

# Rocket Book Compilation - Cálculo Multivariable

Christiaan Ketelaar  
Organizado por : David Corzo

2020-01-06

# Índice general

1. Sistemas Tridimensionales de coordenadas	3
2. Distancias y superficies básicas	10
3. Vectores	18
4. Producto punto	27
5. Producto cruz	34
6. Ángulo entre vectores y ejes & Vectores paralelos y perpendiculares en n-dimensiones, Ecuación vectorial de una recta	43
7. Rectas y planos	50
8. Continuación de rectas y planos	59
9. Funciones Vectoriales & Límites y continuidad	66
10. Cálculo con funciones vectoriales: derivadas, integrales, etcétera	73
11. Continuación de cálculo con funciones vectoriales	78
12. Funciones de varias variables	86
13. Curvas de nivel	92
14. Derivadas parciales	101
15. Derivadas parciales, rectas tangentes y planos tangentes	107
16. Regla de la cadena, derivación implícita, planos y rectas tangentes	116
17. Derivadas direccionales y gradiente	124
18. Máximos y mínimos & problemas de aplicación, optimización	132
19. Multiplicadores LaGrange	140

# Capítulo 1

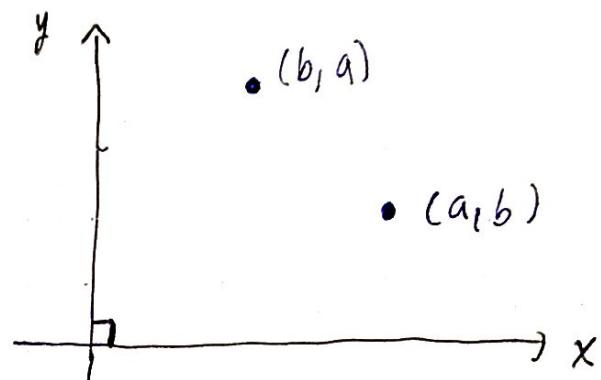
## Sistemas Tridimensionales de coordenadas

## 12.1 Sistemas Tridimensionales de Coordenadas.

Para localizar un punto en un plano, se necesitan 2 números.

- a la coordenada  $x$
- b la coordenada  $y$ .

Plano  $\mathbb{R}^2$

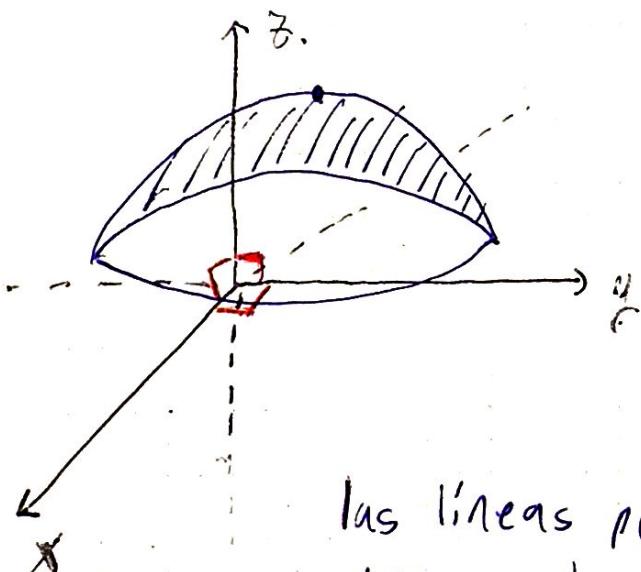


Los ejes de coordenadas son perpendiculares entre sí.

El sistema tridimensional de coordenadas rectangulares cada punto en el espacio es una terna ordenada  $(x, y, z)$

