*La regla de conteo para combinaciones muestra que la probabilidad de ganar en esta lotería es muy pequeña.*

La regla de conteo para combinaciones arroja casi 23 millones de resultados experimentales en esta lotería. Si una persona compra un billete de lotería, tiene una en 22 957 480 posibilidades de ganar la lotería.

**Permutaciones** La tercera regla de conteo que suele ser útil, es para permutaciones. Dicha regla permite calcular el número de resultados experimentales cuando se seleccionan  $n$  objetos de

un conjunto de  $N$  objetos y el orden de selección es relevante. Los mismos  $n$  objetos seleccionados en orden diferente se consideran un resultado experimental diferente.

#### REGLA DE CONTEO PARA PERMUTACIONES

El número de permutaciones de  $N$  objetos tomados de  $n$  en  $n$  está dado por

$$P_n^N = n! \binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!} \quad (4.2)$$

La regla de conteo para permutaciones tiene relación estrecha con la de combinaciones; sin embargo, con el mismo número de objetos, el número de permutaciones que se obtiene en un experimento es mayor que el número de combinaciones, ya que cada selección de  $n$  objetos se ordena de  $n!$  maneras diferentes.

Para ver un ejemplo, reconsidere el proceso de control de calidad en el que un inspector selecciona dos de cinco piezas para probar que no tienen defectos. ¿Cuántas permutaciones puede seleccionar? La ecuación (4.2) indica que si  $N = 5$  y  $n = 2$ , se tiene

$$P_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(3)(2)(1)} = \frac{120}{6} = 20$$

De manera que el experimento de seleccionar aleatoriamente dos piezas de un conjunto de cinco piezas, teniendo en cuenta el orden en que se seleccionen, tiene 20 resultados. Si las piezas se etiquetan A, B, C, D y E, las 20 permutaciones son AB, BA, AC, CA, AD, DA, AE, EA, BC, CB, BD, DB, BE, EB, CD, DC, CE, EC, DE y ED.

### Asignación de probabilidades

Ahora verá cómo asignar probabilidades a los resultados experimentales. Los tres métodos comúnmente usados son el método clásico, el método de la frecuencia relativa y el método subjetivo. Sin importar el método que se use, es necesario satisfacer los **requerimientos básicos para la asignación de probabilidades**.

#### REQUERIMIENTOS BÁSICOS PARA LA ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

1. La probabilidad asignada a cada resultado experimental debe estar entre 0 y 1, inclusive. Si denota con  $E_i$  el  $i$ -ésimo resultado experimental y con  $P(E_i)$  su probabilidad, entonces exprese este requerimiento como

$$0 \leq P(E_i) \leq 1 \text{ para toda } i \quad (4.3)$$

2. La suma de las probabilidades de los resultados experimentales debe ser igual a 1.0. Para resultados experimentales  $n$  escriba este requerimiento como

$$P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) = 1 \quad (4.4)$$

El **método clásico** de asignación de probabilidades es apropiado cuando todos los resultados experimentales tienen la misma posibilidad. Si existen  $n$  resultados experimentales, la probabilidad asignada a cada resultado experimental es  $1/n$ . Cuando emplee este método, satisfará en automático los dos requerimientos básicos de la asignación de probabilidades.

Por ejemplo, considere el experimento del lanzamiento de una moneda, los dos resultados experimentales —cruz o cara— tienen la misma posibilidad. Como uno de los dos resultados igualmente posibles es cara, la probabilidad de que caiga cara es  $1/2$  o  $0.50$ . Asimismo, la probabilidad de que caiga cruz también es  $1/2$  o  $0.50$ .

