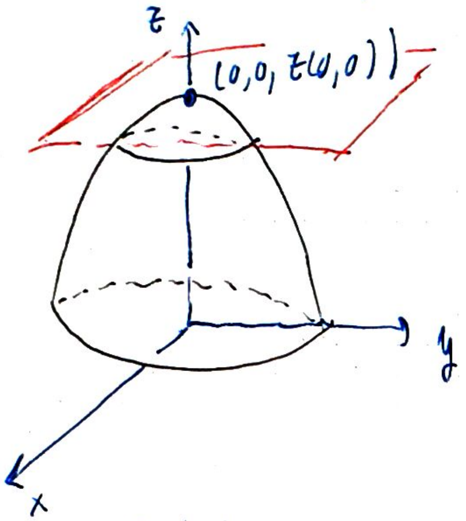
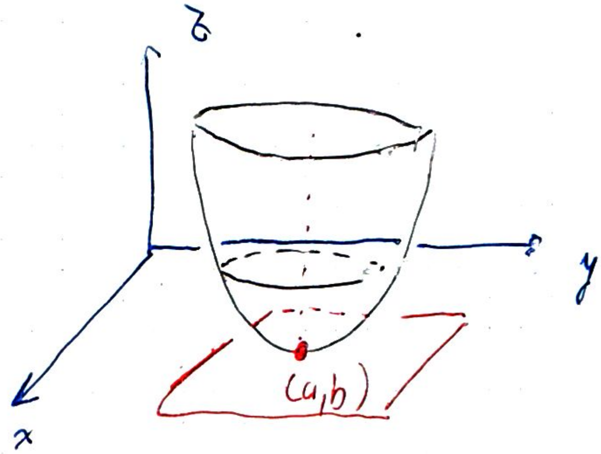
!

14.7 Máximos y mínimos.





Máximo Relativo

$f(a,b) > f(x,y)$

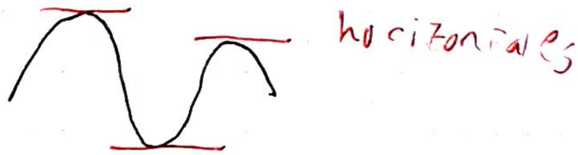
(x,y) cerca de (a,b)

mínimo relativo.

$f(a,b) < f(x,y)$

(x,y) cerca de (a,b)

Funciones Una variable



Números críticos: $f'(c) = 0$ ó $f'(c)$ no existe

2da Derivada: $f''(c) < 0$ $\cap$ Máximo Relativo en $x = c$.

$f''(c) > 0$ $\cup$ mínimo relativo en $x = c$

$f''(c) = 0$ Inconcluso.

Funciones Dos variables.

Puntos críticos. $f_x(a,b) = 0$ & $f_y(a,b) = 0$.

No es suficiente $f_{xx} < 0$ & $f_{yy} < 0$ Max Relativo.

$\cancel{f_{xx} > 0 \ \& \ f_{yy}} > 0$ min relativo

Prueba 2nda Derivada: (a,b) es un punto crítico.
y $f(x,y)$ tiene segundas derivadas continuas.

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Max Relativo: $D(a,b) > 0$ & $f_{xx} < 0$

Mínimo Relativo: $D(a,b) > 0$ & $f_{xx} > 0$.

Punto de Silla: $D(a,b) < 0$. ni max ni min.

Inconcluso: $D(a,b) = 0$

Ejemplo: Considere la función $z = x^2 - y^2$.

Puntos Críticos
$$z_x = 2x = 0 \quad\Rightarrow\quad x = 0$$
$$z_y = -2y = 0 \qquad\quad y = 0$$

