CÁLCULO MULTIVARIABLE PARCIAL 2

Resuelva SÓLO los problemas indicados (20 pts. c/u) en el mensaje recibido en su correo. Debe enviar su examen escaneado antes de las 2 pm al profesor (cfketelaar@ufm.edu) y al auxiliar (josuerodas@ufm.edu).

1. La ecuación implícita de una superficie S es $z^2 + zx + y^2 = 9$, encuentre:

   (a) Encuentre las primeras derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución:
Realice derivación implícita

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{z}{2z+x} \qquad \textbf{(4 pts.)}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y}{2z+x} \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

   (b) Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $P(4,2,1)$.

Solución:
Evalúe las derivadas parciales en $P(4,2,1)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2+4} = -\frac{1}{6} \qquad \textbf{(3 pts.)}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4}{2+4} = -\frac{2}{3} \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

La ecuación del plano tangente es:

$$z = z_0 + z_x(x-x_0) + z_y(y-y_0) \qquad \textbf{(2 pts.)}$$
$$z = 1 - \frac{1}{6}(x-4) - \frac{2}{3}(y-2) \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

2. La ecuación implícita de una superficie S es $z^3 + x^2 z + y = 8$, encuentre:

(a) Encuentre las primeras derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución:

Realice derivación implícita.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2xz}{3z^2 + x^2} \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{1}{3z^2 + x^2} \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

(b) Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $P(2, 3, 1)$.

Solución:

Evalúe las derivadas parciales en $P(4, 2, 1)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4}{3+4} = -\frac{4}{7} \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{3+4} = -\frac{1}{7} \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

La ecuación del plano tangente es:

$$z = z_0 + z_x(x - x_0) + z_y(y - y_0) \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$z = 1 - \frac{4}{7}(x - 2) - \frac{1}{7}(y - 3) \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

3. La temperatura en que experimenta una partícula en el punto $P(x,y)$ está dada por $T(x,y) = 6\ln\left(x^3+2y^2-34\right)$. Encuentre la razón de cambio (es un entero) de la temperatura en el punto $P(3,2)$ en la dirección del vector $\langle 12,\ 5\rangle$.

> **Solución:**
>
> $$\begin{aligned}
\nabla T(x,y) &= \left\langle \frac{18x^2}{x^3+2y^2-34}, \frac{24y}{x^3+2y^2-34} \right\rangle && \textbf{(6 pts.)}\\
x^3+2y^2-34 &= 27+8-34 = 43-34 = 1 \\
\nabla T(3,2) &= \left\langle \frac{18(9)}{1}, \frac{24(2)}{1} \right\rangle = \langle 162,\ 48\rangle && \textbf{(6 pts.)}\\
|\langle 12,\ 5\rangle| &= \sqrt{144+25} = 13 && \textbf{(2 pts.)}\\
\mathbf{u} &= \tfrac{1}{13}\langle 12,\ 5\rangle && \textbf{(2 pts.)}\\
D_{\mathbf{u}}T &= \nabla T\cdot\mathbf{u} = \tfrac{1}{13}\left(162(12)+48(5)\right) && \textbf{(2 pts.)}\\
D_{\mathbf{u}}T &= \frac{2184}{13} = 168 && \textbf{(2 pts.)}
\end{aligned}$$

4. Un alpinista escala el volcán de Atitlán cuya altura en el punto $P(x,y)$ está dada por $H(x,y) = 3535 - 10(x^2+4+4y^2)^{1/2}$. Encuentre la razón de cambio de la altura en el punto $P(4,2)$ en la dirección del vector suroeste $\langle -1,\ -1\rangle$.

