Rocket Book Compiliation - Cálculo Multivariable

Christiaan Ketelaar
Organizado por : David Corzo

2020-01-06

Índice general

1. Sistemas Tridimensionales de coordenadas **4**

2. Distancias y superficies básicas **11**

3. Vectores **19**

4. Producto punto **28**

5. Producto cruz **35**

6. Ángulo entre vetores y ejes & Vectores paralelos y perpendiculares en n-dimensiones, Ecuación vectorial de una recta **44**

7. Rectas y planos **51**

8. Continuación de rectas y planos **60**

9. Funciones Vectoriales & Límites y continuidad **67**

10. Cálculo con funciones vectoriales: derivadas, integrales, etcétera **74**

11. Continuación de cálculo con funciones vectoriales **79**

12. Funciones de varias variables **87**

13. Curvas de nivel **93**

14. Derivadas parciales **102**

15. Derivadas parciales, rectas tangentes y planos tangentes **108**

16. Regla de la cadena, derivación implícita, planos y rectas tangentes **117**

17. Derivadas direccionales y gradiente **125**

18. Máximos y mínimos & problemas de aplicación, optimización **133**

19. Multiplicadores LaGrange **141**

20. Integrales dobles **148**

21. Integrales dobles con coordenadas polares **153**

22. Repaso de parcial **158**

23. Integrales dobles en coordenadas polares **166**

Capítulo 1

Sistemas Tridimensionales de coordenadas

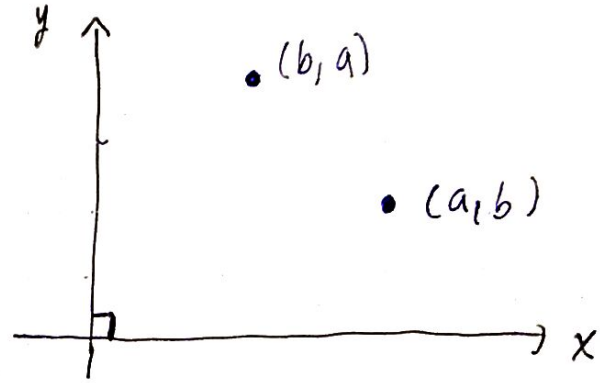
12.1 Sistemas Tridimensionales de Coordenadas.

Para localizar un punto en un plano, se necesitan 2 números.

a la coordenada x

b la coordenada y.

Plano $\mathbb{R}^2$



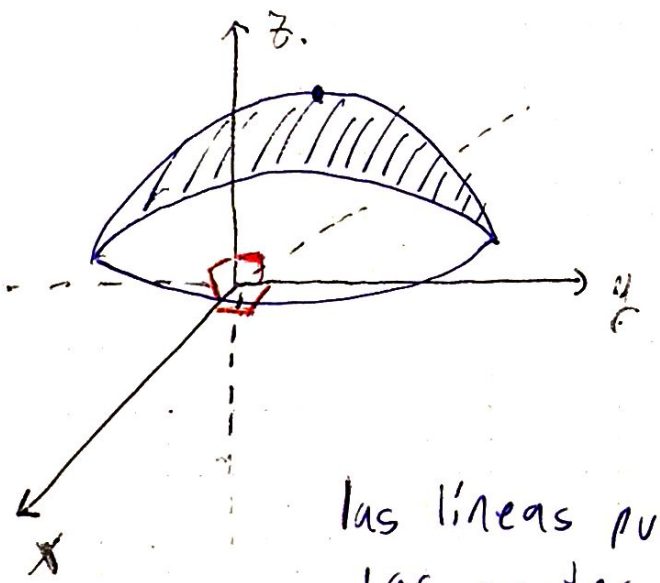
Los ejes de coordenadas son perpendiculares entre sí.

El sistema tridimensional de coordenadas rectangulares

Cada punto en el espacio es una terna ordenada (x, y, z)

Espacio $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \text{ talque } x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.



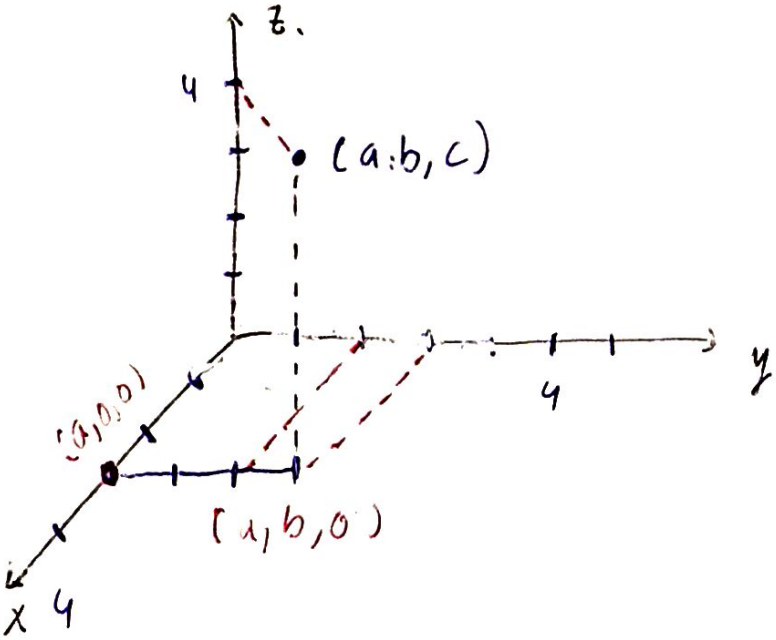
x transuersal

y horizontal

z vertical.

$z = f(x, y)$

las líneas punteadas se para simbolizar las partes de abajo, izquierda y detrás.

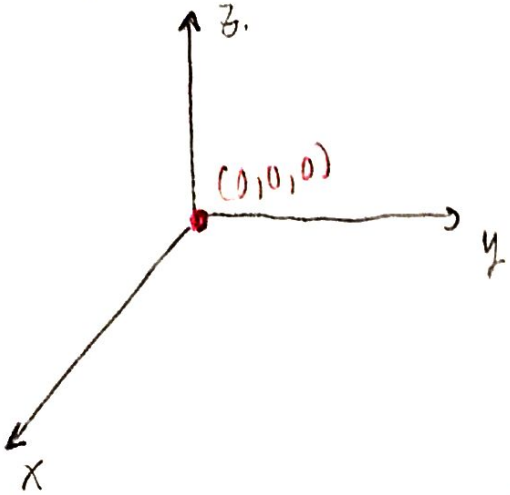


(a, b, c)

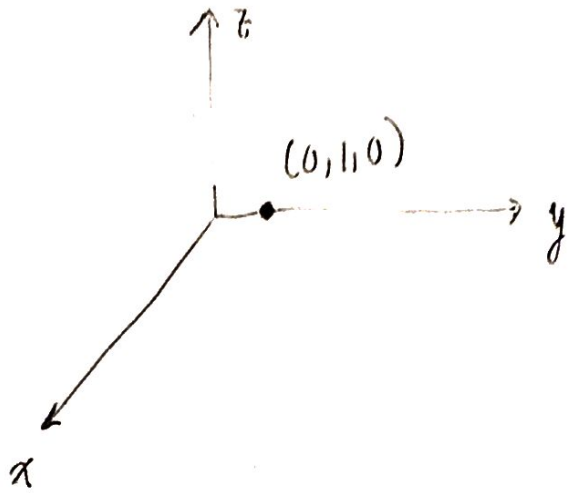
$(3, 3, 4)$

Ejercicio 1: Identifique los sigs puntos.

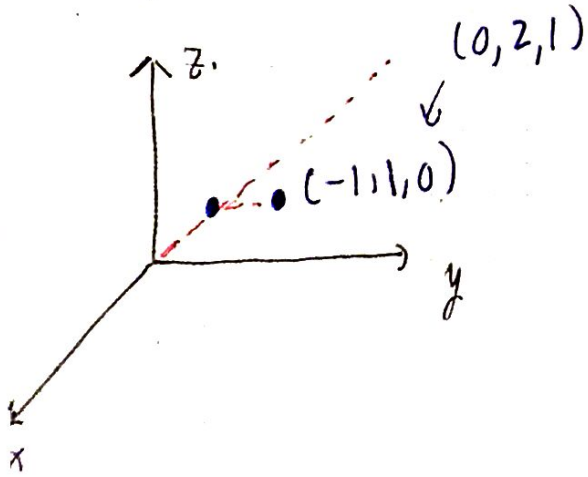
a. $(0,0,0)$



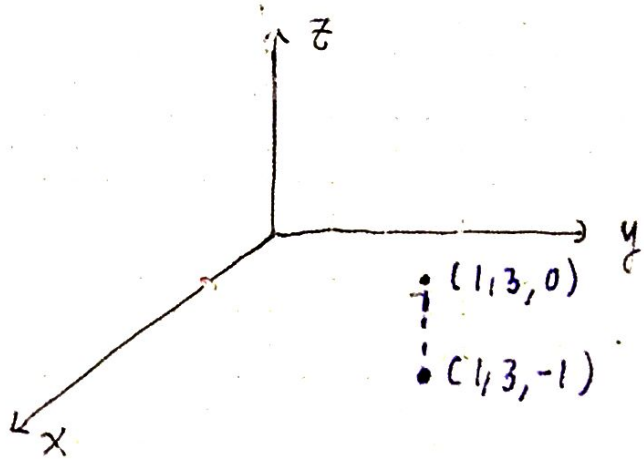
b. $(0, 1, 0)$



b. $(-1, 1, 0)$



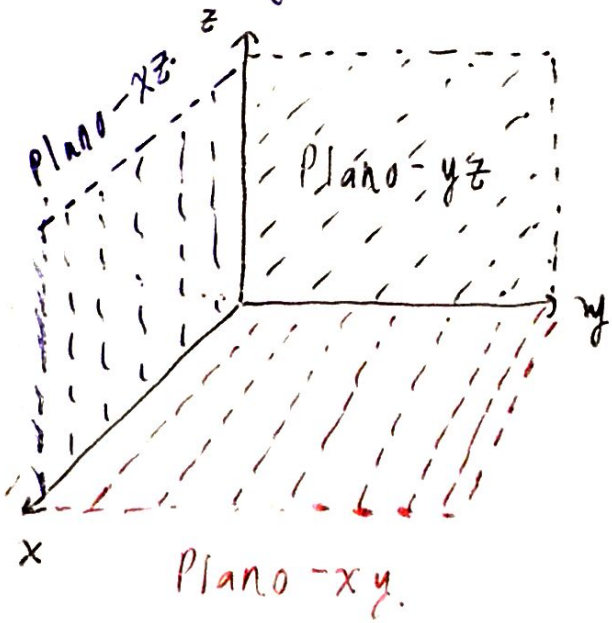
c. $(1, 3, -1)$



Planos coordenados.

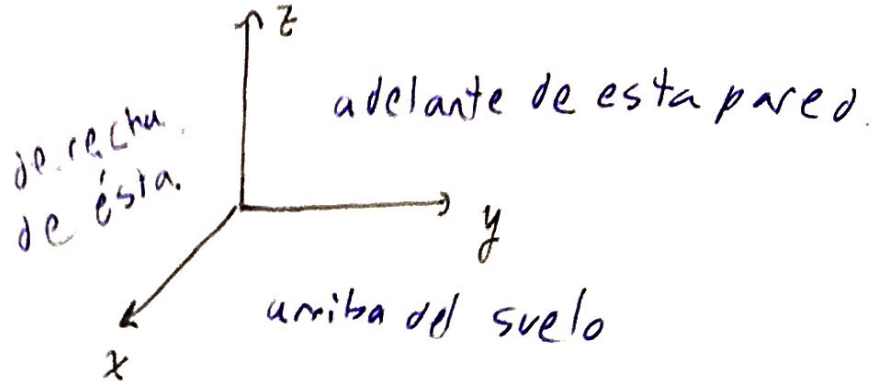
Plano $-xy$: $z = 0$. (el suelo)

Plano $-yz$ $x = 0$
(pared de atrás)



Plano $-xz$ $y = 0$.
(pared izquierda)

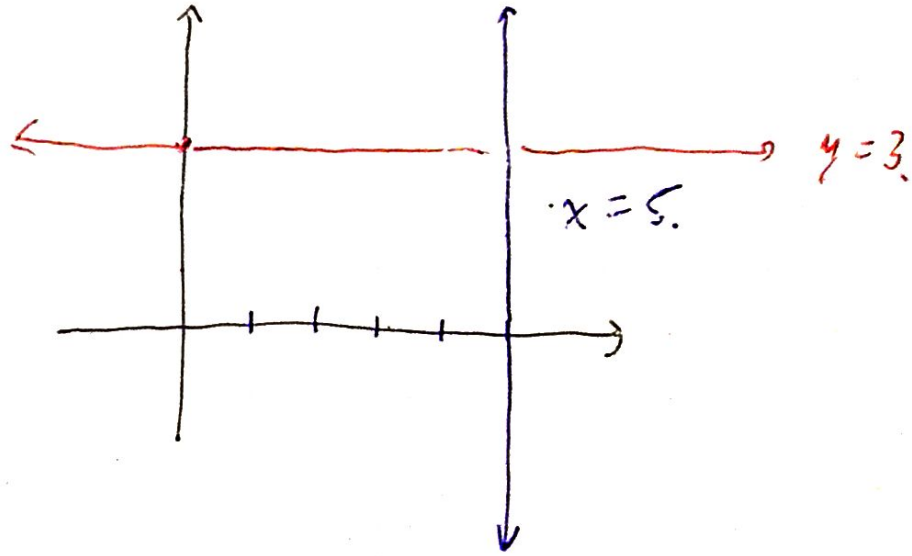
1er octante.
$x > 0, y > 0, z > 0$



Planos en el espacio.

En 2-D.

$x = 5$ ó $y = 3$.

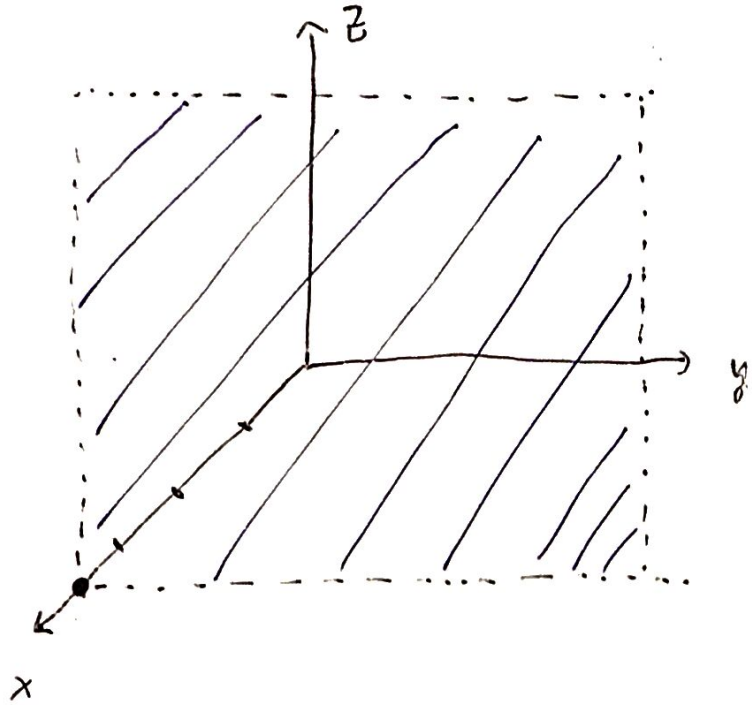


$x = a$
Rectas Verticales.

$y = b$.
Rectas Horizontales.

En 3-D $x=a$, $y=b$, $z=c$ son gráficas de planos.

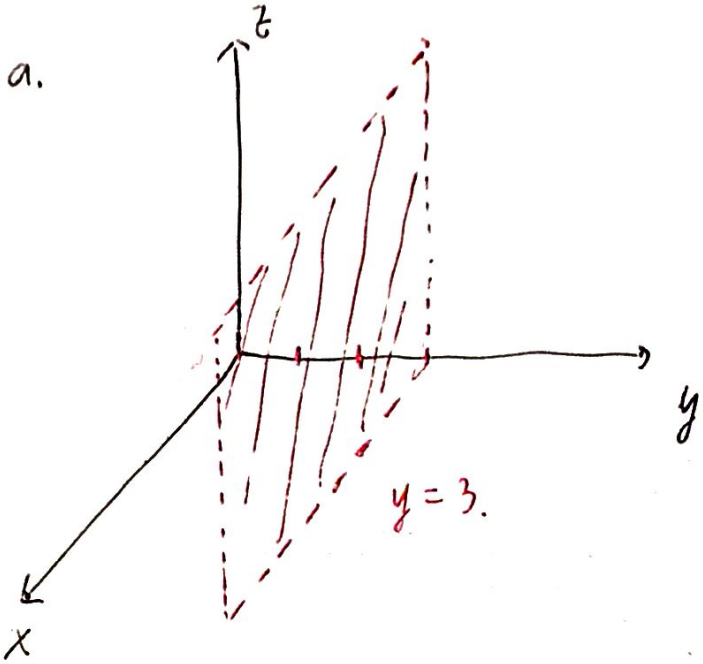
$x = 4$



$x = -2.$

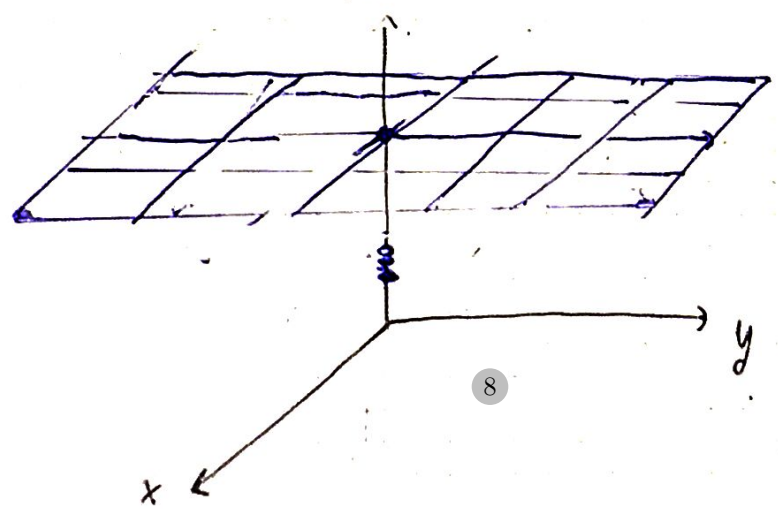
pared frontal.

$y = 3.$ pared derecha.



$z = 2.$

(techo)



Ec. lineal en 3-D va a graficar un plano.

Ec. Plano. $ax + by + cz = d$.

Generalmente se grafican sólo en el primer octante si cada a, b, c y d es positiva.

Intersección x : $y = 0,\ z = 0$ $(a, 0, 0)$

Intersección y : $x = 0,\ z = 0$ $(0, b, 0)$

Intersección z : $x = 0,\ y = 0$ $(0, 0, c)$

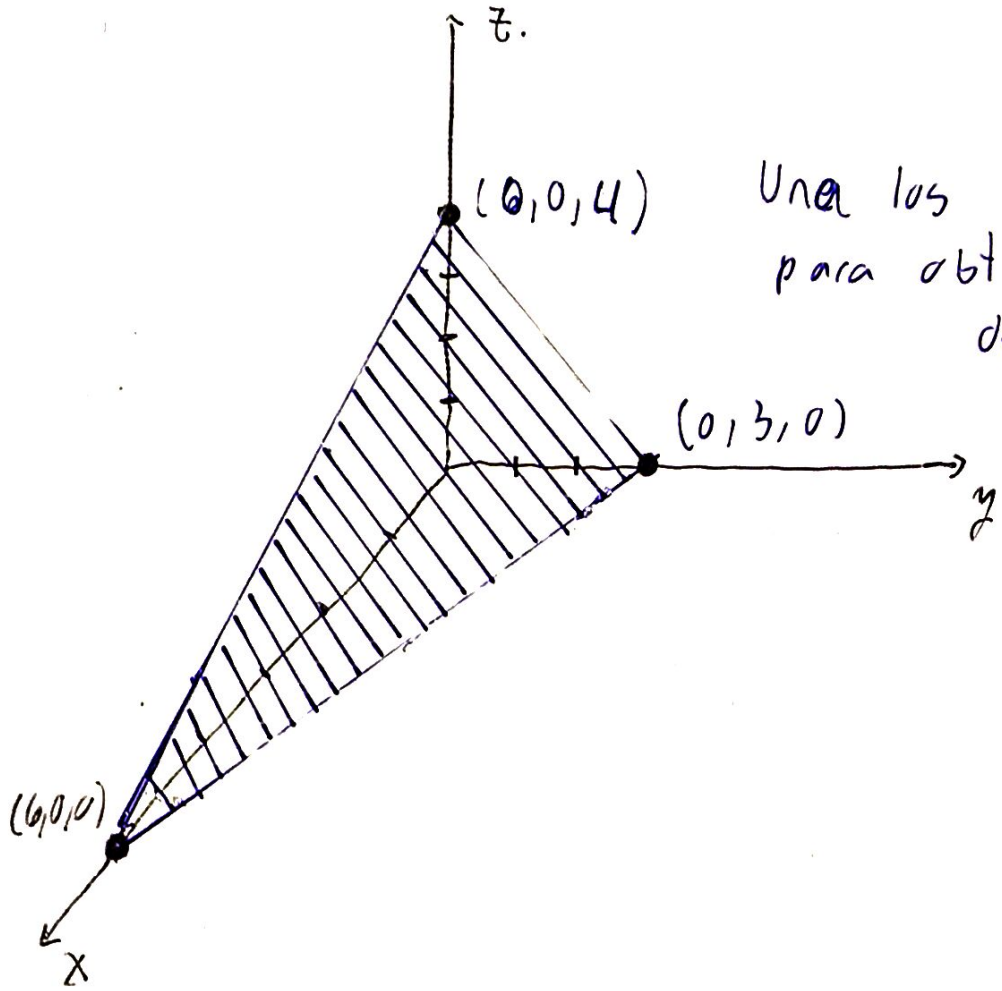
Ejercicio 3: Bosqueje el plano $2x + 4y + 3z = 12$ sólo en el primer octante.

Intersecto-x: $2x = 12 \Rightarrow (6, 0, 0)$

Intersecto-y: $4y = 12 \Rightarrow (0, 3, 0)$

Intersecto-z: $3z = 12 \Rightarrow (0, 0, 4)$

6.



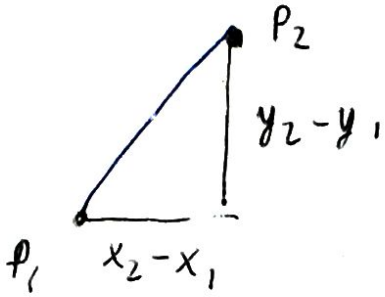
Una los tres puntos para obtener un segmento del plano

Capítulo 2

Distancias y superficies básicas

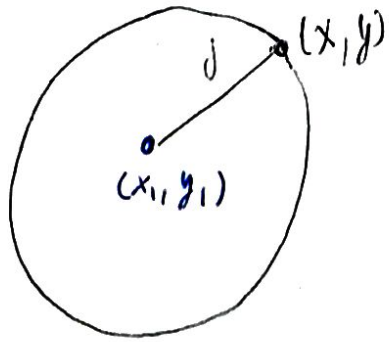
12.1.2 Distancias y Superficies Básicas.

En 2-D, la distancia entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = d^2.$$



Ec. Circunferencia de radio d centrada en (x_1, y_1).

En 3-D, la distancia entre $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$

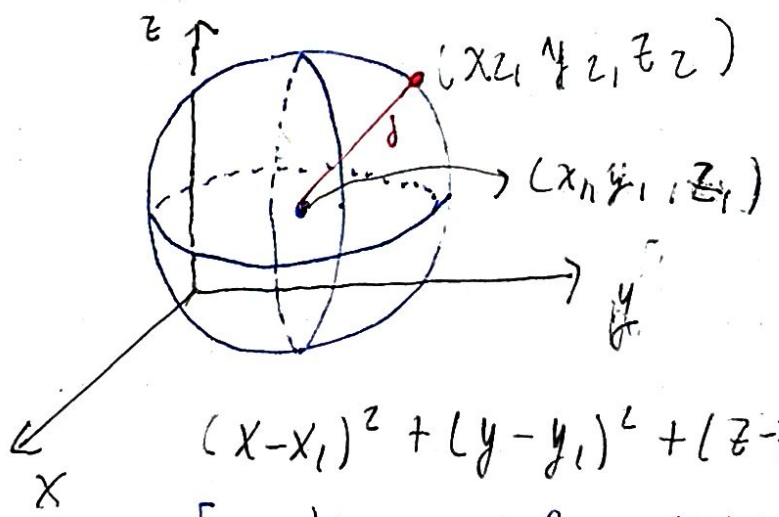
Calcule la diferencia entre z_2 & z_1.

$$\boxed{d = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

no puede ser negativa.

Notación $d = |P_2 P_1|$

Pág. 15.



$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = d^2.$$

Ec. de una esfera de radio r centrada en (x_1, y_1, z_1).

Esfera más utilizada centrada en el origen $(0,0,0)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad \text{radio } r.$$

Ejercicio 4: Encuentre el centro y radio de la esfera cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 4z + 4 = 0. \qquad (P\ 16).$$

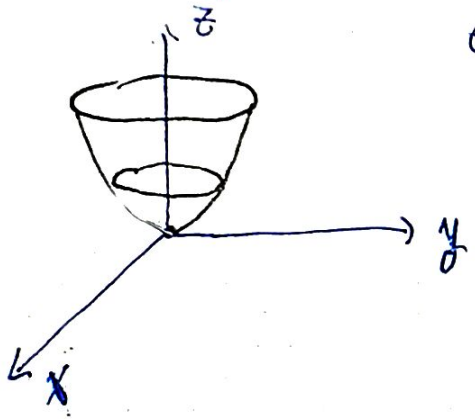
$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 \quad z^2 + 4z + 4 = -4 + 16 + 9 + 4$$

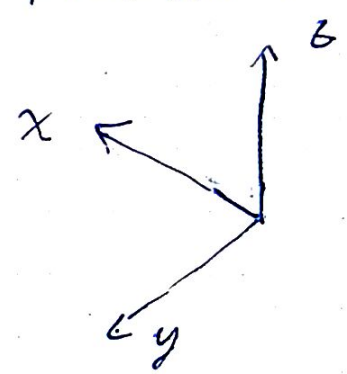
$$(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 25 = r^2$$

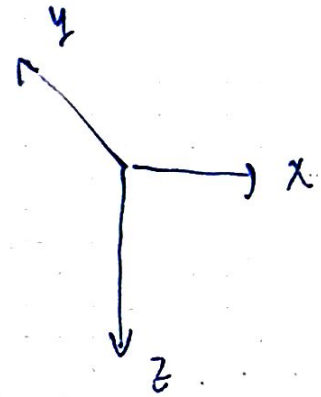
centro de esfera $(-4, 3, -2)$ Radio $\sqrt{25} = 5.$

$z = x^2 + y^2$ no es una esfera.

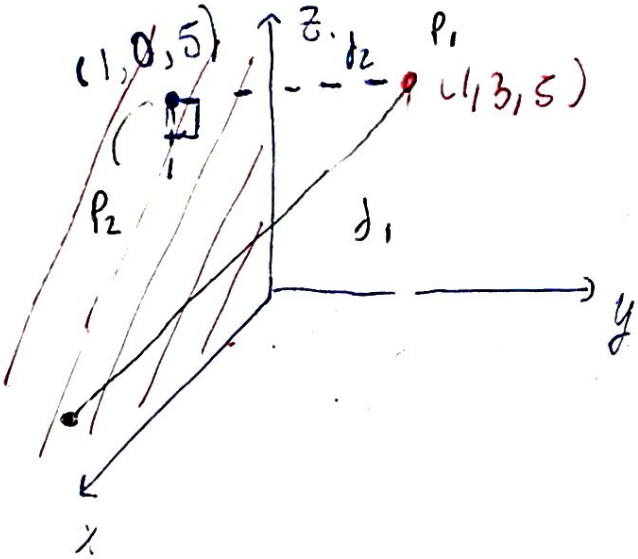
es un paraboloide.







Distancia entre un punto y un plano-coordenado.



Encuentre la distancia entre el punto (1, 3, 5) y el plano xz. (tiene infinitos puntos)

En el plano xz $y = 0$

si se estrella el punto (1,3,5) contra el plano xz se obtiene el punto (1, 0, 5).

"Estrellar": Encuentre la proyección del punto P sobre el plano.

Distancia entre P_1 y P_2 $\quad d = \sqrt{(1-1)^2 + (3-0)^2 + (5-5)^2}$

$d = \sqrt{0 + 9 + 0} = 3$

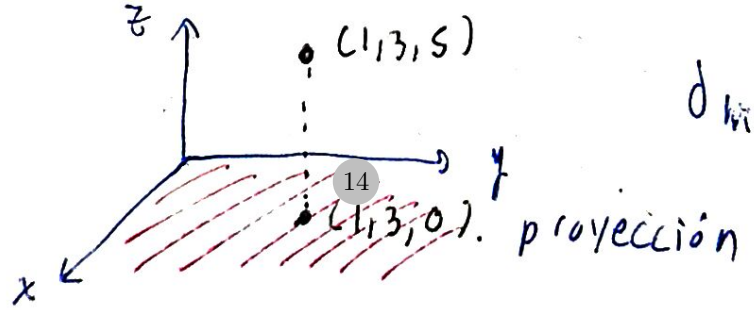
Gabriel la proyección del punto (a, b, c) sobre el plano xz es el punto (a, 0, c).

Distancia mínima entre P y el plano es

$d = \sqrt{0 + b^2 + 0} = |b|.$ } de la componente $-y$.

¿Cuál es la distancia entre el punto (1,3,5) y el plano xy?

$z = 0.$



$d_{min} = \sqrt{0 + 0 + 5^2}$

$= 5.$

Ejercicio 6: Considere los puntos $A(3,0,-4)$, $B(9,0,0)$ y $C(0,1,\sqrt{15})$.

$y=0.$ $y=0$ $z=0.$

a. ¿Cuál de los sigs. puntos está más cercano al origen?

Calcule la distancia de cada punto respecto al origen.

$O(0,0,0)$

$$d_{AO} = |AO| = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|BO| = \sqrt{81+0+0} = \sqrt{81} = 9$$

$$|CO| = \sqrt{0+1+15} = \sqrt{16} = 4.3$$

C es el más cercano al origen.

b. ¿Cuáles de los puntos están sobre el plano yz?

Ec. Plano yz: $x=0$.

A y B no están sobre el plano yz $x \neq 0$.

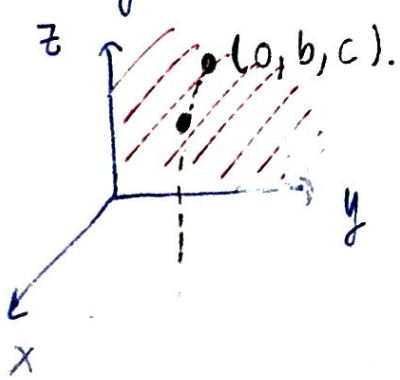
El punto C $(0,1,\sqrt{15})$ si está sobre este plano.

Comentario. A está sobre el plano xz.

B está sobre el eje x.

está sobre el plano xy & xz

c. ¿Cuáles de los puntos está más cercano al plano yz? $x=0$.



Como C está sobre el plano yz éste es el más cercano a este plano $d=0$.

Encuentre las proyecciones y las distancias

$x=0$

$A(3,0,-4)$, $P_A=(0,0,-4)$, $d_A=3$

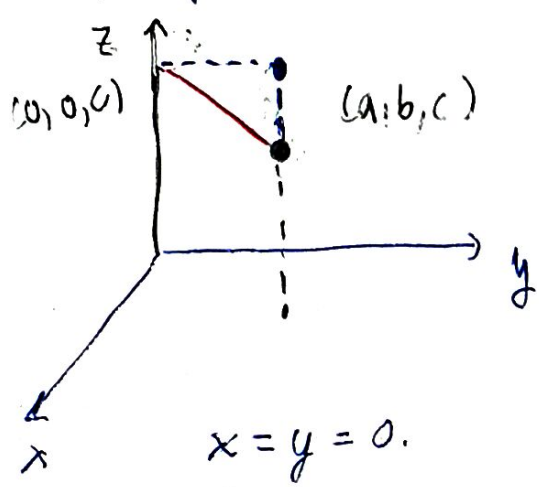
$B(9,0,0)$, $P_B=(0,0,0)$, $d_B=9.$

$C(0,1,\sqrt{15})$ $P_C=(0,1,\sqrt{15})$, $d_C=0$ ✓

mismo punto, ésta sobre el plano yz

Distancia entre un punto y un eje.

5. ¿Cuál de los siguientes puntos está más cercano al eje-z.



$x=y=0.$

En el eje z $x=0$, $y=0$.

La proyección del punto $P(a,b,c)$ al eje z es el punto $P_1(0,0,c)$.

$d_{min}=\sqrt{a^2+b^2+0}$

Encuentre las proyecciones sobre el eje y las distancias.

$A(3,0,-4)$, $P_A(0,0,-4)$, $d_A=\sqrt{9+0+0}=3.$

$B(9,0,0)$ $P_B.(0,0,0)$ $d_B=\sqrt{81+0+0}=9.$

$C(0,1,\sqrt{15})$ $P_C(0,0,\sqrt{15})$ $d_C=\sqrt{0+1+0}=1$

crítico. más cercano

Plano $x=0$ plano yz

$y=0$ plano xz

$z=0$ plano xy

Ejes

$x=0, y=0$ Eje-z

$x=0, z=0$ Eje-y

$y=0, z=0$ Eje-x.

Superficies. Básicas: Planos, Cilindros y Esfera.

En 12.6 superficies cuádricas cilindro parabólico
cilindro (función).

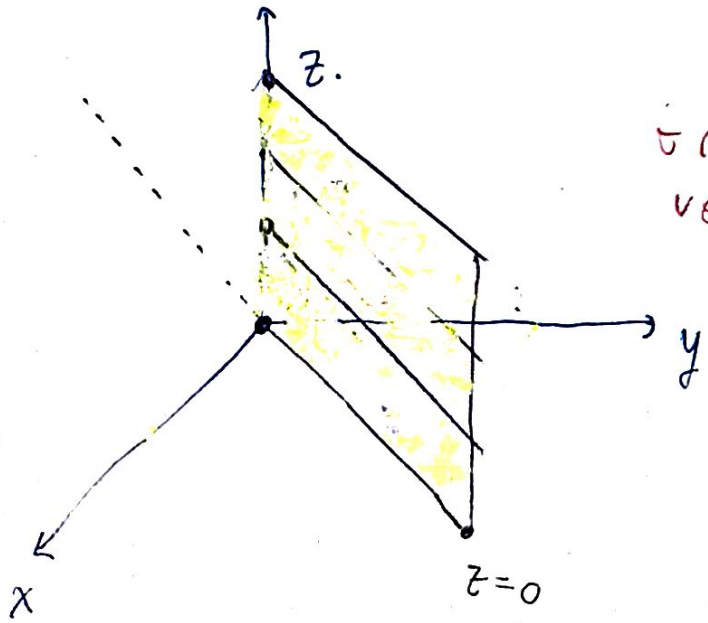
Ejercicio 7: Bosqueje el plano $y = x$. en el 1er octante.

$z = 0$: $y = x$

$z = 1$ $y = x$

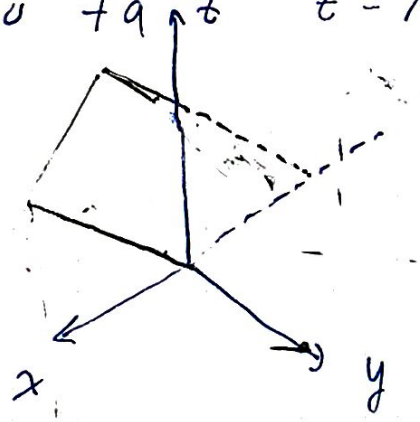
$z = a$ $y = x$

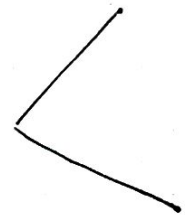
sólo tiene intersectos con el eje $-z$.



traslade verticalmente $y = x$.

