Cálculo Multivariable - Clases y apuntes de clase

David Gabriel Corzo Mcmath

2020-01-06

Índice general

Capítulo1

Clase - 2020-01-23

1.1. 12.4 Producto Cruz

- ***Definición de "Determinantes":*** *Matriz (arreglo rectangular de números).*
- ***Definición de "Cuadrada":*** *Mismo número de filas y columnas.*
- $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

  # Determinante de orden 2. Matriz de 2x2
- pie:
  $$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-1)(4) = 6 + 4 = 10$$
- Determinante de orden 3: Matriz 3x3 suma de tres determinantes de orden 2:
  $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

  3 matrices de 2x2.
- p.e.
  $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
  $$2(6-0) - 0 + 2(-1-3) = 12 - 8 = 4$$

1.2. Producto Cruz

- Dados dos vectores :
  $$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$
  $$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$$
- **Nos preguntamos:** ¿Cómo se encuentra un vector $\vec{c}$ que es perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$?
  $$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$
  $$\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$
- Resuelva para c_1, c_2, c_3 :
  $$c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0$$
  $$c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 = 0$$
- El producto cruz $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = 0$ es un vector perpendicular a ambos vectores $\vec{a}$ & $\vec{b}$.
  $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \hat{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \hat{k}(a_1b_2 - a_2b_1)$$

- Observaciones:
  - El producto cruz es un vector, mientras que el producto es un número o escalar.
  - El producto cruz **no** es conmutativo $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$.

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(b_2a_3 - a_2b_3) + \hat{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \hat{k}(a_2b_1 - a_1b_2)$$

- Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{a} \times \vec{b} = 15\hat{i} - 10\hat{j} - 3\hat{k}$$

- Verifique $\vec{a} \times \vec{b}$ es ortogonal a $\vec{a}$ & a $\vec{b}$.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 2, 3, 0 \rangle = 30 - 30 + 0 = 0 \therefore \text{ son ortogonales}$$
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 1, 0, 5 \rangle = 15 + 0 - 15 = 0 \therefore \text{ son ortogonales}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp a_1 b$$

- Aclaración: en dos dimensiones $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ No es posible evaluarlo.

- Existen en tres dimensiones pero si se intenta evaluar en cuatro dimensiones la siguiente matriz no es posible:

  En 3-D: $\exists$ En 4-D: $\nexists$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{l} \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

  No es posible evaluarlo.

- Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 15\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}$$

  Entonces... en general:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

Capítulo2

Clase - 2020-01-28

2.1. 12.5 Rectas y planos

- Ecuación de una recta
- Vector posición $\vec{r_0} = \langle x_0, y, z_0 \rangle$
- Vector dirección $\vec{v_0} = \langle a, b, c \rangle$
- Ecuación vectorial: $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$ donde t es el parámetro.
- Ecuaciónes paramétricas:

$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0 + at$$
$$z = z_0 + at$$

- Resuelva para t en las tres ecuaciones:

$$t = \frac{x - x_0}{a} t = \frac{y - y_0}{b} t = \frac{z - z_0}{c}$$

  Estas son las ecuaciónes simétricas de la recta donde $a, b, c \neq 0$.

- Vector dirección $\vec{v} = \langle a, 0, c \rangle$ las ecuaciones en la recta cambian:

$$\underbrace{\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}}_{\text{Vectorial}}$$
$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0$$
$$z = z_0 + ct$$

Entonces queda así:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}$$
$$\underbrace{y = y_0}_{\text{Simétrica}}$$

2.1.1. Ejercicio 3: Encuentre las ecs. simétricas de la recta que pasa por los puntos dados. Encuentre en qué punto la recta interseca al plano xz. pg.41

