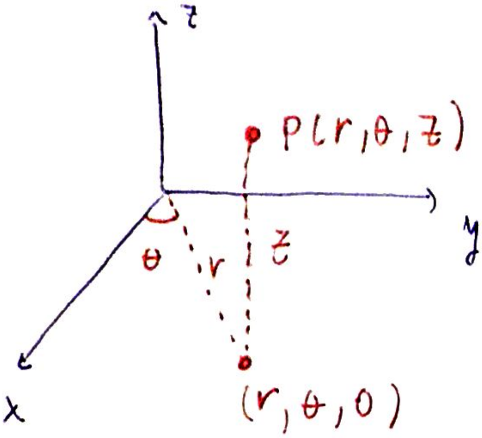
15.8 Integrales triples en cilíndricas



Coordenadas cilíndricas.

$P(x, y, z) \to P(r, \theta, z)$.

r radio polar es la distancia del origen a la proyección de P en el plano xy $(r, \theta, 0)$.

θ es el ángulo entre la proyección y el eje x.

Cilíndricas $(r, \theta, z) \to$ Cartesianas (x, y, z)

$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$

Cartesianas $(x, y, z) \to$ Cilíndricas (r, θ, z)

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, $\quad z = z$

en el cuadrante cuadrante.

Ejercicio 1: Reescriba cada punto en coordenadas cilíndricas.

a. $P(2\sqrt{3}, 2, 8)$. 1er cuadrante $0 \le \theta \le \pi/2$.

$x \quad y \quad z$

$r = \sqrt{4 \cdot 3 + 4} = 4$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$z = 8$

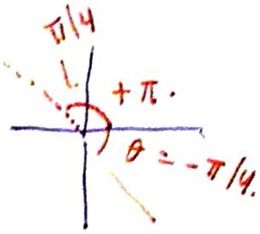
coordenadas cilíndricas $(4, \pi/6, 8)$

r, θ, z

a. $Q(-1,1,3)$ $\quad$ $(-1,1)$ está 2do cuadrante $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$.

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = -\frac{\pi}{4}$ $\quad$ $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

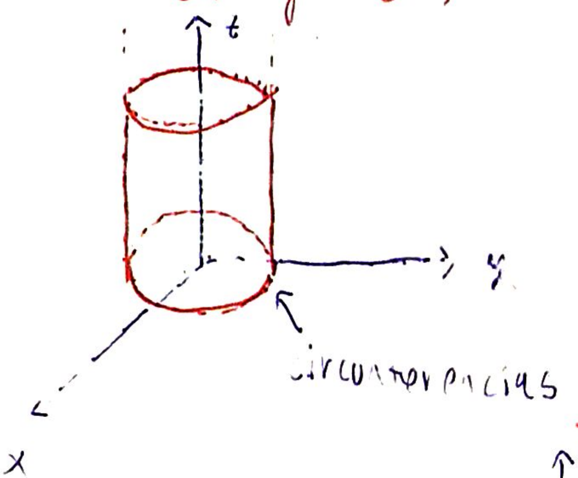


$z = 3$ $\quad$ Coordenadas cilíndricas $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, 3\right)$

Superficies cilíndricas Básicas.