Ejercicio 7a $z = x$.

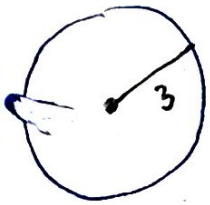




Difícil de graficar por la perspectiva.

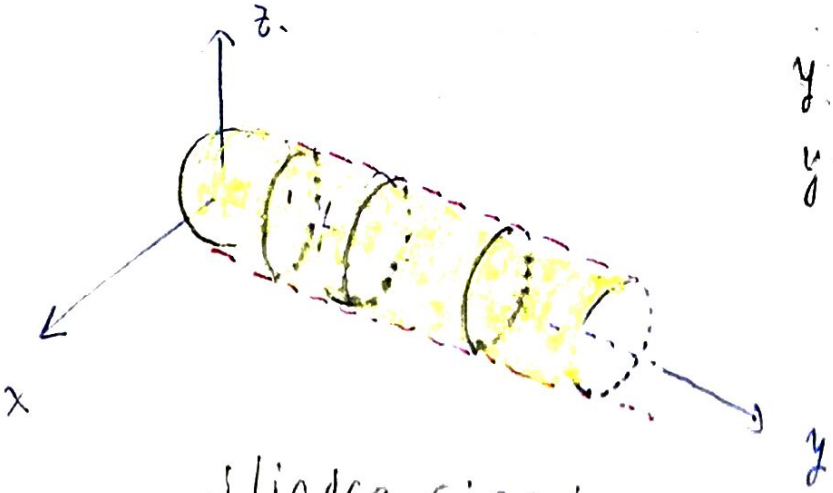
Ejercicio 8: Grafique las siguientes superficies

a. $x^2 + z^2 = 9.$



En 2-D
· circunferencia de radio 3.

Variable y.

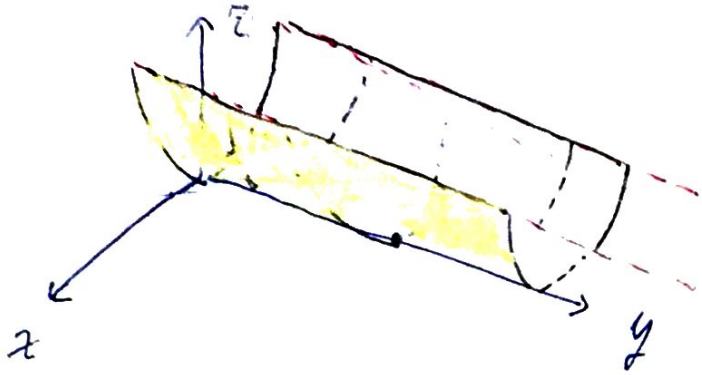


$y = 0 \qquad x^2 + z^2 = 9$

$y = 2 \qquad x^2 + z^2 = 9$

Cilindro circular de radio centrado en el eje-y.

b. $z = x^2.$

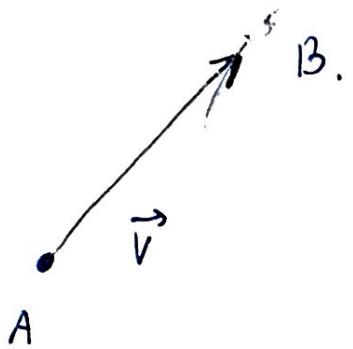


· hoja doblada
cilindro parabólico.

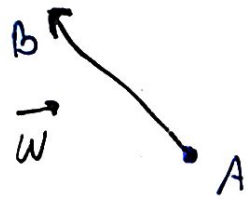
Capítulo 3

Vectores

12.1 Vectores p. 21.



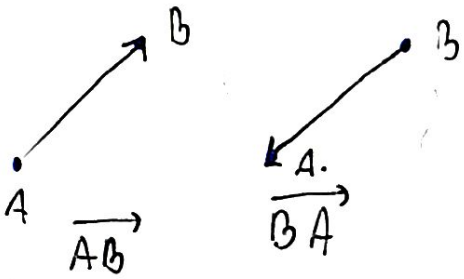
Un vector: tiene magnitud y dirección



se denota en negrilla **v**
o una flecha sobre la letra $\vec{v}$

la longitud de cada segmento es la magnitud del vector.
la flecha indica su dirección.

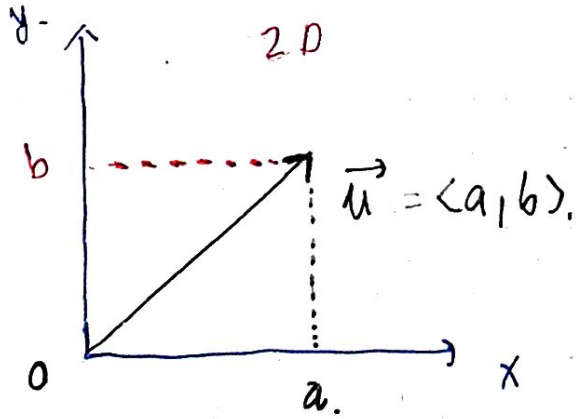
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ segmento de recta dirigido empieza en el punto A y termina en el B.

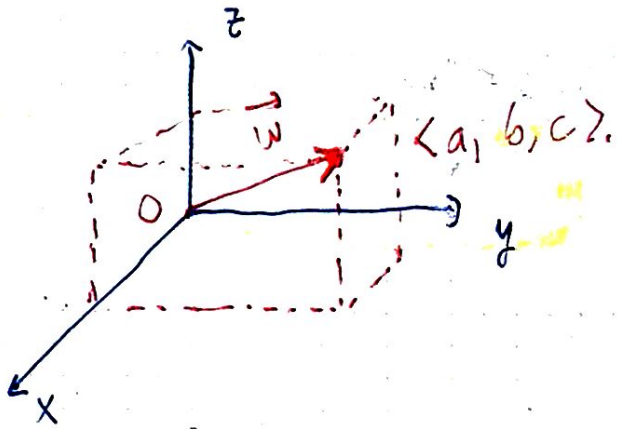


$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

vector cero $\vec{0}$ no tiene ni magnitud ni dirección.

Sistema de coordenadas y las componentes de un vector.



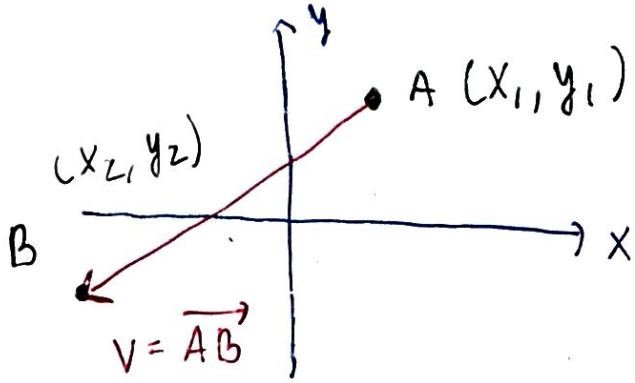


$\vec{u} = \langle a, b \rangle$ ó $[a, b]$

$\vec{w} = \langle a, b, c \rangle$.

las llaves $\langle\ \rangle$ denotan a un vector.

Vector Posición:



En 2-D.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle.$$

En 3-D.

$A(x_1, y_1, z_1)$ & $B(x_2, y_2, z_2)$

$$\overrightarrow{BA} = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2 \rangle.$$

Magnitud de un vector: la distancia entre el punto B y el punto A.

$$\boxed{|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}$$

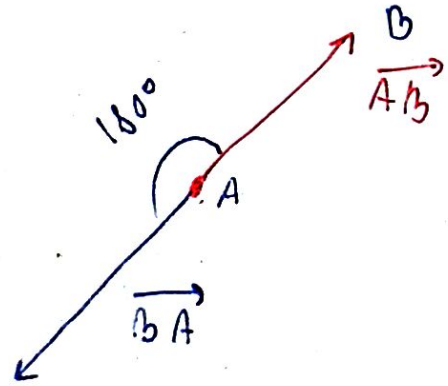
Denota con $|\ |$ ó $\|\ \|$.

si $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ $\quad |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Observaciones: $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

pero $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|.$$



$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

• $\vec{0}$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}.$$

$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ vector cero

no tiene dirección.

$$\langle x_1 - x_1, y_1 - y_1, z_1 - z_1 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle.$$

Ejercicio 1: Considere el vector $\overrightarrow{AB}$ con un punto inicial $A(1, 2, -4)$ y punto final $B(4, 8, 2)$.

a. Encuentre el vector posición $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

$\vec{u} = \langle 3, 6, 6 \rangle$ $\qquad 2-(-4)$

b. Encuentre la longitud del vector $\vec{u}$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36 + 36} = \sqrt{81} = 9.$$

Operaciones de vectores.

I. Suma de vectores ✓
II. Multiplicación por un escalar. ✓
} Álgebra Lineal.

12.3 Producto Punto
12.4 Producto Cruz.

Suma de vectores.

$\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \qquad \vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle.$

Sume cada componente.

$$\boxed{\vec{u} + \vec{w} = \langle u_1 + w_1, u_2 + w_2, u_3 + w_3 \rangle.}$$

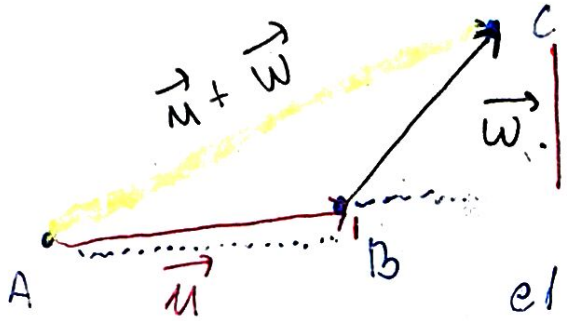
Multiplicación por un escalar. K es una constante. denotada como un escala

Multiplique cada componente.

$$\boxed{K\vec{w} = \langle Kw_1, Kw_2, Kw_3 \rangle.}$$

¿Cómo se pueden visualizar geométricamente estas operaciones?

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$

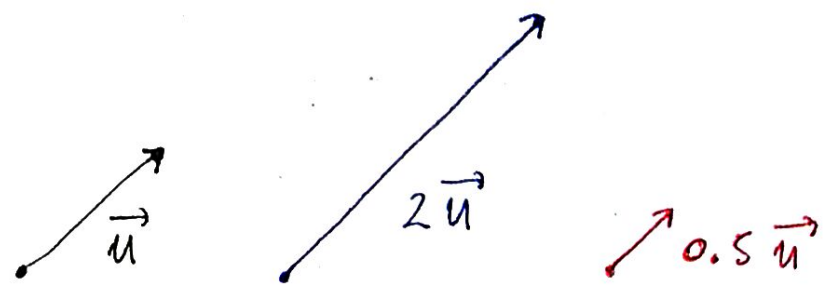


$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
$$\vec{u} + \vec{w} = \overrightarrow{AC}$$

Suma de vectores

el segundo vector w empieza en el punto donde termina el 1ero

Multiplicación por un escalar

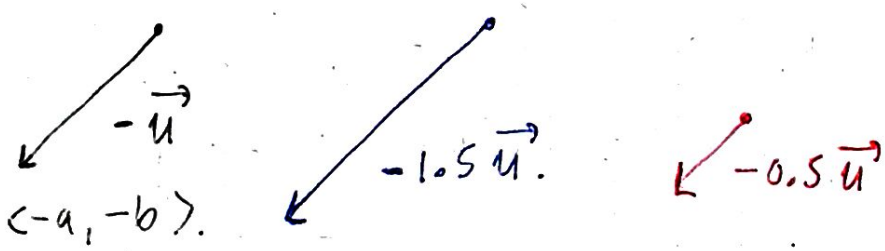


$\langle a, b \rangle$ $\quad$ $\langle 2a, 2b \rangle$ $\quad$ $2\langle a, b \rangle$.

- Se preserva la dirección si $K \geq 0$.

si $K > 1$, el vector se estira.

si $0 < K < 1$ el vector se comprime.



$\langle -a, -b \rangle$.

$\vec{u} + (-\vec{u}) = \langle 0, 0 \rangle$.

Si $K < 0$, el vector cambia de dirección. (cambia en 180°).

Negativo de un vector: cuando $K = -1$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ $\quad$ $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$.

Resta o diferencia de vectores: Caso especial de la suma

$$\vec{u} + (-\vec{w}) = \vec{u} - \vec{w}$$
$$= \langle u_1 - w_1, u_2 - w_2, u_3 - w_3 \rangle.$$

Reste cada componente entre sí.

Se puede pensar como la suma entre $\vec{u}$ y el negativo de $\vec{w}$.

Ejercicio 2: Sean $\vec{a} = \langle 1, -2, 5 \rangle$, $\vec{b} = \langle -2, 1, -3 \rangle$.

combinación lineal de vectores. $\vec{u}, \vec{w}$ en 2-D.

$$K_1 \vec{u} + K_2 \vec{w} = \langle K_1 u_1 + K_2 w_1, K_1 u_2 + K_2 w_2 \rangle$$

a. $\vec{a} + \vec{b} = \langle -1, -1, 2 \rangle.$

b. $2\vec{a} - 4\vec{b} = \underbrace{\langle 2, -4, 10 \rangle}_{2\vec{a}} + \underbrace{\langle 8, -4, +12 \rangle}_{-4\vec{b}} = \underline{\langle 10, -8, 22 \rangle}.$

c. $|2\vec{a} - 4\vec{b}| = \sqrt{100 + 64 + 484} = \sqrt{648} \approx 25.45$

$|a| = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30} \approx 5.47.$

$|b| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14} \approx 3.74.$

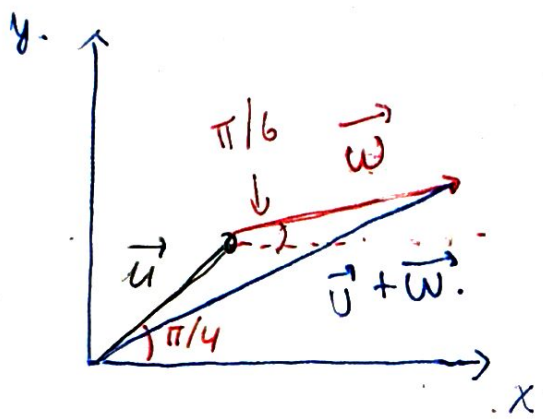
$|a + b| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6} \approx 2.45.$

$$|a + b| \neq |a| + |b|$$
$$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Problema Bono: Considere el vector $\vec{u} = \langle 1, 1 \rangle$ y $\vec{w} = \langle 1, \sqrt{3} \rangle$.

Encuentre la magnitud y el ángulo respecto al eje-x del vector $\vec{w} + \vec{u}$.

$\vec{w} + \vec{u} = \langle 2 ; 1 + \sqrt{3} \rangle$.



$|\vec{u}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\tan\theta = y/x$.

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \pi/4$.

$|v| = \sqrt{1+3} = 2$.

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi/6$.

$|\vec{w} + \vec{u}| = \sqrt{4 + (1+\sqrt{3})^2}$

≈ 3.3858

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 0.93$ rad. $\approx 53.79°$

Vectores Bases o Estándar.

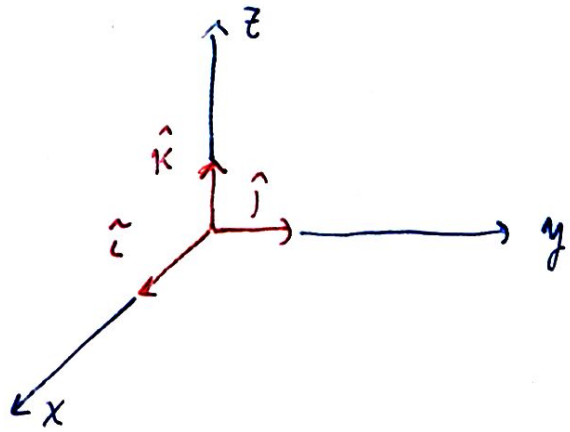
$$\vec{u} = \langle 3, 6, 7 \rangle = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}$$

se denotan como $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ y apuntan en la dirección de cada eje coordenado.

$\hat{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$

$\hat{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$

$\hat{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$



Permiten expresar cada vector $\vec{u}$ como una combinación de los vectores estándar.

$$\vec{u} = \langle a, b, c \rangle = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

Magnitud de $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$

JNO.

$$|\hat{i}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1 \qquad |\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

Vectores Unitarios: tienen longitud igual a 1,

$$|u| = 1$$

¿Qué sucede si $|a| \neq 1$? se encuentra el vector unitario $\vec{u}$ asociado $\vec{a}$ dividiendo por $|\vec{a}|$.

El vector $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{|a|}$ es siempre unitario.

Ejercicio 3: Sean $\vec{a} = 2\hat{\imath} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = 5\hat{\jmath} + 4\hat{k}$.

Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector $2\vec{a} + 3\vec{b}$.

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = 4\hat{\imath} - 6\hat{k} + 15\hat{\jmath} + 12\hat{k} = 4\hat{\imath} + 15\hat{\jmath} + 6\hat{k}$$

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{16 + 225 + 36} = \sqrt{277}$$

unitario $\vec{u} = \dfrac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{|2\vec{a} + 3\vec{b}|} = \dfrac{1}{\sqrt{277}} \langle 4, 15, 6 \rangle$.

Capítulo 4

Producto punto

12.3 Producto Punto

Operaciones entre vectores $\vec{a} + \vec{b}$ (suma)

suma $\vec{a} + \vec{b}$

Mult. por un escalar $K\vec{a}$

Producto punto $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Producto cruz $\vec{a} \times \vec{b}$

Producto punto entre $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

es el número $a \cdot b$. dado por:

$$\boxed{a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.}$$

Para un vector en n dimensiones.

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Para que sea posible $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen que tener la misma dimensión

$\vec{a} = \langle 1, 2, 0, 4 \rangle$ $\vec{b} = \langle 2, 1 \rangle$. faltan 2 componentes.

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ indefinido

Propiedades: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ conmutativa.

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ distributiva.

$(K\vec{a}) \cdot \vec{b} = K(\vec{a} \cdot \vec{b})$

Ejercicio 1: Calcule el producto punto.

a. $\vec{a} = \langle 6, -2, 3 \rangle$, $\vec{b} = \langle 2, 5, 1 \rangle$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6(2) - 2(5) + 3(1) = 12 - 10 + 3 = 5$

$\vec{b} \cdot \vec{a} = 12 - 10 + 3 = 5$ Gracias AA.

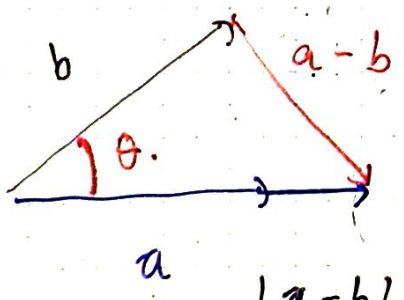
b. $\vec{u} = \hat{j} + 2\hat{i} + 3\hat{k}$ $\vec{v} = 2\hat{k} + 4\hat{i} + 0\hat{j}$ vectores base

$\underset{\vec{u}}{\langle 2, 1, 3 \rangle} \cdot \underset{\vec{v}}{\langle 4, 0, 2 \rangle} = 8 + 0 + 6 = 14$

c. $\vec{w} = \langle 1, 0, -2 \rangle$ $\vec{v} = \langle 2, 0, 1 \rangle$.

$\vec{w} \cdot \vec{v} = 2 + 0 - 2 = 0$ $\boxed{\vec{w} \cdot \vec{v} = 0}$

Definición Alternativa del Producto.



$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta.$

Ley de cosenos.

$|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b| \cos\theta.$

a^2 no existe

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = |\vec{a}|^2.$

$|a| = \sqrt{a \cdot a}$

$$(a-b)\cdot(a-b) = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta.$$

$$a\cdot a - \underbrace{a\cdot b - b\cdot a}_{} + b\cdot b$$

$$|a|^2 - 2\,a\cdot b + |b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta.$$

$$\boxed{a\cdot b = |a||b|\cos\theta.} \qquad |a\times b| = |a||b|\sin\theta.$$

Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, el ángulo θ entre los vectores es

$$\cos\theta = \frac{a\cdot b}{|a|\,|b|} \qquad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{a\cdot b}{|a|\,|b|}\right)$$

Ejercicio 2: Determine el ángulo entre los dos vectores.

a. $\vec{a} = \langle 4, 3\rangle \quad \vec{b} = \langle -3, 4\rangle.$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -12 + 12 = 0 \qquad |a| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$|b| = \sqrt{9+16} = 5.$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{0}{25}\right) = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}.$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ y el ángulo es $90°$ $\quad \vec{a}\perp\vec{b}$ ortogonales

ortogonalidad $\Longleftrightarrow$ perpendicularidad.

b. $\vec{a} = \langle 1, -2 \rangle$, $\vec{b} = \langle 3, -1 \rangle$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \qquad |a| = \sqrt{5} \qquad |b| = \sqrt{10}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|a||b|} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ó } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi/4.$$

c. $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$ $\qquad \overset{\vec{a}}{\langle 1, 0, 1 \rangle} \qquad \overset{\vec{b}}{\langle 1, 1, 0 \rangle}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 0 + 0 = 1$

$|\vec{a}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \qquad |\vec{b}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $\qquad$ #16, #14, #13

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Vectores perpendiculares ó ortogonales., denotado como $a \perp b$.

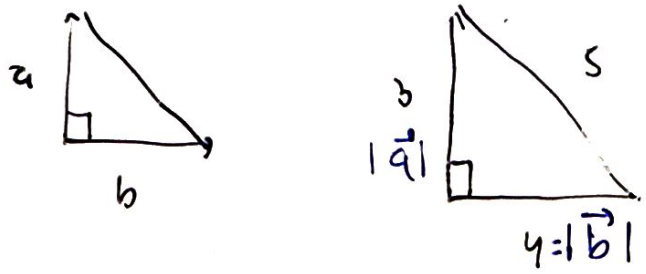
$$a \perp b \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b| \cos \pi/2 = 0.$

Ejercicio 3: Determine si los sigs. son ortogonales entre sí.

$\vec{a} = \langle 4, 3, 1 \rangle$, $\vec{b} = \langle 2, -2, -2 \rangle$.,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 - 6 - 2 = 0$ $\qquad$ Sí son ortogonales.



$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

El triángulo es rectángulo

$|a|^2+|b|^2 = |c|^2$

b. $\vec{u} = \langle 1, 8, -2, 4\rangle$ $\vec{w} = \langle 3, 4, 6, -1\rangle$

$\vec{u}\cdot\vec{w} = 3+32-12-4 = 19 \neq 0$

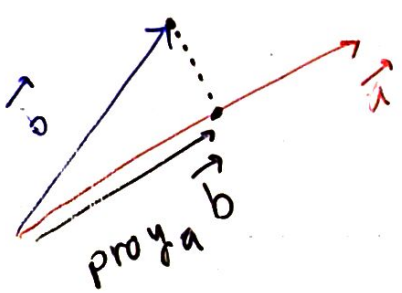
NO SON ORTOGONALES.

c. $\vec{a} = \langle 1, 0, 0\rangle$ $\vec{b} = \langle 0, 1, 0\rangle$ $\vec{c} = \langle 0, 0, 1\rangle$

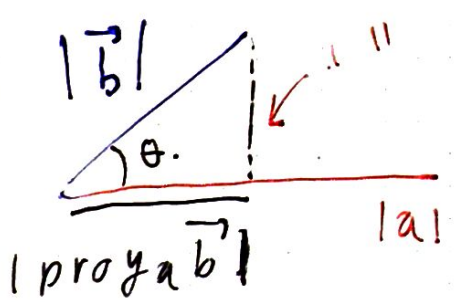
$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ $\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$ $\vec{b}\cdot\vec{c} = 0.$ 6 SW.

Mutuamente ortogonales.

Proyecciones: cuál vector se proyecta sobre otro vector



El vector $\text{proy}_a(\vec{b})$ es la proyección vectorial de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

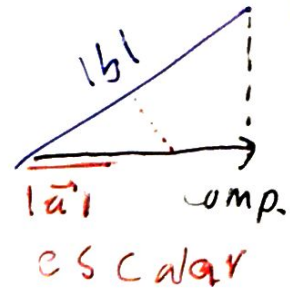


si el ángulo entre a y b es θ.

$$\frac{|\text{proy}_a\vec{b}|}{|\vec{b}|} = \cos\theta. = \frac{a\cdot b}{|a||b|}$$

proyección escalar: $|\text{proy}_a\vec{b}| = \dfrac{a\cdot b}{|a|}.$

proyección escalar: $\text{comp}_a \vec{b} = \dfrac{a \cdot b}{|a|}$.



proyección vectorial

tiene la misma dirección que el vector $\vec{a}$.

utilice el vector $\dfrac{\vec{a}}{|a|}$ para encontrar la dirección de $\vec{a}$

$$\text{proy}_a \vec{b} = \frac{a \cdot b}{|a|} \frac{\vec{a}}{|a|} = \left(\frac{a \cdot b}{a \cdot a}\right) \vec{a} \quad \text{vector.}$$

Observaciones: $\text{comp}_b \vec{a} = \dfrac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|b|} \neq \text{comp}_a \vec{b}$

Ejercicio 5: Halle la proyección escalar y la proyección vectorial de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

a. $a = \langle -6, 8 \rangle \quad b = \langle 3, 4 \rangle$.

Proy escalar: $\text{comp}_{\vec{a}} \vec{b} = \dfrac{a \cdot b}{|a|} = \dfrac{-18+32}{\sqrt{100}} = \dfrac{14}{10} = \dfrac{7}{5}$.

Proy. vectorial: $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \dfrac{a \cdot b}{|a|} \dfrac{\vec{a}}{|a|} = \dfrac{7}{50} \langle -6, 8 \rangle$

b. $\vec{a} = \langle 1, 1, 3 \rangle \quad \vec{b} = \langle -2, 3, 1 \rangle$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2+3+3 = 4 \qquad |a| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$

Escalar $\text{comp}_{\vec{a}} \vec{b} = \dfrac{4}{\sqrt{11}}$ Vectorial. $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \dfrac{4}{11} \langle 1, 1, 3 \rangle$

Capítulo 5

Producto cruz

12.4 Producto Cruz.

Determinantes Matriz (Arreglo rectangular de números)
Cuadrada (mismo # de filas y columnas)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Det orden 2. Matriz 2×2

p.e. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-1)(4) = 6 + 4 = 10$

Determinante de orden 3: Matriz 3×3
suma de tres determinantes de orden 2.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

3×3 3 matrices 2×2.

p.e $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= 2(6-0) - 0 + 2(-1-3)$

$= 12 - 8 = 4.$

El Producto Cruz.

Dados dos vectores $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ &
$\vec{b} = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k}$

¿Cómo se encuentra un vector $\vec{c}$ que es perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$.?

$\vec{c}\cdot\vec{a} = 0$ $\qquad$ $\vec{c}\cdot\vec{b} = 0.$

Resuelva para c_1, c_2, c_3

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0$$
$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 = 0$$

El producto cruz $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ es un vector perpendicular a ambos vectores $\vec{a}$ & $\vec{b}$.

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}} = \hat{\imath}\overbrace{(a_2b_3 - a_3b_2)}^{c_1} - \hat{\jmath}(a_1b_3 - a_3b_1)\}\ c_2 + \hat{k}\underbrace{(a_1b_2 - a_2b_1)}_{c_3}$$

Observaciones:

- El producto cruz es un vector, mientras que el producto es un número o escalar.
- El producto cruz no es conmutativo $\vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{b}\times\vec{a}$

$$\vec{b}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(b_2a_3 - a_2b_3) + \hat{\jmath}(a_1b_3 - a_3b_1) + \hat{k}(a_2b_1 - a_1b_2)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 15\hat{i} - 10\hat{j} - 3\hat{k}$$

11. verifique $\vec{a} \times \vec{b}$ es ortogonal a $\vec{a}$ & a $\vec{b}$.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 2, 3, 0 \rangle = 30 - 30 + 0 = 0.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 1, 0, 5 \rangle = 15 + 0 - 15 = 0.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp a, b.$$

Aclaración: 2-D $\quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ $\quad 3 \times 2.$ no es posible evaluarlo, porque la matriz no es cuadrada

Existe en 3-D.

4-D $\quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{l} \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ ¡NO ES POSIBLE evaluarlo.

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 15\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}$$

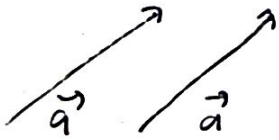
En general $\quad \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

Ejercicio 1: Encuentre el producto cruz entre $\vec{a} = \langle 1,1,-1 \rangle$ y $\vec{b} = \langle 2,-2,3 \rangle$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}(3-2) - \hat{j}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \hat{k}(-2-2)$$

$$= \boxed{\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}}$$

$$\boxed{\vec{b} \times \vec{a} = -\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}}$$



Ejercicio 2: Encuentre $\vec{a} \times \vec{a}$.

$\vec{a}$ es paralelo a sí mismo $\quad \vec{a} \times k\vec{a}$.

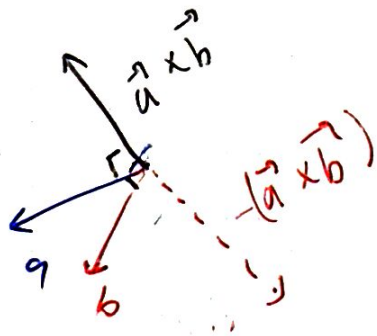
$$\vec{a} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}\overbrace{(a_1a_2 - a_1a_2)}^{0} - \hat{j}(0) + \hat{k}(0).$$

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}} \qquad \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

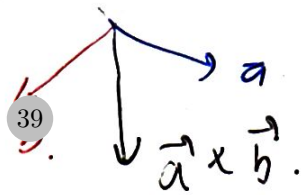
Dos vectores en V_3 (conjunto de vectores 3-D) son paralelos si y sólo si $\vec{a} \times k\vec{a} = \vec{0}$

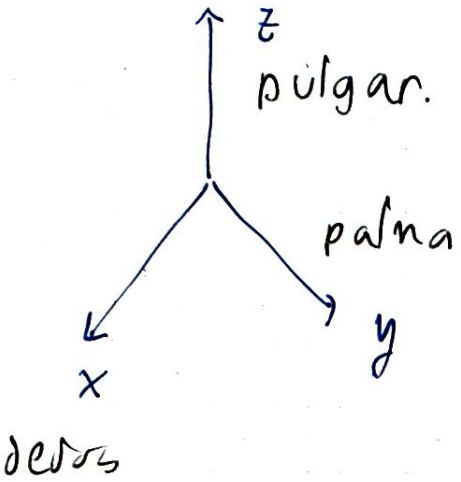
vector cero.

Interpretación Geométrica.

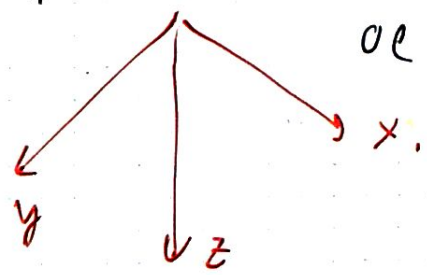


Convención Mano Derecha.





vector ortogonal a ambos que apunta siguiendo la convención de la mano derecha



Propiedad: Dadas $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ y el ángulo entre estos dos vectores θ.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta. \checkmark$$

En el producto punto $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$.

Para encontrar el ángulo entre dos vectores, es recomendable utilizar el producto punto.

si $\sin\theta = 0$ $\quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0.$

vectores paralelos.

$\theta = 0.$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$

$\sin\theta = 0$

$\theta = 0.$

Dos vectores 3-D son paralelos, $a \parallel b$, si y sólo si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ vector cero.

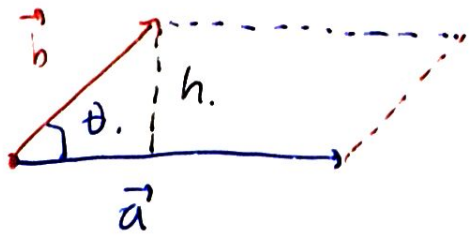
Recomendable. inspeccione si $\vec{b} = K\vec{a}$ no importa la dimensión del vector.

Propiedades $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$|a \times b| = |a|\,|b| \sin\theta.$

$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \iff a \parallel b$

Se puede utilizar para áreas de "rectángulos inclinados" y cubos "inclinados."



Paralelogramo.

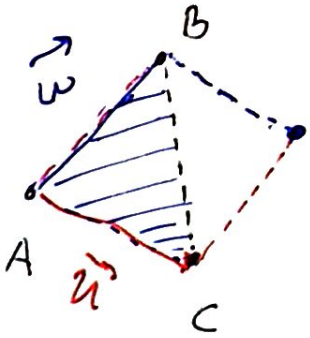
Área $= b\,h.$

base $= |\vec{a}|.$

altura $h = |\vec{b}| \sin\theta$

Área del Paralelogramo: $A = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta. = \boxed{|\vec{a} \times \vec{b}|}$

Ejercicio 3: ¿Cuál es el área del triángulo con vértices en $A(1,0,1)$ $B(-2,1,3)$ y $C(1,2,1)$?



Área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo

$A_T = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{w}|$

$\vec{u} = \overrightarrow{AC} = \langle 0, 2, 0 \rangle.$

$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \langle -3, 1, 2 \rangle.$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(4) - \hat{\jmath}\,0 + \hat{k}(6) = 4\hat{\imath} + 6\hat{k}$$

Producto Triple Escalar.

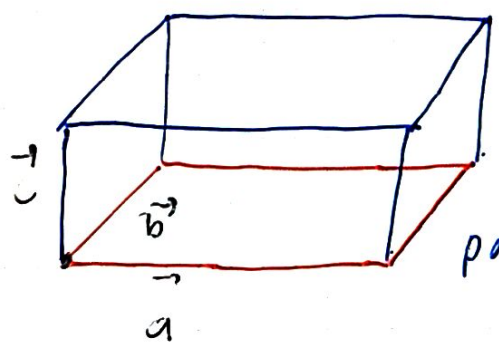
Combina el producto punto y el producto cruz.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}\cdot\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\langle a_1 \; a_2 \; a_3 \rangle$.

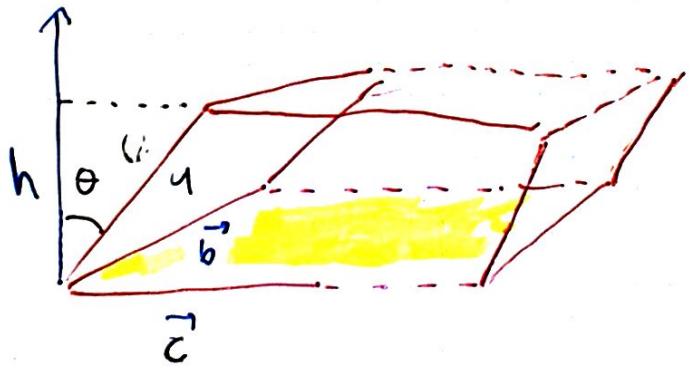
$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

Volumen de un cubo inclinado Paralelelípedo.



paralelepípedo.

$$V = |a\cdot(b\times c)|$$



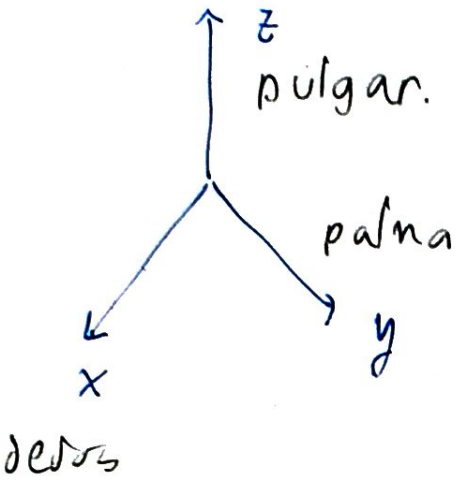
Volumen = Área de la Base × altura.

