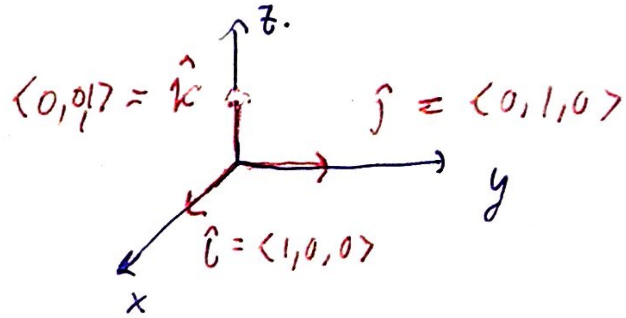
Ángulo entre un vector $\vec{a}$ y un eje

se utiliza la fórmula del producto punto.

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|}$$



Ángulo entre $\vec{a}$ y el eje y.

$$\cos\theta = \frac{a \cdot \hat{j}}{|a|\,|\hat{j}|} = \frac{\langle a_1, a_2, a_3\rangle \cdot \langle 0,1,0\rangle}{|a|} = \frac{a_2}{|a|}.$$

Ángulos entre el vector y cada eje.

Eje - x: $\theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{a_1}{|a|}\right)$ Eje-y. $\cos\theta_y = \frac{a_2}{|a|}$

Eje - z: $\cos\theta_z = \frac{a_3}{|a|}.$

Éstos ángulos se conocen como coseno directores.

$a = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ $\boxed{a = |a| \langle \cos\theta_x, \cos\theta_y, \cos\theta_z\rangle}$

Vectores paralelos o perpendiculares en n-dimensiones.

Dos vectores $\vec{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$

$\vec{b} = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$.

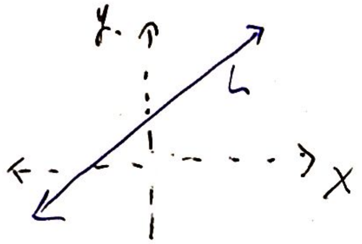
Son paralelos: si $\vec{a} = K\vec{b}$ K escalar $\begin{matrix} -1 \\ 0.2 \\ 1 \end{matrix}$

perpendiculares: si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

ángulo $\cos\theta = \dfrac{a \cdot b}{|a|\,|b|}$

12.5 Rectas (p.39)

En 2-D.

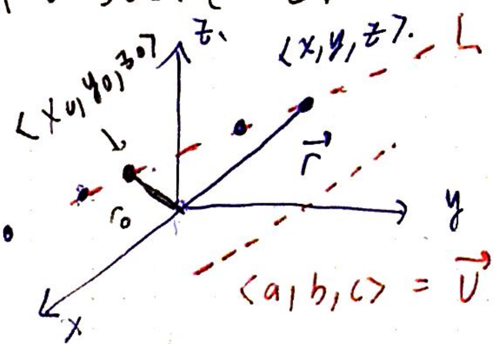


1. m pendiente
2. (x_0, y_0) punto sobre L

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

En 3-D, para encontrar una recta en el espacio se necesita conocer

1. m "pendiente", dirección de la recta vector $\langle a, b, c \rangle$.
2. punto sobre L. (x_0, y_0, z_0).

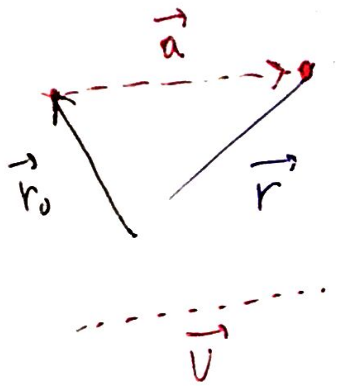


Dos puntos sobre L.

Vector punto sobre L $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle = \vec{r}_0$

Vector cualquier punto sobre L $\langle x, y, z \rangle = \vec{r}$

Vector dirección $\langle a, b, c \rangle = \vec{v}$



$\vec{a}$ y $\vec{v}$ son paralelos.

$\vec{a} = k\vec{v} = t\,\vec{v}$

Variable parámetro t.

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} = \boxed{\vec{r}_0 + t\vec{v}}.$ $t \in \mathbb{R}$.

Ec. Vectorial Recta: punto $\vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$
y dirección $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$.

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}}$$ parámetro t.

Ec. componente por componente.

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t\,\langle a, b, c \rangle.$$

Ec. Paramétrica de la Recta.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + at. \\ y &= y_0 + bt. \\ z &= z_0 + ct. \end{aligned}}$$

$t \in \mathbb{R}$.

Pablo V.

