Material de apoyo - Cálculo Multivariable

David Gabriel Corzo Mcmath

2020-01-06

Índice general

Parte I

Laboratorios

Capítulo1

Laboratorio #01

Laboratorio #1 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 16 de enero

Nombre:____ **Carnet:** ________________

Tema:	1	2	3	4	5	6	7	Total
Puntos:	20	20	20	20	10	10	10	110
Nota:								

Resuelva las siguientes ejercicios:

1. (20 pts.) Determine la distancia del punto $(4, -2, 6)$ al eje x

2. (20 pts.) Halle la ecuación de la esfera con centro $(-3, 2, 5)$ y radio 4.
   ¿Cuál es la intersección de esta esfera con el plano yz?

3. (20 pts.) Encuentre el radio y centro de la esfera cuya ecuación es $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15$.

4. (20 pts.) Halle la longitud de los lados del triángulo $P(3, -2, -3), Q(7, 0, 1), R(1, 2, 1)$.
   ¿Es un triángulo isósceles? ¿Es un triángulo rectángulo? Utilice el Teorema de Pitágoras.

5. (10 pts.) Describa y bosqueje la superficie en R^3 representada por la ecuación $x + y = 2$.

6. (10 pts.) Describa y bosqueje la superficie en R^3 representada por la ecuación $2z = 8 - 4x$.

7. (10 pts.) **BONO:**
   Encuentre la ecuación de la esfera con centro $(2, -3, 6)$ que toca el plano x.

Capítulo2

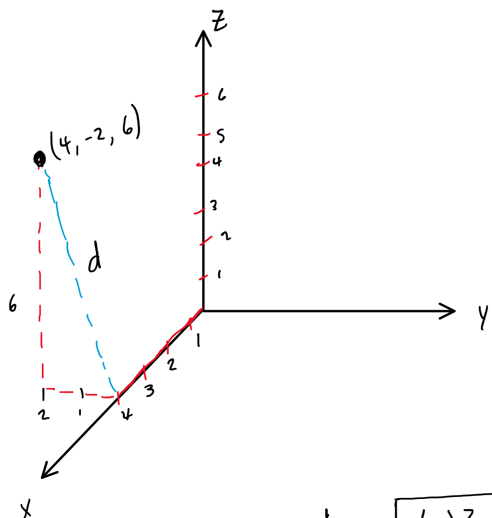
Laboratorio #01

LABORATORIO #01

Wednesday, January 15, 2020
13:03

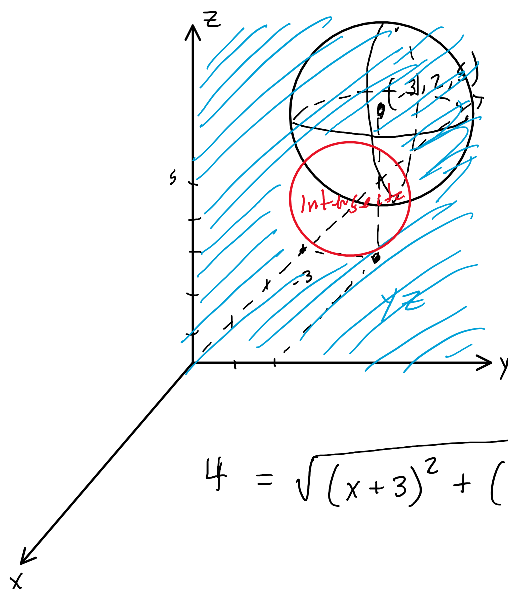
DAVID CORZO 20190432

1) Punto $(4, -2, 6)$ al eje x:



$$d = \sqrt{(6)^2 + (2)^2}$$
$$d = \sqrt{36 + 4}$$
$$d = \sqrt{40}$$

2) Ecuación de la esfera con centro $(-3, 2, 5)$ & radio 4. Intersección de la esfera con el plano yz.



$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2$$

$$= \sqrt{(x-(-3))^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}$$

$$= \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}$$

...

$$4 = \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}$$

Se asume $x = 0$

$$(4)^2 = \left(\sqrt{(0+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}\right)^2$$

$$16 = 9 + (y-2)^2 + (z-5)^2$$

$$16 - 9 = (y-2)^2 + (z-5)^2$$

$$7 = (y-2)^2 + (z-5)^2$$

Queda la ecuación de un círculo correspondiente a el círculo que deja la esfera en el plano yz.

3) Encuentre el radio y centro de la esfera cuya ec. es $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15$.

$x: \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$

$y: \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4$

$z: \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$

$$\left[x^2 - 2x + 1\right] + \left[y^2 - 4y + 4\right] + \left[z^2 + 8z + 16\right] = 21 + 15$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 36$$

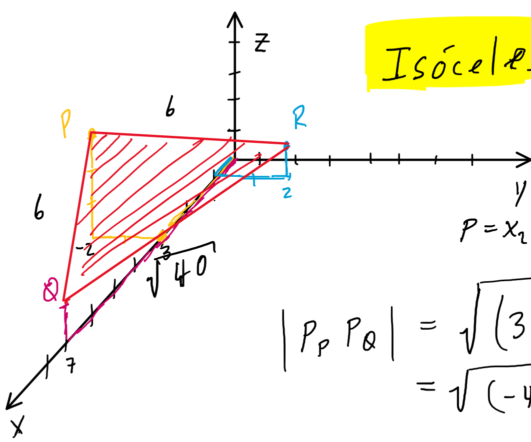
$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2} = 6$$

radio: 6

centro: $(1, 2, -4)$

4) Longitud de los lados del triángulo $P(3,-2,-3)$, $Q(7,0,1)$, $R(1,2,1)$. ¿Isósceles, triángulo rectángulo?

$$|P_A \& P_B| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Isósceles

$P = x_2 \quad Q = x_1$

$$|P_P P_Q| = \sqrt{(3-7)^2 + (-2-0)^2 + (-3-1)^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 4 + 16}$$
$$= \sqrt{36} = 6$$

$Q = x_2 \quad R = x_1$

$$|P_Q P_R| = \sqrt{(7-1)^2 + (0-2)^2 + (1-1)^2}$$
$$= \sqrt{(6)^2 + (-2)^2 + (0)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$$

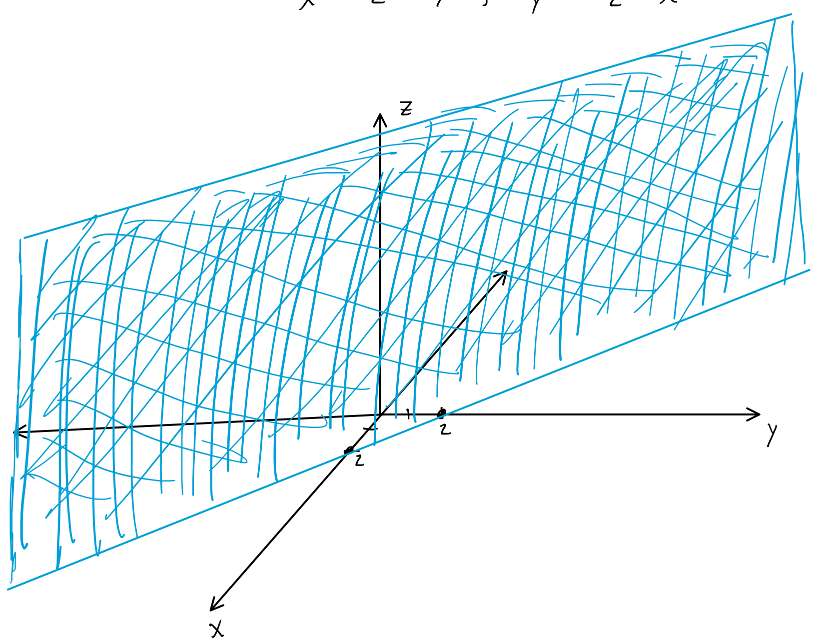
$R = x^2 \quad P = x_1$

$$|P_R P_P| = \sqrt{(1-3)^2 + (2+2)^2 + (1+3)^2}$$
$$= \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (4)^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