Otro ejemplo, considere el experimento de lanzar un dado. Es razonable pensar que los seis resultados que pueden presentarse son igualmente posibles y, por tanto, la probabilidad asignada a cada resultado es  $1/6$ . Si  $P(1)$  denota la probabilidad de que la cara del dado que caiga hacia arriba sea la que tiene un punto, entonces  $P(1) = 1/6$ . De manera similar  $P(2) = 1/6$ ,  $P(3) = 1/6$ ,  $P(4) = 1/6$ ,  $P(5) = 1/6$  y  $P(6) = 1/6$ . Observe que dichas probabilidades satisfacen los dos requerimientos básicos de las ecuaciones (4.3) y (4.4), porque cada una es mayor o igual que cero y juntas suman  $1.0$ .

El **método de frecuencia relativa** para la asignación de probabilidades es el más conveniente cuando existen datos para estimar la proporción de veces que se presentarán los resultados si el experimento se repite muchas veces. Considere, por ejemplo un estudio sobre los tiempos de espera en el departamento de rayos  $x$  de un hospital pequeño. Durante 20 días sucesivos un empleado registra el número de personas que están esperando el servicio a las 9:00 a.m.; los resultados son los siguientes.

Número de personas que esperan	Número de días: resultados de ocurrencia
0	2
1	5
2	6
3	4
4	3
	<hr/>
	Total 20

En estos datos aparece que 2 de los 20 días, había cero pacientes esperando el servicio, 5 días había un paciente en espera y así sucesivamente. Con el método de la frecuencia relativa, la probabilidad que se le asignará al resultado experimental cero pacientes esperan el servicio, será  $2/20 = 0.10$ ; al resultado experimental un paciente espera el servicio,  $5/20 = 0.25$ ;  $6/20 = 0.30$  a dos pacientes esperan el servicio;  $4/20 = 0.20$  a tres pacientes esperan el servicio y  $3/20 = 0.15$  a cuatro pacientes esperan el servicio. Como sucede con el método clásico, al usar el método de frecuencia relativa se satisfacen en automático los dos requerimientos básicos correspondientes a las ecuaciones (4.3) y (4.4).

El **método subjetivo** de asignación de probabilidades es el más indicado cuando no es factible suponer que todos los resultados de un experimento sean igualmente posibles y, además, cuenta con pocos datos relevantes. El método subjetivo de asignación de probabilidades a los resultados de un experimento, usa toda la información disponible, por ejemplo, la propia experiencia o la intuición. Después de considerar dicha información se asigna un valor de probabilidad que expresa el *grado de confianza* (en una escala de 0 a 1) que tiene acerca de que un resultado experimental ocurra. Como la probabilidad subjetiva expresa el grado de confianza que tiene un individuo, es personal. Cuando se usa el método de probabilidad subjetiva, es de esperarse que personas distintas asignen probabilidades diferentes a los mismos resultados de un experimento.

En el método subjetivo hay que tener cuidado de que se satisfagan los dos requerimientos básicos expresados en las ecuaciones (4.3) y (4.4). Sea cual sea el grado de confianza que tenga la persona, el valor de probabilidad asignado a cada resultado experimental debe estar entre 0 y 1, inclusive, y la suma de las probabilidades de todos los resultados experimentales debe ser  $1.0$ .

Considere el caso en el que Tom y Judy Elsbernd hacen una oferta para la compra de una casa. Hay dos resultados posibles:

$E_1$  = su oferta será aceptada

$E_2$  = su oferta no será aceptada

*El teorema de Bayes (véase sección 4.5) proporciona un medio para combinar la probabilidad a priori determinada subjetivamente con probabilidades obtenidas por otros medios para obtener probabilidades a posteriori o revisadas.*

Judy cree que la probabilidad de que su oferta sea aceptada es 0.8; por tanto, Judy establece que  $P(E_1) = 0.8$  y  $P(E_2) = 0.2$ ; Tom, por su parte, cree que la probabilidad de que su oferta sea aceptada es 0.6; por tanto, Tom establecerá  $P(E_1) = 0.6$  y  $P(E_2) = 0.4$ . Observe que la estimación de probabilidad de  $E_1$  que hace Tom refleja bastante pesimismo de que su oferta sea aceptada.