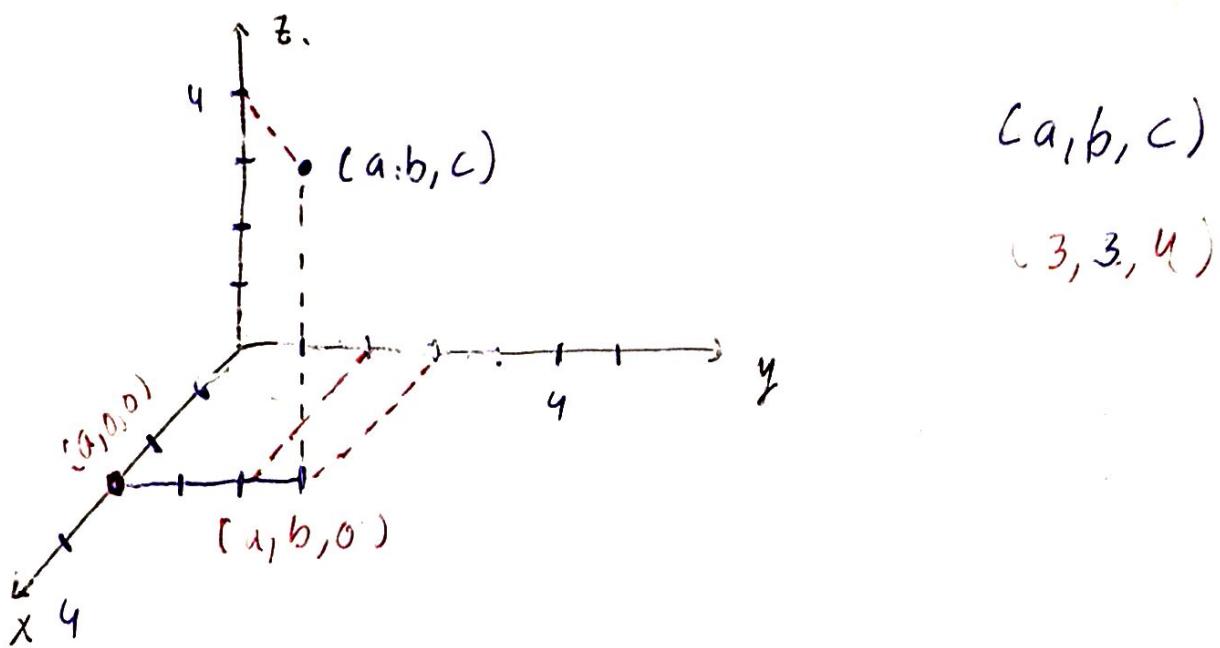
Espacio  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \text{ tal que } x, y, z \in \mathbb{R}\}$ .

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}.$$



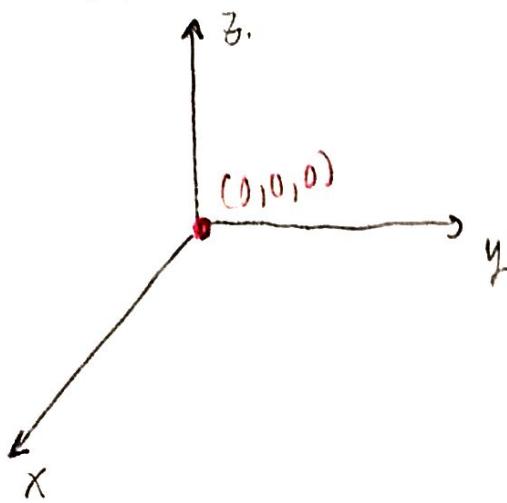
$x$  transversal  
 $y$  horizontal  
 $z$  vertical.  
 $z = f(x, y)$

las líneas punteadas se para simbolizar las partes de abajo, izquierda y detrás.

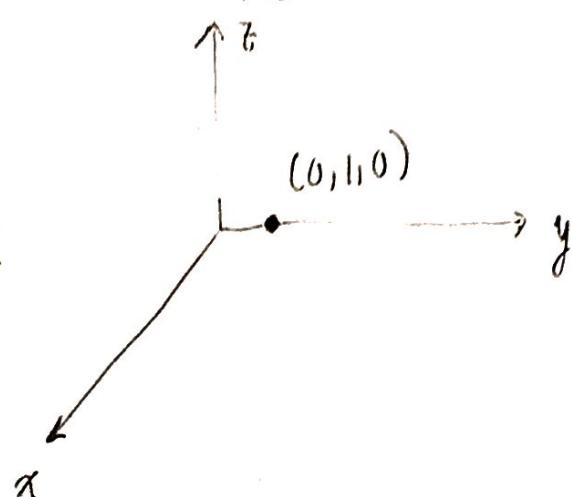


Ejercicio 1: Identifique los siguientes puntos.

