

# Rocket Book Compiliation - Cálculo Multivariable

Christiaan Ketelaar  
Organizado por : David Corzo

2020-01-06



# Índice general

1. RB_2020-01-07_18_49_53	5
2. RB_2020-01-09_09_42_27	13
3. RB_2020-01-14_11_51_58	21
4. RB_2020-01-16_13_01_32	31
5. RB_2020-01-21_13_21_32	39
6. RB_2020-01-23_19_42_58	49
7. RB_2020-01-28_13_10_15	57
8. RB_2020-01-28_13_17_10	65
9. RB_2020-01-30_11_31_17	67



# Capítulo 1

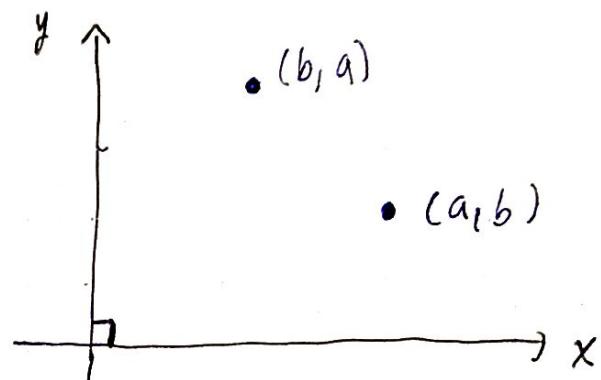
RB\_2020-01-07\_18\_49\_53

## 12.1 Sistemas Tridimensionales de Coordenadas.

Para localizar un punto en un plano, se necesitan 2 números.

- a la coordenada  $x$
- b la coordenada  $y$ .

Plano  $\mathbb{R}^2$

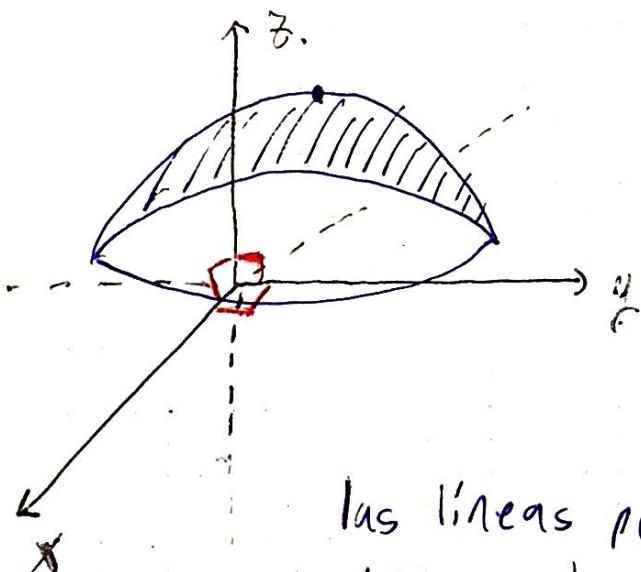


Los ejes de coordenadas son perpendiculares entre sí.

El sistema tridimensional de coordenadas rectangulares cada punto en el espacio es una terna ordenada  $(x, y, z)$

Espacio  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \text{ tal que } x, y, z \in \mathbb{R}\}$ .

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}.$$



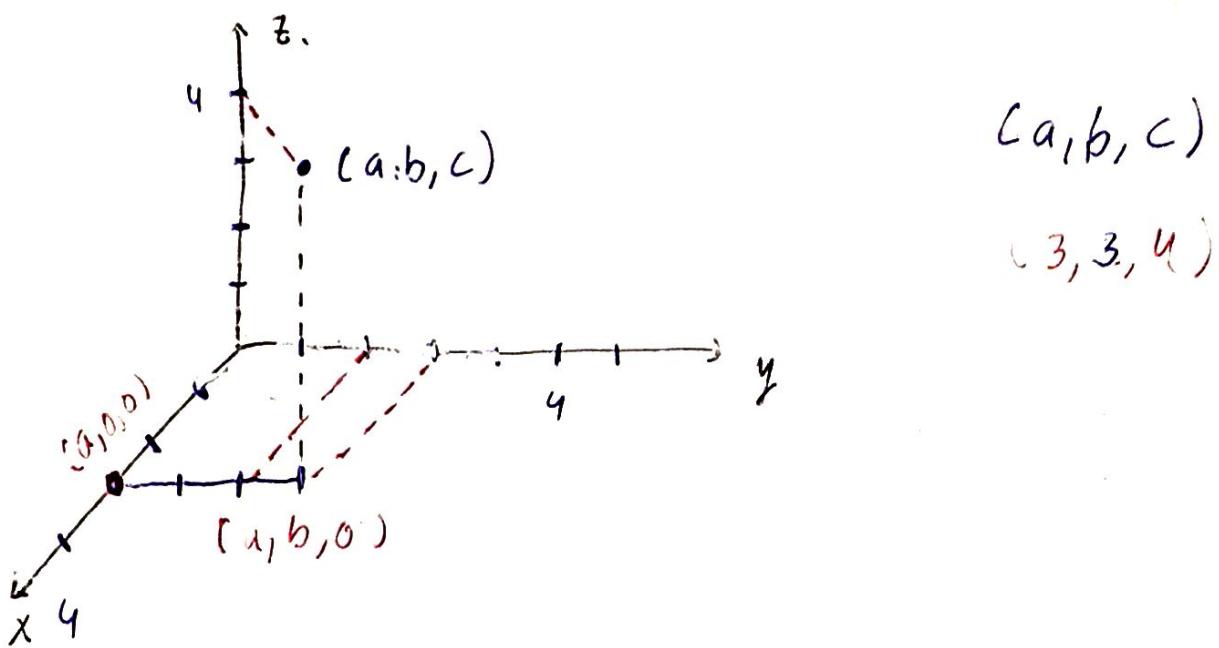
$x$  transversal

$y$  horizontal

$z$  vertical.

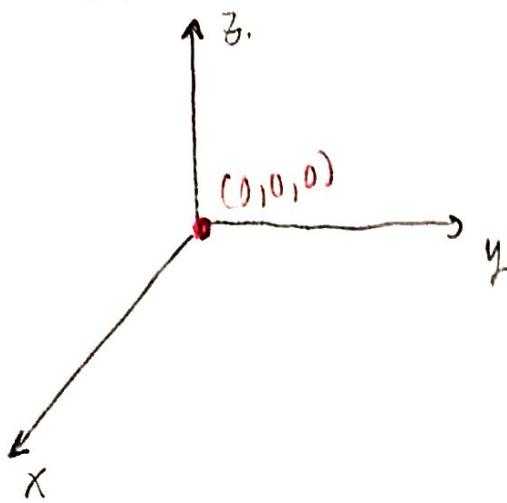
$$z = f(x, y)$$

las líneas punteadas se para simbolizar las partes de abajo, izquierda y detrás.

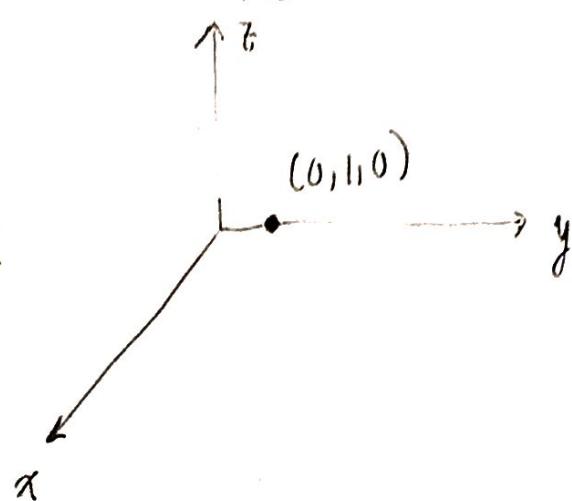


Ejercicio 1: Identifique los siguientes puntos.

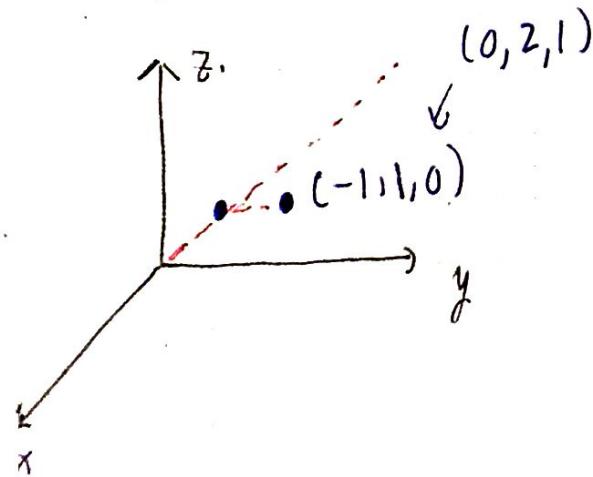
a.  $(0, 0, 0)$



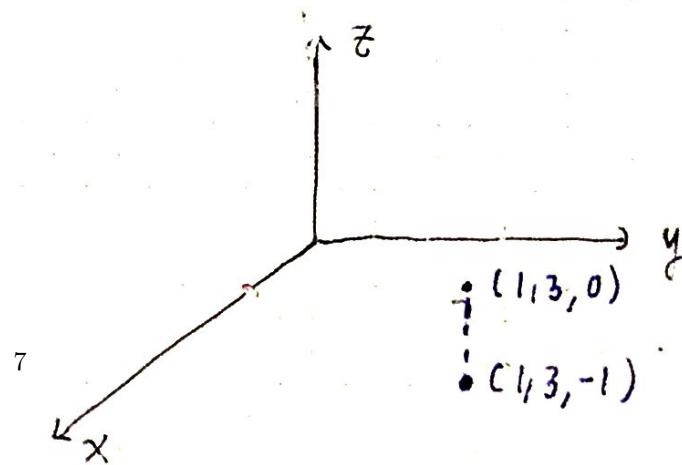
b.  $(0, 1, 0)$



b.  $(-1, 1, 0)$

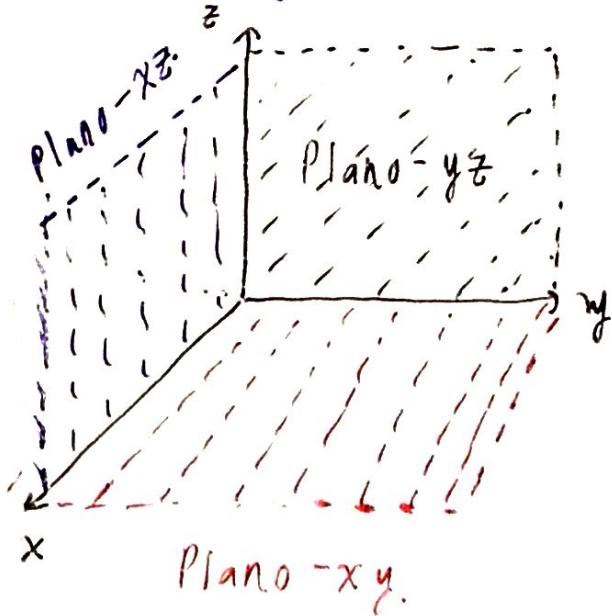


c.  $(1, 3, -1)$



## Planos Coordenados.

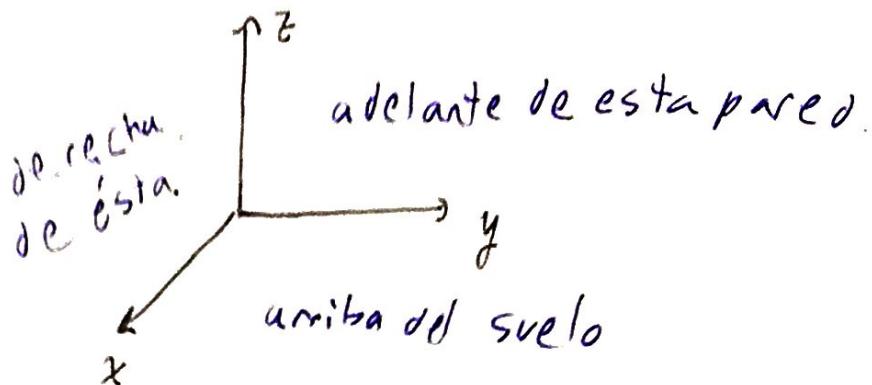
Plano -  $xy$  :  $z = 0$ . (el suelo) Plano -  $yz$   $x = 0$   
 (pared de atrás)



Plano -  $xz$   $y = 0$ .  
 (pared izquierda)

1er octante.

$$x > 0, y > 0, z > 0$$



## Planos en el espacio.

En 2-D.