Posición inicial $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$.

Velocidad constante $\langle a, b, c \rangle$.

$x = x_0 + V_{0x}\, t$

$y = y_0 + V_{0y}\, t$

$z = z_0 + V_{0z}\, t.$

Ejercicio 1: Encuentre la ec. vectorial y las paramétricas para la recta que pasa por el punto dado y es paralelo al vector dado. (p 30.)

a. $P(3,4,-2)$ $\quad \vec{v} = \langle -8, 2, 5 \rangle.$ $\quad \vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{v}.$

Vector Posición: $r_0 = \overrightarrow{OP} = \langle 3, 4, -2 \rangle.$

Vector Dirección: $\vec{v} = \langle -8, 2, 5 \rangle.$

Ec. Vectorial: $\boxed{\vec{r} = \langle 3,4,-2 \rangle + t \langle -8, 2, 5 \rangle.}$

Ecs. Paramétricas:
$$x = 3 - 8t$$
$$y = 4 + 2t \qquad t \in \mathbb{R}.$$
$$z = -2 + 5t.$$

Observaciones: $\vec{r}(1) = \langle -5, 6, 3 \rangle$

$\vec{r}(10) = \langle -77, 24, -48 \rangle.$

Ec. vectorial para L: $\boxed{\vec{r} = \langle -5, 6, 3 \rangle + t \langle -8, 2, 5 \rangle.}$

vector de dirección v es paralelo a varios vectores

$\vec{w} = k\,\vec{v}$. puede ser también vector dirección.

$\vec{v}_1 = \langle 8, -2, -5 \rangle$ $\quad \vec{v}_2 = \langle -8\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 5\sqrt{3} \rangle.$

$\boxed{\vec{r} = \langle -77, 24, -48 \rangle + t\,v_2.}$ La misma recta.

La ec. vectorial de una recta no es única. ✓

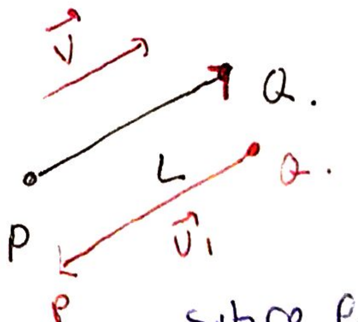
Ejercicio 2: Encuentre la ec. vectorial de la recta que pasa por los puntos dados.

a. $P(3,-2,4)$ y $Q(5,2,-1)$.

$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$ $\quad \boxed{\vec{r}_0 = \langle 3,-2,4\rangle}$ ó $\langle 5,2,-1\rangle$

vector de dirección $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ ó $\overrightarrow{QP}$

$\boxed{\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2,4,-5\rangle.}$



sobre P.

Ec. Vectorial $\vec{r}$. P.

$\boxed{\vec{r} = \langle 3,-2,4\rangle + t\langle 2,4,-5\rangle.}$

Q $\quad \vec{r}_0 = \langle 5,2,-1\rangle \quad \vec{v} = \overrightarrow{QP} = \langle -2,-4,5\rangle.$

$\boxed{\vec{r} = \langle 5,-2,-1\rangle + t\langle -2,-4,5\rangle.}$ sobre Q

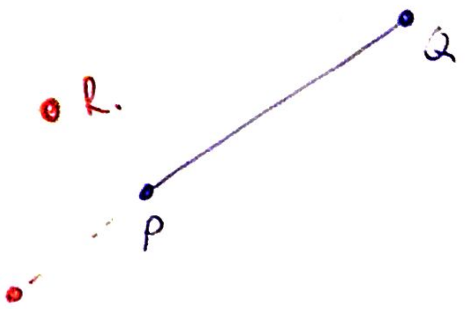
b. $P(3,0,4)$ y $Q(3,4,2)$.

$r_0 = \langle 3,0,4\rangle = \overrightarrow{OP}$

$\vec{v} = \langle 0,4,-2\rangle = \overrightarrow{PQ}$ $\quad \vec{v} \neq P \times Q$

$\boxed{\vec{r} = r_0 + tv = \langle 3,0,4\rangle + t\langle 0,4,-2\rangle}$

c. ¿Qué pasa si hay 3 puntos?



P(3,0,4), Q(3,4,2) R(5,3,4)

no estén sobre L.

$\vec{V_1} = \vec{PQ} = \langle 0, 4, -2 \rangle$. no son

$\vec{V_2} = \vec{PR} = \langle 2, 3, 0 \rangle$ paralelos.

Éstos tres puntos No están sobre la misma recta.

m = 2.

(0, 1) (1, 2) (2, 5)

m = 1