1. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z} = \dfrac{+2}{2z}$ en $(1,-1,4)$ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = +\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z} = \dfrac{+2}{2z}$ en $(1,-1,4)$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{4}$

Ec. plano tangente: $L(x,y) = z(1,-1) + z_x(x-1) + z_y(y+1)$

$$L(x,y) = 4 + \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(y+1)$$

2. Reescriba como $F(x,y,z) = \sec(zx) + \sin(yz) - \cos(yx) = 1.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{-z\sec(zx)\tan(zx) + y\sin(yx)}{x\sec(zx)\tan(zx) + y\cos(yz)}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{-z\cos(yz) - x\sin(yx)}{x\sec(zx)\tan(zx) + y\cos(yz)}$$

3. $w(y,x) = \tan^{-1}(yx)$, $x = e^{2t-6}$, $y = \ln(2t-5) + t - 2$, $t = 3.$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$ use $\dfrac{d}{du}\left(\tan^{-1}(Ku)\right) = \dfrac{K}{1+K^2u^2}$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{y}{1+y^2x^2}2e^{2t-6} + \frac{x}{1+y^2x^2}\left[\frac{2}{2t-5} + 1\right]$$

En $t = 3$ $x = e^{6-6} = 1$, $y = \ln(6-5) + 3 - 2 = 0 + 1 = 1$

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=1} \frac{1}{1+1}2\cdot 1 + \frac{1}{1+1}\left[\frac{2}{1} + 1\right] = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

La razón instantánea de cambio del Trabajo es de $\frac{5}{2}$. Joules/s.

4. $T(x,y,z) = x\sin(\pi yz)$, punto $(1,1,2)$, vector $(1,4,8)$.

La razón de cambio de la Temperatura es la derivada direccional.

$$D_u T = \nabla T \cdot \vec{u}$$

Gradiente: $\nabla T = \langle \sin(\pi yz), \pi xz\cos(\pi yz), \pi xy\cos(\pi yz) \rangle$

en el punto P. $\nabla T(1,1,2) = \langle \sin(2\pi), 2\pi\cos(2\pi), \pi\cos(2\pi) \rangle$

$$\nabla T(1,1,2) = \langle 0, 2\pi, \pi \rangle$$

Vector unitario $|\langle 1,4,8 \rangle| = \sqrt{1+16+64} = \sqrt{81} = 9$

$$\vec{u} = \frac{\langle 1,4,8 \rangle}{|\langle 1,4,8 \rangle|} = \frac{1}{9}\langle 1,4,8 \rangle$$

Razón de Cambio: $D_u T(1,1,2) = \langle 0, 2\pi, \pi \rangle \cdot \frac{1}{9}\langle 1,4,8 \rangle$

$$= \frac{1}{9}\left(0 + 8\pi + 8\pi\right) = \frac{16\pi}{9}$$

5. Demandas $x = 16 - p_A + p_B$ $\quad y = 24 - 2p_A - 4p_B.$

Costos $C(x,y) = 2x + 4y.$

Encuentre la función de utilidad y la utilidad máxima.

Utilidad = Ingresos − Costos $= p_A x + p_B y - (2x + 4y)$

Reemplace las funciones x & y en $U(x,y)$, simplifique U.

$$U(p_A, p_B) = p_A(16 - p_A + p_B) + p_B(24 - 2p_A - 4p_B)$$
$$- 2(16 - p_A + p_B) - 4(24 - 2p_A - 4p_B)$$

$$U(p_A, p_B) = 16p_A - p_A^2 + p_A p_B + 24p_B - 2p_A p_B - 4p_B^2$$
$$-32 + 2p_A - 2p_B - 96 + 8p_A + 16p_B.$$

$$U(p_A, p_B) = 26p_A - p_A^2 - p_A p_B - 4p_B^2 + 38p_B - 128$$

Puntos críticos. $U_{p_A} = U_{p_B} = 0$

$U_{p_A} = 26 - 2p_A - p_B = 0$
$U_{p_B} = 38 - p_A - 8p_B = 0$

$\Rightarrow$

$2p_A + p_B = 26 \quad -R_1$
$p_A + 8p_B = 38 \quad +2R_2$

$15p_B = 50 \Rightarrow p_B = \frac{10}{3}.$

$p_A = 38 - \frac{80}{3} = \frac{34}{3} \approx 11.\overline{33}$ & $p_B = \frac{10}{3} = 3.\overline{33}$

Cantidades: $x = 16 - \frac{34}{3} + \frac{10}{3} = 16 - 8 = 8$, $\quad y = 24 - \frac{68}{3} - \frac{40}{3} = -12.$

Prueba 2da Derivada: $D = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15 > 0$ y $U_{p_A p_A} < 0$

Hay un máximo relativo en el punto $\left(\frac{34}{3}, \frac{10}{3}\right)$

6. Presupuesto 20 mil

Periódicos x Televisión y.

Ventas $S = 80x^{1/4}y^{3/4}$

Utilidad $U = 0.10S$ - Presupuesto.

Función Utilidad: $U(x,y) = 8x^{1/4}y^{3/4} - 20,000$

Restricción $x + y = 20,000.$

Problema Optimización: Max $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 8x^{1/4}y^{3/4} - 2000 + \lambda(20000 - x - y)$

Encuentre el punto crítico.

$$\mathcal{L}_x = 2x^{-3/4}y^{3/4} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2x^{-3/4}y^{3/4} \quad (1)$$

$$\mathcal{L}_y = 6x^{1/4}y^{-1/4} - \lambda = 0 \qquad \lambda = 6x^{1/4}y^{-1/4} \quad (2)$$

$$\mathcal{L}_\lambda = 20000 - x - y = 0 \qquad x + y = 20000 \quad (3)$$

Iguale (1) y (2) y resuelva para x: ó para y.

$$\frac{2y^{3/4}}{x^{3/4}} = \frac{6x^{1/4}}{y^{1/4}} \Rightarrow 2y = 6x \Rightarrow y = 3x \quad (4)$$

Sustituya (4) en (3) y resuelva para x. $4x = 20,000$

$x = 5000$ & $y = 15,000$ $\qquad \lambda \approx 6 \sqrt[4]{\frac{5000}{15000}} = \frac{6}{\sqrt[4]{3}} \approx 4.56$

Se deben asignar ₡5000 en periódicos y ₡15,000 en televisión.

La utilidad máxima es

$$U(500,1500) = 8\underbrace{\sqrt[4]{500 \cdot (1500)^3}}_{9,118.02} - 20,000 \approx -10,881.97$$