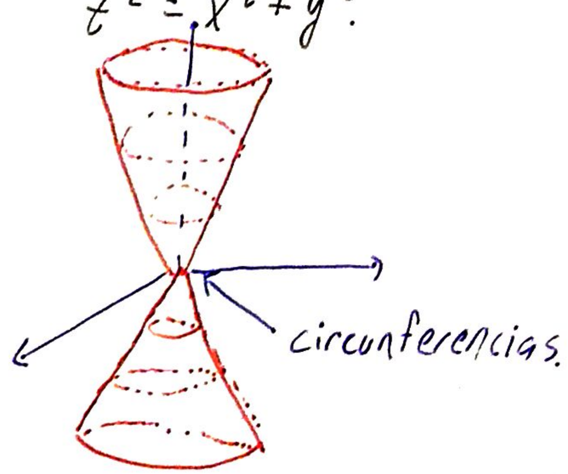
Cilindro: $r = c$

$(x^2 + y^2 = c^2)$

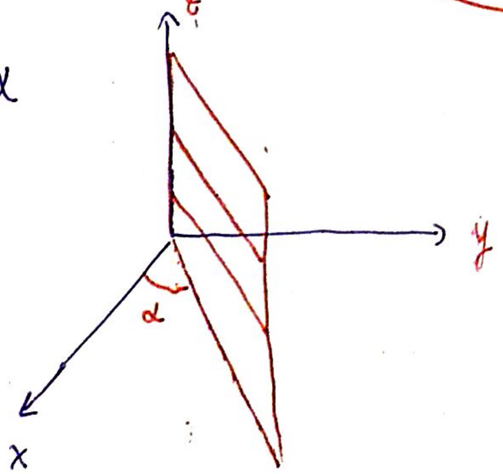


Cono. $z = r$.

$z^2 = x^2 + y^2$



Medio plano $\theta = \alpha$



Integrales Triples en coordenadas cilíndricas

sólido $E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D \quad u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$.

La región D es una región polar.

y. $D = \{(r,\theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta,\ b_1(\theta) \leq r \leq b_2(\theta)\}$.

Evalúe $\iiint_E f(x,y,z)\,dV$

base del sólido,

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dA$$

Utilice coordenadas polares $dA = r\,dr\,d\theta$.

$\alpha \leq \theta \leq \beta,\ b_1 \leq r \leq b_2$ $\qquad x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$.

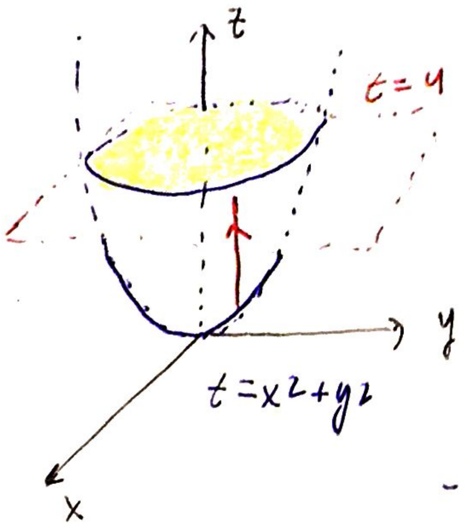
$$\iiint_E f(x,y,z)\,\underline{dV} = \int_\alpha^\beta \int_{b_1(\theta)}^{b_2(\theta)} \underline{\left(\int_{u_1(r\cos\theta,\, r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta,\, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,dz \right) r\,dr\,d\theta}.$$

1. Cambie las coordenadas.
2. Encuentre los límites
3. Use $dV = dz\,r\,dr\,d\theta$.

"volumen de una cuña cilíndrica"

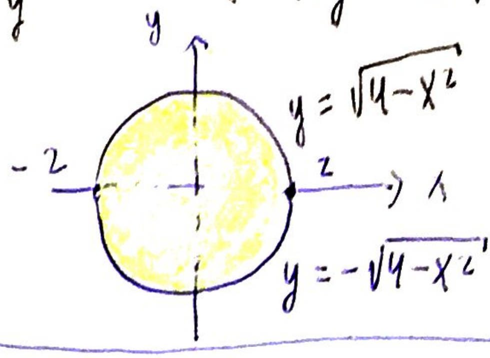
Ejercicio 2: Considere el sólido E que está entre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$.

a. Describa el sólido E utilizando coordenadas cartesianas



$$x^2 + y^2 \leq z \leq 4.$$

Los puntos (x, y) satisfacen $x^2 + y^2 \leq 4$ (disco radio 2).



$$-2 \leq x \leq 2.$$

$$-\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$$

$$\boxed{E: -2 \leq x \leq 2, \; -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}, \; x^2 + y^2 \leq z \leq 4.}$$

b. Describa el sólido E utilizando coordenadas cilíndricas

$x = r\cos\theta$ $\quad$ $x^2 + y^2 \leq 4 \rightarrow r \leq 2$ $\quad$ $0 \leq r \leq 2.$

$y = r\sin\theta$ $\quad$ todo el disco. $\quad$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$x^2 + y^2 \leq z \leq 4 \rightarrow r \leq z \leq 4.$

$$\boxed{E: 0 \leq \theta \leq 2\pi, \; 0 \leq r \leq 2, \; r^2 \leq z \leq 4.}$$

i. Evalúe $\iiint_E z\,dV$.