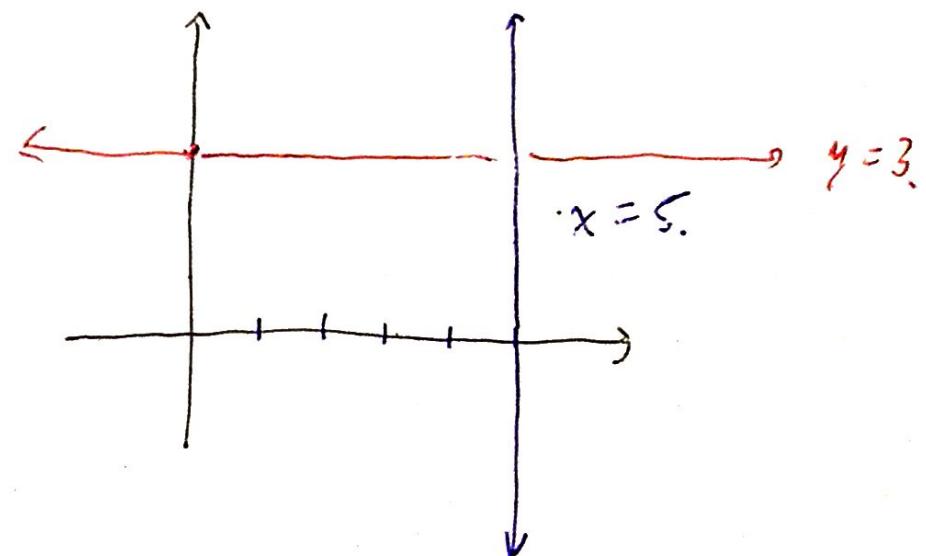
$$x = 5 \text{ ó } y = 3.$$

$$x = a$$

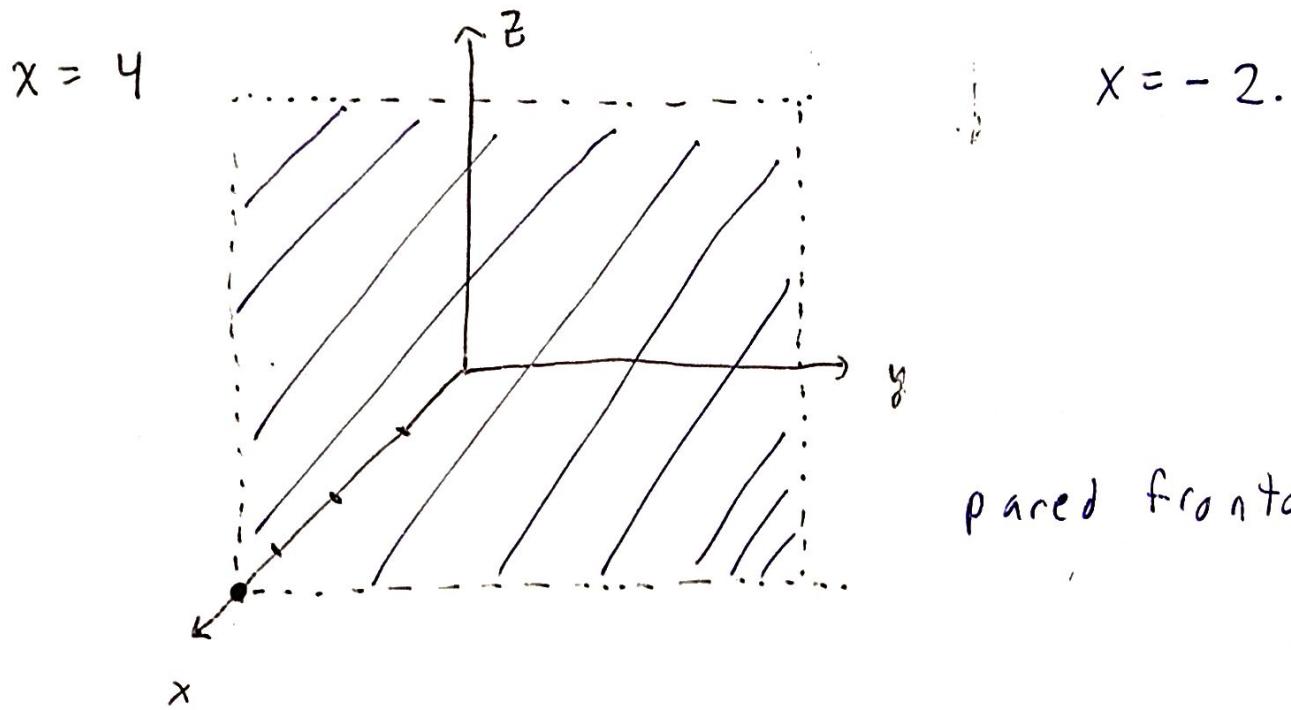
Rectas Verticales.

$$y = b.$$

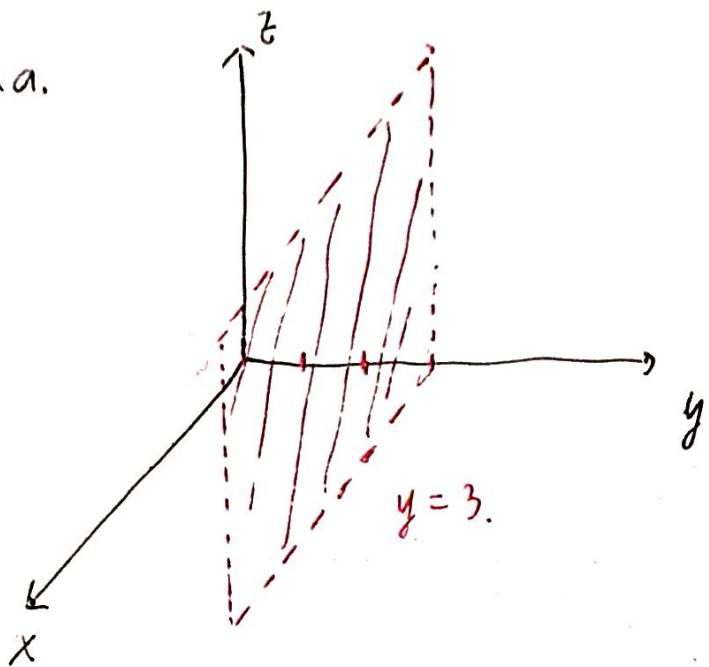
Rectas Horizontales.



En 3-D  $x=a$ ,  $y=b$ ,  $z=c$  son gráficas de planos.

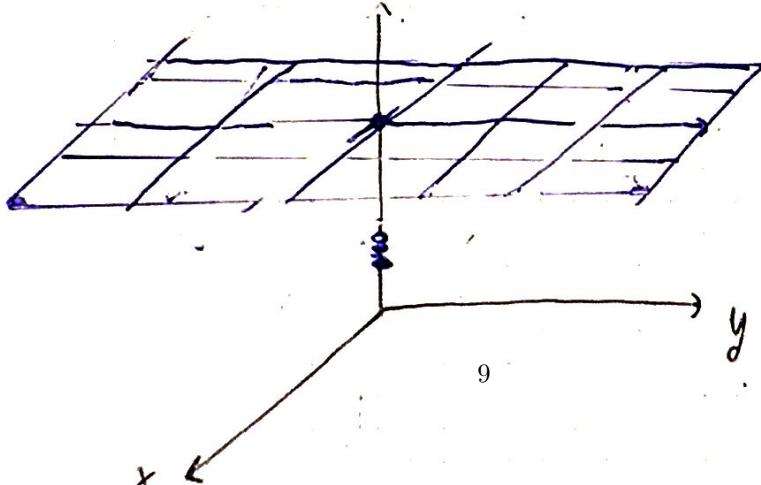


$y=3$ . pared derecha.



$z=2$ .

(techo)



5

Ec. lineal en 3-D va a graficar un plano.

Ec. Plano.  $ax + by + cz = d$ .

generalmente se grafican sólo en el primer octante  
si cada  $a, b, c$  y  $d$  es positiva.

Intersección  $x$ :  $y=0, z=0$   $(a, 0, 0)$

Intersección  $y$ :  $x=0, z=0$   $(0, b, 0)$

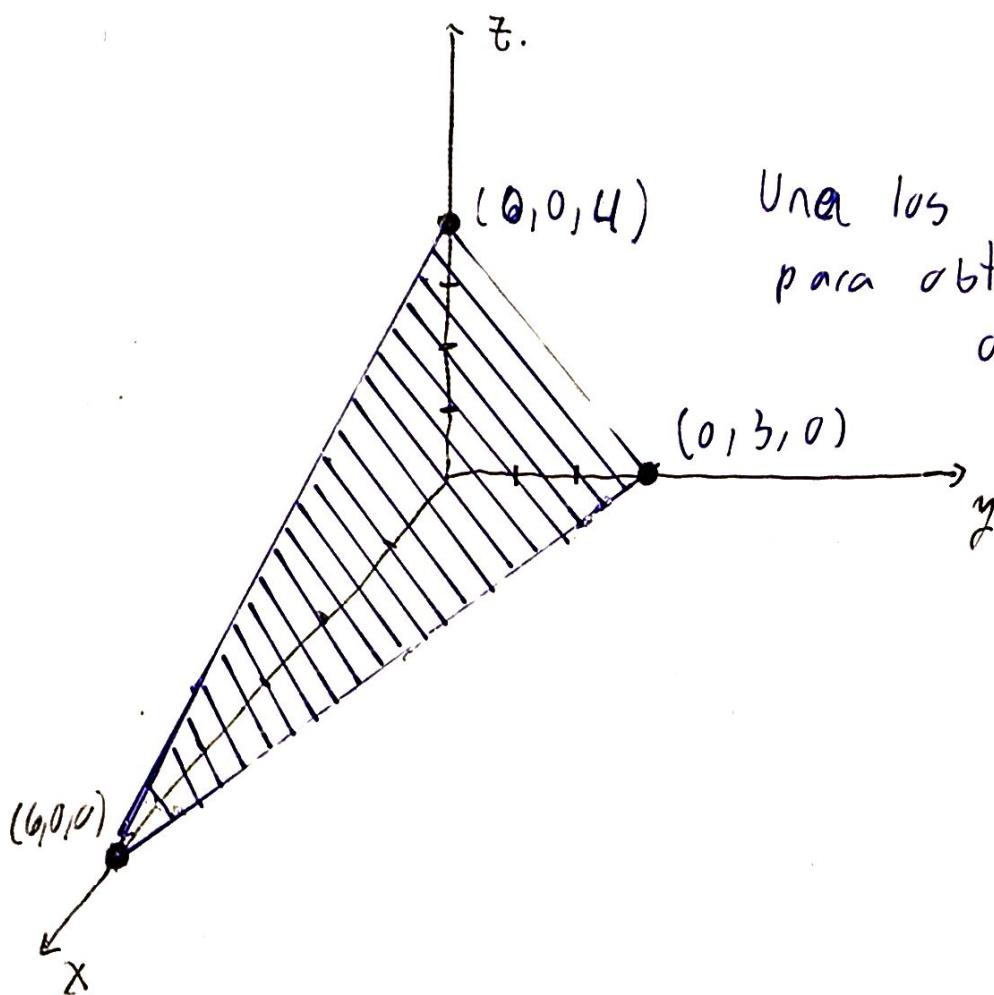
Intersección  $z$ :  $x=0, y=0$   $(0, 0, c)$

Ejercicio 3: Bosqueje el plano  $2x + 4y + 3z = 12$   
sólo en el primer octante.

Intersector- $x$ :  $2x = 12 \Rightarrow (6, 0, 0)$

Intersector- $y$ :  $4y = 12 \Rightarrow (0, 3, 0)$

Intersector- $z$ :  $3z = 12 \Rightarrow (0, 0, 4)$



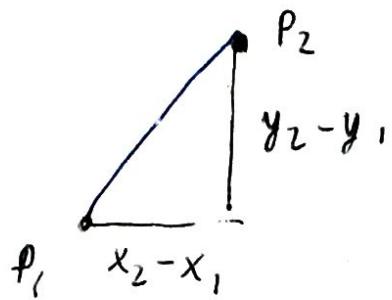


# Capítulo2

RB\_2020-01-09\_09\_42\_27

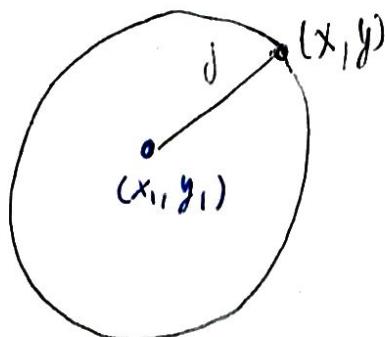
## 12.1.2 Distancias y Superficies Básicas.

En 2-D, la distancia entre  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = d^2.$$



Ecuación de Circunferencia de radio d. centrada en  $(x_1, y_1)$ .

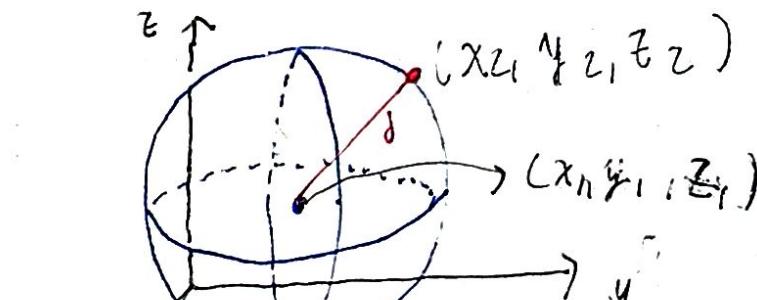
En 3-D, la distancia entre  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  y  $P_2(x_2, y_2, z_2)$

Calcule la diferencia entre  $z_2$  &  $z_1$ .

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

no puede ser negativa.

Notación  $d = |P_2 P_1|$



$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = d^2$$

Ecuación de una esfera de radio r centrada en  $(x_1, y_1, z_1)$ .

Pág. 15.