5) Describa & bosqueje la superficie en $\mathbb{R}^3$ representada por la ecuación $x + y = 2$

$x = 2 - y$; $y = 2 - x$

$x + y + 0z = 2$



6) Describa y bosqueje la superficie $\mathbb{R}^3$ representada por la ecuación $2z = 8 - 4x$

I; $x = 0$

$2z - 8 = 0$

$z = \frac{+8}{2}$

$z = +4$

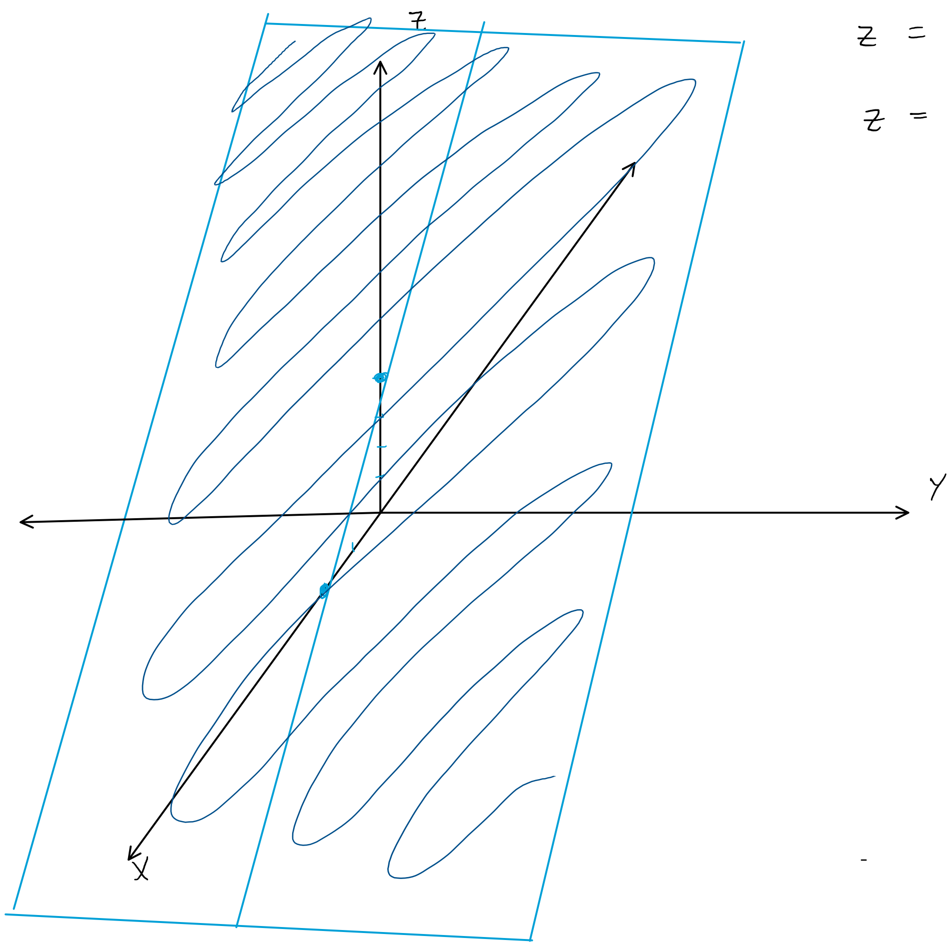
I; $z = 0$

$0 = 8 - 4x$

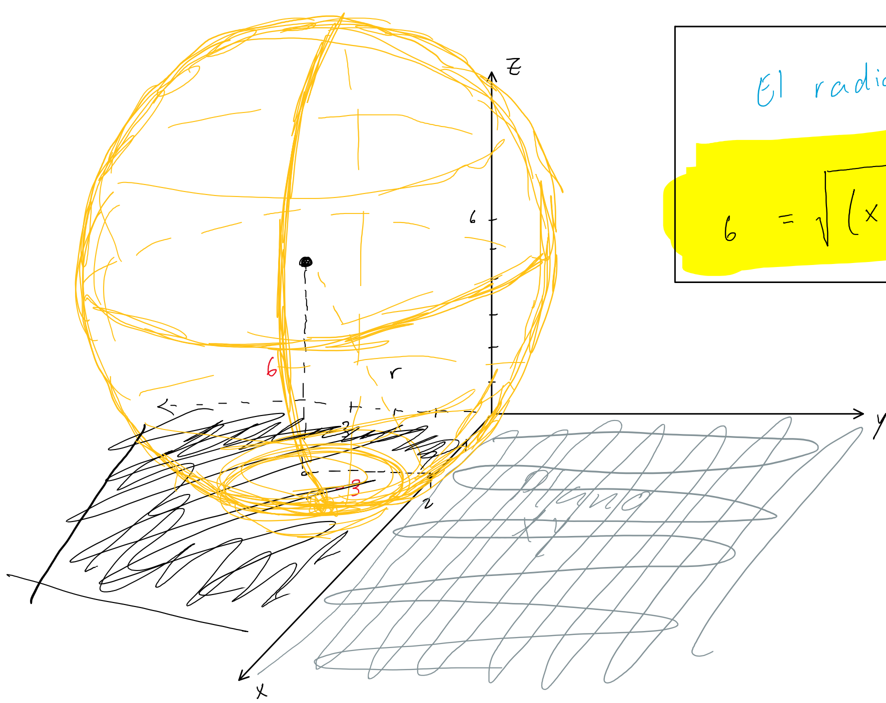
$-8 = -4x$

$\frac{-8}{-4} = x$

$x = 2$



7) Bono: La ecuación de la esfera con centro $(2,-3,6)$ que toca el plano xy.



El radio es 6.

$$6 = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2}$$

Parte II

Tareas

Capítulo3

Tarea #02

Tarea #2
David Gabriel Corzo Mcmath – 20190432
Cálculo Multivariable

1) Vectores:

$a = \langle 5, -12, 0 \rangle$

$b = \langle 0, -3, -6 \rangle$

$c = \langle 1, 0, 2 \rangle$

$2b = \langle 0, -6, -12 \rangle$

a) $a + 2(b + c) - (a - 2b) =$

$= a + 2[(0+1), (-3+0), (-6+2)] - [(5-0), (-12+6), (0+12)]$

$= a + 2\langle 1, -3, -4 \rangle - \langle 5, -6, 12 \rangle$

$= a + \langle 2, -6, -8 \rangle - \langle 5, -6, 12 \rangle$

$= a + [(2-5), (-6+6), (-8-12)]$

$= a + \langle -3, 0, -20 \rangle$

$= \langle 5, -12, 0 \rangle + \langle -3, 0, -20 \rangle$

$= [(5-3), (-12+0), (0-20)]$

$= \langle 2, -12, -20 \rangle$

b) $2a \cdot (3b + 4c) - 2c \cdot (4a + 0b)$

$2a = \langle 16, -24, 0 \rangle$ $\quad$ $4a = \langle 20, -48, 0 \rangle$

$3b = \langle 0, -9, -24 \rangle$ $\quad$ $0b = \langle 0, 0, 0 \rangle$

$2c = \langle 2, 0, 4 \rangle$ $\quad$ # Sacar nuevos vectores

$4c = \langle 4, 0, 8 \rangle$

$$= 2a \cdot \langle (0+4), (-9+0), (-24+8) \rangle - 2c \cdot \langle (20+0), (-48+0), (0+0) \rangle$$

$$= 2a \cdot \langle 4, -9, -16 \rangle - 2c \cdot \langle 20, -48, 0 \rangle$$

$$= \langle (10 \cdot 4), (-24 \cdot -9), (0 \cdot -16) \rangle - \langle (2 \cdot 20), (0 \cdot -48), (4 \cdot 0) \rangle$$

$$= \langle 40, 216, 0 \rangle - \langle 40, 0, 0 \rangle$$

$$= \langle (40-40), (216-0), (0,0) \rangle$$

$$= \langle 0, 216, 0 \rangle$$

c) $|a + c - (a + b)| =$

$a = \langle 5, -12, 0\rangle \quad b = \langle 0, -3, -6\rangle \quad c = \langle 1, 0, 2\rangle$