Desafiante.

Cartesianas: $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{4} z\,dz\,dy\,dx.$ $(x^2+y^2)^2\sqrt{4-x^2}$

Cilíndricas: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{4} z\,dz\,r\,dr\,d\theta.$

disco
origen $r=0$
orilla $r=r$.

$$\iiint_E z\,dV = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\int_0^2\int_{r^2}^4 z r\,dz\,dr. \qquad \int_{r^2}^4 z\,dz = \frac{z^2}{2}\Big]_{r^2}^4 = \frac{16}{2} - \frac{r^4}{2}.$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\int_0^2\left(8r - \frac{r^5}{2}\right)dr \qquad \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

$$= 2\pi\left(4r^2 - \frac{r^6}{4\cdot 3}\Big]_{r=0}^{r=2}\right) = 2\pi\left(16 - \frac{16}{3}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{48-16}{3}\right) = 2\pi\cdot\frac{32}{3} = \frac{64\pi}{3}.$$

j. Encuentre el volumen del sólido E.

$$V = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 dz\,r\,dr\,d\theta. = \int_0^{2\pi} d\theta.\int_0^2 (4-r^2)\,r\,dr.$$

$E: 0\le\theta\le 2\pi,\ r^2\le z\le 4,\ 0\le r\le 2.$ $\qquad dV = r\,dr\,d\theta\,dz.$

$$V = 2\pi\int_0^2 (4r - r^3)\,dr = 2\pi\left(2r^2 - \frac{r^4}{4}\Big]_{r=0}^{r=2}\right)$$

$$V = 2\pi(8-4) = 8\pi.$$

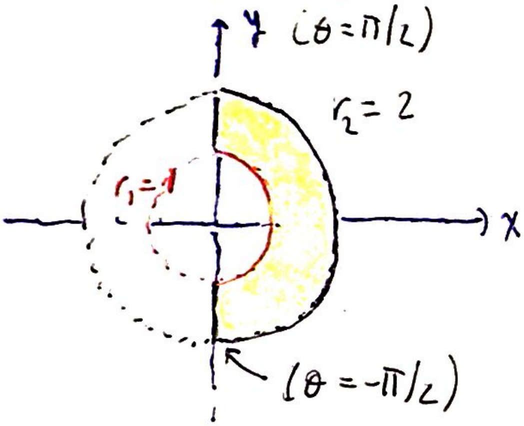
Ejercicio 3: Evalúe $I = \iint\limits_D \left[\int_0^{9-x^2-y^2} \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\text{cono}} \, dz \right] dA.$

D es el semianillo derecho de radio interno 1 y externo 2 centrado en el origen.

cartesianas integrar $\sqrt{x^2+y^2}\,(9-x^2-y^2)$ es desafiante.

cilíndricas $x^2+y^2=r^2$. $dz=dz$ $z=z$.

$$I = \iint\limits_D \left[\int_0^{9-r^2} r\,dz\right] dA = \iint\limits_D r z\Big]_{z=0}^{9-r^2} dA = \iint\limits_D (9r-r^3)\,dA.$$



$1 \le r \le 2$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

$dA = r\,dr\,d\theta$.

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^2 (9r-r^3)\,r\,dr\,d\theta.$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_1^2 (9r^2-r^4)\,dr. = \pi.\left(3r^3-\frac{r^5}{5}\Big]_{r=1}^{r=2}\right)$$

$$I = \left(24-\frac{32}{5}-3+\frac{1}{5}\right)\pi. = \left(\frac{105}{5}-\frac{31}{5}\right)\pi = \frac{74\pi}{5}.$$

Clave: use las coordenadas polares "bien"

cilíndricas $u_1(r,\theta) \le z \le u_2(r,\theta)$