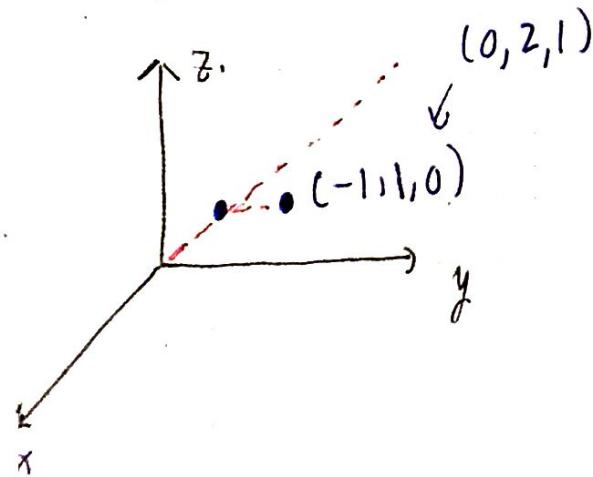
a.  $(0, 0, 0)$



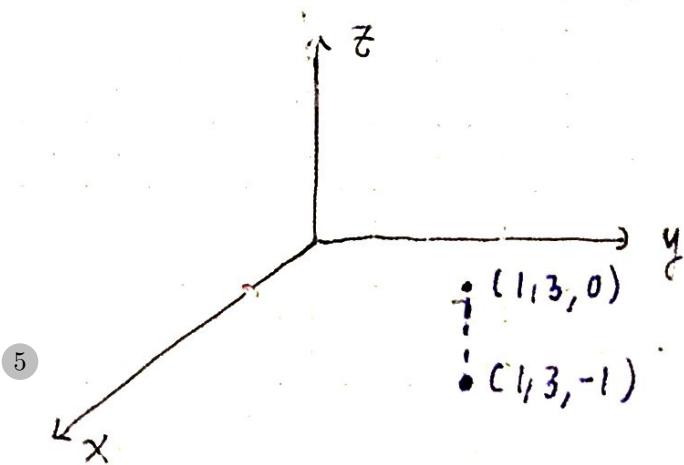
b.  $(0, 1, 0)$



b.  $(-1, 1, 0)$

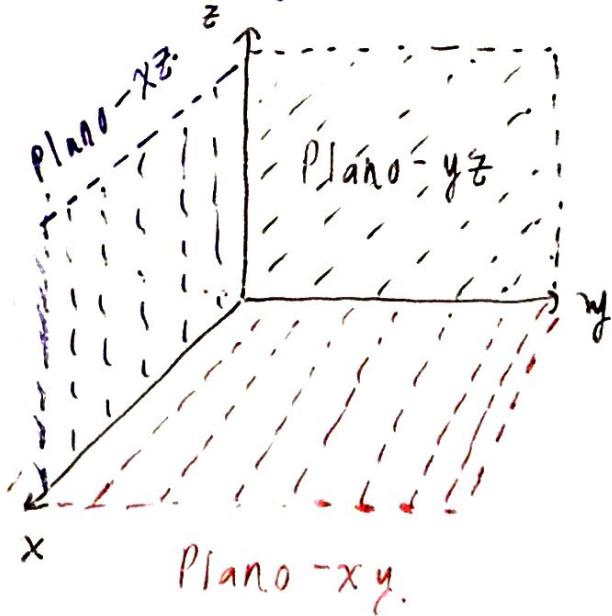


c.  $(1, 3, -1)$



## Planos Coordenados.

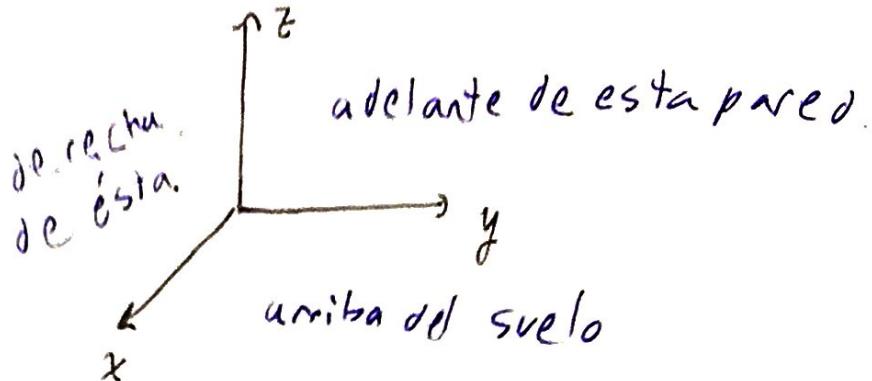
Plano -  $xy$  :  $z = 0$ . (el suelo) Plano -  $yz$   $x = 0$   
 (pared de atrás)



Plano -  $xz$   $y = 0$ .  
 (pared izquierda)

1er octante.

$$x > 0, y > 0, z > 0$$



## Planos en el espacio.

En 2-D.

