13.1 Funciones Vectoriales.

Una función vectorial:

Dominio: Números Reales   Rango: vectores 3-D.

$\vec{r}: \mathbb{R} \to V_3$ $\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$.

t es un parámetro. $\boxed{\vec{r} = f(t)\,\hat{\imath} + g(t)\,\hat{\jmath} + h(t)\,\hat{k}}$

Ejemplo de una función vectorial

$\vec{r} = \langle a, b, c \rangle + t \langle d, e, f \rangle$.   Recta.

$\vec{r} = \langle a + td, b + et, c + tf \rangle$

Ecs. Paramétricas de una función vectorial $x = f(t)$ $y = g(t)$, $z = h(t)$

Dominio de una función vectorial:

Encuentre el dominio de cada función componente.

El dominio de $\vec{r}$ es la intersección de los dominios de cada función componente.

Ejercicio 1: Encuentre el dominio.

Evite.

$\sqrt{-}$

ln 0 ó ln −

a. $\vec{r}(t) = \langle \sqrt{t^2 - 9}, e^{\sin t}, \ln(t+5) \rangle$

$\sqrt{t^2-9}$ definida. $t^2 \geq 9$ $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

$e^{\sin t}$. $\sin t$ siempre definida. lo mismo $e^{\sin t}$. $(-\infty, \infty)$.

$\ln(t+5)$ definida cuando $t+5>0$ $(-5, \infty)$.

$t > -5$

$(-5, -3] \cup (-3, 3) \cup [3, \infty)$

Dominio de $\vec{r}(t)$ $\boxed{(-5, -3] \cup [3, \infty)}$

$[a, b]$ el número si es parte del dominio

a, b son parte del dominio.

(a, b) los números a y b no son parte del dominio.

b. $\vec{s}(t) = \left\langle \sin^3(t^2), \cosh\left(\frac{t}{t^2+1}\right), \frac{1}{e^t+4} \right\rangle$

$\sin^3(t^2)$ $D_f : \mathbb{R}$.

$\cosh\left(\frac{t}{t^2+1}\right)$ $D_g : \mathbb{R}$.

$\frac{1}{e^t+4}$ $D_h : \mathbb{R}$.

Dominio $\vec{s}(t)$

$(-\infty, \infty)$

$e^t + 4 \neq 0 \Rightarrow e^t = -4 \Rightarrow t = \ln(-4)$ indefinido

Límites y Continuidad

$$\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t) \right\rangle$$

- Evalúe el límite de cada función componente
- Si no existe por lo menos un límite de una función componentes, entonces $\lim_{t\to a} \vec{r}(t)$ no existe.

$f(t)$ está definida en $t=a$.

$$\lim_{t\to a} f(t) = f(a)$$

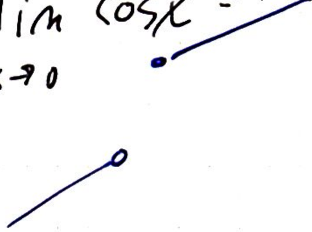
si se indefine y tiene forma $0/0$ ó ∞/∞.

$$\lim_{t\to a} \frac{f(t)}{g(t)} \underbrace{=}_{0/0} \lim_{t\to a} \frac{f'(t)}{g'(t)}$$ L'Hospital.

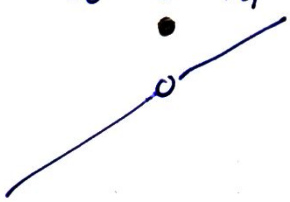
Continua en $t=a$ si $\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$

- Analiza la continuidad en cada función componente.
- Evite AVs, saltos y agujero.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$



(límite existe pero $\vec{r}(a)$ no está definido)



Ejercicio 2: Sea $\vec{r}(t) = \left\langle \frac{\tan \pi t}{t}, e^{t-2}, \frac{\ln(t-1)}{t^2-1} \right\rangle$

a. Analice si la función $\vec{r}(t)$ es continua en $t=2$.

$\vec{r}(2) = \left\langle \frac{\tan 2\pi}{2}, e^0, \frac{\ln 1}{3} \right\rangle = \langle 0, 1, 0 \rangle$

$\lim_{t \to 2} \frac{\tan \pi t}{t} = 0$ $0/2$ $\quad \lim_{t \to 2} e^{t-2} = 1, \quad \lim_{t \to 2} \frac{\ln(t-1)}{t^2-1} = 0.$

$\vec{r}$ si es continua en $t=2$ $\quad \lim_{t \to 2} \vec{r}(t) = \vec{r}(2).$

b. Encuentre $\lim_{t \to 1} \vec{r}(t)$ $\quad$ analice el límite de cada función componente por separado.

f: $\lim_{t \to 1} \frac{\tan \pi t}{t} = \frac{0}{1}$

g: $\lim_{t \to 1} e^{t-2} = e^{-1}$ $\qquad \lim_{t \to 1} \vec{r}(t)$ no existe.

h: $\lim_{t \to 1} \frac{\ln(t-1)}{t^2-1}$ no existe.

$\ln(0)$ no existe.

c. Analice si $\vec{r}(t)$ es continua en $t=1$

$\lim_{t \to 1} \vec{r}(t) = \vec{r}(1)$ $\qquad$ $r(1)$ está indefinido.
límite no existe en $t=1$

NO ES CONTINUA en $t=1$.