Área base $= |\vec{b}\times\vec{c}|$

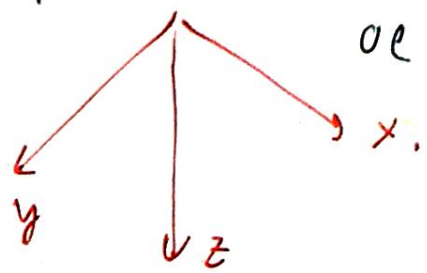
Altura. $h = |a|\cos\theta$.

Volumen $V = Ah. = |a||\vec{b}\times\vec{c}|\cos\theta.$

$$U = a\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$


z
pulgar.
palma
y
x
dedos

vector ortogonal a ambos que apunta siguiendo la convención de la mano derecha


x.
y
z

Propiedad: Dadas $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ y el ángulo entre estos dos vectores θ.

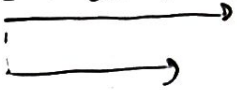
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta. \checkmark$$

En el producto punto $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$.

Para encontrar el ángulo entre dos vectores, es recomendable utilizar el producto punto.

si $\sin\theta = 0$ $\quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0.$

vectores paralelos.



$\theta = 0.$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$

$\sin\theta = 0$

$\theta = 0.$

Dos vectores 3-D son paralelos, $a \parallel b$, si y sólo si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ vector cero.

Recomendable. inspeccione si $\vec{b} = K\vec{a}$ no importa la dimensión del vector.

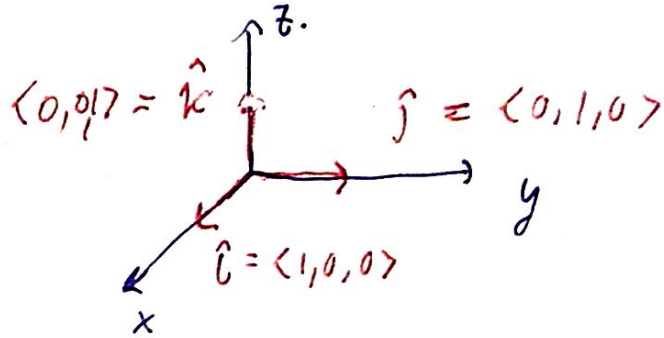
Capítulo 6

Ángulo entre vetores y ejes & Vectores paralelos y perpendiculares en n-dimensiones, Ecuación vectorial de una recta

Ángulo entre un vector $\vec{a}$ y un eje

Se utiliza la fórmula del producto punto.

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|}$$



Ángulo entre $\vec{a}$ y el eje y.

$$\cos\theta = \frac{a \cdot \hat{j}}{|a|\,|\hat{j}|} = \frac{\langle a_1, a_2, a_3\rangle \cdot \langle 0,1,0\rangle}{|a|} = \frac{a_2}{|a|}.$$

Ángulos entre el vector y cada eje.

Eje-x: $\theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{a_1}{|a|}\right)$ Eje-y. $\cos\theta_y = \frac{a_2}{|a|}$

Eje-z: $\cos\theta_z = \frac{a_3}{|a|}.$

Éstos ángulos se conocen como coseno directores.

$a = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ $\boxed{a = |a|\langle \cos\theta_x, \cos\theta_y, \cos\theta_z\rangle.}$

Vectores paralelos o perpendiculares en n-dimensiones.

Dos vectores $\vec{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$
$\vec{b} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$.

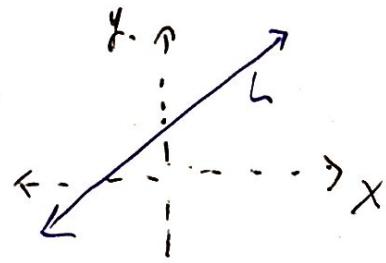
Son paralelos: si $\vec{a} = K\vec{b}$ K escalar -1, 0.2, 1

perpendiculares: si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

ángulo $\cos\theta = \dfrac{a \cdot b}{|a|\,|b|}$

12.5 Rectas (p. 39)

En 2-D.

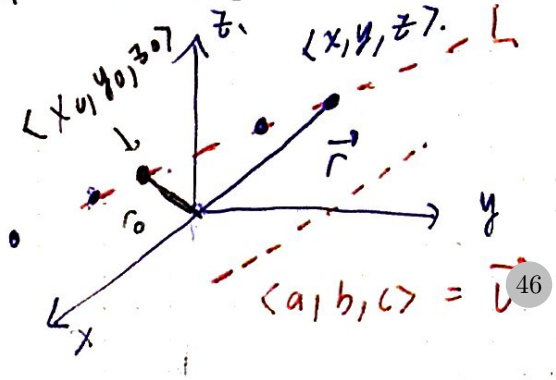


1. m pendiente
2. (x_0, y_0) punto sobre L

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

En 3-D, para encontrar una recta en el espacio se necesita conocer

1. m "pendiente", dirección de la recta vector $\langle a, b, c \rangle$.
2. punto sobre L. (x_0, y_0, z_0).

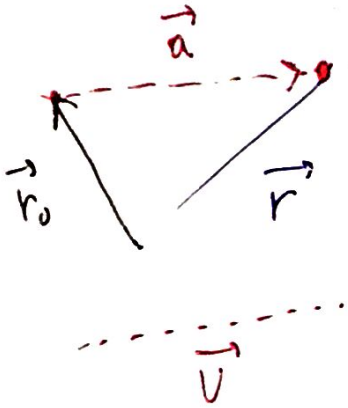


Dos puntos sobre L.

Vector punto sobre L $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle = \vec{r}_0$

Vector cualquier punto sobre L $\langle x, y, z \rangle = \vec{r}$

Vector dirección $\langle a, b, c \rangle = \vec{v}$



$\vec{a}$ y $\vec{v}$ son paralelos.

$\vec{a} = k\vec{v} = \underline{\underline{t}}\,\vec{v}$

Variable parámetro t.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} = \boxed{\vec{r}_0 + t\vec{v}.} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ec. Vectorial Recta: punto $\vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$

y dirección $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$.

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}}$$

parámetro t.

Ec. componente por componente.

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t\langle a, b, c \rangle.$$

Ec. Paramétrica de la Recta.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + at. \\ y &= y_0 + bt. \\ z &= z_0 + ct. \end{aligned}}$$

$t \in \mathbb{R}$.

Pablo V.

Posición inicial $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$.

Velocidad constante $\langle a, b, c \rangle$.

$x = x_0 + V_{0x}\, t$

$y = y_0 + V_{0y}\, t$

$z = z_0 + V_{0z}\, t.$

Ejercicio 1: Encuentre la ec. vectorial y las paramétricas para la recta que pasa por el punto dado y es paralelo al vector dado. (p 30.)

a. $P(3,4,-2)$ $\quad \vec{v} = \langle -8, 2, 5 \rangle$. $\quad \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$.

Vector Posición: $r_0 = \overrightarrow{OP} = \langle 3, 4, -2 \rangle$.

Vector Dirección: $\vec{v} = \langle -8, 2, 5 \rangle$.

Ec. Vectorial: $\boxed{\vec{r} = \langle 3, 4, -2 \rangle + t\langle -8, 2, 5 \rangle.}$

Ecs. Paramétricas:

$$x = 3 - 8t$$
$$y = 4 + 2t \qquad t \in \mathbb{R}.$$
$$z = -2 + 5t.$$

Observaciones: $\vec{r}(1) = \langle -5, 6, 3 \rangle$

$\vec{r}(10) = \langle -77, 24, -48 \rangle$.

Ec. vectorial para L: $\boxed{\vec{r} = \langle -5, 6, 3 \rangle + t\langle -8, 2, 5 \rangle}$

vector de dirección v es paralelo a varios vectores

$\vec{w} = k\vec{v}$ puede ser también vector dirección.

$\vec{v_1} = \langle 8, -2, -5 \rangle \qquad \vec{v_2} = \langle -8\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 5\sqrt{3} \rangle$.

$\boxed{\vec{r} = \langle -77, 24, -48 \rangle + t\,v_2.}$ La misma recta.

La ec. vectorial de una recta no es única. ✓

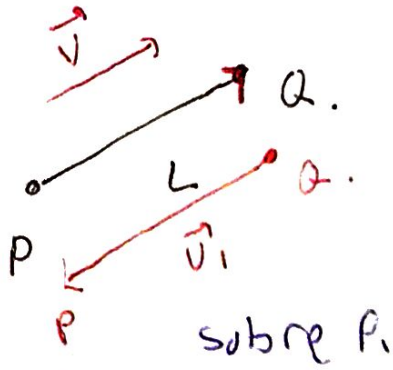
Ejercicio 2: Encuentre la ec. vectorial de la recta que pasa por los puntos dados.

a. $P(3,-2,4)$ y $Q(5,2,-1)$.

$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{V}$ $\boxed{\vec{r_0} = \langle 3,-2,4\rangle}$ ó $\langle 5,2,-1\rangle$

vector de dirección $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ ó $\overrightarrow{QP}$

$\boxed{\vec{V} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2,4,-5\rangle.}$



Ec. Vectorial $\vec{r}$ P.

$\boxed{\vec{r} = \langle 3,-2,4\rangle + t\langle 2,4,-5\rangle.}$

Q $\vec{r_0} = \langle 5,2,-1\rangle$ $\vec{v} = \overrightarrow{QP} = \langle -2,-4,5\rangle.$

$\boxed{\vec{r} = \langle 5,-2,-1\rangle + t\langle -2,-4,5\rangle.}$ sobre Q

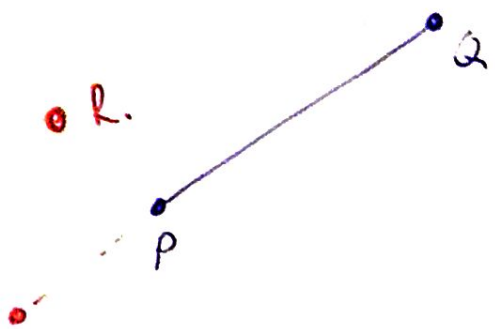
b. $P(3,0,4)$ y $Q(3,4,2)$

$r_0 = \langle 3,0,4\rangle. = \overrightarrow{OP}$

$\vec{v} = \langle 0,4,-2\rangle. = \overrightarrow{PQ}$ $\vec{v} \neq P \times Q$

$\boxed{\vec{r} = r_0 + tv = \langle 3,0,4\rangle + t\langle 0,4,-2\rangle.}$

c. ¿Qué pasa si hay 3 puntos?



$P(3,0,4)$, $Q(3,4,2)$ $R(5,3,4)$ no están sobre L.

$\vec{V_1} = \overrightarrow{PQ} = \langle 0, 4, -2 \rangle$ no son

$\vec{V_2} = \overrightarrow{PR} = \langle 2, 3, 0 \rangle$ paralelos.

Éstos tres puntos NO están sobre la misma recta.

$$\overbrace{(0,1) \quad (1,2) \quad (2,5)}^{m=2}$$

$$\underbrace{(0,1) \quad (1,2)}_{m=1}$$

Capítulo 7

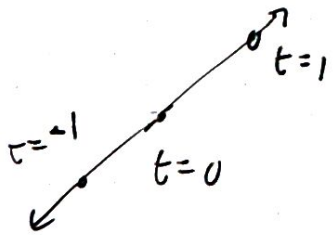
Rectas y planos

12.5 Rectas y Planos

Ecuación de una Recta.

Vector Posición $\vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$.

Vector dirección $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$.



Ec. Vectorial $\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}}$

t es el parámetro

Ecs. Paramétricas:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct. \end{aligned}}$$

Resuelva para t en las tres ecs.

$$\boxed{t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

Ecs. simétricas

$a, b, c \neq 0$.

vector dirección $\vec{v} = \langle a, 0, c \rangle$, las ecs. de la recta cambian,

$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

vectorial

$x = x_0 + at$

$y = y_0$

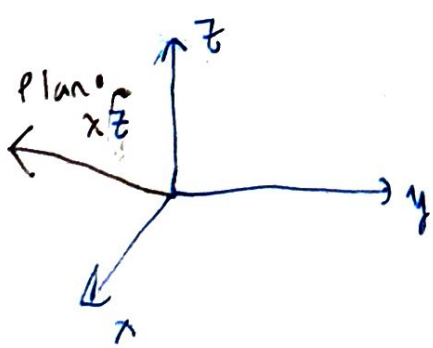
$z = z_0 + ct.$

Ecs. Paramétricas

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}$$

$y = y_0$

Simétricas



Ejercicio 3: Encuentre las ecs. simétricas de la recta que pasa por los puntos dados.
Encuentre en qué punto la recta intersecta al plano xz.
Pag. 41.

a. $P(2,8,-2)$ y $Q(2,6,4)$.

Vector Posición: $\overrightarrow{OP} = \vec{r}_0 = \langle 2,8,-2\rangle$. $\vec{r} = \langle x,y,z\rangle$.

Vector Dirección. $\overrightarrow{PQ} = \vec{v} = \langle 0,-2,6\rangle$.

Ec. vectorial: $\vec{r} = \langle 2,8,-2\rangle + t\langle 0,-2,6\rangle$.

Ecs. simétricas: $x = 2, \quad \dfrac{y-8}{-2} = \dfrac{z+2}{6}$.

¿Cuál es la intersección con el plano xz?

Use $y=0$. $\quad x = 2, \quad \dfrac{-8}{-2} = \dfrac{z+2}{6}$.

$$6\cdot 4 = z+2 \Rightarrow z = 22.$$

La intersección con el plano xz es el punto $(2,0,22)$.

b. $P(4,6,10)$ y $Q(6,6,10)$

$\vec{r}_0 = \langle 4,6,10\rangle$. $\quad \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2,0,0\rangle$.

Vectorial: $\vec{r} = \langle 4,6,10\rangle + t\langle 2,0,0\rangle$.

paramétricas:
$$x = 4+2t$$
$$y = 6$$
$$z = 10.$$

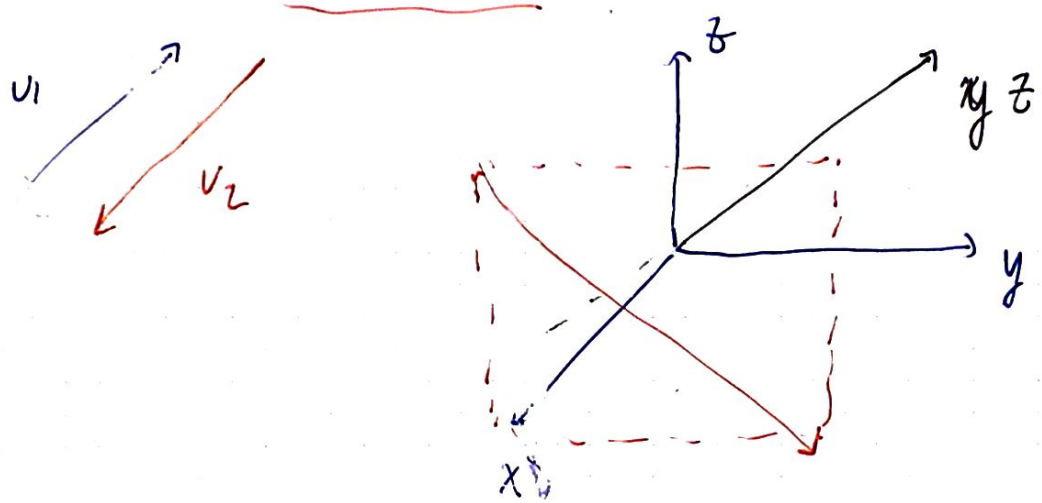
simétricas.
$$t = \frac{x-4}{2}, \quad y = 6, \quad z = 10.$$

¿Cuál es el punto intersección con el plano xz?

Use $y = 0$, como cualquier punto sobre esta recta pasa sólo por $y = 6$, esta recta no puede intersectar al plano xz. NO HAY.

Rectas Paralelas.

Dos rectas $\vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + t_1\vec{v}_1$ y $\vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + t_2\vec{v}_2$ son paralelas. si y sólo si sus vectores de dirección $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son paralelos.



En el espacio hay 3 tipos de rectas.

1. Paralelas.
b. Intersecan en 1 punto
c. Oblicuas (ni son paralelas ni se intersecan).

Ejercicio 4: Determine si los sigs. pares de rectas son paralelas, oblicuas o se intersecan.

a. $\dfrac{x-2}{8} = \dfrac{y-3}{24} = \dfrac{z-2}{16}$, $\dfrac{x-10}{-2} = \dfrac{y+15}{-6} = \dfrac{z+24}{-4}$.

$v_1 = \langle 8, 24, 16 \rangle$ $\qquad$ $v_2 = \langle -2, -6, -4 \rangle$.

$x = 2+8t$, $y = 3+24t$, $z = 2+16t$.

$v_1 = -4v_2$. v_1 y v_2 son paralelos.

Las dos rectas son paralelas.

b. L_1 : $x = 5-4t$, $y = 6-2t$, $z = 2+0t$ $\qquad t \in \mathbb{R}$.

L_2 : $x = 3+8\underline{s}$, $y = -2\underline{s}$, $z = 8+2\underline{s}$. $\qquad s \in \mathbb{R}$

Utilice una variable parámetro para cada recta

$v_1 = \langle -4, -2, 0 \rangle$, $v_2 = \langle 8, -2, 2 \rangle$. no son paralelas.

Analice si las rectas se intersecan.

$x = x$ $\qquad 5-4t = 3+8s$. (1) $\Rightarrow$ $2 = 4t+8s$

$y = y$ $\qquad 6-2t = -2s$. (2) $\qquad 6 = 2t+2s$

$z = z$. $\qquad \boxed{2 = 8+2s}$ $\Rightarrow$ $s = -3$.

3 ecs. y sólo 2 incógnitas t y s.

sustituya $s = -3$ en las ecs. (1) y (2)

$5-4t = -22 \Rightarrow -4t = -27 \Rightarrow t = 27/4.$

$6-2t = 6 \Rightarrow -2t = 0 \Rightarrow t = 0$

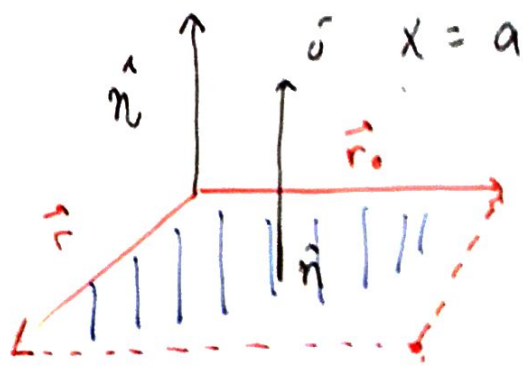
como no hay una t única (no es posible $0 \neq 27/9$), las dos rectas no se intersecan.

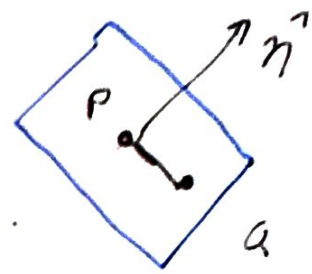
L_1 y L_2 son oblícuas (ni paralelas ni se intersecan).

$$\begin{aligned} 4t + 8s &= 2 \\ 2t + 2s &= 6. \\ 0t + 2s &= -6 \end{aligned} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} t & s \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -6 \end{array}\right] \end{array} \longrightarrow \quad 0 \; 0 \; 1 \text{ número.}$$

Ecuación de un Plano.

Previamente en 12.1 $ax + by + cz = d.$ ó $x = a, \quad y = b, \quad z = c.$ } Ecs de Planos.





Para encontrar la ec. de un plano se necesita.

1. un punto sobre el plano. P $\quad \vec{r}_0 = \overrightarrow{OP}$
2. un vector normal u ortogonal al plano $\hat{n} = \langle a, b, c \rangle$.

^ sombrero, hat.

Derivación de la ec. Plano.

$P(x_0, y_0, z_0) \qquad Q(x, y, z)$ son dos puntos sobre el plano.

$$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle \qquad \vec{r} = \overrightarrow{OQ} = \langle x, y, z \rangle.$$

El vector $\overrightarrow{QP} = \vec{r} - \vec{r}_0$ está sobre el plano, por lo que tiene que ser ortogonal a $\hat{n}$.

$$\hat{n} \perp \vec{r} - \vec{r}_0 \Rightarrow \boxed{\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0.}$$

Ec. Vectorial de un Plano.

Se puede rescribir como.

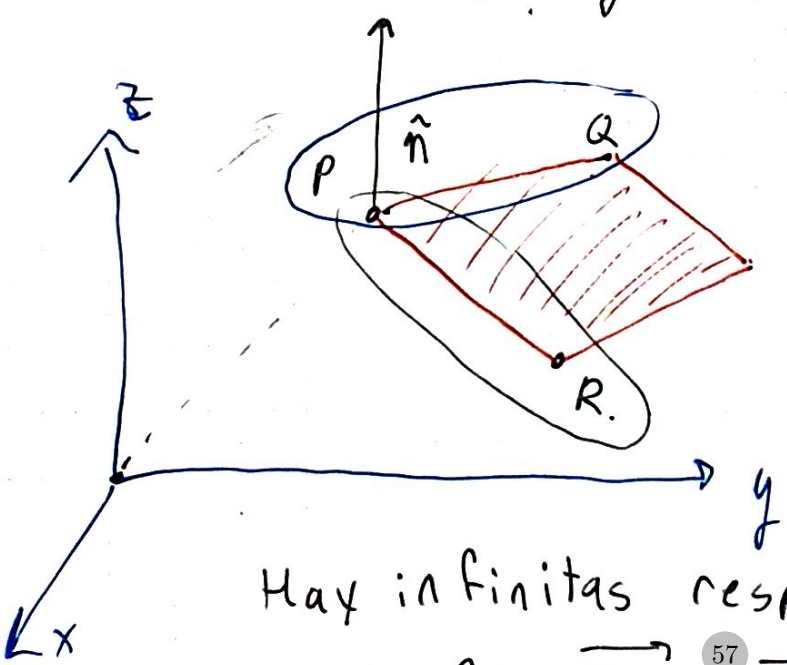
$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0 + z - z_0 \rangle = 0.$$

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.}$$

Ec. escalar de un plano.

$$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_{d.}$$

Para encontrar la ec. de un plano, se necesitan 3 puntos P, Q y R.



$r_0 = \overrightarrow{OP}$

$\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$

tienen que comenzar en el mismo punto

Hay infinitas respuestas equivalentes

$$\hat{n} = \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ}$$

Ejercicio 1: P45. Encuentre la ec. del plano que pasa por los 3 puntos dados.

a. $P(3,-1,3)$, $Q(8,2,4)$ y $R(1,2,5)$

Ec. plano $\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

Ec. Recta $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

$r_0 = \langle 8, 2, 4 \rangle$.

Encuentre dos vectores que estén sobre el plano y que comiencen en el mismo punto.

$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle 5, 3, 1 \rangle$ $\qquad$ $\vec{v} = \overrightarrow{PR} = \langle -2, 3, 2 \rangle$.

¡¡ $\hat{n}$ es ortogonal a ambos vectores !!

$$\boxed{\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 12\hat{j} + 21\hat{k}$$

Ec. Plano: $\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

Vectorial: $\langle 3, -12, 21 \rangle \cdot \langle x-8, y-2, z-4 \rangle = 0$.

Escalar. $3(x-8) - 12(y-2) + 21(z-4) = 0$.

b. $P(0,0,0)$, $Q(1,0,2)$ y $R(0,2,3)$

Vector Posición: $\vec{r}_0 = \langle 0,0,0 \rangle$.

2 vectores sobre el plano. $\overrightarrow{PQ} = \langle 1,0,2 \rangle$.
$\overrightarrow{PR} = \langle 0,2,3 \rangle$.

Vector Normal: $\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$

$$\hat{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

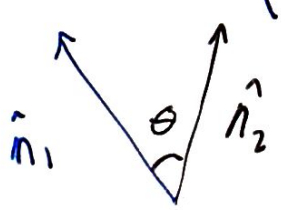
Ec. Plano. $\boxed{-4x - 3y + 2z = 0.}$

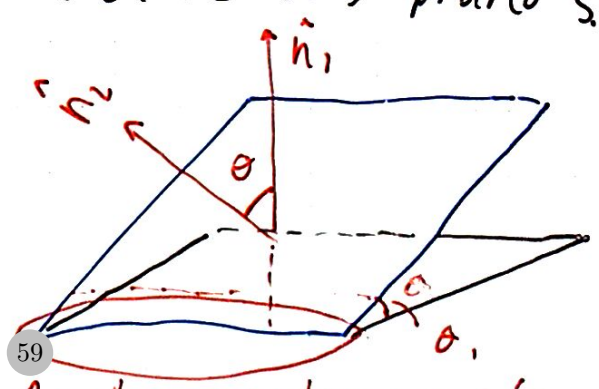
Rectas paralelas v_1 y v_2 son paralelos.

Dos planos $\hat{n}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$ y $\hat{n}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = 0$.
son paralelos si y sólo si $\hat{n}_1$ y $\hat{n}_2$ son paralelos.

En caso que no sean paralelos, se puede encontrar el ángulo de intersección entre dos planos.

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1||\hat{n}_2|} \right)$$





Recta de intersección.

Capítulo 8

Continuación de rectas y planos

Rectas y planos.

$\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Ecs. Rectas: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

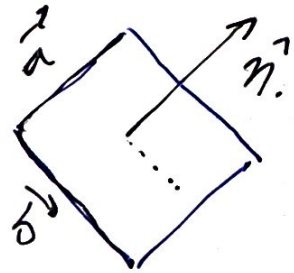
si $a \neq b \neq c \neq 0$ $\quad \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}}$$

Ec. Plano: $\hat{n}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$\hat{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

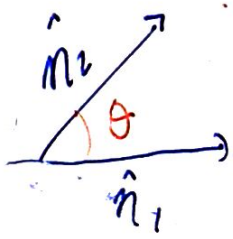


Ejercicio 2: Considere los planos $x + y = 0$ & $x + 2y + z = 1$.

a. Determine si los planos son paralelos. Si no lo son encuentre el ángulo de intersección entre ellos.

$\hat{n}_1 = \langle 1, 1, 0 \rangle$. $\quad$ no son paralelos $\hat{n}_1$ y $\hat{n}_2$

$\hat{n}_2 = \langle 1, 2, 1 \rangle$. $\quad$ los dos planos NO SON PARALELOS.

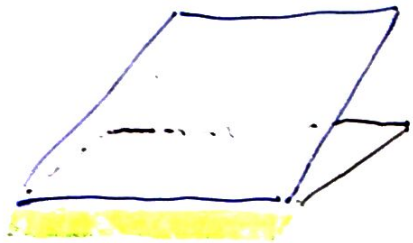


$$\cos\theta = \frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1||\hat{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{12}}$$

$$\boxed{\cos\theta} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}.} \qquad \theta = \frac{\pi}{6} \text{ ó } 30°.$$

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$.
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\operatorname{sen}\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

D. Encuentre la ec. de la recta que interseca a ambos planos. $x+y=0$ & $x+2y+z=1$.



$$r = \vec{r}_0 + t\vec{v}.$$

Dos puntos sobre la recta,

como la recta está en ambos planos, se debe resolver el sig. sistema.

$$x + y = 0 \Rightarrow x = -y.$$

$$x + 2y + z = 1 \Rightarrow y = 1 - z.$$

z tiene cualquier valor.

1er punto $z=0$:
$y=1$
$x=-1$
$(-1,1,0)$ ✓

2do punto $z=1$
$y=0$
$x=0$
$(0,0,1)$ ✓

Encuentre la ec. de la recta que pasa por $P(-1,1,0)$ y $\underbrace{Q(0,0,1)}_{r_0}$

$r_0 = \langle 0,0,1 \rangle$. ó $r_0 = \langle -1,1,0 \rangle$.

$\vec{v} = \overrightarrow{QP} = \langle -1,1,-1 \rangle$.

Ec. Paramétrica de la recta.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 0 - t \\ y &= 0 + t \\ z &= 1 - t. \end{aligned}}$$

II. Solución. $x = -y$. más incógnitas
$y = 1 - z$ que ecuaciones.

x, y ó z pueden tener cualquier valor. $\boxed{z = t.}$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -1 + t. \\ y &= 1 - t \\ z &= t \end{aligned}}$$

$U_L = \langle 1, -1, 1 \rangle$ $\vec{r}_0 = \langle -1, 1, 0 \rangle$

III. Solución Geométrica.

1. Encuentre un punto en ambos planos por ejemplo. $(0,0,1)$

La recta está en el plano 1, entonces la recta es perpendicular al vector normal del plano 1.

Está en el plano 2, entonces también es perpendicular al segundo vector normal.

$\therefore$ La recta es perpendicular a ambos $\hat{n}_1$ y $\hat{n}_2$.

$$\vec{U} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

Ec. Recta $r = \langle 0,0,1 \rangle + t \langle 1,-1,1 \rangle$.

Ejercicio 3: Encuentre el punto en el que la línea recta $x = 1 + 2t$, $y = 4t$, $z = 5t$ intersecta al plano $x - y + 2z = 17$.

$x = 1 + 2t$
$y = 4t$
$z = 5t$
Recta

Plano.

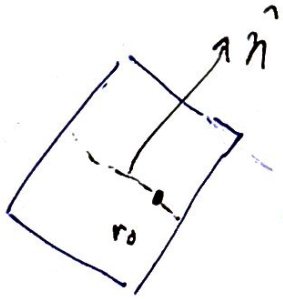
$x - y + 2z = 17.$

$1 + 2t. - 4t + 10t = 17.$

$8t = 16 \Rightarrow t = 2$

El Pto. de Intersección es $(5, 8, 10)$.

Ejercicio 4: Encuentre una ec. del plano que contiene a la recta $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 4 - 3t$ y es paralela al plano $5x + 2y + z = 1$.



cualquier punto sobre la recta también está sobre el plano.

$t = 0$: $x = 1$, $y = 2$, $z = 4$ $\quad \vec{r}_0 = \langle 1, 2, 4 \rangle$.

¿Cómo se encuentra $\hat{n}$?

El vector de dirección de la recta $v = \langle 1, -1, -3 \rangle$ es paralelo al plano.

Como es paralelo al segundo plano, entonces tiene que ser perpendicular $\hat{n} = \langle 5, 2, 1 \rangle$.

$\vec{r_0} = \langle 1,2,4 \rangle$ y $\hat{n} = \langle 5,2,1 \rangle$.

Ec. Plano. $\boxed{5(x-1) + 2(y-2) + 1(z-4) = 0.}$

Ejercicio 5: Encuentre los números directores para la recta de intersección entre los planos $x+y+z=1$ y. $x+2y+3z=1$.

Los números directores a, b y c del vector de dirección $\langle a,b,c \rangle$.

La recta es ortogonal a ambos vectores normales $\hat{n}_1 = \langle 1,1,1 \rangle$ & $\hat{n}_2 = \langle 1,2,3 \rangle$ de ambos planos.

$$\vec{v} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\underline{\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}}}$$

Números directores: $a=1$, $b=-2$, $c=1$

Ejercicio 6: Encuentre las ecs. paramétricas de la recta que pasa por el punto $(0,1,2)$, que es paralela al plano $x+y+z=2$ y perpendicular a la recta. $r = \langle -2t, 0, 3t \rangle$.

L_1: $\underline{r = \vec{r_0} + t\vec{v}}$ $\quad \underline{r_0} = \langle 0,1,2 \rangle$

¿Cómo se encuentra v?

Plano 1 $\hat{n} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ es perpendicular al plano.

Recta 2: $\vec{v}_2 = \langle -2, 0, 3 \rangle$ es paralelo a L_1.

La recta es perpendicular a $\hat{n}$ y a $\vec{v}_2$. es perpendicular a L_1.

$$v = \hat{n} \times \hat{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

$r_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle$.

✓ $v = \hat{v}_2 \times \hat{n}$

Ecs. Paramétricas.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 0 + 3t \\ y &= 1 - 5t \\ z &= 2 + 2t. \end{aligned}}$$

Capítulo 9

Funciones Vectoriales & Límites y continuidad

13.1 Funciones Vectoriales.

Una <u>función vectorial</u> :

Dominio: Números Reales Rango: vectores 3-D.

$\vec{r} : \mathbb{R} \to V_3$ $\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$.

t es un parámetro. $\boxed{\vec{r} = f(t)\,\hat{\imath} + g(t)\,\hat{\jmath} + h(t)\,\hat{k}}$

Ejemplo de una función vectorial

$\vec{r} = \langle a, b, c \rangle + t \langle d, e, f \rangle$. Recta.

$\vec{r} = \langle a + td, b + et, c + tf \rangle$

Ecs. Paramétricas de una función vectorial $x = f(t)$ $y = g(t)$, $z = h(t)$

Dominio de una función vectorial:

Encuentre el dominio de cada función componente.

El dominio de $\vec{r}$ es la intersección de los dominios de cada función componente.

Ejercicio 1: Encuentre el dominio.

Existe.

$\sqrt{-}$

$\ln 0$ ó $\ln -$

a. $\vec{r}(t) = \langle \sqrt{t^2-9}, e^{\sin t}, \ln(t+5) \rangle$

$\sqrt{t^2-9}$ definida. $t^2 \geq 9$ $\quad (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

$e^{\sin t}$. $\sin t$ siempre definida. lo mismo $e^{\sin t}$. $\quad (-\infty, \infty)$.

$\ln(t+5)$ definida cuando $t+5>0$ $\quad (-5, \infty)$

$t > -5$

$(-5, -3] \cup (-3, 3) \cup [3, \infty)$

Dominio de $\vec{r}(t)$ $\boxed{(-5, -3] \cup [3, \infty)}$

$[a, b]$ el número si es parte del dominio

a, b son parte del dominio.

(a, b) los números a y b no son parte del dominio.

b. $\vec{s}(t) = \left\langle \sin^3(t^2), \cosh\left(\frac{t}{t^2+1}\right), \frac{1}{e^t+4} \right\rangle$

$\sin^3(t^2)$ $\quad D_f : \mathbb{R}$.

$\cosh\left(\frac{t}{t^2+1}\right)$ $\quad D_g = \mathbb{R}$.

Dominio $\vec{s}(t)$

$(-\infty, \infty)$

$\frac{1}{e^t+4}$ $\quad D_h : \mathbb{R}$.

indefinido

$e^t + 4 \neq 0 \Rightarrow e^t = -4 \Rightarrow t = \ln(-4)$

Límites y Continuidad

$$\lim_{t \to a} \vec{r}(t) = \left\langle \lim_{t \to a} f(t), \lim_{t \to a} g(t), \lim_{t \to a} h(t) \right\rangle$$

- Evalúe el límite de cada función componente
- Si no existe por lo menos un límite de una función componentes, entonces $\lim_{t \to a} \vec{r}(t)$ no existe.

$f(t)$ está definida en $t = a$.

$$\lim_{t \to a} f(t) = f(a)$$

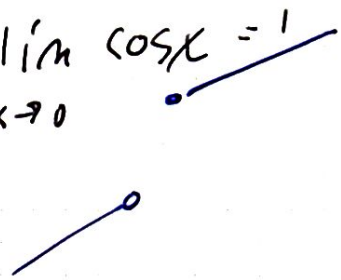
si se indefine y tiene forma $0/0$ ó ∞/∞.

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t)}{g(t)} \underset{0/0}{=} \lim_{t \to a} \frac{f'(t)}{g'(t)}$$ L'Hospital.

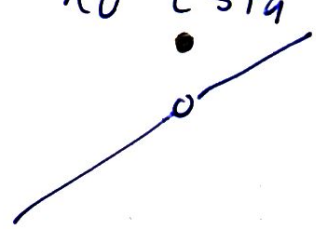
Continua en $t = a$ si $\lim_{t \to a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$

- Analiza la continuidad en cada función componente.
- Evite AVs, saltos y agujero.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \cos x = 1$$



(límite existe pero $\vec{r}(a)$ no está definido)



Ejercicio 2: Sea $\vec{r}(t) = \left\langle \frac{\tan \pi t}{t}, e^{t-2}, \frac{\ln(t-1)}{t^2-1} \right\rangle$

a. Analice si la función $\vec{r}(t)$ es continua en $t=2$.

$$\vec{r}(2) = \left\langle \frac{\tan 2\pi}{2}, e^0, \frac{\ln 1}{3} \right\rangle = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

$$\lim_{t\to 2} \frac{\tan \pi t}{t} = 0 \quad 0/2 \qquad \lim_{t\to 2} e^{t-2} = 1, \quad \lim_{t\to 2} \frac{\ln(t-1)}{t^2-1} = 0.$$

$\vec{r}$ si es continua en $t=2$ $\lim_{t\to 2} \vec{r}(t) = \vec{r}(2)$.

b. Encuentre $\lim_{t\to 1} \vec{r}(t)$ analice el límite de cada función componente por separado.

f: $\lim_{t\to 1} \frac{\tan \pi t}{t} = \frac{0}{1}$

g: $\lim_{t\to 1} e^{t-2} = e^{-1}$

$\lim_{t\to 1} \vec{r}(t)$ no existe.

h: $\lim_{t\to 1} \frac{\ln(t-1)}{t^2-1}$ no existe.

