

# Material de apoyo - Cálculo Multivariable

2020-01-06

David Gabriel Corzo Mcmath



# Índice general

<b>I</b>	<b>Laboratorios</b>	<b>5</b>
1.	Laboratorio #01	7
2.	Laboratorio #01	9
<b>II</b>	<b>Tareas</b>	<b>17</b>
3.	Tarea #02	19
4.	Tarea #06	33
5.	Tarea #06	35
6.	Tarea #3.	47
<b>III</b>	<b>Examenes Cortos</b>	<b>59</b>
7.	Examen corto #01	61
8.	Examen corto #03	63

## Índice general

# **Parte I**

# **Laboratorios**



# Capítulo 1

## Laboratorio #01

# Laboratorio #1 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 16 de enero

Nombre: \_\_\_\_\_ Carnet: \_\_\_\_\_

Tema:	1	2	3	4	5	6	7	Total
Puntos:	20	20	20	20	10	10	10	110
Nota:								

Resuelva las siguientes ejercicios:

1. (20 pts.) Determine la distancia del punto  $(4, -2, 6)$  al eje  $x$
2. (20 pts.) Halle la ecuación de la esfera con centro  $(-3, 2, 5)$  y radio 4.  
¿Cuál es la intersección de esta esfera con el plano  $yz$ ?
3. (20 pts.) Encuentre el radio y centro de la esfera cuya ecuación es  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15$ .
4. (20 pts.) Halle la longitud de los lados del triángulo  $P(3, -2, -3), Q(7, 0, 1), R(1, 2, 1)$ .  
¿Es un triángulo isósceles? ¿Es un triángulo rectángulo? Utilice el Teorema de Pitágoras.
5. (10 pts.) Describa y bosqueje la superficie en  $R^3$  representada por la ecuación  $x + y = 2$ .
6. (10 pts.) Describa y bosqueje la superficie en  $R^3$  representada por la ecuación  $2z = 8 - 4x$ .
7. (10 pts.) **BONO:**  
Encuentre la ecuación de la esfera con centro  $(2, -3, 6)$  que toca el plano  $x$ .

# Capítulo2

## Laboratorio #01

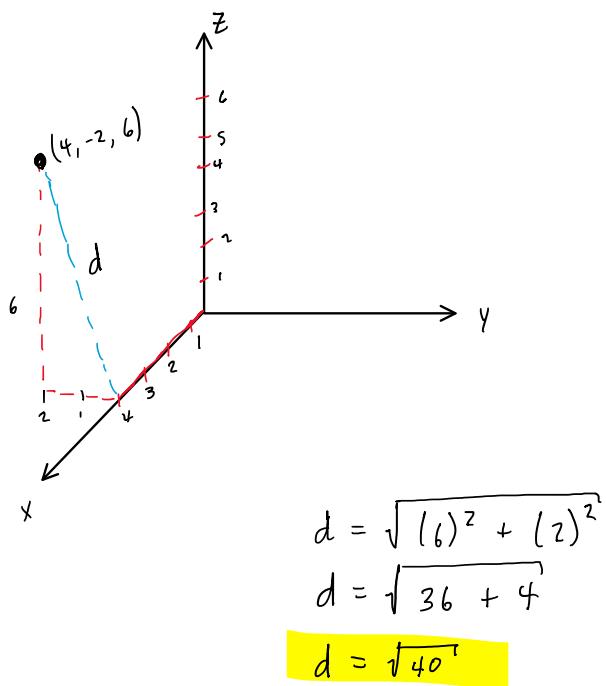
# LABORATORIO #01

Wednesday, January 15, 2020

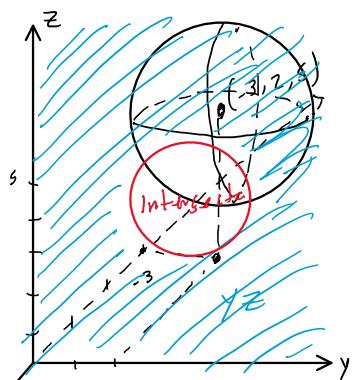
13:03

DAVID CORZO 20190432

1) Punto  $(4, -2, 6)$  al eje  $x$ :



- 2) Ecuación de la esfera con centro  $(-3, 2, 5)$  & radio 4. Intersección de la esfera con el plano  $yz$ .



$$\begin{aligned} r^2 &= (x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 \\ &= \sqrt{(x - (-3))^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2} \\ &= \sqrt{(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2} \end{aligned}$$

$$4 = \sqrt{(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2}$$

Se asume  $x = 0$

$$(4)^2 = \left( \sqrt{(0 + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2} \right)^2$$

$$16 = 9 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2$$

$$16 - 9 = (y - 2)^2 + (z - 5)^2$$

$$7 = (y - 2)^2 + (z - 5)^2$$

Queda la ecuación de un círculo correspondiente a el círculo que deja la esfera en el plano  $yz$ .

3) Encuentre el radio y centro de la esfera cuya ec. es  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15$ .

$$x: \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$$

$$y: \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4$$

$$z: \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$$

$$[x^2 - 2x + 1] + [y^2 - 4y + 4] + [z^2 + 8z + 16] = 21 + 15$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 36$$

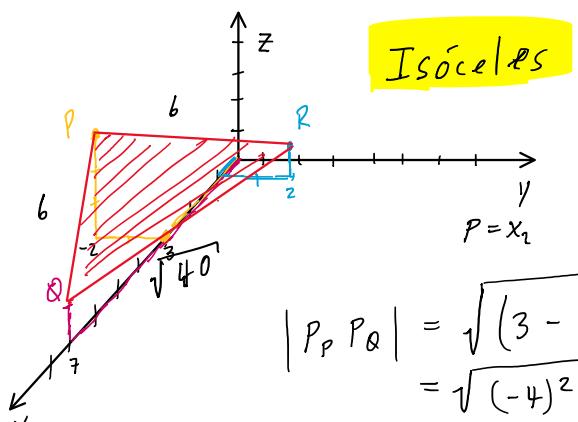
$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2} = 6$$

radio: 6

centro: (1, 2, -4)

- 4) Longitud de los lados del triángulo  $P(3, -2, -3)$ ,  $Q(7, 0, 1)$ ,  $R(1, 2, 1)$ . ¿Isóceles, triángulo rectángulo?

$$|P_A \& P_B| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



$$\begin{aligned} |P_P P_Q| &= \sqrt{(3 - 7)^2 + (-2 - 0)^2 + (-3 - 1)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} \\ &= \sqrt{36} = 6 \end{aligned}$$

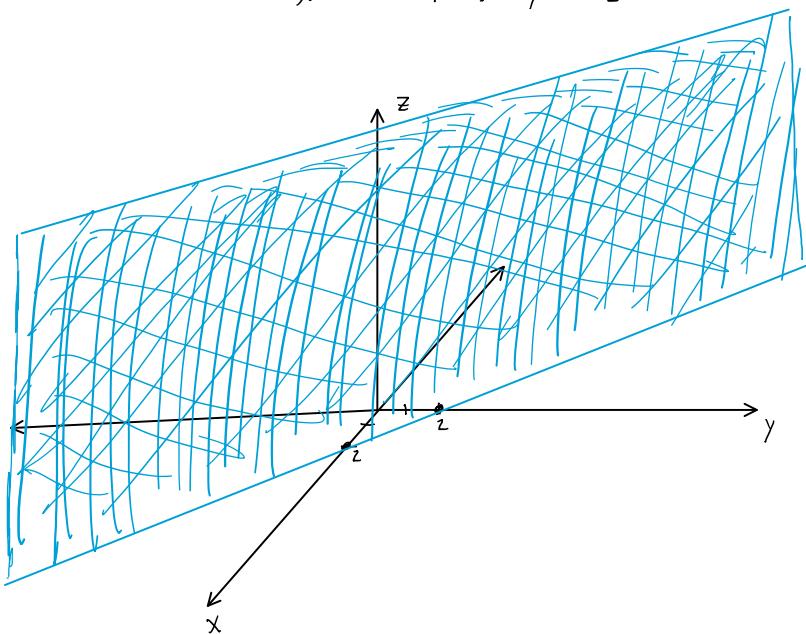
$$\begin{aligned} |P_Q P_R| &= \sqrt{(7 - 1)^2 + (0 - 2)^2 + (1 - 1)^2} \\ &= \sqrt{(6)^2 + (-2)^2 + (0)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |P_R P_P| &= \sqrt{(1 - 3)^2 + (2 + 2)^2 + (1 + 3)^2} \\ &= \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (4)^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6 \end{aligned}$$