- P(2,8,-2) & Q(2,6,4)

$$\text{Vector posición } = \overrightarrow{OP} = R_0 = \langle 2, 6, 7 \rangle$$
$$\text{Vector dirección } \overrightarrow{PQ} = \vec{V} = \langle 0, -2, 6 \rangle$$
$$\text{Ec. vectorial } = \vec{r} = \langle 2, 8, -2 \rangle + t\langle 0, -2, 6 \rangle$$
$$\text{Ecs. simétricas } = x = a, \frac{y - 8}{-2} = \frac{z + 2}{6}$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cual es la intersección con el plano xz?

$$\text{Use, y=0} x = 2, \frac{-8}{-2} = \frac{z + 2}{6}$$
$$= 6 \cdot 4 = z + 2 \implies z = 22$$

- La intersección con el plano xz es el punto $(1, 0, 22)$:

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= \langle 4, 6, 10 \rangle \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ} &= \langle 2, 0, 0 \rangle \\ \text{Vectorial: } \vec{r} &= \langle 4, 6, 10 \rangle + t\langle 2, 0, 0 \rangle \\ \text{Paramétricas: } x &= 4 + 2t, y = 6, z = 10 \\ \text{Simétricas: } t &= \frac{x-4}{2}, y = 6, z = 10 \end{aligned}$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cual es el punto de instersección con el plano xz?

  Use: y=0

  Explicación: por la recta $y = 6$ siempre será 6, nunca podrá ser 0, no puede intersecar con el plano xz, **No hay**.

2.2. Rectas paralelas

Dos rectas $\vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + t\vec{v}$ & $\vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + t\vec{v}_2$ son paralelas si y solo si sus vectores de dirección $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son paralelas.

Figura 2.1:

Entones en el espacio tenemos 3 tipos de rectas:

1. Rectas paralelas
2. Rectas intersecan en un punto
3. Rectas Ublicuas (no paralelas & no intersecan)

2.2.1. Ejercicio 4: Determine si los siguientes pares de rectas son paralelas, oblicuas o se intersecan.

-

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{8} = \frac{y-3}{24} = \frac{z-2}{16}, \frac{x-10}{-2} &= \frac{y+15}{-6} = \frac{z+24}{-4} \\ \vec{v}_1 = \langle 8, 24, 16 \rangle, \vec{v}_2 &= \langle -2, -6, -4 \rangle \\ \text{Entoces... }, &\left\langle \frac{8}{-2}, \frac{24}{-6}, \frac{16}{-4} \right\rangle \\ \langle -4, -4, -4 \rangle, &\therefore \text{ Son paralelas} \end{aligned}$$

  El vector dirección está en el denominador.

- $$\begin{aligned} L_1 : x = 3 - 4t, y = 6 - 2t, z = 2 + 0t, t \in IR \\ L_2 : x = 3 + 8s, y = -2s, z = 8 + 2s, s \in IR \\ \text{Utilize una variable parámetro para cada recta} \\ v_1 = \langle -4, -2, 0\rangle, v_2 = \langle 8, -2, 2\rangle \text{ No son paralelas} \\ \text{Analice si las rectas se intersecan} \\ x = x \to 5 - 4t = 3 + 8s \\ y = y \to 6 - 2t = -2s \\ z = z \to 2 = 8 + 2s \to s = -3 \\ 5 - 4 = -22 \to 4t = -27 \to -4t = -27 \to = \frac{27}{4} \\ 6 - 2t = 6 \to 2t = 0 \to t = 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ Como no hay una t única (no es posible $0 \neq \frac{27}{4}$), las dos rctas no se intersecan.

$$\begin{aligned} L_1 \ \& \ L_2 \text{ Son oblicuas} \\ \text{Eliminación Gausiana} \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} 4t + 8s = 2 \\ 2t + 25 = 6 \\ 0t + 2s = -6 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} 0, 0, \text{ número} \implies \text{No hay solución}$$

2.3. La ecuación de un plano

Previamente en 12.1 $ax + by + cz = 0$. Para encontrar la ec. de un plano se necesita:

Figura 2.2:

1. Un punuto sobre el plano P: $\vec{r_0} = \overrightarrow{OP}$
2. Un vector normal u ortognoal al plano: $\hat{n}_0 \langle a, b, c\rangle$