$$= |\langle (5+1), (-12+0), (0+2)\rangle - (\langle (5+0), (-12-3), (0-6)\rangle)|$$

$$= |\langle 6, -12, 2\rangle - \langle 5, -15, -6\rangle|$$

$$= |\langle (6-5), (-12+15), (2+6)\rangle|$$

$$= |\langle 1, 3, 8\rangle|$$

$$\sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (8)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 9 + 64}$$

$$= \sqrt{74}$$

d) $|a + c| - |a + b|$

$$= |\langle (5+1), (-12+0), (0+2)\rangle| - |\langle (5+0), (-12-3), (0-6)\rangle|$$

$$= |\langle 6, -12, 2\rangle| - |\langle 5, -15, -6\rangle|$$

$$= \sqrt{6^2 + (-12)^2 + 2^2} - \sqrt{5^2 + (-15)^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 144 + 4} - \sqrt{25 + 225 + 36}$$

$$= \sqrt{184} - \sqrt{286}$$

$\cos\theta = \dfrac{A \cdot B}{|A||B|}$

2) Misma dirección que el vector $\langle -3, 4, 6, -8 \rangle$

$$= \left| \langle -3, 4, 6, -8 \rangle \right|$$

Calcular magnitud

$$= \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (6)^2 + (-8)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16 + 36 + 64}$$

$$= \sqrt{125}$$

Entonces...

$$\left| \left\langle -\frac{3}{\sqrt{125}}, \frac{4}{\sqrt{125}}, \frac{6}{\sqrt{125}}, -\frac{8}{\sqrt{125}} \right\rangle \right| = 1$$

Comprobar...

$$= \sqrt{\frac{9}{125} + \frac{16}{125} + \frac{36}{125} + \frac{64}{125}} = \sqrt{\frac{125}{125}} = 1$$

3) Encuentre el ángulo de los vectores

a) $a = \langle 3, 0 \rangle$, $b = \langle 5, 5 \rangle$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{A \cdot B}{|A||B|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{\langle (3 \cdot 5), (0 \cdot 5) \rangle}{|\langle 3, 0 \rangle||\langle 5, 5 \rangle|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{15 + 0}{3 \cdot \sqrt{50}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{15}{3 \cdot \sqrt{2 \cdot 25}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{15}{3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\cancel{15}}{\cancel{15}} \cdot (2)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

b)

$a = \langle 2, -4, 5 \rangle$

$b = \langle -2, 4, -5 \rangle$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|a||b|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{-45}{(45)^{1/2}(45)^{1/2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{-45}{45}\right)$$

$$= \cos^{-1}(-1)$$

$$= \pi$$

$\vec{a} \cdot \vec{b}$

↳

2	-4	5
-2	4	-5
-4	-16	-25

$= (-4) + (-16) + (-25)$

$= -20 - 25$

$= -45$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$|a|$

$= \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (5)^2}$

$= \sqrt{4 + 16 + 25} = \sqrt{45}$

$|b|$

$= \sqrt{(-2)^2 + (4)^2 + (-5)^2}$

$= \sqrt{4 + 16 + 25} = \sqrt{45}$

4) Determine si los vectores son ortogonales, paralelos o ninguno.

a) $a = \langle -5, 3, 7 \rangle \quad b = \langle 6, -8, 2 \rangle$

Producto punto de a & b

-5	3	7
$\cdot\ 6$	$\cdot\ -8$	$\cdot\ 2$
-30	-24	$+14$

$(-30) + (-24) + (14) = -40$ Ninguno

b) $a = \langle 4, 6 \rangle$

$b = \langle -3, 2 \rangle$

4	6
-3	2
-12	12

$\underbrace{(-12) + 12}_{\emptyset}$

Son ortogonales

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \dots a_n b_n$$

c) $a = -i + 2j + 5k$

$b = 3i + 4j - k$

$a = \langle -1, 2, 5 \rangle$

$b = \langle 3, 4, -1 \rangle$

-1	2	5
3	4	-1
-3	8	-5

$(-3) + 8 + (-5)$

$-8 + 8$

0

Son ortogonales

d) $a = 2i + 6j - 4k$

$b = -3i - 9j + 6k$

$a = \langle 2, 6, -4 \rangle$

$b = \langle -3, -9, 6 \rangle$

2	6	-4
-3	-9	6
-6	54	-24

$(-6) + 54 + (-24)$

$-30 + 54$

24

Son paralelos por $\vec{a} \cdot \vec{b}$ son multiplos en tre sí.

5) Considerar vectores:

$a = \langle 3, 6, -2 \rangle$ esc: $\text{Proy}_a b = \dfrac{a \cdot b}{|a|}$

$b = \langle 1, 2, 3 \rangle$ vec: $\text{Proy}_a b = \dfrac{a \cdot b}{|a|} \dfrac{a}{|a|}$

a) Proyección de b sobre a:

Escalar:

$$\text{proy}_a b = \frac{3 + 12 - 6}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{9 + 36 + 4}} =$$

$$= \frac{9}{\sqrt{49}} = \frac{9}{7}$$

Vectorial:

$$\text{proy}_a b = \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{49}} \langle 3, 6, -2 \rangle$$

$$= \frac{9}{(49)^{\frac{1}{2}} \cdot (49)^{\frac{1}{2}}} \langle 3, 6, -2 \rangle$$

$$= \frac{9}{49} \langle 3, 6, -2 \rangle$$

$$= \left\langle \frac{27}{49}, \frac{54}{49}, -\frac{18}{49} \right\rangle$$

b) a sobre b:

$a = \langle 3, 6, -2 \rangle$

$b = \langle 1, 2, 3 \rangle$

$$\text{proy}_b\, a = \frac{a \cdot b}{|b|}$$

$$\text{proy}_b\, a = \frac{a \cdot b}{|b|} \cdot \frac{b}{|b|}$$

escalar: $$\text{proy}_b\, a = \frac{9}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}}$$

vectorial: $$\text{proy}_b\, a = \frac{9}{\sqrt{14}} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}\left[\langle 1, 2, 3 \rangle\right]$$

$$= \frac{9}{(14)^{\frac{1}{2}} \cdot (14)^{\frac{1}{2}}} \langle 1, 2, 3 \rangle$$

$$= \frac{9}{14} \langle 1, 2, 3 \rangle$$

$$= \left\langle \frac{9}{14}, \frac{18}{14}, \frac{27}{14} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{9}{14}, \frac{9}{7}, \frac{27}{14} \right\rangle$$

c) proyección de b sobre a no es igual a proyección de a sobre b; si estos cumplen la condición de $\vec{a} \cdot \vec{b} = \emptyset$ si resultan ser la misma proyección.

* el lab decía proyab = proyab que sí serían iguales pero asumí que quería decir proyab = $\text{proy}_b\, a$ que en cuyo caso no siempre son iguales.

BONO: Encontrar tal valor de x que $\langle 2, 1, -1\rangle$ & $\langle 1, x, 0\rangle$ es de $45°$.

θ tiene que ser igual a $45°$ ó $\frac{\pi}{4}$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{[(2\cdot 1)+(1\cdot x)+\cancel{(-1\cdot 0)}]}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+x^2+0^2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{2+x}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{2+x}{\sqrt{6}\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2+x}{\sqrt{6}\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{1+x^2} = 2+x$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{6}\right)\sqrt{1+x^2}$$

$$\frac{\sqrt{12}}{2}\sqrt{1+x^2} = 2+x$$

$$\left(\frac{\sqrt{12}}{2}\sqrt{1+x^2}\right)^2 = (2+x)^2$$

$$3(1+x^2) = x^2+4x+4$$

$$3+3x^2 = x^2+4x+4$$

$$3+3x^2 = x^2+4x+4$$

$$0 = x^2-3x+4x+4-3$$

$$0 = -2x^2+4x+1$$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(4)\pm\sqrt{16-4(-2)(1)}}{2(-2)}$$

$$= \frac{-4\pm\sqrt{24}}{-4}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{-4} \quad \boxed{\approx -0.22} \quad \boxed{\approx 2.22}$$

Capítulo4

Tarea #03

1) a. $(a \cdot b) \cdot c$

asumiendo que a, b, c son vectores.