5) Describa & por que la superficie en  $\mathbb{R}^3$  representada por la ecuación  $x + y = 2$

$$x = 2 - y ; \quad y = 2 - x$$

$$x + y + 0z = 2$$



6) Describa y bosqueje la superficie  $\mathbb{R}^3$  representada por la ecuación  $zz = 8 - 4x$

$$\text{I; } x = 0$$

$$\text{I; } z = 0$$

$$zz - 8 = 0$$

$$0 = 8 - 4x$$

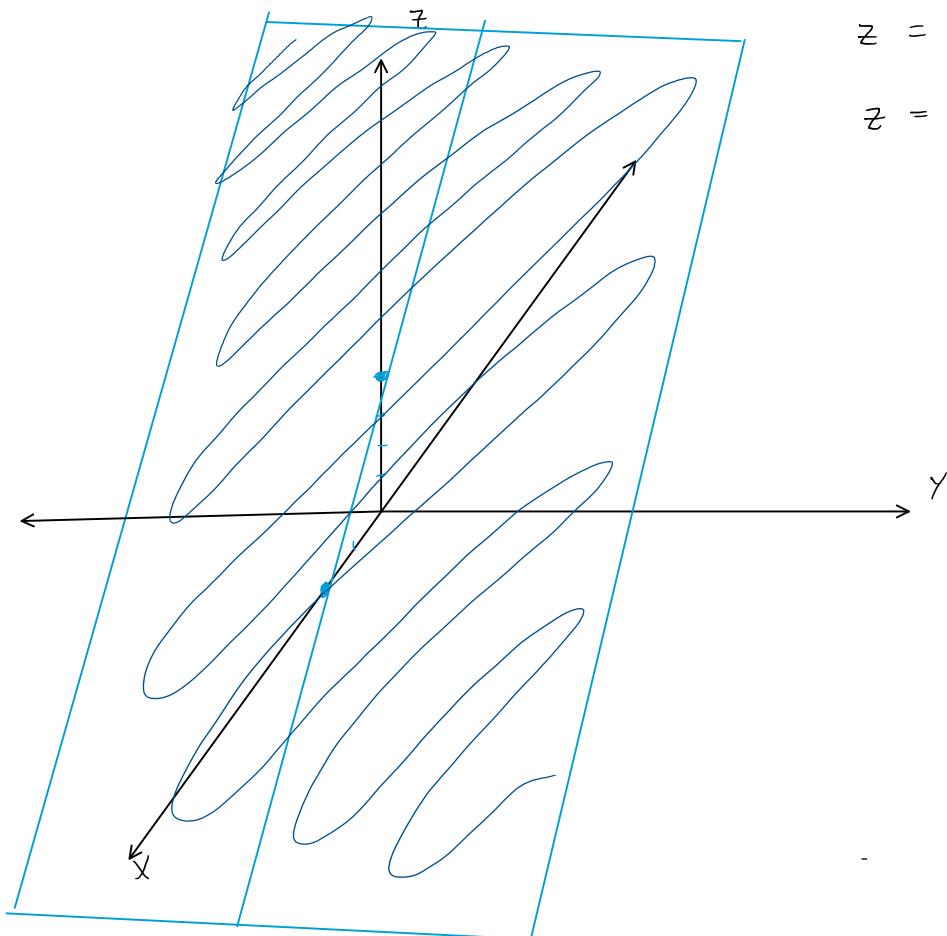
$$z = \frac{+8}{2}$$

$$-8 = -4x$$

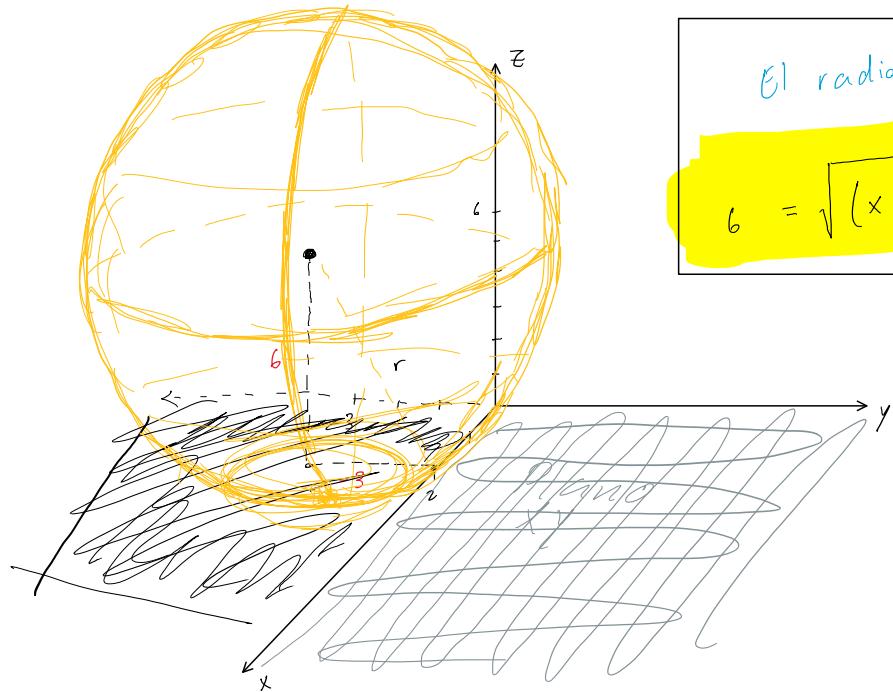
$$z = +4$$

$$\frac{-8}{-4} = x$$

$$x = 2$$



7) Bono: Da ecuación de la esfera con centro  $(2, -3, 6)$  que toca el plano  $xy$ .



El radio es 6.

$$6 = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2}$$

## **Parte II**

### **Tareas**



# Capítulo 3

Tarea #02

## Tarea #2

David Gabriel Corzo Mcmath - 20190432  
Cálculo Multivariable

### 1) Vectors:

$$a = \langle 5, -12, 0 \rangle$$

$$b = \langle 0, -3, -6 \rangle$$

$$c = \langle 1, 0, 2 \rangle$$

$$2b = \langle 0, -6, -12 \rangle$$

$$a + 2(b + c) - (a - 2b) =$$

$$= a + 2[(0+1), (-3+0), (-6+2)] - [(5-0), (-12+6), (0+12)]$$

$$= a + 2 \langle 1, -3, -4 \rangle - \langle 5, -6, 12 \rangle$$

$$= a + \langle 2, -6, -8 \rangle - \langle 5, -6, 12 \rangle$$

$$= a + \langle (2-5), (-6+6), (-8-12) \rangle$$

$$= a + \langle -3, 0, -20 \rangle$$

$$= \langle 5, -12, 0 \rangle + \langle -3, 0, -20 \rangle$$

$$= \langle (5-3), (-12+0), (0-20) \rangle$$

$$= \langle 2, -12, -20 \rangle$$

$$b) 2a \cdot (3b + 4c) - 2c \cdot (4a + \emptyset b)$$

$$2a = \langle 10, -24, 0 \rangle$$

$$4a = \langle 20, -48, 0 \rangle$$

$$3b = \langle 0, -9, -24 \rangle$$

$$\emptyset b = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

$$2c = \langle 2, 0, 4 \rangle$$

# Sacar nuevos vectores

$$4c = \langle 4, 0, 8 \rangle$$

$$= 2a \cdot \langle (0+4), (-9+0), (-24+8) \rangle - 2c \cdot \langle (20+0), (-48+0), (0+0) \rangle$$