Esfera más utilizada centrada en el origen  $(0,0,0)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \text{radio } r.$$

Ejercicio 4: Encuentre el centro y radio de la esfera cuya ecuación es:

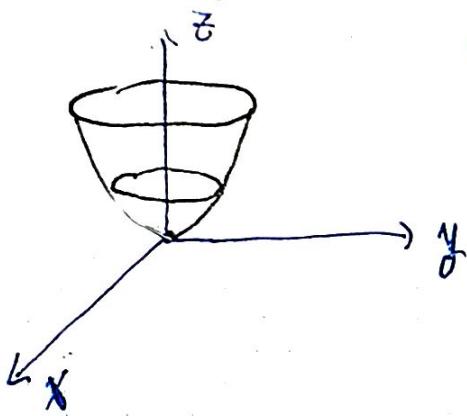
$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 4z + 4 = 0. \quad (\text{P}16).$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 + z^2 + 4z + 4 = -4. + 16 + 9 + 4$$

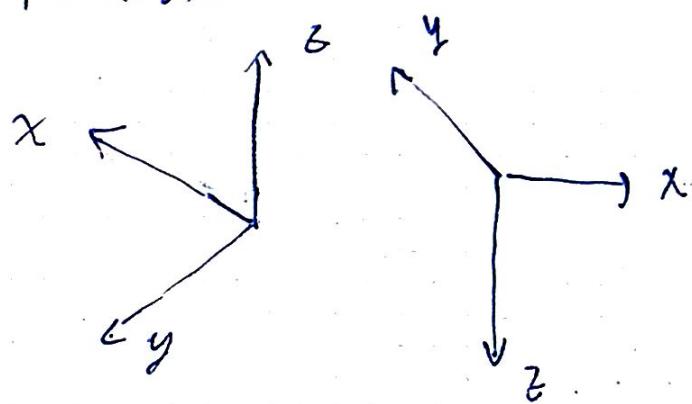
$$(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 25 = r^2$$

Centro de esfera  $(-4, 3, -2)$  Radio  $\sqrt{25} = 5$ .

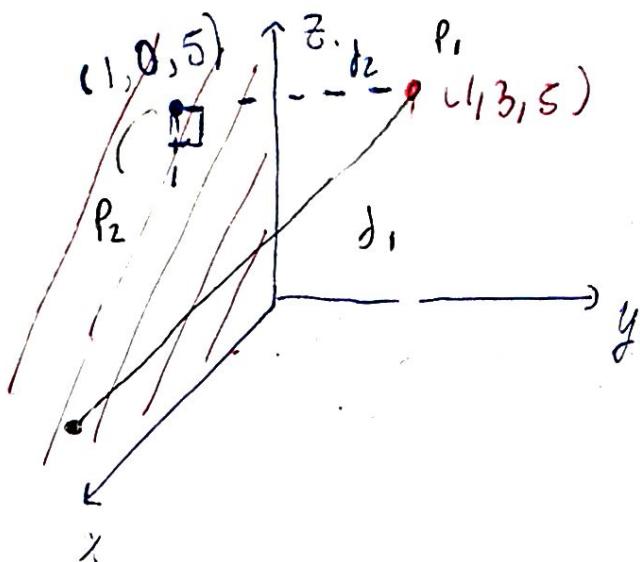
$Z = x^2 + y^2$  no es una esfera.



es un parabolóide.



Distancia entre un punto y un plano-coordenado.



Encuentre la distancia entre el punto  $(1, 3, 5)$  y el plano  $xz$ . (tiene infinitos puntos)

En el plano  $xz$   $y=0$

si se estrella el punto  $(1, 3, 5)$  contra el plano  $xz$  se obtiene el punto  $(1, 0, 5)$ .

"Estrellar": Encuentre la proyección del punto  $P$  sobre el plano.

$$\text{Distancia entre } P_1 \text{ y } P_2 \quad d = \sqrt{(1-1)^2 + (3-0)^2 + (5-5)^2}$$

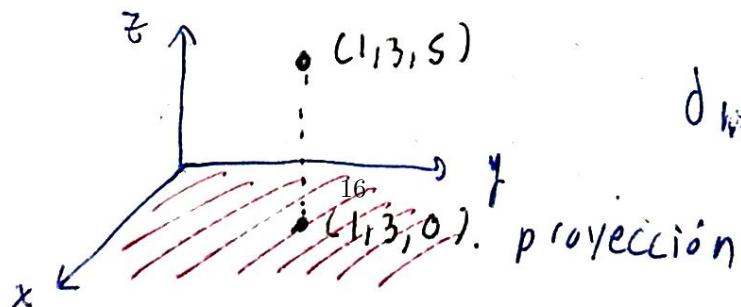
$$d = \sqrt{0+9+0} = 3$$

Gabriel la proyección del punto  $(a, b, c)$  sobre el plano  $xz$  es el punto  $(a, 0, c)$ .

Distancia mínima entre  $P$  y el plano es

$$d = \sqrt{0+b^2+0} = |b|. \quad \text{de la componente } -y.$$

¿Cuál es la distancia entre el punto  $(1, 3, 5)$  y el plano  $xy$ ?  $z=0$ .



$$d_{\min} = \sqrt{0+0+S^2} = 5.$$

Ejercicio 6: considere los puntos  $A(3, 0, -4)$ ,  $B(9, 0, 0)$   
 y  $C(0, 1, \sqrt{15})$ .  
 $\uparrow$   $\uparrow$   $\uparrow$   
 $y=0$ .  $y=0$   $z=0$ .

a. ¿Cuál de los sgs. puntos está más cercano al origen?

Calcule la distancia de cada punto respecto al origen.

$$d_{AO} = |AO| = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5 \quad O(0,0,0)$$

$$|BO| = \sqrt{81+0+0} = \sqrt{81} = 9$$

$$|CO| = \sqrt{0+1+15} = \sqrt{16} = 4.$$

✓ es el más cercano al origen.

b. ¿Cuáles de los puntos están sobre el plano  $yz$ ?

Ec. Plano  $yz$ :  $x=0$ .

A y B no están sobre el plano  $yz$   $x \neq 0$ .

El punto C  $(0, 1, \sqrt{15})$  si está sobre este plano.

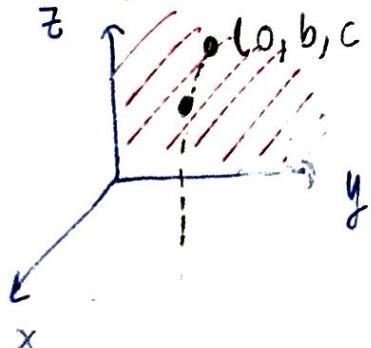
Comentario. A está sobre el plano  $xz$ .

B está sobre el eje x.

está sobre el plano  $xy$  &  $xz$

c. ¿Cuáles de los puntos está más cercano al plano  $yz$ ?  $x=0$ .

$z$   $(0, b, c)$ .



como C está sobre el plano  $yz$   
 éste es el más cercano a este plano  
 $d=0$ .

Encuentre las proyecciones y las distancias

$$A(3,0,-4), \quad P_A = (0,0,-4), \quad d_A = 3$$

$$B(9,0,0), \quad P_B = (0,0,0), \quad d_B = 9.$$

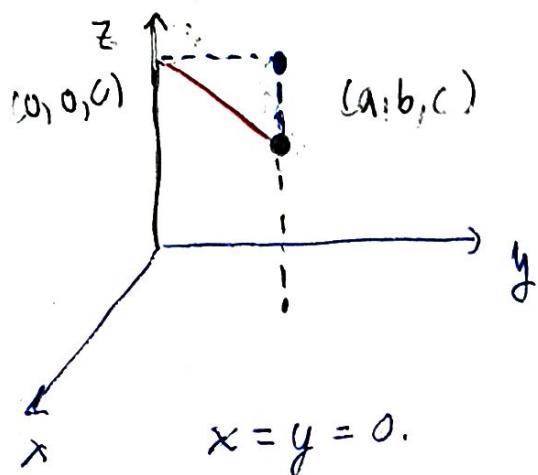
$$C(0,1,\sqrt{15}), \quad P_C = (0,1,\sqrt{15}), \quad d_C = 0 \quad \checkmark$$

mismo punto, éste sobre el plano  $yz$

Distancia entre un punto y un eje.

3. ¿Cuál de los siguientes puntos está más cercano

al eje  $-z$ .



En el eje  $-z$   $x=0, y=0$ .

La proyección del punto  $P(a,b,c)$  al eje  $-z$  es el punto  $P_1(0,0,c)$ .

$$d_{\min} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Encuentre las proyecciones sobre el eje  $y$  las distancias.

$$A(3,0,-4), \quad P_A(0,0,-4), \quad d_A = \sqrt{9+0+0} = 3.$$

$$B(9,0,0), \quad P_B(0,0,0), \quad d_B = \sqrt{81+0+0} = 9.$$

$$C(0,1,\sqrt{15}), \quad P_C(0,0,\sqrt{15}), \quad d_C = \sqrt{0+1+0} = 1$$

mas cercano

Plano  $x=0$  plano  $yz$

$y=0$  plano  $xz$

$z=0$  plano  $xy$

Ejes

$x=0, y=0$

$x=0, z=0$

$y=0, z=0$

Eje  $-z$

Eje  $-y$

Eje  $-x$ .

Superficies. Básicas: Planos, Cilindros y Esfera.

En 12.6 superficies cuádricas cilindro parabólico  
cilindro (función).

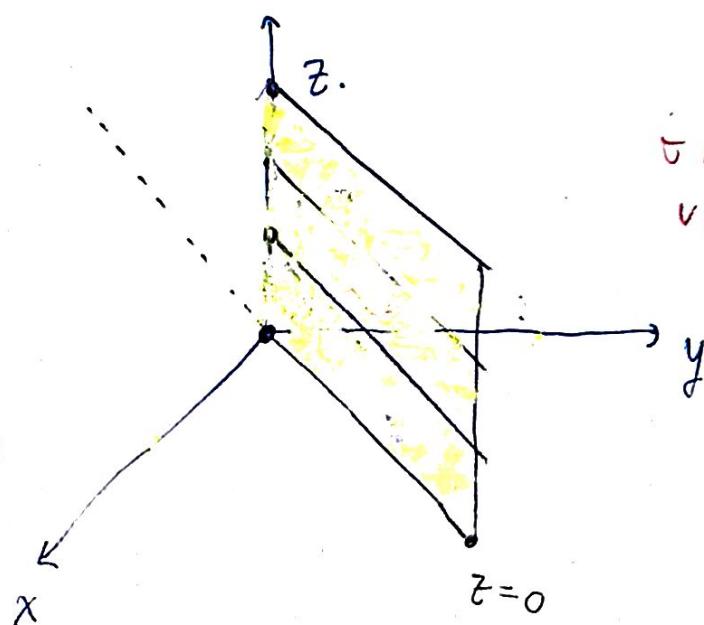
Ejercicio 7: Bosqueje el plano  $y = x$ . en el 1er octante.

$$z = 0 : y = x$$

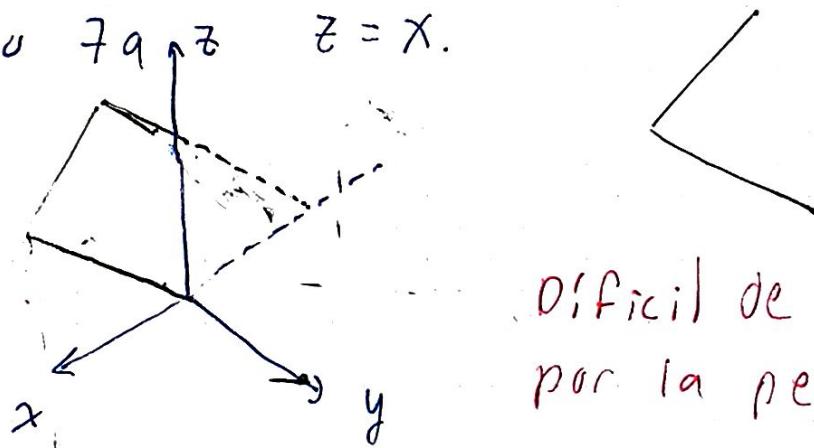
$$z = 1 : y = x$$

$$z = 9 : y = x$$

sólo tiene  
intersectos con el  
eje -z.



Ejercicio 7a)  $z = x$ .

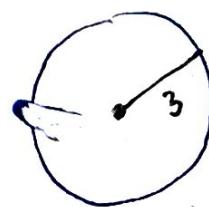


Difícil de graficar  
por la perspectiva.

Ejercicio 8: Grafique las siguientes superficies

a.  $x^2 + z^2 = 9$ .

Variable  $y$ .

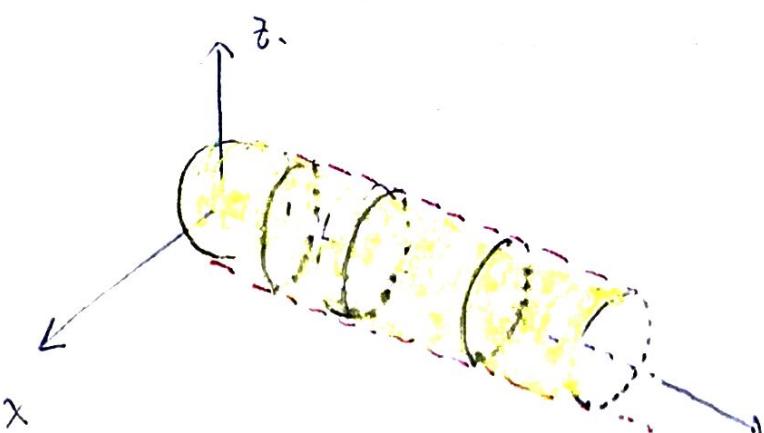


En 2-D

circunferencia  
de radio 3.

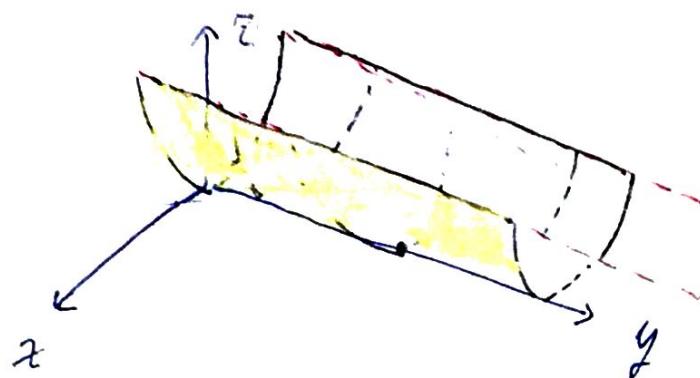
$$y=0 \quad x^2 + z^2 = 9$$

$$y=2 \quad x^2 + z^2 = 9$$



Cilindro circular de radio centrado en el eje -y.

b.  $z = x^2$ .