2.3.1. Derivación de la e. plano

$$\begin{aligned} P(x_0, y_0, z_0), Q(x_1, y_1, z_1) \text{ Son dos puntos sobre el plano} \\ \vec{r_0} == \overrightarrow{0P} = \langle x_0, y_0, z_0\rangle \\ \vec{r} = \overrightarrow{0Q} = \langle x, y, z\rangle \end{aligned}$$

El vector $\vec{RP} = \vec{r} + r \vec{-} 0$ está sobre el plano, por lo que tiene que ser ortogonal a $\hat{n}$.

$$\hat{n} \perp \vec{r} - \vec{r_0} \rightarrow \qquad \underbrace{\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0})}_{\text{Ec. vectorial de un plano}}$$

$$\text{Se puede reescribir como:}$$

$$\underbrace{\langle a, b, c\rangle \cdot \langle x + x_0, y - y_0, z - z_0\rangle + c(z - z_0) = 0}_{\text{Ecuación escalar de un plano}}$$

$$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_{0}$$

Para encontrar la ec. de un plano se necesita 3 puntos P,Q,R: **hay infinitas respuestas equivalentes** $\hat{n} = \vec{} \times \vec{}.$

$$\vec{r_0} = \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{0Q}, \overrightarrow{0R}$$

$$\underbrace{\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}}_{\text{Tienen que empezar en el mismo punto}}$$

$$\text{Hat infinitas respuestas:}$$

$$\hat{n} = \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ}$$

2.3.2. Ejercicio 1: pg45 Encuentre la ec. del plano que pasa por los 3 puntos dados.

1. $P(3, -1, 3), Q(8, 2, 4), R(1, 2, 5)$

$$\text{Ecuación del plano : }, \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$
$$\text{Ecuaciónn de la recta : }, \vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$$
$$\vec{r_0} = \langle 8, 2, 4\rangle$$

Encuentre dos vectores que están sobre el plano y que comiencen en el mismo punto.

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle 5, 3, 1\rangle, \vec{v} = \overrightarrow{PR} = \langle -2, 3, 2\rangle$$

$$\text{¡¡ } \hat{n} \text{ es ortogonal a ambos vectores !!}$$

$$\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 12\hat{j} - +21\hat{k}$$

$$\text{Ec. Plano }, \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$
$$\text{Ec. Vectorial }, \langle 3, -12, 21\rangle \cdot \langle x - 8, y - 2, z - 4\rangle = 0$$
$$\text{Escalar }, 3(x - 8) -$$

2. P(0,0,0), Q(1,0,2), y R(0,2,3)

$$\text{Vector posición: } \vec{r_0} = \langle 0, 0, 0\rangle$$

$$\text{dos vectoes sobre el plano: } \begin{array}{l} \vec{PQ} = \langle 1, 0, 2\rangle \\ \vec{PR} = \langle 0, 2, 3\rangle \end{array}$$

$$\text{Vector normal: } \hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \text{terminar} & & \end{vmatrix}$$

3. Ecuación del plano:

$$-4x - 3y + 2z = 0$$

2.4. Rectas paralelas v_1 y v_2 son paralelos

Dos planos $\hat{n_1} \cdot (\vec{r} - \vec{r_1}) = 0$ y $\hat{n_2} \cdot (\vec{r} - \vec{r_2}) = 0$ son paralelas sí y sólo si $\hat{n_1}$ y $\hat{n_2}$ son paralelas. En caso que no sean paralelas, se puede encontrar el ángulos de intersección entre dos planos.