$$= 2a \cdot \langle 4, -9, -16 \rangle - 2c \cdot \langle 20, -48, 0 \rangle$$

$$= \langle (10 \cdot 4), (-24 \cdot -9), (0 \cdot -16) \rangle - \langle (2 \cdot 20), (0 \cdot -48), (4 \cdot 0) \rangle$$

$$= \langle 40, 216, 0 \rangle - \langle 40, 0, 0 \rangle$$

$$= \langle (40 - 40), (216 - 0), (0, 0) \rangle$$

$$= \langle 0, 216, 0 \rangle$$

$$c) |a + c - (a + b)| =$$

$$a = \langle 5, -12, 0 \rangle \quad b = \langle 0, -3, -6 \rangle \quad c = \langle 1, 0, 2 \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \langle (5+1), (-12+0), (0+2) \rangle - \langle (5+0), (-12-3), (0-6) \rangle \right| \\
 &= \left| \langle 6, -12, 2 \rangle - \langle 5, -15, -6 \rangle \right| \quad \Rightarrow = \sqrt{1+9+64} \\
 &= \left| \langle (6-5), (-12+15), (2+6) \rangle \right| \quad = \sqrt{74} \\
 &= \left| \langle 1, 3, 8 \rangle \right| \quad \Rightarrow \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (8)^2}
 \end{aligned}$$

$$d) |a + c| - |a + b|$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \langle (5+1), (-12+0), (0+2) \rangle \right| - \left| \langle (5+0), (-12-3), (0-6) \rangle \right| \\
 &= \left| \langle 6, -12, 2 \rangle \right| - \left| \langle 5, -15, -6 \rangle \right| \\
 &= \sqrt{6^2 + (-12)^2 + 2^2} - \sqrt{5^2 + (-15)^2 + (-6)^2} \\
 &= \sqrt{36 + 144 + 4} - \sqrt{25 + 225 + 36} \\
 &= \sqrt{184} - \sqrt{286} \quad \# \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|}
 \end{aligned}$$

2) Misma dirección que el vector  $\langle -3, 4, 6, -8 \rangle$

$$= |\langle -3, 4, 6, -8 \rangle|$$

Calcular magnitud

$$= \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (6)^2 + (-8)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16 + 36 + 64}$$

$$= \sqrt{125}$$

Entonces ...

$$\left| \left\langle -\frac{3}{\sqrt{125}}, \frac{4}{\sqrt{125}}, \frac{6}{\sqrt{125}}, -\frac{8}{\sqrt{125}} \right\rangle \right| = 1$$

Comprobar ...

$$= \sqrt{\frac{9}{125} + \frac{16}{125} + \frac{36}{125} + \frac{64}{125}} = \sqrt{1} = 1$$

3) Encuentre el ángulo de los vectores

a)  $a = \langle 3, 0 \rangle, b = \langle 5, 5 \rangle$

$$\begin{aligned}\theta &= \cos^{-1} \left( \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} \right) \\ &= \cos^{-1} \left( \frac{\langle (3 \cdot 5), (0 \cdot 5) \rangle}{|\langle 3, 0 \rangle| |\langle 5, 5 \rangle|} \right) \\ &= \cos^{-1} \left( \frac{15 + 0}{3 \cdot \sqrt{50}} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{15}{3 \cdot \sqrt{2 \cdot 25}} \right) \\ &= \cos^{-1} \left( \frac{15}{3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{15}{15} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} \right) \\ &= \cos^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \boxed{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

$$b) \quad a = \langle 2, -4, 5 \rangle$$

$$b = \langle -2, 4, -5 \rangle$$

$$\Theta = \cos^{-1} \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|a\| \|b\|} \right)$$

$$= \cos^{-1} \left( \frac{-4s}{(4s)^{1/2} (4s)^{1/2}} \right)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$= \cos^{-1} \left( \frac{-4s}{4s} \right)$$

$$= \cos^{-1}(-1)$$

$$= \pi$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 2 & -4 & 5 \\ \hline -2 & & 4 & -5 \\ \hline -4 & -16 & -25 \end{array}$$

$$= (-4) + (-16) + (-25)$$

$$= -20 - 25$$

$$= -45$$

$$\begin{aligned} |a| &= \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (5)^2} \\ &= \sqrt{4 + 16 + 25} = \sqrt{45} \end{aligned}$$

$$|b|$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (4)^2 + (-5)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 16 + 25} = \sqrt{45}$$

4) Determine si los vectores son ortogonales, paralelos o ninguno.

a)  $a = \langle -5, 3, 7 \rangle \quad b = \langle 6, -8, 2 \rangle$

# Producto punto de  $a$  &  $b$

$$\begin{array}{c|c|c} -5 & 3 & 7 \\ \cdot 6 & \cdot -8 & \cdot 2 \\ \hline -30 & -24 & +14 \end{array}$$

$$(-30) + (-24) + (14) = \boxed{-40} \quad \text{Ninguno}$$

b)  $a = \langle 4, 6 \rangle$

$$b = \langle -3, 2 \rangle$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

$$\begin{array}{c|c} 4 & 6 \\ -3 & 2 \\ \hline -12 & 12 \end{array} \rightarrow \underbrace{(-12) + 12}_{0}$$

Son ortogonales

$$c) \quad a = -i + 2j + 5k$$

$$b = 3i + 4j - k$$

$$a = \langle -1, 2, 5 \rangle$$

$$b = \langle 3, 4, -1 \rangle$$

-1	2	5
3	4	-1
-3	8	-5

$$\begin{array}{r} (-3) + 8 + (-5) \\ \hline -8 + 8 \\ 0 \end{array}$$

son ortogonales

$$d) \quad a = 2i + 6j - 4k$$

$$b = -3i - 9j + 6k$$

$$a = \langle 2, 6, -4 \rangle$$

$$b = \langle -3, -9, 6 \rangle$$

2	6	-4
-3	-9	6
-6	54	-24

$$(-6) + 54 + (-24)$$

$$-30 + 54$$

$$24$$

son paralelos por  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  son múltiplos

entre sí.

5) Considerar vectores:

$$a = \langle 3, 6, -2 \rangle \text{ esc: } \text{Proy}_{ab} = \frac{a \cdot b}{|a|}$$

$$b = \langle 1, 2, 3 \rangle \text{ vec: } \text{Proy}_{ab} = \frac{a \cdot b}{|a|} \frac{a}{|a|}$$

a) Proyección de  $b$  sobre  $a$ :

Escalar:

$$\begin{aligned} \text{proy}_{ab} &= \frac{3 + 12 - 6}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{9 + 36 + 4}} = \\ &= \frac{9}{\sqrt{49}} = \boxed{\frac{9}{7}} \end{aligned}$$

Vectorial:

$$\begin{aligned} \text{Proy}_{ab} &= \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{49}} \langle 3, 6, -2 \rangle \\ &= \frac{9}{(49)^{\frac{1}{2}} \cdot (49)^{\frac{1}{2}}} \langle 3, 6, -2 \rangle \\ &= \frac{9}{49} \langle 3, 6, -2 \rangle \\ &= \boxed{\left\langle \frac{27}{49}, \frac{54}{49}, -\frac{18}{49} \right\rangle} \end{aligned}$$

b)  $a$  sobre  $b$ :  $a = \langle 3, 6, -2 \rangle$

$$a = \langle 3, 6, -2 \rangle$$

$$b = \langle 1, 2, 3 \rangle$$

$$\text{proy}_b a = \frac{a \cdot b}{|b|} \cdot \frac{b}{|b|}$$

$$\text{proy}_b a = \frac{a \cdot b}{|b|}$$

escalar:  $\text{proy}_b a = \frac{9}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}}$

vectorial:  $\text{proy}_b a = \frac{9}{\sqrt{14}} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \langle 1, 2, 3 \rangle$

$$= \frac{9}{(\sqrt{14})^{\frac{1}{2}} \cdot (\sqrt{14})^{\frac{1}{2}}} \langle 1, 2, 3 \rangle$$

$$= \frac{9}{14} \langle 1, 2, 3 \rangle$$

$$= \left\langle \frac{9}{14}, \frac{18}{14}, \frac{27}{14} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{9}{14}, \frac{9}{7}, \frac{27}{14} \right\rangle$$

c) proyección de  $b$  sobre  $a$  no es igual a proyección de  $a$  sobre  $b$ ; si estos cumplen la condición de  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  si resultan ser la misma proyección.