Tanto Judy como Tom asignaron probabilidades que satisfacen los dos requerimientos básicos. El hecho de que sus probabilidades sean diferentes subraya la naturaleza personal del método subjetivo.

Incluso en situaciones de negocios en que es posible emplear el método clásico o el de las probabilidades relativas, los administradores suelen proporcionar estimaciones subjetivas de una probabilidad. En tales casos, la mejor estimación de una probabilidad suele obtenerse combinando las estimaciones del método clásico o del método de las frecuencias relativas con las estimaciones subjetivas de una probabilidad.

Probabilidades para el proyecto KP&L

Para continuar con el análisis del proyecto KP&L hay que hallar las probabilidades de los nueve resultados experimentales enumerados en la tabla 4.1. De acuerdo con la experiencia, los administrativos concluyen que los resultados experimentales no son todos igualmente posibles. Por tanto, no emplean el método clásico de asignación de probabilidades. Entonces deciden hacer un estudio sobre la duración de los proyectos similares realizados por KP&L en los últimos tres años. En la tabla 4.2 se resume el resultado de este estudio considerando 40 proyectos similares.

Después de analizar los resultados de este estudio, los administrativos deciden emplear el método de frecuencia relativa para asignar las probabilidades. Los administrativos podrían haber aportado probabilidades subjetivas, pero se dieron cuenta de que el proyecto actual era muy similar a los 40 proyectos anteriores. Así, consideraron que el método de frecuencia relativa sería el mejor.

Si emplea la tabla 4.2 para calcular las probabilidades, observará que el resultado (2, 6) —duración de la etapa 1, 2 meses, y duración de la etapa 2, 6 meses— se encuentra seis veces en los 40 proyectos. Con el método de las frecuencias relativas, la probabilidad signada a este resultado es  $6/40 = 0.15$ . También el resultado (2, 7) se encuentra seis veces en los 40 proyectos  $6/40 = 0.15$ . Continuando de esta manera, se obtienen, para los puntos muestrales del proyecto de KP&L, las asignaciones de probabilidad que se muestran en la tabla 4.3. Observe que  $P(2, 6)$  representa la probabilidad del punto muestral (2, 6),  $P(2, 7)$  representa la probabilidad del punto muestral (2, 7) y así sucesivamente.

TABLA 4.2 DURACIÓN DE 40 PROYECTOS DE KP&L

Duración (meses)		Punto muestral	Número de proyectos que tuvieron esta duración
Etapla 1 Diseño	Etapla 2 Construcción		
2	6	(2, 6)	6
2	7	(2, 7)	6
2	8	(2, 8)	2
3	6	(3, 6)	4
3	7	(3, 7)	8
3	8	(3, 8)	2
4	6	(4, 6)	2
4	7	(4, 7)	4
4	8	(4, 8)	6
Total			40



**TABLA 4.3** ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES PARA EL PROYECTO KP&L, EMPLEANDO EL MÉTODO DE LAS FRECUENCIAS RELATIVAS

Punto muestral	Tiempo de terminación del proyecto	Probabilidad del punto muestral
(2, 6)	8 meses	$P(2, 6) = 6/40 = 0.15$
(2, 7)	9 meses	$P(2, 7) = 6/40 = 0.15$
(2, 8)	10 meses	$P(2, 8) = 2/40 = 0.05$
(3, 6)	9 meses	$P(3, 6) = 4/40 = 0.10$
(3, 7)	10 meses	$P(3, 7) = 8/40 = 0.20$
(3, 8)	11 meses	$P(3, 8) = 2/40 = 0.05$
(4, 6)	10 meses	$P(4, 6) = 2/40 = 0.05$
(4, 7)	11 meses	$P(4, 7) = 4/40 = 0.10$
(4, 8)	12 meses	$P(4, 8) = 6/40 = 0.15$
	Total	1.00

