Clase 2020-01-23

David Gabriel Corzo Mcmath

2020-Jan-23 10:33:52

1. 12.4 Producto Cruz

- ***Definición de "Determinantes":*** *Matriz (arreglo rectangular de números).*
- ***Definición de "Cuadrada":*** *Mismo número de filas y columnas.*
- $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

  # Determinante de orden 2. Matriz de 2x2
- pie:
  $$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-1)(4) = 6 + 4 = 10$$
- Determinante de orden 3: Matriz 3x3 suma de tres determinantes de orden 2:
  $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

  3 matrices de 2x2.
- p.e.
  $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
  $$2(6-0) - 0 + 2(-1-3) = 12 - 8 = 4$$

2. Producto Cruz

- Dados dos vectores :
  $$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$
  $$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$$
- **Nos preguntamos:** ¿Cómo se encuentra un vector $\vec{c}$ que es perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$?
  $$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$
  $$\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

- Resuelva para c_1, c_2, c_3 :

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0$$
$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 = 0$$

- El producto cruz $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = 0$ es un vector perpendicular a ambos vectores $\vec{a}$ & $\vec{b}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \hat{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \hat{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

- Observaciones:
  - El producto cruz es un vector, mientras que el producto es un número o escalar.
  - El producto cruz **no** es conmutativo $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$.

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(b_2 a_3 - a_2 b_3) + \hat{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \hat{k}(a_2 b_1 - a_1 b_2)$$

- Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{a} \times \vec{b} = 15\hat{i} - 10\hat{j} - 3\hat{k}$$

- Verifique $\vec{a} \times \vec{b}$ es ortogonal a $\vec{a}$ & a $\vec{b}$.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 2, 3, 0 \rangle = 30 - 30 + 0 = 0 \therefore \text{ son ortogonales}$$
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 1, 0, 5 \rangle = 15 + 0 - 15 = 0 \therefore \text{ son ortogonales}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp a_1 b$$

- Aclaración: en dos dimensiones $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ No es posible evaluarlo.

- Existen en tres dimensiones pero si se intenta evaluar en cuatro dimensiones la siguiente matriz no es posible:

En 3-D: $\exists$ En 4-D: $\nexists$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{l} \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

No es posible evaluarlo.

- Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 15\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}$$

Entonces... en general:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$