\* el lab decía  $\text{proy}_{ab} = \text{proy}_{ba}$  que sí serían iguales pero asumí que quería decir  $\text{proy}_{ab} = \text{proy}_a$  que en 29 cuyo caso no siempre son iguales.

BONO: Encontrar tal valor de

x que  $\langle 2, 1, -1 \rangle$  &  $\langle 1, x, 0 \rangle$  es  
de  $45^\circ$ .

$\theta$  tiene que ser igual a  $45^\circ$  ó  $\frac{\pi}{4}$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{[(2 \cdot 1) + (1 \cdot x) + (-1 \cdot 0)]}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + x^2 + 0^2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{2 + x}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + x^2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{2 + x}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + x^2}}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 + x}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + x^2}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + x^2} = 2 + x$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{6}\right) \sqrt{1 + x^2}$$

$$\frac{\sqrt{12}}{2} \sqrt{1 + x^2} = 2 + x$$

$$\left(\frac{\sqrt{12}}{2} \sqrt{1 + x^2}\right)^2 = (2 + x)^2$$

$$3(1 + x^2) = x^2 + 4x + 4$$

$$3 + 3x^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$\begin{aligned} 3 + 3x^2 &= x^2 + 4x + 4 \\ 0 &= x^2 - 3x + 4x + 4 - 3 \\ 0 &= -2x^2 + 4x + 1 \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-(4) \pm \sqrt{16 - 4(-2)(1)}}{2(-2)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{-4} \end{aligned}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{-4}$$

$$\approx -0.22$$

$$\approx 2.22$$



# Capítulo 4

Tarea #06

## Tarea #6 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 20 de febrero

Nombre: \_\_\_\_\_ Carnet: \_\_\_\_\_

Tema:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	25	15	15	15	30	100
Nota:						

1. Evalúe las siguientes integrales:

(a) (8 pts.)  $\int_0^1 \left( \frac{4}{1+t^2}j + \frac{2t}{1+t^2}k \right) dt$

(b) (9 pts.)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin^2(t)\cos(t)i + 3\sin(t)\cos^2(t)j + 2\sin(t)\cos(t)k) dt$

(c) (8 pts.)  $\int \left( te^t i + t^2 \ln(t) j + \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}} k \right) dt$

2. Dada la posición  $\mathbf{r}(t) = ti + \sin(3t)j + \cos(3t)k$  encuentre:

(a) (5 pts.) la función de velocidad.

(b) (5 pts.) la función de aceleración.

(c) (5 pts.) la función de rápidez.

3. Dada la aceleración  $\mathbf{a}(t) = \langle e^t, \sin t \cos t, \frac{1}{(t+1)^2} \rangle$ , la velocidad inicial  $\mathbf{v}(0) = \langle 3, -1, 2 \rangle$  y la posición inicial  $\mathbf{r}(0) = \langle 0, 2, 0 \rangle$ , encuentre:

(a) (7 pts.) la función de velocidad.

(b) (8 pts.) la función de posición.

4. (15 pts.) Calcule la longitud de arco de la helice circular de la ecuación vectorial  $r(t) = \cos(t)i + \sin(t)ij + tk$  desde el punto  $(1, 0, 0)$  hasta el punto  $(1, 0, 2\pi)$ .

5. Encuentre y bosqueje el dominio de las siguientes funciones:

(a) (10 pts.)  $f(x, y) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}$

(b) (10 pts.)  $g(x, y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$

(c) (10 pts.)  $h(x, y) = \frac{9}{9-x-y}$

# Capítulo 5

Tarea #06



1) Evalúe los siguientes:

a)  $\int_0^1 \left( \underbrace{\frac{4}{1+t^2} \hat{i}}_{f(t)} + \underbrace{\frac{2t}{1+t^2} \hat{k}}_{g(t)} \right) dt$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t) dt &= \int_0^1 \left( \frac{4}{1+t^2} \right) dt \\&= 4 \int_0^1 \left( \frac{1}{1+t^2} \right) dt \\&= 4 \arctan(t) \Big|_0^1 \\&= 4 \left\{ \arctan(1) - \arctan(0) \right\} \\&= 4 \left\{ \frac{\pi}{4} - 0 \right\} = \boxed{\pi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(t) dt &= \int_0^1 \left( \frac{2t}{1+t^2} \right) dt \\&= \int_0^1 \left( \frac{2t}{1+t^2} \right) dt \\&\quad u = 1+t^2 \\&\quad du = 2t dt \\&= \int_0^1 \left( \frac{du}{u} \right) \\&= \ln|1+t^2| \Big|_0^1 \\&= \left\{ \ln(2) - \ln(1) \right\} = \boxed{\ln(2)}\end{aligned}$$

∴  $\langle 0, \pi, \ln(2) \rangle$

b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 3 \sin^2(t) \cos(t) \hat{i} + 3 \sin(t) \cos^2(t) \hat{j} + 2 \sin(t) \cos(t) \hat{k} \right) dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt \quad \overbrace{\qquad\qquad}^{g(t)} \quad \overbrace{\qquad\qquad}^{h(t)}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos(t) dt \\ u &= \sin(t) \\ du &= \cos(t) dt \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 du \\ &= \frac{3}{3} u^3 = \sin^3(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left\{ \sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin^3(0) \right\} \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) dt &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t) \cos^2(t)) dt \\ u &= \cos(t) \\ -du &= \sin(t) dt \\ &= -3 \int_{u(0)}^{u\left(\frac{\pi}{2}\right)} u^2 du \\ &= -\frac{3}{3} u^3 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0) \right\} \\ &= -\left\{ 0 - 1 \right\} = \boxed{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) dt &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t) \cos(t)) dt \\ u &= \sin(t) \\ du &= \cos(t) dt \\ &= 2 \int_{u(0)}^{u\left(\frac{\pi}{2}\right)} u du \quad 38 \\ &= u^2 \Big|_{-1}^{1} = \left\{ 1^2 - 0 \right\} = \boxed{1} \end{aligned}$$

$$| u(0)=0 \quad ( ) \quad \underline{\quad}$$

$$\therefore \left\langle 1, 1, 1 \right\rangle$$

3)  $\int \left( \underbrace{te^t}_{f(t)} \hat{+} \underbrace{t^2 \ln(t)}_{g(t)} \hat{+} \underbrace{\frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}}_{h(t)} \hat{K} \right) dt$

$$\begin{aligned} \int f(t) dt &= \int \underbrace{te^t}_{dt} dt \\ u &= t & du &= e^t dt \\ du &= dt & v &= e^t \\ &= te^t - \int e^t dt \\ &= \boxed{te^t - e^t + C_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int g(t) dt &= \int t^2 \ln(t) dt \\ u &= \ln(t) & du &= t^2 dt \\ du &= \frac{1}{t} dt & v &= \frac{1}{3} t^3 \\ &= \ln(t) \cdot \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{3} \int \frac{t^3}{t} dt \\ &= \frac{1}{3} t^3 \ln(t) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} t^3 + C_2 \\ &= \boxed{\frac{1}{3} t^3 \ln(t) - \frac{1}{9} t^3 + C_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int h(t) dt &= \int \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}} dt \\ u &= e^t & du &= e^t dt \\ du &= e^t dt & 39 \end{aligned}$$

$$\int du =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \\
 &= \arcsin(u) + C_3 \\
 &= \arcsin(e^t) + C_3
 \end{aligned}$$

$$\therefore \left\langle te^t - e^t + C_1, \frac{1}{3}t^3 \ln(t) - \frac{1}{9}t^3 + C_2, \arcsin(e^t) + C_3 \right\rangle$$

