

# Cálculo Multivariable - Clases y apuntes de clase

David Gabriel Corzo Mcmath

2020-01-06

# Índice general

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 0.1.      | 12.1 Sistema tridimensional de coordenadas . . . . .  | 3         |
| <b>1.</b> | <b>Clase - 2020-01-23</b>   | <b>5</b>  |
| 1.1.      | 12.4 Producto Cruz . . . . .  | 6         |
| 1.2.      | Producto Cruz . . . . .   | 6         |
| <b>2.</b> | <b>Clase - 2020-01-28</b>   | <b>9</b>  |
| 2.1.      | 12.5 Rectas y planos . . . . .  | 10        |
| 2.1.1.    | Ejercicio 3: Encuentre las ecs. simétricas de la recta que pasa por los puntos dados.<br>Encuentre en qué punto la recta interseca al plano xz. pg.41 . . . . . | 10        |
| 2.2.      | Rectas paralelas . . . . .  | 11        |
| 2.2.1.    | Ejercicio 4: Determine si los siguientes pares de rectas son paralelas, oblicuas o se<br>intersecan. . . . .  | 11        |
| 2.3.      | La ecuación de un plano . . . . .   | 12        |
| 2.3.1.    | Derivación de la e. plano . . . . .   | 12        |
| 2.3.2.    | Ejercicio 1: pg45 Encuentre la ec. del plano que pasa por los 3 puntos dados. . . . .   | 13        |
| 2.4.      | Rectas paralelas $v_1$ y $v_2$ son paralelos . . . . .  | 14        |
| <b>3.</b> | <b>Clase - 2020-01-30</b>   | <b>15</b> |
| 3.1.      | Resolución de corto . . . . .   | 16        |
| 3.2.      | Rectas y planos . . . . .   | 16        |
| 3.2.1.    | Ejercicios . . . . .  | 16        |
| <b>4.</b> | <b>Clase - 2020-02-04</b>   | <b>20</b> |
| 4.1.      | 13.1 Funciones vectoriales y curvas en el espacio . . . . .   | 21        |
| 4.1.1.    | Ejercicios . . . . .  | 21        |
| 4.2.      | Limites y continuidad . . . . .   | 22        |
| 4.2.1.    | Ejercicios . . . . .  | 22        |
| 4.3.      | Curvas en el espacio . . . . .  | 23        |
| 4.3.1.    | Espirales . . . . .   | 23        |
| <b>5.</b> | <b>Clase - 2020-02-06</b>   | <b>25</b> |
| 5.1.      | 13.2 Cálculo con funciones vectoriales, pg.55 . . . . .   | 26        |
| 5.1.1.    | Derivadas . . . . .   | 26        |
| 5.1.2.    | Integrales . . . . .  | 26        |
| 5.2.      | Ejercicios . . . . .  | 26        |
| 5.3.      | Recordatorios & rectas tangentes de funciones vectoriales . . . . .   | 27        |
| 5.4.      | Ejercicios . . . . .  | 27        |
| <b>6.</b> | <b>Clase - 2020-02-11</b>   | <b>29</b> |
| 6.1.      | 13.2 Cálculo de funciones vectoriales . . . . .   | 30        |
| 6.2.      | Ejercicios de integración . . . . .   | 30        |
| 6.3.      | Movimiento en el espacio . . . . .  | 31        |
| 6.3.1.    | Ejercicios . . . . .  | 31        |
| 6.4.      | 13.3 Longitud de arco . . . . .   | 33        |

|   |           |
|---|-----------|
| 6.5. Ejercicios . . . . .   | 34        |
| <b>7. Clase - 2020-02-11</b>  | <b>35</b> |
| 7.1. Resolución de corto . . . . .                                      | 36        |
| 7.2. 14.1 Funciones de varias variables . . . . .                       | 36        |
| 7.3. Ejercicios . . . . .   | 37        |
| 7.3.1. Gráfica de $z = f(x, y)$ . . . . .                               | 38        |
| 7.4. Curva de nivel o traza horizontal . . . . .                        | 38        |
| <b>8. Clase - 2020-02-20</b>  | <b>39</b> |
| 8.1. 14.3 Derivadas parciales . . . . .                                 | 40        |
| 8.1.1. Ejercicios . . . . .   | 40        |
| 8.2. Derivadas parciales par funciones de 2 o más variables . . . . .   | 41        |
| 8.2.1. Ejercicio . . . . .  | 41        |
| 8.3. Derivadas parciales de orden superior (pág. 100) . . . . .         | 42        |
| 8.3.1. Ejercicios . . . . .   | 42        |
| <b>9. Clase - 2020-02-27</b>  | <b>44</b> |
| 9.1. Derivadas parciales, rectas tangentes y planos tangentes . . . . . | 45        |
| 9.1.1. Interpretación de la derivada parcial . . . . .                  | 45        |
| 9.1.2. Ejercicios . . . . .   | 45        |
| 9.2. Aproximaciones lineales . . . . .                                  | 46        |
| 9.2.1. Ejercicios . . . . .   | 46        |
| 9.3. 12.4 Derivadas implícitas y 12.5 Regla de la cadena . . . . .      | 47        |
| 9.3.1. Derivación parcial implícita abreviada . . . . .                 | 47        |
| 9.3.2. Ejercicios . . . . .   | 48        |
| <b>10. Clase - 2020-03-10</b>   | <b>49</b> |
| 10.1. Parcial 2 . . . . .   | 50        |
| 10.2. 14.7 Máximos y mínimos . . . . .                                  | 50        |
| 10.2.1. En funciones de una variable . . . . .                          | 50        |
| 10.2.2. En funciones de dos variables . . . . .                         | 51        |
| 10.2.3. Ejercicios máximos y mínimos . . . . .                          | 51        |
| <b>11. Clase - 2020-03-12</b>   | <b>55</b> |
| 11.1. 14.8 Multiplicadores de Lagrange . . . . .                        | 56        |
| 11.1.1. Ejercicios . . . . .  | 56        |
| 11.1.2. Aplicaciones a la economía y negocios . . . . .                 | 58        |

## 0.1. 12.1 Sistema tridimensional de coordenadas

- Para localizar un punto en un plano, se necesitan dos números.
- Los ejes de coordenadas son perpendiculares entre sí.
- En el sistema tridimensional de coordenadas rectangulares, cada punto en el espacio es una terna ordenada.

Espacio:  $\mathbb{R}^3 \{ (x, y, z) \mid \text{Talque } x, y, z \in \mathbb{R}. \}$

&

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

- Sistema 2-D vs. 3-D:
- Las líneas punteadas se usan para simbolizar las partes debajo, izquierda y detrás.

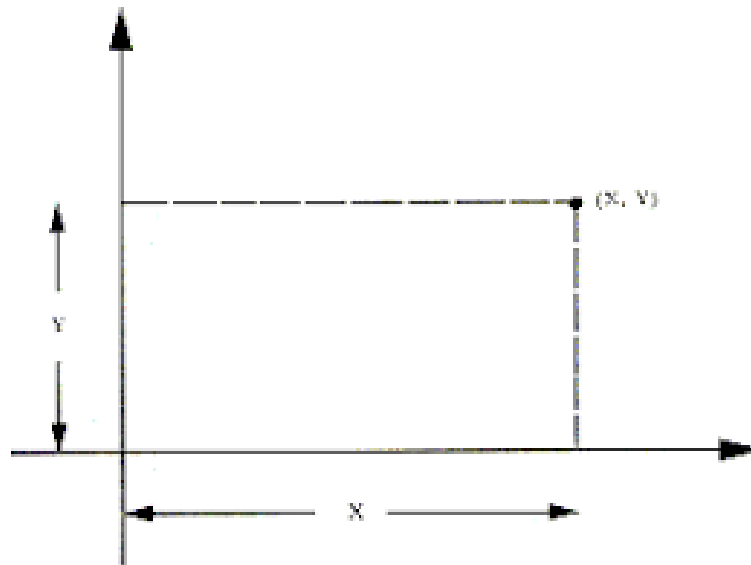


Figura 1:

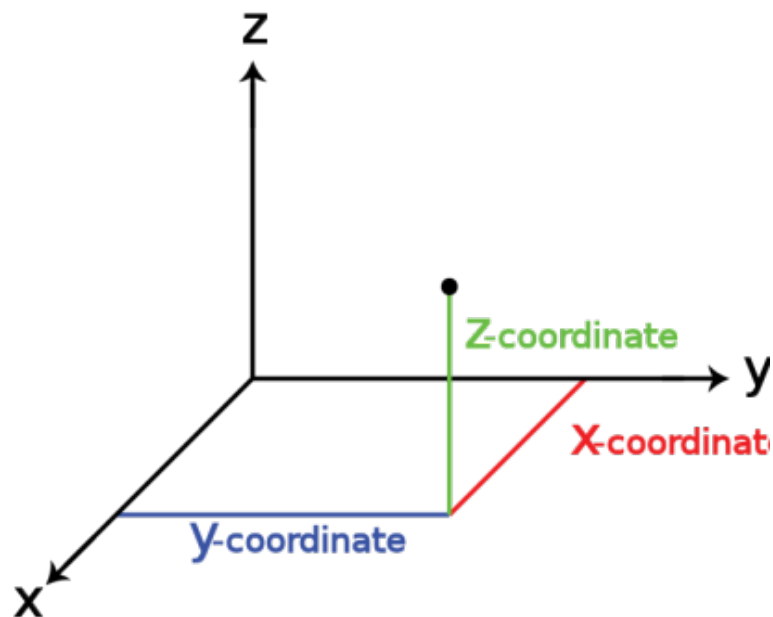


Figura 2:

# Capítulo 1

Clase - 2020-01-23

## 1.1. 12.4 Producto Cruz

- **Definición de “Determinantes”:** Matriz (arreglo rectangular de números).
- **Definición de “Cuadrada”:** Mismo número de filas y columnas.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

# Determinante de orden 2. Matriz de 2x2

- pie:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-1)(4) = 6 + 4 = 10$$

- Determinante de orden 3: Matriz 3x3 suma de tres determinantes de orden 2:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

3 matrices de 2x2.

- p.e.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$2(6 - 0) - 0 + 2(-1 - 3) = 12 - 8 = 4$$

## 1.2. Producto Cruz

- Dados dos vectores :

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

$$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cómo se encuentra un vector  $\vec{c}$  que es perpendicular a  $\vec{a}$  y a  $\vec{b}$ ?