Capítulo3

Clase - 2020-01-30

3.1. Resolución de corto

- Determine el área del triángulo entre los puntos P(), Q(), R():

$$\begin{aligned} \vec{a} = \overrightarrow{PQ} &= \langle 4, 3, -2 \rangle \\ \vec{b} = \overrightarrow{PR} &= \langle 5, 5, 1 \rangle \\ \text{Área } &= \frac{1}{2} \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| \\ \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} &= 13\hat{\imath} - 14\hat{\jmath} + 5\hat{k} \\ \text{Área } &= \frac{1}{2}\sqrt{} \end{aligned}$$

3.2. Rectas y planos

- Ecs. Rectas: $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$

$$\text{si } a \neq b \neq c \neq 0 \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

- Paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$

- Ecuación de plano:

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \cdot \vec{r} - \vec{r_0} \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\ \hat{n} &= \vec{a} \times \vec{b} \end{aligned}$$

3.2.1. Ejercicios

1. Considere los planos $x + y = 0$ & $x + 2y + z = 1$.

   a) Determine si los planos son paralelos so no lo son encuentre el ángulo entr ellos:

$$\begin{aligned} \hat{n_1} &= \langle 1, 1, 0 \rangle \\ \hat{n_2} &= \langle 1, 2, 1 \rangle \\ \therefore \text{ Los dos planos no son paralelos} \end{aligned}$$

   - El $\hat{n_1}$ & $\hat{n_2}$ no son necesariamente ortogonales.

$$\cos\theta = \frac{\hat{n_1}\cdot\hat{n_2}}{|\hat{n_1}|\,|\hat{n_2}|} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$
$$\cos\theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

2. Encuentre la ec. de la recta que interseca a ambos planos $x+y=0$ & $x+2y+z=1$:

$$r = \vec{r_0} + t\vec{v}$$
Dos puntos sobre la recta
Como la recta esta en ambos planos, se debe resolver el sig. sistema de ecuaciones
$$x+y=0 \implies x=-y$$
$$x+2y+z=1 \implies y=z-1$$
z tiene cualquier valor, ahora encontrar escogiendo cualquier punto sobre la recta, en este caso 0
Primer punto $\quad z=0$
$y=1$
$x=-1$
$\therefore \langle -1,1,0\rangle$
Segundo punto $\quad z=1$
$y=0$
$x=0$
$\therefore \langle 0,0,1\rangle$

3. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por P(-1,1,0) y Q$\underbrace{(0,0,1)}_{r_0}$:

$$\vec{r_0} = \langle 0,0,1\rangle\langle -1,1,0\rangle$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{QP}0\,\langle -1,1,-1\rangle$$
Ecuaciones paramétricas de la recta:
$$x = 0-t \quad y = 0+t \quad z = 1-t$$

4. Solución alterna:

$$x=-y \quad y = 1-z \qquad \text{Más incognitas que ecuaciones.}$$
$$x, y \;\text{ ó }\; z \quad \text{pueden tener cualquier valor} \quad z=t$$
$$x = -1+t$$
$$y = 1-t \;\; \therefore v_2 = \langle 1,-1,1\rangle \quad \vec{r_0} = \langle -1, 1-0\rangle$$
$$t = t$$

5. Solución geométrica:

- Encuentre un punto en ambos planos (0,0,1).
- L arecta está en el plano I, entonces la recta es perpendicular al vector normal del plano I.
- Está en el plano z, entonces también es perpendicular al segundo vector normal.

- $\therefore$ la recta es perpendicular a ambos $\hat{n_1}$ & $\hat{n_2}$

$$\vec{v} = \hat{n_1} \times \hat{n_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\text{Ecuación de la recta:} \quad r = \langle 0, 0, 1 \rangle + t \langle 1, -1, 0 \rangle$$

6. Ejercicio 3: Encuentre el punto en el que la línea recta $x = 1 + 2t$, $y = 4t$, $z = 5t$ interseca al plano. $x - y + 2z = 17$.

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 4t \\ z &= 5t \\ &\text{Plano} \\ x - y + 2z = 17 \quad 1 + 2t - 4t + 10t &= 17 \\ 8t = 16 &\implies \therefore t = 2 \end{aligned}$$

El punto de intersección es (5,8,10).

