12.3 Producto Punto

Operaciones entre vectores $\vec{a} + \vec{b}$ (suma)

suma $\vec{a} + \vec{b}$

Mult. por un escalar $k\vec{a}$

Producto punto $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Producto cruz $\vec{a} \times \vec{b}$

Producto punto entre $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

es el número $a \cdot b$. dado por:

$$\boxed{a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.}$$

Para un vector en n dimensiones.

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Para que sea posible $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen que tener la misma dimensión

$\vec{a} = \langle 1, 2, 0, 4 \rangle$ $\quad \vec{b} = \langle 2, 1 \rangle$. faltan 2 componentes.

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ indefinido

Propiedades: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ Conmutativa.

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ Distributiva.

$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$

Ejercicio 1: Calcule el producto punto.

a. $\vec{a} = \langle 6, -2, 3 \rangle$, $\vec{b} = \langle 2, 5, 1 \rangle$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6(2) - 2(5) + 3(1) = 12 - 10 + 3 = 5$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = 12 - 10 + 3 = 5$$

Gracias AA.

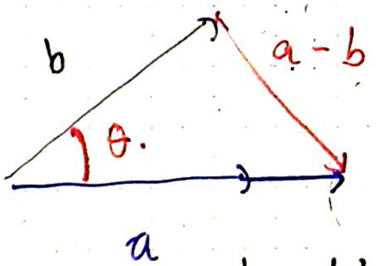
b. $\vec{u} = \underline{\hat{j}} + \underline{2\hat{i}} + \underline{3\hat{k}}$ $\quad \vec{v} = \underline{2\hat{k}} + \underline{4\hat{i}} + \underline{0\hat{j}}$ vectores base

$$\underset{\vec{u}}{\langle 2, 1, 3 \rangle} \cdot \underset{\vec{v}}{\langle 4, 0, 2 \rangle} = 8 + 0 + 6 = 14$$

c. $\vec{w} = \langle 1, 0, -2 \rangle$ $\quad \vec{v} = \langle 2, 0, 1 \rangle$.

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 2 + 0 - 2 = 0 \qquad \boxed{\vec{w} \cdot \vec{v} = 0}$$

Definición Alternativa del Producto.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta.$$

Ley de cosenos.

$$|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b| \cos\theta.$$

a^2 no existe

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

$$\underline{\vec{a} \cdot \vec{a}} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \underline{|\vec{a}|^2}$$

$$|a| = \sqrt{a \cdot a}$$

$$(a-b)\cdot(a-b) = |a|^2 + |b|^2 - 2|\vec{a}||b|\cos\theta.$$

$$a\cdot a - \underbrace{a\cdot b - b\cdot a}_{} + b\cdot b$$

$$\cancel{|a|^2} - 2a\cdot b + \cancel{|b|^2} = \cancel{|a|^2} + \cancel{|b|^2} - 2|a||b|\cos\theta.$$

$$\boxed{a\cdot b = |a||b|\cos\theta.} \qquad |a\times b| = |a||b|\sin\theta.$$

Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, el ángulo θ entre los vectores es

$$\cos\theta = \frac{a\cdot b}{|a|\,|b|} \qquad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{a\cdot b}{|a|\,|b|}\right)$$

Ejercicio 2: Determine el ángulo entre los dos vectores.

a. $\vec{a} = \langle 4,3\rangle \quad \vec{b} = \langle -3,4\rangle.$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = -12+12 = 0 \qquad |a| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$|b| = \sqrt{9+16} = 5$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{0}{25}\right) = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}.$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ y el ángulo es 90° $\quad \vec{a}\perp\vec{b}$ ortogonales

ortogonalidad $\Leftrightarrow$ perpendicularidad.

b. $\vec{a} = \langle 1,-2 \rangle$, $\vec{b} = \langle 3,-1 \rangle$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 5$ $\quad |a| = \sqrt{5}$ $\quad |b| = \sqrt{10}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ó } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi/4$$

c. $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$ $\qquad \overset{\vec{a}}{\langle 1,0,1 \rangle}$ $\quad \overset{\vec{b}}{\langle 1,1,0 \rangle}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1 + 0 + 0 = 1$

$|\vec{a}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $\qquad |\vec{b}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $\qquad \pi/6,\ \pi/4,\ \pi/3$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Vectores perpendiculares ó ortogonales., denotado como $a \perp b$.