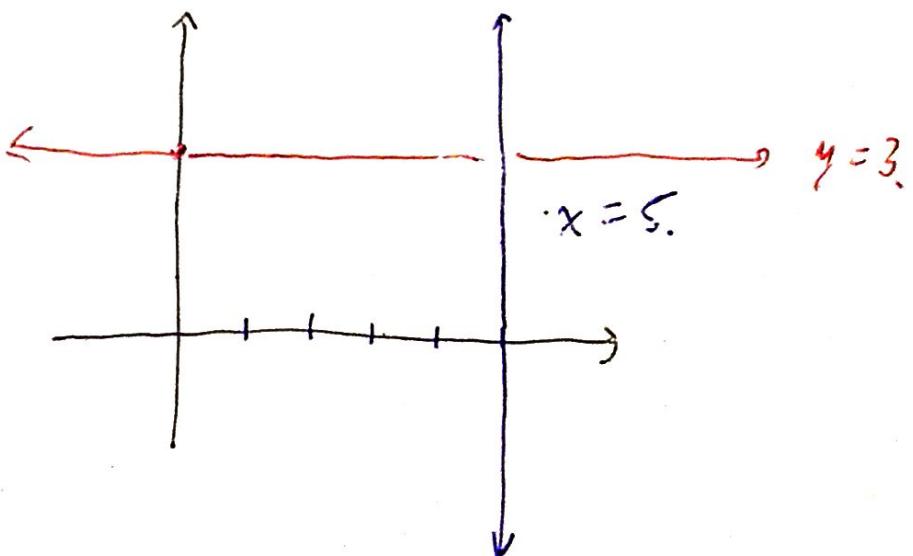
$$x = 5 \text{ ó } y = 3.$$

$$x = a$$

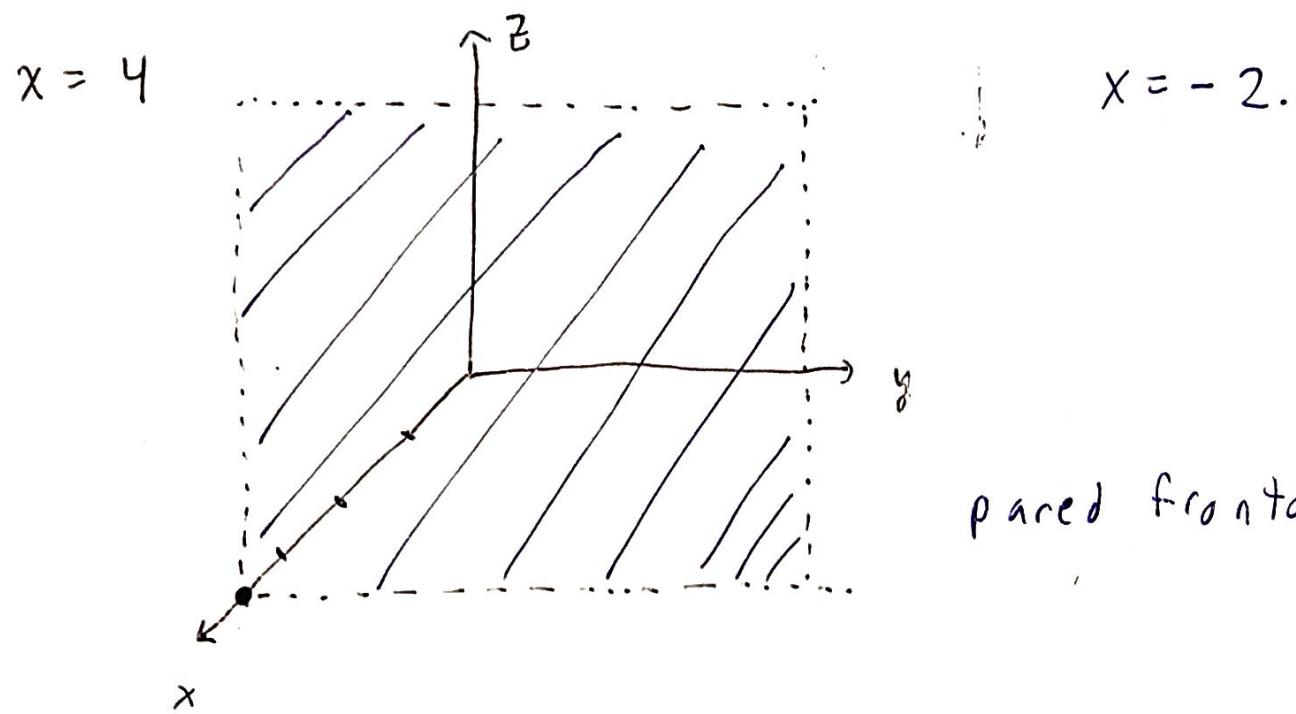
Rectas Verticales.