7. Ejercicio 4: Encuentre una ec. del plano que contiene la recta $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 4 - 3t$ y es paralela a plano $5x + 2y + z = 1$.

- Cualquier punto sobre la recta que también esté sobre el plano, t= 0.

$$\begin{aligned} \text{Evaluemos en t=0} \quad x = 1, \, y = 2, \, z &= 4 \\ \vec{r_0} &= \langle 1, 2, 4 \rangle \end{aligned}$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cómo se encuentra $\hat{n}$?
- El vectos de dirección de la recta $v = \langle 1, -1, -2 \rangle$ es paralelo al plano.
- Como es paralelo al seguno plano, entonces tiene que ser perpendicular $\hat{n_2} = \langle 5, 2, 1 \rangle$
- Lo que ocurre entonces es:

$$\begin{aligned} \vec{r_0} = \langle 1, 2, 4 \rangle \quad \hat{n} &= \langle 5, 2, 1 \rangle \\ \text{Ec. Plano:} \quad \implies \quad 5(x - 1) + 2(y - 2) + 1(z - 4) &= 0 \end{aligned}$$

8. Ejercicio 5: Encuentre los números directores para la recta de intersección entre los planos $x+y+z = 1$ & $x + 2y + 3z = 1$.

- ***Definición de "numeros directores":*** *a,b,c del vector de dirección* $\langle a, b, c \rangle$
- La recta es ortogonal a ambos vectores normales:

$$\hat{n_1} = \langle 1, 1, 1 \rangle \quad text\&\hat{n_2} = \langle 1, 2, 3 \rangle \quad \text{de ambos planos}$$

$$\vec{v} = \hat{n_1} \times \hat{n_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\text{Los números directores:} \quad a = 1, b = 2, c = 1$$

9. Ejercicio 6: Encuentre las ecs. aparamétricas de la recta que pasa por el punto (0,1,2), que es paralelo al plano $x + y + z = 2$ y es perpendicular a la recta $r = \langle -2t, 0, 3t \rangle$.

$$L_1 r = \vec{r_0} + t\vec{v} \quad r_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle$$

- Aclaraciones: L_1 es la incógnita que tenemos que encontrar.
- **Nos preguntamos:** ¿Cómo se encuentra r?
- Plano I: $\hat{n} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ es perpendicular al plano, es paralelo a L_1.
- Recta II: $\hat{v_2} = \langle -2, 0, 3 \rangle$ es perpendicular a L_1
- La recta es perpendiculae a $\hat{n}$ y a $\vec{v_2}$

$$v = \hat{n} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$r_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle$$

$$v = \hat{v_2} \times \hat{n} \qquad \text{Ecuaciones paramétricas:}$$

$$x = 0 - 3t$$
$$y = 1 - 5t$$
$$z = 2 + 2t$$

Capítulo4

Clase - 2020-02-04

4.1. 13.1 Funciones vectoriales y curvas en el espacio

- Una función vectorial $\vec{r} : R \implies V_3$:

$$\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), z(t) \rangle$$

La variable t es un parámetro.

- Dominio: Números reales, Rango: vector 3D:

$$\vec{r}\mathbb{R} \implies V_3 \quad \vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$$
$$\text{t es un parámetro} \quad \vec{r} = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$$

- Ejemplo de una función vectorial:

$$\vec{r} = \langle a, b, c \rangle + t \langle d, e, f \rangle$$
$$\vec{r} = \langle a + td, b + et, c + tf \rangle$$
$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

- Ecs. Paramétricas de una función vectorial:
- Dominio de ina función vectorial: encuentre el dominio de cada función componente. El dominio de $\vec{r}$ es la intersección de los dominios de cada función componente.