$\ln(0)$ no existe.

c. Analice si $\vec{r}(t)$ es continua en $t=1$

$\lim_{t\to 1} \vec{r}(t) = \vec{r}(1)$

$r(1)$ está indefinido.
límite no existe en $t=1$

NO ES CONTINUA en $t=1$.

5.

d. Agujero $\vec{s}(t) = \left\langle \frac{\tan \pi t}{t-1}, e^{t-2}, \frac{\ln(2t-1)}{t^2-1} \right\rangle$

no es continua en $t=1$ pero su límite existe en $t=1$

$$\lim_{t\to 1} \frac{\tan \pi t}{t-1} \underset{0/0}{\overset{LH}{=}} \lim_{t\to 1} \frac{\pi \sec^2 \pi t}{1} = \frac{\pi}{(\cos \pi)^2} = \pi.$$

$$\lim_{t\to 1} \underbrace{e^{t-2}}_{\ln 1 = 0} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{t\to 1} \frac{\ln(2t-1)}{t^2-1} \underset{0/0}{=} \lim_{t\to 1} \frac{2/2t-1}{2t.}$$

$$\lim_{t\to 1} \frac{2}{2t(2t-1)} = \frac{1}{1(2-1)} = 1.$$

$$\lim_{t\to 1} \vec{s}(t) = \langle \pi, 1/e, 1 \rangle$$ es un agujero.

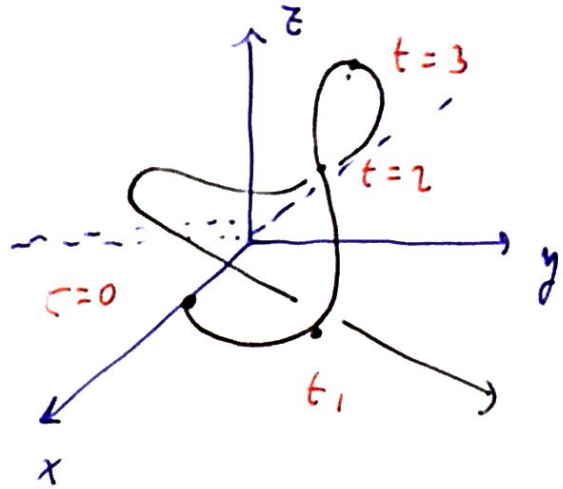
$\vec{s}(1)$ está indefinida.

Curvas en el espacio.

$x = f(t)$

$y = g(t)$

$z = h(t)$

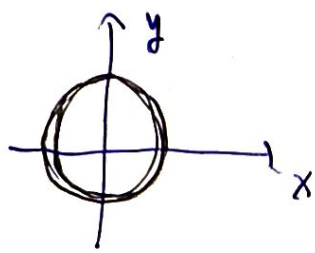


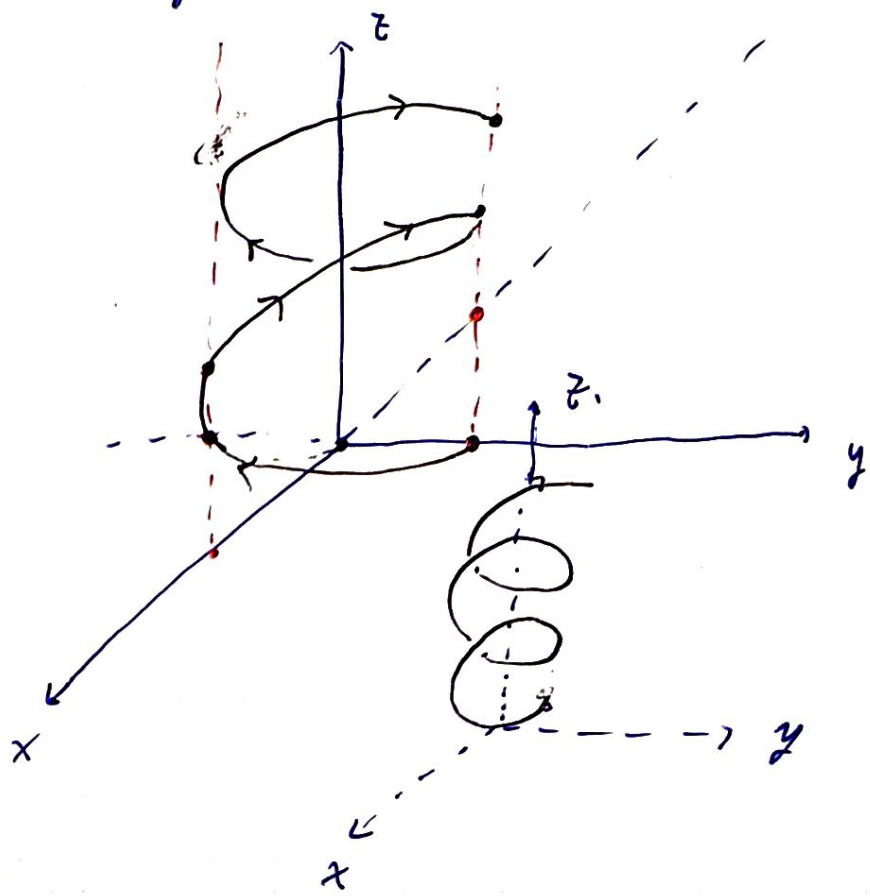
Espirales:

Ejercicio 3: Grafique la curva $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = \underbrace{2\hat{\imath}\sin t}_{x} + \underbrace{2\hat{\jmath}\cos t}_{y} + \hat{k}\,\frac{t}{\pi}\Big\}\, z$$

t	x	y	z
0	0	2	0
$\pi/2$	2	0	0.5
π	0	-2	1
$3\pi/2$	-2	0	1.5
2π	0	2	$2.$





$$x^2 + y^2 = 4$$

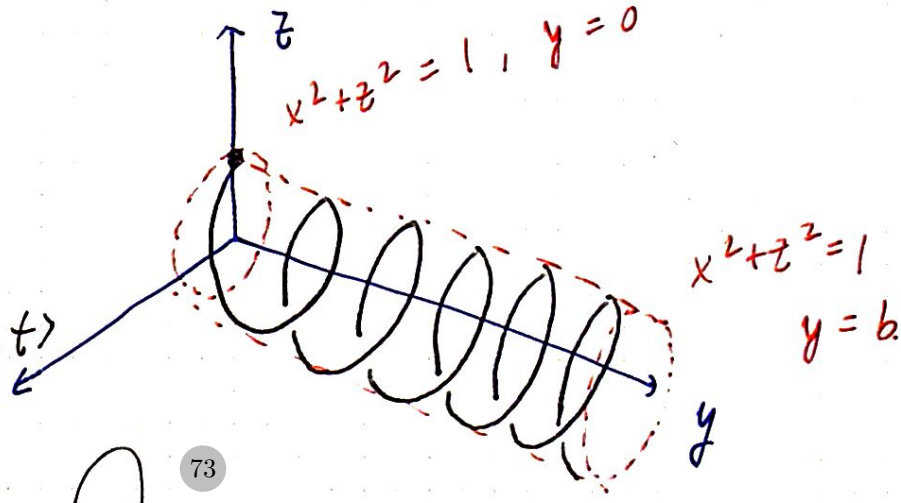
Ejercicio 4: Grafique

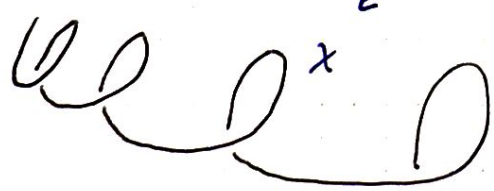
$$\vec{r}(t) = \langle \sin \pi t,\ t,\ \cos \pi t \rangle.$$

$$x^2 + z^2 = 1$$

$$\vec{r}(0) = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

$$\vec{s}(t) = \langle \sin t,\ t^2,\ \cos t \rangle$$





Capítulo 10

Cálculo con funciones vectoriales: derivadas, integrales, etcétera

13.2 Cálculo con funciones Vectoriales. p. 55.

Derivadas $\vec{r}\,'(t)$ respecto a t

Integrales: $\int r'(t)\,dt$. respecto a t.

$$r'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}. \qquad r = \langle f, g, h \rangle$$

$$r'(t) = \left\langle \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}_{f'(t).}, \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}}_{g'(t)}, h'(t) \right\rangle$$

Derivada: $\boxed{r'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle.}$

Derive cada función componente.

Integral: $\int \vec{r}(t)\,dt = \int (f\hat{i} + g\hat{j} + h\hat{k})\,dt.$

$$\hat{i}\int f\,dt + \hat{j}\int g\,dt + \hat{k}\int h\,dt.$$

integre cada función componente.

Ejercicio 1: Encuentre la 1ra y 2da derivada de las siguientes funciones.

a. $\vec{r}(t) = \langle \sin(4t), t^2, \ln(\sin t) \rangle.$

$\vec{r}\,'(t) = \langle 4\cos(4t), 2t, \cos t/\sin t \rangle$

$\vec{r}\,''(t) = \langle 4\cos(4t), 2t, \cot(t) \rangle.$

$$r''(t) = \langle f''(t), g''(t), h''(t) \rangle$$

$$r''(t) = \langle -16\sin(4t), 2, -\csc^2 t \rangle.$$

$\sin' \to \cos$ $\quad$ $\csc' \to -\csc\cot$ $\quad$ $\int \sec = \ln(\sec + \tan)$

$\cos' \to -\sin$ $\quad$ $\sec' \to \sec\tan$

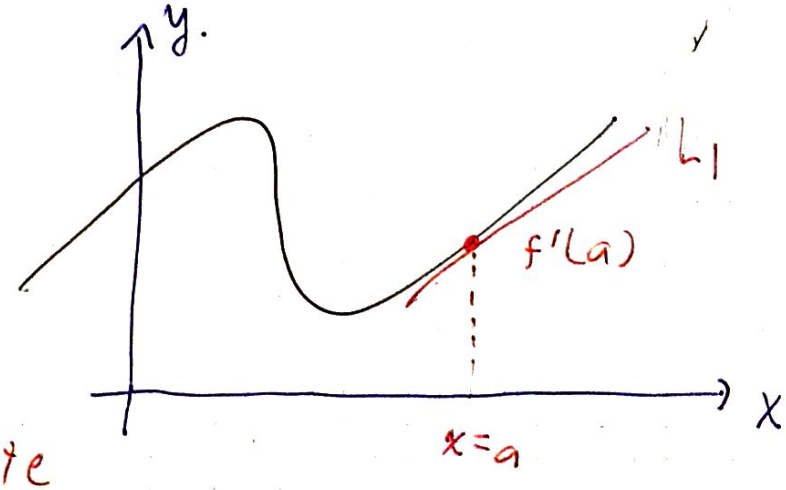
$\tan' \to \sec^2$ $\quad$ $\cot' \to -\csc^2.$

b. $\vec{s}(t) = \hat{\imath}\tan(4t) + \hat{\jmath}\ln(4t+1) + \hat{k}(5-2t)^{1/2}.$

$$\vec{s}'(t) = 4\hat{\imath}[\sec(4t)]^2 + \hat{\jmath}\,4(4t+1)^{-1} - \hat{k}(5-2t)^{-1/2}.$$

$$s'' = 32\hat{\imath}\sec(4t)\sec(4t)\tan(4t) - 16\hat{\jmath}(4t+1)^{-2} + \frac{\hat{k}}{2}(5-2t)^{-3/2}(-2)$$

para $y = f(x)$



$f'(a)$ es igual a la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x=a$.

$L_1: \; y = f(a) + f'(a)(x-a)$ $\quad$ Ec. Recta Tangente.

Con una función vectorial

$\vec{r} = \langle f, g, h \rangle \qquad x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$

hay ecuaciones paramétricas para cada variable.

$\vec{r}\,'(a) = \langle f'(a), g'(a), h'(a) \rangle.$

vector de pendientes de rectas tangentes a la curva $\vec{r}(t)$.

Vector Tangente a $\vec{r}(t)$: $\boxed{r'(a)}$

Recta Tangente: es ahora una función vectorial.

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(a) + \vec{r}\,'(a)\,t}$$

Ecs. Paramétricas:

$$x = f(a) + f'(a)\,t$$
$$y = y(a) + t\,g'(a)$$
$$z = h(a) + t\,h'(a)$$

Vector Tangente en $t = a$: $r'(a)$

Vector Tangente Unitario en $t = a$: $\dfrac{r'(a)}{|r'(a)|} = \vec{T}(a)$

Ejercicio 3: Encuentre las ecs. paramétricas de la recta tangente a la curva

$r(t) = \langle 2\cos t, 2\sin t, 4\cos 2t \rangle$ en el punto $\underline{(\sqrt{3}, 1, 2)}$

Recta Tangente: $\boxed{\vec{r}_T(t) = \vec{r}(a) + t\,\vec{r}\,'(a)}$

$\vec{r}(a) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle.$

Derivada: $\vec{r}\,'(t) = \langle -2\sin t, 2\cos t, -8\sin(2t) \rangle.$

¿Cómo se encuentra a? $r(t) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle.$

$\rightarrow 2\cos t = \sqrt{3} \qquad \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{t = \pi/6.}$

$2\sin t = 1 \Rightarrow 2\sin \pi/6 = 2\,\frac{1}{2} = 1$ ✓

$4\cos 2t = 2. \Rightarrow 4\cos \pi/3 = 4\,\frac{1}{2} = 2$ ✓

Vector Tangente: $r'(\pi/6) = \langle -2\sin \pi/6, 2\cos \pi/6, -8\sin \pi/3 \rangle$

$$r'(\pi/6) = \left\langle -\frac{2}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{2}, -8\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = \langle -1, \sqrt{3}, -4\sqrt{3} \rangle$$

$$\vec{r}_T(t) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle + t\langle -1, \sqrt{3}, -4\sqrt{3} \rangle.$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \sqrt{3} - t \\ y &= 1 + \sqrt{3}\,t \\ z &= 2 - 4\sqrt{3}\,t \end{aligned}}$$

Capítulo 11

Continuación de cálculo con funciones vectoriales

13.2 Cálculo.

Derivadas: $\vec{r}\,'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$.

Vector Tangente $\vec{r}\,'(t)$ Tangente Unitario $\vec{T}(t) = \dfrac{r'(t)}{|r'(t)|}$.

Recta Tangente a la curva. $\vec{L}(t) = \vec{r}(a) + \vec{r}\,'(a)\,t$.

$$x = f(a) + t\,f'(a)$$
$$y = g(a) + t\,g'(a)$$
$$z = h(a) + t\,h'(a).$$

Integrales: $\int \langle f, g, h \rangle \, dt = \langle F + C_1, G + C_2, H + C_3 \rangle$

$$\int \vec{r}(t)\,dt = \vec{R}(t) + \vec{C}$$

$\vec{R}$ vector de antiderivadas

$\vec{C}$ vector de constantes

Definida: $\displaystyle\int_a^b \vec{r}(t)\,dt = \hat{\imath}\int_a^b f(t)\,dt + \hat{\jmath}\int_a^b g(t)\,dt + \hat{k}\int_a^b h(t)\,dt$

Ejercicio 4: Evalúe los sigs. integrales.

a. $\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{4}{1+t^2}\,\hat{\imath} + \sec^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)\hat{k}\right] dt. = I_1$

$\tan(\pi/4) = 1$

$\tan(0) = 0$

$\tan^{-1} 1 = \pi/4$

$\tan^{-1} 0 = 0.$

$$I_1 = 4\hat{\imath}\tan^{-1} t\Big]_0^1 + \hat{k}\,\frac{4}{\pi}\tan\left(\frac{\pi t}{4}\right)\Big]_0^1$$

$$I_1 = 4\hat{\imath}\,\frac{\pi}{4} + \hat{k}\,\frac{4}{\pi} = \pi\hat{\imath} + \hat{k}\,\frac{4}{\pi} = \left\langle \pi, 0, \frac{4}{\pi} \right\rangle$$

b. $\int \langle te^{t^2}, te^{t}, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \rangle \, dt.$

Integre cada función.

x: $\int e^{t^2}(t\,dt) = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{t^2} + C_1$

$u = t^2 \quad du = 2t\,dt.$

y: $\int te^{t}\,dt = te^{t} - \int e^{t}\,dt = te^{t} - e^{t} + C_2.$

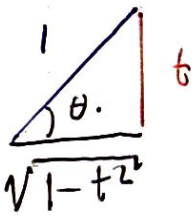
$u\,dv = uv - \int v\,du.$

$u = t \quad dv = e^{t}\,dt.$

$du = dt \quad v = e^{t}$

z: $\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int \frac{\cos\theta\,d\theta}{\cos\theta} = \int d\theta = \theta + C_3.$

$= \sin^{-1}(t) + C_3.$



$t = \sin\theta.$

$dt = \cos\theta\,d\theta.$

$\sqrt{1-t^2} = \cos\theta.$

$\int \langle te^{t^2}, te^{t}, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \rangle \, dt = \langle \frac{1}{2}e^{t^2} + C_1, te^{t} - e^{t} + C_2, \sin^{-1}t + C_3 \rangle$

Movimiento en el espacio.

Dado el vector de posición $\vec{r}(t)$. De un objeto.

Vector Velocidad: $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$

Vector Aceleración $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t)$

Rapidez: $|\vec{v}(t)|$ Distancia $|\vec{r}(t)|$

Dado el vector de aceleración $\vec{a}(t)$

velocidad: $\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)\,dt + \vec{C_1}$

Desplazamiento o posición: $\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)\,dt + \vec{C_2}$.

Las CI's $\vec{v}(0)$ y $\vec{r}(0)$ nos permiten encontrar el valor de $\vec{C_1}$ y $\vec{C_2}$ resp.

Ejercicio 1: Encuentre la velocidad, aceleración y rapidez dada la posición del objeto. y la distancia.

$$\vec{r}(t) = \hat{\imath}\, t + 2\hat{\jmath}\cosh(4t) + 3\hat{k}\sinh(3t).$$

Velocidad: $\vec{r}'(t) = \vec{v}(t) = \hat{\imath} + 8\hat{\jmath}\sinh(4t) + 9\hat{k}\cosh(3t)$.

Aceleración: $\vec{r}''(t) = \vec{a}(t) + 32\hat{\jmath}\cosh(4t) + 27\hat{k}\sinh(3t)$

Rapidez: $|\vec{v}(t)| = \sqrt{1 + 64\sinh^2(4t) + 81\cosh^2(3t)}$

Distancia: $|\vec{r}(t)| = \sqrt{t^2 + 4\cosh^2(4t) + 9\sinh^2(3t)}$

Tarea 6 Integrales Func. Vectoriales

14.1 Funciones en Varias Variables

Tarea Opcional Consolidado 12, 13, 14.1.

Ejercicio 2: Encuentre la velocidad y posición del objeto dada $\vec{a}(t)$ y las condiciones iniciales.

$$\vec{a}(t) = 6t\,\hat{\imath} + \hat{\jmath}\cos t - \hat{k}\sin(2t), \quad \vec{v}(0) = \hat{\imath} + \hat{k}$$
$$\vec{r}(0) = 2\hat{\jmath} - \hat{k}$$

velocidad: $\int \vec{a}(t)\,dt$

$$\vec{v}(t) = \langle 3t^2 + \underset{1}{c_1},\ \sin t + \overset{0}{\cancel{c_2}},\ \tfrac{1}{2}\cos(2t) + \overset{1/2.}{\cancel{c_3}} \rangle$$

$$\vec{v}(0) = \langle c_1,\ c_2,\ \tfrac{1}{2} + c_3 \rangle = \langle 1, 0, 1 \rangle$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad \tfrac{1}{2} + c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = \tfrac{1}{2}.$$

Posición: $\int \vec{v}(t)\,dt.$

$$\vec{r}(t) = \langle t^3 + t + d_1,\ -\cos t + d_2,\ \tfrac{1}{4}\sin(2t) + \tfrac{t}{2} + d_3 \rangle$$

$$\vec{r}(0) = \langle d_1,\ -1 + d_2,\ d_3 \rangle = \langle 0, 2, -1 \rangle$$

$$d_1 = 0, \quad -1 + d_2 = 2., \quad d_3 = -1$$
$$d_2 = 3.$$

Posición: $\vec{r}(t) = \langle t^3 + t,\ 3 - \cos t,\ \tfrac{1}{4}\sin(2t) + \tfrac{t}{2} - 1 \rangle.$

b. $\vec{a}(t) = 8t\,\hat{\imath} + \sinh t\,\hat{\jmath} - \hat{k}\,e^{t/2}$, $\qquad \frac{1}{2}e^{t/2}$

$\vec{v}(0) = \vec{0}$ $\qquad \vec{s}(0) = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$

"En reposo"

Velocidad: $\vec{v}(t) = \langle 4t^2 + C_1, \cosh t + C_2, -2e^{t/2} + C_3 \rangle$

$\vec{v}(0) = \langle C_1, 1 + C_2, -2 + C_3 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle.$

$C_1 = 0, \quad C_2 = -1 \qquad C_3 = 2$

$\vec{v}(t) = \langle 4t^2, \cosh t - 1, -2e^{t/2} + 2 \rangle$

Posición: $\vec{r}(t) = \langle \frac{4}{3}t^3 + C_1, \sinh t - t + C_2, -4e^{t/2} + 2t + C_3 \rangle$

$\vec{r}(0) = \langle C_1, C_2, -4 + C_3 \rangle = \langle 2, 1, -3 \rangle$

$C_2 = 1 \qquad C_3 = -3 + 4 = 1$

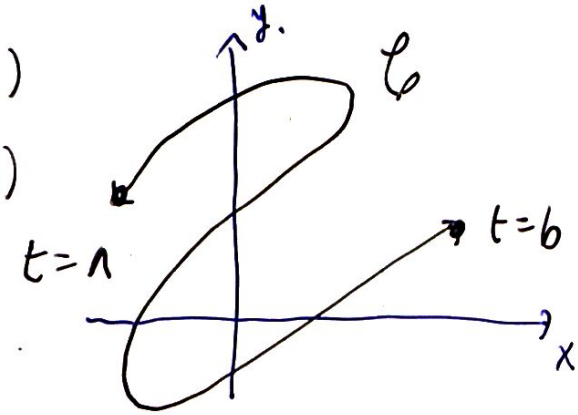
$\vec{r}(t) = \langle \frac{4}{3}t^3 + 2, \sinh t - t + 1, -4e^{t/2} + 2t + 1 \rangle$

13.3 Longitud de Arco.

10.4. Ecs. paramétricas de una curva en el plano.

$x = f(t)$

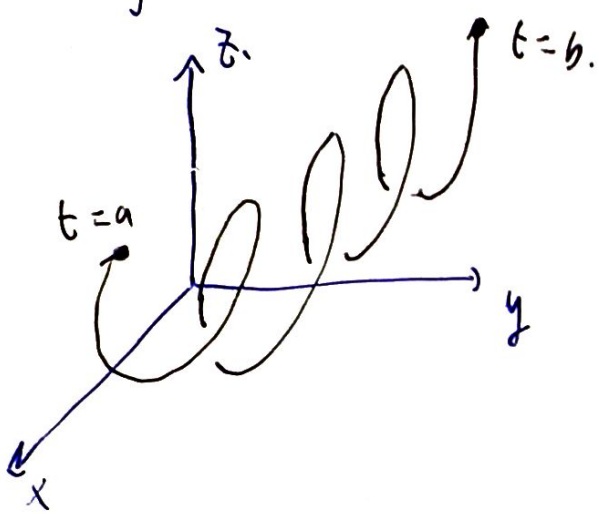
$y = g(t)$



Longitud de arco.

$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt.$$

Longitud de una curva en el espacio



$x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$

$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, dt.$$

Función vectorial: $\vec{r} = \langle f, g, h \rangle = \langle x, y, z \rangle.$

Derivada: $\vec{r}\,' = \langle x', y', z' \rangle.$

Magnitud: $|\vec{r}\,'| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$

$$\boxed{L = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\, dt.}$$

integre la magnitud del vector tangente.

Ejercicio 1: p 63 Encuentre la longitud de las sigs. curvas.

a. $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, \ln(\cos t) \rangle \quad 0 \leq t \leq \pi/4.$

$$L = \int_0^{\pi/4} |r'(t)|\, dt.$$

$$r'(t) = \left\langle -\sin t, \cos t, \overbrace{\frac{-\sin t}{\cos t}}^{-\tan t.} \right\rangle$$

$$|r'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \tan^2 t}$$

$$= \sqrt{1 + \tan^2 t} = \sqrt{\sec^2 t} = \sec t.$$

$$L = \int_0^{\pi/4} \sec t\, dt = \ln(\sec t + \tan t)\Big]_0^{\pi/4}.$$

$$= \ln(\sec \pi/4 + \tan \pi/4)$$

$$- \ln(\sec 0 + \tan 0)$$

$$L = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right) - \cancel{\ln(1)}^{0} = \ln|\sqrt{2} + 1|$$

b. $\vec{r}(t) = \langle 12t, 8t^{3/2}, 3t^2 \rangle$ en $0 \leq t \leq 1$

$$r'(t) = \langle 12, 12t^{1/2}, 6t \rangle = 6\langle 2, 2t^{1/2}, t \rangle.$$

$$|r'(t)| = 6\sqrt{4 + 4t + t^2} = 6\sqrt{(t+2)^2} = 6(t+2)$$

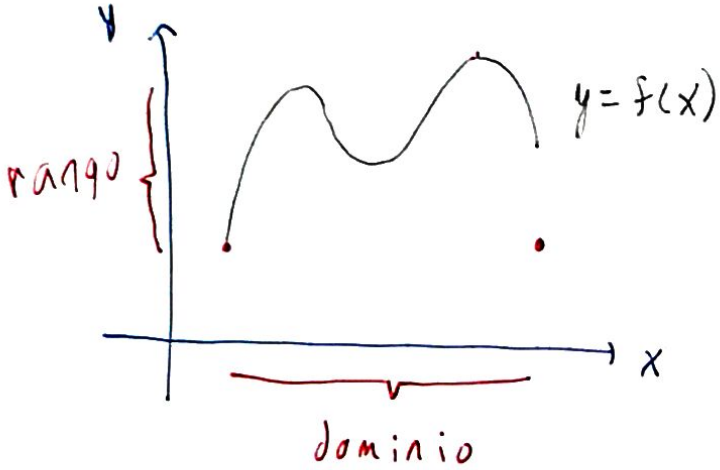
$$L = \int_0^1 (6t + 12)\, dt = 3t^2 + 12t\Big]_0^1 = 3 + 12 = 15$$

Capítulo 12

Funciones de varias variables

14.1 Funciones de Varias Variables.

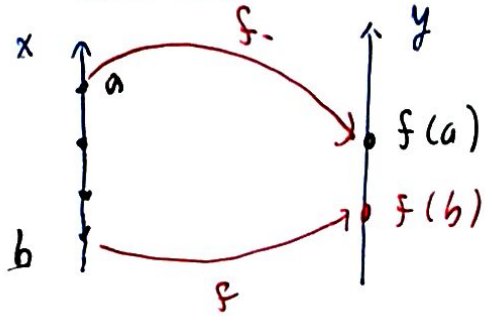
Funciones 1 variable



variable independiente x

variable dependiente y.

ID son intervalos.



Cada x puede tener un sólo valor de y.

Funciones 2 variables:

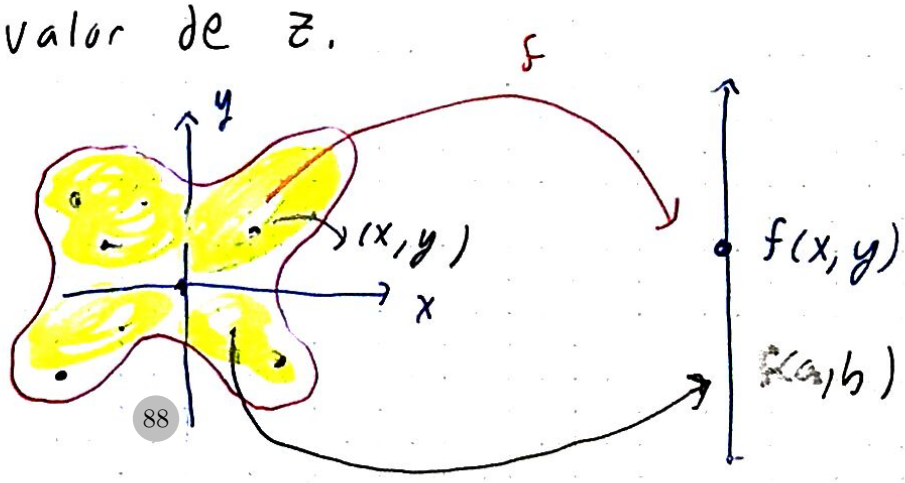
$z = f(x, y)$.

variables independientes x, y.

variable dependiente z

f es una regla que asigna a cada punto (x, y) a lo sumo un valor de z.

$f: \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{dominio}} \to \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{rango}}$.



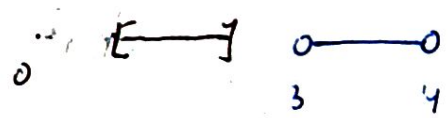
Dominio de f: un conjunto que consiste de todos los puntos o pares ordenados (x, y) para los cuales $f(x, y)$ está definida.

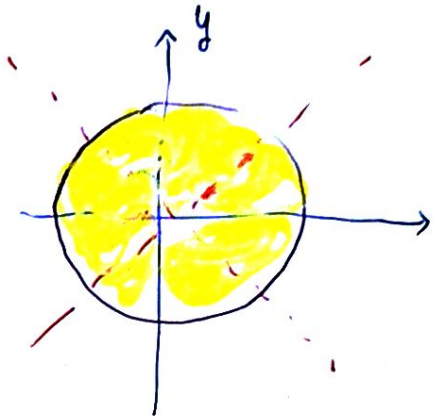
ID: 1-D todos los números x para los cuales $f(x)$ está definida.

- Evite la división por cero
- Raíces pares de números negativos
- Logaritmos de números negativos o cero.

El dominio de f en una función de dos variables es una región.

$[1,2] \cup (3,4)$





es parte del dominio

— parte del dominio

---- no es parte del dominio

Ejercicio 1: Encuentre y bosqueje el dominio de las sigs funciones.

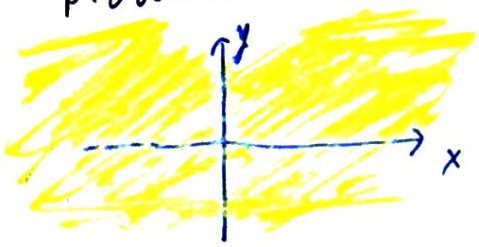
Sombree la región que es parte del ID y utilice líneas discontinuas para denotar a curvas que no son parte de ID.

a. $C(x, y) = 10x + 20y$.

nunca se indefine

ID: $\underbrace{(-\infty, \infty)}_{x} \times \underbrace{(-\infty, \infty)}_{y} = \mathbb{R}^2$.

$X \times Y$ producto cartesiano



$\mathbb{R} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Explic. Producto Cartesiano.

$X \times Y = \{(x,y)$ tal que $x \in X,\ y \in Y\}$.

$X = \{1, 2\}$ $\quad Y = \{1, 2, 3\}$.

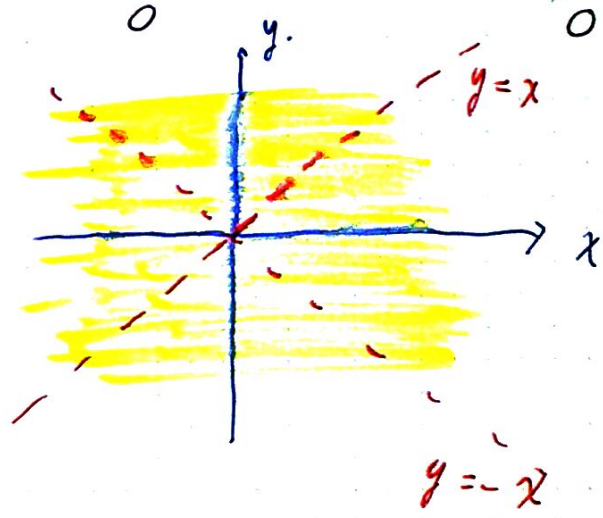
$X \times Y = \{(1,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (2,1)\ (2,2)\ (2,3)\}$.

$X \cup Y = \{(1)\ (2)\ (3)\}$.

---

b. $z = \dfrac{8}{x^2 - y^2}$ $\quad z(1,-1) = \dfrac{8}{0}$ $\quad z(-2,2) = \dfrac{8}{0}$.

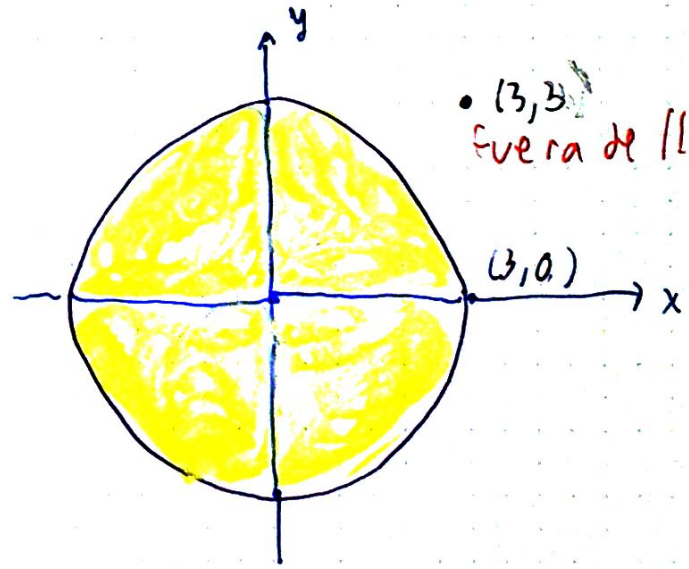
definida si $x^2 \neq y^2$



ID: $\mathbb{R}^2 - \{x^2 \neq y^2\}$.

$y \neq \sqrt{x^2}$ $\quad y \neq +x$
$\quad y \neq -x$

c. $R(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$



Definida $\quad 9 - x^2 - y^2 \geq 0$

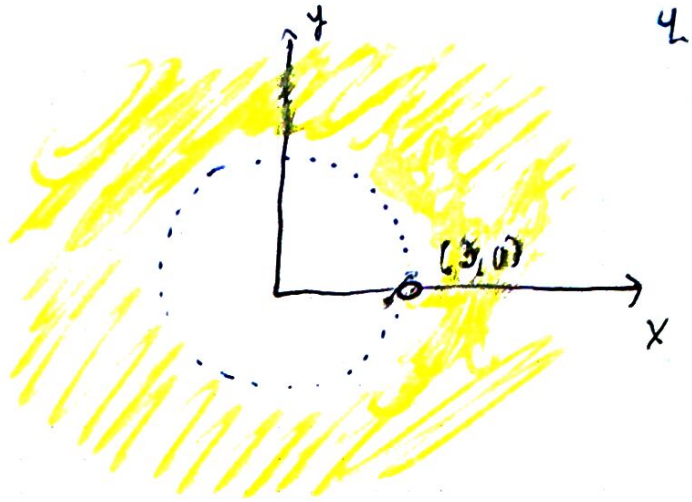
$9 \geq x^2 + y^2$.