$$y = b.$$

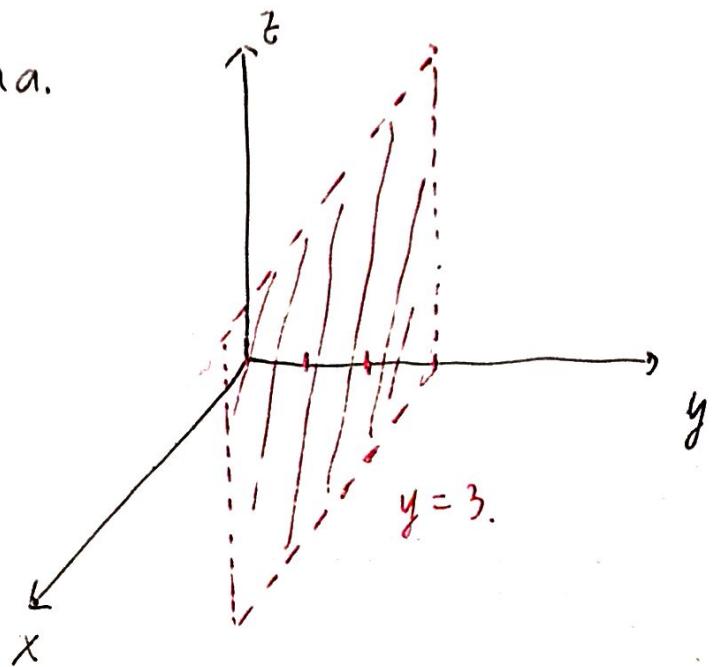
Rectas Horizontales.



En 3-D  $x=a$ ,  $y=b$ ,  $z=c$  son gráficas de planos.

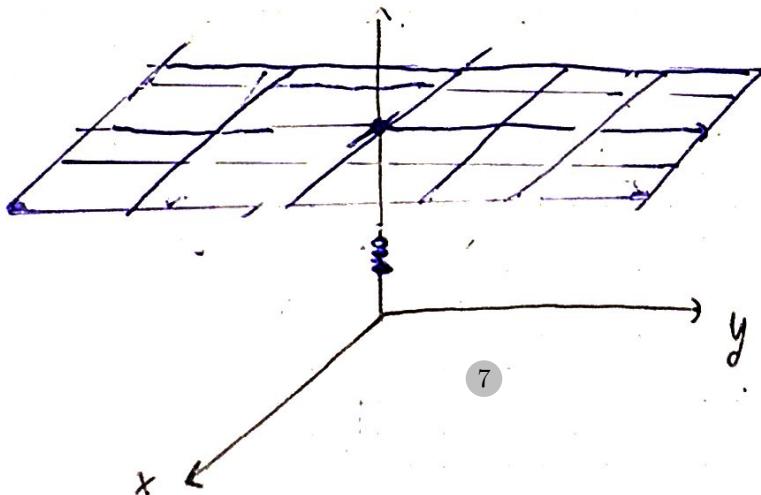


$y = 3$ . pared derecha.



$z = 2$ .

(techo)



Ec. lineal en 3-D va a graficar un plano.

5

Ec. Plano.  $ax + by + cz = d$ .

generalmente se grafican sólo en el primer octante  
si cada  $a, b, c$  y  $d$  es positiva.