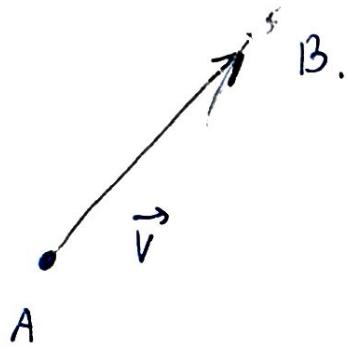


hoja doblada  
cilindro parabólico.

# Capítulo3

RB\_2020-01-14\_11\_51\_58

## 12.1 Vectores p. 21.

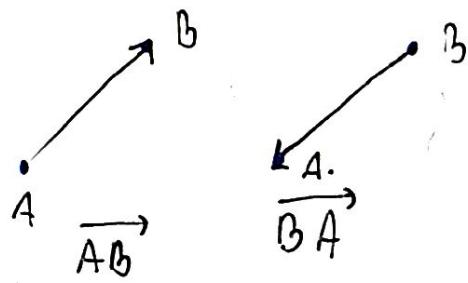


B. Un vector: tiene magnitud y dirección  
se denota en negrilla  $\mathbf{v}$   
o una flecha sobre la letra  
 $\overrightarrow{V}$

la longitud de cada segmento es la magnitud del vector.  
la flecha indica su dirección.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

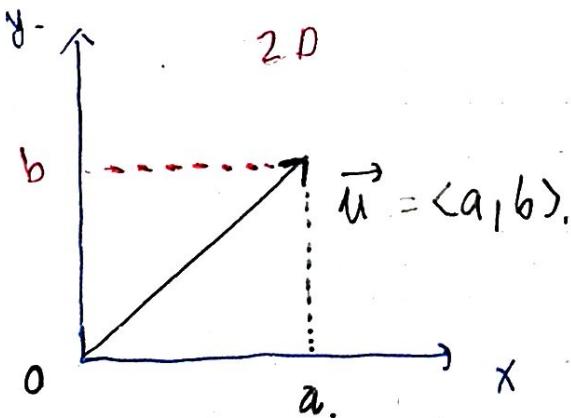
segmento de recta dirigido  
empieza en el punto  $A$  y termina en el  $B$ .



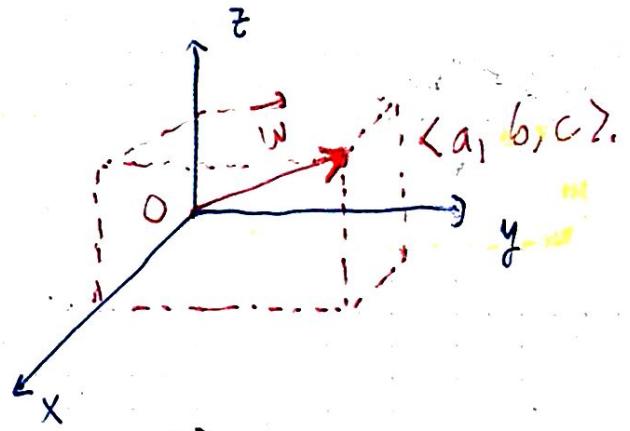
$$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$$

vector cero  $\vec{0}$  no tiene ni  
magnitud ni dirección.

Sistema de coordenadas y las componentes de un vector.



$$\vec{u} = \langle a, b \rangle \text{ ó } [a, b]$$

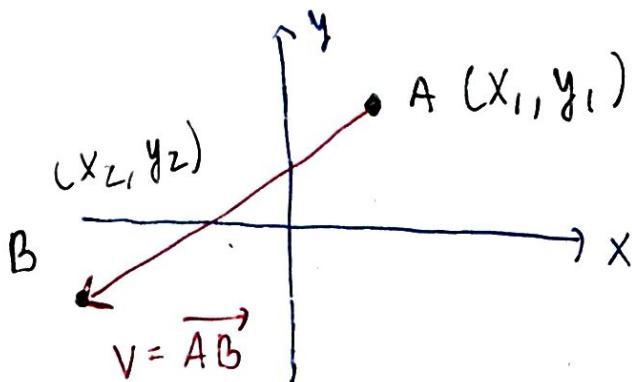


$$\vec{w} = \langle a, b, c \rangle$$

las llaves  $\langle \rangle$  denotan a un vector.

## Vector Posición:

En 2-D.



$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle.$$

En 3-D.

$$A(x_1, y_1, z_1) \text{ & } B(x_2, y_2, z_2)$$

$$\overrightarrow{BA} = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2 \rangle.$$

Magnitud de un vector: la distancia entre el punto B y el punto A.

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

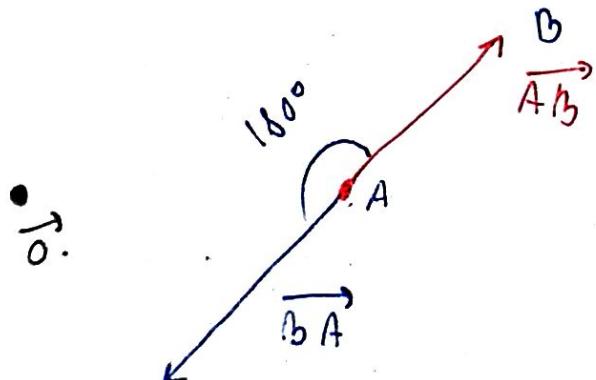
Se nota con || ó |||.

$$\text{si } \vec{v} = \langle a, b, c \rangle \quad |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Observaciones:  $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

$$\text{pero } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|.$$



$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}?$$

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0} \text{ vector cero.}$$

no tiene dirección.

$$\langle x_1 - x_1, y_1 - y_1, z_1 - z_1 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle.$$

Ejercicio 1: Considere el vector  $\vec{AB}$  con un punto inicial  $A(1, 2, -4)$  y punto final  $B(4, 8, 2)$ .

a. Encuentre el vector posición  $\vec{u} = \vec{AB}$ .

$$\vec{u} = \langle 3, 6, 6 \rangle \quad 2 - (-4)$$

b. Encuentre la longitud del vector  $\vec{u}$ .

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36 + 36} = \sqrt{81} = 9.$$

## Operaciones de vectores.

i. Suma de vectores

✓ } Aritmética

ii. Multiplicación por un escalar.

✓ } Geometría

12.3 Producto Punto

12.4 Producto Cruz.

### Suma de vectores.

$$\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \quad \vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle.$$

Sume cada componente.

$$\vec{u} + \vec{w} = \langle u_1 + w_1, u_2 + w_2, u_3 + w_3 \rangle.$$

Multiplicación por un escalar.  $K$  es una constante.

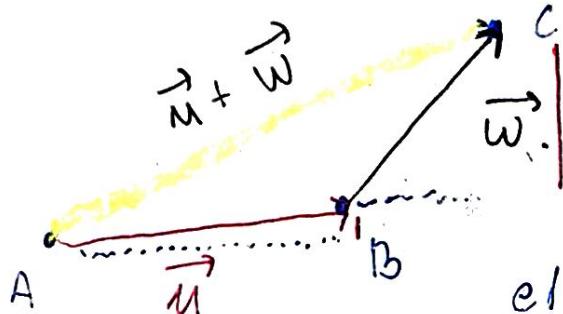
denotada como un escala

Multiplique cada componente.

$$K\vec{w} = \langle Kw_1, Kw_2, Kw_3 \rangle.$$

¿Cómo se pueden visualizar geométricamente estas operaciones?

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \vec{w} = \overrightarrow{BC}$$



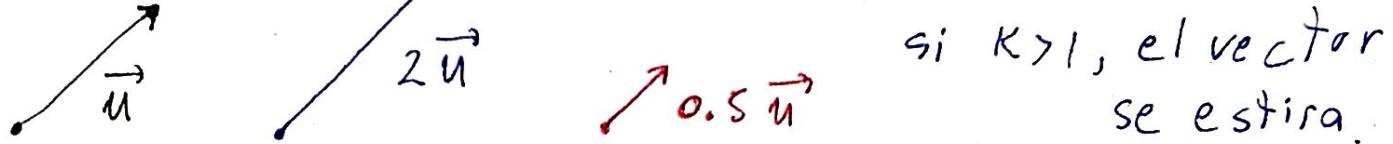
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{u} + \vec{w} = \overrightarrow{AC}$$

Suma de vectores  
el segundo vector  $w$  empieza en el punto donde termina el 1ero

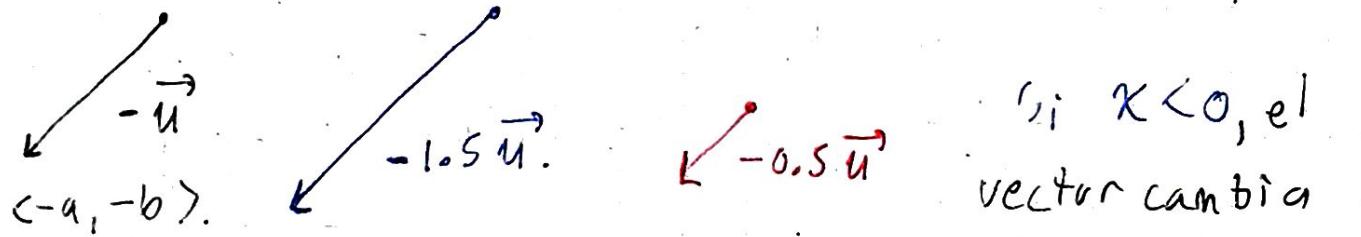
Multiplicación por un escalar

- Se preserva la dirección si  $K > 0$ .



$$\langle a, b \rangle \quad \langle 2a, 2b \rangle \quad 2\langle a, b \rangle.$$

si  $0 < K < 1$ , el vector se comprime.



si  $K < 0$ , el vector cambia de dirección.

(cambia en  $180^\circ$ ).

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \langle 0, 0 \rangle.$$

Negativo de un vector: cuando  $K = -1$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

$$-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$$

Resta o diferencia de vectores: Caso especial de la suma

$$\begin{aligned}\vec{u} + (-\vec{w}) &= \vec{u} - \vec{w} \\ &= \langle u_1 - w_1, u_2 - w_2, u_3 - w_3 \rangle.\end{aligned}$$

Resta cada componente entre sí.

Se puede pensar como la suma entre  $\vec{u}$  y el negativo de  $\vec{w}$ .

Ejercicio 2: Sean  $\vec{a} = \langle 1, -2, 5 \rangle$ ,  $\vec{b} = \langle -2, 1, -3 \rangle$ .

combinación <sup>lineal</sup> de vectores.  $\vec{u}, \vec{w}$  en 2-D.

$$k_1 \vec{u} + k_2 \vec{w} = \langle k_1 u_1 + k_2 w_1, k_1 u_2 + k_2 w_2 \rangle$$

a.  $\vec{a} + \vec{b} = \langle -1, -1, 2 \rangle.$

b.  $2\vec{a} - 4\vec{b} = \underbrace{\langle 2, -4, 10 \rangle}_{2\vec{a}} + \underbrace{\langle 8, -4, 12 \rangle}_{-4\vec{b}} = \langle 10, -8, 22 \rangle.$

c.  $|2\vec{a} - 4\vec{b}| = \sqrt{100 + 64 + 484} = \sqrt{648} \approx 25.45$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30} \approx 5.47.$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14} \approx 3.74.$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \approx 2.45.$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \neq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

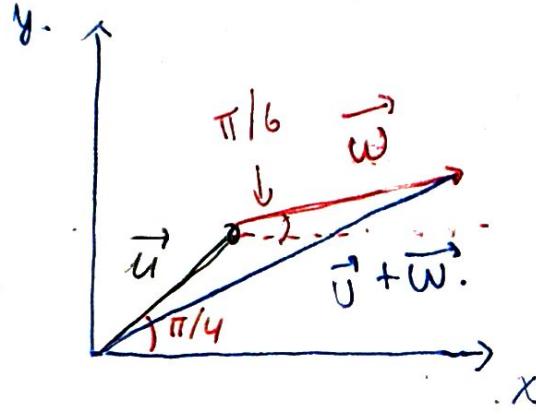
$$\sqrt{|\vec{a} + \vec{b}|^2} \neq \sqrt{|\vec{a}|^2} + \sqrt{|\vec{b}|^2}$$

6.

Problema Bono: Considere el vector  $\vec{u} = \langle 1, 1 \rangle$  y  $\vec{w} = \langle 1, \sqrt{3} \rangle$ .

Encuentre la magnitud y el ángulo respecto al eje -x del vector  $\vec{w} + \vec{u}$ .

$$\vec{w} + \vec{u} = \langle 2, 1 + \sqrt{3} \rangle.$$



$$|\vec{u}| = \sqrt{1+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan \theta = y/x.$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \pi/4.$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1+3^2} = 2.$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi/6.$$

$$|\vec{w} + \vec{u}| = \sqrt{4 + (1 + \sqrt{3})^2}$$

$$\approx 3.3858$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) = 0.93 \text{ rad. } \approx 53.79^\circ$$

Vectores Bases o Estándar.