2) Dada la posición  $r(t) = t\hat{i} + \sin(3t)\hat{j} + \cos(3t)\hat{k}$

a) Encuentre la función de velocidad:

$$r'(t) = v(t) = \hat{i} + \cos(3t) \cdot 3\hat{j} + \sin(3t) \cdot 3\hat{k}$$

b) Encuentre la función de aceleración:

$$r''(t) = a(t) = \hat{0}\hat{i} - 3\sin(3t) \cdot 3\hat{j} + 3 \cdot 3\cos(3t)\hat{k}$$

c) Encuentre la función de rapidez:

$$\begin{aligned}
 |v(t)| &= \sqrt{(1)^2 + (3\cos(3t))^2 + (3\sin(3t))^2} \\
 &= \sqrt{1 + 9\cos^2(3t) + 9\sin^2(3t)} \\
 &= \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}
 \end{aligned}$$

3) Dada la función de aceleración:

$$a(t) = \left\langle e^t, \sin(t)\cos(t), \frac{1}{(t+1)^2} \right\rangle$$

$$v(0) = / 2 - 1 \rightarrow$$

v(0), v', v'', v'''

$$r(0) = \langle 0, 2, 0 \rangle$$

a) Encontrar la función de aceleración:

$$\int a(t) dt = r(t)$$

$$a(t) = \left\langle \underbrace{e^t}_{f(t)}, \underbrace{\sin(t)\cos(t)}_{g(t)}, \underbrace{\frac{1}{(t+1)^2}}_{h(t)} \right\rangle$$

$$\int f(t) dt = \boxed{e^t + C_1}$$

$$\int g(t) dt = \int \sin(t)\cos(t) dt = \boxed{\frac{1}{2} \sin^2(t) + C_2},$$

$u = \sin(t)$   
 $du = \cos(t)dt$

$$\int h(t) dt = \int \frac{1 dt}{(t+1)^2} = \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{-2+1} u^{-2+1} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{t+1} + C_3$$

$u = t+1$   
 $du = 1 dt$

$$= -\frac{1}{t+1} + C_3$$

---

$$r(t) = \langle e^t + C_1, \frac{1}{2} \sin^2(t) + C_2, -\frac{1}{t+1} + C_3 \rangle$$

# Encontrar constantes

$$r(0) = \langle 3, -1, 2 \rangle$$

$e^0 + C_1 = 3$	$\frac{1}{2} \sin^2(0) + C_2 = -1$
$1 + C_1 = 3$	$0 + C_2 = -1$
$C_1 = 3 - 1$	$C_2 = -1$
$C_1 = 2$	

$$-\frac{1}{t+1} + C_3 = 2$$

$$-1 + C_3 = 2$$

$$C_3 = 2 + 1$$

$$C_3 = 3$$

función de velocidad:

$$v(t) = \left\langle e^t + 2, \frac{1}{2} \sin^2(t) - 1, -\frac{1}{t+1} + 3 \right\rangle$$

b) función posición:

$$\int v(t) dt = r(t)$$

$$v(t) = \left\langle \underbrace{e^t + 2}_{f(t)}, \underbrace{\frac{1}{2} \sin^2(t) - 1}_{g(t)}, \underbrace{-\frac{1}{t+1} + 3}_{h(t)} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \int f(t) dt &= \int (e^t + 2) dt \\ &= e^t + 2t + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int g(t) dt &= \frac{1}{2} \int (\sin^2(t) - 1) dt = -\frac{1}{2} \int \cos^2(t) dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2t)) dt \\ &= -\frac{1}{4} \left( t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right) + C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int h(t) dt &= - \int \left( \frac{1}{t+1} + 3 \right) dt = -(\ln|t+1| + 3t) + C_3 \\ &= -\ln|t+1| + 3t + C_3 \end{aligned}$$

# Encontrar constantes

$$r(0) = \langle 0, 2, 0 \rangle$$

$$e^0 + 2(0) + C_1 = 0 \quad | \quad 42 \quad -\frac{1}{4} \left( 0 - \frac{1}{2} \sin(2 \cdot 0) \right) + C_2 = 2$$

$$1 + 0 + C_1 = 0 \quad | \quad -\frac{1}{4} \cancel{0} + \cancel{\frac{1}{2} \sin(0)} + C_2 = 2$$

$$C_1 = -1$$

$$C_2 = 2$$

$$-\ln|t+1| + 3(t) + C_3 = 0$$

$$0 + 0 + C_3 = 0$$

$$C_3 = 0$$

función posición:

$$r(t) = \left\langle e^t + 2t - 1, -\frac{1}{4} \left( t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right) + 2, -\ln|t+1| + 3t + 0 \right\rangle$$

4) Calcule la longitud de arco de la helice circular de la ecuación vectorial:

$$r(t) = \cos(t)\hat{i} + \sin(t)\hat{j} + t\hat{k}$$

desde el punto  $(1, 0, 0)$  hasta el punto  $(1, 0, 2\pi)$ .

$$L = \int_a^b |r'(t)| dt$$

$$r'(t) = -\sin(t)\hat{i} + \cos(t)\hat{j} + \hat{k}$$

$$|r'(t)| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1}$$

$$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{2} dt = \sqrt{2} t \Big|_{a=0}^{b=2\pi}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \{ 2\pi - 0 \} = \sqrt{2} \cdot 2\pi$$

$$\# P(1, \emptyset, \emptyset) \& Q(1, \emptyset, 2\pi)$$

$$r(t) = \langle \cos(t), \sin(t), t \rangle$$

$$x = \cos(t) \quad \cos(t) = 1 \rightarrow t = 0$$

$$y = \sin(t) \quad \sin(t) = 0 \rightarrow t = 0$$

$$z = t \quad t = 0 \rightarrow t = 0$$

$$\cos(t) = 1 \rightarrow t = 2\pi$$

$$\sin(t) = 0 \rightarrow t = 2\pi$$

$$t = 2\pi \rightarrow t = 2\pi$$

5) a)  $f(x, y) = \sqrt{\underbrace{1 - x^2}_{\geq 0}} - \sqrt{\underbrace{1 - y^2}_{\geq 0}}$

$$1 - x^2 \geq 0$$

$$-x^2 \geq -1$$

$$x^2 \leq 1$$

$$x \leq \pm 1$$

$$\{-1 \leq x \leq 1\}$$

$$1 - y^2 \geq 0$$

$$-y^2 \geq -1$$

$$y^2 \leq 1$$

$$y \leq \pm 1$$

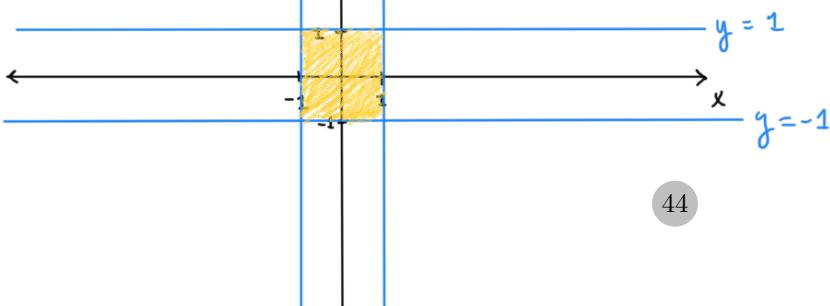
$$-1 \leq y \leq 1$$

$$x = -1$$

$$x = 1$$

∴ El dominio está definido tal que:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-1 \leq x \leq 1) \& (-1 \leq y \leq 1)\}$$