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

- Resuelva para  $c_1, c_2, c_3$  :

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0$$

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 = 0$$

- El producto cruz  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = 0$  es un vector perpendicular a ambos vectores  $\vec{a}$  &  $\vec{b}$ .

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \hat{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \hat{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

- Observaciones:

- El producto cruz es un vector, mientras que el producto es un número o escalar.
- El producto cruz **no** es conmutativo  $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$ .

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(b_2 a_3 - a_2 b_3) + \hat{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \hat{k}(a_2 b_1 - a_1 b_2)$$

- Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{a} \times \vec{b} = 15\hat{i} - 10\hat{j} - 3\hat{k}$$

- Verifique  $\vec{a} \times \vec{b}$  es ortogonal a  $\vec{a}$  & a  $\vec{b}$ .

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 2, 3, 0 \rangle = 30 - 30 + 0 = 0 \therefore \text{son ortogonales}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 1, 0, 5 \rangle = 15 + 0 - 15 = 0 \therefore \text{son ortogonales}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp a_1 b$$

- Aclaración: en dos dimensiones  $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$  No es posible evaluarlo.

- Existen en tres dimensiones pero si se intenta evaluar en cuatro dimensiones la siguiente matriz no es posible:

$$\text{En 3-D: } \exists \text{ En 4-D: } \nexists$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{l} \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

No es posible evaluarlo.

■ Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ = 15\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}$$

Entonces... en general:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$



# Capítulo 2

Clase - 2020-01-28

## 2.1. 12.5 Rectas y planos

- Ecuación de una recta
- Vector posición  $\vec{r}_0 = \langle x_0, y, z_0 \rangle$
- Vector dirección  $\vec{v}_0 = \langle a, b, c \rangle$
- Ecuación vectorial:  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$  donde  $t$  es el parámetro.
- Ecuaciones paramétricas:

$$x = x_0 + at$$

$$y = y_0 + bt$$

$$z = z_0 + ct$$

- Resuelva para  $t$  en las tres ecuaciones:

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Estas son las ecuaciones simétricas de la recta donde  $a, b, c \neq 0$ .

- Vector dirección  $\vec{v} = \langle a, 0, c \rangle$  las ecuaciones en la recta cambian:

$$\underbrace{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}}_{\text{Vectorial}}$$

$$x = x_0 + at$$

$$y = y_0$$

$$z = z_0 + ct$$

Entonces queda así:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\underbrace{y = y_0}_{\text{Simétrica}}$$

**2.1.1. Ejercicio 3: Encuentre las ecs. simétricas de la recta que pasa por los puntos dados. Encuentre en qué punto la recta interseca al plano xz.**  
pg.41

- P(2,8,-2) & Q(2,6,4)

$$\text{Vector posición} = \overrightarrow{OP} = R_0 = \langle 2, 6, 7 \rangle$$

$$\text{Vector dirección } \overrightarrow{PQ} = \vec{V} = \langle 0, -2, 6 \rangle$$

$$\text{Ec. vectorial} = \vec{r} = \langle 2, 8, -2 \rangle + t\langle 0, -2, 6 \rangle$$

$$\text{Ecs. simétricas} = x = a, \frac{y - 8}{-2} = \frac{z + 2}{6}$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cual es la intersección con el plano  $xz$ ?

$$\begin{aligned}\text{Use, } y=0x=2, \frac{-8}{-2} &= \frac{z+2}{6} \\ &= 6 \cdot 4 = z+2 \implies z=22\end{aligned}$$

- La intersección con el plano  $xz$  es el punto  $(1, 0, 22)$ :

$$\begin{aligned}\vec{r}_0 &= \langle 4, 6, 10 \rangle \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ} &= \langle 2, 0, 0 \rangle \\ \text{Vectorial: } \vec{r} &= \langle 4, 6, 10 \rangle + t\langle 2, 0, 0 \rangle \\ \text{Paramétricas: } x &= 4 + 2t, y = 6, z = 10 \\ \text{Simétricas: } t &= \frac{x-4}{2}, y = 6, z = 10\end{aligned}$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cual es el punto de intersección con el plano  $xz$ ?

$$\text{Use: } y=0$$

Explicación: por la recta  $y = 6$  siempre será 6, nunca podrá ser 0, no puede intersecar con el plano  $xz$ , **No hay**.

## 2.2. Rectas paralelas

Dos rectas  $\vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + t\vec{v}$  &  $\vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + t\vec{v}_2$  son paralelas si y solo si sus vectores de dirección  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  son paralelas.

Figura 2.1:

Entonces en el espacio tenemos 3 tipos de rectas:

1. Rectas paralelas
2. Rectas intersecan en un punto
3. Rectas Ubicuas (no paralelas & no intersecan)

### 2.2.1. Ejercicio 4: Determine si los siguientes pares de rectas son paralelas, oblicuas o se intersecan.

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{8} = \frac{y-3}{24} = \frac{z-2}{16}, \frac{x-10}{-2} = \frac{y+15}{-6} = \frac{z+24}{-4} \\ \vec{v}_1 = \langle 8, 24, 16 \rangle, \vec{v}_2 = \langle -2, -6, -4 \rangle \\ \text{Entonces... } \left\langle \frac{8}{-2}, \frac{24}{-6}, \frac{16}{-4} \right\rangle \\ \langle -4, -4, -4 \rangle, \therefore \text{ Son paralelas}\end{aligned}$$

El vector dirección está en el denominador.

■

$$L_1 : x = 3 - 4t, y = 6 - 2t, z = 2 + 0t, t \in \mathbb{R}$$

$$L_2 : x = 3 + 8s, y = -2s, z = 8 + 2s, s \in \mathbb{R}$$

Utilice una variable parámetro para cada recta

$$v_1 = \langle -4, -2, 0 \rangle, v_2 = \langle 8, -2, 2 \rangle \text{ No son paralelas}$$

Analice si las rectas se intersecan

$$x = x \rightarrow 5 - 4t = 3 + 8s$$

$$y = y \rightarrow 6 - 2t = -2s$$

$$z = z \rightarrow 2 = 8 + 2s \rightarrow s = -3$$

$$5 - 4 = -22 \rightarrow 4t = -27 \rightarrow -4t = -27 \Rightarrow \frac{27}{4}$$

$$6 - 2t = 6 \rightarrow 2t = 0 \rightarrow t = 0$$

$\therefore$  Como no hay una  $t$  única (no es posible  $0 \neq \frac{27}{4}$ ), las dos rectas no se intersecan.

$L_1$  &  $L_2$  Son oblicuas

Eliminación Gaussiana

$$\begin{array}{rcl} 4t + 8s = 2 & \left| \begin{array}{ccc} 4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -6 \end{array} \right| & 0, 0, \text{ número} \implies \text{No hay solución} \\ 2t + 2s = 6 & & \\ 0t + 2s = -6 & & \end{array}$$

## 2.3. La ecuación de un plano

Previamente en 12.1  $ax + by + cz = 0$ . Para encontrar la ec. de un plano se necesita:

Figura 2.2:

1. Un punto sobre el plano  $P$ :  $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP}$
2. Un vector normal u ortogonal al plano:  $\hat{n}_0 \langle a, b, c \rangle$

### 2.3.1. Derivación de la e. plano

$P(x_0, y_0, z_0), Q(x_1, y_1, z_1)$  Son dos puntos sobre el plano

$$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OQ} = \langle x, y, z \rangle$$

El vector  $\vec{RP} = \vec{r} - \vec{r}_0$  está sobre el plano, por lo que tiene que ser ortogonal a  $\hat{n}$ .

$$\hat{n} \perp \vec{r} - \vec{r}_0 \rightarrow \underbrace{\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}_{\text{Ec. vectorial de un plano}}$$

Se puede reescribir como:

$$\underbrace{\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x + x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle + c(z - z_0) = 0}_{\text{Ecuación escalar de un plano}}$$

$$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_0$$

Para encontrar la ec. de un plano se necesita 3 puntos P,Q,R: **hay infinitas respuestas equivalentes**  
 $\hat{n} = \vec{r} \times \vec{r}$

$$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$$

$$\hat{n} = \underbrace{\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}}_{\text{Tienen que empezar en el mismo punto}}$$

Hat infinitas respuestas:

$$\hat{n} = \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ}$$

### 2.3.2. Ejercicio 1: pg45 Encuentre la ec. del plano que pasa por los 3 puntos dados.

1.  $P(3, -1, 3), Q(8, 2, 4), R(1, 2, 5)$

$$\text{Ecuación del plano : } \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\text{Ecuación de la recta : } \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

$$\vec{r}_0 = \langle 8, 2, 4 \rangle$$

Encuentre dos vectores que están sobre el plano y que comiencen en el mismo punto.

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle 5, 3, 1 \rangle, \vec{v} = \overrightarrow{PR} = \langle -2, 3, 2 \rangle$$

ii  $\hat{n}$  es ortogonal a ambos vectores !!

$$\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 12\hat{j} + 21\hat{k}$$

$$\text{Ec. Plano, } \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\text{Ec. Vectorial, } \langle 3, -12, 21 \rangle \cdot \langle x - 8, y - 2, z - 4 \rangle = 0$$

$$\text{Escalar, } 3(x - 8) -$$

2.  $P(0,0,0), Q(1,0,2), \text{ y } R(0,2,3)$

Vector posición:  $\vec{r}_0 = \langle 0, 0, 0 \rangle$

dos vectores sobre el plano:  $\vec{PQ} = \langle 1, 0, 2 \rangle$   
 $\vec{PR} = \langle 0, 2, 3 \rangle$

$$\begin{aligned} \text{Vector normal: } \hat{n} &= \vec{PQ} \times \vec{PR} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

3. Ecuación del plano:

$$-4x - 3y + 2z = 0$$

## 2.4. Rectas paralelas $v_1$ y $v_2$ son paralelos

Dos planos  $\hat{n}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$  y  $\hat{n}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = 0$  son paralelos sí y sólo si  $\hat{n}_1$  y  $\hat{n}_2$  son paralelos. En caso que no sean paralelos, se puede encontrar el ángulo de intersección entre dos planos.