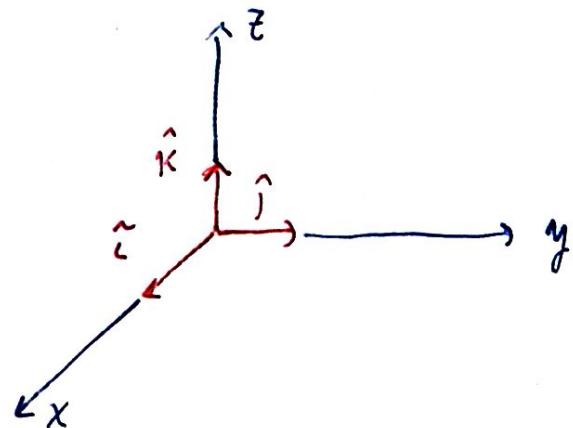
$$\vec{u} = \langle 3, 6, 7 \rangle = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}$$

se denotan como  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  y apuntan en la dirección de cada eje coordenado.

$$\hat{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

$$\hat{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

$$\hat{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$



Permiten expresar cada vector  $\vec{u}$  como una combinación de los vectores estándar.

$$\vec{u} = \langle a, b, c \rangle = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

Magnitud de  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

JNQ.

$$|\hat{i}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1 \quad |\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

Vectores Unitarios: Tienen longitud igual a 1,  
 $|\vec{u}| = 1$

¿Qué sucede si  $|\vec{a}| \neq 1$ ? Se encuentra el vector unitario  $\vec{u}$  asociado  $\vec{a}$  dividiendo por  $|\vec{a}|$ .

El vector  $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$  es siempre unitario.

Ejercicio 3: Sean  $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{k}$ ,  $\vec{b} = 5\hat{j} + 4\hat{k}$ .

Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ .

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = 4\hat{i} - 6\hat{k} + 15\hat{j} + 12\hat{k} = 4\hat{i} + 15\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{16 + 225 + 36} = \sqrt{277}$$

unitario  $\vec{u} = \frac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{|2\vec{a} + 3\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{277}} \langle 4, 15, 6 \rangle$



# Capítulo4

RB\_2020-01-16\_13\_01\_32

## 12.3 Producto Punto

Operaciones entre vectores  $\vec{a} + \vec{b}$  (suma)

suma  $\vec{a} + \vec{b}$

Mult. por un escalar  $k\vec{a}$

Producto punto  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Producto cruz  $\vec{a} \times \vec{b}$

Producto punto entre  $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  y  $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

es el número a.o.b. dado por:

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Para un vector en n dimensiones.

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Para que sea posible  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  tienen que tener la misma dimensión

$$\vec{a} = \langle 1, 2, 0, 4 \rangle \quad \vec{b} = \langle 2, 1 \rangle$$

Faltan 2 componentes.

$\vec{a} \cdot \vec{b}$  indefinido

Propiedades:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  Comunitativa.

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  Distributiva

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Ejercicio 1: Calcule el producto punto.

a.  $\vec{a} = \langle 6, -2, 3 \rangle, \vec{b} = \langle 2, 5, 1 \rangle.$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6(2) - 2(5) + 3(1) = 12 - 10 + 3 = 5$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = 12 - 10 + 3 = 5 \quad \text{Gracias AA.}$$

b.  $\vec{u} = \underline{\hat{j}} + \underline{\hat{2}\hat{i}} + \underline{\hat{3}\hat{k}} \quad \vec{v} = \underline{\hat{2}\hat{k}} + \underline{\hat{4}\hat{i}} + \underline{0\hat{j}}$  vectores base

$$\langle \vec{u} \rangle = \langle \hat{j} + 2\hat{i} + 3\hat{k} \rangle \quad \langle \vec{v} \rangle = \langle 2\hat{k} + 4\hat{i} + 0\hat{j} \rangle$$

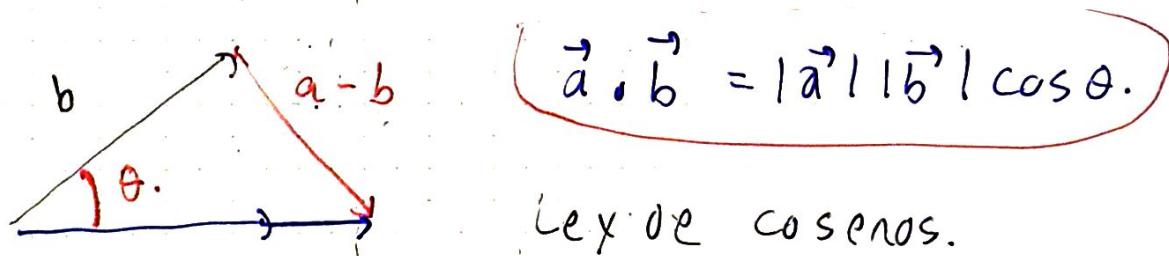
$$\langle \vec{u} \cdot \vec{v} \rangle = \langle 2, 1, 3 \rangle \cdot \langle 4, 0, 2 \rangle = 8 + 0 + 6 = 14$$

c.  $\vec{w} = \langle 1, 0, -2 \rangle \quad \vec{v} = \langle 2, 0, 1 \rangle.$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 2 + 0 - 2 = 0$$

$$\boxed{\vec{w} \cdot \vec{v} = 0}$$

Definición Alternativa del Producto.



Ley de cosenos.

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \theta.$$

$\vec{a}^2$  no existe

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

$$\underline{\vec{a} \cdot \vec{a}} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \underline{|\vec{a}|^2}.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

$$(a-b) \cdot (a-b) = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta.$$

$$a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b$$

$$|a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta.$$

$$a \cdot b = |a||b|\cos\theta.$$

$$|a \times b| = |a||b|\sin\theta.$$

Dados dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , el ángulo  $\theta$  entre los vectores es

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a \cdot b}{|a||b|}\right)$$

Ejercicio 2: determine el ángulo entre los dos vectores.

q.  $\vec{a} = \langle 4, 3 \rangle$   $\vec{b} = \langle -3, 4 \rangle$ .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -12 + 12 = 0 \quad |a| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$|b| = \sqrt{9+16} = 5.$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{0}{25}\right) = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  y el ángulo es  $90^\circ$   $\vec{a} \perp \vec{b}$  ortogonales

ortogonalidad  $\Leftrightarrow$  perpendicularidad.

$$b. \vec{a} = \langle 1, -2 \rangle, \vec{b} = \langle 3, -1 \rangle$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \quad |\vec{a}| = \sqrt{5} \quad |\vec{b}| = \sqrt{10}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi/4$$

c.  $\vec{a} = \hat{i} + \hat{k}, \vec{b} = \hat{i} + \hat{j}$        $\langle 1, 0, 1 \rangle$        $\langle 1, 1, 0 \rangle$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad |\vec{b}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
= 16, 14, 13

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Vectores perpendiculares ó ortogonales., denotado como  
 $a \perp b$ .

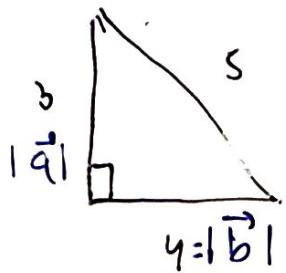
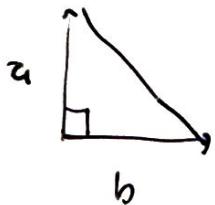
$$(a \perp b \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \pi/2 = 0.$$

Ejercicio 3: Determinese si los sigs. son ortogonales entre sí.

$$\vec{a} = \langle 4, 3, 1 \rangle, \vec{b} = \langle 2, -2, -2 \rangle,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 - 6 - 2 = 0$$
Si son ortogonales.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

El triángulo es rectángulo

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

b.  $\vec{u} = \langle 1, 8, -2, 4 \rangle \quad \vec{w} = \langle 3, 4, 6, -1 \rangle$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 3 + 32 - 12 - 4 = 19 \neq 0$$

No son ortogonales.

c.  $\vec{a} = \langle 1, 0, 0 \rangle \quad \vec{b} = \langle 0, 1, 0 \rangle \quad \vec{c} = \langle 0, 0, 1 \rangle$

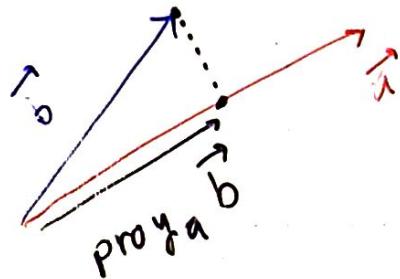
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0. \quad \text{G. sw.}$$

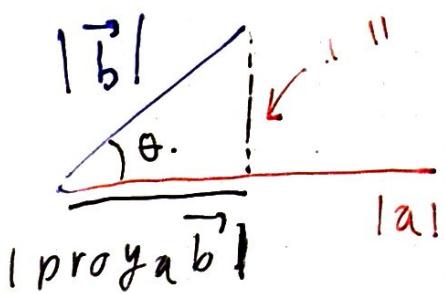
Mutuamente ortogonales.

Proyecciones: un vector se proyecta sobre otro vector



El vector  $\text{proy}_a(\vec{b})$  es la proyección vectorial de  $\vec{b}$  sobre  $\vec{a}$ .

si el ángulo entre  $a$  y  $b$  es  $\theta$ .

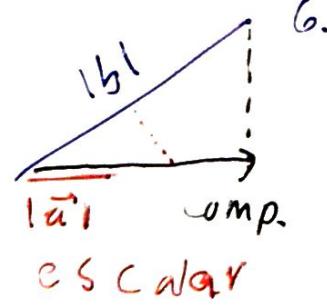


$$\frac{|\text{proy}_a \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \cos \theta. = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

proyección escalar:

$$|\text{proy}_a \vec{b}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$$

proyección escalar:  $\text{Comp}_a \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$



proyección vectorial

tiene la misma dirección que el vector  $\vec{a}$ .

utilice el vector  $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$  para encontrar la dirección de  $\vec{a}$

$$\text{proy}_a \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \right) \vec{a} \quad \text{vector.}$$

Observaciones:  $\text{Comp}_b \vec{a} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{b}|} = \neq \text{comp}_a \vec{b}$

Ejercicio 5: Halle la proyección escalar y la proyección vectorial de  $\vec{b}$  sobre  $\vec{a}$ .

a.  $\vec{a} = \langle -6, 8 \rangle \quad \vec{b} = \langle 3, 4 \rangle$

Proy escalar:  $\text{Comp}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{-18 + 32}{\sqrt{100}} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

Proy. vectorial:  $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{7}{5} \langle -6, 8 \rangle$   
so

b.  $\vec{a} = \langle 1, 1, 3 \rangle \quad \vec{b} = \langle -2, 3, 1 \rangle$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + 3 + 3 = 4 \quad |\vec{a}| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$$

Escalar  $\text{Comp}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{4}{\sqrt{11}}$  Vectorial  $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{4}{\sqrt{11}} \langle 1, 1, 3 \rangle$



# Capítulo 5

RB\_2020-01-21\_13\_21\_32

## 12.4 Productos Cruz.

Determinantes Matriz (Arreglo rectangular de números)  
Cuadrada (mismo # de filas y columnas)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad \text{Jet orden 2. Matrix } 2 \times 2$$

$$\text{P.e. } \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-1)(4) = 6 + 4 = 10$$

Determinante de orden 3: Matriz  $3 \times 3$   
suma de tres determinantes de orden 2.

$$\left| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \right| = a_1 \left| \begin{array}{cc} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{array} \right| - a_2 \left| \begin{array}{cc} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{array} \right| + a_3 \left| \begin{array}{cc} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{array} \right|$$

$3 \times 3$       3 matrices     $2 \times 2$ .

$$\begin{aligned}
 \text{p.e} \quad & \left| \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right| = 2 \left| \begin{array}{cc} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{array} \right| - 0 \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{array} \right| + 2 \left| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{array} \right| \\
 & = 2(6 - 0) - 0 + 2(-1 - 3) \\
 & = 12 - 8 = 4.
 \end{aligned}$$

## El Producto Cruz.

Dados dos vectores  $\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$  &  $\vec{b} = b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}$

¿Cómo se encuentra un vector  $\vec{c}$  que es perpendicular a  $\vec{a}$  y a  $\vec{b}$ ?

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \quad \vec{c} \cdot \vec{b} = 0.$$

Resuelva para  $c_1, c_2, c_3$

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0$$

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 = 0$$

El producto cruz  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  es un vector perpendicular a ambos vectores  $\vec{a}$  &  $\vec{b}$ .

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \hat{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \hat{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Observaciones:

- El producto cruz es un vector, mientras que el producto es un número o escalar.
  - El producto <sup>cruz</sup> no es commutativo  $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$
- $$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(b_2 a_3 - a_2 b_3) + \hat{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \hat{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 15\hat{i} - 10\hat{j} - 3\hat{k}$$

II. verifique  $\vec{a} \times \vec{b}$  es ortogonal a  $\vec{a}$  &  $\vec{b}$ .

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 1, 3, 0 \rangle = 30 - 30 + 0 = 0.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 1, 0, 5 \rangle = 15 + 0 - 15 = 0.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp a, b.$$

$3 \times 2$ .

claracion: 2-D  $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$  no es posible evaluarlo,  
Existe en 3-D. porque la matriz

$$4-0 \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \vec{l} \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

no es cuadrada  
jD ES POSIBLE  
evaluarlo.

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 15\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}$$

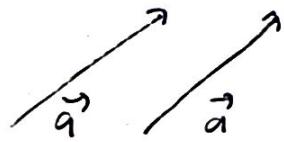
En general  $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

Ejercicio 1: Encuentre el producto cruz entre  
 $\vec{a} = \langle 1, 1, -1 \rangle$  &  $\vec{b} = \langle 2, -2, 3 \rangle$ .

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}(3 - 2) - \hat{j}|1 - 1| + \hat{k}(-2 - 2)$$

$$= \boxed{\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}$$



Ejercicio 2: Encuentre  $\vec{a} \times \vec{a}$ .