Resulta en un escalar. productos punto resultan en escalares siempre

b. $(a \cdot b) \times c$

El producto cruz es entre vectores no se puede hacer entre escalares, $a \cdot b$ resulta en un escalar por ende no tiene sentido.

c. $(a \times b) \times c$

Resulta en un vector

d. $(a \times c) \cdot b$

Resulta en un escalar. producto cruz de a, c resulta en vector, ese vector con producto punto b resulta en escalar

2) Encuentre vectores unitarios ortogonales a $\langle 3, 2, 1 \rangle$ & $\langle -1, 1, 0 \rangle$.

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(2 \cdot 0) - (1 \cdot 1)\right] - \hat{j}\left[(3 \cdot 0) - (1 \cdot -1)\right] + \dots$$

$$+ \hat{k}\left[(3 \cdot 1) - (2 \cdot -1)\right]$$

$$= \hat{i}\left[0 - 1\right] - \hat{j}\left[0 - (-1)\right] + \hat{k}\left[3 - (-2)\right]$$

$$= -\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\therefore \langle -1, -1, 5 \rangle$$

Este es el vector ortogonal a
⟨3, 2, 1⟩ & ⟨-1, 1, 0⟩ Ahora sólo
falta la división por la magnitud
para que sea ortogonal unitario.

$$|O_\perp| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (5)^2} = \sqrt{1+1+25}$$
$$= \sqrt{27}$$

unit $\Rightarrow$ $O_\perp \cdot \frac{1}{\sqrt{27}} \Rightarrow \langle -1, -1, 5 \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{27}} =$

$$R_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{1}{\sqrt{27}}, -\frac{5}{\sqrt{27}} \right\rangle$$

invierto signos para encontrar segundo vector

$$R_2 = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{27}}, -\frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{5}{\sqrt{27}} \right\rangle$$

Comprobación de ser unitario.

$$1 = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^2 + \left(-\frac{5}{\sqrt{27}}\right)^2}$$

$$1 = \sqrt{\left(\frac{1}{27}\right) + \left(\frac{1}{27}\right) + \left(\frac{25}{27}\right)}$$

$$1 = \sqrt{\frac{1+1+25}{27}}$$

$$1 = \sqrt{\frac{27}{27}}$$

$$1 = 1$$

$\therefore$ es unitario & ortogonal.

3) Calcule el triple producto escalar entre $a = \langle 1, 2, 3 \rangle$ & $b = \langle 3, 2, 5 \rangle$ & $c = \langle 0, 4, 3 \rangle$ ¿ $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$

$b \times c = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{vmatrix}$

$$b \times c = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left[(2\cdot 3)-(5\cdot 4)\right] - \hat{\jmath}\left[(3\cdot 3)-(5\cdot 0)\right] + \hat{k}\left[(3\cdot 4)-(2\cdot 0)\right]$$

$$= \hat{\imath}\left[6-20\right] - \hat{\jmath}\left[9-0\right] + \hat{k}\left[12-0\right]$$

$$= \hat{\imath}\left[-14\right] - \hat{\jmath}\left[9\right] + \hat{k}\left[12\right]$$

$$= -14\hat{\imath} - 9\hat{\jmath} + 12\hat{k}$$

$$= \langle -14, -9, 12\rangle$$

$$a \cdot (b \times c) = \langle 1,2,3\rangle \cdot \langle -14,-9,12\rangle$$

$$= \langle (1\cdot -14), (2\cdot -9), (3\cdot 12)\rangle$$

$$= -14 - 18 + 36 = 4$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left[(2\cdot 5)-(3\cdot 2)\right] - \hat{\jmath}\left[(1\cdot 5)-(3\cdot 3)\right] + \hat{k}\left[(1\cdot 2)-(3\cdot 2)\right]$$

$$= \hat{\imath}\left[10-6\right] - \hat{\jmath}\left[5-9\right] + \hat{k}\left[2-6\right]$$

$$= \hat{\imath}\left[4\right] - \hat{\jmath}\left[-4\right] + \hat{k}\left[-4\right]$$

$$= 4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 4\hat{k}$$

$$= \langle 4, 4, -4\rangle$$

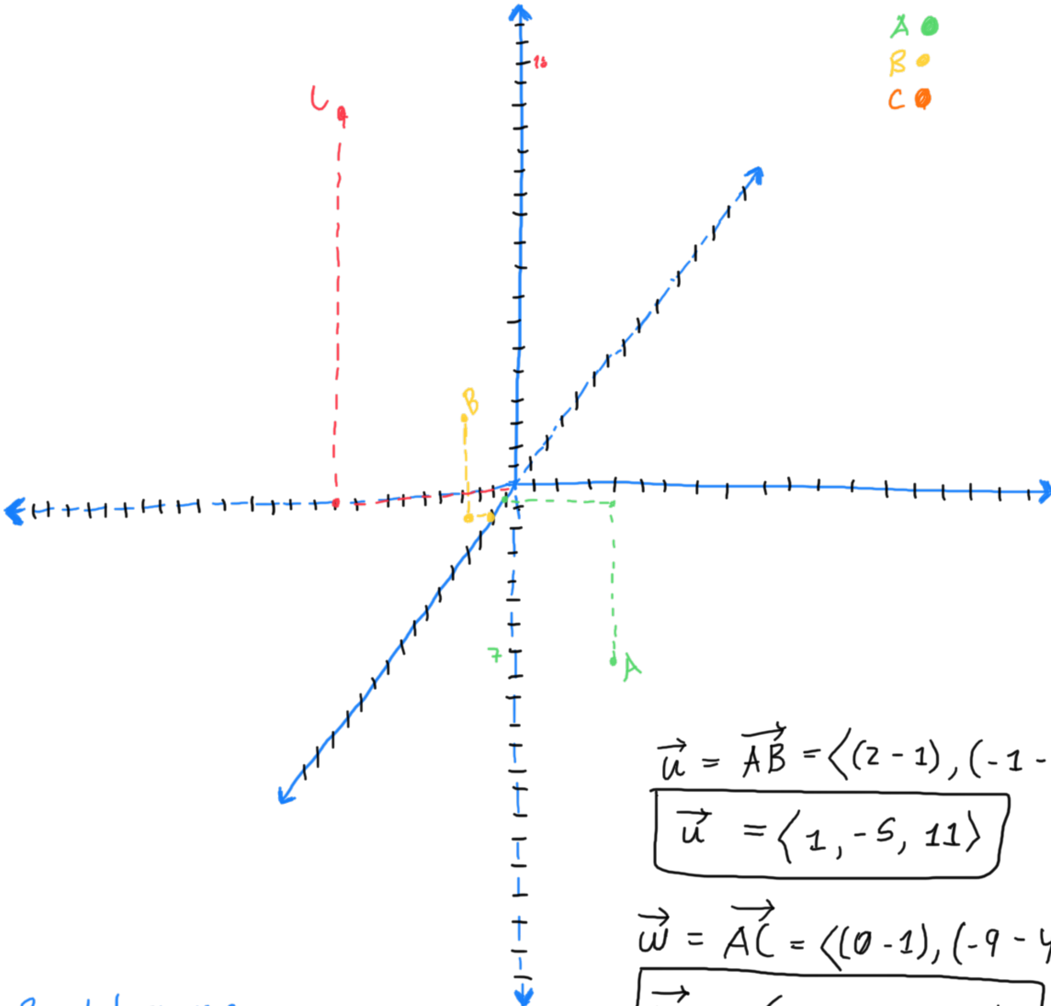
$$(a \times b)\cdot c = \langle 4,4,-4\rangle \cdot \langle 0,4,3\rangle$$

$$= 0 + 16 - 12 = 4$$

$\therefore \quad a \cdot (b \times c) = (a \times b)\cdot c$ Sí es igual ya que las dos dan 4, el mismo resultado.

4) Calcule el área del paralelogramo entre los puntos A(1, 4, -3), B(2, -1, 4) e C(0, 2, -1)

$A(1,4,-7)$, $B(2,-1,4)$ & $C(0,-9,18)$.