# Capítulo 3

Clase - 2020-01-30

### 3.1. Resolución de corto

- Determine el área del triángulo entre los puntos P(), Q(), R():

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \overrightarrow{PQ} = \langle 4, 3, -2 \rangle \\ \vec{b} &= \overrightarrow{PR} = \langle 5, 5, 1 \rangle \\ \text{Área} &= \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| \\ \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} &= 13\hat{i} - 14\hat{j} + 5\hat{k} \\ \text{Área} &= \frac{1}{2} \sqrt{13^2 + 14^2 + 5^2}\end{aligned}$$

### 3.2. Rectas y planos

- Ecs. Rectas:  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

$$\text{si } a \neq b \neq c \neq 0 \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

- Paramétricas:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct\end{aligned}$$

- Ecuación de plano:

$$\begin{aligned}\hat{n} &= \vec{r} - \vec{r}_0 \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\ \hat{n} &= \vec{a} \times \vec{b}\end{aligned}$$

#### 3.2.1. Ejercicios

1. Considere los planos  $x + y = 0$  &  $x + 2y + z = 1$ .

a) Determine si los planos son paralelos o no lo son encuentre el ángulo entre ellos:



$$\hat{n}_1 = \langle 1, 1, 0 \rangle$$

$$\hat{n}_2 = \langle 1, 2, 1 \rangle$$

$\therefore$  Los dos planos no son paralelos

- El  $\hat{n}_1$  &  $\hat{n}_2$  no son necesariamente ortogonales.

$$\cos \theta = \frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1| |\hat{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

2. Encuentre la ec. de la recta que interseca a ambos planos  $x + y = 0$  &  $x + 2y + z = 1$ :

$$r = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

Dos puntos sobre la recta

Como la recta esta en ambos planos, se debe resolver el sig. sistema de ecuaciones

$$x + y = 0 \implies x = -y$$

$$x + 2y + z = 1 \implies y = z - 1$$

z tiene cualquier valor, ahora encontrar escogiendo cualquier punto sobre la recta, en este caso 0

$$\text{Primer punto} \quad z = 0$$

$$y = 1$$

$$x = -1$$

$$\therefore \langle -1, 1, 0 \rangle$$

$$\text{Segundo punto} \quad z = 1$$

$$y = 0$$

$$x = 0$$

$$\therefore \langle 0, 0, 1 \rangle$$

3. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por  $P(-1, 1, 0)$  y  $Q(0, 0, 1)$ :

$$\vec{r}_0 = \langle 0, 0, 1 \rangle \langle -1, 1, 0 \rangle$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{QP} \langle -1, 1, -1 \rangle$$

Ecuaciones paramétricas de la recta:

$$x = 0 - t \quad y = 0 + t \quad z = 1 - t$$

4. Solución alterna:

$$\begin{aligned}
 x &= -y & y &= 1 - z & \text{Más incógnitas que ecuaciones.} \\
 x, y &\text{ ó } z & \text{ pueden tener cualquier valor} & & z = t \\
 x &= -1 + t \\
 y &= 1 - t & \therefore v_2 = \langle 1, -1, 1 \rangle & & \vec{r}_0 = \langle -1, 1 - 0 \rangle \\
 t &= t
 \end{aligned}$$

5. Solución geométrica:

- Encuentre un punto en ambos planos (0,0,1).
- La recta está en el plano I, entonces la recta es perpendicular al vector normal del plano I.
- Está en el plano z, entonces también es perpendicular al segundo vector normal.
- $\therefore$  la recta es perpendicular a ambos  $\hat{n}_1$  &  $\hat{n}_2$

$$\vec{v} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\text{Ecuación de la recta: } r = \langle 0, 0, 1 \rangle + t \langle 1, -1, 0 \rangle$$

6. Ejercicio 3: Encuentre el punto en el que la línea recta  $x = 1 + 2t$ ,  $y = 4t$ ,  $z = 5t$  interseca al plano.  $x - y + 2z = 17$ .

$$\begin{aligned}
 x &= 1 + 2t \\
 y &= 4t \\
 z &= 5t
 \end{aligned}$$

Plano

$$\begin{aligned}
 x - y + 2z &= 17 & 1 + 2t - 4t + 10t &= 17 \\
 8t &= 16 & \implies \therefore t &= 2
 \end{aligned}$$

El punto de intersección es (5,8,10).

7. Ejercicio 4: Encuentre una ec. del plano que contiene la recta  $x = 1 + t$ ,  $y = 2 - t$ ,  $z = 4 - 3t$  y es paralela al plano  $5x + 2y + z = 1$ .

- Cualquier punto sobre la recta que también esté sobre el plano,  $t = 0$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Evaluemos en } t=0 & & x &= 1, y = 2, z = 4 \\
 & & \vec{r}_0 &= \langle 1, 2, 4 \rangle
 \end{aligned}$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cómo se encuentra  $\hat{n}$ ?
- El vector de dirección de la recta  $v = \langle 1, -1, -3 \rangle$  es paralelo al plano.

- Como es paralelo al segundo plano, entonces tiene que ser perpendicular  $\hat{n}_2 = \langle 5, 2, 1 \rangle$
- Lo que ocurre entonces es:

$$\vec{r}_0 = \langle 1, 2, 4 \rangle \quad \hat{n} = \langle 5, 2, 1 \rangle$$

$$\text{Ec. Plano: } \implies 5(x-1) + 2(y-2) + 1(z-4) = 0$$

8. Ejercicio 5: Encuentre los números directores para la recta de intersección entre los planos  $x+y+z=1$  &  $x+2y+3z=1$ .

- **Definición de “numeros directores”:**  $a, b, c$  del vector de dirección  $\langle a, b, c \rangle$
- La recta es ortogonal a ambos vectores normales:

$$\hat{n}_1 = \langle 1, 1, 1 \rangle \quad \hat{n}_2 = \langle 1, 2, 3 \rangle \quad \text{de ambos planos}$$

$$\vec{v} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

Los números directores:  $a = 1, b = 2, c = 1$

9. Ejercicio 6: Encuentre las ecs. aparmétricas de la recta que pasa por el punto  $(0,1,2)$ , que es paralelo al plano  $x+y+z=2$  y es perpendicular a la recta  $r = \langle -2t, 0, 3t \rangle$ .

$$L_1 r = \vec{r}_0 + t\vec{v} \quad r_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle$$

- Aclaraciones:  $L_1$  es la incógnita que tenemos que encontrar.
- **Nos preguntamos:** ¿Cómo se encuentra  $r$ ?
- Plano I:  $\hat{n} = \langle 1, 1, 1 \rangle$  es perpendicular al plano, es paralelo a  $L_1$ .
- Recta II:  $\hat{v}_2 = \langle -2, 0, 3 \rangle$  es perpendicular a  $L_1$
- La recta es perpendicular a  $\hat{n}$  y a  $\vec{v}_2$

$$\vec{v} = \hat{n} \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$r_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle$$

$$\vec{v} = \hat{v}_2 \times \hat{n} \quad \text{Ecuaciones paramétricas:}$$

$$x = 0 - 3t$$

$$y = 1 - 5t$$

$$z = 2 + 2t$$

# Capítulo 4

Clase - 2020-02-04

## 4.1. 13.1 Funciones vectoriales y curvas en el espacio

- Una función vectorial  $\vec{r}: R \Rightarrow V_3$ :

$$\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), z(t) \rangle$$

La variable  $t$  es un parámetro.

- Dominio: Números reales, Rango: vector 3D:

$$\vec{r}: \mathbb{R} \Rightarrow V_3 \quad \vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$$

$$t \text{ es un parámetro} \quad \vec{r} = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$$

- Ejemplo de una función vectorial:

$$\vec{r} = \langle a, b, c \rangle + t \langle d, e, f \rangle$$

$$\vec{r} = \langle a + td, b + et, c + tf \rangle$$

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

- Ecs. Paramétricas de una función vectorial:

- Dominio de una función vectorial: encuentre el dominio de cada función componente. El dominio de  $\vec{r}$  es la intersección de los dominios de cada función componente.

### 4.1.1. Ejercicios

1. Encuentre el dominio:

$$r(t) = \langle \sqrt{t^2 - 9}, e^{5 \ln(t)}, \ln(t + 5) \rangle$$

Evadir raíces negativas, y  $\ln(0)$

$$\sqrt{t^2 - 9} \Rightarrow \text{Definida } t^2 \geq 9$$

$e^{\sin(t)}$  siempre definida

$$\ln(t + 5) \text{ Definida cuando } t + 5 > 0 \quad (-5, \infty)$$

$$\therefore \text{ El dominio es de } (-5, \infty) \cup (-5, -3) \cup (-3, 3) \cup [3, \infty)$$

- Recordar:  $[a, b]$  el número si es parte del dominio  $a, b$  son partes del dominio.  $(a, b)$  los puntos  $a, b$  no son parte del dominio.

2.

$$\vec{s}(t) = \left\langle \sin^3(t^2), \cosh\left(\frac{t}{t^2 + 1}\right), \frac{1}{e^t + 4} \right\rangle$$

$$\sin^3(t^2), ID_{f(t)} = IR$$

$$\cosh\left(\frac{t}{t^2 + 1}\right), ID_{g(t)} = IR$$

$$\frac{1}{e^t + 4}, ID_{h(t)} = IR$$

$$\therefore \text{ Dominio de } \vec{s}(t) = (-\infty, \infty)$$

$$e^t + 4 \neq 0 \Rightarrow e^t = -4 \Rightarrow t = \underbrace{\ln(-4)}_{\text{indefinido}}$$

## 4.2. Límites y continuidad

■

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \left\langle \lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \right\rangle$$

- Evalúe el límite de cada función componente.
- Si no existe por lo menos un límite de una función componente, entonces  $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t)$  no existe.
- $f(t)$  está definida en  $t=a$

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$$

- Si se indefine y tiene forma de  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$  usar L'Hôpital.

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} \underbrace{=}_{\frac{0}{0}} \lim_{t \rightarrow a} \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad \text{L'Hopital}$$

- Continua en  $t = a$  si  $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$
- Evite asíntotas verticales, saltos y agujeros. Ejemplo:

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{\sin(x)}{x} \underbrace{=}_{\text{LH}} \lim_{t \rightarrow a} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

### 4.2.1. Ejercicios

- Sea  $\vec{r}(t) = \left\langle \frac{\tan(\pi t)}{t}, e^{t-2}, \frac{\ln(t-1)}{t^2-1} \right\rangle$ .
- Analice si la función  $\vec{r}(t)$  es continua en  $t = 2$ .