$\vec{a}$  es paralelo a si mismo  $\vec{a} \times K\vec{a}$ .

$$\vec{a} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(a_1 a_2 - a_1 a_2) - \hat{j}(0) + \hat{k}(0).$$

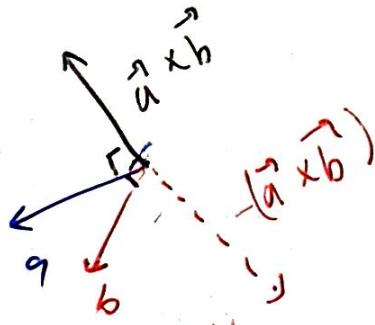
$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

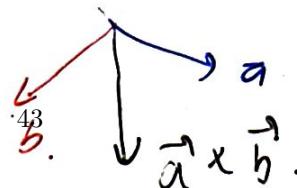
Dos vectores en  $V_3$  (conjunto de vectores 3-D)

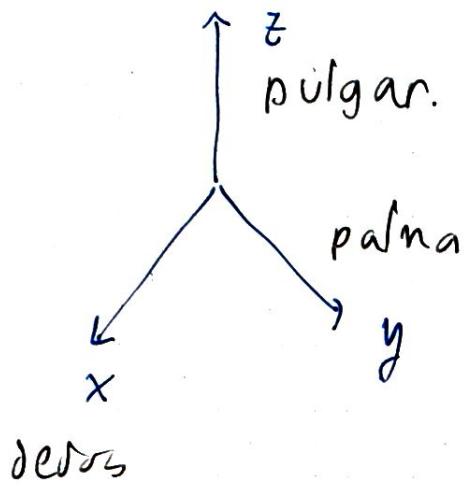
son paralelos si y sólo si  $\vec{a} \times K\vec{a} = \vec{0}$   
 vector cero.

Interpretación Geométrica.

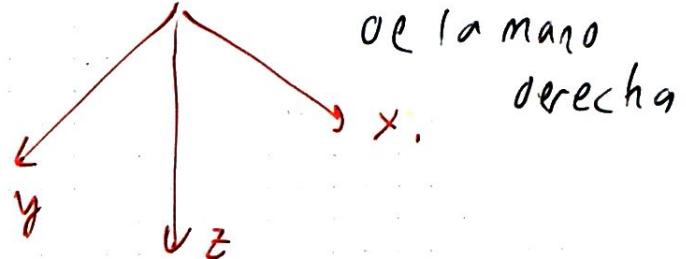


Convenção Mano  
Derecha.





: vector ortogonal a ambas que apunta siguiendo la convención de la mano derecha



Propiedad: Dadas  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$  y el ángulo entre estos dos vectores  $\theta$ .

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta. \checkmark$$

En el producto punto  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ .

Para encontrar el ángulo entre dos vectores, es recomendable utilizar el producto punto.

$$\text{Si } \sin \theta = 0 \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0. \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0$$

vectores paralelos.

$$\xrightarrow{\hspace{1cm}} \\ \theta = 0.$$

$$\sin \theta = 0 \\ \theta = 0.$$

Dos vectores 3-D son paralelos, a ll b, si y sólo

$$\text{si } \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \text{ vector cero.}$$

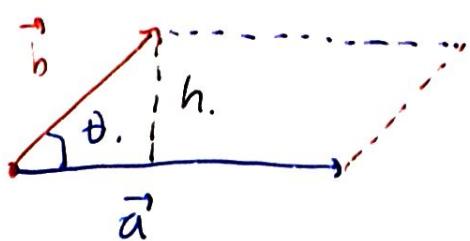
**Recomendable:** inspeccione si  $\vec{b} = K \vec{a}$   
no importa la dimensión del vector.

$$\text{Propiedades} \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Se puede utilizar para áreas de "rectángulos inclinados" y cubos "inclinados."



Paralelogramo.

$$\text{Área} = b h.$$

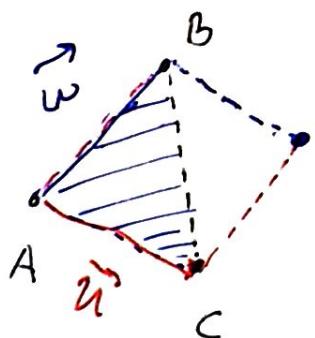
$$\text{base} = |\vec{a}|.$$

$$\text{altura } h = |\vec{b}| \sin \theta$$

$$\text{Área: } A = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta. = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

del Paralelogramo

Ejercicio 3: ¿Cuál es el área del triángulo con vértices en  $A(1,0,1)$ ,  $B(-2,1,3)$  y  $C(1,2,1)$ ?



Área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo

$$A_T = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{w}|$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} = \langle 0, 2, 0 \rangle.$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \langle -3, 1, 2 \rangle.$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(4) - \hat{j}0 + \hat{k}(6) = 4\hat{i} + 6\hat{k}$$

## Producto Triple Escalar.

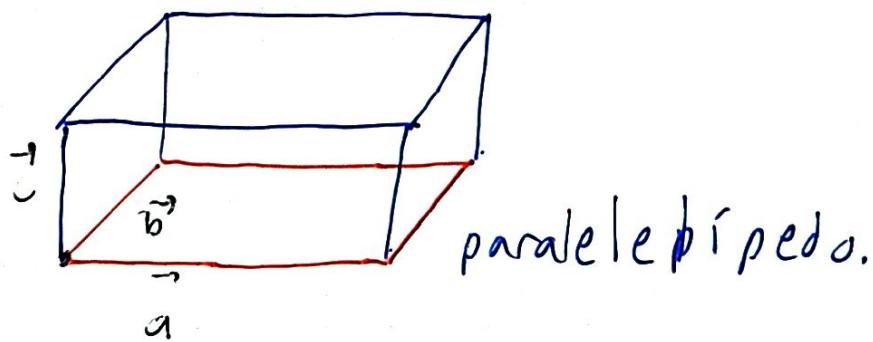
Combina el producto punto y el producto cruz.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

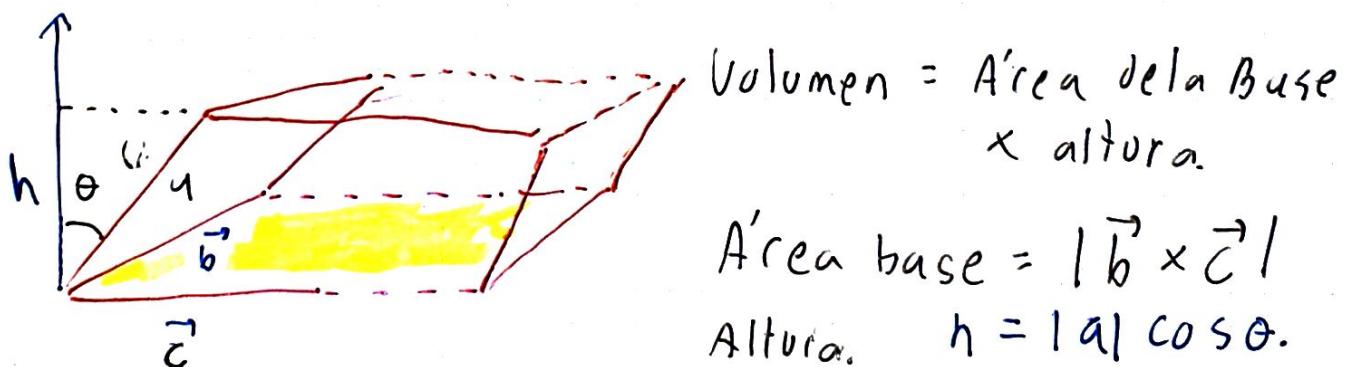
$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ .

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \quad //$$

Volumen de un cubo inclinado Paralelepípedo.

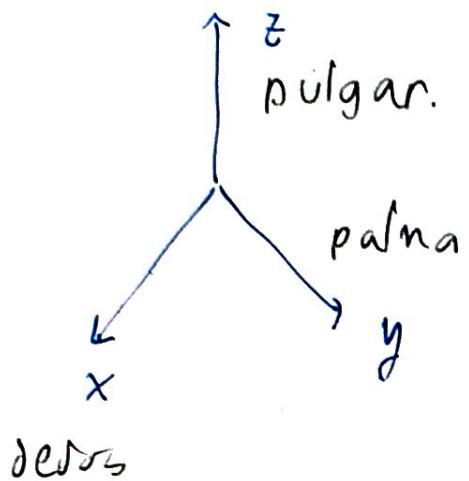


$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

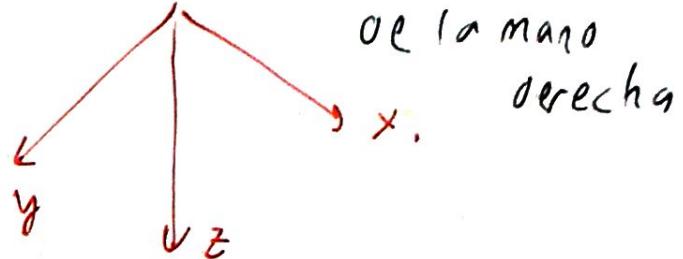


$$\text{Volumen } V = A h. = |\vec{a}| |\vec{b} \times \vec{c}| / \cos \theta.$$

$$U = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$



: vector ortogonal a ambas que apunta siguiendo la convención de la mano derecha



Propiedad: Dadas  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$  y el ángulo entre estos dos vectores  $\theta$ .

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta. \checkmark$$

En el producto punto  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ .

Para encontrar el ángulo entre dos vectores, es recomendable utilizar el producto punto.

$$\text{Si } \sin \theta = 0 \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0. \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0$$

vectores Paralelos.  
 $\theta = 0.$

$$\sin \theta = 0 \\ \theta = 0.$$

Dos vectores 3-D son paralelos, al  $\vec{b}$ , si y sólo si  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$  vector cero.

Recomendable. inspeccione si  $\vec{b} = K \vec{a}$   
 no importa la dimensión del vector.



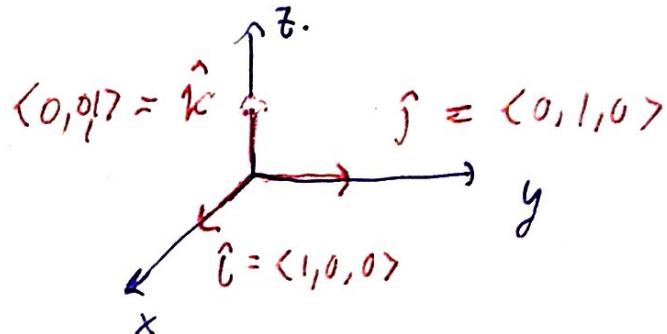
# Capítulo 6

RB\_2020-01-23\_19\_42\_58

Ángulo entre un vector  $\vec{a}$  y un eje

se utiliza la fórmula del producto punto.

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$



Ángulo entre  $\vec{a}$  y el eje y.

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \hat{j}}{|\vec{a}| |\hat{j}|} = \frac{\langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle 0, 1, 0 \rangle}{|\vec{a}|} = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

Ángulos entre el vector y cada eje.

Eje - x:  $\theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{a_1}{|\vec{a}|}\right)$  Eje - y:  $\cos \theta_y = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$

Eje - z:  $\cos \theta_z = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$

Estos ángulos se conocen como seno directores.

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

$$\vec{a} = |\vec{a}| \langle \cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z \rangle$$

Vectores paralelos o perpendiculares en  $n$ -dimensiones.

Dos vectores  $\vec{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$   
 $\vec{b} = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ .

-1

Son paralelos: si  $\vec{a} = K\vec{b}$   $K$  escalar 0.2

1

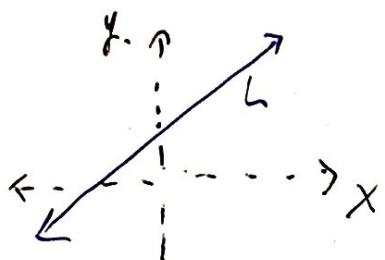
perpendiculares: si  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

ángulo

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

## 12.5 Rectas (p. 39)

En 2-D.



1. m pendiente

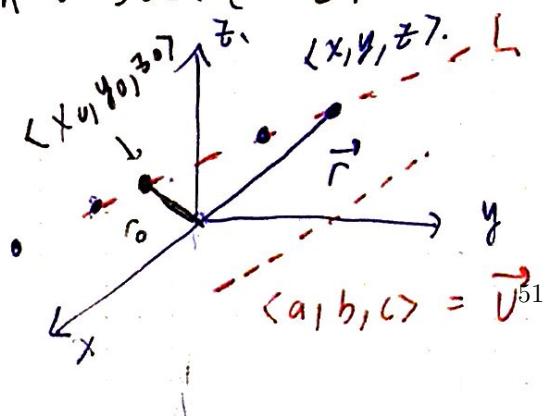
2.  $(x_0, y_0)$  punto sobre L

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

En 3-D, para encontrar una recta en el espacio se necesita conocer

1. m "pendiente", dirección de la recta vector  $\langle a, b, c \rangle$ .

2. punto sobre L.  $(x_0, y_0, z_0)$ .



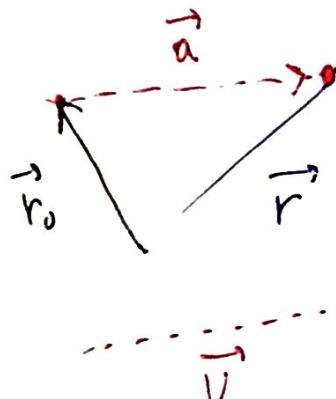
los puntos sobre L.

Vector punto sobre  $L$   $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle = \vec{r}_0$

Vector cualquier punto sobre  $L$   $\langle x, y, z \rangle = \vec{r}$

Vector dirección

$$\langle a, b, c \rangle = \vec{v}$$



$\vec{a}$  y  $\vec{v}$  son paralelos.

$$\vec{a} = k \vec{v} = \underline{t} \vec{v}$$

Variable parámetro  $t$ .