ID: $\quad x^2 + y^2 \leq 9$

círculo de radio 3 centrado en el origen

ID $= \{(x,y)$ tal que $x^2 + y^2 \leq 9\}$.

d. $Q(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$

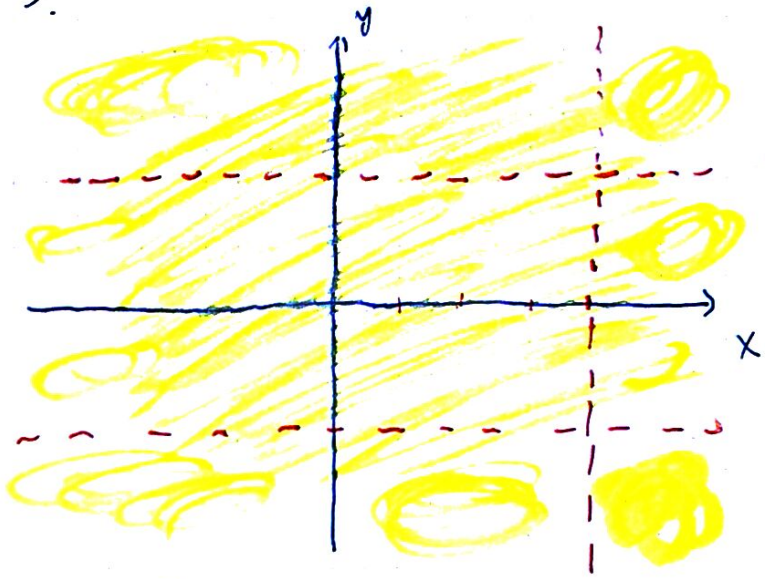


ID: $x^2+y^2-9>0$

$x^2+y^2>9$

afuera del disco de radio 3.

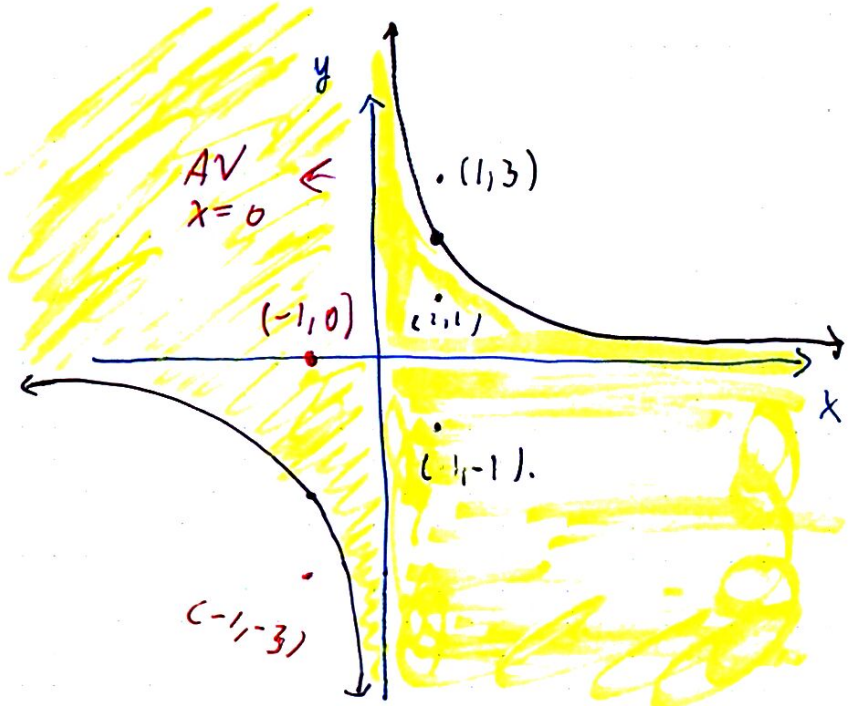
e. $z = \dfrac{(x+4)}{(y-2)(x-4)(y+2)}$



Definida si $y \neq \pm 2,\ x \neq 4$

ID: $\mathbb{R}^2 - \{y \neq \pm 2,\ x \neq 4\}$.

f. $h(x,y) = \ln(2-yx)$



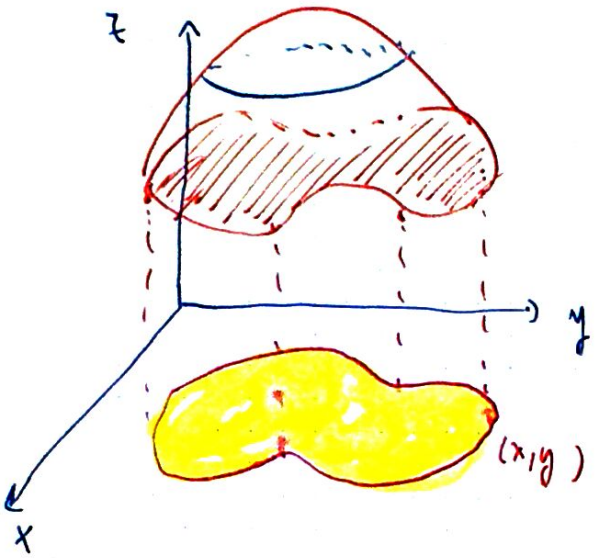
Definida si $2-yx>0$

$2>yx$

$\boxed{y<\dfrac{2}{x}}$

ID: $y<\dfrac{2}{x}$.

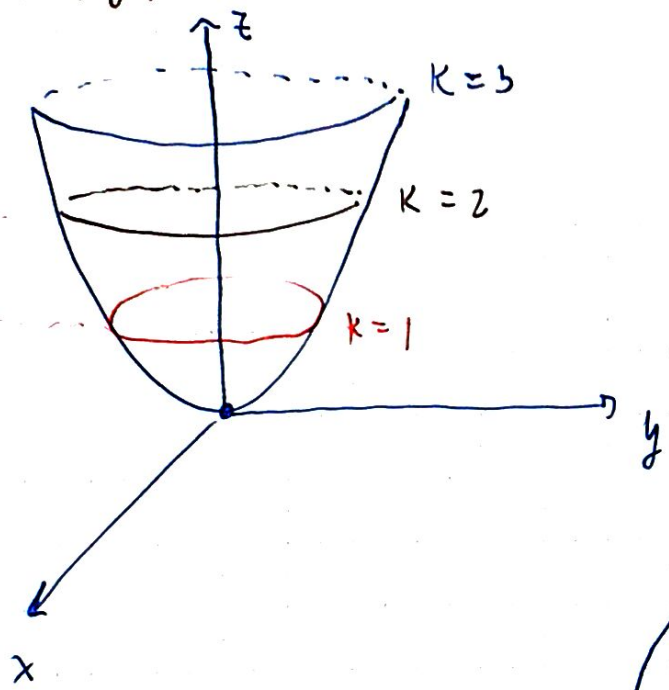
Gráfica de $z = f(x, y)$



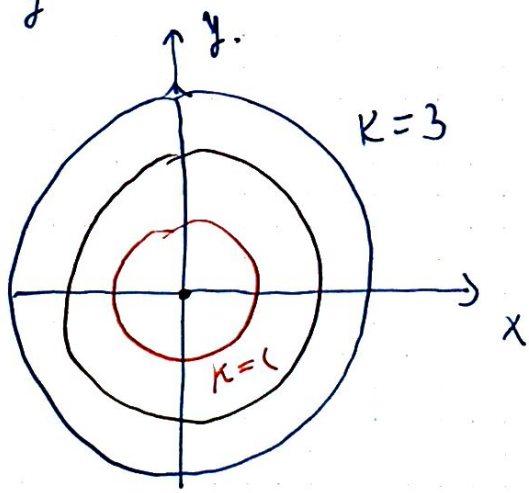
Son superficies y consisten de todas las triplas ordenadas (x, y, z) donde $z = f(x, y)$.

Curva de Nivel o traza horizontal:

$f(x, y) = K$ $\quad$ K es una constante.



Rebane la superficie con los planos horizontales $z = K$ y grafique cada curva en el plano.



Capítulo 13

Curvas de nivel

Curvas de Nivel $f(x,y) = K$. constante.

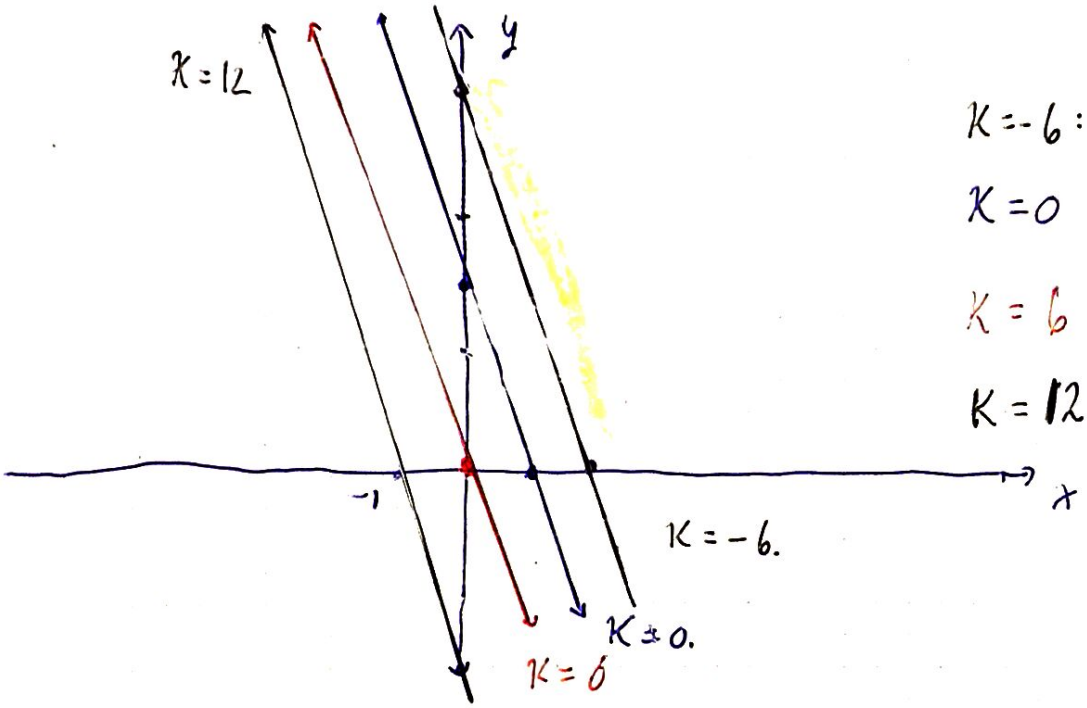
Ejercicio 4: (p84) Identifique y grafique las curvas de nivel $f(x,y)$.

a. $f(x,y) = 6 - 6x - 2y$ para $K = -6, 0, 6, 12$.

Plano

$$6 - 6x - 2y = K.$$
$$6 - K - 6x = 2y.$$
$$\boxed{y = 3 - \frac{K}{2} - 3x}$$

Rectas con pendiente -3 e intercepto-y $3 - \frac{K}{2}$.



$K=-6$: $y = 6 - 3x$

$K=0$ $y = 3 - 3x$.

$K=6$ $y = -3x$

$K=12$ $y = -3 - 3x$

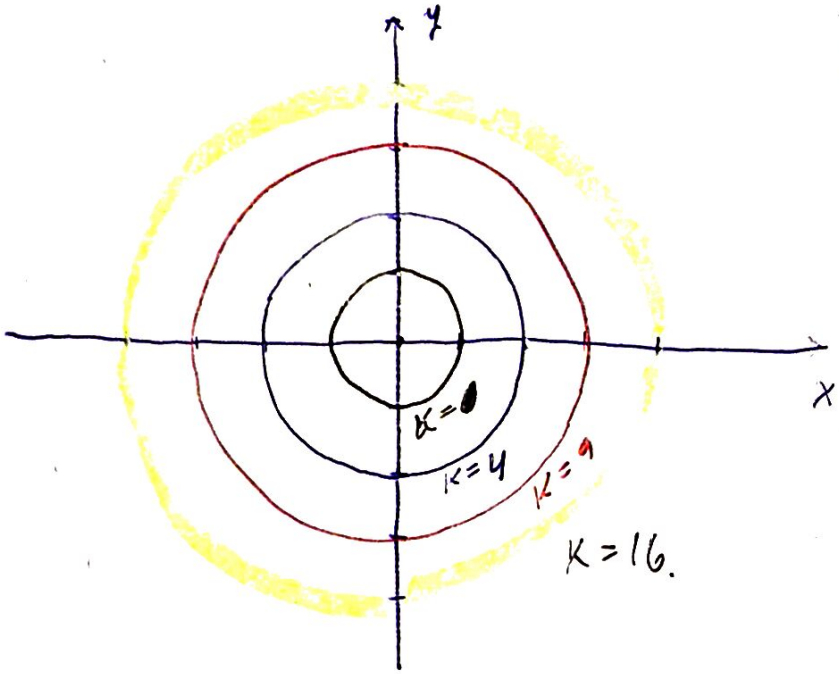
b. $g(x,y) = x^2 + y^2$ $K = 1, 4, 9, 16$.

$x^2 + y^2 = K$. circunferencia de radio $\sqrt{K}$

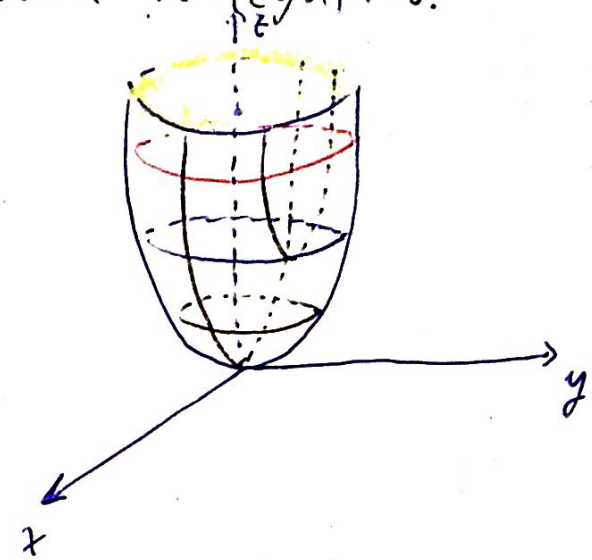
$x^2 + y^2 = 1$ todos están en el origen.

$x^2 + y^2 = 2^2$

$x^2 + y^2 = 3^2$



No tiene curvas de nivel para K negativo.



Paraboloide circular. $z = x^2 + y^2$.

$z = K$ $\quad x^2 + y^2 = K$ círculos.

$x = K$ ó $y = K$ trazas horizontales.

$z = x^2 + y^2$. Parábola.

$z = x^2 + K^2$.

$\therefore\ h(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2}$ para $K = 0, 1, 4, 9$.

Dominio: $y^2 - x^2 \geq 0$.

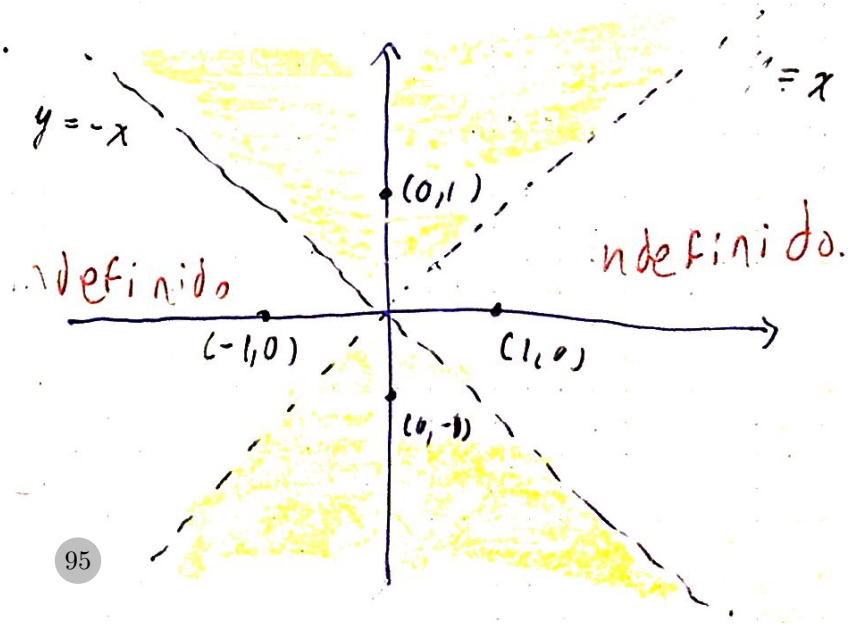
$y^2 \geq x^2$.

$y \geq \pm\sqrt{x^2}$

$y^2 - x^2 = 0$

$y^2 = x^2$.

$y = \pm x$

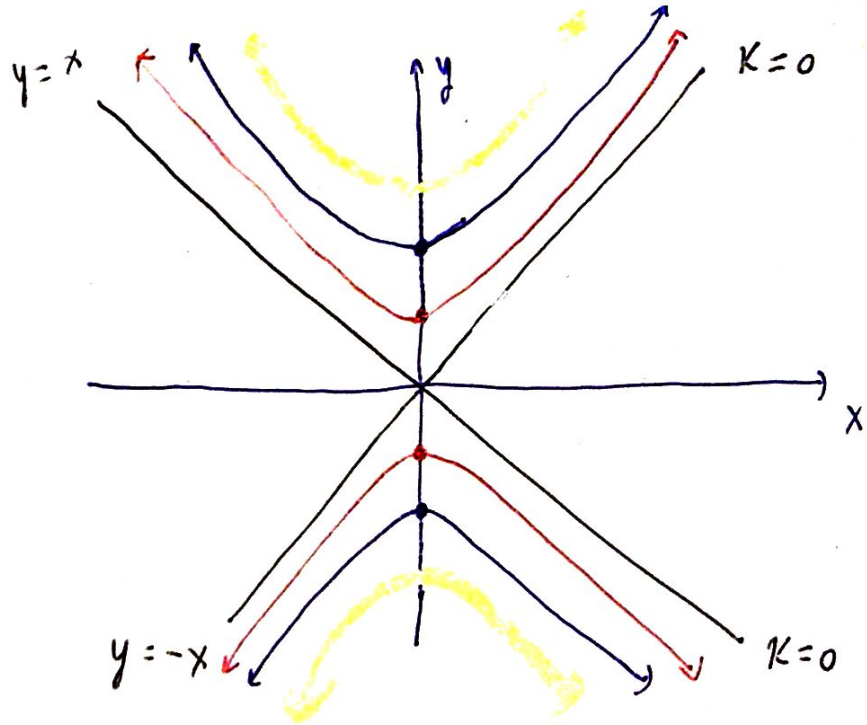


$$\sqrt{y^2 - x^2} = K.$$

$$y^2 = K^2 + x^2$$

$$y = \pm\sqrt{K^2 + x^2}$$

↳ Dominio $(-\infty, \infty)$ en x



$K = 0$: $y = \pm x$

$K = 1$ $y = \pm\sqrt{1 + x^2}$

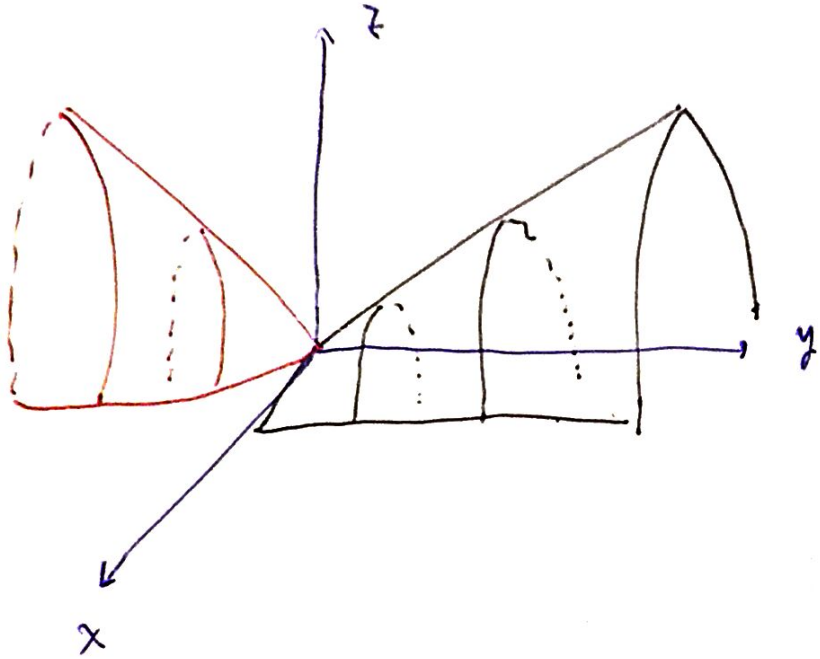
$y^2 - x^2 = 1.$

$x = 0$: $y^2 = 1$

$y = 0$: $-x^2 = 1$ no es posible

$K = 4$: $y = \pm\sqrt{4 + x^2}$

$K = 9$ $y = \pm\sqrt{9 + x^2}$



La superficie $z = \sqrt{y^2 - x^2}$ se observaría aprox así.

Funciones en 3 Variables

independientes x, y, z.

dependiente u ó w.

$$w = f(x, y, z)$$

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dominio: todas las triplas ordenadas (x, y, z) para las cuales $f(x, y, z)$ está definida.

Gráfica del dominio: es un sólido. (entre dos superficies)

Gráfica de $f(x, y, z)$ son hipersuperficies en 4-D.

Funciones en n variables.

$$u = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \qquad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Dominio: todas las n-tuplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para las cuales u está definida.

En 3-D: $f(x, y, z) = K$ constante.

superficies de nivel.

Ejercicio 5: Dominio y superficies de nivel para.

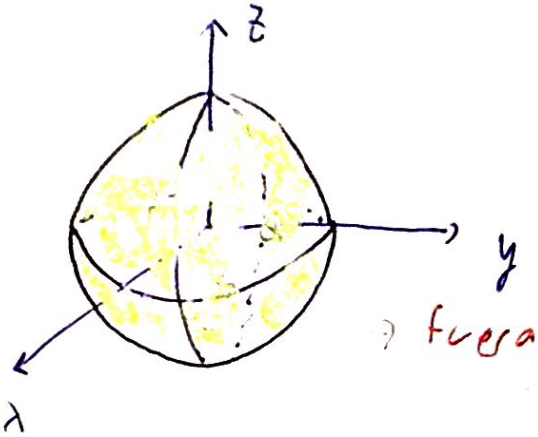
$$f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$$

evite raíces negativas.

Definida si $4 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$.

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4.$$

$x^2+y^2+z^2=4$ una esfera de radio 2.



esfera sólida de radio 2.

fuera dela esfera f se indefine.

curvas de nivel $\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}=K.$

$$4-x^2-y^2-z^2=K^2$$

$$x^2+y^2+z^2=4-K^2$$

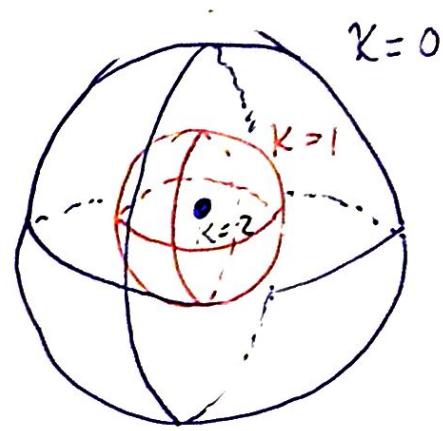
Esferas de radio $\sqrt{4-K^2}$

$K=0$ $x^2+y^2+z^2=4$

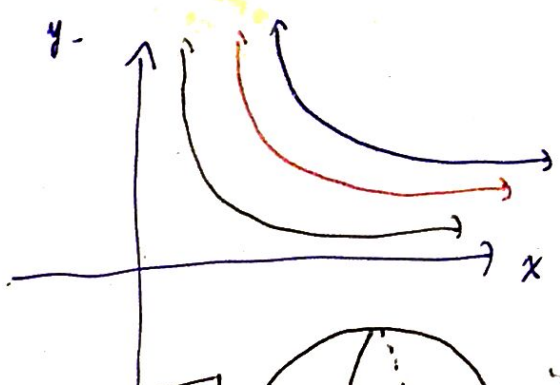
$K=1$ $x^2+y^2+z^2=3$

$K=2$ $x^2+y^2+z^2=0$

punto $(0,0,0)$



Curvas de nivel siempre son paralelas.

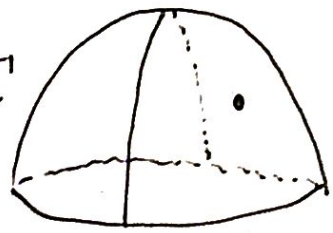


$f(x,y)$ sólo puede tener un valor.

Esfera $z^2+x^2+y^2=1$.

no es una función en 2 variables

$z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$

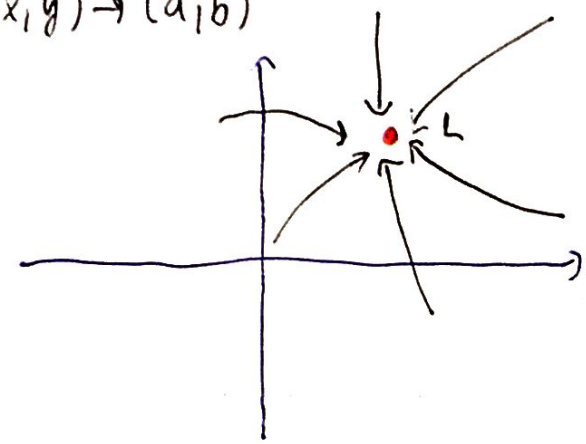


si es función, $z^2=1-x^2-y^2$.

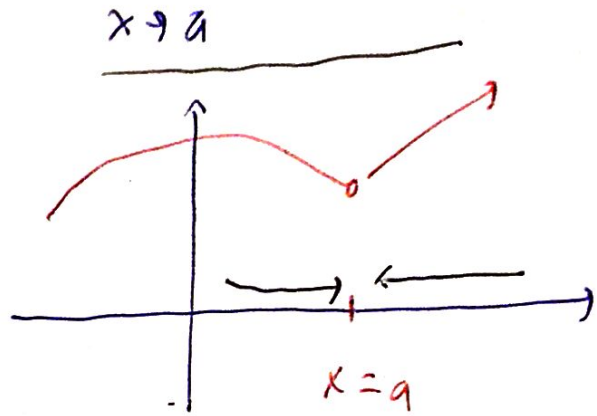
$$z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$$

1.2 Limite de una función de 2 variables.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L.$$ único



1-D $\lim_{x\to a} f(x) = L.$



si $f(x,y)$ es una función polinomial, trigonométrica, exponencial, logarítmica, etc y $f(x,y)$ está definida en (a,b) entonces

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x+y}{x^2+y^2} = \frac{2(1)+1}{1^2+1^2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$$ indeterminado. no se puede usar LH

$y=0$ $\quad \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$

$x=0$: $\quad \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{y^2} = 1$

no existe.

$y=x$ $\quad \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{2x^2+x^2}{x^2+x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}.$

Continuidad: es una extensión del concepto de continuidad en una variable.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Las funciones exponenciales, polinomiales, logarítmicas, racionales, trigonométricas, etc son continuas en su dominio.

Ejercicio 2: Determine la región donde las sigs. funciones son continuas.

a. $f(x,y) = \dfrac{2xy+1}{x^2+y^2}$ Es continua en todo su dominio.

Definida cuando $x^2+y^2 \neq 0$. $x \neq 0,\ y \neq 0$.

Continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

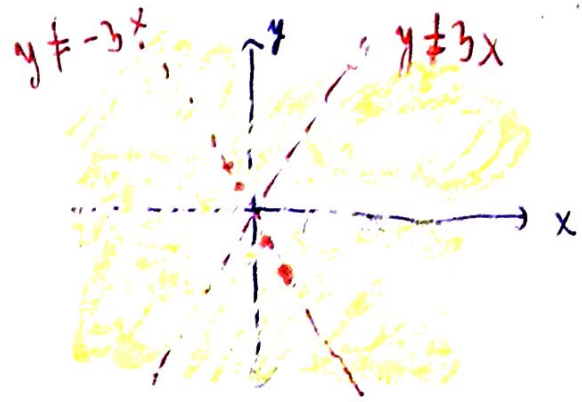
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy+1}{x^2+y^2} = \frac{1}{0}$$ no existe.

b. $h(x,y) = \dfrac{1}{y^2-9x^2}$

Definida cuando $y^2 \neq 9x^2$

$\sqrt{9x^2} = \pm 3x$ $y = 3x$ o $y = -3x$

$ID: \mathbb{R}^2 - \{y = \pm 3x\}$



Enfoque funciones 2 variables.

a. Dominio y continuidad "prácticamente intercambiables"

b. curvas de nivel $f(x,y) = K$.

No hay enfoque

- Gráficas de $f(x,y)$
- límites de $f(x,y)$
- Superficies de Nivel.

Capítulo 14

Derivadas parciales

14.3 Derivadas Parciales.

Derivada 1-D. $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$

En una función con 2 variables independientes

$f(x,y)$ $\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{array}\right\}$ derivadas parciales.

Al derivarse parcialmente respecto a una variable, la otra se mantiene constante.

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

"y se mantiene constante"

$$f_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

"x se mant. constante"

Se pueden utilizar todas las reglas de derivación para funciones de 1 - variable.

- Suma, Producto, Cociente y la Cadena.

1ras Derivadas parcial de $f(x,y)$. encuentre todas las derivadas parciales posibles f_x y f_y.

∂ delta.

Notación. $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$ $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Evite $f'(x,y)$ para evitar ambigüedad.

Ejercicio 1: Encuentre las derivadas parciales de las sigs. funciones.

a. $f(x,y) = 2x^2 + 3xy.$ $f_x(x,y)$ & $f_y(x,y)$.

$f_x = 4x + 3y.$ $f_y = 0 + 3x$

b. $g(x,y) = y(x^2+1)^3 + x^2(y^4-4)^4 + 5x^2y^3$

x x $x.$

$g_x = 3y(x^2+1)^2 2x + 2x(y^4-4)^4 + 10xy^3$

$g_y = 1.(x^2+1)^3 + 16y^3x^2(y^4-4)^3 + 15x^2y^2.$

c. $h(s,t) = (s^2+10t)^2(t^4+s^3)^3$ Regla del Producto y de la Cadena.

$h_s = 4s(s^2+10t)^1(t^4+s^3)^3 + 3\cdot 3s^2(s^2+10t)^2(t^4+s^3)^2$

$h_t = 20(s^2+10t)^1(t^4+s^3)^3 + 12t^3(s^2+10t)^2(t^4+s^3)^2$

Evalúe la derivada en punto (a,b).

$$f_x(a,b) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}$$

d. $w(r,\theta) = r^2\sin(2\theta) + e^{\pi r-\theta}.$ Encuentre $\left.\frac{\partial w}{\partial \theta}\right|_{(2,\pi)}$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = 2r^2\cos(2\theta) - e^{\pi r-\theta}.$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \theta}\right|_{(2,\pi)} = w_\theta(2,\pi) = 2\cdot 4\cos(2\pi) - e^{2\pi-\pi}.$$

$$= \boxed{8 - e^{\pi}.}$$

Derivadas parciales para funciones de 2 o más variables

se deriva respecto a una variable y el resto se mantienen constantes.

$w = f(x, y, z)$

3 1ras derivadas parciales f_x, f_y, f_z.

μ miu.

$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

n derivadas parciales: $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial u}{\partial x_n}$.

Ejercicio 3: Encuentre todas las primeras derivadas parciales de las sigs. funciones.

a. $f(x, y, z) = \sqrt[4]{x^4 + 8xz + 2y^2}$ $\quad (\quad)^{1/4}$.

$f_x = \frac{1}{4}(x^4 + 8xz + 2y^2)^{-3/4} \cdot (4x^3 + 8z + 0)$

$f_y = \frac{1}{4}(x^4 + 8xz + 2y^2)^{-3/4}(4y)$

$f_z = \frac{1}{4}(x^4 + 8xz + 2y^2)^{-3/4}(8x)$

b. $P(r, \theta, \phi) = r \tan(\phi^2 - 4\theta)$

$P_r = \tan(\phi^2 - 4\theta)$

$P_\theta = -4r\sec^2(\phi^2 - 4\theta)$

$P_\phi = 2\phi r \sec^2(\phi^2 - 4\theta)$.

funciones vectoriales 1 variable

$\vec{r}'(t), \ldots$

$\langle f', g', h' \rangle$.

Derivadas parciales de orden superior (Pág 100).

Orden superior: segunda, tercera, cuarta, ...,

Como $f_x(x,y)$ & $f_y(x,y)$ son también funciones en dos variables pueden también tener derivadas parciales.

$$f_x \xrightarrow{x} f_{xx} \qquad f_x \xrightarrow{y} f_{xy}.$$

1er derivar izquierda — último derivar derecha

$$f_y \xrightarrow{y} f_{yy} \qquad f_y \xrightarrow{x} f_{yx}$$

cruzadas

4 segundas derivadas parciales, éstas también tienen sus derivadas parciales terceras derivadas parciales.

$$f_{xxx} \quad f_{xxy} \quad f_{yyy} \quad f_{yxy}.$$
$$f_{xxy} \quad f_{xyx} \quad f_{yyx} \quad f_{yxx}$$

Las derivadas parciales cruzadas f_{xy}, f_{yx} son iguales si la función es diferenciable.

$$f_{xy} = f_{yx} \qquad f_{xyy} = f_{yyx} = f_{yxy}.$$

el orden de derivación respecto a cada variable no afecta la derivada parcial.

Notación Delta.

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Ejercicio 4: Encuentre todas las 2das derivadas parciales

a. $f(x,y) = \sin(mx+ny)$, $m,n \in \mathbb{R}$.

1ras parciales: $f_x = m\cos(mx+ny)$

$f_y = n\cos(mx+ny)$.

2das parciales: $f_{xx} = -m^2\sin(mx+ny)$

$f_{yy} = -n^2\sin(mx+ny)$.

$$\left.\begin{aligned} f_{xy} &= -mn\sin(mx+ny). \\ f_{yx} &= -mn\sin(mx+ny) \end{aligned}\right\} \text{iguales.}$$

b. $z = \cos(2xy)$

1ras.: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -2y\sin(2xy)$ $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2x\sin(2xy)$

2das: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4y^2\cos(2xy)$ $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4x^2\cos(2xy)$

z_x respecto a y:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= -2\sin(2xy) - 4yx\cos(2xy) \\ z_{yx} &= -2\sin(2xy) - 4xy\cos(2xy) \end{aligned}\right\} \text{mismo.}$$

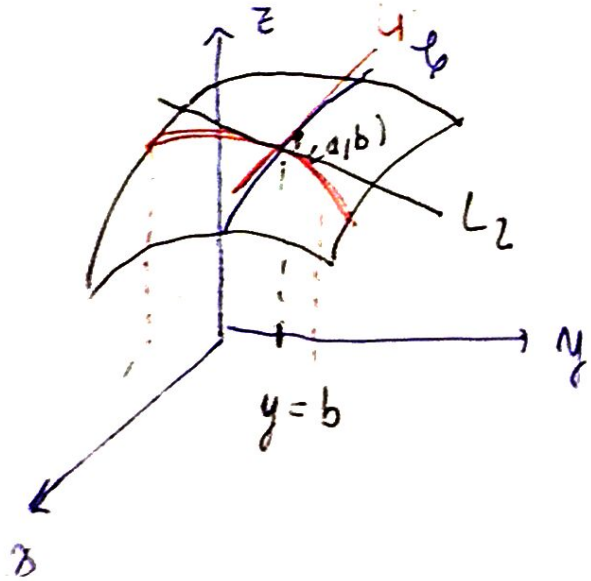
Capítulo 15

Derivadas parciales, rectas tangentes y planos tangentes

Derivadas Parciales, Rectas Tangentes y planos tangentes.

P. 101

Interpretación de la Derivada Parcial.



$\mathcal{C}$ curva de intersección entre $z=f(x,y)$ y $y=b$.

Curva Variable $z=f(x,b)$

Recta tangente a esta curva.

punto $(a,b,f(a,b))$

derivada. $f_x(x,b)$

pendiente $\boxed{f_x(a,b)}$

Derivadas Parciales. $f_x(a,b)$ pendiente de la recta tangente. a la curva $f(x,b)$ en la dirección de x.