4.1.1. Ejercicios

1. Encuentre el dominio:

$$r(t) = \left\langle \sqrt{r^2 - 9}, e^{5ln(t)}, ln(t + 5) \right\rangle$$
$$\text{Evadir raíces negativas, y ln(0)}$$
$$\sqrt{t^2 - 9} \quad \implies \quad \text{Definida} \quad t^2 \geq 9$$
$$e^{\sin(t)} \quad \text{siempore definida}$$
$$ln(t + 5) \quad \text{Definida cuando} \quad t + 5 > 0 \quad (-5, \infty)$$
$$\therefore \text{ El dominio es de} \quad (-5, \infty) \cup (-5, -3) \cup (-3, 3) \cup [3, \infty)$$

Recordar: [a,b] el numero si es parte del dominio a,b son partes del dominio. (a,b) los puntos a,b no son parte del dominio.

2.

$$\vec{s}(t) = \left\langle \sin^3(t^2), \cosh(\frac{t}{t^2 + 1}), \frac{1}{e^t + 4} \right\rangle$$
$$sin^3(t^2), ID_{f(t)} = IR$$
$$\cosh(\tfrac{t}{t^2+1}), ID_{g(t)} = IR$$
$$\tfrac{1}{e^t+4}, ID_{h(t)} = IR$$
$$\therefore \text{ Dominio de } \vec{s}(t) = (-\infty, \infty)$$
$$e^{+}4 \neq 0 \implies e^t = -4 \implies t = \underbrace{ln(-4)}_{\text{indefinido}}$$

4.2. Limites y continuidad

- $$\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t) \right\rangle$$
- Evalúe el límite de cada función componente.
- Si no existe por lo menos un límite de una función componente, entonces $\lim_{t\to a} \vec{r}(t)$ no existe.
- f(t) está definida en t=a
$$\lim_{t\to a} f(t) = f(a)$$
- Si se indefine y tiene forma de $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ usar L'Hôpital.
$$\lim_{t\to a} \frac{f(t)}{g(t)} \underbrace{=}_{\frac{0}{0}} \lim_{t\to a} \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad \text{L'Hopital}$$
- Contínua en $t = a$ si $\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$
- Evite asíntotas verticales, saltos y agujeros. Ejemplo:
$$\lim_{t\to a} \frac{\sin(x)}{x} \underbrace{=}_{\text{LH}} \lim_{t\to a} \frac{cos(x)}{1} = 1$$

4.2.1. Ejercicios

- Sea $\vec{r}(t) = \left\langle \frac{\tan(\pi t)}{t}, e^{t-2}, \frac{ln(t-1)}{t^2-1} \right\rangle$.
- Analice si la función $\vec{r}(t)$ es contínua en $t = 2$.
$$\vec{r}(t) = \left\langle \frac{\tan 2\pi}{2}, e^0, \frac{ln(1)}{3} \right\rangle$$
$$\lim_{t\to 2} \underbrace{\frac{\tan \pi t}{t}}_{\frac{0}{2}} = 0$$
$$\lim_{t\to 2} e^{t-2} = 1$$
$$\lim_{t\to 2} \frac{ln(t-1)}{t^2-1} = 0$$
$$\therefore \vec{r} \text{ si es contínua en t=2 } \lim_{t\to 1} \vec{r}(t) = \vec{r}(2)$$
- Encuentre $\lim_{t\to 1} \vec{r}(t)$ analice el límite de cada función componente por separado.
$$f: \lim_{t\to 1} \frac{\tan 2\pi}{2} = \frac{0}{1}$$
$$g: \lim_{t\to 1} e^{t-2} = e^{-1}$$
$$h: \lim_{t\to 1} \frac{ln(t-1)}{t^2-1} = \text{ No existe, por ln(0) estar indefinido.}$$
- Analice si $\vec{r}(t)$ es contínua e t=1.
$$\underbrace{\lim_{t\to 1} \vec{r}(t) = \vec{r}(1)}_{\text{No es contínua en t=1, r(1) está indefinida.}}$$

- Agujero $\vec{s}(t) = \left\langle \frac{\tan \pi t}{t-1}, e^{t-2}, \frac{ln(2t-1)}{t^2-1} \right\rangle$
  No es contínua en t=1, pero su límite existe.