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \left\langle \frac{\tan 2\pi}{2}, e^0, \frac{\ln(1)}{3} \right\rangle \\ \lim_{t \rightarrow 2} \underbrace{\frac{\tan \pi t}{t}}_{\frac{0}{2}} &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow 2} e^{t-2} &= 1 \\ \lim_{t \rightarrow 2} \frac{\ln(t-1)}{t^2-1} &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{r} \text{ si es continua en } t=2 \quad \lim_{t \rightarrow 1} \vec{r}(t) = \vec{r}(2)$$

- Encuentre  $\lim_{t \rightarrow 1} \vec{r}(t)$  analice el límite de cada función componente por separado.

$$\begin{aligned} f &: \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\tan 2\pi}{2} = \frac{0}{1} \\ g &: \lim_{t \rightarrow 1} e^{t-2} = e^{-1} \end{aligned}$$

$$h : \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(t-1)}{t^2-1} = \text{No existe, por } \ln(0) \text{ estar indefinido.}$$

- Analice si  $\vec{r}(t)$  es continua en  $t=1$ .

$$\lim_{t \rightarrow 1} \vec{r}(t) = \vec{r}(1)$$

No es continua en  $t=1$ ,  $\vec{r}(1)$  está indefinida.

- Agujero  $\vec{s}(t) = \left\langle \frac{\tan \pi t}{t-1}, e^{t-2}, \frac{\ln(2t-1)}{t^2-1} \right\rangle$

No es continua en  $t=1$ , pero su límite existe.

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\tan \pi t}{t-1} \underbrace{=}_{LH} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\pi \sec^2 \pi t}{1} = \frac{\pi}{(\cos \pi)^2} = \pi$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} e^{t-2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(2t-1)}{t^2-1} \underbrace{=}_{\frac{0}{0}} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{2t-1}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2}{2t(2t-1)} = \frac{1}{1(2-1)} = 1$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1} \left\langle \pi, \frac{1}{e}, 1 \right\rangle \quad \text{es un agujero } \vec{s}(1) \text{ está indefinido}$$

## 4.3. Curvas en el espacio

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)$$

$$z = h(t)$$

Figura 4.1: Curvas paramétricas en el espacio

### 4.3.1. Espirales

- Grafique la curva  $\vec{r}(t)$ :

$$\vec{r}(t) = \underbrace{2\hat{i} \sin(t)}_x + \underbrace{2\hat{j} \cos(t)}_y + \underbrace{\hat{k} \frac{t}{\pi}}_z$$

| $t$              | $x$ | $y$ | $z$ |
|------------------|-----|-----|-----|
| 0                | 0   | 2   | 0,5 |
| $\frac{\pi}{2}$  | 2   | 0   | 0,5 |
| $\pi$            | 0   | -2  | 1   |
| $\frac{3\pi}{2}$ | 2   | 0   | 1,5 |
| $2\pi$           | 0   | 2   | 2   |

Figura 4.2: Curva paramétrica

- Grafique:

$$\vec{r}(t) = \langle \sin \pi t, t, \cos \pi t \rangle$$

Graficar la circunferencia  $x^2 + z^2 = 1, y = 0$

$\vec{r}(0) = \langle 0, 0, 1 \rangle$  El vector que nos servirá para delimitar la gráfica del espiral

Por ejemplo:  $\vec{s}(t) = \langle \sin t, t^2, \cos t \rangle$



# Capítulo 5

Clase - 2020-02-06

## 5.1. 13.2 Cálculo con funciones vectoriales, pg.55

- Derivadas:

$$\vec{r}'(t) \quad \text{Respecto a } t$$

- Integrales:

$$\int \vec{r}'(t) dt \quad \text{Respecto a } t$$

### 5.1.1. Derivadas

- 

$$\vec{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$$

- Como la función  $\vec{r}(t)$  está definida por tres funciones componentes se puede hacer:

$$\vec{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\langle \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}_{f'(t)}, \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}}_{g'(t)}, \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(t+h) - h(t)}{h}}_{h'(t)} \right\rangle$$

- Derivada entonces es :

$$\vec{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

### 5.1.2. Integrales

- Integral:

$$\int \vec{r}(t) dt = \int (f\hat{i} + g\hat{j} + h\hat{k}) dt$$

$$\hat{i} \int f dt + \hat{j} \int g dt + \hat{k} \int h dt$$

Integrar la función componente.

## 5.2. Ejercicios

- Encuentre la 1era y segunda derivada de las siguientes funciones:

$$\vec{r}(t) = \langle \sin(4t), t^2, \ln(\sin(t)) \rangle$$

$$\vec{r}'(t) = \left\langle 4 \cos(4t), 2t, \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \right\rangle$$

$$\vec{r}'(t) = \langle 4 \cos(4t), 2t, \cot(t) \rangle$$

$$\vec{r}''(t) = \langle f''(t), g''(t), h''(t) \rangle$$

$$\therefore \vec{r}''(t) = \langle -16 \sin(4t), 2, -\csc^2(t) \rangle$$

2. Derive:  $\vec{s}(t) = \hat{i} \tan(4t) + \hat{j} \ln(4t + 1) + \hat{k}(5 - 2t)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}\vec{s}'(t) &= 4\hat{i}(\sec(4t))^2 + \hat{j}4(4t + 1)^{-1} - \hat{k}(5 - 2t)^{-\frac{1}{2}} \\ \vec{s}''(t) &= 8\hat{i} \times \sec(4t) \times \sec(4t) \times \tan(4t) \times 4 - 16\hat{j}(4t - 1)^{-2} - \frac{\hat{k}}{2}(5 - 2t)^{-\frac{3}{2}} \times (-2) \\ \vec{s}'''(t) &= 32\hat{i} \times \sec^2(4t) \times \tan(4t) - 16\hat{j}(4t - 1)^{-2} - \frac{\hat{k}}{2}(5 - 2t)^{-\frac{3}{2}} \times (-2)\end{aligned}$$

### 5.3. Recordatorios & rectas tangentes de funciones vectoriales

- **Recordar lo siguiente:**  $f'(a)$  es igual a la pendiente de la recta tangente a  $f(x)$  en  $x = a$ .
- **Recordar lo siguiente:** La recta tangente.

$$L_1: \quad y = f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{Ec. Recta Tangente}$$

- Con una función vectorial:

$$\vec{r} = \langle f, g, h \rangle, \quad x = f(t), y = g(t), z = h(t)$$

Hay ecuaciones paramétricas para cada variable:

$$\vec{r}'(a) = \langle f'(a), g'(a), h'(a) \rangle$$

Vector de pendientes de rectas tangentes a la curva  $\vec{r}(t)$ .

- La derivada de una función vectorial se le da el nombre de “**vector tangente**”  $\vec{r}(t) : \vec{r}'(a)$ .
- Recta tangente: es ahora una función vectorial.

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(a) + \vec{r}'(a)t$$

- Ecs. Paramétricas:

$$\begin{aligned}x &= f(a) + f'(a)t \\ y &= g(a) + g'(a)t \\ z &= h(a) + h'(a)t\end{aligned}$$

- Vector tangente:  $\vec{r}'(a)$  en  $t = a$
- Vector tangente unitario:  $\frac{\vec{r}'(a)}{|\vec{r}'(a)|} = \vec{T}(a)$

### 5.4. Ejercicios

- Encuentre las ecs. paramétricas de la recta tangente a la curva :  $s(t) = \langle 2 \cos(t), 2 \sin(t), 4 \cos(2t) \rangle$  en el punto  $(\sqrt{3}, 1, 2)$ :

$$\text{Recta tangente: } \vec{r}_T(t) = \vec{r}(a) + t\vec{r}'(a)$$

$$\vec{r}_T(a) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle$$

$$\text{Derivada: } \vec{r}'(t) = \langle -2\sin(t), 2\cos(t), -8\sin(2t) \rangle$$

$$\text{Nos preguntamos: ¿Cómo encuentro "a" ? igualamos } r(t) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle$$

$$2\cos(t) = \sqrt{3} \implies \cos(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies t = \frac{\pi}{6}$$

$$2\sin(t) = 1 \implies 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$4\cos(2t) = 2 \implies 4\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\text{Vector tangente: } \vec{r}'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left\langle -2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right), 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), -8\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right\rangle$$

$$\vec{r}_T(t) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle + t \langle -1, \sqrt{3}, -4\sqrt{3} \rangle$$

$\therefore$

$$x = \sqrt{3} - 1t$$

$$y = 1 + \sqrt{3}t$$

$$z = 2 - 4\sqrt{3}t$$

# Capítulo 6

Clase - 2020-02-11

## 6.1. 13.2 Cálculo de funciones vectoriales

- Derivadas:

$$\vec{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

- Vector Tangente:

$$\vec{r}'(t)$$

- Tangente unitario:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

- Integrales indefinidas:

$$\int \langle f, g, h \rangle dt = \langle F + C_1, G + C_2, H + C_3 \rangle$$

$$\int \vec{r}(t) dt = \vec{R}(t) + \vec{C}$$

$\vec{R}$  vector de Antiderivadas

$\vec{C}$  Vector de constantes

- Integrales definidas:

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \hat{i} \int_a^b f(t) dt + \hat{j} \int_a^b g(t) dt + \hat{k} \int_a^b h(t) dt$$

## 6.2. Ejercicios de integración

1.  $\int_0^1 \left[ \frac{4}{1+t^2} \hat{i} + \sec^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) \right] dt:$

$$4\hat{i} \times \tan^{-1}(t) \Big|_0^1 + \hat{k} \times \tan\left(\frac{\pi t}{4}\right) \Big|_0^1$$

$$I_i = 4\hat{i} \frac{\pi}{4} + \hat{k} \frac{4}{\pi} = \pi \hat{i} + \hat{k} \frac{4}{\pi} = \left\langle \pi, 0, \frac{4}{\pi} \right\rangle$$

2.  $\int \left\langle te^{t^2}, te^t, \frac{q}{\sqrt{1-t^2}} \right\rangle dt :$

$$x : \int e^{t^2} t dt = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^{t^2} + C_1$$

$$\begin{aligned} u &= t^2 \\ du &= 2t dt \end{aligned}$$

$$y : \int t e^t dt = t e^t - \int t e^t - e^t + C_2$$

$$\begin{aligned} u = t \quad dv = e^t dt : \quad \int \frac{1}{1-t^2} dt &= \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta = \int d\theta = \underbrace{\theta + C_3}_{\sin^{-1}(t) + C_3} = \sin^{-1}(t) + C_3 \\ du = dt \quad v = e^t t : \end{aligned}$$

$$\therefore \int \left\langle t e^{t^2}, t e^t, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right\rangle dt = \frac{1}{2} e^{t^2} + C_1, t e^t - e^t + C_2, \sin^{-1}(t) + C_3$$

## 6.3. Movimiento en el espacio

Dado el vector posición  $\vec{r}(t)$  de un objeto:

- Vector velocidad:

$$\vec{c}(t) = \vec{r}'(t)$$

- Vector aceleración:

$$\vec{a}(t) = \vec{v}(t) = \vec{r}''(t)$$

- Rapidez:

$$|\vec{v}(t)|$$

- Distancia:

$$|\vec{r}(t)|$$

Dado el vector de aceleración  $\vec{a}(t)$  :

- Velocidad:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t) dt + \vec{C}_1$$

- Desplazamiento o posición:

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) dt + C_2$$

### 6.3.1. Ejercicios

1. Encuentre la velocidad, aceleración y rapidez dada la posición del objeto:

$$\vec{r}(t) = \hat{i}t + 2\hat{j} \cosh(4t) + 3\hat{k} \sinh(3t)$$

Encontramos velocidad:  $\vec{r}'(t) = \vec{v}(t) = \hat{i} + 8\hat{j} \sinh(4t) + 9\hat{k} \cosh(3t)$

Encontramos la aceleración:  $\vec{r}''(t) = \vec{a}(t) = 32\hat{j} \cosh(4t) + 27\hat{k} \sinh(3t)$

Encontramos la rapidez:  $|\vec{v}(t)| = \sqrt{1 + 64 \sinh^2(4t) + 81 \cosh^2(3t)}$

Encontramos la distancia:  $|\vec{r}(t)| = \sqrt{t^2 + 4 \cosh^2(4t) + 9 \sinh^2(3t)}$

# Tarea # 6: Integrales func. vectoriales 14.1 Funciones en varias variables.

# Tarea opcional consolidado: 12,13,14.1

2. Encuentre la velocidad y posición del objeto dada  $\vec{a}(t)$  y las condiciones iniciales:

$$\vec{a}(t) = 6t\hat{i} + \hat{j} \cos(t) - \hat{k} \sin(2t), \quad \vec{v}(0) = \hat{i} + \hat{k} \quad \vec{r}(0) = 2\hat{j} - \hat{k}$$

Velocidad:  $\int \vec{a}(t) dt$

$$\vec{v}(t) = \left\langle 3t^2 + C_1, \sin(t) + C_2, \frac{1}{2} \cos(2t) + C_3 \right\rangle$$

Encuentro  $\vec{v}(0) = \left\langle C_1, C_2, \frac{1}{2} + C_3 \right\rangle = \langle 1, 0, 1 \rangle$

Resolver para las constantes: 
$$\begin{aligned} C_1 &= 1, \\ C_2 &= 0, \\ \frac{1}{2} + C_3 &= 1 \implies C_3 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Posición:  $\int \vec{v}(t) dt$

$$\vec{r}(t) = \left\langle t^3 + t + d_1, -\cos(t) + d_2, \frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{t}{2} + d_3 \right\rangle$$

$$\vec{r}(0) = \left\langle \underbrace{d_1, -1 + d_2, d_3}_{d_1 = 0} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} -1 + d_2 &= 2 \implies d_2 = 3 \\ d_3 &= -1 \end{aligned}$$

Posición:  $\vec{r}(t) = \left\langle t^3 + t, 3 - \cos(t), \frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{t}{2} - 1 \right\rangle$

3.  $\vec{a}(t) = 8t\hat{i} + \sinh(t)\hat{j} - \hat{k}e^{\frac{t}{2}}$  :



$$\begin{aligned}
& \underbrace{\vec{v}(0) = \vec{0}}_{\text{Está en reposo}} \quad \vec{s}(0) = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k} \\
\text{Velocidad: } & \vec{v}(t) = \left\langle 4t^2 + C_1, \cosh(t) + C_2, -2e^{\frac{t}{2}} + C_3 \right\rangle \\
& \vec{v}(0) = \left\langle \underbrace{C_1, 1 + C_2, -2 + C_3}_{\substack{C_1 = 0, \\ C_2 = -1 \\ C_3 = 2}} \right\rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle \\
& \vec{v}(t) = \left\langle 4t^2, \cosh(t) - 1, -2e^{\frac{t}{2}+2} \right\rangle \\
\text{Posición: } & \vec{r}(t) = \left\langle \frac{4}{3}t^3 + C_1, \sinh(t) - t + C_2, -4e^{\frac{t}{2}} + 2t + C_3 \right\rangle \\
& \vec{r}(0) = \langle C_1, C_2, -4 + C_3 \rangle = \underbrace{\langle 2, 1, -3 \rangle}_{\substack{C_2 = 1 \\ C_3 = -3 + 4 = 1}} \\
& \vec{r}(t) = \left\langle \frac{4}{3}t^3 + 2, \sinh(t) - t + 1, -4e^{\frac{t}{2}} + 2t + 1 \right\rangle
\end{aligned}$$

# Se evalúa el vector en 0 por que se quiere saber el valor de las constantes cuando están en reposo.

# Por defecto siempre evaluar en 0 para encontrar  $C_1, C_2$  &  $C_3$ .

## 6.4. 13.3 Longitud de arco

10.4 Ecs. Paramétricas de una curva en el plano de dos dimensiones era:

$$\begin{aligned}
x &= f(t) \\
y &= g(t)
\end{aligned}$$

- La longitud de arco:

$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt$$

- Función vectorial:

$$\vec{r} = \langle f, g, h \rangle = \langle x, y, z \rangle$$

- Derivada de función vectorial:

$$\vec{r}' = \langle x', y', z' \rangle$$

- Magnitud:

$$|\vec{r}'| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$$

- En general:

$$L = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$$

## 6.5. Ejercicios

Encuentre la longitud de las siguientes curvas:

1.  $\vec{r}(t) = \langle \cos(t), \sin(t), \ln(\cos) \rangle$  en  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\vec{r}'(t)| dt$$

$$\vec{r}'(t) = \langle -\sin(t), \cos(t), \tan^2(t) \rangle$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + \tan^2(t)} = \sqrt{1 + \tan^2(t)} = \sec^2(t) = \sec^2(t)$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(t) dt = \ln |\sec(t) + \tan(t)| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln \left| \sec\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| - \ln |\sec(0) + \tan(0)|$$

$$L = \ln \left| \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 \right| - \ln |1| = \ln |\sqrt{2} + 1|$$

2.  $\vec{r}(t) = \langle 12t, 8t^{\frac{3}{2}}, 3t^2 \rangle$  en  $0 \leq t \leq 1$  :

$$\vec{r}'(t) = \langle 12, 12t^{\frac{1}{2}}, 6t \rangle = 6 \langle 2, 2t^{\frac{1}{2}}, t \rangle$$

$$|\vec{r}'(t)| = 6\sqrt{4 + 4t + t^2} = 6\sqrt{(t+2)^2} = 6(t+2)$$

$$L = \int_0^1 (6t + 12) dt = 3t^2 + 12t \Big|_0^1 = 3 + 12 = 15$$

# Capítulo 7

Clase - 2020-02-11

## 7.1. Resolución de corto

1. Analice la función  $r = \langle 3e^{-t}, \ln(2t^2 - 1), \tan(2\pi) \rangle$  en  $t = 1$ :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 1} \vec{r}(t) &= \left\langle \lim_{t \rightarrow 1} 3e^{-t}, \lim_{t \rightarrow 1} \ln(2t^2 - 1), \lim_{t \rightarrow 1} \tan(2\pi) \right\rangle \\ \vec{r} &= \langle 3e^{-1}, \ln(1), \tan(2\pi) \rangle = \langle 3e^{-1}, 0, 0 \rangle \\ &\therefore r \text{ es continua en } t=1\end{aligned}$$

# Si la pregunta hubiese sido en cuándo se indefine, se saca el dominio de cada función.

2. Encuentre la ec. de la recta tangente a  $r(t) = \langle te^{t-1}, \frac{8}{\pi} \arctan(t), 2\ln(t) \rangle$  en  $t = 1$ .

$$\vec{r}(0) = \left\langle 1 \times e^0, \frac{8}{\pi} \arctan(1), 2\ln(0) \right\rangle = \langle 1, 2, 0 \rangle$$

Terminar de copiar

## 7.2. 14.1 Funciones de varias variables

- Cuando teníamos sólo una función de una variable no había tanta complicación, las gráficas eran curvas en el plano. Cuando empezaba y terminaba la curva en  $x$  nos daba el dominio. Había una variable independiente  $x$  y la variable dependiente  $y$ , los dominios eran intervalos, y cada  $x$  sólo podía tener un sólo valor de  $y$ .
- En funciones de 2 variables se va a describir como:

$$z = f(x, y) \quad \begin{array}{l} \text{Dos variables independientes } x, y \\ \text{Variable dependiente } z \end{array}$$

- Entonces  $f$  es una regla que asigna a cada punto  $(x, y)$  a lo sumo un valor de  $z$ .

$$f: \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{Dominio}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Rango}}$$

- Estamos pasando de una región por medio de una función  $z$  luego a tener  $f(x, y)$  en la dimensión correspondiente.
- Los dominios en estas funciones se vuelven superficies.
- El dominio de una función de dos variables: un conjunto que consiste de todos los puntos o pares ordenados  $(x, y)$  para los cuales  $f(x, y)$  está definida.

$\mathbb{D}$ : En una dimensión: Todos los números  $x$  para los cuales  $f(x)$  está definida

- Evite la división por cero.
- Raíces pares de números negativos.
- Logaritmos de números negativos o cero.
- El dominio de  $f$  en una función de dos variables es una región:
  - Las regiones que estén sombreadas son partes del dominio.

# Para graficar funciones de dos variables son más fáciles de graficar que de una sola variable.

## 7.3. Ejercicios

Encuentre y bosqueje el dominio de las sigs. funciones.  
Sombree la región dque es parte del  $\mathbb{D}$  y utilice líneas discontinuas para denotar a curvas que no son parte del  $\mathbb{D}$

1.  $c(x, y) = 10x + 20y :$

$$\mathbb{D} : \underbrace{(-\infty, \infty)}_x \times \underbrace{(-\infty, \infty)}_y = \mathbb{R}^2$$

Producto cartesiano

Nunca se indefine.