$L_1 = \langle a,b,f(a,b)\rangle + t\langle 1,0,f(a,b)\rangle$.

Función vectorial $x=t$, $y=b$, $z=f(t,b)$.

Para encontrar L_2 $x=a$.

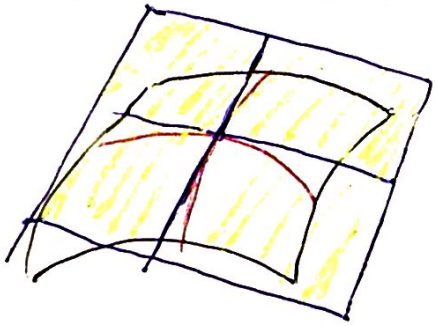
$x=a$, $y=t$, $z=f(a,y)$

$z_y = f_y(a,y) \Rightarrow \underline{z_y = f_y(a,b)}$

$z_y = f_y(a,b)$ es la pendiente de la tangente a la curva $f(a,y)$ en la dirección de y.

$$L_2 = \langle a, b, f(a,b) \rangle + t \langle 0, 1, f_y(a,b) \rangle$$

Estas dos rectas se utilizan para construir el plano tangente a la superficie p. 103.



→ Ec. plano tangente.

plano paralelo a L_1 y a L_2.

$$L_1 = \langle a, b, f(a,b) \rangle + t \underbrace{\langle 1, 0, f_x(a,b) \rangle}_{v_1}.$$

$$L_2 = \langle a, b, f(a,b) \rangle + t \underbrace{\langle 0, 1, f_y(a,b) \rangle}_{v_2}.$$

Ec. vectorial $\hat{n} \cdot (r - r_0) = 0$ $\quad \vec{r}_0 = \langle a, b, f(a,b) \rangle$

$$\hat{n} = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & f_x(a,b) \\ 0 & 1 & f_y(a,b) \end{vmatrix} = -f_x(a,b)\hat{i} - f_y(a,b)\hat{j} + \hat{k}$$

Ec. vectorial plano: $\langle -f_x(a,b), -f_y(a,b), 1 \rangle$

$$\langle -f_x(a,b) - f_y(a,b), 1 \rangle \cdot \langle x-a, y-b, z-f(a,b) \rangle =$$

$$-f_x(a,b)(x-a) - f_y(a,b)(y-b) + z - f(a,b) = 0.$$

$$\boxed{z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)}$$

Plano tangente a z en el punto $(a, b, f(a,b))$.

Ejercicio 1: Encuentre el plano tangente a la superficie $z = \ln(x-2y)$ en el punto $(3,1,0)$.

$f(a,b)$ $\quad f_x(a,b)$ $\quad f_y(a,b)$ $\quad a=3,\ b=1$

$$f(3,1) = \ln(3-2) = \ln 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x-2y} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(3,1)} = \frac{1}{3-2} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2}{x-2y} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(3,1)} = \frac{-2}{3-2} = -2.$$

Plano Tangente $\quad z = f(3,1) + f_x(x-3) + f_y(y-1)$

$$z = 0 + x - 3 - 2y + 2.$$

$$\boxed{z = x - 2y - 1}$$

Aproximación Lineal de $z = f(x,y)$, Linearización

La aproximación lineal de z en (a,b) es el plano tangente a la superficie.

$$L(x,y) = f(a,b) + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}}_{f_x(a,b)}(x-a) + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}}_{f_y(a,b)}(y-a)$$

Ejercicio 2: Considere la función $f(x,y)=\sqrt{2x+2e^y}$

a. Encuentre la aproximación lineal de f en el punto $(7,0)$.

Encuentre $f(7,0)$ $f_x(7,0)$ $f_y(7,0)$

$f(7,0)=\sqrt{14+2}=4.$

$f_x(x,y)=(2x+2e^y)^{-1/2}.$ $f_x(7,0)=\dfrac{1}{\sqrt{14+2}}=\dfrac{1}{4}.$

$f_y(x,y)=\dfrac{e^y}{\sqrt{2x+2e^y}}$ $f_y(7,0)=\dfrac{1}{\sqrt{14+2}}=\dfrac{1}{4}.$

Aproximación lineal o Plano Tangente $\boxed{L=4+\frac{1}{4}(x-7)+\frac{1}{4}y.}$

Cerca de $(7,0)$ $\sqrt{2x+2e^y}\approx\frac{9}{4}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y.$

b. Utilice la aproximación lineal para aproximar el valor de $\sqrt{8+2e}$. $2x=8$ $2e^y=2e^1$

$f(4,1)=\sqrt{8+2e}\approx L(4,1)$

$L(4,1)=\frac{9}{4}+\frac{4}{4}+\frac{1}{4}=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}=3.5$

$\sqrt{8+2e}\approx 3.5$ En realidad $\sqrt{8+2e}\approx 3.665592.$

Ejercicio 3: Encuentre la aproximación lineal de $g(x,y) = 1 + x\ln(xy-5)$ en el punto $(2,3)$.

$$\boxed{g(2,3)} = 1 + 2\ln(6-5) = 1 + 0 = \boxed{1}$$

$$g_x(x,y) = 0 + 1\cdot\ln(xy-5) + \frac{xy}{xy-5}$$

$$\boxed{g_x(2,3)} = \ln(1) + \frac{6}{6-5} = 0 + \frac{6}{1} = \underline{6}.$$

$$\boxed{g_y(x,y)} = 0 + \frac{x\cdot x}{xy-5} \qquad g_y(2,3) = \frac{4}{6-5} = \boxed{4}$$

Aproximación Lineal:

$$L(x,y) = 1 + 6(x-2) + 4(y-3)$$

$$L(x,y) = -23 + 6x + 4y.$$

12.4 Derivación Implícita y 12.5 Regla de la Cadena.

Funciones 2 variables $z = f(x,y)$

Explícita $z = x^2 + y^2$, $z = x\ln(xy-5)$, ...

Implícita: z no está sólo en función de x & y.

Ejemplos: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $\sqrt{z^2 - x^2} = y + z$.

¿Cómo se encuentran $\frac{\partial z}{\partial x}$ & $\frac{\partial z}{\partial y}$?

Implicita. $x^2+y^2+z^2=16.$ Esfera radio 4

Rango $[-4,4]$

$$z = \underbrace{+\sqrt{16-x^2-y^2}}_{\text{Rango } [0,4].}$$ Dos hemisferios

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(16-x^2-y^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{16-x^2-y^2}} = -\frac{x}{z}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Derivación Implícita se pueden encontrar z_x & z_y SIN necesidad de resolver para z.

$$x^2+y^2+z^2 = 16.$$ x & y son independientes

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(16)$$

$$2x + 0 + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial x} = -2x \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2\right) = \frac{\partial}{\partial y}(0).$$

$$0 + 2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.}$$

Derivación Parcial Implícita Abreviada.

$x^2+y^2+z^2=16$ como $x\ln y + z^2\sqrt{1+x+z} = \underline{K}$

Forma implícita: $F(x, y, z(y,x)) = \text{constante}.$

$\frac{\partial z}{\partial x}$, use la regla de la Cadena.

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\boxed{z_x = \frac{-F_x}{F_z}. \qquad z_y = \frac{-F_y}{F_z}.}$$

Ejemplo $x^2+y^2+z^2=16.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{2z} = \frac{-x}{z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{2z}.$$

Ejercicios: p. 108 Encuentre las primeras derivadas parciales de z.

a. $\underbrace{\ln(zy) + 9z - xyz}_{F} = 1$ $\qquad \frac{z}{zy} = \frac{1}{y}.$

$F_x = -yz.$

$F_y = y^{-1} + 0 - xz$

$F_z = z^{-1} + 9 - xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F_x}{F_z} = \frac{yz}{z^{-1}+9-xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz - y^{-1}}{z^{-1}+9-xy}$$

sin derivación parcial implícita derivada.

$z(x, y)$ agregue z_x cada vez que aparece z.

$$\frac{y z_x}{z y} + 9 z_x - y z - x y z_x = 0.$$

$$z^{-1} z_x + 9 z_x - x y z_x = y z.$$

$$z_x = \frac{y z}{z^{-1} + 9 - x y}$$

más laborioso
más cuidadoso.

Capítulo 16

Regla de la cadena, derivación implícita, planos y rectas tangentes

14.5 Regla de la cadena

$y = f(g(t))$ $\qquad$ $y = f(x)$ $\qquad$ $x = g(t)$

$y \to x \to t$

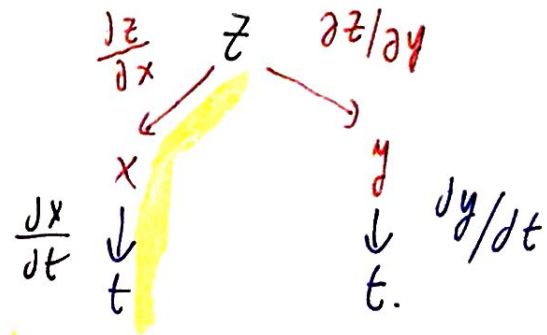
$$\frac{dy}{dt} = \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\text{externa}} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\text{interna}}$$

Caso 1: $z = f(x, y)$ $\qquad$ $x = g(t)$ $\qquad$ $y = h(t)$

¿Cómo se encuentra dz/dt?

$z = f(x(t), y(t))$

Diagrama de Árbol.



Variable dependiente z.

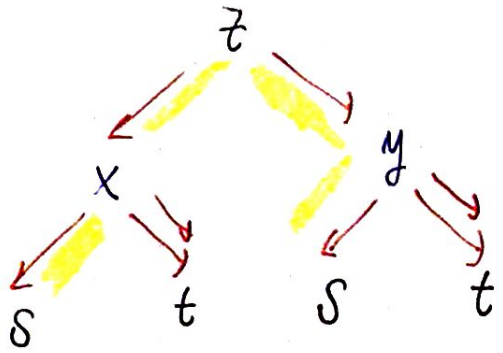
Variables intermedias x, y.

Variable independiente t

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.}$$

Sume cada trayectoria.

Caso 2: $z = f(x, y)$ $\qquad$ $x = g(s,t)$ $\qquad$ $y = h(s,t)$



$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

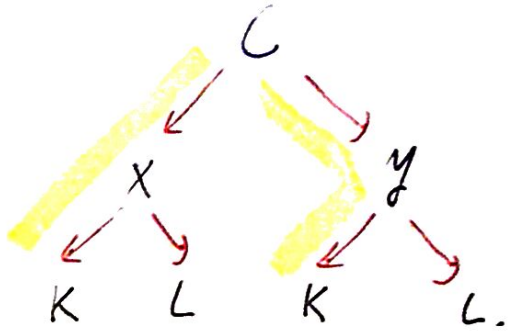
Ejercicio 1: suponga que el costo de producir x uds. de A. y y uds. de B es:

$$C(x,y) = (3x^2 + y^3 + 4)^{1/3}.$$ explícita

Las funciones de producción para cada producto son:

$$x = 10KL \qquad y = 5K^2 + 4L.$$ explícita

Encuentre la razón de cambio de C respecto al capital y al trabajo.



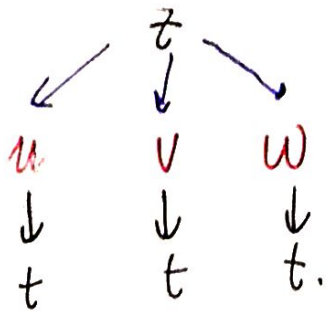
$$\frac{\partial C}{\partial K} = \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial K} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial K}.$$

$$\frac{\partial C}{\partial L} = \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial L} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial L}.$$

$$\frac{\partial C}{\partial K} = \frac{1}{3}6x\,(3x^2+y^3+4)^{-2/3}\,10L + \frac{1}{3}\frac{3y^2}{(3x^2+y^3+4)^{2/3}}\,10K.$$

$$\frac{\partial C}{\partial L} = \frac{2x}{(3x^2+y^3+4)^{2/3}}\,10K + \frac{y^2}{(3x^2+y^3+4)^{2/3}}(4)$$

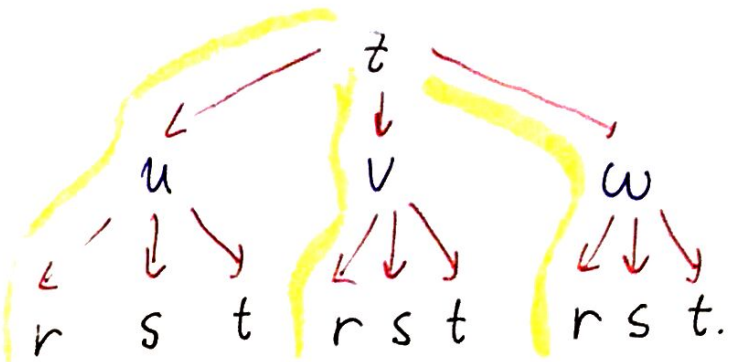
Ejercicio 3: Suponga que $z = f(u, v, w)$ y que u, v, w son funciones de t. Encuentre dz/dt.



$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Ejercicio 4: Suponga ahora que $z = f(u, v, w)$ y que u, v, w son funciones de r, s, t.

Encuentre las derivadas parciales de z resp. a r, s & t.



$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial r}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial s}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}$$

Ejercicio 5: Encuentre las derivadas parciales indicadas.

a. $w = \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad \left.\dfrac{\partial w}{\partial p}\right|_{(p=1,\, q=0,\, r=3)}$

$x = p^2 - q^3 + r - 1$

$y = \ln(p) + e^{q} + e^{\ln r}$

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p}$$

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}\, 2p + \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\,\frac{1}{p}$$

$x(1,0,3) = 1^2 - 0^3 + 3 - 1 = 3.$

$y(1,0,3) = \ln(1) + e^0 + e^{\ln 3} = 0 + 1 + 3 = 4.$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial p}\right|_{(1,0,3)} = \frac{3}{\sqrt{9+16}}\, 2 + \frac{4}{5}\,\frac{1}{1} = \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = \underline{\underline{2}}$$

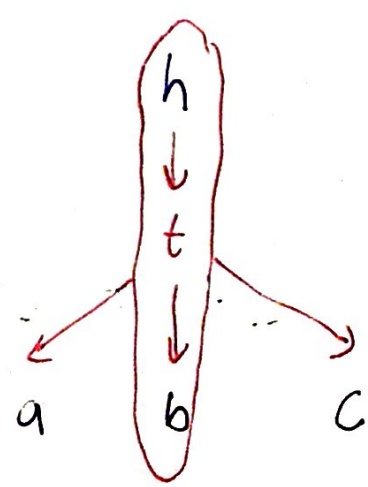
b. $h = 4 - t^2$, $\quad t = 2a + 3b + 4c$, $\quad \left.\dfrac{\partial h}{\partial b}\right|_{(4,2,3)}$

$h(a,b,c) = 4 - (2a+3b+4c)^2$

$$\frac{\partial h}{\partial b} = -2(2a+3b+4c)\,3$$

$$\left.\frac{\partial h}{\partial b}\right|_{(4,2,3)} = -2(8+6+12)\cdot 3$$

$h_b(4,2,3) = -2(26) = -52\cdot 3$



c. $w = \ln(xyz)$ $\quad x = r^2 - s^2,\ y = rs,\ z = r^2 + s^2$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$w_x = \frac{yz}{xyz} = \frac{1}{x} \qquad w = \ln(xyz) = \ln x + \ln y + \ln z.$$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{2r}{x} + \frac{s}{y} + \frac{2r}{z}}$$

Ejercicios Derivación Implícita, Planos y Rectas Tangentes.

Ejercicio 6: Encuentre las ecs. paramétricas de las rectas tangentes a $z = \sin x \tan y$ en la dirección de x & y en el punto $(\pi/6, \pi/4)$

En la dirección de x: $m_x = z_x(\pi/6, \pi/4)$

de y: $m_y = z_y(\pi/6, \pi/4)$

$z_x = \cos x \tan y.$ $\quad z_x(\pi/6, \pi/4) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1$

$z(\pi/6, \pi/4) = \frac{1}{2} \cdot 1$

No es una recta

Intento: $z = z(\pi/6, \pi/4) + z_x(\pi/6, \pi/4)(x - \pi/6)$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \pi/6)$$

En la dirección de x no hay cambio en y.

$x = t.$

$y = \pi/4$

$z = \sin t \tan(\pi/4)$

$\vec{r}(t)$

$\vec{r}'(t) = \langle 1, 0, \cos t \rangle.$

$\vec{r}'(\pi/6) = \langle 1, 0, \sqrt{3}/2 \rangle.$

$L = \vec{r}(\pi/6) + \vec{r}'(\pi/6)\, t.$

$= \langle \pi/6, \pi/4, 1/2 \rangle + t \langle 1, 0, \sqrt{3}/2 \rangle.$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \pi/6 + t. \\ y &= \pi/4. \\ z &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} t. \end{aligned}}$$

Recta Tangente a z en la dirección de x.

En la dirección de y. $x = \pi/6$ use $t = \pi/4$.

$x = \pi/6$

$y = t$

$z = \sin\frac{\pi}{6} \tan t.$

$\vec{r}'(t) = \langle 0, 1, \frac{1}{2}\sec^2 t \rangle.$

$r'(\pi/4) = \langle 0, 1, \underbrace{\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2}_{1} \rangle.$

$L = \vec{r}(\pi/4) + \vec{r}'(\pi/4)\, t$

$\vec{r}(\pi/4) = \langle \pi/6, \pi/4, 1/2 \rangle.$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \pi/6 \\ y &= \pi/4 + t. \\ z &= \frac{1}{2} + t \end{aligned}}$$

Ec. del Plano Tangente ó Aproximación Lineal

$$L(x,y) = z(\pi/6, \pi/4) + z_x(x - \pi/6) + z_y(y - \pi/4)$$

$$z(x,y) = \sin x \tan y.$$

$$z(\pi/6, \pi/4) = \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$z_x = \cos x \tan y \qquad z_x(\pi/6, \pi/4) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1$$

$$z_y = \sin x \sec^2 y \qquad z_y(\pi/6, \pi/4) = \frac{1}{2}\, 2 = 1$$

Plano tangente: $\boxed{L(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \pi/6) + 1 \cdot (y - \pi/4)}$

$$t = 3 \quad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= t \\ z &= -1 - 2t^2. \end{aligned}$$

$$r(3) = \langle 2, 3, -19 \rangle$$

$$r'(t) = \langle 0, 1, -4t \rangle.$$

$$r'(3) = \langle 0, 1, -12 \rangle.$$

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 3 + t. \\ z &= -19 - 12t. \end{aligned}$$

Capítulo 17

Derivadas direccionales y gradiente

14.5 Derivadas Direccionales y Gradiente. p. 114.

El Gradiente de f, denotado como ∇f ó grad f, es la función vectorial

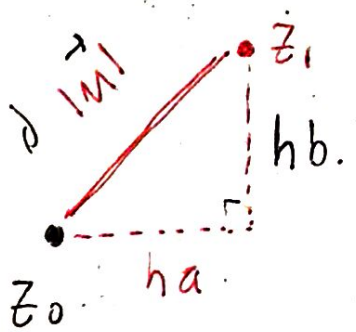
$$\nabla f = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$$

Función de tres variables $f(x, y, z)$.

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle$$

f es una función escalar ∇f es una función vectorial.

Derivadas Parciales en la dirección de x ó en la dirección de y.



La razón de cambio promedio entre z_1 y z_0 si uno se desplaza en la dirección del vector $\vec{u}$ el cual es unitario.

$$\left(\frac{\Delta z}{\Delta d}\right) = \frac{z_1 - z_0}{h\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{z_1 - z_0}{h}.$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{a^2+b^2} = 1 \qquad z_1 = f(x_0 + ha, y_0 + hb)$$

$$z_0 = f(x_0, y_0).$$

Derivada Direccional: es la razón de cambio instántanea $(h \to 0)$ de z en la dirección de $\vec{u}$ unitario en el punto (x_0, y_0)

$$\boxed{D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}}$$

3-D: $w_0 = f(x_0, y_0, z_0)$

$w_1 = f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc)$

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x_0} + h\vec{u}) - f(\vec{x_0})}{h}$$

$\vec{x_0} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$

$\vec{u} = \langle a, b, c \rangle$.

¿Cómo se calcula $D_u f(\vec{x_0})$?

$u = \langle 1, 0, 0 \rangle$.

en la dirección de x.

$$D_{\hat{i}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

$$D_{\hat{i}} f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

$u = \langle 0, 1, 0 \rangle$.

$$D_{\hat{j}} f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

en la dirección de y.

en la dirección de z.

$$D_{\hat{k}} f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Sea $g(h) = f(x_0 + ha,\ y_0 + hb,\ z_0 + hc)$

$$g'(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{u}) - f(\vec{x}_0)}{h} = D_u f(x_0, y_0, z_0)$$

$\vec{u} = \langle a, b, c \rangle \qquad |\vec{u}| = 1$

$g(h) = f(x, y, z) \qquad x = x_0 + ha \qquad z = z_0 + hc$

$y = y_0 + hb$

$$\begin{tikzcd}
 & f \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
x \arrow[d] & y \arrow[d] & z \arrow[d] \\
h & h & h.
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial y} b + \frac{\partial f}{\partial z} c.}$$

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle \qquad \vec{u} = \langle a, b, c \rangle$$

Teorema: Si f es diferenciable en x, y, z, la derivada direccional de f en el punto $\vec{x}_0$ en la dirección del vector unitario $\vec{u}$ es:

$$\boxed{D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) = \nabla f \cdot \vec{u}}$$

producto punto entre el gradiente & $\vec{u}$

Ejercicio 1: Encuentre la derivada direccional de $f(x, y) = e^x \sin y$ en el punto $(0, \pi/3)$ en la dirección de $\vec{v} = \langle -6, 8 \rangle$.

$$D_{\vec{u}} f(0, \pi/3) = \nabla f(0, \pi/3) \cdot \underline{\vec{u}}$$

4

$\vec{v}$ no es unitario $|\vec{v}| = \sqrt{36+64} = 10.$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \boxed{\frac{1}{10}\langle -6, 8\rangle.}$$

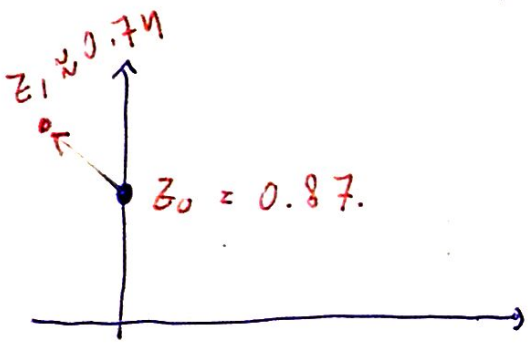
$$\nabla f = \langle f_x, f_y\rangle = \langle e^x \sin y, e^x \cos y\rangle$$

$$\nabla f(0, \pi/3) = \boxed{\langle \sqrt{3}/2, 1/2\rangle}$$

$$D_{\vec{u}} f(0, \pi/3) = \frac{1}{10}\langle -6, 8\rangle \cdot \langle \sqrt{3}/2, 1/2\rangle$$

$$= \frac{1}{10}\left(-3\sqrt{3} + 4.\right) \approx -0.119615.$$

Interpretación $f(0, \pi/3) = e^0 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660.$



Resumen $\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle$

Derivada Direccional $D_u f(\vec{x}_0) = \nabla f \cdot \vec{u}$

Ejercicio 2: Considere la función $g(r,t) = r^2 \tan\left(\frac{\pi t}{4}\right)$.

a. Encuentre el gradiente de $g(r,t)$ en el punto $(2,1)$.

$$\nabla g = \langle g_r, g_t \rangle = \left\langle 2r \tan\left(\frac{\pi t}{4}\right), \frac{\pi r^2}{4} \sec^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) \right\rangle$$

$$\nabla g(2,1) = \left\langle 4 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right), \pi \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\rangle \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$\nabla g(2,1) = \langle 4, 2\pi \rangle.$$

b. Encuentre la razón de cambio instántanea de g en el punto $(2,1)$ en la dirección de $v = \langle -1, 2 \rangle$.

$$D_u g(2,1) = \nabla g(2,1) \cdot \vec{u}$$

Falta un vector unitario: $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle -1, 2 \rangle.$

$$D_u g(2,1) = \frac{\langle 4, 2\pi \rangle \cdot \langle -1, 2 \rangle}{\sqrt{5}} = \frac{-4 + 4\pi}{\sqrt{5}} \approx 2.$$

Ejercicio 3: Considere la función $f(x,y,z) = x^3y^2z$.

a. Encuentre el gradiente de f en el punto (1,2,4).

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \langle 3x^2y^2z, 2x^3yz, x^3y^2 \rangle.$$

$$\nabla f(1,2,4) = \langle 3\cdot 4\cdot 4, 2\cdot 1\cdot 2\cdot 4, 1\cdot 4 \rangle.$$

$$\nabla f(1,2,4) = \langle 48, 16, 4 \rangle.$$

b. Encuentre $D_u f(x,y,z)$ en (1,2,4) en la dirección de $\vec{u} = \langle \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \rangle$.

$$|\vec{u}| = \frac{1}{3}|\langle 1,-2,2\rangle| = \frac{1}{3}\sqrt{1+4+4} = 1$$

este vector ya es unitario.

$$D_{\vec{u}} f(1,2,4) = \nabla f(1,2,4) \cdot \vec{u}$$

$$= \frac{48}{3} - \frac{32}{3} + \frac{8}{3} = 16 - \overset{8.}{\frac{24}{3}} = 8$$

La razón instantánea de cambio es de 8 unidades.

Interpretación del Gradiente

$$D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u} = |\nabla f|\,\cancel{|\vec{u}|}^{\,1\ \text{unitario.}} \cos\theta.$$

$$D_{\vec{u}} f = |\nabla f| \cos\theta.$$

θ es el ángulo entre ∇f y $\vec{u}$.

Valor Máximo de $D_{\vec{u}} f$ cuando $\theta = 0$.

$$(D_{\vec{u}} f)_{max} = |\nabla f|$$

El valor máximo de la derivada direccional, o máxima razón de cambio, es $|\nabla f|$ y ocurre en la dirección $u = \dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Steepest Ascent.

Cuando $\theta = \pi$ $\quad (D_{\vec{u}} f) = -|\nabla f|$.
min.

Valor mínimo de la derivada direccional es $-|\nabla f|$ y ocurre en la dirección $-\nabla f$.
Steepest Descent.

Ejercicio 4: Encuentre la máxima razón de cambio de $f(x,y) = (y^2+1)e^x$ en el punto $(0,2)$ y la dirección en que ocurre este cambio.

Valor Máximo $|\nabla f|$ $\qquad$ Dirección ∇f.

$$\nabla f = \langle e^x(y^2+1), 2y e^x \rangle.$$

$$\nabla f(0,2) = \langle 4+1, 2\cdot 2\cdot 1 \rangle = \underline{\underline{\langle 5, 4 \rangle}}$$

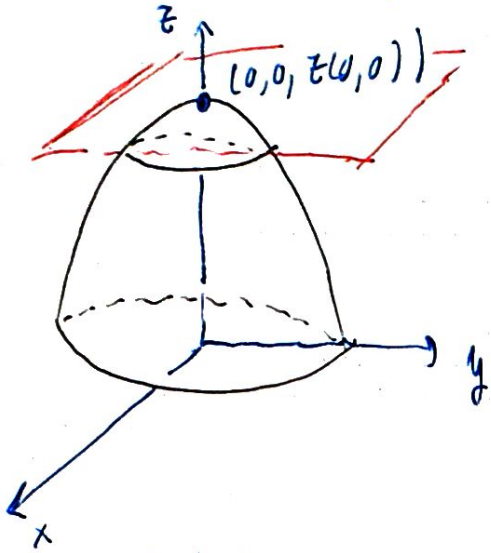
Valor Máximo Razón Cambio $|\nabla f(0,2)| = \sqrt{25+16}$
$\approx 6.40.$

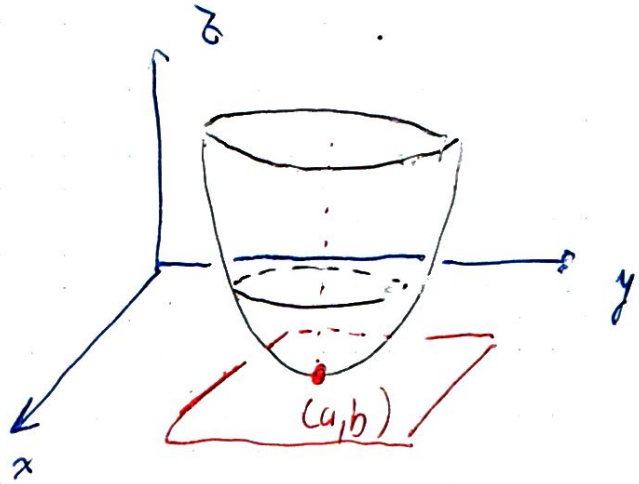
Dirección Valor Máximo $\nabla f = \langle 5, 4 \rangle$.

Capítulo 18

Máximos y mínimos & problemas de aplicación, optimización

14.7 Máximos y mínimos.





Máximo Relativo

$f(a,b) > f(x,y)$

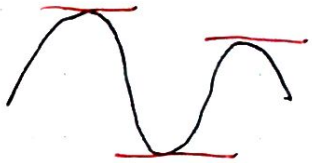
(x,y) cerca de (a,b)

mínimo relativo.

$f(a,b) < f(x,y)$

(x,y) cerca de (a,b)

Funciones Una variable



horizontales

Números críticos: $f'(c) = 0$ ó $f'(c)$ no existe

2da Derivada: $f''(c) < 0$ $\cap$ Máximo Relativo en $x = c$.

$f''(c) > 0$ $\cup$ mínimo relativo en $x = c$

$f''(c) = 0$ Inconcluso.

Funciones Dos variables.

Puntos críticos. $f_x(a,b) = 0$ & $f_y(a,b) = 0$.

No es suficiente $f_{xx} < 0$ & $f_{yy} < 0$ Max Relativo.

$f_{xx} > 0$ & $f_{yy} > 0$ min relativo

2.

Prueba 2nda Derivada: (a,b) es un punto crítico.

y $f(x,y)$ tiene segundas derivadas continuas.

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Max Relativo: $D(a,b) > 0$ & $f_{xx} < 0$

Mínimo Relativo: $D(a,b) > 0$ & $f_{xx} > 0$.

Punto de Silla: $D(a,b) < 0$. ni max ni min.

Inconcluso: $D(a,b) = 0$ $\cup$ $\cap$

Ejemplo: Considere la función $z = x^2 - y^2$.

Puntos Críticos $z_x = 2x = 0$, $z_y = -2y = 0$ $\Rightarrow$ $x = 0$, $y = 0$

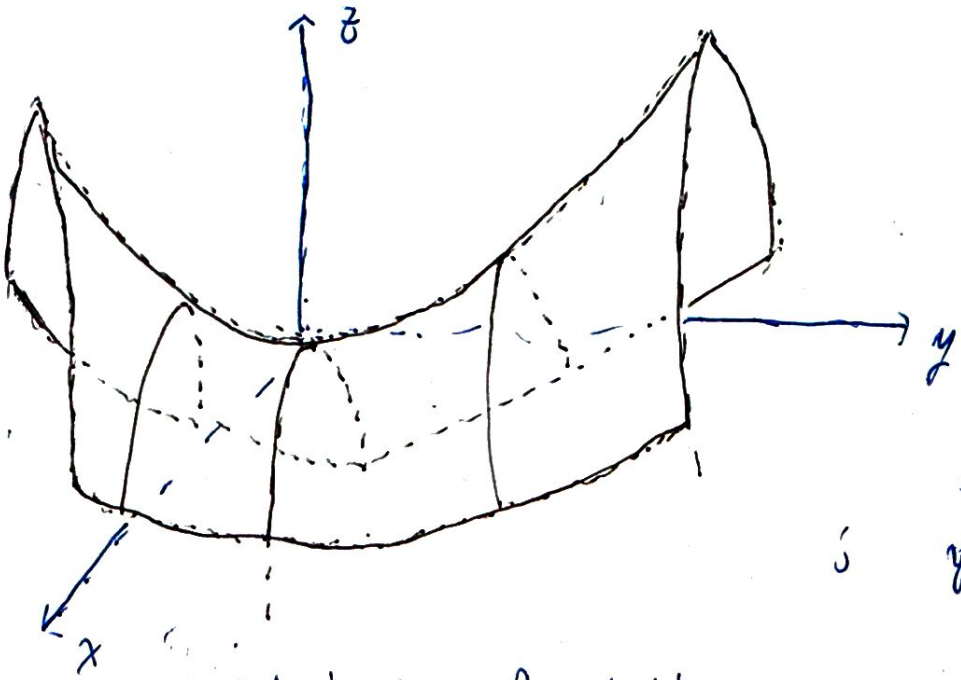
único punto crítico $(0,0)$.

Prueba 2da Derivada $D(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$

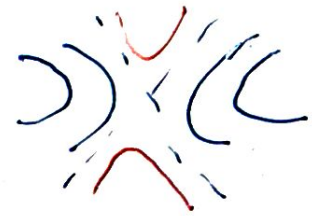
El punto $(0,0)$ es un punto de silla.

$z(0,y) = -y^2$ hay máximos

$z(x,0) = x^2$ hay mínimos



curvas de nivel son hipérbolas



cortes verticales $x=a$ ó $y=b$ son parábolas.

Hiperboloide Parabólico

Ejercicio 1: Encuentre los maxs y mínimos relativos de las sigs. funciones

a. $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 6x + 16y.$

$f_x = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

$f_y = 8y + 16 = 0 \Rightarrow y = -2.$

único pto crítico $(3,-2)$.

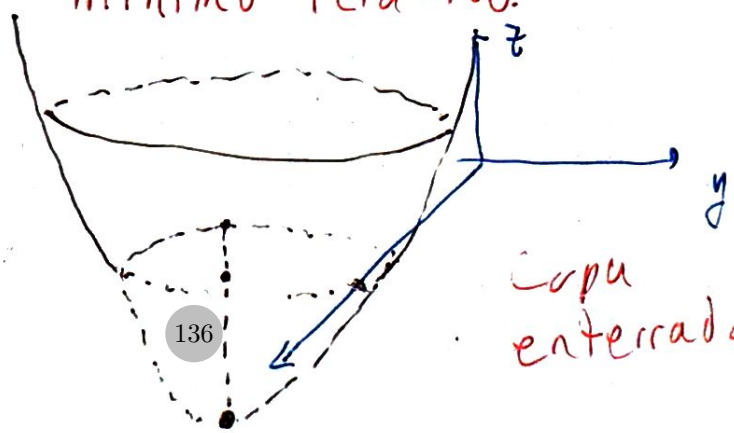
$$D(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 16 > 0.$$

$f_{xx} = 2 > 0.$

mínimo relativo.

Valor min relativo

$f(3,-2) = -25$



copa enterrada.

b. $g(x,y) = 2x^2 + xy + y^2 + 100.$

$g_x = 4x + y = 0 \Rightarrow y = -4x \Rightarrow y = 0$

$g_y = x + 2y = 0 \Rightarrow x - 8x = -9x = 0 \Rightarrow x = 0$

único punto crítico.