> **Solución:**
>
> $$\begin{aligned}
\nabla H(x,y) &= \left\langle \frac{-10x}{\sqrt{x^2+x+4y^2}}, \frac{-40y}{\sqrt{x^2+4+4y^2}} \right\rangle && \textbf{(6 pts.)}\\
\sqrt{x^2+4+4y^2} &= \sqrt{16+4+4(4)} = \sqrt{36} = 6 \\
\nabla H(4,2) &= \left\langle \frac{-10(4)}{6}, \frac{-40(2)}{6} \right\rangle = \left\langle -\frac{20}{3}, -\frac{40}{3} \right\rangle && \textbf{(6 pts.)}\\
|\langle -1,\ 1\rangle| &= \sqrt{2} && \textbf{(2 pts.)}\\
\mathbf{u} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\langle -1,\ -1\rangle && \textbf{(2 pts.)}\\
D_{\mathbf{u}}T &= \nabla T\cdot\mathbf{u} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\tfrac{20}{3}+\tfrac{40}{3}\right) && \textbf{(2 pts.)}\\
D_{\mathbf{u}}T &= \frac{20}{\sqrt{2}} && \textbf{(2 pts.)}
\end{aligned}$$

5. Considere la función $f(x,y) = (y^2-4)(e^x-2)$.

(a) Encuentre los puntos críticos.

Solución:
Iguale las derivadas parciales de f a cero.

$$\begin{array}{lcll} f_x = (y^2-4)e^x = 0 & \Rightarrow & e^x \neq 0 \quad y = \sqrt{4} = \pm 2 & \textbf{(4 pts.)} \\ f_y = 2y(e^x-2) = 0 & \Rightarrow & y = 0 \quad x = \ln 2 & \textbf{(4 pts.)} \end{array}$$

Puntos críticos: $(\ln 2, 2)$ **(2 pts.)** y $(\ln 2, -2)$ **(2 pts.)**.

(b) Clasifique cada pto. crítico como máximo relativo, mínimo relativo o punto de silla.

Solución:
Encuentre el Hessiano.

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (y^2-4)e^x & 2ye^x \\ 2ye^x & 2(e^x-1) \end{vmatrix} \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

Análisis para cada punto crítico.

$$D(\ln 2, +2) = \begin{vmatrix} 0 & +8 \\ +8 & 0 \end{vmatrix} = -64 < 0 \quad \textbf{(1 pt.)} \text{ Punto de Silla} \quad \textbf{(1 pt.)}$$

$$D(\ln 2, -2) = \begin{vmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} = -64 < 0 \quad \textbf{(1 pt.)} \text{ Punto de Silla} \quad \textbf{(1 pt.)}$$

6. Considere la función $g(x,y) = (9-x^2)(1-\ln y)$.

(a) Encuentre los puntos críticos.

Solución:

$$g_x = -2x(1-\ln y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad y = e \quad \textbf{(4 pts.)}$$

$$g_y = -\frac{(9-x^2)}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \quad x = -3 \quad \textbf{(4 pts.)}$$

Puntos críticos: $(3, e)$ **(2 pts.)** y $(-3, e)$ **(2 pts.)**.

(b) Clasifique cada pto. crítico como máximo relativo, mínimo relativo o punto de silla.

Solución:

Encuentre el Hessiano.

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2(1-\ln y) & 2x/y \\ 2x/y & \dfrac{(9-x^2)}{y^2} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

Análisis para cada punto crítico.

$$D(-3,e) = \begin{vmatrix} 0 & -6/e \\ -6/e & 0 \end{vmatrix} = -\frac{36}{e} < 0 \quad \textbf{(1 pt.)} \text{ Punto de Silla } \quad \textbf{(1 pt.)}$$

$$D(+3,e) = \begin{vmatrix} 0 & +6/e \\ +6/e & 0 \end{vmatrix} = -\frac{36}{e} < 0 \quad \textbf{(1 pt.)} \text{ Punto de Silla } \quad \textbf{(1 pt.)}$$

7. La función de producción de una fábrica es $Q = LK$. La empresa dispone de un presupuesto anual de \$ 640 mil para contratar L trabajadores y K máquinas a un costo anual de \$ 10 mil por trabajador y \$ 8 mil por máquina. Encuentre la producción máxima y cuántos trabajadores y máquinas se deben adquirir.

