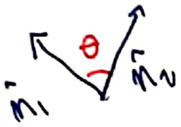
Corto #4 Cálculo Multivariable (15 min)

Nombre:____________________________________ **Carnet:** ____________

Resuelva los siguientes problemas:

1. Considere los planos $3x - 2y + z = 1$ y $2x + y - 3z = 3$.
   (a) (50 pts.) Encuentre el ángulo de intersección entre los dos planos.
   (b) (50 pts.) Encuentre la recta de intersección entre los dos planos.

a) 

$$\cos\theta = \frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1|\,|\hat{n}_2|} \qquad \hat{n}_1 = \langle 3, -2, 1\rangle \qquad \hat{n}_2 = \langle 2, 1, -3\rangle$$

$$\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2 = 6 - 2 - 3 = 1 \qquad |\hat{n}_1| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$
$$|\hat{n}_2| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{14} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{14}\right) \approx 86^\circ$$

b) Solución 1: Resuelva el sistema de ecuaciones.

R_1: $3x - 2y + z = 1$

R_2: $2x + y - 3z = 3 \Rightarrow y = 3 + 3z - 2x$

$R_1 + 2R_2$: $7x - 5z = 7 \Rightarrow x = 1 + \frac{5}{7}z$ $\qquad z = 7t.$ ✓

$x = 1 + 5t.$ ✓

$y = 3 + 21t - 2 - 10t = 1 + 11t.$ ✓

Ec. Vectorial $\boxed{\vec{r} = \langle 1, 1, 0\rangle + t\langle 5, 11, 7\rangle.}$ $\qquad V_1 = \langle \frac{5}{7}, \frac{11}{7}, 1 \rangle$

$$x = 1 + 5t$$
$$y = 1 + 11t$$
$$z = 7t.$$

Solución 2: Producto Cruz

$\hat{n}_1 = \langle 3, -2, 1 \rangle \qquad \hat{n}_2 = \langle 2, 1, -3 \rangle$

$\vec{v}$ tiene que ser perpendicular a $\hat{n}_1$ y a $\hat{n}_2$.

$$\vec{v} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 5\hat{\imath} + 11\hat{\jmath} + 7\hat{k} \quad \checkmark$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

$R_1: \; 3x - 2y + z = 1$

$R_2: \; 2x + y - 3z = 3$

$2R_1 - 3R_2: \; -7y + 11z = -7 \Rightarrow 7y = 11z + 7$

$$y = \frac{11}{7}z + 1$$

$z = t$

$y = \frac{11}{7}t + 1$

$x = \frac{5}{7}t + 1.$

$z = 0, \; y = 1 \Rightarrow 2x + 1 + 0 = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{2} = 1.$

$$\boxed{\vec{r} = \langle 1, 1, 0 \rangle + t\langle 5, 11, 7 \rangle}$$

Corto #4 Cálculo Multivariable (15 min)

Nombre:________________________ **Carnet:** ____________

Resuelva los siguientes problemas:

1. (50 pts.) Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto R. (6, 0, −2) y contiene a la recta $x = 4 - 2t,\ y = 3 + 5t,\ z = 7 + 4t$.

t=0 en la recta. t=1 en la recta

Dos pts. sobre la recta $P(4,3,7)$ y $Q(2,8,11)$

dos vectores sobre el plano $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$

$\overrightarrow{PQ} = \langle -2, 5, 4\rangle \qquad \overrightarrow{PR} = \langle 2, -3, -9\rangle$

$\hat{n}$ debe ser normal a $\overrightarrow{PQ}$ y a $\overrightarrow{PR}$

$$\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -33\hat{i} - 10\hat{j} - 4\hat{k} \quad \text{ó} \quad \langle 33, 10, 4\rangle.$$

Ec. Plano $\langle 33, 10, 4\rangle \cdot \langle x-6, y, z+2\rangle = 0.$

2. (50 pts.) Analice si las rectas $L_1: \ x = 1 + 2t,\ y = 2 + t,\ z = 4 + t$, $L_2: \ x = 5 - s,\ y = -1 + 2s,\ z = 11 - 3s$ tienen un punto de intersección.

L_1 y L_2 se intersectan entonces $x = x,\ y = y,\ z = z$

$$\left.\begin{aligned} 1 + 2t &= 5 - s \\ 2 + t &= -1 + 2s \\ 4 + t &= 11 - 3s \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} 2t + s &= 4 \\ t - 2s &= -3 \\ \hline R_1 - 2R_2: \quad 5s &= 10 \end{aligned} \Rightarrow s = 2$$

$t = -3 + 2s = 1$

3 ecs. y 2 incógnitas.

verifique que R_3 se satisface $4 + 1 = 11 - 6 \Rightarrow \boxed{5 = 5}$

Las rectas L_1 y L_2 se intersectan.

El punto de intersección es $(3, 3, 5)$

Bono (5 pts)