b)  $g(x, y) = \frac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

$$y - x^2 \geq 0$$

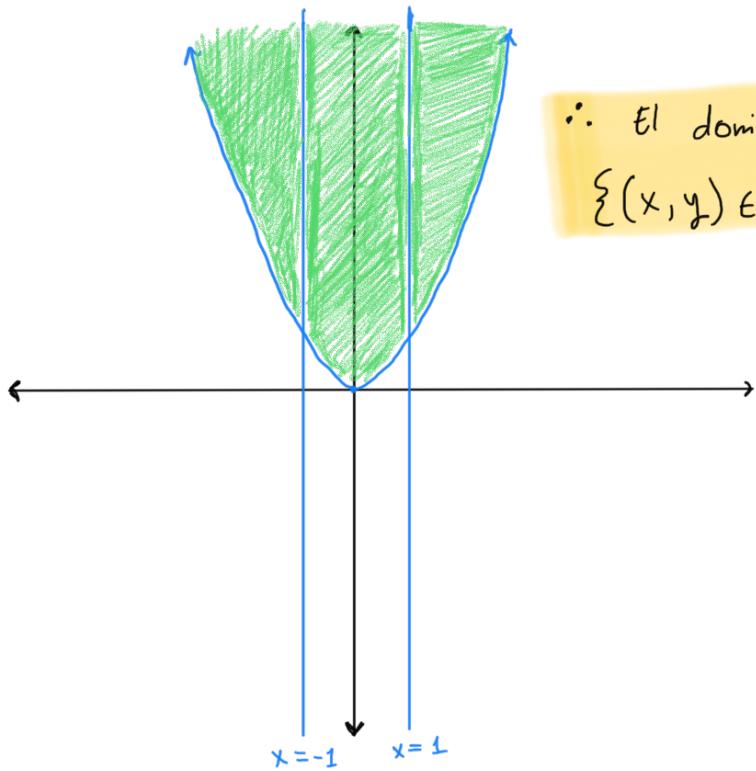
$$y \geq x^2$$

$$1 - x^2 \neq 0$$

$$-x^2 \neq -1$$

$$x^2 \neq 1$$

$$x \neq \pm 1$$



∴ El dominio está definido tal que:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y \geq x^2) \& (x \neq \pm 1)\}$$

c)  $h(x, y) = \frac{9}{9 - x - y}$

$$9 - x - y \neq 0$$

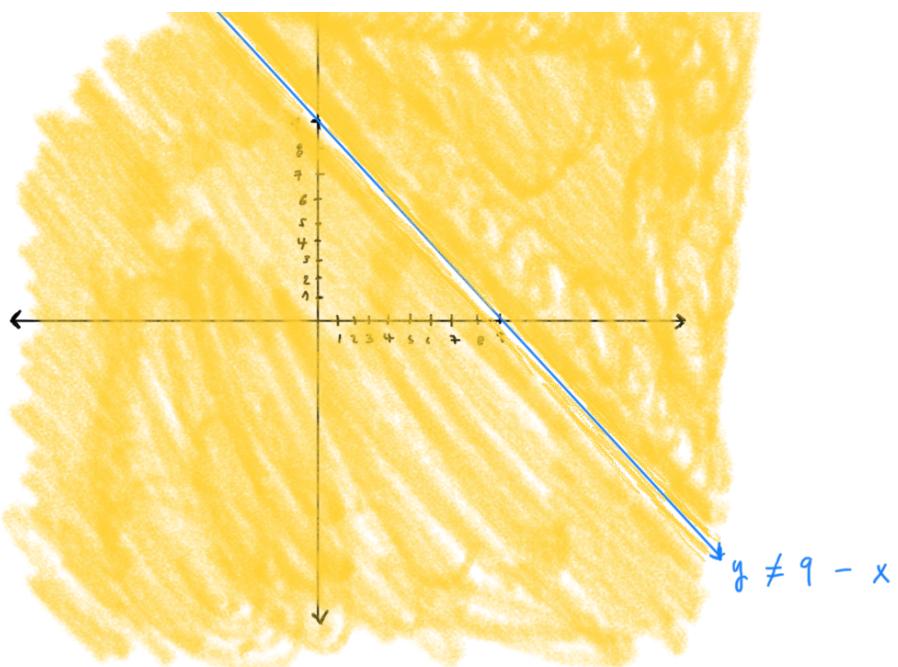
$$-x - y \neq -9$$

$$x + y \neq 9$$

$$\text{y} = 9 - x \quad \# \text{excluir}$$

∴ El dominio está definido tal que:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y \neq 9)\}$$



# Capítulo 6

Tarea #3.



1) a.  $(a \cdot b) \cdot c$  # asumiendo que  $a, b, c$  son vectores.

Resulta en un escalar.  
productos punto resultan en escalares siempre

b.  $(a \cdot b) \times c$

El producto cruz es entre vectores no se puede hacer entre escalares,  
 $a \cdot b$  resulta en un escalar por ende no tiene sentido.

c.  $(a \times b) \times c$

Resulta en un vector

d.  $(a \times c) \cdot b$

Resulta en un escalar. producto cruz de  $a, c$  resulta en vector, ese vector con producto punto  $b$  resulta en escalar

2) Encuentre vectores unitarios ortogonales

a  $\langle 3, 2, 1 \rangle$  &  $\langle -1, 1, 0 \rangle$ .

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} [(2 \cdot 0) - (1 \cdot 1)] - \hat{j} [(3 \cdot 0) - (1 \cdot -1)] + \hat{k} [(3 \cdot 1) - (2 \cdot -1)] \\
 = \hat{i} [0 - 1] - \hat{j} [0 - (-1)] + \hat{k} [3 - (-2)] \\
 = -\hat{i} - \hat{j} + 5 \hat{k} \\
 \therefore \langle -1, -1, 5 \rangle$$

# Este es el vector ortogonal a  
 #  $\langle 3, 2, 1 \rangle$  &  $\langle -1, 1, 0 \rangle$  Ahora sólo  
 # falta la división por la magnitud  
 # para que sea ortogonal unitario.

$$|O_{\perp}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (5)^2} = \sqrt{1 + 1 + 25} = \sqrt{27}$$

unit  $\Rightarrow O_{\perp} \cdot \frac{1}{\sqrt{27}}$   $\Rightarrow \langle -1, -1, 5 \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{27}} =$

$$R_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{5}{\sqrt{27}} \right\rangle$$

# invierte signos  
 para encontrar  
 segundo vector

$$R_2 = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{27}}, -\frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{5}{\sqrt{27}} \right\rangle$$

# Comprobación de ser unitarios.

$$1 = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{27}}\right)^2}$$

$$1 = \sqrt{\left(\frac{1}{27}\right) + \left(\frac{1}{27}\right) + \left(\frac{25}{27}\right)}$$

$$1 = \sqrt{\frac{1 + 1 + 25}{27}}$$

$$1 = \sqrt{\frac{27}{27}}$$

$$1 = 1$$

$\therefore$  es unitario & ortogonal.

- 3) Calcula el triple producto escalar entre  $a = \langle 1, 2, 3 \rangle$  &  $b = \langle 3, 2, 5 \rangle$  &  $c = \langle 0, 4, 3 \rangle$  i  $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$

$$\begin{aligned}
 a \times c &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}[(2 \cdot 3) - (5 \cdot 4)] - \hat{j}[(3 \cdot 3) - (5 \cdot 0)] + \hat{k}[(3 \cdot 4) - (2 \cdot 0)] \\
 &= \hat{i}[6 - 20] - \hat{j}[9 - 0] + \hat{k}[12 - 0] \\
 &= \hat{i}[-14] - \hat{j}[9] + \hat{k}[12] \\
 &= -14\hat{i} - 9\hat{j} + 12\hat{k} \\
 &= \langle -14, -9, 12 \rangle
 \end{aligned}$$