### NOTAS Y COMENTARIOS

1. En estadística la noción de experimento difiere un poco del concepto de experimento de las ciencias físicas. En las ciencias físicas, los investigadores suelen realizar los experimentos en laboratorios o en ambientes controlados, con objeto de investigar causas y efectos. En los experimentos estadísticos, la probabilidad determina los resultados. Aun cuando un experimento se repita con exactitud, el resultado puede ser completamente diferente. Debido a esta influencia que tiene la probabilidad sobre los resultados, a los experimentos en estadística también se les conoce como *experimentos aleatorios*.
2. Cuando de una población de tamaño  $N$  se extrae una muestra aleatoria sin reemplazarla, se emplea la regla de conteo para combinaciones para calcular la cantidad de muestras de tamaño  $n$  que pueden seleccionarse.

### Ejercicios

#### Métodos

1. Un experimento consta de tres pasos; para el primer paso hay tres resultados posibles, para el segundo hay dos resultados posibles y para el tercer paso hay cuatro resultados posibles. ¿Cuántos resultados distintos hay para el experimento completo?
2. ¿De cuántas maneras es posible seleccionar tres objetos de un conjunto de seis objetos? Use las letras A, B, C, D, E y F para identificar a los objetos y enumere todas las combinaciones diferentes de tres objetos.
3. ¿Cuántas permutaciones de tres objetos se pueden seleccionar de un grupo de seis objetos? Use las letras A, B, C, D, E y F para identificar a los objetos y enumere cada una de las permutaciones factibles para los objetos B, D y F.
4. Considere el experimento de lanzar una moneda tres veces.
  - a. Elabore un diagrama de árbol de este experimento.
  - b. Enumere los resultados del experimento.
  - c. ¿Cuál es la probabilidad que le corresponde a cada uno de los resultados?
5. Suponga que un experimento tiene cinco resultados igualmente posibles:  $E_1, E_2, E_3, E_4$  y  $E_5$ . Asigne probabilidades a los resultados y muestre que satisfacen los requerimientos expresados por las ecuaciones (4.3) y (4.4). ¿Qué método empleó?
6. Un experimento que tiene tres resultados es repetido 50 veces y se ve que  $E_1$  aparece 20 veces,  $E_2$  13 veces y  $E_3$  17 veces. Asigne probabilidades a los resultados. ¿Qué método empleó?

**Autoexamen**

**Autoexamen**

7. La persona que toma las decisiones asigna las probabilidades siguientes a los cuatro resultados de un experimento:  $P(E_1) = 0.10$ ,  $P(E_2) = 0.15$ ,  $P(E_3) = 0.40$  y  $P(E_4) = 0.20$ . ¿Son válidas estas asignaciones de probabilidades? Argumente.