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} = \boxed{\vec{r}_0 + t \vec{v}} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ec. Vectorial Recta: punto  $\vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$

y dirección  $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ .

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}}$$

parámetro  $t$ .

Ec. componente por componente.

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t \langle a, b, c \rangle.$$

Ec. Paramétrica de la Recta.

$$\boxed{x = x_0 + at. \\ y = y_0 + bt. \\ z = z_0 + ct.}$$

$t \in \mathbb{R}$ .

Punto V.

Posición inicial  $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ .

Velocidad constante  $\langle a, b, c \rangle$ .

$$x = x_0 + v_{ox} t$$

$$y = y_0 + v_{oy} t$$

$$z = z_0 + v_{oz} t$$

Ejercicio 1: Encuentre la ec. vectorial y las paramétricas para la recta que pasa por el punto dado y es paralela al vector dado. (p 30.)

a. P(3,4,-2)     $\vec{v} = \langle -8, 2, 5 \rangle.$      $\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}.$

Vector Posición:  $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP} = \langle 3, 4, -2 \rangle.$

Vector Dirección:  $\vec{v} = \langle -8, 2, 5 \rangle.$

Ec. Vectorial:  $\boxed{\vec{r} = \langle 3, 4, -2 \rangle + t \langle -8, 2, 5 \rangle.}$

Ecs. Paramétricas:  $x = 3 - 8t$   
 $y = 4 + 2t$      $t \in \mathbb{R}.$   
 $z = -2 + 5t.$

Observaciones:  $\vec{r}(1) = \langle -5, 6, 3 \rangle$

$\vec{r}(10) = \langle -77, 24, -48 \rangle.$

Ec. Vectorial para  $\ell:$   $\boxed{\vec{r} = \langle -5, 6, 3 \rangle + t \langle -8, 2, 5 \rangle.}$

vector de dirección  $v$  es paralelo a varios vectores

$\vec{w} = k \vec{v}$  puede ser también vector dirección.

$\vec{v}_1 = \langle 8, -2, -5 \rangle$      $\vec{v}_2 = \langle -8\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 5\sqrt{3} \rangle.$

$\boxed{\vec{r} = \langle -77, 24, -48 \rangle + t \vec{v}_2.}$  La misma recta.

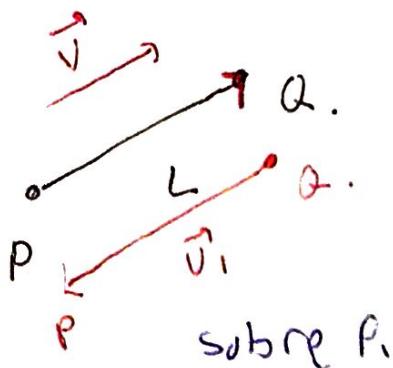
La ec. vectorial de una recta no es única. ✓

Ejercicio 2: Encuentre la ec. vectorial de la recta que pasa por los puntos dados.

a.  $P(3, -2, 4)$  y  $Q(5, 2, -1)$ .

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}$$
  $\vec{r}_0 = \langle 3, -2, 4 \rangle$  ó  $\langle 5, 2, -1 \rangle$

vector de dirección  $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$  ó  $\overrightarrow{QP}$



$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2, 4, -5 \rangle$

Ec. Vectorial  $\vec{r}$   $\vec{r} = \langle 3, -2, 4 \rangle + t \langle 2, 4, -5 \rangle$

2  $\vec{r}_0 = \langle 5, 2, -1 \rangle$   $\vec{v} = \overrightarrow{QP} = \langle -2, -4, 5 \rangle$

$\vec{r} = \langle 5, 2, -1 \rangle + t \langle -2, -4, 5 \rangle$  sobre Q

b.  $P(3, 0, 4)$  y  $Q(3, 4, 2)$

$$\vec{r}_0 = \langle 3, 0, 4 \rangle = \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{v} = \langle 0, 4, -2 \rangle = \overrightarrow{PQ} \quad \vec{v} \neq \vec{PQ}$$

$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v} = \langle 3, 0, 4 \rangle + t \langle 0, 4, -2 \rangle$

c. ¿Qué pasa si hay 3 puntos?

- 
- $P(3,0,4), Q(3,4,2) \quad R(5,3,4)$
  - $R$
  - $P$
  - $Q$
  - No están sobre  $L$ .
  - $\vec{V}_1 = \overrightarrow{PQ} = \langle 0, 4, -2 \rangle$ . no son
  - $\vec{V}_2 = \overrightarrow{PR} = \langle 2, 3, 0 \rangle$  paralelos.

Estos tres puntos No están sobre la misma recta.

$$\underbrace{(0,1)}_{m=1} \quad \underbrace{(1,2)}_{m=2} \quad \underbrace{(2,5)}_{m=2}$$



# Capítulo 7

RB\_2020-01-28\_13\_10\_15

## 12.5 Rectas y Planos

Ecuación de una Recta.

Vector Posición

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0).$$

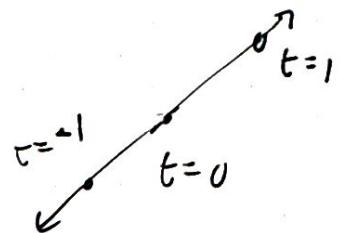
Vector dirección

$$\vec{v} = (a, b, c).$$

Ec. Vectorial

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}}$$

$t$  es el parámetro



Ecs. Paramétricas:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct. \end{aligned}}$$

Resuelva para  $t$  en las tres ecs.

$$\boxed{t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c.}}$$

Ecs. simétricas

$$a, b, c \neq 0.$$

vector dirección  $\vec{v} = (a, 0, c)$ , las ecs. de la recta cambiarán,

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}$$

vectorial

$$x = x_0 + a t$$

$$y = y_0$$

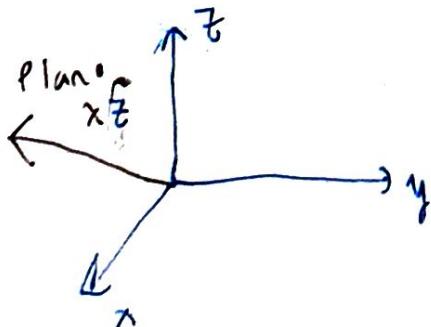
$$z = z_0 + c t.$$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c.}$$

$$y = y_0$$

simétricas

Ecs. Paraleléticas



Ejercicio 3: Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los puntos dados.

Encuentre en qué punto la recta intersecta al plano  $XZ$ .

Pág. 41.

a.  $P(2, 8, -2)$  y  $Q(2, 6, 4)$ .

Vector Posición:  $\overrightarrow{OP} = \vec{r}_0 = \langle 2, 8, -2 \rangle$ .  $\vec{r} = \langle x, y, z \rangle$ .

Vector Dirección.  $\overrightarrow{PQ} = \vec{v} = \langle 0, -2, 6 \rangle$ .

Ec. Vectorial:  $\vec{r} = \langle 2, 8, -2 \rangle + t \langle 0, -2, 6 \rangle$ .

Ecs. simétricas:  $x = 2, \frac{y-8}{-2} = \frac{z+2}{6}$

¿Cuál es la intersección con el plano  $XZ$ ?

$$\text{use } y=0. \quad x=2, \quad \frac{-8}{-2} = \frac{z+2}{6}$$

$$6 \cdot 4 = z+2 \Rightarrow z=22.$$

La intersección con el plano  $XZ$  es el punto  $(2, 0, 22)$ .

b.  $P(4, 6, 10)$  y.  $Q(6, 6, 10)$

$$\vec{r}_0 = \langle 4, 6, 10 \rangle. \quad \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2, 0, 0 \rangle.$$

vectorial:  $\vec{r} = \langle 4, 6, 10 \rangle + t \langle 2, 0, 0 \rangle$ .

paramétricas:  $x = 4+2t$  simétricas.

$$\begin{aligned} y &= 6 \\ z &= 10 \end{aligned} \quad 59 \quad t = \frac{x-4}{2}, y = 6, z = 10.$$

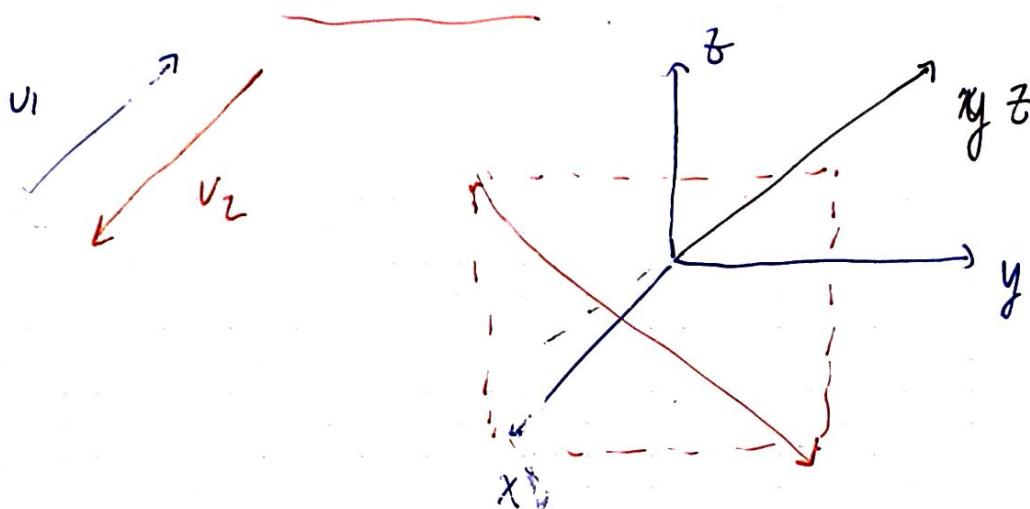
¿Cuál es el punto intersección con el plano  $xz$ ?

Use  $y = 0$ , como cualquier punto sobre esta recta pasa sólo por  $y = 6$ , esta recta no puede intersectar al plano  $xz$ . **NO HAY.**

Rectas Paralelas.

Dos rectas  $\vec{r}_1 = \vec{r}_{o1} + t_1 \vec{v}_1$  y  $\vec{r}_2 = \vec{r}_{o2} + t_2 \vec{v}_2$

son paralelas. si y sólo si sus vectores de dirección  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  son paralelos.



En el espacio hay 3 tipos de rectas.

- Paralelas.
- Intersecan en 1 punto
- Oblicuas (ni son paralelas ni se intersecan).

Ejercicio 4: Determine si los sgs. pares de rectas  
son paralelas, oblicuas o se intersecan.

$$a. \frac{x-2}{8} = \frac{y-3}{24} = \frac{z-2}{16}, \quad \frac{x-10}{-2} = \frac{y+15}{-6} = \frac{z+24}{-4}$$

$$U_1 = \langle 8, 24, 16 \rangle \quad U_2 = \langle -2, -6, -4 \rangle.$$

$$x = 2 + 8t, \quad y = 3 + 24t, \quad z = 2 + 16t.$$

$U_1 = -4U_2$ .  $U_1$  y  $U_2$  son paralelos.

Las dos rectas son paralelas.

$$b. L_1: x = 5 - 4t, \quad y = 6 - 2t, \quad z = 2 + 0t \quad t \in \mathbb{R}$$

$$L_2: x = 3 + 8s, \quad y = -2s, \quad z = 8 + 2s. \quad s \in \mathbb{R}$$

Utilice una variable parámetro para cada recta

$$U_1 = \langle -4, -2, 0 \rangle, \quad U_2 = \langle 8, -2, 2 \rangle. \quad \text{No son paralelas.}$$

Analice si las rectas se intersecan.

$$\begin{aligned} x &= x & 5 - 4t &= 3 + 8s. & (1) & \Rightarrow & 2 &= 4t + 8s \\ y &= y & 6 - 2t &= -2s. & (2) & & 6 &= 2t + 2s \\ z &= z. & \boxed{2 = 8 + 2s} & & & \Rightarrow & s &= -3. \end{aligned}$$

3 ecs. y sólo 2 incógnitas  $t$  y  $s$ .

Sustituya  $s = -3$  en las ecs. (1) y (2)

$$\begin{aligned} 5 - 4t &= -22 & \Rightarrow & -4t &= -27 & \Rightarrow & t &= 27/4. \} \\ 6 - 2t &= 6 & \Rightarrow & -2t &= 0 & \Rightarrow & t &= 0 \end{aligned}$$

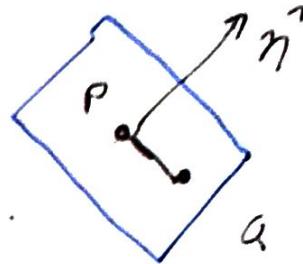
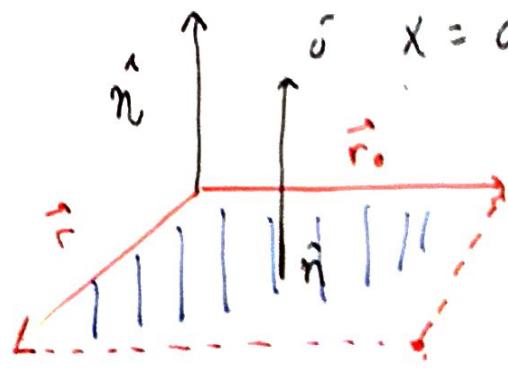
Si no hay una t única (no es posible  $t \neq 27/9$ ), las dos rectas no se intersecan.

$L_1$  y  $L_2$  son oblicuas (ni paralelas ni se intersecan).

$$\begin{array}{l} 4t + 8s = 2 \\ 2t + 2s = 6 \\ 0t + 2s = -6 \end{array} \quad \left[ \begin{array}{cc|c} 4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -6 \end{array} \right] \rightarrow \text{0 o 1 número.}$$

### Ecuación de un Plano.

Previamente en 12.1  $ax + by + cz = d.$  } Ecs de Planos.