$$\lim_{t\to 1} \frac{\tan \pi t}{t-1} \underbrace{=}_{LH} \lim_{t\to 1} \frac{\pi \sec^2 \pi t}{1} = \frac{\pi}{(\cos \pi)^2} = \pi$$

$$\lim_{t\to 1} e^{t-2} = e^{-}1 = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{t\to 1} \frac{\ln(2t-1)}{t^2-1} \underbrace{=}_{\frac{0}{0}} = \lim_{t\to 1} \frac{\frac{2}{2t-1}}{2t} = \lim_{t\to 1} \frac{2}{2t(2t-1)} = \frac{1}{1(2-1)} = 1$$

$$\therefore \lim_{t\to 1} \left\langle \pi, \frac{1}{e}, 1 \right\rangle \quad \text{es un agujero } \vec{s}(1) \text{ está indefinido}$$

4.3. Curvas en el espacio

$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$
$$z = h(t)$$

Figura 4.1: Curvas paramétricas en el espacio

4.3.1. Espirales

- Grafique la curva $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = \underbrace{2\hat{\imath}\sin(t)}_{x} + \underbrace{2\hat{\jmath}\cos(t)}_{y} + \underbrace{\hat{k}\frac{t}{\pi}}_{z}$$

t	x	y	z
0	0	2	0,5
$\frac{\pi}{2}$	2	0	0,5
π	0	-2	1
$\frac{3\pi}{2}$	2	0	1,5
2π	0	2	2

Figura 4.2: Curva paramétrica

- Grafique:

$$\vec{r}(t) = \langle \sin \pi t, t, \cos \pi t \rangle$$

$$\text{Graficar la circumferencia } x^2 + z^2 = 1\,, y = 0$$

$$\vec{r}(0) = \langle 0, 0, 1 \rangle \quad \text{El vector que nos servirá para delimitar la gráfica del espiral}$$

$$\text{Por ejemplo: } \vec{s}(t) = \left\langle \sin t, t^2, \cos t \right\rangle$$

Capítulo5

Clase - 2020-02-06

5.1. 13.2 Cálculo con funciones vectoriales, pg.55

- Derivadas:

$$\vec{r}'(t) \quad \text{Respecto a t}$$

- Integrales:

$$\int \vec{r}'(t)dt \quad \text{Respecto a t}$$

5.1.1. Deriviadas

- $$\vec{r}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$$

- Como la fucnión $\vec{r}(t)$ está definida por tres funciones componentes se puede hacer:

$$\vec{r}'(t) = \lim_{h\to 0} \left\langle \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}_{f'(t)}, \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}}_{g'(t)}, \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{h(t+h) - h(t)}{h}}_{h('t)} \right\rangle$$

- Derivada entonces es :

$$\vec{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

5.1.2. Integrales

- Integral:

$$\int \vec{r}(t)dt == \int (f\hat{\imath} + g\hat{\jmath} + h\hat{k})dt$$

$$\hat{\imath}\int f dt + \hat{\jmath}\int g dt + \hat{k}\int h dt$$

Integrar la función componente.

5.2. Ejercicios

1. Encuentre la 1era y segunda derivada de las siguientes funciones:

$$\vec{r}(t) = \left\langle \sin(4t), t^2, ln(\sin(t)) \right\rangle$$
$$\vec{r}'(t) = \left\langle 4\cos(4t), 2t, \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \right\rangle$$
$$\vec{r}'(t) = \langle 4\cos(4t), 2t, \cot(t) \rangle$$

$$\vec{r}''(t) = \langle f''(t), g''(t), h''(t) \rangle$$
$$\therefore \quad \vec{r}''(t) = \left\langle -16\sin(4t), 2, -\csc^2(t) \right\rangle$$

