1. 14.3 Derivadas parciales

- Derivada en una dimensión:
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$
- En una función con dos variables independientes:
$$f(x,y)=\left.\begin{matrix} f_x(x,y)\\ f_y(x,y)\end{matrix}\right\}\text{ Derivadas parciales}$$
- Al derivarse parcialmente respecto a una variable, la otra se mantiene constante:
$$f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\qquad \#\text{ y se mantiene constante}$$
$$f_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\qquad \#\text{ x se mantiene constante}$$
- Se pueden utilizar todas las reglas de derivación para funciones de 1 variable:
  - Suma
  - Producto
  - Cociente
  - Cadena
- 1 $^{\text{eras}}$ derivadas parciales de $f(x,y)$: encuentre todas las derivadas parciales posibles de f_x & f_y
  - Notación:
$$f_x=\frac{\delta f}{\delta x}=\frac{\delta z}{\delta x}$$
$$f_x=\frac{\delta f}{\delta y}=\frac{\delta z}{\delta y}$$
  - Evite $f'(x,y)$ para evitar ambigüedad.

1.1. Ejercicios

Encuentre las derivadas parciales de las siguientes funciones.

1. $f(x,y)=2x^2+3xy$: ***Recordar lo siguiente:*** $f_x(x,y)$ *&* $f_y(x,y)$
$$f_x=4x+3y\qquad f_y=0+3x$$
2. $g(x,y)=y(x^2+1)^3+x^2(y^4-4)^4+5x^2y^3$:
$$g_x=3y(x^2+1)^2 2x+2x(y^4-4)^4+10xy^3$$
$$g_y=1\cdot(x^2+1)^3+16y^3x^2(y^4-4)^3+15x^2y^2$$

3. $h(s,t) = (s^2+10t)^2 \cdot (t^4+s^3)^3:$ # Regla del producto y de la cadena.

$$h_s = 4s(s^2+10t)^1 \cdot (t^4+s^3)^3 + 3 \cdot 3s^2(s^2+10t)^2 \cdot (t^4+s^3)^2$$
$$h_t = 20(s^2+10t)^1 \cdot (t^4+s^3)^3 + 12t^3(s^2+10t)^2, .(t^4+s^3)^2$$

Evalúe la derivada en punto (a,b):

$$f_x(a,b) = \frac{\delta f}{\delta x}\Big|_{(a,b)}$$

1. $w(r,\theta) = r^2 \sin(2\theta) + e^{\pi r - \theta}$, encuentre $\frac{\delta w}{\delta \theta}\Big|_{(2,\pi)}$

$$\begin{aligned} \frac{\delta w}{\delta \theta} &= 2r^2\cos(2\theta) - e^{\pi r-\theta} \\ \frac{\delta w}{\delta \theta}\Big|_{(2,\pi)} &= w_\theta(2,\pi) = 2 \cdot 4\cos(2\pi) - e^{2\pi-\pi} \\ &= 8 - e^{\pi} \end{aligned}$$

2. Derivadas parciales par funciones de 2 o más variables

- Se deriva respecto a una variable y el resto se mantienen constantes.

$$w = f(x,y,z)$$

  3 1 eras derivadas parciales: f_x, f_y, f_z.

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

  n derivadas parciales:

$$\frac{\delta u}{\delta x}, \ldots \frac{\delta u}{\delta x_n}$$

2.1. Ejercicio

Encuentre todas las primeras derivadas pariales de las sigentes funciones:

- $f(x,y,z) = \sqrt[4]{x^4+8xz+2y^2}$

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{4}(x^4+8xz+2y^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot (4x^3+8z+0) \\ f_y &= \frac{1}{4}(x^4+8xz+2y^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot (4y) \\ f_z &= \frac{1}{4}(x^4+8xz+2y^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot (8x) \end{aligned}$$

- $p(r,\theta,\phi) = r \cdot \tan(\phi^2 - 4\theta):$

$$
\begin{aligned}
p_r &= \tan(\phi^2 - 4^\theta) \\
p_\theta &= -4r\sec^2(\phi^2 - 4\theta) \\
p_\phi &= 2\phi r\sec^2(\phi^2 - 4\theta)
\end{aligned}
$$

\# Funciones vectoriales 1 variable: $\vec{r}\,'(t), \ldots$

3. Derivadas parciales de orden superior (pág. 100)

- Orden superior: Segundas, terceras, cuartas, etc. derivadas.
- Como $f_x(x,y)$ & $f_y(x,y)$ son también funciones en dos variables, pueden tener derivadas parciales.

$$
\begin{tikzcd}
f_x \arrow[r] \arrow[dr] & f_{xx} & f_y \arrow[r] \arrow[dr] & f_{yy} \\
 & f_{xy} & & f_{yx}
\end{tikzcd}
$$

- Las segundas derivadas parciales, éstas también tienen sus derivadas parciales, terceras derivadas parciales.

$$
\begin{array}{cccc}
f_{xxx} & f_{xxy} & f_{yyy} & f_{yxy} \\
f_{xxy} & f_{xyx} & f_{yyx} & f_{yxx}
\end{array}
$$

- Las derivadas parciales cruzadas f_{xy} & f_{yx} son iguales si la función es diferenciable.

$$
f_{xy} = f_{yx} \qquad f_{xyy} = f_{yyx} = f_{yxy}
$$

- Notación delta:

$$
\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \qquad & f_{yy} &= \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \\
f_{xy} &= \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} \qquad & f_{yx} &= \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta y}
\end{aligned}
$$

3.1. Ejercicios

Encuentre todas las 2das derivadas parciales:

1. $f(x,y)=\sin(mx+ny) \quad m,n\in\mathbb{R}:$

Primeras derivadas parciales :

$$f_x = m\cos(mx+ny)$$
$$f_y = n\cos(mx+ny)$$

Segundas derivadas parciales:

$$f_{xx} = -m^2\sin(mx+ny)$$
$$f_{yy} = -n^2\sin(mx+ny)$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xy} &= -mn\sin(mx+ny) \\ f_{yx} &= -mn\sin(mx+ny) \end{aligned}\right\} \text{ Iguales}$$

2. $z=\cos(2xy)$:

$$\begin{aligned} 1^{\text{ eras}} &: \quad \frac{\delta z}{\delta x} = -2\sin(2xy), \quad \frac{\delta z}{\delta y} = -2x\sin(2xy) \\ 2^{\text{ das}} &: \quad \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = -4y^2\cos(2xy), \quad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = -4x^2\cos(2xy) \end{aligned}$$