## Aplicaciones

8. En una ciudad las solicitudes de cambio de uso de suelo pasan por un proceso de dos pasos: una revisión por la comisión de planeación y la decisión final tomada por el consejo de la ciudad. En el paso 1 la comisión de planeación revisa la solicitud de cambio de uso de suelo y hace una recomendación positiva o negativa respecto al cambio. En el paso 2 el consejo de la ciudad revisa la recomendación hecha por la comisión de planeación y vota para aprobar o desaprobar el cambio de suelo. Suponga que una empresa dedicada a la construcción de complejos departamentales presenta una solicitud de cambio de uso de suelo. Considere el proceso de la solicitud como un experimento. ¿Cuántos puntos muestrales tiene este experimento? Enumérellos. Construya el diagrama de árbol del experimento.
9. El muestreo aleatorio simple usa una muestra de tamaño  $n$  tomada de una población de tamaño  $N$  para obtener datos para hacer inferencias acerca de las características de la población. Suponga que, de una población de 50 cuentas bancarias, desea tomar una muestra de cuatro cuentas con objeto de tener información acerca de la población. ¿Cuántas muestras diferentes de cuatro cuentas pueden obtener?
10. El capital de riesgo es una fuerte ayuda para los fondos disponibles de las empresas. De acuerdo con Venture Economics (*Investor's Business Daily*, 28 de abril de 2000) de 2374 desembolsos en capital de riesgo, 1434 son de empresas en California, 390 de empresas en Massachussets, 217 de empresas en Nueva York y 112 de empresas en Colorado. Veintidós por ciento de las empresas que reciben fondos se encuentran en las etapas iniciales de desarrollo y 55% en la etapa de expansión. Suponga que desea tomar en forma aleatoria una de estas empresas para saber cómo son usados los fondos de capital de riesgo.
- ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa que seleccione sea de California?
  - ¿De que la empresa no sea de ninguno de los estados citados?
  - ¿De que la empresa elegida no se encuentre en las etapas iniciales de desarrollo?
  - Si admite que las empresas en las etapas iniciales de desarrollo tuvieran una distribución homogénea en todo el país, ¿cuántas empresas de Massachussets que reciben fondos de capital de riesgo se encuentran en las etapas iniciales de desarrollo?
  - La cantidad total de fondos invertidos es \$32.4 mil millones. Estime la cantidad destinada a Colorado.
11. La National Highway Traffic Safety Administration (NHTSA) realizó una investigación para saber si los conductores de Estados Unidos están usando sus cinturones de seguridad (Associated Press, 25 de agosto de 2003). Los datos muestrales fueron los siguientes.

**Autoexamen**

**Autoexamen**

**Conductores que emplean el cinturón**

Región	Sí	No
Noreste	148	52
Oeste medio	162	54
Sur	296	74
Oeste	252	48
<b>Total</b>	<b>858</b>	<b>228</b>

- ¿Cuál es la probabilidad de que en Estados Unidos un conductor lleve puesto el cinturón?
- Un año antes, la probabilidad en Estados Unidos de que un conductor llevara puesto el cinturón era 0.75. El director de NHTSA, doctor Jeffrey Runge esperaba que en 2003 la probabilidad llegara a 0.78. ¿Estará satisfecho con los resultados del estudio del 2003?

- c. ¿Cuál es la probabilidad de que se use el cinturón en las distintas regiones del país? ¿En qué región se usa más el cinturón?
  - d. En la muestra, ¿qué proporción de los conductores provenía de cada región del país? ¿En qué región se seleccionaron más conductores? ¿Qué región viene en segundo lugar?
  - e. Si admite que en todas las regiones la cantidad de conductores es la misma, ¿ve usted alguna razón para que la probabilidad estimada en el inciso a sea tan alta? Explique.
12. En Estados Unidos hay una lotería que se juega dos veces por semana en 28 estados, en las Islas Vírgenes y en el Distrito de Columbia. Para jugar, debe comprar un billete y seleccionar cinco números del 1 al 55 y un número del 1 al 42. Para determinar al ganador se sacan 5 bolas blancas entre 55 bolas blancas y una bola roja entre 42 bolas rojas. Quien atine a los cinco números de bolas blancas y al número de la bola roja es el ganador. Ocho trabajadores de una empresa tienen el récord del mayor premio, ganaron \$365 millones al atinarle a los números 15-17-43-44-49 de las bolas blancas y al 29 de las bolas rojas. En cada juego hay también otros premios. Por ejemplo, quien atina a los cinco números de las bolas blancas se lleva un premio de \$200 000 ([www.powerball.com](http://www.powerball.com), 19 de marzo de 2006).
- a. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar los primeros cinco números?
  - b. ¿Cuál es la probabilidad de ganar los \$200 000 atinándole a los cinco números de bolas blancas?
  - c. ¿Cuál es la probabilidad de atinarle a todos los números y ganar el premio mayor?
13. Una empresa que produce pasta de dientes está analizando el diseño de cinco empaques diferentes. Suponiendo que existe la misma posibilidad de que los clientes elijan cualquiera de los empaques, ¿cuál es la probabilidad de selección que se le asignaría a cada diseño de empaque? En un estudio, se pidió a 100 consumidores que escogieran el diseño que más les gustara. Los resultados se muestran en la tabla siguiente. ¿Confirman estos datos la creencia de que existe la misma posibilidad de que los clientes elijan cualquiera de los empaques? Explique