Solución:

La producción se debe maximizar sujeta a una restricción de presupuesto.

$$\max Q = LK, \qquad 10L + 8K = 640 \qquad \textbf{(2 pts.)}$$
$$F(L, K, \lambda) = LK + \lambda(640 - 10L - 8K) \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Encuentre los puntos críticos.

$$F_L = K - 10\lambda = 0 \qquad K = 10\lambda \qquad \textbf{(2 pts.)}$$
$$F_K = L - 8\lambda = 0 \qquad L = 8\lambda \qquad \textbf{(2 pts.)}$$
$$F_\lambda = 640 - 10L - 8K = 0 \qquad 10L + 8K = 640 \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Reemplace K & L en la restricción y resuelva para λ.

$$80\lambda + 80\lambda = 160\lambda = 640 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 4 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

Por lo que $L = 32$ & $K = 40$. **(4 pts.)**

La producción máxima es $Q = 32 \cdot 40 = 1280$. **(3 pts.)**

Dado un presupuesto anual de \$ 640 mil, se deben contratar 32 trabajadores y 40 máquinas para tener una producción máxima de \$ 1280.

8. Una empresa tiene costos fijos diarios de \$ 250 y contrata cada L trabajador a \$ 10 diarios y cada K máquina a \$ 8 diarios. La función de producción de la empresa es $Q = KL$. Si la empresa debe producir a diario 2000 unidades de su producto, determine el costo mínimo y cuántos trabajadores y máquinas debe adquirir la empresa.

Solución:

El costo se debe minimizar sujeto a un nivel de producción

$$\min C = 10L + 8K + 250, \qquad KL = 2000 \qquad \textbf{(2 pts.)}$$
$$F(L, K, \lambda) = 10L + 8K + \lambda(200 - KL) \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Encuentre los puntos críticos.

$$F_L = 10 - K\lambda = 0 \qquad K = 10/\lambda \qquad \textbf{(2 pts.)}$$
$$F_K = 8 - L\lambda = 0 \qquad L = 8/\lambda \qquad \textbf{(2 pts.)}$$
$$F_\lambda = 2000 - KL = 0 \qquad KL = 2000 \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Sustituya K & L en la restricción y resuelva para λ.

$$\frac{80}{\lambda^2} = 2000 \qquad \lambda^2 = \frac{1}{25} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Los valores de lambda son $\pm\frac{1}{5}$ (descarte el valor negativo). **(2 pts.)**

Por lo que $L = 8/0.2 = 40$ & $K = 10/0.2 = 50$. **(2 pts.)**

El costo mínimo es de $Q = 10(40) + 8(50) + 250 = 1050$. **(3 pts.)**

Sujeto una producción diaria de 2000, se deben contratar 40 trabajadores y 50 máquinas para tener el costo mínimo de \$ 1050.

9. Los ingresos mensuales (en dólares) que percibe una granja por vender x toneladas de trigo & y toneladas de maíz está dada por:

$$I(x,y) = 200(x^2 - 10x) + 150(y^2 - 8y)$$

Las toneladas de trigo y maíz que se producen con L trabajadores y K máquinas son:

$$x(L,K) = 10L^{1/2}K^{1/2} \qquad\qquad y(L,K) = 20L^{1/2}K^{1/4}$$

Determine la razón de cambio instantánea en el ingreso respecto al número de trabajadores para $L = 25$ y $K = 16$.

Solución:

Utilice la regla de la cadena para encontrar I_L.

$$\frac{\partial I}{\partial L} = \frac{\partial I}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial L} + \frac{\partial I}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial L} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Encuentre los valores de x & y.

$$x(25,16) = 10(5)(4) = 200 \qquad y(25,16) = 20(5)(2) = 200 \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Evalúe los ingresos marginales en $x = 200$ & $y = 200$.

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 400x - 2000 \qquad \frac{\partial I}{\partial x} = 80,000 - 2000 = 78,000 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$
$$\frac{\partial I}{\partial y} = 300y - 1200 \qquad \frac{\partial I}{\partial y} = 60,000 - 1200 = 58,800 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

Evalúe los x_L & y_L en $L = 25$ & $K = 16$.

$$\frac{\partial x}{\partial L} = 5L^{-1/2}K^{1/2} \qquad \frac{\partial x}{\partial L} = 5(4)/5 = 4 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$
$$\frac{\partial y}{\partial L} = 10L^{-1/2}K^{1/4} \qquad \frac{\partial x}{\partial L} = 10(2)/5 = 4 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

La razón de cambio de I respecto a L es:

$$\frac{\partial I}{\partial L} = \frac{\partial I}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial L} + \frac{\partial I}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial L}$$
$$\frac{\partial I}{\partial L} = 78,000(4) + 58,800(4) = 4(136,800) = 547,200 \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

Los ingresos aumentan en $ 547,200 si se aumenta el número de trabajadores a 26.