# Producto cartesiano denota **todas las combinaciones posibles en un conjunto de  $n$  elementos.**

# Explicaciones de productos cartesianos:

$$\mathbb{R} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

# Definición de producto cartesiano:

$$x \times y = \{(x, y) \text{ tal que } x \in X, y \in Y\}$$

# Producto cartesiano vs. unión:

$$x \times y = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$x \cup y = \{(1), (2), (3)\}$$

2.  $z = \frac{8}{x^2 - y^2} :$

$$\begin{aligned} &\text{Definida si } x^2 \neq y^2 \\ &\mathbb{R}^2 - \{x^2 = y^2\} \\ &y \neq \sqrt{x^2} \\ &y \neq \pm x \end{aligned}$$

3.  $R(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} :$

$$\begin{aligned} &9 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ &\text{Definida } 9 \geq x^2 + y^2 \\ &\mathbb{D} : x^2 + y^2 \leq 9 \end{aligned}$$

Círculo de radio 3 centrado en el origen

$$\mathbb{D} = \{(x, y) \text{ tal que } x^2 + y^2 \leq 9\}$$

4.  $Q(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$  :

$$\mathbb{D} : \begin{matrix} x^2 + y^2 > 0 \\ x^2 + y^2 > 9 \end{matrix}$$

$\therefore$  Afuera del círculo o disco de radio 3

5.  $z = \frac{(x+4)}{(y-2)(x-4)(y+2)}$  :

Definida si :  $y \neq \pm 2, x \neq 4$

$$\mathbb{D} : \mathbb{R}^2 - \{y \neq \pm 2, x \neq 4\}$$

6.  $h(x, y) = \ln(2 - yx)$  :

$$\begin{aligned} \text{Definida si : } & \begin{matrix} 2 - yx & > 0 \\ 2 & > yx \\ y & < \frac{2}{x} \end{matrix} \\ \therefore \mathbb{D} : & y < \frac{2}{x} \end{aligned}$$

### 7.3.1. Gráfica de $z = f(x, y)$

- Gráfica de  $z = f(x, y)$ : Son superficies y consisten de todas las *triplas* ordenadas  $(x, y, z)$  donde  $z$ .

## 7.4. Curva de nivel o traza horizontal

- En  $f(x, y) = k$   $k$  es una constante, rebane la superficie con los planos horizontales  $z = k$  y grafique cada curva en el plano.

# Capítulo 8

Clase - 2020-02-20

## 8.1. 14.3 Derivadas parciales

- Derivada en una dimensión:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

- En una función con dos variables independientes:

$$f(x, y) = \left. \begin{matrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{matrix} \right\} \text{ Derivadas parciales}$$

- Al derivarse parcialmente respecto a una variable, la otra se mantiene constante:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} & \# \text{ y se mantiene constante} \\ f_y(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} & \# \text{ x se mantiene constante} \end{aligned}$$

- Se pueden utilizar todas las reglas de derivación para funciones de 1 variable:

- Suma
- Producto
- Cociente
- Cadena

- 1<sup>eras</sup> derivadas parciales de  $f(x, y)$ : encuentre todas las derivadas parciales posibles de  $f_x$  &  $f_y$

- Notación:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\delta f}{\delta x} = \frac{\delta z}{\delta x} \\ f_y &= \frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\delta z}{\delta y} \end{aligned}$$

- Evite  $f'(x, y)$  para evitar ambigüedad.

### 8.1.1. Ejercicios

Encuentre las derivadas parciales de las siguientes funciones.

1.  $f(x, y) = 2x^2 + 3xy$  : **Recordar lo siguiente:**  $f_x(x, y)$  &  $f_y(x, y)$

$$f_x = 4x + 3y \quad f_y = 0 + 3x$$

2.  $g(x, y) = y(x^2 + 1)^3 + x^2(y^4 - 4)^4 + 5x^2y^3$  :

$$\begin{aligned} g_x &= 3y(x^2 + 1)^2 2x + 2x(y^4 - 4)^4 + 10xy^3 \\ g_y &= 1 \cdot (x^2 + 1)^3 + 16y^3 x^2 (y^4 - 4)^3 + 15x^2 y^2 \end{aligned}$$



3.  $h(s, t) = (s^2 + 10t)^2 \cdot (t^4 + s^3)^3$ : # Regla del producto y de la cadena.

$$\begin{aligned} h_s &= 4s(s^2 + 10t)^1 \cdot (t^4 + s^3)^3 + 3 \cdot 3s^2(s^2 + 10t)^2 \cdot (t^4 + s^3)^2 \\ h_t &= 20(s^2 + 10t)^1 \cdot (t^4 + s^3)^3 + 12t^3(s^2 + 10t)^2 \cdot (t^4 + s^3)^2 \end{aligned}$$

# Evalúe la derivada en punto  $(a, b)$ :

$$f_x(a, b) = \left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{(a, b)}$$

1.  $w(r, \theta) = r^2 \sin(2\theta) + e^{\pi r - \theta}$ , encuentre  $\left. \frac{\delta w}{\delta \theta} \right|_{(2, \pi)}$

$$\begin{aligned} \frac{\delta w}{\delta \theta} &= 2r^2 \cos(2\theta) - e^{\pi r - \theta} \\ \left. \frac{\delta w}{\delta \theta} \right|_{(2, \pi)} &= w_\theta(2, \pi) = 2 \cdot 4 \cos(2\pi) - e^{2\pi - \pi} \\ &= 8 - e^\pi \end{aligned}$$

## 8.2. Derivadas parciales por funciones de 2 o más variables

- Se deriva respecto a una variable y el resto se mantienen constantes.

$$w = f(x, y, z)$$

3 1<sup>eras</sup> derivadas parciales:  $f_x, f_y, f_z$ .

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

n derivadas parciales:

$$\frac{\delta u}{\delta x}, \dots, \frac{\delta u}{\delta x_n}$$

### 8.2.1. Ejercicio

Encuentre todas las primeras derivadas parciales de las siguientes funciones:

- $f(x, y, z) = \sqrt[4]{x^4 + 8xz + 2y^2}$

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{4}(x^4 + 8xz + 2y^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot (4x^3 + 8z + 0) \\ f_y &= \frac{1}{4}(x^4 + 8xz + 2y^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot (4y) \\ f_z &= \frac{1}{4}(x^4 + 8xz + 2y^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot (8x) \end{aligned}$$

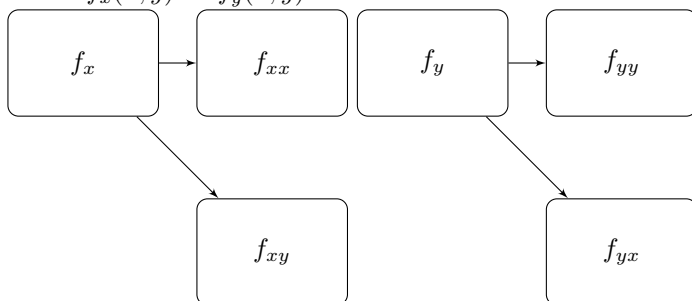
- $p(r, \theta, \phi) = r \cdot \tan(\phi^2 - 4\theta)$ :

$$\begin{aligned}p_r &= \tan(\phi^2 - 4\theta) \\p_\theta &= -4r \sec^2(\phi^2 - 4\theta) \\p_\phi &= 2\phi r \sec^2(\phi^2 - 4\theta)\end{aligned}$$

# Funciones vectoriales 1 variable:  $\vec{r}'(t), \dots$

### 8.3. Derivadas parciales de orden superior (pág. 100)

- Orden superior: Segundas, terceras, cuartas, etc. derivadas.
- Como  $f_x(x, y)$  &  $f_y(x, y)$  son también funciones en dos variables, pueden tener derivadas parciales.



- Las segundas derivadas parciales, éstas también tienen sus derivadas parciales, terceras derivadas parciales.

$$\begin{array}{cccc}f_{xxx} & f_{xxy} & f_{yyy} & f_{yyx} \\f_{xxy} & f_{xyx} & f_{yyx} & f_{yxx}\end{array}$$

- Las derivadas parciales cruzadas  $f_{xy}$  &  $f_{yx}$  son iguales si la función es diferenciable.

$$f_{xy} = f_{yx} \quad f_{xyy} = f_{yyx} = f_{yxy}$$

- Notación delta:

$$\begin{aligned}f_{xx} &= \frac{\delta}{\delta x} \left( \frac{\delta f}{\delta x} \right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} & f_{yy} &= \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \\f_{xy} &= \frac{\delta}{\delta y} \left( \frac{\delta f}{\delta x} \right) = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} & f_{yx} &= \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta y}\end{aligned}$$

#### 8.3.1. Ejercicios

Encuentre todas las 2das derivadas parciales:

1.  $f(x, y) = \sin(mx + ny)$   $m, n \in \mathbb{R}$ :

Primeras derivadas parciales :

$$f_x = m \cos(mx + ny)$$

$$f_y = n \cos(mx + ny)$$

Segundas derivadas parciales:

$$f_{xx} = -m^2 \sin(mx + ny)$$

$$f_{yy} = -n^2 \sin(mx + ny)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{xy} &= -mn \sin(mx + ny) \\ f_{yx} &= -mn \sin(mx + ny) \end{aligned} \right\} \text{Iguales}$$

2.  $z = \cos(2xy)$  :

$$1^{\text{er as}} : \quad \frac{\delta z}{\delta x} = -2 \sin(2xy), \quad \frac{\delta z}{\delta y} = -2x \sin(2xy)$$

$$2^{\text{das}} : \quad \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = -4y^2 \cos(2xy), \quad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = -4x^2 \cos(2xy)$$

# Capítulo 9

Clase - 2020-02-27

## 9.1. Derivadas parciales, rectas tangentes y planos tangentes

### 9.1.1. Interpretación de la derivada parcial

- $\mathbb{C}$  curva de intersección entre  $z = f(x, y)$  y  $y = b$ .

- Recta tangente a esta curva en el punto  $(a, b, f(a, b))$ :

$$\text{Derivada : } f_x(x, b) \quad \text{Pendiente: } f_x(a, b)$$

- Derivadas parciales:  $f_x(a, b)$  resulta ser la pendiente de la recta tangente a la curva  $f(x, b)$  en la dirección de  $x$ .

$$L = \langle a, b, f(a, b) \rangle + t \langle 1, 0, f_x(a, b) \rangle \quad \text{donde: } x = t, y = b, z = f(t, b)$$

- Para encontrar  $L_2$   $x = a$ :

$$x = a, y = t, x = f(z, y) \implies z_y = f_y(a, y) \implies z_y = f_y(a, b)$$

$z_y = f_y(a, b)$  es la pendiente de la tangente a la curva  $f(a, y)$  en la dirección de  $y$

$$L_2 = \langle a, b, f(a, b) \rangle + t \langle 0, 1, f_y(a, b) \rangle$$

- Estas dos rectas se utilizan para construir un plano tangente a la superficie.
- La ecuación del plano es un plano que es paralelo a  $L_1$  &  $L_2$ .

$$L_1 = \langle a, b, f(a, b) \rangle + t \overbrace{\langle 1, 0, f_x(a, b) \rangle}^{v_1}$$

$$L_2 = \langle a, b, f(a, b) \rangle + t \underbrace{\langle 0, 1, f_y(a, b) \rangle}_{v_2}$$

La ec. vectorial:

$$\hat{n} \cdot (-r_0) = 0 \quad \vec{r}_0 = \langle a, b, f(a, b) \rangle$$

terminar excursión.