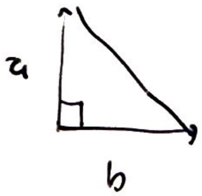
$$\boxed{a \perp b \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0}$$

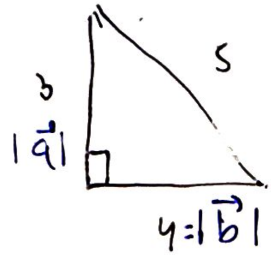
$\vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos\pi/2 = 0$.

Ejercicio 3: Determine si los sigs. son ortogonales entre sí.

$\vec{a} = \langle 4,3,1 \rangle$, $\vec{b} = \langle 2,-2,-2 \rangle$.,

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 8 - 6 - 2 = 0$ $\qquad$ Sí son ortogonales.





$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

El triángulo es rectángulo

$|a|^2 + |b|^2 = |c|^2$

b. $\vec{u} = \langle 1, 8, -2, 4 \rangle$ $\vec{w} = \langle 3, 4, 6, -1 \rangle$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = 3 + 32 - 12 - 4 = 19 \neq 0$

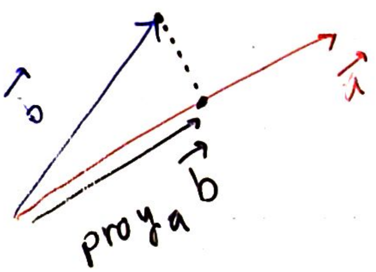
NO SON ORTOGONALES.

c. $\vec{a} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ $\vec{b} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ $\vec{c} = \langle 0, 0, 1 \rangle$

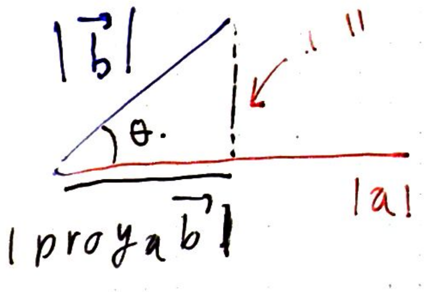
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0.$ 6 sw.

Mutuamente ortogonales.

Proyecciones: cuál vector se proyecta sobre otro vector



El vector $\text{proy}_a(\vec{b})$ es la proyección vectorial de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

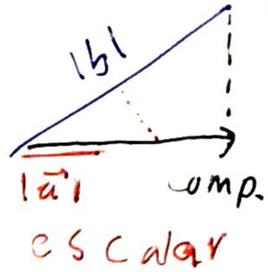


si el ángulo entre a y b es θ.

$$\frac{|\text{proy}_a \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$

proyección escalar: $|\text{proy}_a \vec{b}| = \dfrac{a \cdot b}{|a|}.$

proyección escalar: $\text{comp}_a \vec{b} = \dfrac{a \circ b}{|a|}$



proyección vectorial

tiene la misma dirección que el vector $\vec{a}$.

Utilice el vector $\dfrac{\vec{a}}{|a|}$ para encontrar la dirección de $\vec{a}$

$$\text{proy}_a \vec{b} = \frac{a \circ b}{|a|} \frac{\vec{a}}{|a|} = \left(\frac{a \circ b}{a \circ a}\right) \vec{a} \quad \text{vector}$$

Observaciones: $\text{comp}_b \vec{a} = \dfrac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|b|} \neq \text{comp}_a \vec{b}$

Ejercicio 5: Halle la proyección escalar y la proyección vectorial de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

a. $a = \langle -6, 8 \rangle \quad b = \langle 3, 4 \rangle$.

Proy escalar: $\text{comp}_{\vec{a}} \vec{b} = \dfrac{a \circ b}{|a|} = \dfrac{-18+32}{\sqrt{100}} = \dfrac{14}{10} = \dfrac{7}{5}$.

Proy. vectorial: $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \dfrac{a \circ b}{|a|} \dfrac{\vec{a}}{|a|} = \dfrac{7}{50} \langle -6, 8 \rangle$

b. $\vec{a} = \langle 1, 1, 3 \rangle \quad \vec{b} = \langle -2, 3, 1 \rangle$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2+3+3 = 4 \qquad |a| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$

Escalar $\text{comp}_{\vec{a}} \vec{b} = \dfrac{4}{\sqrt{11}}$ Vectorial $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \dfrac{4}{11} \langle 1, 1, 3 \rangle$