$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \langle (2-1), (-1-4), (4+7) \rangle$

$\boxed{\vec{u} = \langle 1, -5, 11 \rangle}$

$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = \langle (0-1), (-9-4), (18+7) \rangle$

$\boxed{\vec{w} = \langle -1, -13, 25 \rangle}$

Paralelogramo

$P = b \cdot a$

base $= |\vec{a}|$

altura $= |b| \sin\theta$

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -5 & 11 \\ -1 & -13 & 25 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{i}\left[(-5 \cdot 25) - (11 \cdot -13)\right] - \hat{j}\left[(1 \cdot 25) - (11 \cdot -1)\right] + \hat{k}\left[(1 \cdot -13) - (-5 \cdot -1)\right]$$

$$= \hat{i}\left[-125 + 143\right] - \hat{j}\left[25 + 11\right] + \hat{k}\left[-13 - 5\right] =$$

$$= 18\hat{i} - 36\hat{j} - 18\hat{k}$$

$$= \langle 18, -36, -18 \rangle$$

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = \sqrt{18^2 + (-36^2) + (-18^2)} = 18\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} = 9\sqrt{6}$$

5) Considere los puntos $P(1,0,1)$ & $Q(-2,1,3)$ & $R(4,2,5)$.

a) Encontrar el vector no cero ortogonal al plano

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (-2-1), (1-0), (3-1) \rangle$$

$$\boxed{\vec{u} = \langle -3, 1, 2 \rangle}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{PR} = \langle (4-1), (2-0), (5-1) \rangle$$

$$\boxed{\vec{w} = \langle 3, 2, 4 \rangle}$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(1\cdot4)-(2\cdot2)\right] - \hat{j}\left[(-3\cdot4)-(3\cdot2)\right] + \hat{k}\left[(-3\cdot2)-(3\cdot1)\right]$$

$$= \hat{i}\left[4-4\right] - \hat{j}\left[-12-6\right] + \hat{k}\left[-6-3\right]$$

$$= 0\hat{i} + 18\hat{j} - 9\hat{k}$$

$\therefore \langle 0, 18, -9 \rangle$ es el vector ortogonal no cero al plano.

b) Determine el área del triángulo PQR

$$A_\triangle = \frac{1}{2}\left|\vec{u} \times \vec{w}\right| = \frac{1}{2}\underbrace{\left|\langle 0, 18, -9 \rangle\right|}_{}$$

$$\sqrt{0^2 + 18^2 + (-9)^2}$$

$$\sqrt{324 + 81}$$

$$\sqrt{405}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{405} = \frac{1}{2}\,9\cdot\sqrt{5} = \frac{9\cdot\sqrt{5}}{2}$$ es el

≈ 10.06 área del triángulo PQR

6) Volúmen del paralelelipípedo determinado por los vectores $a = \langle 1,2,3 \rangle$; $b = \langle -1,1,2 \rangle$; $c = \langle 2,1,4 \rangle$.

$$V_p = \left| a \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right| = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \ldots$$

$$\ldots = \hat{\imath}\left[(1 \cdot 4) - (1 \cdot 2)\right] - \hat{\jmath}\left[(-1 \cdot 4) - (2 \cdot 2)\right] + \hat{k}\left[(-1 \cdot 1) - (2 \cdot 1)\right]$$

$$\ldots = \hat{\imath}\left[4 - 2\right] - \hat{\jmath}\left[-4 - 4\right] + \hat{k}\left[-1 - 2\right] = 2\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

Ahora $\hat{\imath} = 1$; $\hat{\jmath} = 2$; $\hat{k} = 3$; (por vector a)

$$= 2(1) + 8(2) - 3(3)$$

$$= 2 + 16 - 9 = 18 - 9 = 9$$ es el volúmen del paralelelipípedo a, b, c.

7) ¿Están los pts. $A(1,4,-7)$; $B(2,-1,4)$; $C(0,-9,18)$; $D(0,0,0)$ sobre el mismo plano?

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \langle (2-1), (-1-4), (4+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{u} = \langle 1, -5, 11 \rangle}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = \langle (0-1), (-9-4), (18+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{w} = \langle -1, -13, 25 \rangle}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AD} = \langle (0-1), (0-4), (0+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{v} = \langle -1, -4, 7 \rangle}$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v})}$$

$$\vec{u}\,(\vec{w} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -13 & 25 \\ -1 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{i}\left[(-13 \cdot 7) - (-4 \cdot 25)\right] - \hat{j}\left[(-1 \cdot 7) - (25 \cdot -1)\right] + \hat{k}\left[(-1 \cdot -4) - (-1 \cdot -13)\right]$$

$$= 9\hat{i} - 18\hat{j} - 9\hat{k}$$

remplazar $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ con $\vec{u}$.

$$= 9(1) - 18(-5) - 9(11)$$

$$= 9 + 90 - 99$$

$$= 9 - 99 + 90$$

$$= -90 + 90 = 0$$ $\therefore$ sí son parte del mismo plano.

8) $(a \cdot b) = \sqrt{3}$ & $(a \times b) = \langle 1, 2, 2 \rangle$

encontra ángulo entre a & b.

$$\underbrace{a \cdot b}_{\sqrt{3}} = |a||b|\cos\theta$$

$$\underbrace{|a \times b|}_{|\langle 1,2,2 \rangle|} = |a||b|\sin\theta$$

$$|a||b|\cos\theta = \sqrt{3}$$

$$\underbrace{|a||b|} = \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$$

Sustituir en

$$|\langle 1,2,2 \rangle| = \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}\sin\theta$$

$$\frac{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}{\sqrt{3}} = \left.\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right\} \tan\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{1+4+4}}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = 3 \cdot 3^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tan\theta = \ldots$$
$$= 3^{1-\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{3}$$
$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3})$$
$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore$ El ángulo es $\theta = \frac{\pi}{3}$

BONO:

9) a) $|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2$

\# Partimos desde la siguiente propiedad:

$\hookrightarrow |a \times b| = |a||b| \sin\theta$ # Elevamos al cuadrado

$\Rightarrow |a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 \sin^2\theta$

\# Propiedad pitagórica

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$
$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

\# Sustituir

$$|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2(1 - \cos^2\theta)$$ # Distribuyo

$$|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - \underbrace{|a|^2|b|^2\cos^2\theta}_{(a \cdot b)^2}$$

$$\therefore \quad |a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2 \quad \square$$

b) $(a - b) \times (a + b) = 2(a \times b)$ # Quiero llegar a eso

$$= (a - b) \times (a + b)$$

\# Propiedad distributiva

$$= (a - b) \times (a + b)$$

$$= \cancel{(a \times a)}^{0} + (a \times b) - (b \times a) - \cancel{(b \times b)}^{0}$$

$$= (a \times b) - (b \times a)$$

$(a \times b) = -(b \times a)$

$$= (a \times b) + (a \times b)$$

$$\therefore \; 2(a \times b) \quad \square$$

Capítulo5

Tarea #06

Tarea #6 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 20 de febrero

Nombre:____ **Carnet:** ________________

Tema:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	25	15	15	15	30	100
Nota:						

1. Evalúe las siguientes integrales:
   (a) (8 pts.) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{4}{1+t^2}j + \frac{2t}{1+t^2}k\right) dt$
   (b) (9 pts.) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin^2(t)\cos(t)i + 3\sin(t)\cos^2(t)j + 2\sin(t)\cos(t)k)dt$
   (c) (8 pts.) $\displaystyle\int \left(te^t i + t^2\ln(t)j + \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}k\right) dt$

2. Dada la posición $\mathbf{r}(t) = ti + \sin(3t)j + \cos(3t)k$ encuentre:
   (a) (5 pts.) la función de velocidad.
   (b) (5 pts.) la función de aceleración.
   (c) (5 pts.) la función de rápidez.