Diseño	Número de veces que fue elegido
1	5
2	15
3	30
4	40
5	10

## 4.2

## Eventos y sus probabilidades

En la introducción de este capítulo el término *evento* fue aplicado tal como se usa en el lenguaje cotidiano. Después, en la sección 4.1 se presentó el concepto de experimento y de los correspondientes resultados experimentales o puntos muestrales. Puntos muestrales y eventos son la base para el estudio de la probabilidad. Por tanto, ahora se le presenta la definición formal de **evento** como se emplea en relación con los puntos muestrales. Con esto se tiene la base para poder dar probabilidades de eventos.

## EVENTO

Un evento es una colección de puntos muestrales.

Para dar un ejemplo recuerde el proyecto de KP&L. Considere que al encargado del proyecto le interesa conocer la probabilidad de terminar el proyecto en 10 meses o menos. En la tabla 4.3 aparecen los puntos muestrales (2, 6), (2, 7), (2, 8), (3, 6), (3, 7), (4, 6) correspondientes a una duración del proyecto de 10 meses o menos.  $C$  denota el evento de que el proyecto dura 10 meses o menos:

$$C = \{(2, 6), (2, 7), (2, 8), (3, 6), (3, 7), (4, 6)\}$$

Si cualquiera de estos puntos muestrales es el resultado experimental, entonces ocurre el evento  $C$ .

Otros eventos de posible interés para el administrador del proyecto KP&L son los siguientes:

$L$  = El evento de que el proyecto esté acabado en *menos* de 10 meses

$M$  = El evento de que el proyecto esté acabado en *más* de 10 meses

De acuerdo con la tabla 4.3 dichos eventos consisten de los siguientes puntos muestrales

$$L = \{(2, 6), (2, 7), (3, 6)\}$$

$$M = \{(3, 8), (4, 7), (4, 8)\}$$

Para el proyecto KP&L existen otros muchos eventos, pero todos serán una colección de puntos muestrales del experimento.

Dadas las probabilidades de los puntos muestrales que se presentan en la tabla 4.3, para calcular la probabilidad de cualquier evento que interese al administrador del proyecto KP&L, se emplea la definición siguiente.

#### PROBABILIDAD DE UN EVENTO

La probabilidad de cualquier evento es igual a la suma de las probabilidades de los puntos muestrales que forman el evento.

De acuerdo con esta definición, la probabilidad de un determinado evento se calcula sumando las probabilidades de los puntos muestrales (resultados experimentales) que forman el evento. Ahora es posible calcular la probabilidad de que el proyecto dure 10 meses o menos. Como este evento está dado por  $C = \{(2, 6), (2, 7), (2, 8), (3, 6), (3, 7), (4, 6)\}$ , la probabilidad del evento  $C$  denotada por  $P(C)$  está dada por

$$P(C) = P(2, 6) + P(2, 7) + P(2, 8) + P(3, 6) + P(3, 7) + P(4, 6)$$

Al consultar las probabilidades de los puntos muestrales de la tabla 4.3, se tiene

$$P(C) = 0.15 + 0.15 + 0.05 + 0.10 + 0.20 + 0.05 = 0.70$$

Así, como el evento de que el proyecto dure menos de 10 meses está dado por  $L = \{(2, 6), (2, 7), (3, 6)\}$ , la probabilidad de este evento será

$$\begin{aligned} P(L) &= P(2, 6) + P(2, 7) + P(3, 6) \\ &= 0.15 + 0.15 + 0.10 = 0.40 \end{aligned}$$

Por último, el evento de que el proyecto dure más de 10 meses está dado por  $M = \{(3, 8), (4, 7), (4, 8)\}$  y por tanto

$$\begin{aligned} P(M) &= P(3, 8) + P(4, 7) + P(4, 8) \\ &= 0.05 + 0.10 + 0.15 = 0.30 \end{aligned}$$

Con estas probabilidades, ahora puede informarle al administrador del proyecto KP&L las probabilidades siguientes: que el proyecto dure 10 meses o menos es 0.70; que dure menos de 10 meses es 0.40 y que dure más de 10 meses es 0.30. Este procedimiento para calcular las probabilidades de los eventos aplica para cualquier evento que interese al administrador del proyecto KP&L.