2. Derive: $\vec{s}(t) = \hat{\imath}\tan(4t) + hatjln(4t+1) + \hat{k}(5-2t)^{\frac{1}{2}}$

$$\vec{s}'(t) = 4\hat{\imath}(\sec(4t))^2 + \hat{\jmath}4(4t+1)^{-1} - \hat{k}(5-2t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\vec{s}''(t) = 8\hat{\imath} \times \sec(4t) \times \sec(4t) \times \tan(4t) \times 4 - 16\hat{\jmath}(4t-1)^{-2} - \frac{\hat{k}}{2}(5-2t)^{-\frac{3}{2}} \times (-2)$$

$$\vec{s}''(t) = 32\hat{\imath} \times \sec^2(4t) \times \tan(4t) - 16\hat{\jmath}(4t-1)^{-2} - \frac{\hat{k}}{2}(5-2t)^{-\frac{3}{2}} \times (-2)$$

5.3. Recordatorios & rectas tangentes de funciones vectoriales

- ***Recordar lo siguiente:*** *$f'(a)$ es igual a la pendiente de la drecta tangeente a $f(x)$ en $x = a$.*

- ***Recordar lo siguiente:*** *La recta tangente.*

$$L_1 : \quad y = f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \text{Ec. Recta Tangente}$$

- Con una función vectorial:

$$\vec{r} = \langle f, g, h \rangle, \qquad x = f(t),\, y = g(t),\, z = h(t)$$

Hay ecuaciones paramétricas para cada variable:

$$\vec{r}'(a) = \langle f'(a), g'(a), h'(a) \rangle$$

Vector de pendientes de rectas tangentes a la curva $\vec{r}(t)$.

- La derivada de una función vectorial se le da elnombre de **"vector tangente"** $\vec{r}(t) : \vec{r}'(a)$.

- Recta tangente: es ahora una función vectorial.

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(a) + \vec{r}'(a)t$$

- Ecs. Paramétricas:

$$x = f(a) + f'(a)t$$
$$y = g(a) + g'(a)t$$
$$z = h(a) + h'(t)t$$

- Vector tangente: $r'(a)$ en $t = a$

- Vector tangente unitario: $\frac{r'(a)}{|r'(a)|} = \vec{T}(a)$

5.4. Ejercicios

- Encuentre las ecs. paramétricas de la recta tangente a la curva : $s(t) = \langle 2\cos(t), 2\sin(t), 4\cos(2t)\rangle$ en el punto $(\sqrt{3}, 1, 2)$:

$$\text{Recta tangente:} \quad \vec{r}_T(t) = \vec{r}(a) + t\vec{r}'(a)$$

$$\vec{r}_T(a) = \left\langle \sqrt{3}, 1, 2 \right\rangle$$

$$\text{Derivada:} \quad \vec{r}'(t) = \langle -2\sin(t), 2\cos(t), -8\sin(2t)\rangle$$

$$\textbf{Nos preguntamos: } \text{¿Cómo encuentro “a” ? igualamos} \quad r(t) = \left\langle \sqrt{3}, 1, 2 \right\rangle$$

$$2\cos(t) = \sqrt{3} \implies \cos(t) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \implies t = \tfrac{\pi}{6}$$
$$2\sin(t) = 1 \implies 2\sin(\tfrac{\pi}{6}) = 2 \times \tfrac{1}{2} = 1$$
$$4\cos(2t) = 2 \implies 4\cos(\tfrac{\pi}{3}) = 4 \times \tfrac{1}{2} = 2$$

$$\text{Vector tangente:} \quad \vec{r}'(\frac{\pi}{6}) = \left\langle -2\sin(\frac{\pi}{6}), 2cos(\frac{\pi}{6}), -8\sin(\frac{\pi}{3}) \right\rangle$$

$$\vec{r}_T(t) = \left\langle \sqrt{3}, 1, 2 \right\rangle + t \left\langle -1, \sqrt{3}, -4\sqrt{3} \right\rangle$$

$$\therefore$$

$$x = \sqrt{3} - 1$$
$$y = 1 + \sqrt{3}t$$
$$z = 2 - 4\sqrt{3}t$$