3. Dada la aceleración $\mathbf{a}(t) = \langle e^t,\ \sin t\cos t,\ \dfrac{1}{(t+1)^2}\rangle$, la velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = \langle 3,-1,2\rangle$ y la posición inicial $\mathbf{r}(0) = \langle 0,2,0\rangle$, encuentre:
   (a) (7 pts.) la función de velocidad.
   (b) (8 pts.) la función de posición.

4. (15 pts.) Calcule la longitud de arco de la helice circular de la ecuación vectorial $r(t) = \cos(t)i + \sin(t)ij + tk$ desde el punto $(1,0,0,)$ hasta el punto $(1,0,2\pi)$.

5. Encuentre y bosqueje el dominio de las siguientes funciones:
   (a) (10 pts.) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}$
   (b) (10 pts.) $g(x,y) = \dfrac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$
   (c) (10 pts.) $h(x,y) = \dfrac{9}{9-x-y}$

Capítulo6

Tarea #06

1) Evalúe las integrales:

a) $$\int_0^1 \left(\underbrace{\frac{4}{1+t^2}}_{f(t)} \hat{j} + \underbrace{\frac{2t}{1+t^2}}_{g(t)} \hat{k} \right) dt$$

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \left(\frac{4}{1+t^2} \right) dt$$

$$= 4 \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^2} \right) dt$$

$$= 4 \arctan(t) \Big|_0^1$$

$$= 4 \left\{ \arctan(1) - \arctan(0) \right\}$$

$$= 4 \left\{ \frac{\pi}{4} - 0 \right\} = \boxed{\pi}$$

$$\int_0^1 g(t)\,dt = \int_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2} \right) dt$$

$$u = 1 + t^2$$
$$du = 2t\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{du}{u} \right)$$

$$= \ln|1+t^2| \Big|_0^1$$

$$= \left\{ \ln(2) - \cancelto{0}{\ln(1)} \right\} = \boxed{\ln(2)}$$

$$\therefore \left\langle 0, \pi, \ln(2) \right\rangle$$

b) $$\int^{\frac{\pi}{2}} \left(3\sin^2(t)\cos(t)\hat{\imath} + 3\sin(t)\cos^2(t)\hat{j} + 2\sin(t)\cos(t)\hat{k} \right) dt$$

$$\int_0 \Big(\underbrace{\qquad\qquad}_{f(t)} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{g(t)} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{h(t)} \Big)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos(t)\,dt$$

$$u = \sin(t)$$
$$du = \cos(t)\,dt$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2\,du$$

$$= \frac{3}{3}u^3 = \sin^3(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left\{\sin^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \sin^3(0)\right\}$$

$$= \boxed{1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\sin(t)\cos^2(t)\Big)dt$$

$$u = \cos(t)$$
$$-du = \sin(t)\,dt$$

$$= -3\int_{u(0)}^{u(\frac{\pi}{2})} u^2\,du$$

$$= -\frac{3}{3}u^3 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\left\{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \cos(0)\right\}$$

$$= -\{0 - 1\} = \boxed{1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t)\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\sin(t)\cos(t)\Big)dt$$

$$u = \sin(t)$$
$$du = \cos(t)\,dt$$

$$= 2\int_{u(0)}^{u(\frac{\pi}{2})} u\,du$$

$$= u^2\Big|^{u(\frac{\pi}{2})=1} = \{1^2 - 0\} = \boxed{1}$$

$u(0) = 0$ ( )

$$\therefore \boxed{\left\langle 1, 1, 1 \right\rangle}$$

3) $$\int \left(\underbrace{te^t}_{f(t)} \hat{\imath} + \underbrace{t^2 \ln(t)}_{g(t)} \hat{\jmath} + \underbrace{\frac{e^t}{\sqrt{1 - e^{2t}}}}_{h(t)} \hat{k} \right) dt$$

$$\int f(t)\,dt = \int \underbrace{te^t}\,dt$$

$u = t \qquad dv = e^t\,dt$

$du = dt \qquad v = e^t$

$$= te^t - \int e^t\,dt$$

$$= \boxed{te^t - e^t + C_1}$$

$$\int g(t)\,dt = \int t^2 \ln(t)\,dt$$

$u = \ln(t) \qquad dv = t^2\,dt$

$du = \frac{1}{t}\,dt \qquad v = \frac{1}{3}t^3$

$$= \ln(t) \cdot \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}\int \frac{t^3}{t}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3 \ln(t) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} t^3 + C_2$$

$$= \boxed{\frac{1}{3}t^3 \ln(t) - \frac{1}{9}t^3 + C_2}$$

$$\int h(t)\,dt = \int \frac{e^t}{\sqrt{1 - e^{2t}}}\,dt$$

$u = e^t$

$du = e^t\,d$

$\int \frac{du}{}$

$$= \int \frac{\quad}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \arcsin(u) + C_3$$

$$\boxed{= \arcsin(e^t) + C_3}$$

$$\therefore \left\langle te^t - e^t + C_1,\ \frac{1}{3}t^3\ln(t) - \frac{1}{9}t^3 + C_2,\ \arcsin(e^t) + C_3 \right\rangle$$

2) Dada la posición $r(t) = t\hat{\imath} + \sin(3t)\hat{\jmath} + \cos(3t)\hat{k}$

a) Encuentre la función de velocidad:

$$r'(t) = v(t) = \hat{\imath} + \cos(3t)\cdot 3\,\hat{\jmath} + \sin(3t)\cdot 3\,\hat{k}$$

b) Encuentre la función de aceleración:

$$r''(t) = a(t) = 0\hat{\imath} - 3\sin(3t)\cdot 3\,\hat{\jmath} + 3\cdot 3\cos(3t)\,\hat{k}$$

c) Encuentre la función de rapidez:

$$|v(t)| = \sqrt{(1)^2 + (3\cos(3t))^2 + (3\sin(3t))^2}$$

$$= \sqrt{1 + 9\cos^2(3t) + 9\sin^2(3t)}$$

$$= \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

3) Dada la función de aceleración:

$$a(t) = \left\langle e^t,\ \sin(t)\cos(t),\ \frac{1}{(t+1)^2} \right\rangle$$

$$v(0) = \langle 3, -1, 2 \rangle$$

$$v(0) = \langle 3, -1, 2 \rangle$$

$$p(0) = \langle 0, 2, 0 \rangle$$

a) Encontrar la función de aceleración:

$$\int a(t)\,dt = v(t)$$

$$a(t) = \langle \underbrace{e^t}_{f(t)}, \underbrace{\sin(t)\cos(t)}_{g(t)}, \underbrace{\frac{1}{(t+1)^2}}_{h(t)} \rangle$$

$$\int f(t)\,dt = \boxed{e^t + C_1}$$

$$\int g(t)\,dt = \int \sin(t)\cos(t)\,dt = \boxed{\frac{1}{2}\sin^2(t) + C_2}$$

$u = \sin(t)$

$du = \cos(t)dt$

$$\int h(t)\,dt = \int \frac{1\,dt}{(t+1)^2} = \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{-2+1}u^{-2+1} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{t+1} + C_3$$

$u = t + 1$

$du = 1\,dt$

$$\boxed{= -\frac{1}{t+1} + C_3}$$

$$v(t) = \langle e^t + C_1, \frac{1}{2}\sin^2(t) + C_2, -\frac{1}{t+1} + C_3 \rangle$$