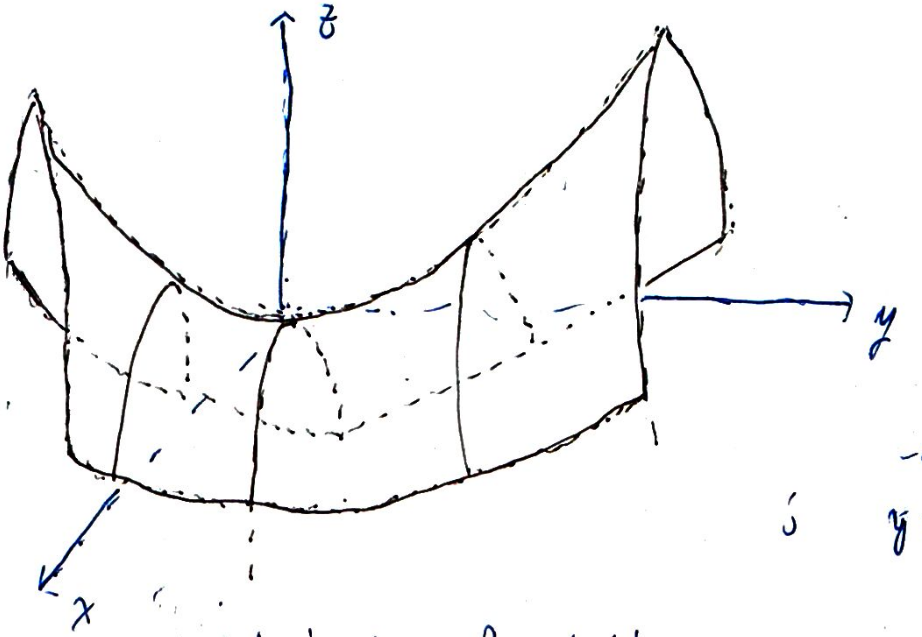
único punto crítico $(0,0)$.

Prueba 2da Derivada
$$D(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

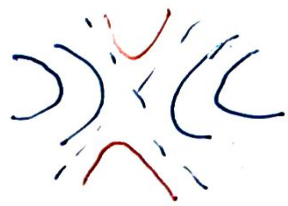
El punto $(0,0)$ es un punto de silla.

$z(0,y) = -y^2$ hay máximos

$z(x,0) = x^2$ hay mínimos



curvas de nivel
son hiperbolas



cortes verticales $x = a$
ó $y = b$ son parábolas.

Hiperboloide Parabólico

Ejercicio 1: Encuentre los maxs y mínimos relativos
de las sigs. funciones.

a. $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 6x + 16y$.

$f_x = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

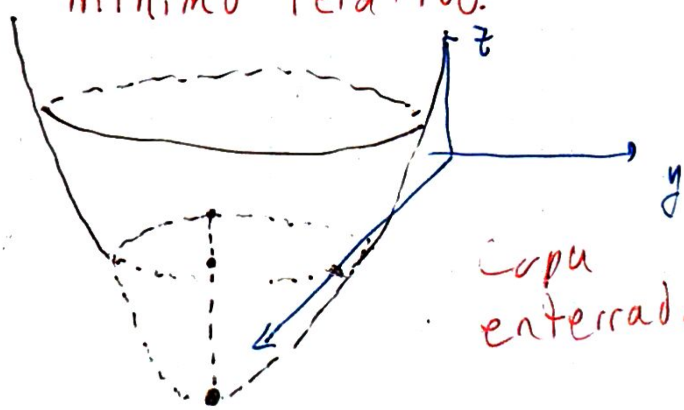
$f_y = 8y + 16 = 0 \Rightarrow y = -2$.

único pto crítico
$(3,-2)$.

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 16 > 0.$$

$f_{xx} = 2 > 0$. mínimo relativo.

Valor min relativo
$f(3,-2) = -25$



copa
enterrada.

b. $g(x,y) = 2x^2 + xy + y^2 + 100.$

$g_x = \underline{\underline{4x}} + y = 0 \Rightarrow y = -4x \Rightarrow y = 0$

$g_y = x + \underline{\underline{2y}} = 0 \Rightarrow x - 8x = -9x = 0 \Rightarrow x = 0$

único punto crítico.

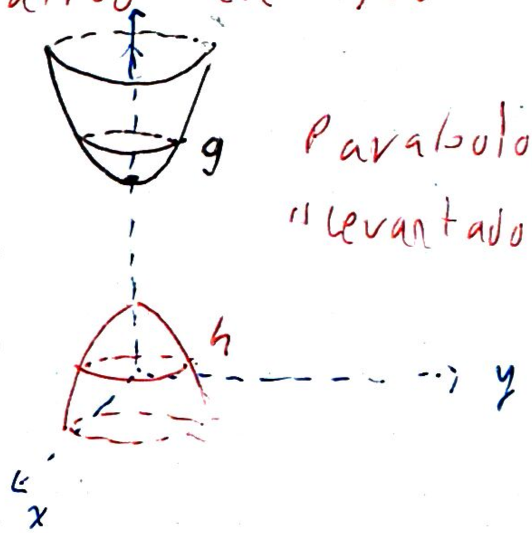
$$D(x,y) = \begin{vmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8-1 = 7. > 0$$