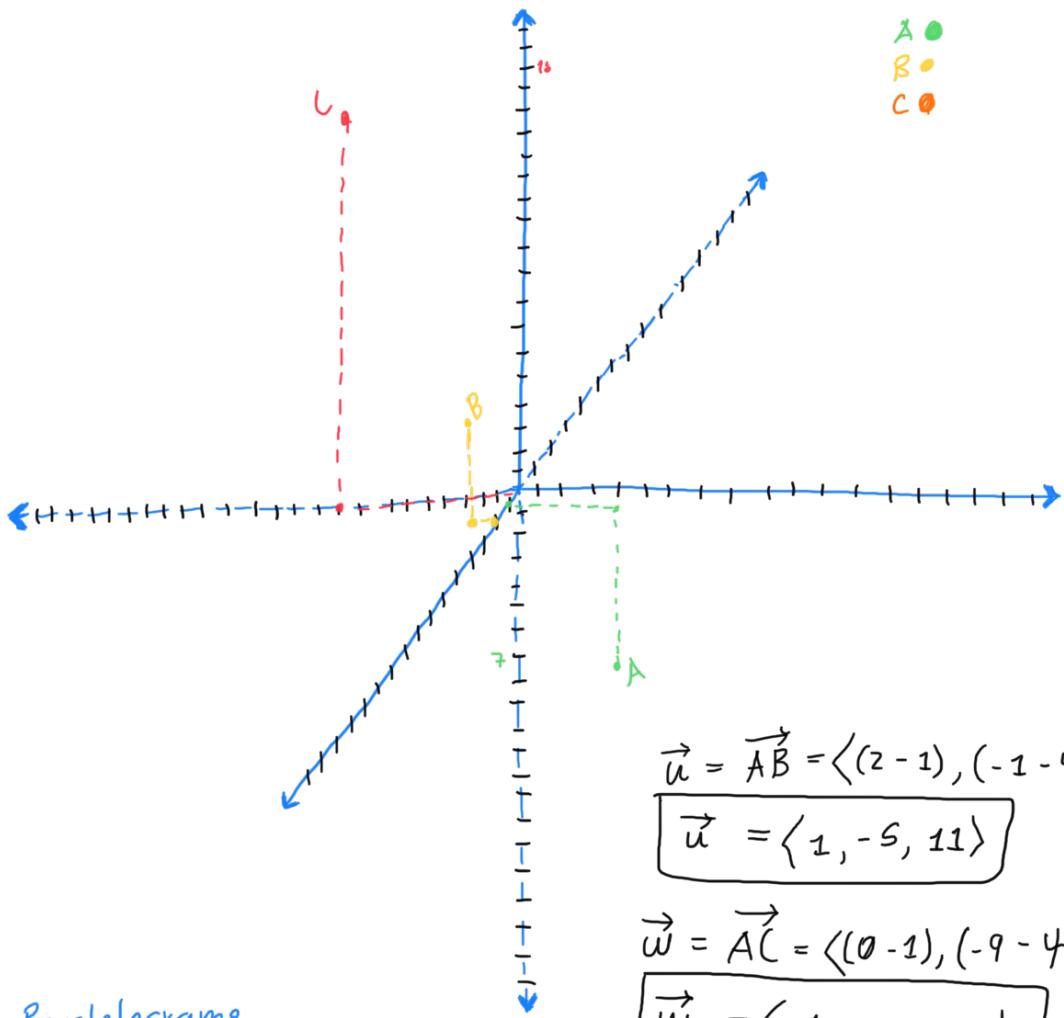
$$\begin{aligned}
 a \cdot (b \times c) &= \langle 1, 2, 3 \rangle \cdot \langle -14, -9, 12 \rangle \\
 &= \langle (1 \cdot -14), (2 \cdot -9), (3 \cdot 12) \rangle \\
 &= -14 - 18 + 36 = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a \times b &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}[(2 \cdot 5) - (3 \cdot 2)] - \hat{j}[(1 \cdot 5) - (3 \cdot 2)] + \hat{k}[(1 \cdot 2) - (3 \cdot 2)] \\
 &= \hat{i}[10 - 6] - \hat{j}[5 - 9] + \hat{k}[2 - 6] \\
 &= \hat{i}[4] - \hat{j}[-4] + \hat{k}[-4] \\
 &= 4\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k} \\
 &= \langle 4, 4, -4 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a \times b) \cdot c &= \langle 4, 4, -4 \rangle \cdot \langle 0, 4, 3 \rangle \\
 &= 0 + 16 - 12 = 4
 \end{aligned}$$

$\therefore a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$  Sí es igual ya que los dos dan 4, el mismo resultado.

- 4) Calcule el área del paralelogramo entre los puntos  $A(1, 4, -2)$ ,  $B(2, -1, 1)$ ,  $C(0, 1, 0)$  y  $D(-1, 1, 1)$



Paralelogramo

$$P = b \cdot a$$

$$\text{base} = |\vec{u}|$$

$$\text{altura} = |b| \sin \theta$$

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -5 & 11 \\ -1 & -13 & 25 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\begin{aligned} \dots &= \hat{i} [(-5 \cdot 25) - (11 \cdot -13)] - \hat{j} [(1 \cdot 25) - (11 \cdot -1)] + \hat{k} [(1 \cdot -13) - (-5 \cdot -1)] \\ &= \hat{i} [-125 + 143] - \hat{j} [25 + 11] + \hat{k} [-13 - 5] = \\ &= 18 \hat{i} - 36 \hat{j} - 18 \hat{k} \\ &= \langle 18, -36, -18 \rangle \end{aligned}$$

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = \sqrt{18^2 + (-36)^2 + (-18)^2} = 18 \sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} = 9 \sqrt{6}$$

5) Considera los puntos  $P(1,0,1)$  &  $Q(-2,1,3)$  &  $R(4,2,5)$ .

a) Encuentre el vector no cero ortogonal al plano

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (-2-1), (1-0), (3-1) \rangle$$

$$\boxed{\vec{u} = \langle -3, 1, 2 \rangle}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{PR} = \langle (4-1), (2-0), (5-1) \rangle$$

$$\boxed{\vec{w} = \langle 3, 2, 4 \rangle}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i} [(1 \cdot 4) - (2 \cdot 2)] - \hat{j} [(-3 \cdot 4) - (3 \cdot 2)] + \hat{k} [(-3 \cdot 2) - (3 \cdot 1)] \\ &= \hat{i} [4 - 4] - \hat{j} [-12 - 6] + \hat{k} [-6 - 3] \\ &= 0\hat{i} + 18\hat{j} - 9\hat{k}\end{aligned}$$

∴  $\langle 0, 18, -9 \rangle$  es el vector ortogonal no cero al plano.

b) Determine el área del triángulo PQR

$$\begin{aligned}A_{\Delta} &= \frac{1}{2} |\vec{v} \times \vec{w}| = \frac{1}{2} \underbrace{|\langle 0, 18, -9 \rangle|}_{\sqrt{0^2 + 18^2 + (-9)^2}} \\ &\quad \sqrt{324 + 81} \\ &\quad \sqrt{405}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{405} = \frac{1}{2} 9 \cdot \sqrt{5} = \frac{9 \cdot \sqrt{5}}{2} \leftarrow \text{es el .}$$

$\approx 10.06$

- b) Volumen del paralelepípedo determinado por los vectores  $a = \langle 1, 2, 3 \rangle$ ;  $b = \langle -1, 1, 2 \rangle$ ;  $c = \langle 2, 1, 4 \rangle$ .

$$V_p = |a \cdot (b \times c)| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{i}[(1 \cdot 4) - (1 \cdot 2)] - \hat{j}[( -1 \cdot 4) - (2 \cdot 2)] + \hat{k}[( -1 \cdot 1) - (2 \cdot 1)]$$

$$\dots = \hat{i}[4 - 2] - \hat{j}[-4 - 4] + \hat{k}[-1 - 2] = 2\hat{i} + 8\hat{j} - 3\hat{k}$$

# Ahora  $\hat{i} = 1$ ;  $\hat{j} = 2$ ;  $\hat{k} = 3$ ; (por vector a)

$$= 2(1) + 8(2) - 3(3)$$

$$= 2 + 16 - 9 = 18 - 9 = 9$$

es el volumen del paralelepípedo a, b, c.

- 7) ¿Están los pts. A(1, 4, -7); B(2, -1, 4); C(0, -9, 18); D(0, 0, 0) sobre el mismo plano?