Siempre que se puedan identificar todos los puntos muestrales de un experimento y asignar a cada uno su probabilidad, es factible calcular la probabilidad de un evento usando la definición. Sin embargo, en muchos experimentos la gran cantidad de puntos muestrales hace en extremo difícil, si no imposible, la determinación de los puntos muestrales, así como la asignación de sus probabilidades correspondientes. En las secciones restantes de este capítulo se presentan algunas relaciones básicas de probabilidad útiles para calcular la probabilidad de un evento, sin necesidad de conocer las probabilidades de todos los puntos muestrales.

### NOTAS Y COMENTARIOS

1. El espacio muestral  $S$  es un evento. Puesto que contiene todos los resultados experimentales, su probabilidad es 1; es decir  $P(S) = 1$ .
  2. Cuando se usa el método clásico para asignar probabilidades, se parte de que todos los resultados experimentales son igualmente posibles.
- En tales casos la probabilidad de un evento es calculable contando el número de resultados experimentales que hay en el evento y dividiendo el resultado entre el número total de resultados experimentales.

### Ejercicios

#### Métodos

14. Para un experimento hay cuatro resultados que son igualmente posibles:  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  y  $E_4$ .
  - a. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra  $E_2$ ?
  - b. ¿De que ocurra cualquiera de dos resultados (por ejemplo,  $E_1$  o  $E_2$ )?
  - c. ¿De que ocurran tres de estos resultados ( $E_1$  o  $E_2$  o  $E_4$ )?
15. Considere el experimento de seleccionar un naipe de una baraja con 52 naipes. Cada naipe es un punto muestral y su probabilidad es  $1/52$ .
  - a. Enumere los puntos muestrales del evento si selecciona un as.
  - b. Enumere los puntos muestrales del evento si selecciona un trébol.
  - c. Enumere los puntos muestrales del evento si selecciona una figura (sota, rey o reina).
  - d. Halle la probabilidad correspondiente a cada uno de los eventos de los incisos a, b y c.
16. Considere el experimento que consiste en lanzar un par de dados. Suponga que lo relevante es la suma de los puntos en las dos caras que caen hacia arriba.
  - a. ¿Cuántos puntos muestrales habrá? (*Sugerencia:* Use la regla de conteo para experimentos de pasos múltiples.)
  - b. Enumere los puntos muestrales.
  - c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 7?
  - d. ¿De obtener un 9 o un número mayor?
  - e. Como en cada lanzamiento son factibles seis valores pares (2, 4, 6, 8, 10, y 12) y sólo cinco impares (3, 5, 7, 9 y 11), se tendrán más veces resultados pares que impares. ¿Está de acuerdo? Explique.
  - f. ¿Qué método usó para calcular las probabilidades pedidas?

## Autoexamen

### Aplicaciones

17. Consulte las tablas 4.2 y 4.3 que muestran los puntos muestrales del proyecto KP&L y sus probabilidades.
  - a. La etapa del diseño (etapa 1) saldrá del presupuesto si su duración es mayor a 4 meses. Liste los puntos muestrales del evento si la etapa del diseño sale del presupuesto.
  - b. ¿Cuál es la probabilidad de que la etapa del diseño salga del presupuesto?
  - c. La etapa de la construcción (etapa 2) saldrá del presupuesto si su duración es mayor a 8 meses. Enumere los puntos muestrales del evento si la etapa de construcción sale del presupuesto.
  - d. ¿Cuál es la probabilidad de que la etapa de construcción salga del presupuesto?
  - e. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos etapas salgan del presupuesto?
18. Suponga que el administrador de un complejo grande de departamentos proporciona la siguiente estimación de probabilidades subjetivas acerca del número de departamentos libres que habrá el mes próximo.

