Rectas y planos.

$\vec{v} = \overrightarrow{PQ}.$

Ecs. Rectas: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

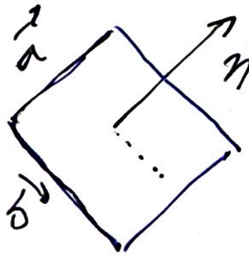
$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + a\,t \\ y &= y_0 + b\,t \\ z &= z_0 + c\,t \end{aligned}}$$

si $a \neq b \neq c \neq 0$ $\quad \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$

Ec. Plano: $\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\hat{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

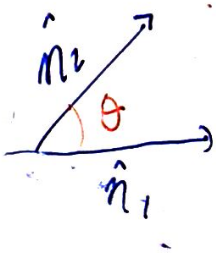


Ejercicio 2: Considere los planos $x + y = 0$ & $x + 2y + z = 1.$

a. Determine si los planos son paralelos. Si no lo son encuentre el ángulo de intersección entre ellos.

$\hat{n}_1 = \langle 1, 1, 0 \rangle.$ no son paralelos $\hat{n}_1$ y $\hat{n}_2$

$\hat{n}_2 = \langle 1, 2, 1 \rangle.$ los dos planos NO SON PARALELOS.

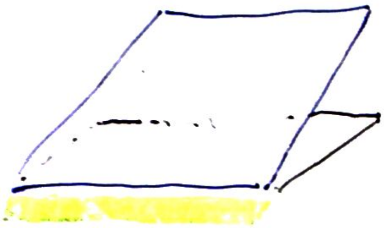


$$\cos\theta = \frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1||\hat{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{12}}$$

$$\boxed{\cos\theta} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2.}} \qquad \theta = \frac{\pi}{6} \text{ ó } 30°.$$

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2.$
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\operatorname{sen}\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

0. Encuentre la ec. de la recta que interseca a ambos planos. $x+y=0$ y $x+2y+z=1$.



$r = \vec{r}_0 + t\underline{\underline{\vec{v}}}$.

Dos puntos sobre la recta,

Como la recta está en ambos planos, se debe resolver el sig. sistema.

$$x + y = 0 \Rightarrow x = -y.$$
$$x + 2y + z = 1 \Rightarrow y = 1 - z.$$

z tiene cualquier valor.

1er punto $z=0$:
$y=1$
$x=-1$
$(-1,1,0)$

2do punto $z=1$
$y=0$
$x=0$
$(0,0,1)$

Encuentre la ec. de la recta que pasa por $P(-1,1,0)$ y $\underbrace{Q(0,0,1)}_{r_0}$

$r_0 = \langle 0,0,1\rangle$. ó $r_0 = \langle -1,1,0\rangle$.

$\vec{v} = \overrightarrow{QP} = \langle -1,1,-1\rangle$.

Ec. Paramétrica de la recta.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 0 - t \\ y &= 0 + t \\ z &= 1 - t. \end{aligned}}$$

ii. Solución. $x = -y$.

$y = 1 - z$

más incógnitas que ecuaciones.

x, y ó z pueden tener cualquier valor. $\boxed{z = t.}$

$$x = -1 + t.$$
$$y = 1 - t$$
$$z = t$$

$v_2 = \langle 1, -1, 1 \rangle$ $\quad \vec{r}_0 = \langle -1, 1, 0 \rangle$

iii. Solución Geométrica.

1. Encuentre un punto en ambos planos por ejemplo. $(0,0,1)$

La recta está en el plano 1, entonces la recta es perpendicular al vector normal del plano 1.

Está en el plano 2, entonces también es perpendicular al segundo vector normal.

$\therefore$ La recta es perpendicular a ambos $\hat{n}_1$ y $\hat{n}_2$.

$$\vec{v} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

Ec. Recta $r = \langle 0,0,1 \rangle + t \langle 1, -1, 1 \rangle$.

Ejercicio 3: Encuentre el punto en el que la línea recta $x=1+2t$, $y=4t$, $z=5t$ intersecta al plano $x-y+2z=17$.

Plano.

$x = 1+2t$

$y = 4t$

$z = 5t$

Recta

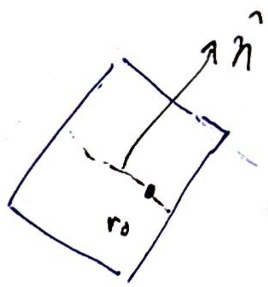
$x - y + 2z = 17.$

$1+2t - 4t + 10t = 17.$

$8t = 16 \Rightarrow t = 2$

El Pto. de Intersección es $(5, 8, 10)$.

Ejercicio 4: Encuentre una ec. del plano que contiene a la recta $x = 1+t$, $y = 2-t$, $z = 4-3t$ y es paralela al plano $5x+2y+z=1$.



cualquier punto sobre la recta también está sobre el plano.

$t=0$: $x=1$, $y=2$, $z=4$ $\vec{r}_0 = \langle 1, 2, 4 \rangle$.

¿Cómo se encuentra $\hat{n}$?

El vector de dirección de la recta $v = \langle 1, -1, -3 \rangle$ es paralelo al plano.

Como es paralelo al segundo plano, entonces tiene que ser perpendicular $\hat{n}_2 = \langle 5, 2, 1 \rangle$.

$\vec{r_0} = \langle 1,2,4 \rangle$ y $\hat{n} = \langle 5,2,1 \rangle$.

Ec. plano. $\boxed{5(x-1) + 2(y-2) + 1(z-4) = 0.}$

Ejercicio 5: Encuentre los números directores para la recta de intersección entre los planos $x+y+z=1$ y $x+2y+3z=1$.

Los números directores a, b y c del vector de dirección $\langle a,b,c \rangle$.

La recta es ortogonal a ambos vectores normales $\hat{n}_1 = \langle 1,1,1 \rangle$ y $\hat{n}_2 = \langle 1,2,3 \rangle$ de ambos planos.

$$\vec{v} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\underline{\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}}}$$

Números directores: $a=1$, $b=-2$, $c=1$

Ejercicio 6: Encuentre las ecs. paramétricas de la recta que pasa por el punto $(0,1,2)$, que es paralela al plano $x+y+z=2$ y perpendicular a la recta $r = \langle -2t, 0, 3t \rangle$.

L_1: $\underline{r = \vec{r_0} + t\vec{v}}$ $\qquad$ $\underline{r_0} = \langle 0,1,2 \rangle$

¿Cómo se encuentra v?

Plano 1 $\hat{n} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ es perpendicular al plano. es paralelo a L_1.

Recta 2: $\hat{\vec{v}}_2 = \langle -2, 0, 3 \rangle$ es perpendicular a L_1.

La recta es perpendicular a $\hat{n}$ y a $\vec{v}_2$.

$$v = \hat{n} \times \hat{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

$r_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle$.

✓ $v = \hat{v}_2 \times \hat{n}$

Ecs. Paramétricas.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 0 + 3t \\ y &= 1 - 5t \\ z &= 2 + 2t. \end{aligned}}$$