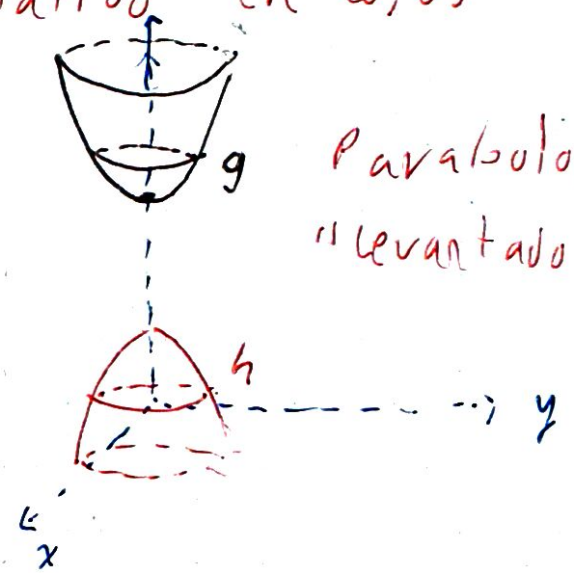
$D(x,y) = \begin{vmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7 > 0$

$g_{xx} = 4 > 0$ mínimo relativo en $(0,0)$

valor mínimo relativo

$g(0,0) = 100$

Rango $[100, \infty)$



Paraboloide "levantado"

c. $h(x,y) = 30 - x^2 - 2y^2 + 4x - 12y.$

$h_x = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4/-2 = 2$

$h_y = -4y - 12 = 0 \qquad y = 12/-4 = -3$

único número crítico. es $(2,-3)$

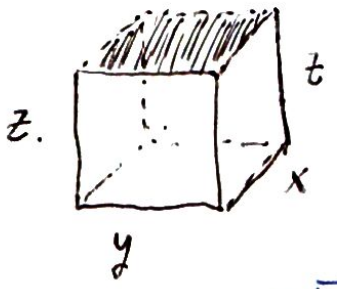
$D(x,y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 > 0 \qquad h_{xx} = -2 < 0$

Máximo relativo en $(2,-3)$

Valor Max relati es 38.

Problemas Aplicados.

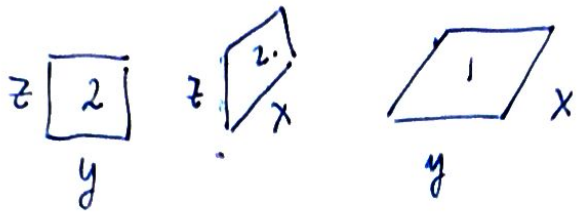
Ejercicio 2: Una caja de cartón sin tapa debe tener un volumen de 32,000 cm^3.
Calcule las dimensiones x, y, z que minimicen la cantidad de cartón utilizado. No realice la prueba 2da Derivada.

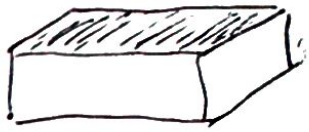


Volumen: $xyz = 32{,}000$

Área: $A = 2zy + 2zx + xy.$ } min

5 paneles





óptima.

min $A = 2zy + 2zx + xy.$ 3 variables.

S.A. $z = \dfrac{32{,}000}{xy}.$ $x, y, z > 0.$

$$A(x,y) = \frac{64000}{x} + \frac{64{,}000}{y} + xy.$$

$A_x = 0$: $-\dfrac{64000}{x^2} + y = 0 \Rightarrow y = 64000\,x^{-2}.$

$A_y = 0$: $-\dfrac{64{,}000}{y^2} + x = 0$ $\quad y^2 = [64{,}000]^2 x^{-4}.$

sustituya en A_y $\quad \dfrac{-64{,}000}{(64{,}000)^2 x^{-4}} + x = 0$

$$-\frac{x^4}{64000} = -x$$

$$\frac{x^4}{x} = 64 \cdot 1000$$

$$x = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{1000} = 4 \cdot 10 = 40. = 4 \cdot 10$$

$$y = \frac{64{,}000}{x^2} = \frac{64 \cdot 1000}{16 \cdot 100} = 4 \cdot 10 = 40.$$

$$z = \frac{32{,}000}{40 \cdot 40} = \frac{32{,}000}{1{,}6{,}00} = 20$$

Dimensiones que minimizan el área $x = y = 40, \quad z = 20$

Ejercicio 3: Discriminación de Precios.

Demanda $p_1 = 104 - q_1$ producción q_1, q_2.
$p_2 = 84 - q_2$.

Costos $C = 600 + 4q_1 + 4q_2$.

Encuentre los precios y las cantidades q_1 & q_2 a la que deben venderse los productos para maximizar la utilidad. = ingresos - costos.

Utilidad: $U(q_1, q_2) = p_1 q_1 + p_2 q_2 - \underbrace{600 - 4q_1 - 4q_2}_{\text{costos.}}$

$$U(q_1, q_2) = 104q_1 - q_1^2 + 84q_2 - q_2^2 - 600 - 4q_1 - 4q_2.$$

$$U(q_1, q_2) = -q_1^2 - q_2^2 + 100q_1 + 80q_2 - 600$$

7.

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = -2q_1 + 100 = 0 \qquad q_1 = 50$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = -2q_2 + 80 = 0 \qquad q_2 = 40.$$

Único punto crítico $(q_1 = 50,\ q_2 = 40)$

$p_1 = 54,\ p_2 = 44$ } discriminación

Utilidad Máxima:

$U(50,40) = 54 * 50 + 44 * 40 - 600 - 360.$

$2{,}700 + 1760 - 960 = 3{,}500.$

utilidad máxima.

Prueba 2da Derivada : $D(x,y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$

$U_{q_1 q_1} = -2 < 0$ Máximo Relativo.

Capítulo 19

Multiplicadores LaGrange

14.8 Multiplicadores de Lagrange.

Una función de dos o tres variables puede estar sujeta a una restricción $xy + x\ln y = 100.$

Máximo $z = f(x,y)$ S.A $g(x,y) = c.$

Si no es posible resolver para y ó x en la restricción, el problema no se puede reducir a una sola variable.

Se introduce una nueva variable
Multiplicador de Lagrange. λ "lambda"
para incorporar la restricción en la función objetivo.

$$c - g(x,y) = 0$$

$$F(x,y,\lambda) = \underbrace{f(x,y)}_{\text{objetivo}} + \lambda\underbrace{(c - g(x,y))}_{\text{restricción}}$$

Extremos relativos $F_x = F_y = F_\lambda = 0.$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= f_x - \lambda g_x = 0. \\ F_y &= f_y - \lambda g_y = 0 \\ F_\lambda &= c - g(x,y) = 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left.\begin{aligned} &\boxed{\nabla f = \lambda \nabla g.} \\ &g(x,y) = c. \end{aligned}\right\}$$

condiciones necesarias para un extremo relativo

Problema $w = f(x,y,z)$ sujeta a $g(x,y,z) = C$.

$$\underbrace{F}_{\text{Lagrangiano}}(x,y,z,\lambda) = \underbrace{f(x,y,z)}_{\text{objetivo}} + \lambda\,(C - \underbrace{g(x,y,z)}_{\text{restricción}})$$

$$F_x = F_y = F_z = F_\lambda = 0.$$

λ "variable artificial"

condiciones $\nabla f = \lambda \nabla g$ & $g(x,y,z) = C$.

Ejercicio 1: Encuentre los extremos relativos de $w = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a $2x + y - z = 18$. } restricción.

Método 1: Resuelva para z $\quad z = 2x + y - 18$.

sustituya en w para obtener una función de 2 variables.

$$w = x^2 + y^2 + (2x + y - 18)^2. \qquad \nabla w = \vec{0}$$

$$w_x = 2x + 4(2x + y - 18) = 10x + 4y - 72 = 0. \quad R_1$$
$$w_y = 2y + 2(2x + y - 18) = 4x + 4y - 36 = 0. \quad R_2.$$

$R_1 - R_2$: $\quad 6x - 36 = 0 \Rightarrow x = 6.$

R_2: $\quad 4y = 36 - 4x = 12 \Rightarrow y = 3.$

¿Cómo se encuentra z? $\quad z = 2(6) + 3 - 18 = -3.$

Punto crítico: $(6, 3, -3)$.

Prueba 2da Derivada

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} w_{xx} & w_{xy} \\ w_{yx} & w_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 24 > 0$$

$w_{xx} = 10 > 0.$ $\quad$ mínimo relativo.

Método 2: Multiplicadores de Lagrange

Lagrangiano $F = \omega + \lambda(\overbrace{c-g}^{0})$

$$F(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(18 - 2x - y + z)$$

$$F_x = 2x - 2\lambda = 0 \Rightarrow x = \lambda = 6 \checkmark$$

$$F_y = 2y - \lambda = 0 \Rightarrow y = \lambda/2 = 3 \checkmark$$

$$F_z = 2z + \lambda = 0 \Rightarrow z = -\lambda/2 = -3 \checkmark$$

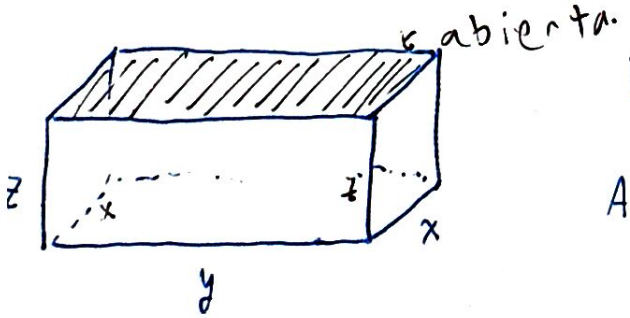
$$F_\lambda = 18 - 2x - y + z = 0 \Rightarrow 2x + y - z = 18$$

Sustituya x, y & z en la restricción.

$$2\lambda + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = 3\lambda = 18 \Rightarrow \lambda = 6.$$

Punto crítico es $(6, 3, -3)$ $\underline{\lambda = 6.}$

Ejercicio 2: Una caja sin tapa tiene un volumen de 32,000 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimizan su área superficial.



Volumen $V = xyz = 32{,}000.$

Área Sup $\underbrace{A}_{\text{objetivo}} = 2zy + 2zx + yx$

$$F = A + \lambda(c - V) = 2zy + 2zx + yx + \lambda(32{,}000 - xyz)$$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 2z + y - \overbrace{\lambda y z}^{\text{NO LINEAL.}} = 0 \\ F_y &= 2z + x - \lambda x z = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda y z &= y + 2z \quad (1) \\ \lambda x z &= x + 2z \quad (2) \end{aligned}$$

$$F_z = 2y + 2x - \lambda x y = 0. \qquad \lambda x y = 2x + 2y. \quad (3)$$

$$F_\lambda = 32{,}000 - xyz = 0. \qquad xyz = 32{,}000 \quad (4).$$

$$\frac{(1)}{(2)} \qquad \frac{y}{x} = \frac{y + 2z}{x + 2z}. \qquad \cancel{yx} + 2zy = \cancel{xy} + 2zx$$

$$y = \frac{2zx}{2z} = x$$

$$\boxed{x = y}$$

$$\frac{(1)}{(3)} \qquad \frac{z}{x} = \frac{y + 2z}{2x + 2y}. \qquad \cancel{2xz} + 2yz = xy + \cancel{2zx}$$

$$z = \frac{xy}{2y} = \frac{x}{2}.$$

$y = x, \quad z = x/2.$ se sustituyen en la restricción

$$x \, x \, \frac{x}{2} = 32000 \qquad x^3 = 64 \cdot 1000$$

$$x = \sqrt[3]{64}\,\sqrt[3]{1000} = 4 \cdot 10 = 40.$$

Punto crítico: $x = 40, \; y = 40, \; z = 20.$

Área mínima: $A = 2yz + 2xz + xy.$

$$A = 2(800) + 2(800) + 1{,}600.$$

$$A = 3(1600) = 4{,}800 \text{ cm}^2.$$

Aplicaciones a la Economía y Negocios.

Ejercicio 4: Para surtir una orden de 100 unidades de un producto, la empresa desea distribuir la producción entre sus dos plantas. La función de costo total es.

$C(x,y) = 0.1x^2 + 7x + 15y + 1000$ $\quad$ x planta 1, y planta 2.

¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos? $C(0,0) = 1,000$

Objetivo $\min C(x,y)$ $\quad$ s.A. $\quad x + y = 100.$

Lagrange $\quad F = C + \lambda(100 - x - y)$ $\quad$ λ griego.

$$F = 0.1x^2 + 7x + 15y + 1000 + 100\lambda - \lambda x - \lambda y$$

$F_x = 0.2x + 7 - \lambda = 0 \Rightarrow 0.2x = \lambda - 7 = 8 \Rightarrow x = 40$

$F_y = 15 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 15.$

$F_\lambda = 100 - x - y = 0. \Rightarrow y = 100 - x = 60$

Punto crítico $(40,60)$ $\quad \lambda = 15.$ $\quad$ 10 uds, $C\uparrow$ aprox 15 uds.

Costo mínimo $C(x,y) = 0.1(1600) + 280 + 900 + 1000.$

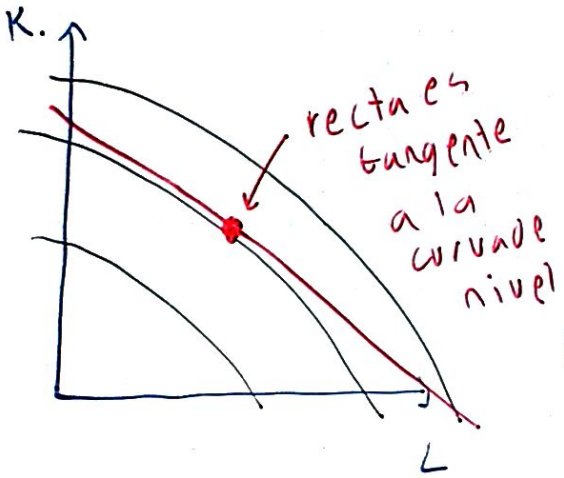
$C(x,y) = 2,340.$

Ejercicio 5: Una empresa tiene la función de producción

$$Q(L,K) = 12L + 20K - L^2 - 2K^2.$$

La empresa tiene un presupuesto de \$88 mil para contratar trabajadores y maquinaria. Cada trabajador y cada máquina tienen un costo de \$4 y \$8 mil, resp.

Encuentre la producción máxima.



Restricción $4L + 8K = 88.$

$L + 2K = 22.$

max $Q.$

$F(L,K,\lambda)$

$$F(L,K,\lambda) = 12L + 20K - L^2 - 2K^2 + \lambda(22 - L - 2K)$$

$F_L = 12 - 2L - \lambda = 0. \Rightarrow 2L = 12 - \lambda \Rightarrow L = 6 - \lambda/2$

$F_K = 20 - 4K - 2\lambda = 0 \Rightarrow 4K = 20 - 2\lambda \quad K = 5 - \lambda/2.$

$F_\lambda = 22 - L - 2K = 0.$

$L + 2K = 22 \qquad 6 - \frac{\lambda}{2} + 10 - \lambda = 22$

$-\frac{3\lambda}{2} = 22 - 16 = 6$

$\lambda = -4: \quad L = 6 + 4/2 = 8$

$K = 5 + 4/2 = 7$

$Q(8,7) = 96 + 140 - 64 - 98$

$= 74.$

Capítulo 20

Integrales dobles

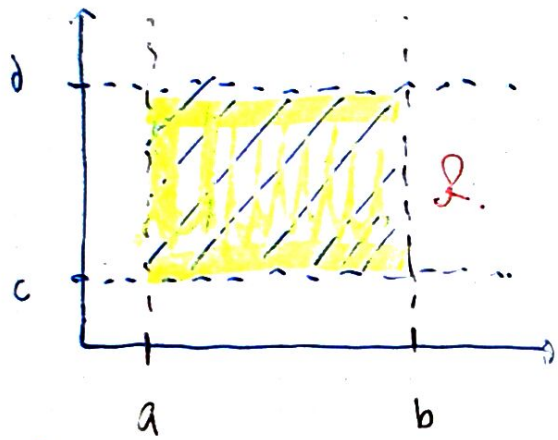
15.1 Integrales Dobles.

Dominio de una función $z = f(x,y)$ es una región R.

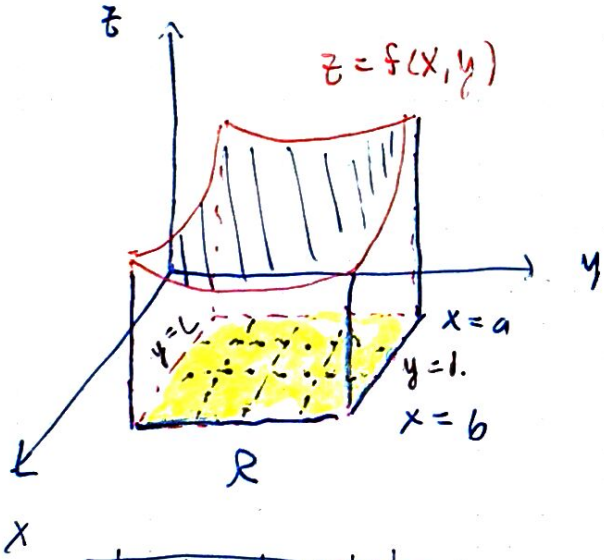
Rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$.

tal que



La gráfica de una función de dos variables es una superficie.

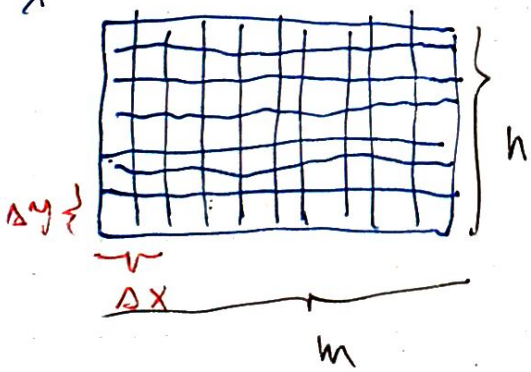


Sólido S:

$a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, $0 \leq z \leq f(x,y)$

¿Como se encuentra el volumen del sólido S?

Divida el rectángulo R en mn subrectángulos.



Ancho. $\Delta x = \dfrac{b-a}{m}$

Largo. $\Delta y = \dfrac{d-c}{n}$.

Dentro de cada subrectángulo se selecciona un punto muestra como la altura de cada "pequeño" cubo. $f(x_i, x_j)$

Volumen cada Caja $V_{ij} = f(x_i, x_j)\,\Delta x\,\Delta y.$

Volumen aproximada: sume el volumen de las mn cajas.

$$V \approx \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(x_i, x_j)\,\underbrace{\Delta x\,\Delta y}.$$

$\Delta A = \Delta x \Delta y.$

Se obtiene el volumen exacto en el límite cuando $m, n \to \infty$.

Integral Doble: de f sobre el rectángulo R es.

$$\iint_R f(x,y)\,dA. = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(x_i, x_j)\,\Delta x\,\Delta y.$$

Las integrales son las antiderivadas de $f(x,y)$ respecto a x y respecto a y.

15.2 Integrales Iteradas.

Integre $A(x) = \int_c^d f(x, \underline{\underline{y}})\,d\underline{\underline{y}}.$ se fija x y se integra sólo respecto a y.

Ahora integre $A(x)$ en $a \le x \le b$.

$$\int_a^b \underbrace{A(x)\,dx} = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

se fija y & se integra respecto a x.

Teorema de Fubini: Integrales Dobles como Integrales Iteradas.

Si $f(x,y)$ es continua en un rectángulo $R=[a,b]\times[c,d]$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy.$$

Pueden integrar intercambiando los órdenes y se obtiene la misma respuesta si R es un rectángulo.

Ejercicio 1: Evalúe las sigs. integrales dobles.

0. $$\int_0^4\int_0^6 \underline{\underline{x}}\,y\,\underline{\underline{dx}}\,dy. = \int_0^4 \frac{x^2}{2}\,y\Big]_{x=0}^{x=6}\,dy.$$

y "constante.

$$I_0 = \int_0^4 (18y-0)\,dy = 9y^2\Big]_{y=0}^{y=4} = 9\cdot 16 = 144.$$

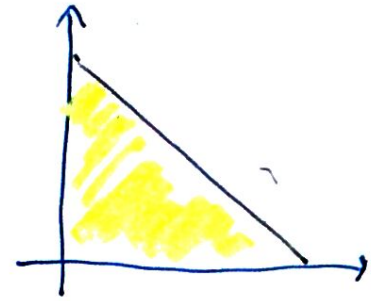
Intercambia el orden de integración.

$$\int_0^6\left(\int_0^4 x\,y\,dy\right)dx = \int_0^6\left(\frac{xy^2}{2}\Big]_{y=0}^{y=4}\right)dx = \int_0^6 8x\,dx.$$

afuera, el último en integrarse

$$I_0 = 4x^2\Big]_{x=0}^{x=6} = 4\cdot 36 = 144.$$ Misma respuesta.

a. $I_a = \int_0^1 \int_1^2 (4x^3 - 9x^2 y^2)\, dy\, dx$



$I_a = \int_0^1 \left(4x^3 y - 3x^2 y^3 \Big]_{y=1}^{y=2} \right) dx.$

$I_a = \int_0^1 \left(8x^3 - 24x^2 - 4x^3 + 3x^2 \right) dx.$

$I_a = \int_0^1 (4x^3 - 21x^2)\, dx = x^4 - 7x^3 \Big]_{x=0}^{x=1} = 1 - 7 = -6.$

$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dx\, dy$

No hay integrales dobles indefinidas.

b. $I_b = \iint_R \sin(x-y)\, dA.$ $R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$

conjunto rectángulo

$I_b = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \sin(x-y)\, dy \right) dx$

$\sin(x-y) \Rightarrow + \cos(x-y)$

Antiderivada respecto a y

$I_b = \int_0^{\pi/2} \cos(x-y) \Big]_{y=0}^{y=\pi/2} dx$

$I_b = \int_0^{\pi/2} \cos(x - \pi/2) - \cos(x)\, dx.$

$I_b = \sin(x - \pi/2) + \sin(x) \Big]_{x=0}^{x=\pi/2}$

$I_b = \underbrace{\sin(0)}_{0} + \underbrace{\sin(-\pi/2)}_{1} - (\underbrace{\sin(-\pi/2)}_{-1} + \sin 0)$

$I_b = 0 - 1 + 1 - 0 = 0.$

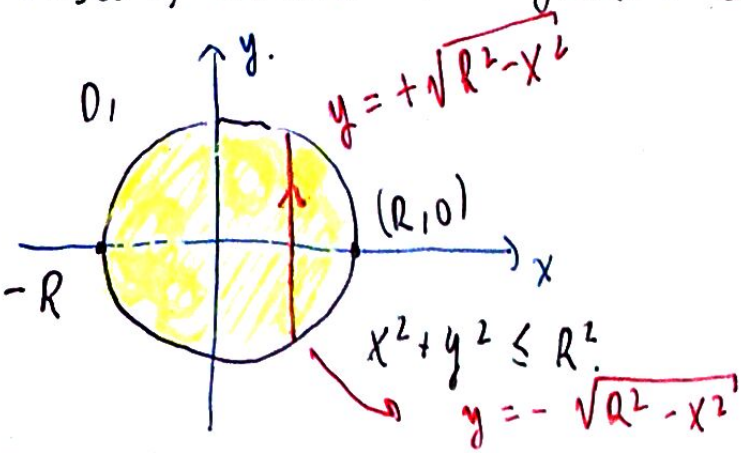
(B ln x)

Capítulo 21

Integrales dobles con coordenadas polares

15.4 Integrales Dobles en Coordenadas Polares.

Varias superficies se integran en regiones que son discos, anillos o regiones con simetría radial.



$D_1 : \sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq -\sqrt{R^2 - x^2}$

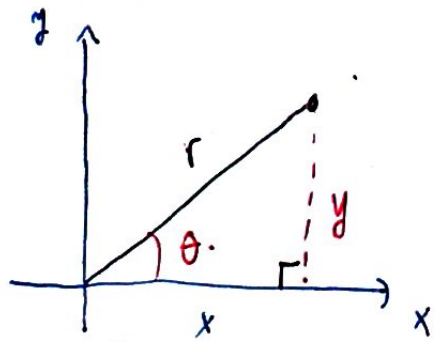
$-R \leq x \leq R.$

$D_1 = \{(x,y) \text{ tal que } 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}.$

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dA = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx.$$

¿Hay alguna forma más fácil de evaluar $\iint f\,dA$?

Si, use coordenadas polares.

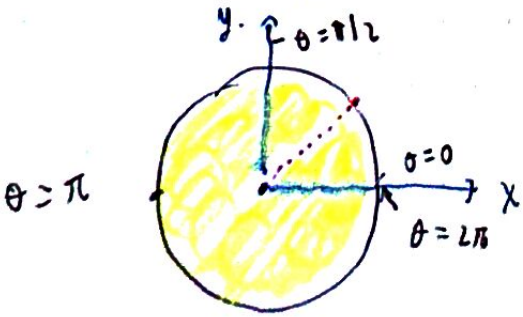


$y = r\sin\theta.$ | $r^2 = x^2 + y^2.$

$x = r\cos\theta.$ | $\tan\theta = y/x$

Polares - Cartesianas | Cartesianas a Polares

$(r,\theta) \to (x,y)$ | $(x,y) \to (r,\theta).$



$x^2 + y^2 = R^2. \Rightarrow r^2 = R^2$

$r = R.$

$\left.\begin{array}{l} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{array}\right\}$ son constantes.

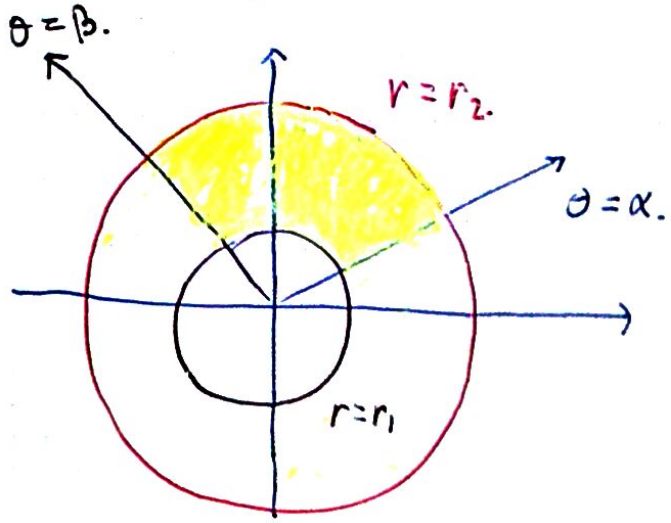
$D_1 : 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq R.$

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta.$$

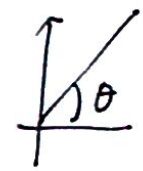
$$dA = dx\,dy = r\,d\theta\,dr.$$

no. 1

Rectángulo Polar. es la región $\alpha \le \theta \le \beta$, $r_1 \le r \le r_2$.

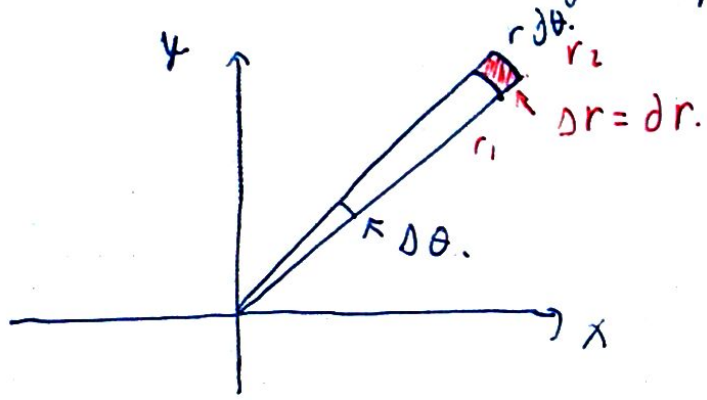


$\theta = \alpha$, $\theta = \beta$. (rayos)



"Pedazo de Pizza con la punta mordida"

Área de un rectángulo polar "infinitesimal".



orilla bien delgada.

Ancho dr.

Largo $r\,d\theta$.

Pequeña Área $dA = r\,dr\,d\theta$.

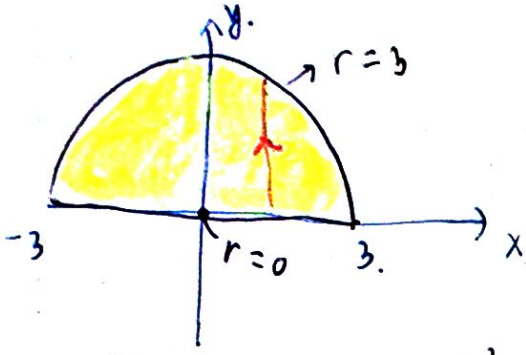
Teorema: Integrables Dobles usando coordenadas polares.

Si $f(x,y)$ es continua en el rectángulo polar $R: \alpha \le \theta \le \beta$ $r_1 \le r \le r_2$, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \left(\int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr \right) d\theta.$$

Ejercicio 1: Evalúe $\iint_R xy^2\,dA$, R

R es el semidisco superior de radio 3.



Polares
$0 \le r \le 3.$
$0 \le \theta \le \pi$

Cartesianas.
$0 \le y \le \sqrt{9-x^2}$
$-3 \le x \le 3.$

$$\iint_R xy^2\,dA = \int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} xy^2\,dy\,dx$$ Cartesianas

$$I_1 = \iint_R xy^2\,dA = \underbrace{\int_0^3\int_0^\pi}\, r\cos\theta\, r^2\sin^2\theta \cdot r\,d\theta\,dr.$$ "Polares"

intercambie el orden de integración.

$$I_1 = \int_0^3\int_0^\pi \underbrace{r^4}_{f(r)}\, \underbrace{\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta}_{g(\theta)}\,\underbrace{dr}.$$ límites de constantes

$$I_1 = \left(\int_0^3 r^4\,dr\right)\left(\int_0^\pi \underbrace{\sin^2\theta}_{u^2}\,\underbrace{\cos\theta\,d\theta}_{du.}\right)$$

$$I_1 = \left(\frac{1}{5}r^5\Big]_{r=0}^{r=3.}\right)\left(\frac{\sin^3\theta}{3}\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi}\right)$$

$$I_1 = \frac{1}{5}3^5\cdot\frac{1}{3}(\sin^3\pi - \sin^3 0) = \frac{243}{15}\cdot 0 = 0.$$

Parcial Estadística Jueves 7:00 ó 10. jueves
Microeconomía 8:30. martes

Parcial 3, Viernes 3 de abril
Parcial 2 Aplazado. → Viernes 11:30 am.
Examen Virtual.

Temas
Regla de la Cadena
Derivación Implícita.
Derivadas Direccionales. y Gradiente.
Optimización
Lagrange.

Martes 31 (Corto "Largo")

Versiones diferentes del examen

8 preguntas diferentes 4 preguntas.

Combinaciones. $_8C_4 = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{24} = 70.$

Se les envía por correo.
Lo resuelvan a mano, lo escanean.
y luego lo envían.

Tarea 10 → Tarea 12.

David realizó buena parte de la tarea.

Tarea 11 → 2 de abril.

Tarea 12 → Lunes 6 de abril.

Capítulo 22

Repaso de parcial

1. Derivación Implícita. $(1,+1,4)$ no es parte de S.

$16 - 2 - 2 - 12 = 0 \neq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{+2}{2z} = +\frac{2}{8} = +\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{+2}{2z} = +\frac{2}{8} = +\frac{1}{4}$$

Ec. Plano Tangente. $z = 4 + \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(y-1)$.

b. Derive explícitamente $z = \sqrt{12+2x+2y}$

$z(1,-1) = \sqrt{12}$

$$z_x = \frac{1}{\sqrt{12+2x+2y}} = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$z_y = \frac{1}{\sqrt{12+2x+2y}} = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

Ec. Plano Tangente $z = \sqrt{12} + \frac{1}{\sqrt{12}}(x-1) + \frac{1}{\sqrt{12}}(y+1)$

2. $F(x,y) = \cos(yx) + 1 - \sec(zx) - \sin(yz) = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y\sin(yx) - z\sec(zx)\tan(zx) + 0}{x\sec(xz)\tan(xz) + y\cos(yz)} \qquad \frac{-F_x}{F_z}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x\sin(yx) - z\cos(yz)}{x\sec(xz)\tan(xz) + y\cos(yz)} \qquad \frac{-F_y}{F_z}.$$

$F(x,y) = \text{constante}$ $\qquad F(x,y) = G(x,y)$

Razón de cambio ó Instantánea $\frac{dW}{dt}$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_w}.$$

Cuando $t=3$, $x = e^0 = 1$ $\quad y = \ln(1) + 3 - 2 = 1$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{y}{1+(yx)^2}, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(1,1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{x}{1+(yx)^2}, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{(1,1)} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{dx}{dt} = 2e^{2t-6}, \quad x'(3) = 2e^0 = 2.$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{2}{2t-5} + 1\right) \quad y'(3) = \frac{2}{1} + 1 = 3.$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(3) = \frac{5}{2}$$

4. Derivada Direccional $D_u T = \nabla T \cdot \vec{u}. = \frac{\nabla T \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$

$$\nabla T = \langle \sin(\pi yz), x\pi z\cos(\pi yz), \pi xy\cos(\pi yz)\rangle.$$

$$\nabla T(1,1,2) = \langle \overset{0}{\sin(\cancel{2\pi})}, 2\pi\overset{1}{\cos(\cancel{2\pi})}, \pi\cos(2\pi)\rangle.$$

$$\nabla T(1,1,2) = \langle 0, 2\pi, \pi\rangle.$$

vector unitario.

$$\vec{u} = \frac{\langle 1,4,8\rangle}{\sqrt{1+16+64}} = \frac{1}{9}\langle 1,4,8\rangle.$$

$|u| = 9.$

$$D_u T = \frac{1}{9}\langle 0, 2\pi, \pi\rangle \cdot \langle 1,4,8\rangle. = \frac{8\pi + 8\pi}{9} = \frac{16\pi}{9}.$$

6. Presupuesto = 20,000 $\quad x$ periódicos $\quad y$ televisión

gasto $\qquad$ gasto.

$x + y = 20,000$

Ventas $\quad S = 80x^{1/4}y^{3/4}$ $\quad$ margen de utilidad 10%

$U = 0.10S - 20,000 = 8x^{1/4}y^{3/4} - 200,000$

$U = 80x^{1/4}y^{3/4} - 72x^{1/4}y^{3/4} - 20,000$

pedido es de 72.

Max $U = 8x^{1/4}y^{3/4} - 20,000$, $\quad x + y = 20,000$

$20000\lambda - \lambda x - \lambda y.$

Lagrange $F(x, y, \lambda) = 8x^{1/4}y^{3/4} - 20000 + \lambda(20000 - x - y)$

$f_x = 2x^{-3/4}y^{3/4} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2y^{3/4}x^{-3/4}$

$F_y = 6x^{1/4}y^{-1/4} - \lambda = 0 \qquad \lambda = 6x^{1/4}y^{-1/4}$

$F_\lambda = 20000 - x - y = 0.$

Lagrange $\quad f(x,y,z) + \lambda[c - g(x,y,z)]$

Igualando λ's: $\quad \dfrac{2y^{3/4}}{x^{3/4}} = \dfrac{6x^{1/4}}{y^{1/4}} \Rightarrow 2y = 6x$

Sustituya $y = 3x$ en f_λ. $\qquad$ Minimizando la pérdida.

$20,000 - x - 3x = 0 \qquad 4x = 20,000 \Rightarrow x = 5,000.$

$y = 15,000$

No realice la prueba de la 2da Derivada. $\qquad \lambda \approx 4.56.$

Utilidad Máxima. $\quad U(5000, 15000) = 8 \cdot 5000^{1/4}\, 15,000^{3/4} - 20,000.$

$9,118.02 - 20,000.$

$U = 8x^{1/4}y^{3/4} - 20000 \qquad x + y = 20{,}000$

sustituya $y = 20{,}000 - x$ en $U(x)$

$U(x) = 8x^{1/4}(20{,}000 - x)^{3/4} - 20\text{ mil}$

$U'(x) = 2x^{-3/4}(20{,}000 - x)^{3/4} - 6x^{1/4}(20000 - x)^{-1/4} = 0$

$$\frac{2}{x^{3/4}}(20{,}000 - x)^{3/4} = \frac{6x^{1/4}}{(20{,}000 - x)^{1/4}}$$

$(20000 - x) = 3x$

$20000 = 4x \rightarrow x = 5{,}000$

$y = 15{,}000$

Método 3: Microeconomía.

$P = x^{\alpha}y^{\beta} \qquad x + y = 20\text{ mil}$

$\alpha + \beta = 1.$

Producción óptima $\quad x = \alpha \cdot 20\text{ mil} \quad \alpha = 1/4$

$y = \beta \cdot 20\text{ mil} \quad \beta = 3/4.$

$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\alpha y}{\beta x}$ | Precaución.

Costo: $C = 2x + 4y$. Costo Promedio $\frac{C}{x} = 2$.

Ingresos: $I = p_A x + p_B y$.