### 9.1.2. Ejercicios

- Encuentre el plano tangente a la superficie  $z = \ln(x - 2y)$  en el punto  $(3, 1, 0)$ :

$$f(a, b) \quad f_x(a, b) \quad f_y(a, b) \quad a = 3, b = 1$$

$$f(3, 1) = \ln(3 - 2) = \ln(1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x - 2y} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|^{(3,1)} = \frac{1}{3 - 2} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2}{x - 2y} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|^{(3,1)} = \frac{-2}{3 - 2} = -2$$

$$z = f(3, 1) + f_x(x - 3) + f_y(y - 1)$$

$$\text{La ecuación del plano tangente:} \quad z = 0 + x - 3 - 2y + 2$$

$$\therefore z = x - 2y - 1$$

## 9.2. Aproximaciones lineales

- La aproximación lineal de  $z = f(x, y)$ , linearización.
- La aproximación lineal de  $z$  en  $(a, b)$  es el plano tangente a la superficie.

$$L(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial}{\partial x} f(a, b)(x - a) + \frac{\partial}{\partial y} f(a, b)(y - b)$$

### 9.2.1. Ejercicios

Considere la función  $f(x, y) = \sqrt{2x + 2e^y}$ :

- Encuentre la aproximación lineal de  $f$  en el punto  $(7, 0)$ :  
Encuentre  $f(7, 0)$   $f_x(7, 0)$   $f_y(7, 0)$

$$\begin{aligned} f(7, 0) &= \sqrt{14 + 2} = 4 \\ f_x(x, y) &= (2x + 2e^y)^{-\frac{1}{2}} & f_x(7, 0) &= \frac{1}{\sqrt{14 + 2}} = \frac{1}{4} \\ f_y(x, y) &= \frac{e^y}{\sqrt{2x + 2e^y}} & f_y(7, 0) &= \frac{1}{\sqrt{14 + 2}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$\therefore$  La aproximación lineal o plano tangente:  $L = 4 + \frac{1}{4}(x - 7) + \frac{1}{4}y$

Cerca de  $(7, 0)$ :  $\sqrt{2x + 2e^y} \approx \frac{9}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y$

- Utilice la aproximación lineal para aproximar el valor de  $\sqrt{8 + 2e}$  :

$$f(4, 1) = \sqrt{8 + 2e} \approx 3,5 \approx L(4, 1)$$

$$L(4, 1) = \frac{9}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{2} = 3,5$$

En realidad :  $\sqrt{8 + 2e} \approx 3,665592$

- Ejercicio 3: Encuentre la aproximación lineal de  $g(x, y) = 1 + \ln(xy - 5)$  en el punto  $(2, 3)$ :

$$g(2, 3) = 1 + 2 \ln(6 - 5) = 1 + 0 = 1$$

$$g_x(x, y) = 0 + 1 \cdot \ln(xy - 5) + \frac{xy}{xy - 5}$$

$$g_x(2, 3) = \ln(1) + \frac{6}{6 - 5} = 0 + \frac{6}{1} = 6$$

$$g_y(x, y) = 0 + \frac{x \cdot x}{xy - 5}$$

$$g_y(2, 3) = \frac{4}{6 - 5} = 4$$

La aproximación lineal entonces es:

$$\begin{aligned} \therefore \\ L(x, y) &= 1 + 6(x - 2) + 4(y - 3) \\ L(x, y) &= -23 + 6x + 4y \end{aligned}$$

### 9.3. 12.4 Derivadas implícitas y 12.5 Regla de la cadena

- Funciones 2 variables  $z = f(x, y)$
- Explícita:  $z$  no está sólo en función de  $x$  &  $y$ .
- Ejemplos:  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ,  $\sqrt{z^2 - x^2} = y + z$
- ¿Cómo se encuentran  $\frac{\partial z}{\partial x}$  &  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ?:
  - Implícita  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  es una esfera de 4 (rango  $[-4, 4]$ ) en dos hemisferios:

$$z = +\sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{2}(16 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{z} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{y}{z} \end{aligned}$$

- Derivación implícita, se pueden encontrar  $z_x$  &  $z_y$  sin necesidad de resolver para  $z$ .

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \quad z \text{ & } y \text{ son independientes}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(16)$$

$$2x + 0 + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$2z \frac{\partial z}{\partial x} = -2x \quad \implies \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial}{\partial y}(16)$$

$$0 + 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

#### 9.3.1. Derivación parcial implícita abreviada

- $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  como  $x \ln(y) + x^2 \sqrt{1 + x + z} = k$
- Forma implícita:  $F(x, y, z(x, y)) = \text{constante}$ .  $\frac{\partial z}{\partial x}$  use la regla de la cadena.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \quad \implies \quad z_x = -\frac{f_x}{f_z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \quad \implies \quad z_y = -\frac{f_y}{f_z}\end{aligned}$$

### 9.3.2. Ejercicios

Encuentre las primeras derivadas parciales de  $z$ .

1.  $\ln(zy) + 9z - xyz = 1$ :

$$\begin{aligned}F_x &= -yz & \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_y} = \frac{yz}{z^{-1}+9-xy} \\ F_y &= y^{-1} + 0 - xy & \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{xz-y^{-1}}{z^{-1}+9-xy} \\ F_z &= z^{-1} + 9 - xy\end{aligned}$$

# Sin derivación parcial implícita

#  $z(x, y)$  agregue  $z_x$  cada vez que aparece  $z$ .

$$\frac{yz_x}{z_y} + 9z_x - y_x$$



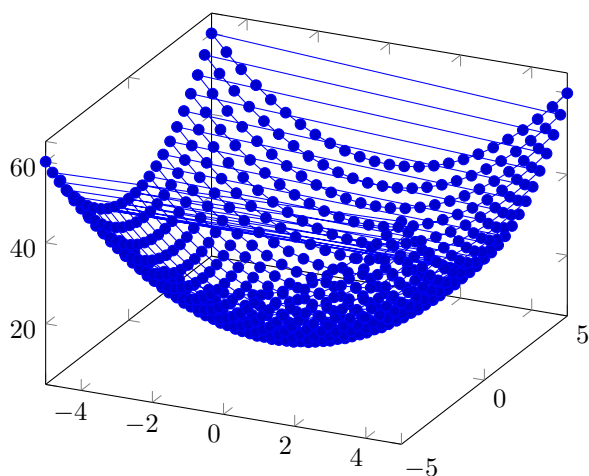
# Capítulo 10

Clase - 2020-03-10

## 10.1. Parcial 2

- Planos tangentes y aproximaciones lineales
- Regla de la cadena
- Derivación implícita
- Derivada direccional o razón de cambio en  $f$  en la dirección de  $\vec{u}$

## 10.2. 14.7 Máximos y mínimos



- Máximo relativo:
  - $f(a, b) > f(x, y)$
  - $(x, y)$  cerca de  $(a, b)$
- Mínimo relativo:
  - $f(a, b) < f(x, y)$
  - $(x, y)$  cerca de  $(a, b)$

### 10.2.1. En funciones de una variable

- Números críticos:  $f'(c) = 0$  ó  $f'(c) = \text{indef.}$
- 2da derivada:

|             |                 |
|-------------|-----------------|
| $f'(c) < 0$ | Máximo relativo |
| $f'(c) > 0$ | Mínimo relativo |
| $f'(c) = 0$ | Inconcluso      |

### 10.2.2. En funciones de dos variables

- Puntos críticos:

$$f_x(a, b) = 0 \quad \& \quad f_y(a, b) = 0$$

- No es suficiente:

$$\begin{array}{lll} f_{xx} < 0 & \& f_{yy} < 0 & \text{Máx relativo} \\ f_{xx} > 0 & \& f_{yy} > 0 & \text{Mín relativo} \end{array}$$

- Prueba de la segunda derivada:  $(a, b)$  es un punto crítico y  $f(x, y)$  tiene segundas derivadas continuas.

$$D(a, b) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

- Entonces:

- Máximo relativo:  $D(a, b) > 0$  &  $f_{xx} < 0$
- Mínimo relativo:  $D(a, b) > 0$  &  $f_{xx} > 0$
- Punto de silla:  $D(a, b) < 0$  no hay ni mínimo ni máximo.
- Inconcluso:  $D(a, b) = 0$

- Ejemplo: Considere la función  $z = x^2 + y^2$ .

- Puntos críticos:

$$\begin{array}{l} z_x = 2x = 0 \\ z_y = -2y = 0 \end{array}$$

Prueba de la segunda derivada

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

### 10.2.3. Ejercicios máximos y mínimos

1. Encuentre los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones.

- $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 6x + 16y$

$$\left. \begin{array}{l} f_x = 2x - 6 = 0 \implies x = 3 \\ f_y = 8y + 16 = 0 \implies y = -2 \end{array} \right\} \text{Único punto crítico en: } (3, -2)$$

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 16 \quad 16 > 0$$

$$f_{xx} = 2 \quad 2 > 0$$

$$\text{Valor mínimo : } f(3, -2) = -25$$

■  $g(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 + 100$

$$\begin{aligned} g_x = 4x + 4 = 0 &\implies y = -4x \text{ implies } y = 0 \\ g_y = x + 2y = 0 &\text{ implies } x - 8x = -9x = 0 \text{ implies } x = 0 \end{aligned}$$

#Resolver ecuaciones

Único punto crítico

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7 \implies 7 > 0$$

$$g_{xx} = 4 > 0$$

Valor mínimo relativo:

$$g(0, 0) = 100$$

■  $h(x, y) = 30 - x^2 - 2y^2 + 4x - 12y$

$$\begin{aligned} \text{Encontrar pts. críticos : } h_x = 2x - 4 = 0 \\ \text{Encontrar pts. críticos : } h_y = -4y - 12 = 0 \end{aligned} \left\} \begin{aligned} x &= -\frac{4}{2} = 2 \\ y &= \frac{12}{-4} = -3 \end{aligned} \right.$$

Único número crítico es (2,-3)

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 > 0 \quad h_{xx} = -2 < 0$$