5.

d. Agujero $\vec{s}(t) = \left\langle \frac{\tan \pi t}{t-1}, e^{t-2}, \frac{\ln(2t-1)}{t^2-1} \right\rangle$

no es continua en $t=1$ pero su límite existe en $t=1$

$$\lim_{t\to 1} \frac{\tan \pi t}{t-1} \underset{0/0}{\overset{LH}{=}} \lim_{t\to 1} \frac{\pi \sec^2 \pi t}{1} = \frac{\pi}{(\cos \pi)^2} = \pi.$$

$$\lim_{t\to 1} e^{t-2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

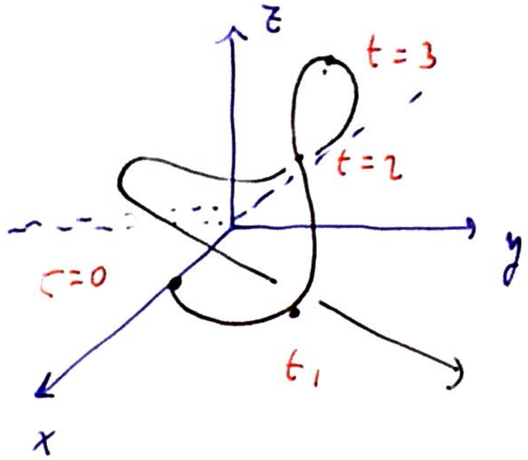
$$\lim_{t\to 1} \frac{\overbrace{\ln(2t-1)}^{\ln 1 = 0}}{t^2-1} \underset{0/0}{=} \lim_{t\to 1} \frac{2/2t-1}{2t}.$$

$$\lim_{t\to 1} \frac{2}{2t(2t-1)} = \frac{1}{1(2-1)} = 1.$$

$$\lim_{t\to 1} \vec{s}(t) = \langle \pi, 1/e, 1 \rangle$$ es un agujero.
$\vec{s}(1)$ está indefinida.

Curvas en el espacio.

$x = f(t)$
$y = g(t)$
$z = h(t)$

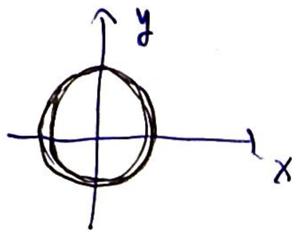


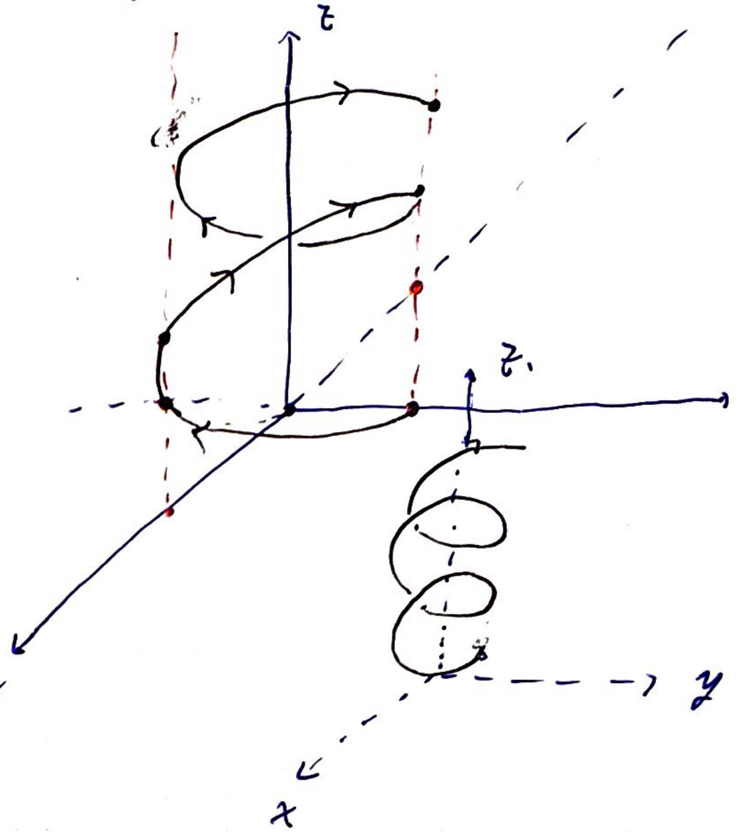
Espirales:

Ejercicio 3: Grafique la curva $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = \underbrace{2\hat{\imath}\sin t}_{x} + \underbrace{2\hat{\jmath}\cos t}_{y} + \underbrace{\hat{k}\,\frac{t}{\pi}}_{z}$$

t	x	y	z
0	0	2	0
$\pi/2$	2	0	0.5
π	0	-2	1
$3\pi/2$	-2	0	1.5
2π	0	2	$2.$





$$x^2 + y^2 = 4$$

Ejercicio 4: Grafique

$$\vec{r}(t) = \langle \sin \pi t,\ t,\ \cos \pi t \rangle.$$

$$x^2 + z^2 = 1$$

$$\vec{r}(0) = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

$$\vec{s}(t) = \langle \sin t, t^2, \cos t \rangle$$