$g_{xx} = 4 > 0$ mínimo relativo en $(0,0)$

valor mínimo relativo

$g(0,0) = 100$

Rango $[100, \infty)$



Paraboloide "levantado"

c. $h(x,y) = 30 - x^2 - 2y^2 + 4x - 12y.$

$h_x = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4/-2 = 2$

$h_y = -4y - 12 = 0 \quad y = 12/-4 = -3$

único número crítico. es $(2,-3)$

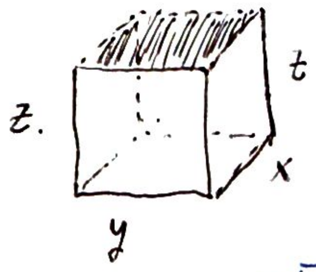
$$D(x,y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 > 0 \qquad h_{xx} = -2 < 0$$

Máximo relativo en $(2,-3)$

Valor Max relativo es 38.

Problemas Aplicados.

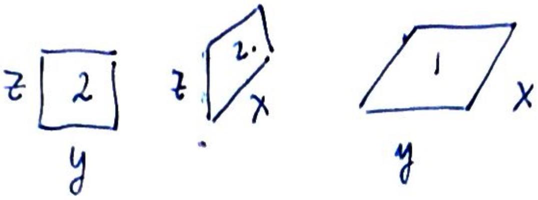
Ejercicio 2: Una caja de cartón sin tapa debe tener un volumen de $32{,}000 \text{ cm}^3$.
Calcule las dimensiones x, y, z que minimicen la cantidad de cartón utilizado. No realice la prueba 2da Derivada.

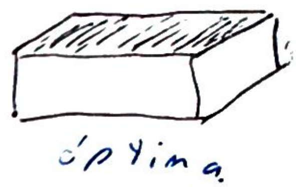


Volumen: $xyz = 32{,}000$

Área: $A = 2zy + 2zx + xy$. } min

5 paneles





min $A = 2zy + 2zx + xy$. 3 variables.

S.A. $z = \dfrac{32{,}000}{xy}$. $x, y, z > 0$.

$$A(x,y) = \frac{64000}{x} + \frac{64{,}000}{y} + xy.$$

$A_x = 0$: $-\dfrac{64000}{x^2} + y = 0 \Rightarrow y = 64000\, x^{-2}$.

$A_y = 0$: $-\dfrac{64{,}000}{y^2} + x = 0$ $\quad y^2 = [64{,}000]^2 x^{-4}$.

sustituya en A_y $\quad -\dfrac{64{,}000}{(64{,}000)^2 x^{-4}} + x = 0$

$$-\frac{x^4}{64000} = -x$$

$$\frac{x^4}{x} = 64 \cdot 1000$$

$$x = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{1000} = 4 \cdot 10 = 40. = 4 \cdot 10$$

$$y = \frac{64,000}{x^2} = \frac{64 \cdot 1000}{16 \cdot 100} = 4 \cdot 10 = 40.$$

$$z = \frac{32,000}{40 \cdot 40} = \frac{32,000}{1,6,00} = 20$$

Dimensiones que minimizan el área $\quad x = y = 40, \quad z = 20$

Ejercicio 3: Discriminación de Precios.

Demanda $\quad p_1 = 104 - q_1. \qquad$ producción $q_1, q_2.$

$\qquad\qquad\quad p_2 = 84 - q_2.$

Costos $\quad C = 600 + 4q_1 + 4q_2.$

Encuentre los precios y las cantidades q_1 & q_2 a la que deben venderse los productos para maximizar la utilidad. = ingresos - costos.

Utilidad: $U(q_1, q_2) = p_1 q_1 + p_2 q_2 \underbrace{- 600 - 4q_1 - 4q_2}_{\text{costos.}}$

$$U(q_1, q_2) = 104q_1 - q_1^2 + 84q_2 - q_2^2 - 600 - 4q_1 - 4q_2.$$

$$U(q_1, q_2) = -q_1^2 - q_2^2 + 100q_1 + 80q_2 - 600.$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = -2q_1 + 100 = 0 \qquad\qquad q_1 = 50$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = -2q_2 + 80 = 0 \qquad\qquad q_2 = 40.$$

Único punto crítico $(q_1 = 50,\ q_2 = 40)$

$p_1 = 54,\ p_2 = 44$ } discriminación

Utilidad Máxima:

$U(50,40) = 54 * 50 + 44 * 40 - 600 - 360.$

$2,700 + 1760 - 960 = 3,500.$

Utilidad máxima.

Prueba 2da Derivada : $D(x,y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$

$U_{q_1 q_1} = -2 < 0$ Máximo Relativo.