Para encontrar la ec. de un plano se necesita:

1. un punto sobre el plano.  $P \quad \vec{r}_0 = \overrightarrow{OP}$

2. un vector normal  $v$  ortogonal al plano  $\hat{n} = \langle a, b, c \rangle.$

Derivación de la ec. Plano.

~ sombrero, hat.

$P(x_0, y_0, z_0)$        $Q(x_1, y_1, z_1)$       son dos puntos sobre el plano.

$$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle \quad \vec{r} = \overrightarrow{OQ} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle.$$

El vector  $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0$  está sobre el plano, por lo que tiene que ser ortogonal a  $\hat{\vec{n}}$ .

$$\hat{\vec{n}} \perp \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0 \Rightarrow \hat{\vec{n}} \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0) = 0.$$

Ec. Vectorial de un Plano.

Se puede escribir como.

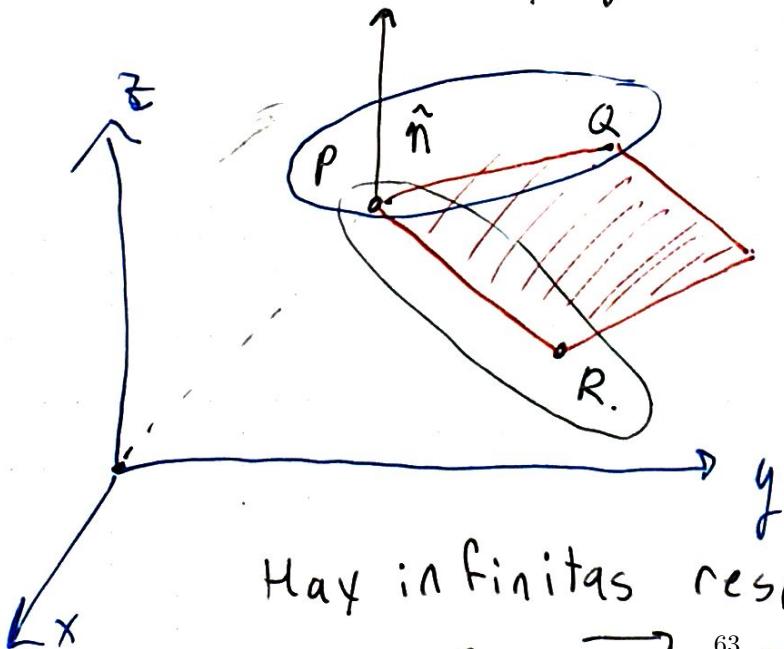
$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0 + z - z_0 \rangle = 0.$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Ec. escalar de un plano.

$$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_d.$$

Para encontrar la ec. de un plano, se necesitan 3 puntos  $P, Q$  y  $R$ .



$$\overrightarrow{r}_0 = \overrightarrow{OP}$$

$$\hat{\vec{n}} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$$

tienen que comenzar en el mismo punto

Hay infinitas respuestas equivalentes

$$\hat{\vec{n}} = \overrightarrow{PR} \times \overset{63}{\overrightarrow{PQ}}$$

Ejercicio 1: PYS. Encuentre la ec. del plano que pasa por los 3 puntos dados.

a. P(3, -1, 3), Q(8, 2, 4) y R(1, 2, 5)

$$\text{Ec. plano } \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\text{Ec. Recta } \vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}$$

$$\vec{r}_0 = \langle 8, 2, 4 \rangle.$$

Encuentre dos vectores que estén sobre el plano y que comiencen en el mismo punto.

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle 5, 3, 1 \rangle \quad \vec{v} = \overrightarrow{PR} = \langle -2, 3, 2 \rangle.$$

ii  $\hat{n}$  es ortogonal a ambos vectores !!

$$\boxed{\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \underline{3\hat{i} - 12\hat{j} + 21\hat{k}}$$

$$\text{Ec. Plano: } \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\text{Vectorial: } \langle 3, -12, 21 \rangle \cdot \langle x-8, y-2, z-4 \rangle = 0.$$

$$\text{Escalar. } 3(x-8) - 12(y-2) + 21(z-4) = 0.$$

# Capítulo 8

RB\_2020-01-28\_13\_17\_10

b.  $P(0,0,0)$ ,  $Q(1,0,2)$  y  $R(0,2,3)$

Vector Posición:  $\vec{r}_0 = \langle 0,0,0 \rangle$ .

2 vectores sobre el plano.  $\overrightarrow{PQ} = \langle 1,0,2 \rangle$ .  
 $\overrightarrow{PR} = \langle 0,2,3 \rangle$ .

Vector Normal:  $\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$

$$\hat{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

Ec. Plano.  $-4x - 3y + 2z = 0$ .

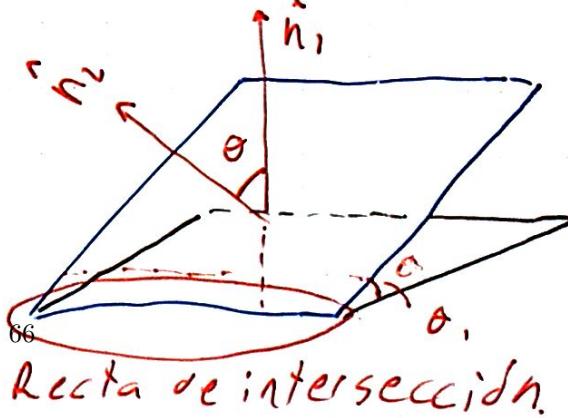
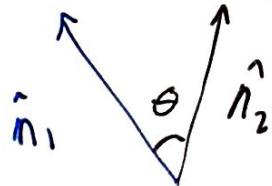
Rectas paralelas  $v_1$  y  $v_2$  son paralelos.

Dos planos  $\hat{n}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$  y  $\hat{n}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = 0$ .

Son paralelos si y sólo si  $\hat{n}_1$  y  $\hat{n}_2$  son paralelos.

En caso que no sean paralelos, se puede encontrar el ángulo de intersección entre dos planos.

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1| |\hat{n}_2|} \right)$$



# Capítulo9

RB\_2020-01-30\_11\_31\_17

Rectas y planos.

$$\vec{V} = \overrightarrow{PQ}$$

Ecs. Rectas:  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

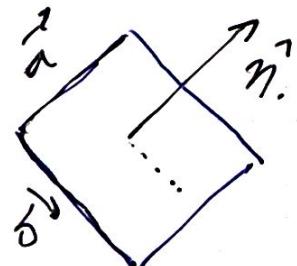
si  $a \neq b \neq c \neq 0$   $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

$$\boxed{\begin{aligned}x &= x_0 + at \\y &= y_0 + bt \\z &= z_0 + ct\end{aligned}}$$

Ec. Plano:  $\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$\hat{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

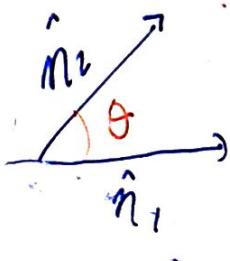


Ejercicio 2: Considere los planos  $x+y=0$  &  $x+2y+z=1$ .

a. Determine si los planos son paralelos. Si no lo son encuentre el ángulo de intersección entre ellos.

$\hat{n}_1 = \langle 1, 1, 0 \rangle$ . no son paralelos  $\hat{n}_1$  y  $\hat{n}_2$

$\hat{n}_2 = \langle 1, 2, 1 \rangle$ . los dos planos NO SON PARALELOS.



$$\cos \theta = \frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1| |\hat{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{2} \sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{12}}$$

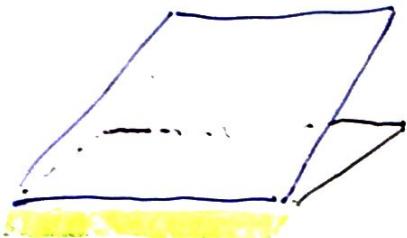
$$\boxed{\cos \theta} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \theta = \frac{\pi}{6} \text{ ó } 30^\circ$$

$$0 \quad \pi/6 \quad \pi/4 \quad \pi/3 \quad \pi/2$$

$$\cos \theta \quad 1 \quad \sqrt{3}/2 \quad \sqrt{2}/2 \quad 1/2 \quad 0$$

$$\sin \theta \quad 0 \quad 1/2 \quad \sqrt{2}/2 \quad \sqrt{3}/2 \quad 1$$

O. Encuentre la ec. de la recta que interseca a ambos planos.  $x+y=0$  +  $x+2y+z=1$ .



$$r = \vec{r}_0 + t \vec{v}$$

Dos puntos sobre la recta,

como la recta está en ambos planos, se debe resolver el sig. sistema.

$$x+y=0 \Rightarrow x=-y.$$

$$x+2y+z=1 \Rightarrow y=1-z.$$

$z$  tiene cualquier valor.

1er punto  $z=0$ :

$$(-1, 1, 0) \quad \begin{cases} y=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

2do punto  $z=1$

$$(0, 0, 1) \quad \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$$

Encuentre la ec. de la recta que pasa por  $P(-1, 1, 0)$

$$y \quad \underbrace{Q(0, 0, 1)}_{\vec{r}_0}$$

$$\vec{r}_0 = \langle 0, 0, 1 \rangle. \quad \vec{v} = \overrightarrow{QP} = \langle -1, 1, -1 \rangle.$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{QP} = \langle -1, 1, -1 \rangle.$$

Ec. Paramétrica  
de la recta.

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 0 - t \\ y = 0 + t \\ z = 1 - t. \end{array}}$$

II. Solución.  $x = -y$ .      más incógnitas  
 $y = 1 - z$       que ecuaciones.

$x, y$  ó  $z$  pueden tener cualquier valor.  $\boxed{z = t}$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 1 - t \\ z &= t \end{aligned}}$$

$$U_L = \langle 1, -1, 1 \rangle \quad \vec{r}_0 = \langle -1, 1, 0 \rangle$$

### III. Solución Geométrica.

por ejemplo.

1. Encuentre un punto en ambos planos  $(0, 0, 1)$

La recta está en el plano  $l$ , entonces la recta es perpendicular al vector normal del plano  $l$ .

Está en el plano  $z$ , entonces también es perpendicular al segundo vector normal.

∴ La recta es perpendicular a ambos  $\hat{n}_1$  y  $\hat{n}_2$ .

$$\vec{J} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\text{Ec. Recta } r = \langle 0, 0, 1 \rangle + t \langle 1, -1, 1 \rangle.$$

Ejercicio 3: Encuentre el punto en el que la línea recta  $x=1+2t$ ,  $y=4t$ ,  $z=5t$  intersecta al plano  $x-y+2z=17$ .

Plano.

$$x = 1 + 2t$$

$$y = 4t$$

$$z = 5t$$

Recta

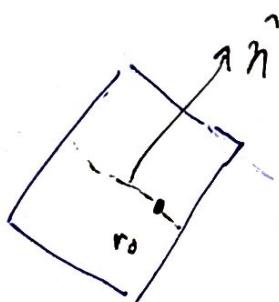
$$x - y + 2z = 17.$$

$$1 + 2t - 4t + 10t = 17.$$

$$8t = 16 \Rightarrow t = 2$$

El Pto. de Intersección es  $(5, 8, 10)$ .

Ejercicio 4: Encuentre una ec. del plano que contiene, a la recta  $x=1+t$ ,  $y=2-t$ ,  $z=4-3t$  y es paralela al plano  $5x+2y+z=1$ .



Qualquier punto sobre la recta también está sobre el plano.

$$t=0: x=1, y=2, z=4 \quad \vec{r}_0 = \langle 1, 2, 4 \rangle.$$

¿Cómo se encuentra  $\vec{n}$ ?

El vector de dirección de la recta  $v = \langle 1, -1, -3 \rangle$  es paralelo al plano.

Como es paralelo al segundo plano, entonces tiene que ser perpendicular  $\vec{n} = \langle 5, 2, 17 \rangle$ .

$$\vec{r}_0 = \langle 1, 2, 4 \rangle \quad y \quad \vec{n} = \langle 5, 2, 1 \rangle.$$

Ecuación Plana:  $\underline{5(x-1) + 2(y-2) + 1(z-4) = 0.}$

Ejercicio 5: Encuentre los números directores para la recta de intersección entre los planos  $x+y+z=1$  y.

$$x+2y+3z=1.$$

Los números directores  $a, b$  y  $c$  del vector de dirección  $\langle a, b, c \rangle$ .

La recta es ortogonal a ambos vectores normales.

$$\vec{n}_1 = \langle 1, 1, 1 \rangle \quad \text{y} \quad \vec{n}_2 = \langle 1, 2, 3 \rangle \quad \text{de ambos planos.}$$

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}}$$

Números directores:  $a=1, b=-2, c=1$

Ejercicio 6: Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto  $(0, 1, 2)$ , que es paralela al plano  $x+y+z=2$  y perpendicular a la recta.

$$\vec{r} = \langle -2t, 0, 3t \rangle.$$

$$L_1: \underline{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}} \quad \underline{\vec{r}_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle}$$

¿Cómo se encuentra  $v$ ?

Plano 1  $\hat{n} = \langle 1, 1, 1 \rangle$  es perpendicular al plano.

Recta 2:  $\vec{v}_2 = \langle -2, 0, 3 \rangle$  es paralelo a  $L_1$ .

La recta es perpendicular a  $\hat{n}$  y a  $\vec{v}_2$ .

$$v = \hat{n} \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

$\checkmark v = \vec{v}_2 \times \hat{n}$

Ecs. Paramétricas.

$$\begin{aligned} x &= 0 + 3t \\ y &= 1 - 5t \\ z &= 2 + 2t \end{aligned}$$