Máximo relativo en (2,-3) 38

2. Una caja de cartón sin tapa, debe de tener un volumen de  $32,000\text{cm}^3$ , calcule las dimensiones  $x, y, z$  que minimicen el cartón utilizado.

$$\text{Volúmen: } V = xyz = 32,000$$

$$\text{Área: } A = 2zy + 2zx + xy$$

Tengo que minimizar el área

$$A = 2zy + 2zx + xy \implies z = \frac{32,000}{xy}$$

$$x, y, z > 0$$

$$A(x, y) = 64,000 \cdot \frac{y}{xy} + 64,000 \frac{x}{xy} + xy$$

$$A(x, y) = \frac{64,000}{x^2} + \frac{64,000}{y} + xy$$

$$A_x = 0 : \quad \frac{-64,000}{x^2} + y = 0 \implies y = 64,000x^{-2}$$

$$A_y = 0 : \quad \frac{-64,000}{y^2} + x = 0 \implies [64,000]^2 x^{-4}$$

$$\text{Sustituya en } A_y \quad \frac{-64,000}{(64,000)^2 x^{-4}} + x = 0$$

$$-\frac{x^4}{64,000} = -x$$

$$x = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{1,000} = 4 \cdot 10 = 40$$

$$y = \frac{64,000}{x^2} = \frac{64 \cdot 1,000}{16 \cdot 100} = 4 \cdot 10 = 40$$

$$z = \frac{32,000}{40 \cdot 40} = \frac{32,000}{16,000} = 20$$

$\therefore$  Las dimensiones que minimizan el área es:  $x = y = 40, \quad z = 20$

### 3. Discriminación de precios:

- Demanda:

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = 104 - q_1 \\ p_2 = 84 - q_2 \end{array} \right\} \text{ Producción: } q_1, q_2$$

- Costos:

$$C = 600 + 4q_1 + 4q_2$$

- Encuentre los precios y las cantidades  $q_1$  &  $q_2$  a la que deben venderse los productos para maximizar la utilidad.

$$\text{Utilidad} = \text{Ingresos} - \text{Costos}$$

$$\text{Utilidad : } u(q_1, q_2) = p_1 q_1 + p_2 q_2 - 600 - 4q_1 - 4q_2$$

$$u(q_1, q_2) = 104q_1 - q_1^2 + 84q_2 - q_2^2 - 600 - 4q_1 - 4q_2$$

$$u(q_1, q_2) = -q_1^2 - q_2^2 + 100q_1 + 80q_2 - 600$$

$$\frac{\partial u}{\partial q_1} = -2q_1 + 100 = 0 \implies q_1 = 50$$

$$\frac{\partial u}{\partial q_2} = -2q_2 + 80 = 0 \implies q_2 = 40$$

$$\text{Único punto crítico: } (q_1 = 50, q_2 = 40)$$

$$\left. \begin{array}{l} q_1 = 50 \implies p_1 = 40 \\ q_2 = 40 \implies p_2 = 44 \end{array} \right\} \text{ discriminación}$$

$$\text{Utilidad máxima: } u(50, 40) = 54 \cdot 50 + 44 \cdot 40 - 600 - 360$$

$$2,700 + 1,760 - 960 = 35,00 \quad \text{utilidad máxima}$$

Prueba de la segunda derivada :

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$v_{q_1 q_1} = -2 < 0$$

# Capítulo 11

Clase - 2020-03-12

## 11.1. 14.8 Multiplicadores de Lagrange

Una función de dos variables puede estar sujeta a una restricción:

$$\text{Máximo } z = f(x, y) \quad \text{Sujeto A } g(x, y) = c$$

Si no es posible resolver para  $y$  ó  $x$  en la restricción, el problema no se puede reducir a una sola variable. Se introduce una nueva variable, el **multiplicador de Lagrange**  $\lambda$  para incorporar la restricción en la función objetivo.

$$c - g(x, y) = 0$$

$$\underbrace{F(x, y, \lambda)}_{\text{Función objetivo y restricción}} = \underbrace{f(x, y)}_{\text{Objetivo}} + \lambda \underbrace{(c - g(x, y))}_{\text{Restricción}}$$

Extremos relativos:  $F_x = F_y = F_\lambda = 0$

$$F_x = f_x + \lambda g_x = 0$$

$$F_y = f_y + \lambda g_y = 0$$

$$F_\lambda = c - g(x, y) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y) = c \end{array} \right\} \text{Condiciones necesarias para un extremo relativo}$$

Problema  $w = f(x, y, z)$  sujeta a  $g(x, y, z) = c$

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \underbrace{\lambda}_{\text{Variable artificial}} (c - g(x, y, z))$$

$$F_x = F_y = F_z = F_\lambda = 0$$

Condiciones:  $\nabla f = \lambda \nabla g$

### 11.1.1. Ejercicios

- Encuentre los extremos relativos de  $w = x^2 + y^2 + z^2$  sujeta a  $2x + y - z = 18$  }restricción.

Método 1: Resolver para  $z$

$$z = 2x + y - 18$$

Sustituya en  $w$  para obtener una función de 2 variables.

¿ Cómo se encuentra  $z$  ?

$$z = 2(6) + 3 - 18 = -3$$

Punto crítico:  $(6, 3, -3)$

Prueba de la segunda derivada  $D(x, y) = \begin{vmatrix} W_{xx} & w_{xy} \\ W & \end{vmatrix}$

Método 2: multiplicadores de Lagrange



- La grangiano  $F = w + \lambda(c - g)$

$$\begin{aligned}
 F(x, y, z, \lambda) &= x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(18 - 2x - y + z) \\
 F_x = 2x + 2\lambda &= 0 \quad \implies \quad x = \lambda = 6 \\
 F_y = 2y - \lambda &= 0 \quad \implies \quad y = \lambda/2 = 3 \\
 F_z = 2z + \lambda &= 0 \quad \implies \quad z = -\lambda/2 = -3 \\
 F_\lambda = 18 - 2x - y + z &= 0 \quad \implies \quad 2x + y - z = 18
 \end{aligned}$$

Sustituya  $x, y$  &  $z$  en la restricción.

$$2\lambda + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = 3\lambda = 18 \quad \implies \quad \lambda = 6$$

2. Una caja sin tapa tiene un volúmen de  $32,000 \text{ cm}^3$ . Encuentre las dimensiones de la caja que minimizan

el costo.

$$\begin{aligned}
 \text{Volúmen} \quad V &= xyz = 32,000 \\
 \text{Área Sup.} \quad A &= 2zy + 2zx + yx \\
 F = A + \lambda(c - v) &= 2zy + 2zx + yx + \lambda(32,000 - xyz) \\
 F_x = 2z + y - \lambda yz &= 0 \quad \implies \quad \lambda yz = y + 2z \quad (1) \\
 F_y = 2z + x - \lambda xz &= 0 \quad \implies \quad \lambda xz = x + 2z \quad (2) \\
 F_z = 2y + 2x - \lambda xy &= 0 \quad \implies \quad \lambda \lambda xy = 2x + 2y \quad (3) \\
 F_\lambda = 32,000 - xyz &= 0 \quad \implies \quad xyz = 32,000 \quad (4)
 \end{aligned}$$

Dividimos entonces  $\frac{(1)}{(2)}$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{(1)}{(2)} : \quad \frac{y}{x} &= \frac{y + 2z}{x + 2z} \\
 yx + 2zy = \cancel{xy} + 2zx &\implies y = \frac{2zx}{2z} = \frac{x}{2} \\
 \therefore x &= y
 \end{aligned}$$

Dividimos también  $\frac{(1)}{(3)}$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{(x)}{(3)} : \quad \frac{z}{x} &= \frac{y + 2z}{2x + 2y} \\
 \cancel{2xz} + 2yz &= xy + \cancel{2zx} \\
 z = \frac{xy}{2y} = \frac{x}{2} \therefore y &= x, \quad z = x/2
 \end{aligned}$$

Se sustituye en la restricción:

$$x \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 32,000$$

$$x^3 = 64 \cdot 1000$$

$$x = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{1,000} = 4 \cdot 10 = 19$$

Punto crítico:  $x = 40$  ,  $y = 40$  ,  $z = 20$

Área mínima:

$$A = 2yz + 2xz + xy$$

$$A = 2(800) + 2(800) + 1,600$$

$$A = 3(1,600) = 4,800 \text{ cm}^2$$

### 11.1.2. Aplicaciones a la economía y negocios

1. Para sustituir una orden de 100 unidades de un producto, la empresa desea distribuir la producción entre sus dos plantas. La función de costo total es:

$$C(x, y) = 0,1x^2 + 7x + 15y + 1,000$$

Donde  $x$  es la planta 1 y  $y$  es la planta 2.

¿ Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos ?  $C(0,0)=1,000$ .

Objetivo minimizar  $C(x,y)$  Sujeta a  $x + y = 100$

Lagrange:  $F = C + \lambda(100 - x - y)$

$$F = 0,1x^2 + 7x + 15y + 1,000 + 100\lambda - \lambda x - \lambda y$$

$$F_x = 0,2x + 7 - \lambda = 0 \implies 0,2x = \lambda - 7 = 8 \implies x = 40$$

$$F_y = 15 - \lambda = 0 \implies \lambda = 15$$

$$F_\lambda = 100 - x - y = 0 \implies y = 100 - x = 60$$

Punto crítico en  $(40, 60)$   $x = 15$

Costo mínimo  $C(x, y) = 0,1(1600) + 280 + 900 + 1,000$

$$C(x, y) = 2,340$$

2. Una empresa tiene la función de producción

$$Q(C, K) = 12L + 20K - L^2 - 2K^2$$

La empresa tiene un presupuesto de \$88 mil para contratar trabajadores y maquinaria. Cada trabajador cada máquina tienen un costo de \$5 y \$8 mil, resp.

Encuentre la producción máxima.

# La restricción presupuestaria es la tangente a la curva de nivel en ese punto.

$$\text{Restricción: } 4L + 8K = 88$$

$$\text{Maximizar } Q = F(L, K, \lambda)$$

$$F(L, K, \lambda) = 12L + 20K - L^2 - 2K^2 + \lambda(22 - L - 2K)$$

$$F_L = 12 - 2L - \lambda = 0 \quad \implies \quad 2L = 12 - \lambda \quad \implies \quad L = 6 - \lambda/2$$

$$F_K = 20 - 4K - 2\lambda = 0 \quad \implies \quad 4K = 20 - 2\lambda \quad \implies \quad K = 5 - \lambda/2$$

$$F_\lambda =$$