Encontrar constantes

$$v(0) = \langle 3, -1, 2 \rangle$$

$e^0 + C_1 = 3$

$1 + C_1 = 3$

$C_1 = 3 - 1$

$C_1 = 2$

$\frac{1}{2}\sin^2(0) + C_2 = -1$

$0 + C_2 = -1$

$C_2 = -1$

$$-\frac{1}{0+1} + C_3 = 2$$

$$-1 + C_3 = 2$$

$$C_3 = 2 + 1$$

$$C_3 = 3$$

función de velocidad:

$$v(t) = \left\langle e^t + 2,\ \frac{1}{2}\sin^2(t) - 1,\ -\frac{1}{t+1} + 3 \right\rangle$$

b) función posición:

$$\int v(t)\,dt = r(t)$$

$$v(t) = \left\langle \underbrace{e^t + 2}_{f(t)},\ \underbrace{\frac{1}{2}\sin^2(t) - 1}_{g(t)},\ \underbrace{-\frac{1}{t+1} + 3}_{h(t)} \right\rangle$$

$$\int f(t)\,dt = \int (e^t + 2)\,dt$$

$$\boxed{= e^t + 2t + C_1}$$

$$\int g(t)\,dt = \frac{1}{2}\int (\sin^2(t) - 1)\,dt = -\frac{1}{2}\int \cos^2(t)\,dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int (1 - \cos(2t))\,dt$$

$$\boxed{= -\frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right) + C_2}$$

$$\int h(t)\,dt = -\int \left(\frac{1}{t+1} + 3\right)dt = -\left(\ln|t+1| + 3t\right) + C_3$$

$$\boxed{= -\ln|t+1| + 3t + C_3}$$

Encontrar constantes

$$r(0) = \langle 0, 2, 0 \rangle$$

$$e^0 + 2(0) + C_1 = 0$$

$$1 + 0 + C_1 = 0$$

$$-\frac{1}{4}\left(0 - \frac{1}{2}\sin(2\cdot 0)\right) + C_2 = 2$$

$$-\frac{1}{4}\cancel{0}^{0} + \frac{1}{2}\cancel{\sin(0)}^{0} + C_2 = 2$$

$C_2 = -1$

$C_2 = 2$

$$-\ln|0+1| + 3(0) + C_3 = 0$$
$$0 + 0 + C_3 = 0$$
$$C_3 = 0$$

funcione posición:

$$r(t) = \left\langle e^t + 2t - 1,\ -\frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right) + 2,\ -\ln|t+1| + 3t + 0 \right\rangle$$

4) Calcule la longitud de arco de la helice circular de la ecuación vectorial:

$$r(t) = \cos(t)\,\hat{\imath} + \sin(t)\,\hat{\jmath} + t\,\hat{k}$$

desde el punto $(1,0,0)$ hasta el punto $(1,0,2\pi)$.

$$L = \int_a^b |r'(t)|\,dt$$

$$r'(t) = -\sin(t)\,\hat{\imath} + \cos(t)\,\hat{\jmath} + \hat{k}$$

$$|r'(t)| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (1)^2}$$
$$= \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1}$$
$$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\,t \Big|_{a=0}^{b=2\pi}$$

$$= \sqrt{2}\cdot\{2\pi - 0\} = \sqrt{2}\cdot 2\pi$$

$P(1,0,0)$ & $Q(1,0,2\pi)$

$$r(t) = \langle \cos(t), \sin(t), t \rangle$$

$x = \cos(t)$ $\qquad \cos(t) = 1 \rightarrow t = 0$

$y = \sin(t)$ $\qquad \sin(t) = 0 \rightarrow t = 0$

$z = t$ $\qquad t = 0 \longrightarrow t = 0$

$\cos(t) = 1 \rightarrow t = 2\pi$

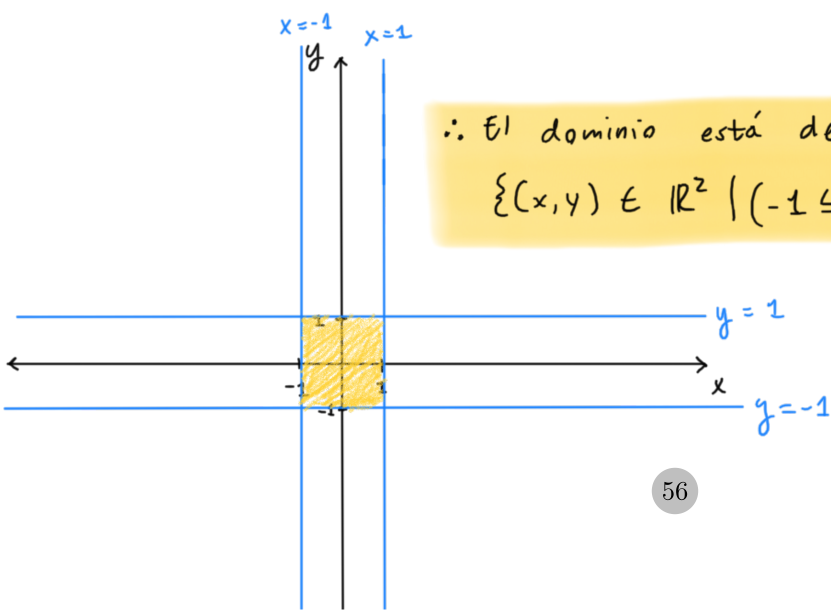
$\sin(t) = 0 \rightarrow t = 2\pi$

$t = 2\pi \rightarrow t = 2\pi$

5) a) $f(x,y) = \sqrt{\underbrace{1-x^2}} - \sqrt{1-y^2}$

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &\geq 0 \\ -x^2 &\geq -1 \\ x^2 &\leq 1 \\ x &\leq \pm 1 \\ -1 \leq x &\leq 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1 - y^2 &\geq 0 \\ -y^2 &\geq -1 \\ y^2 &\leq 1 \\ y &\leq \pm 1 \\ -1 \leq y &\leq 1 \end{aligned}$$

$\mathbb{D}: \mathbb{R}^2 - \{1 - x^2 \leq 0\}$ & $\{1 - y^2 \leq 0\}$



$\therefore$ El dominio está definido tal que:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-1 \leq x \leq 1) \;\&\; (-1 \leq y \leq 1)\}$$

b) $g(x,y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

$y - x^2 \geq \emptyset$

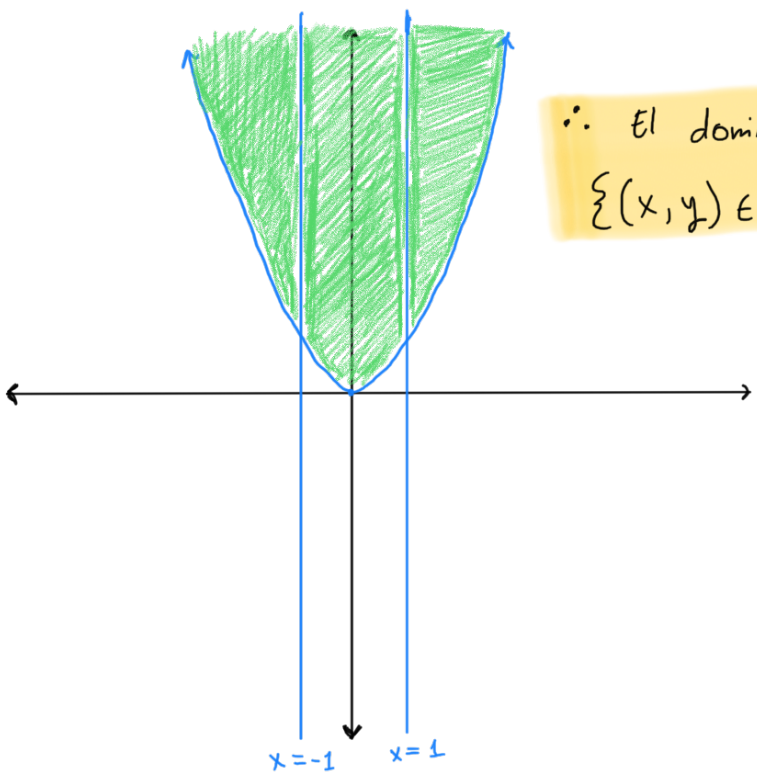
$y \geq x^2$

$1 - x^2 \neq \emptyset$

$-x^2 \neq -1$

$x^2 \neq 1$

$x \neq \pm 1$



$\therefore$ El dominio está definido tal que:

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y \geq x^2)\ \&\ (x \neq \pm 1)\}$

c) $h(x,y) = \dfrac{9}{9 - x - y}$

$9 - x - y \neq \emptyset$

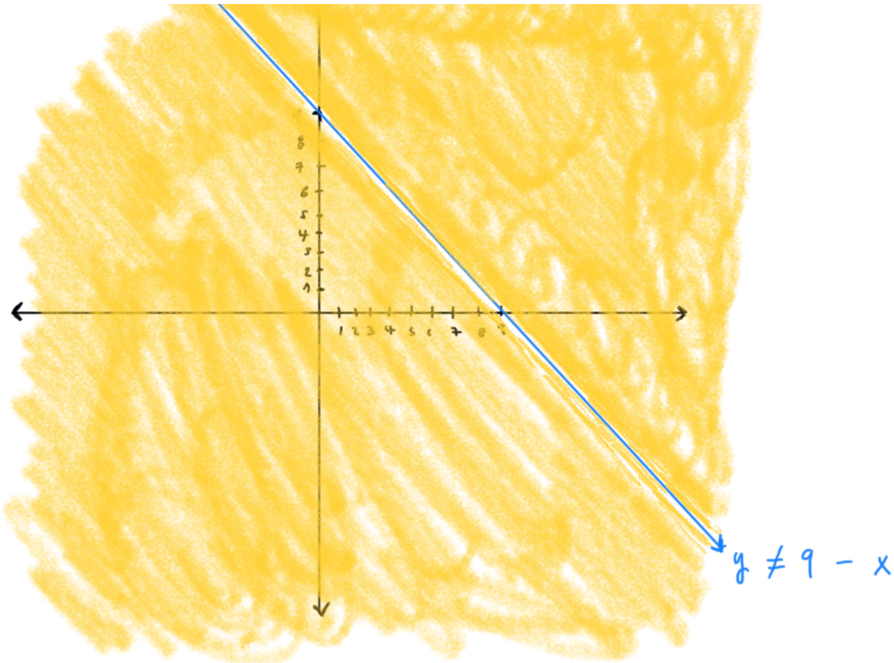
$-x - y \neq -9$

$x + y \neq 9$

$\neg(\ y = 9 - x\ )$ #excluir

$\therefore$ El dominio está definido tal que:

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y \neq 9)\}$



1
2
3
4
5
6
7
8
y ≠ 9 − x

Parte III

Examenes Cortos

Capítulo7

Examen corto #01

Corto #1 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: David Corzo **Carnet:** 20190432

Resuelva las siguientes problemas:

1. (50 pts.) Halle la ecuación de la esfera con centro $(3, -6, 4)$ y radio ~~5~~. 10
¿Cuál es la intersección de esta esfera con el plano xz?

Ecuación :

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+6)^2+(z-4)^2} = 10$$

25

se asume $y = 0$;

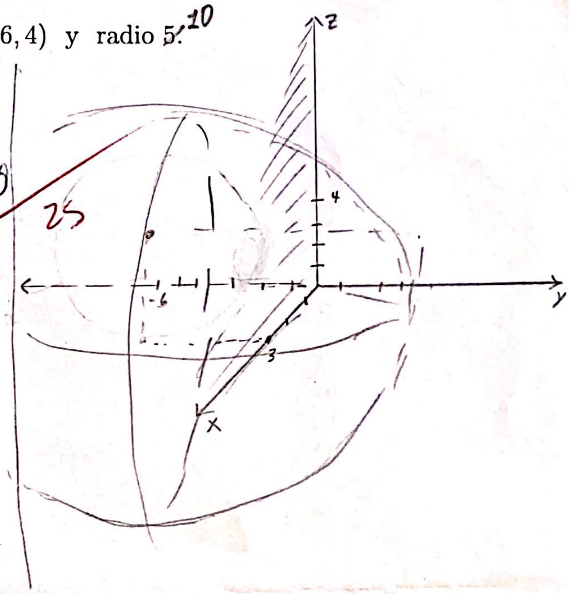
$$\sqrt{(x-3)^2+(z-4)^2+(6)^2} = 10$$

$$(x-3)^2+(z-4)^2+36 = 10^2$$

$$(x-3)^2+(z-4)^2 = 100-36$$

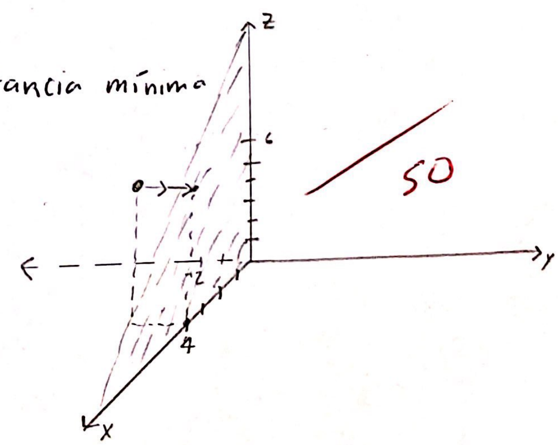
Intersección : $(x-3)^2+(z-4)^2 = 64$

25



2. (50 pts.) Determine la distancia mínima del punto $(4, -2, 6)$ al plano xz.

La distancia mínima es 2.



50

100/100

Capítulo8

Examen corto #03

$\cancel{100}$ 90/100

Corto #3 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: David Corzo **Carnet:** 20190432

Resuelva los siguientes problemas:

1. (50 pts.) Determine el área del triángulo entre los puntos $P = (0, -2, 0)$, $Q = (4, 1, -2)$ y $R = (5, 3, 1)$.

$$T_\Delta = \frac{1}{2} \left| \vec{u} \times \vec{w} \right|$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (4-0), (1-(-2)), (-2-0) \rangle = \langle 4, 3, -2 \rangle$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{PR} = \langle (5-0), (3-(-2)), (1-0) \rangle = \langle 5, 5, 1 \rangle$$

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(3\cdot 1)-(-2\cdot 5)\right] - \hat{j}\left[(4\cdot 1)-(-2\cdot 5)\right] + \hat{k}\left[(4\cdot 5)-(3\cdot 5)\right]$$

$$= \hat{i}\left[3+10\right] - \hat{j}\left[4+10\right] + \hat{k}\left[20-15\right]$$

$$= 13\hat{i} - 14\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$= \langle 13, -14, 5 \rangle$$

$$= \sqrt{(13)^2 + (-14)^2 + (5)^2}$$

$$= \sqrt{169 + 496 + 25}$$

$$= \sqrt{690}$$

$$\boxed{\therefore \tfrac{1}{2}\sqrt{690}}$$

40

$$\begin{array}{r} 11 \\ 169 \\ +\ 496 \\ \hline 665 \\ 25 \\ \hline 690 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 14 \\ \cdot\ 14 \\ \hline 56 \\ 44 \\ \hline 496 \end{array}$$

2. (50 pts.) Encuentre el volumen del paralelelípipedo determinado por los vectores $a = \langle 1, 5, -2 \rangle$, $b = \langle 3, -1, 0 \rangle$, y $c = \langle 5, 9, -4 \rangle$.

$$P_\square = |c \cdot (a \times b)|$$

$$(a \times b) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(5\cdot 0)-(-2\cdot -1)\right] - \hat{j}\left[(1\cdot 0)-(-2\cdot 3)\right] + \hat{k}\left[(1\cdot -1)-(5\cdot 3)\right]$$

$$= \hat{i}\left[0-2\right] - \hat{j}\left[0+6\right] + \hat{k}\left[-1-15\right]$$

$$= -2\hat{i} - 6\hat{j} - 16\hat{k}$$

$$= \langle -2, -6, -16 \rangle$$

$$c\cdot(a\times b) = \langle 5, 9, -4 \rangle \cdot \langle -2, -6, -16 \rangle$$

$$= (5\cdot -2) + (9\cdot -6) + (-4\cdot -16)$$

$$= (-10) + (-54) + 64$$

$$= -64 + 64 = 0$$ Hay un plano no un paralelelipipedo

$$\cancel{|c\cdot(a\times b)| = \sqrt{(-10)^2+(-54)^2+(-64)^2}}$$

$$\cancel{= \sqrt{100 + 2916 + 4086}}$$

$$= \sqrt{7102}$$

50

$$\begin{array}{r} 2 \\ 54 \\ \cdot\ 54 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 64 \\ \cdot\ 64 \\ \hline 1246 \\ 384 \\ \hline 4086 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ 2916 \\ +\ 4086 \\ \hline 7002 \\ +\ 100 \\ \hline 7{,}102 \end{array}$$