Utilidad $U = p_A x + p_B y - 2x - 4y$.

$$U(p_A, p_B) = p_A(16 - p_A + p_B) + p_B(24 - 2p_A - 4p_B) - 2(16 - p_A + p_B) - 4(24 - 2p_A - 4p_B)$$

$$U(p_A, p_B) = 26p_A - p_A^2 - p_A p_B - 4p_B^2 + 38p_B - 128.$$

$U_{p_A} = 26 - 2p_A - p_B = 0$ $\qquad 2p_A + p_B = 26$

$U_{p_B} = -p_A - 8p_B + 38 = 0$ $\qquad p_A + 8p_B = 38.$

$p_B = 26 - 2p_A \Rightarrow p_A + 26 \cdot 8 - 16p_A = 38.$

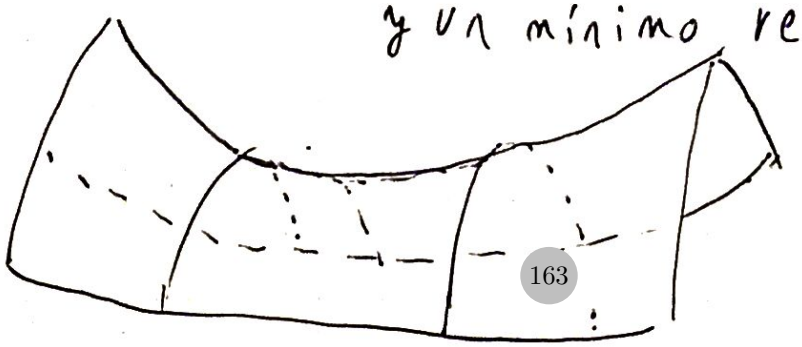
$p_A = 11.\overline{33}$ $\qquad 26 \cdot 8 - 38 = 15p_A.$ $\qquad p_A = \frac{170}{15}$

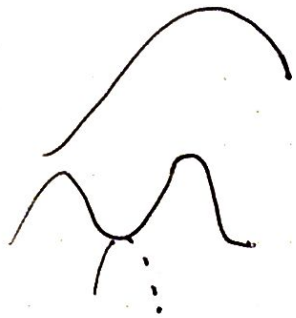
$p_B = 26 - 2(11.\overline{33}) = \frac{10}{3} = 3.\overline{33}$

Prueba 2da Derivada: $D(x, y) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15 > 0.$

$U_{p_A p_A} < 0$ hay un máximo relativo.

Punto de Silla transición entre un máximo relativo y un mínimo relativo.





$U = 8x^{1/4}y^{3/4} - 20000 \qquad x+y = 20{,}000$

sustituya $y = 20{,}000 - x$ en $U(x)$

$U(x) = 8x^{1/4}(20{,}000-x)^{3/4} - 20$ mil

$U'(x) = 2x^{-3/4}(20{,}000-x)^{3/4} - 6x^{1/4}(20000-x)^{-1/4} = 0$

$$\frac{2}{x^{3/4}}(20{,}000-x)^{3/4} = \frac{6x^{1/4}}{(20{,}000-x)^{1/4}}$$

$(20000-x) = 3x$

$20000 = 4x \Rightarrow x = 5{,}000$

$y = 15{,}000$

Método 3: Microeconomía. $\qquad P = x^{\alpha}y^{\beta} \qquad x+y = 20$ mil

$\alpha + \beta = 1.$

Producción óptima $\quad x = \alpha \cdot 20$ mil $\quad \alpha = 1/4$

$y = \beta \cdot 20$ mil $\quad \beta = 3/4.$

$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\alpha y}{\beta x}$ | Precaución.

3 d $\quad V = RI. \qquad R = f(t) \qquad I = g(t).$

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ R \arrow[d] & & I \arrow[d] \\ t & & t. \end{tikzcd}$$

$$\frac{dV}{dt} = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial R}}_{I} \frac{dR}{dt} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial I}}_{R.} \frac{dI}{dt}$$

$R = 400, \quad I = 0.08 \qquad \frac{dV}{dt} = -0.01 \qquad \frac{dR}{dt} = -0.03$

$$-0.01 = 0.08(-0.03) + 400 \frac{dI}{dt}.$$

$$400 \frac{dI}{dt} = -0.01 + 0.0024 = -7.6 \times 10^{-3}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{-7.6 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{2}} = -1.9 \times 10^{-5} \quad A/s.$$

$-19 \ \mu A/s$

3 c) $\quad T(x, y) \qquad x = \sqrt{1+t}, \quad y = 2 + \frac{t}{3}.$

$T_x(2,3) = 4, \quad T_y(2,3) = 3., \quad t = 3$

$$\frac{dT}{dt} = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x}}_{4} \frac{dx}{dt} + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial y}}_{3.} \frac{dy}{dt}. \qquad \begin{aligned} x(3) &= 2 \\ y(3) &= 2+1 = 3. \end{aligned}$$

$x'(t) = \frac{1}{2}(1+t)^{-1/2} \qquad x'(3) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

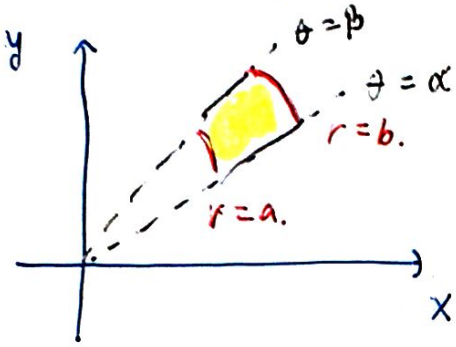
$y'(t) = \frac{1}{3} \qquad y'(3) = \frac{1}{3}.$

$$\frac{dT}{dt} = 4\left(\frac{1}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + 1 = 2.$$

Capítulo 23

Integrales dobles en coordenadas polares

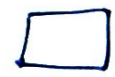
15.4 Integrales Dobles en Coordenadas Polares.



$R: \alpha \leq \theta \leq \beta. \qquad a \leq r \leq b.$

Rectángulo Polar R.

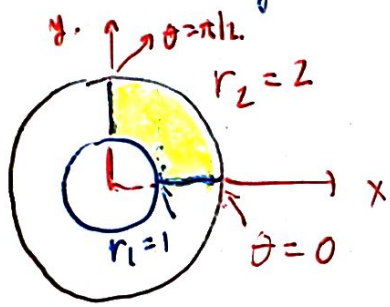
$dA = r\,dr\,d\theta. \qquad dA = dx\,dy$



$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

Ejercicio 1: Evalúe $\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dA.$

R es el cuarto de anillo en el 1er cuadrante con radio interno 1 y radio externo 2.



$R: \boxed{1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2}$

Simplifique

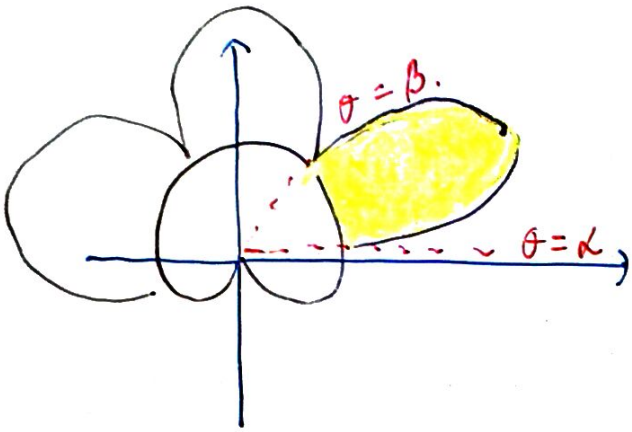
$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}$$
$$= r\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = r.$$

$$I_1 = \iint_R \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{r}\ \underbrace{dA}_{r\,dr\,d\theta.} = \int_0^{\pi/2}\left(\int_1^2 r^2\,dr\right)d\theta$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{r^3}{3}\Big]_{r=1}^{r=2} d\theta. = \int_0^{\pi/2} \frac{7}{3}\,d\theta. = \frac{7}{3}\,\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{7\pi}{6}.$$

Región Polar.

$R: \alpha \leq \theta \leq \beta.$ $\qquad r_1(\theta) \leq \theta \leq r_2(\theta)$



$r_1 = 2 + \sin\theta, \quad r_2 = \sin 2\theta.$

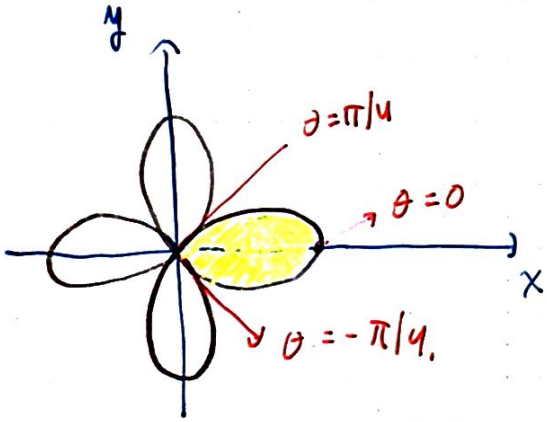
$$\iint_R f\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

Área región Polar: $\quad A = \iint_R dA.$

$$A = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r\,dr\,d\theta. = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2 \Big]_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} d\theta.$$

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)\right] d\theta$$ misma fórmula secc 10.4.

Ejercicio 2: Encuentre el área de un pétalo de la rosa $r = \cos 2\theta.$



$A = \iint_R dA.$ $\qquad 0 \leq r \leq \cos 2\theta.$ ✓

$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$ ✓

$\cos 2\theta = 0.$ $\qquad 2\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}.$

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r\,dr\,d\theta. = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{r^2}{2}\Big]_0^{\cos 2\theta} d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos^2(2\theta)}{2}\,d\theta.$$

Difícil intercambiar el orden.

cos y $\cos^2\theta$ son funciones pares. $\int \sin = -\cos x$

$$A = \int_0^{\pi/4} \cos^2(2\theta)\,d\theta. = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(1+\cos 4\theta)\,d\theta.$$ $\int \cos x = \sin x$

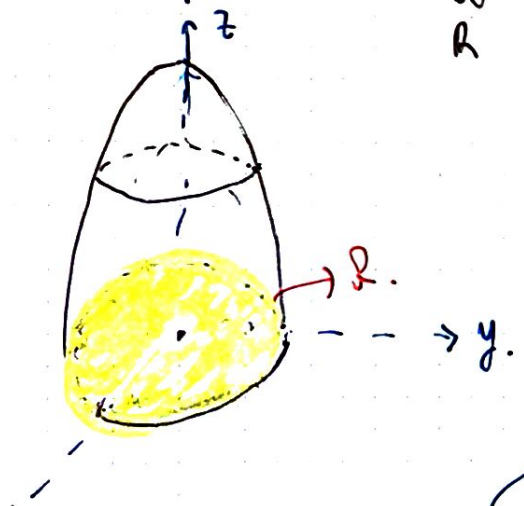
$$\cos^2 2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 4\theta) \quad ó \quad \sin^2 2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 4\theta)$$

$$A = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \cancel{\frac{1}{4}\sin\pi} - \cancel{0} - \cancel{\sin 0}\right)$$

$$\boxed{A = \pi/8.}$$

Ejercicio 3: Encuentre el volumen del sólido entre el paraboloide $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ y el plano xy.

Volumen: $V = \iint_R f(x,y)\,dA.$ $\quad f(x,y) \geq 0$ en R

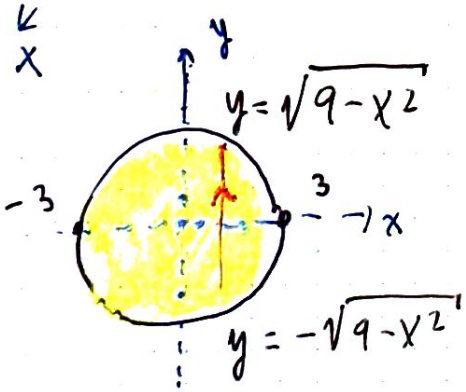


Encuentre las ecs. que describen R es la proyección de z sobre el plano xy.

$z \geq 0.$ $\quad 18 - 2x^2 - 2y^2 \geq 0$

$18 \geq 2x^2 + 2y^2.$

$0 \leq x^2 + y^2 \leq 9.$ región de proyección círculo de radio 3.



$R: -3 \leq x \leq 3 \quad -\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2}$

Cartesianas.

Polares: $R.$ $0 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

Volumen $V = \iint_R (18 - 2x^2 - 2y^2)\, dA.$

Se recomienda usar polares $dA = r\,dr\,d\theta.$

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 18 - \underbrace{2r^2\cos^2\theta - 2r^2\sin^2\theta}.$$

$$= 18 - 2r^2.$$

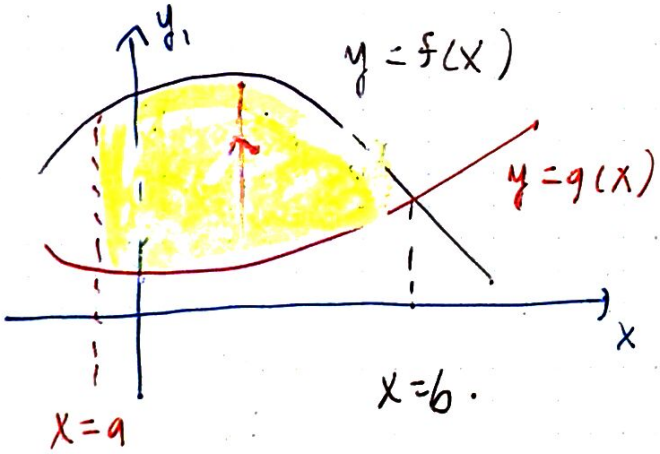
$$V = \iint_R f\, dA. = \int_0^3 \int_0^{2\pi} (18 - 2r^2)\, r\, d\theta\, dr = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (18 - 2r^2)\, r\, dr\, d\theta.$$

$$V = \int_0^3 (18r - 2r^3)\, \theta \Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = \pi \int_0^3 (36r - 4r^3)\, dr.$$

$$V = \pi\left(18r^2 - r^4 \Big]_{r=0}^{r=3} \right) = \pi\left(\underbrace{18 \cdot 9}_{162} - 81 \right) = 81\pi.$$

$$V = \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\theta \right)}_{2\pi,} \left(\int_0^3 18r - 2r^3\, dr \right) = 2\pi\left(9r^2 - \frac{r^4}{2} \Big]_0^3 \right)$$

Integrales Dobles en Coordenadas Generales.



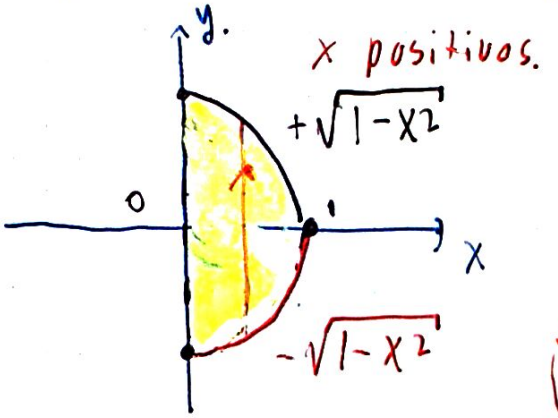
$a \le x \le b. \quad g(x) \le y \le f(x)$

$$\iint_R z\, dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} z(x,y)\, dy\, dx$$

Región Tipo I.

Ejercicio 4: Considere la región encerrada por $x=0$ & $x=\sqrt{1-y^2}$ →

a. Bosqueje la región y descríbala como una tipo I, tipo II y como un rectángulo polar.

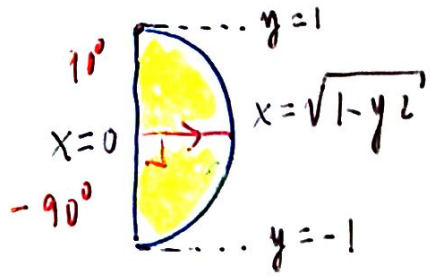


$x^2 = 1-y^2 \Rightarrow x^2+y^2=1$

Tipo I: $f(x) \le y \le g(x)$

$y = \pm\sqrt{1-x^2}$

$$\boxed{0 \le x \le 1 \quad -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}}$$



Tipo II: $f(y) \le x \le g(y)$.

$$\boxed{-1 \le y \le 1 \qquad 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}}$$

Polares: $\boxed{0 \le r \le 1 \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.}$

b. Evalúe $\iint_D (3x-6y)\,dA$. $\qquad dA = r\,dr\,d\theta$.

$$I_4 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 \left(3r^2\cos\theta - 6r^2\sin\theta\right) dr\,d\theta.$$

$$I_4 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^3\cos\theta - 2r^3\sin\theta\Big]_{r=0}^{r=1} d\theta. = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta - 2\sin\theta\, d\theta.$$

$$I_4 = \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta}_{\text{par.}} - 2\underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta}_{\text{impar}}^{\,0}.$$

$$I_4 = 2\int_0^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta. = 2\sin\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = 2$$

El problema es más complicado de trabajar en cartesianas.

$$I_4 = \int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (3x-6y)\,dx\,dy. = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}x^2 - 6yx\Big]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy.$$

$$I_4 = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}(1-y^2) - 6y\sqrt{1-y^2}\,dy.$$

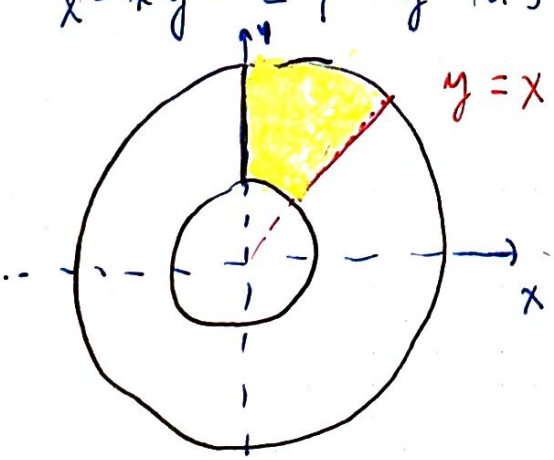
$$I_4 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} \underbrace{(1-y^2)}_{\text{PAR}}\,dy - \cancel{6\int_{-1}^{1} \underbrace{y}_{\text{impar}}\underbrace{\sqrt{1-y^2}}_{\text{par.}}\,dy}^{\,0.}$$

misma respuesta

$$I_4 = 3\int_0^1 (1-y^2)\,dy = 3y - y^3\Big]_{y=0}^{y=1} = 3-1 = 2.$$

Ejercicio 5: Evalúe $\iint_R y\sin(x^2+y^2)\,dA.$

R es la región entre las circunferencias $x^2+y^2=1$ & $x^2+y^2=9$ y las rectas $x=0$ & $y=x$.



$1 \le r \le 3.$ $\qquad \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$

$r\cos\theta = 0. \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(0) = \pi/2$

$r\sin\theta = r\cos\theta.$

$\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \pi/4.$

7.

$x^2 + y^2 = r^2 \qquad dA = r\,dr\,d\theta.$

$$\iint_R 4\sin(x^2+y^2)\,dA. = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_1^3 4\sin(r^2)\,r\,dr\,d\theta.$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

$$2\int_1^3 \sin(\underbrace{r^2}_{u})\underbrace{(2r\,dr)}_{du.} = -2\cos(r^2)\Big]_1^3 = -2\cos 9 + 2\cos 1$$

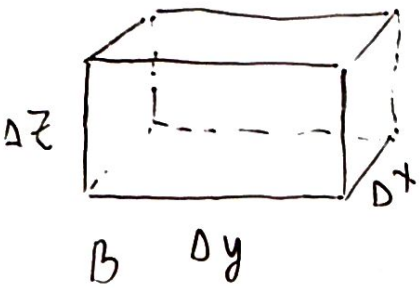
$$\iint_R 4\sin(x^2+y^2)\,dA = \frac{\pi}{4}\left(2\cos 1 - 2\cos 9\right)$$

Capítulo 24

Integrales triples

15.7 Integrales Triples.

Caja Rectangular $B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$.



$V = \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$ volumen caja

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Intercambian el orden, 6 permutaciones posibles

$dx\,dy\,dz$ $\quad dx\,dz\,dy$ $\quad dy\,dx\,dz$ $\quad dy\,dz\,dx$

$dz\,dx\,dy$ $\quad dz\,dy\,dx$.

Ejercicio 1: Evalúe sólido

a $\iiint_B (xy + 3z^2)\,dV$ $\qquad B = [0,2] \times [0,1] \times [0,3]$

$$I_a = \int_0^1 \int_0^3 \int_0^2 (xy + 3z^2)\,dx\,dz\,dy.$$

$$I_a = \int_0^1 \int_0^3 \left. \frac{x^2 y}{2} + 3z^2 x \right]_{x=0}^{2} dz\,dy. = \int_0^1 \int_0^3 (2y + 6z^2)\,dz\,dy$$

$$I_a = \int_0^1 \left. 2yz + 2z^3 \right]_{z=0}^{z=3} dy = \int_0^1 (6y + 54)\,dy.$$

$$I_a = \left. 3y^2 + 54y \right]_{y=0}^{y=1} = 3 + 54 = 57.$$

b. $\iiint_B e^{x+y+z}\, dV \qquad B = [0,\ln 2]\times[0,\ln 3]\times[0,\ln 4].$

$$I_b = \int_0^{\ln 2}\int_0^{\ln 3}\int_0^{\ln 4} e^{x+y+z}\, dz\, dy\, dx.$$

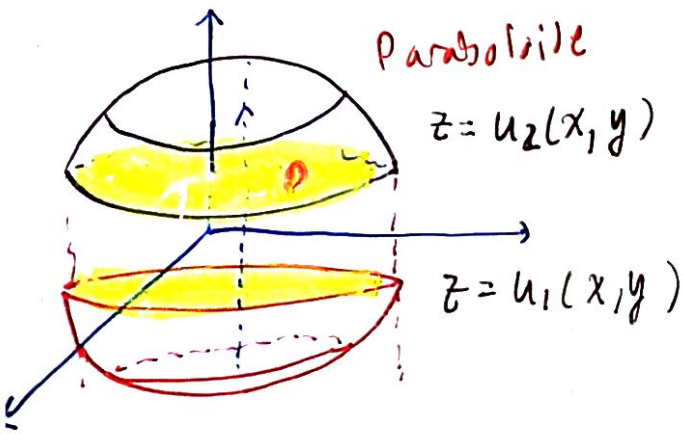
son e^{x+y+z}.

$$I_b = \int_0^{\ln 2}\int_0^{\ln 3} e^{x+y}\underbrace{e^{z}\Big]_{z=0}^{z=\ln 4}}\, dy\, dx \qquad e^{\ln 4} - e^{0} = 4-1 = 3.$$

$$I_b = 3\int_0^{\ln 2} e^{x+y}\Big]_{y=0}^{y=\ln 3} dx \qquad e^{x+\ln 3} - e^{x} = 3e^{x} - e^{x} = 2e^{x}$$

$$I_b = 3\cdot 2\int_0^{\ln 2} e^{x}\, dx = 3\cdot 2\, e^{x}\Big]_{x=0}^{x=\ln 2} = 3\cdot 2(2-1) = 3\cdot 2\cdot 1$$

Integrales triples sobre un sólido general.



$(x,y)\in D$

$u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)$

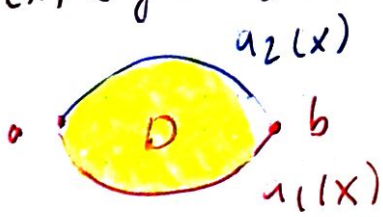
D es la región de proyección del sólido E sobre el plano xy.

$$\iiint_E f\, dV = \iint_D \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dA.$$

D como una región tipo I, tipo II o en polares.

$a \le x \le b.$

$a_1(x) \le y \le a_2(x)$

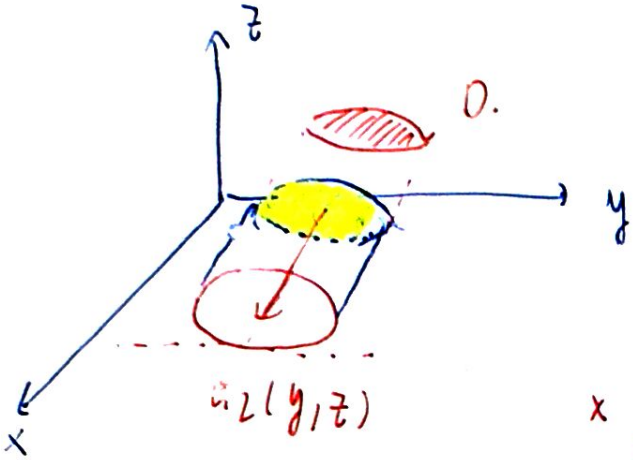


$$\iiint_E f\, dV = \int_a^b \int_{a_1(x)}^{a_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

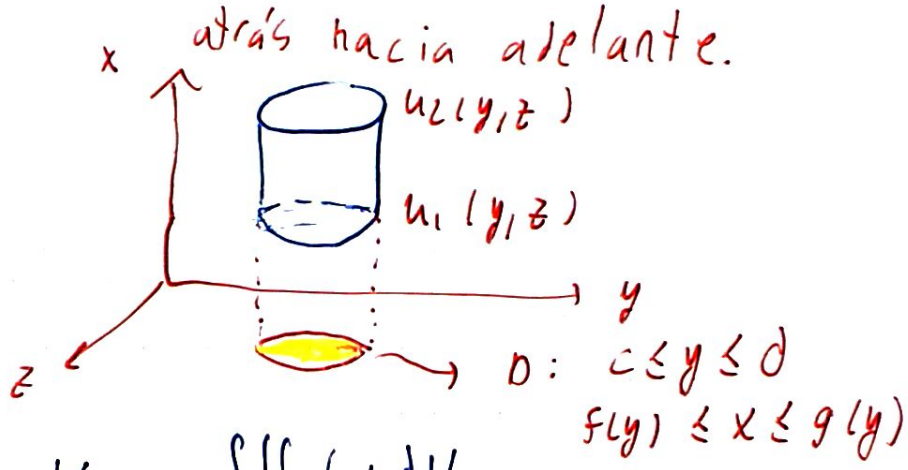
Sólido Tipo I, con región D tipo I.

Sólido Tipo II $\quad u_1(y,z) \le x \le u_2(y,z)$.

$(y,z) \in D$



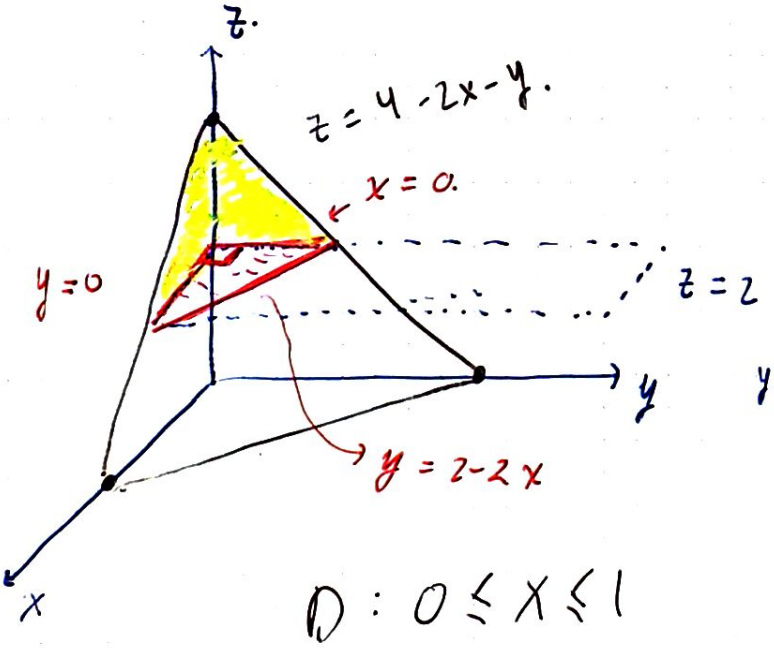
$$\iiint_E f\,dV = \iint_D \left(\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f\,dx \right) dA.$$



$$\text{Área} = \iint_D dA$$

Ejercicio 2: Evalúe $\iiint_E 6x\,dV$.

E se encuentra debajo del plano $z = 4-2x-y$, encima del plano $z=2$ y entre $x=0$, $y=0$. 1er octante.

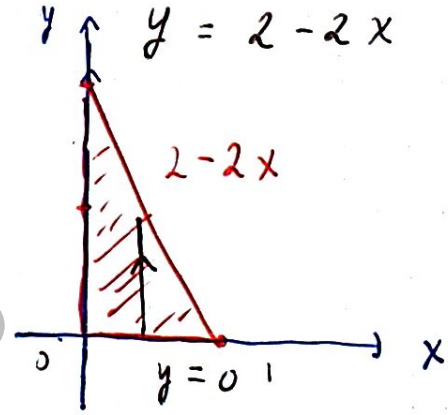


$2 \le z \le 4-2x-y$.

Límites D.

$2 = 4-2x-y$.

$y = 2-2x$



$D: 0 \le x \le 1$

$0 \le y \le 2-2x$

sólido E: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2-2x$, $2 \le z \le 4-2x-y$. 4.

$$I_2 = \iiint_E 6x \, dV = \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_2^{4-2x-y} 6x \, dz \, dy \, dx.$$

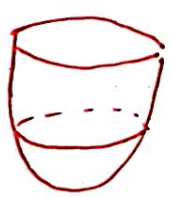
$$6x \int_2^{4-2x-y} dz = (2-2x-y)6x = 12x - 12x^2 - 6xy.$$

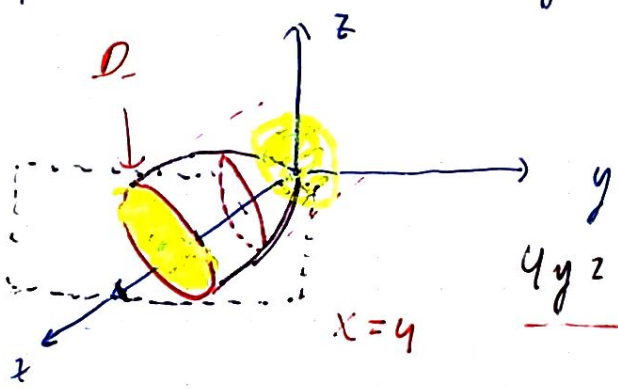
$$I_2 = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (12x - 12x^2 - 6xy) \, dy \, dx$$

$$I_2 = \int_0^1 (12x - 12x^2)(2-2x) - 3x(2-2x)^2 \, dx$$

Ejercicio 3: Evalúe $\iiint_E x \, dV$

E está entre el paraboloide $x = 4y^2 + 4z^2$ & $x = 4$.





$4y^2 + 4z^2 \le x \le 4$.

D es la "intersección" entre $4y^2 + 4z^2$ & 4:

$4y^2 + 4z^2 \le 4$. D: $y^2 + z^2 \le 1$ disco radio 1

$$I_3 = \iiint_E x \, dV = \iint_D \left(\int_{4y^2+4z^2}^{4} x \, dx \right) dA$$

$4y^2 + 4z^2 \le x \le 4$

D: $0 \le y^2 + z^2 \le 1$

5.

$$I_3 = \iint_D \frac{x^2}{2}\Big]_{x=4y^2+4z^2}^{x=4} dA. \qquad (4y^2+4z^2)^2 = 16(y^2+z^2)^2$$

$$I_3 = \iint_D 8 - 8(y^2+z^2)^2 \, dA.$$

como D es un disco use coordenadas polares

$dA = r\,dr\,d\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. , $0 \leq r \leq 1$

use $y^2+z^2 = r^2$, $y = r\sin\theta$. $z = r\cos\theta$.

$$I_3 = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (8 - 8r^4)\, r\, dr\, d\theta.$$

$$I_3 = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\int_0^1 (8r - 8r^5)\, dr$$

$$I_3 = 2\pi\left(4r^2 - \frac{8}{6}r^6\Big]_{r=0}^{r=1}\right) = 2\pi\left(4 - \frac{8}{6}\right) = \frac{16\pi}{3}.$$

Aplicaciones: $\iiint f\, dV \to m^4$

dV volumen de una caja infinitesimal

Volumen: $V = \iiint_E dV.$ Área $A = \iint_D dA$

Densidad volúmetrica $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V.$

Si la densidad no es constante $\rho(x,y,z)$

$dm = \rho(x,y,z)\, dV.$

masa: $m = \iiint_E \rho(x,y,z)\, dV$

6.

Ejercicio 4: Considere el sólido $E: 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x^3,\ 0 \leq z \leq y$

plano xy.

a. Encuentre la masa del objeto si la densidad $\rho = xy^2$.

$$m = \iiint_E xy^2\, dV = \int_0^2 \int_0^{x^3} \int_0^y xy^2 \cdot dz\, dy\, dx.$$

$$xy^2 z \Big]_{z=0}^{y} = xy^2 \cdot y = xy^3.$$

$$m = \int_0^2 \int_0^{x^3} xy^3\, dy\, dx \quad , \quad \frac{xy^4}{4}\Big]_{y=0}^{y=x^3} = \frac{x \cdot x^{12}}{4} = \frac{x^{13}}{4}.$$

$$m = \int_0^2 \frac{x^{13}}{4}\, dx = \frac{x^{14}}{4 \cdot 14}\Big]_{x=0}^{x=2} = \frac{2^{14}}{8 \cdot 7} = \frac{2^{11}}{7}.$$

b. Encuentre el volumen del objeto $V = \iiint_E dV = \iint_D \overbrace{f(x,y)}^{y.}\, dA.$

$$V = \iiint_E dV = \int_0^2 \int_0^{x^3} \underbrace{\int_0^y dz}_{y.}\, dy\, dx = \int_0^2 \int_0^{x^3} y.\, dy\, dx$$

$$V = \int_0^2 \frac{1}{2} y^2 \Big]_{y=0}^{y=x^3} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^6\, dx = \frac{1}{2 \cdot 7} x^7 \Big]_{x=0}^{x=2}.$$

$$V = \frac{2^7}{2 \cdot 7} = \frac{2^6}{7} = \frac{64}{7}.$$

7.

2a $\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \underline{\underline{y}} \cos(x\underline{\underline{y}})\, dy\, dx$ evite IPP.

2b) $\int_0^2 \int_{y^2}^4 y^2 \underline{\underline{\sqrt{x}\, \sin x}}\, dx\, dy =$ número.

$u = xy \quad du = y\,dx$

2a $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 y \cos(\underline{\underline{x}}y)\, dx\, dy. = \int_0^{\pi/2} \frac{y}{y} \sin(xy) \Big]_{x=0}^{x=1} dy.$

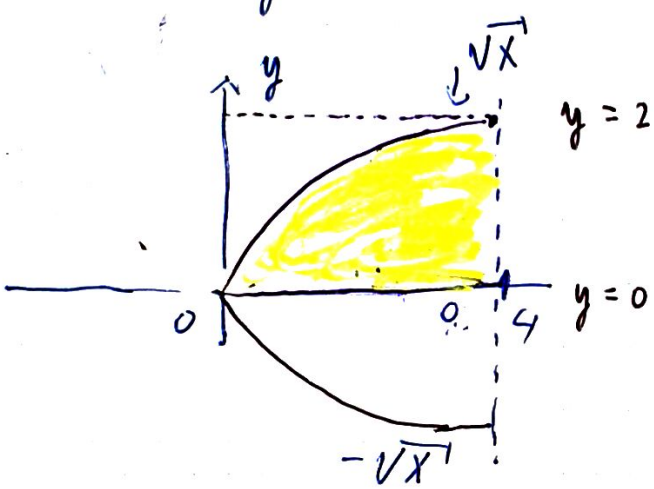
$I_{2a} = \int_0^{\pi/2} \sin y\, dy = \cos y \Big]_{\pi/2}^{0} = 1$

$x = y^2.$

2b) $\int_0^2 \int_{y^2}^4 y^2 x^{1/2} \sin x\, dx\, dy.$

$y^2 \leq x \leq 4$

$0 \leq y \leq 2.$



$0 \leq y \leq \sqrt{x}$

$0 \leq x \leq 4$

$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y^2 x^{1/2} \sin x\, dy\, dx.$

$\int_0^4 \frac{1}{3} x^{3/2} x^{1/2} \sin x\, dx$