Departamentos libres	Probabilidad
0	0.05
1	0.15
2	0.35
3	0.25
4	0.10
5	0.10

Dé la probabilidad de cada uno de los eventos siguientes.

- a. No haya departamentos libres.
  - b. Haya por lo menos 4 departamentos libres.
  - c. Haya 2 o menos departamentos libres.
19. Una asociación deportiva realiza un sondeo entre las personas mayores a 6 años respecto de su participación en actividades deportivas. (*Statistical Abstract of the United States: 2002*). El total de la población de estas edades fue 248.5 millones, de los cuales 120.9 millones eran hombres y 127.6 millones mujeres. A continuación se presenta el número de participantes en los cinco deportes principales.

Actividad	Participantes (en millones)	
	Hombres	Mujeres
Andar en bicicleta	22.2	21.0
Acampar	25.6	24.3
Caminar	28.7	57.7
Hacer ejercicio con aparatos	20.4	24.4
Nadar	26.4	34.4

- a. Estime la probabilidad de que una mujer, elegida al azar, participe en cada una de estas actividades deportivas.
- b. Estime la probabilidad de que un hombre, elegido en forma aleatoria, participe en cada una de estas actividades deportivas.
- c. Estime la probabilidad de que una persona, elegida en forma aleatoria, haga ejercicio caminando.
- d. Suponga que acaba de ver una persona que pasa caminando para hacer ejercicio. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?, ¿de que sea hombre?

20. La revista *Fortune* publica anualmente una lista de las 500 empresas más grandes de Estados Unidos. A continuación se presentan los cinco estados en los que hay más de estas 500 empresas de *Fortune*.

Estado	Número de empresas
Nueva York	54
California	52
Texas	48
Illinois	33
Ohio	30

Suponga que se elige una de las 500 empresas de *Fortune*. ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de los eventos siguientes?

- Sea  $N$  el evento: la empresa se encuentra en Nueva York. Halle  $P(N)$ .
  - Sea  $T$  el evento: la empresa se encuentra en Texas. Halle  $P(T)$ .
  - Sea  $B$  el evento: la empresa se encuentra en uno de estos cinco estados. Halle  $P(B)$ .
21. En la tabla siguiente se dan las edades de la población de Estados Unidos (*The World Almanac 2004*). Los datos aparecen en millones de personas.

Edad	Cantidad
19 y menos	80.5
20 a 24	19.0
25 a 34	39.9
35 a 44	45.2
45 a 54	37.7
55 a 64	24.3
65 y más	35.0

Suponga una selección aleatoria de una persona de esta población.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la persona tenga entre 20 y 24 años?
- ¿De que la persona tenga entre 20 y 34 años?
- ¿De que tenga 45 años o más?

## 4.3

## Algunas relaciones básicas de probabilidad

### Complemento de un evento

Dado un evento  $A$ , el **complemento de  $A$**  se define como el evento que consta de todos los puntos muestrales que *no* están en  $A$ . El complemento de  $A$  se denota  $A^c$ . Al diagrama de la figura 4.4 se le llama **diagrama de Venn** e ilustra el concepto del complemento. El área rectangular representa el espacio muestral del experimento y, por tanto, contiene todos los puntos muestrales. El círculo representa el evento  $A$  y encierra sólo los puntos muestrales que pertenecen a  $A$ . La región del rectángulo que aparece sombreada incluye todos los puntos muestrales que no están en el evento  $A$  y es, por definición, el complemento de  $A$ .

En cualquier aplicación de la probabilidad ocurre un evento  $A$  o su complemento  $A^c$ . Por tanto,

$$P(A) + P(A^c) = 1$$