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \langle (2 - 1), (-1 - 4), (4 + 7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{u} = \langle 1, -5, 11 \rangle}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = \langle (0 - 1), (-9 - 4), (18 + 7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{w} = \langle -1, -13, 25 \rangle}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AD} = \langle (0 - 1), (0 - 4), (0 + 7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{v} = \langle -1, -4, 7 \rangle}$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v})}$$

$$\vec{u}(\vec{\omega} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -13 & 25 \\ -1 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{i} [(-13 \cdot 7) - (-4 \cdot 25)] - \hat{j} [(-1 \cdot 7) - (25 \cdot -1)] + \hat{k} [(-1 \cdot -4) - (-1 \cdot -13)] \\ = 9\hat{i} - 18\hat{j} - 9\hat{k}$$

# reemplazar  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  con  $\vec{v}$ .

$$= 9(1) - 18(-5) - 9(11)$$

$$= 9 + 90 - 99$$

$$= 9 - 99 + 90$$

$$= -90 + 90 = 0 \quad \therefore \text{sí son parte del mismo plano.}$$

8)  $(a \cdot b) = \sqrt{3}$  &  $(a \times b) = \langle 1, 2, 2 \rangle$

# encuentra ángulo entre  $a$  &  $b$ .

$$\underbrace{a \cdot b}_{\sqrt{3}} = |a||b|\cos\theta$$

$$\underbrace{(a \times b)}_{|\langle 1, 2, 2 \rangle|} = |a||b|\sin\theta$$

$$|a||b|\cos\theta = \sqrt{3}$$

$$\underbrace{|a||b|}_{\text{# Sustituir en }} = \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$$

$$|\langle 1, 2, 2 \rangle| = \frac{\sqrt{3} \sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \left. \right\} \tan\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{1 + 4 + 4}}{\sqrt{3}}$$

55)  $\tan\theta = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{3}}$

$$, \quad - = 3 \cdot 3^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tan \theta = -3^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}$$

$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3})$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

∴ El ángulo es  $\theta = \frac{\pi}{3}$

BONO:

9) a)  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

# Partimos desde la siguiente propiedad.

$$\hookrightarrow |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta \quad \# \text{ Elevamos al cuadrado}$$

$$\Rightarrow |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \theta$$

# Propiedad pitagórica

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

# Sustituir

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta) \quad \# \text{ Distribuyo}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - \underbrace{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \theta}_{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$$

∴  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

□

b)  $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad \# \text{ Quiero llegar a esto}$

$$= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

# Propiedad distributiva

$$= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

$$= (\cancel{\mathbf{a} \times \mathbf{a}}^{\textcircled{0}}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - \cancel{(\mathbf{b} \times \mathbf{b})^{\textcircled{0}}}$$

$$= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

$$\begin{aligned}\# (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ \therefore 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &\quad \square\end{aligned}$$



# **Parte III**

## **Examenes Cortos**



# Capítulo 7

Examen corto #01

## Corto #1 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: David Corzo Carnet: 20190432

Resuelva las siguientes problemas:

1. (50 pts.) Halle la ecuación de la esfera con centro  $(3, -6, 4)$  y radio 5. 10  
 ¿Cuál es la intersección de esta esfera con el plano  $xz$ ?

Ecuación :

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 6)^2 + (z - 4)^2} = 10$$

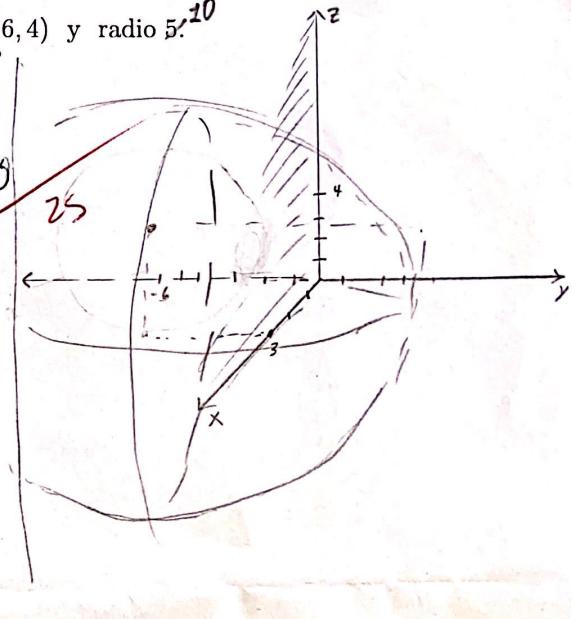
Se asume  $y = 0$ ;

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (z - 4)^2 + (6)^2} = 10$$

$$(x - 3)^2 + (z - 4)^2 + 36 = 10^2$$

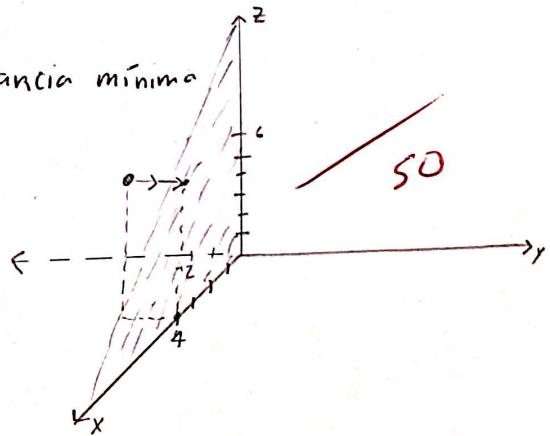
$$(x - 3)^2 + (z - 4)^2 = 100 - 36$$

Intersección :  $(x - 3)^2 + (z - 4)^2 = 64$  25



2. (50 pts.) Determine la distancia mínima del punto  $(4, -2, 6)$  al plano  $xz$ .

La distancia mínima  
es 2.



100/100

# Capítulo 8

Examen corto #03

### Corto #3 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: David Corzo

Carnet: 20190430

~~90~~ / 100

Resuelva los siguientes problemas:

$$\begin{array}{r} 12 \\ 769 \\ + 496 \\ \hline 665 \\ 25 \\ \hline 690 \\ \\ \begin{array}{r} 14 \\ \cdot 14 \\ \hline 56 \\ 44 \\ \hline 496 \end{array} \end{array}$$

1. (50 pts.) Determine el área del triángulo entre los puntos  $P = (0, -2, 0)$ ,  $Q = (4, 1, -2)$  y  $R = (5, 3, 1)$ .

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{PQ} = \langle (4-0), (1-(-2)), (-2-0) \rangle = \langle 4, 3, -2 \rangle \\ \vec{w} &= \overrightarrow{PR} = \langle (5-0), (3-(-2)), (1-0) \rangle = \langle 5, 5, 1 \rangle \\ |\vec{u} \times \vec{w}| &= \left| \begin{array}{ccc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & 1 \end{array} \right| = \hat{i}[(3 \cdot 1) - (-2 \cdot 5)] - \hat{j}[(4 \cdot 1) - (-2 \cdot 5)] + \hat{k}[(4 \cdot 5) - (3 \cdot 5)] \\ &= \hat{i}[3 + 10] - \hat{j}[4 + 10] + \hat{k}[20 - 15] \\ &= 13\hat{i} - 14\hat{j} + 5\hat{k} \\ &= \langle 13, -14, 5 \rangle \\ &\quad \text{XO} \end{aligned}$$

2. (50 pts.) Encuentre el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores  $a = \langle 1, 5, -2 \rangle$ ,  $b = \langle 3, -1, 0 \rangle$ , y  $c = \langle 5, 9, -4 \rangle$ .

$$P_{\square} = |c \cdot (a \times b)|$$

$$\begin{aligned} (a \times b) &= \left| \begin{array}{ccc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{array} \right| = \hat{i}[(5 \cdot 0) - (-2 \cdot -1)] - \hat{j}[(1 \cdot 0) - (-2 \cdot 3)] + \hat{k}[(1 \cdot -1) - (5 \cdot 3)] \\ &= \hat{i}[0 - 2] - \hat{j}[0 + 6] + \hat{k}[-1 - 15] \\ &= -2\hat{i} - 6\hat{j} - 16\hat{k} \\ c \cdot (a \times b) &= \langle 5, 9, -4 \rangle \cdot \langle -2, -6, -16 \rangle \\ &= (5 \cdot -2) + (9 \cdot -6) + (-4 \cdot -16) \\ &= (-10) + (-54) + 64 \\ &= -64 + 64 = 0 \end{aligned}$$

$\frac{64}{H}$  un plano no un paralelepípedo

$$\begin{aligned} |c \cdot (a \times b)| &= \sqrt{(-10)^2 + (-54)^2 + (-64)^2} \\ &= \sqrt{100 + 2916 + 4096} \\ &= \sqrt{7102} \end{aligned}$$