10. En una fábrica metalúrgica, el costo (en quetzales) de producir x libras de acero & y libras de aluminio está dado por:

$$c = 60(x^2 + 2y^2 + 400)^{1/3}$$

Las funciones de demanda para el precio p_1 del acero y el precio p_2 del aluminio es:

$$x(p_1, p_2) = 22 - p_1 + p_2^2 \qquad\qquad y(p_1, p_2) = 24 + p_1 - 10p_2$$

Determine la razón de cambio instantánea en el costo respecto al precio p_2 del aluminio para $p_1 = 6$ y $p_2 = 2$.

Solución:

Utilice la regla de la cadena para encontrar C_{p_2}.

$$\frac{\partial C}{\partial p_2} = \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p_2} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p_2} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Encuentre los valores de x & y.

$$x(6,2) = 22 - 6 + 4 = 20 \qquad y(6,2) = 24 + 6 - 20 = 10 \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Evalúe los costos marginales en $x = 20$ & $y = 10$.

$$(x^2 + 2y^2 + 400)^{1/3} = (400 + 200 + 400)^{1/3} = 1000^{1/3} = 10$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 40x(x^2 + 2y^2 + 400)^{-2/3} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 800(10)^{-2} = 8 \qquad \textbf{(1 pts.)}$$

$$\frac{\partial I}{\partial y} = 80y(x^2 + 2y^2 + 400)^{-2/3} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$\frac{\partial I}{\partial y} = 800(10)^{-2} = 8 \qquad \textbf{(1 pts.)}$$

Evalúe las x_{p_2} & y_{p_2} en $p_1 = 6$ & $p_2 = 2$.

$$\frac{\partial x}{\partial p_2} = 2p_2 \qquad \frac{\partial x}{\partial L} = 5(4)/5 = 4 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial p_2} = -10 \qquad \frac{\partial x}{\partial L} = 10(2)/5 = -10 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

La razón de cambio de C respecto a p_2 es:

$$\frac{\partial C}{\partial p_2} = \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p_2} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p_2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial p_2} = 8(4) - 8(10) = 32 - 80 = -48 \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

Los costos disminuyen en \$ 48 cuando el precio del aluminio aumenta a \$ 3.

11. La utilidad semanal de una tienda Apple (en dólares) al vender x Iphones & y Airbooks está dada por:

$$U(x,y) = 400(x+y)^{3/2} - 2x^2 - 3y^2$$

Los pronósticos de ventas para los Iphones y Airbooks a las t semanas son

$$x(t) = 10e^{(t-1)/10} + 2\ln(t) \qquad\qquad y(t) = 14\sqrt{t} + t^2$$

Determine la razón de cambio instantánea en la utilidad respecto al tiempo para $t = 1$.

Solución:

Utilice la regla de la cadena para encontrar U_t.

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Encuentre los valores de x & y.

$$x(1) = 10e^0 - 2\ln(1) = 10 \qquad y(1) = 14(1) + 1 = 15 \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Evalúe las utilidades marginales en $x = 10$ & $y = 15$.

$$(x+y)^{1/2} = (10+15)^{1/2} = 5$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 600(x+y)^{1/2} - 4x \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 600(5) - 40 = 2960 \qquad \textbf{(1 pts.)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 600(x+y)^{1/2} - 6y \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 600(5) - 90 = 2910 \qquad \textbf{(1 pts.)}$$

Evalúe las x_t & y_t en $t = 1$.

$$\frac{dx}{dt} = e^{(t-1)/10} + 2/t \qquad \frac{dx}{dt} = 1 + 2 = 3 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

$$\frac{dy}{dt} = 7/\sqrt{t} + 2t \qquad \frac{dy}{dt} = 7 + 2 = 9 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

La razón de cambio de C respecto a p_2 es:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dU}{dt} = 2960(3) + 2910(9) = 35,070 \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

La utilidad aumenta en \$ 35,070 en la segunda semana.