Intersección  $x$ :  $y=0, z=0$   $(a, 0, 0)$

Intersección  $y$ :  $x=0, z=0$   $(0, b, 0)$

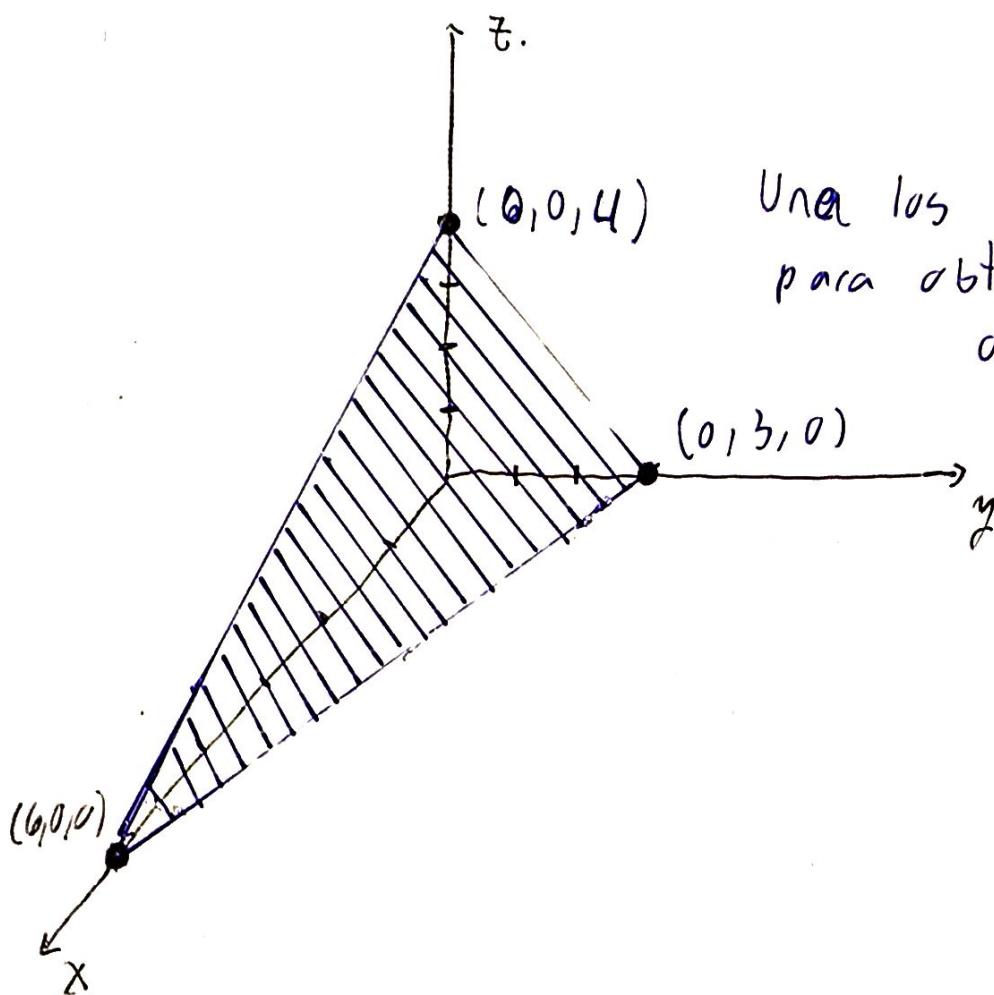
Intersección  $z$ :  $x=0, y=0$   $(0, 0, c)$

Ejercicio 3: Bosqueje el plano  $2x + 4y + 3z = 12$   
sólo en el primer octante.

Intersepto- $x$ :  $2x = 12 \Rightarrow (6, 0, 0)$

Intersepto- $y$ :  $4y = 12 \Rightarrow (0, 3, 0)$

Intersepto- $z$ :  $3z = 12 \Rightarrow (0, 0, 4)$



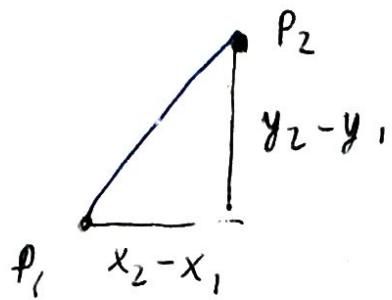
Une los tres puntos  
para obtener un segmento  
del plano

# Capítulo 2

## Distancias y superficies básicas

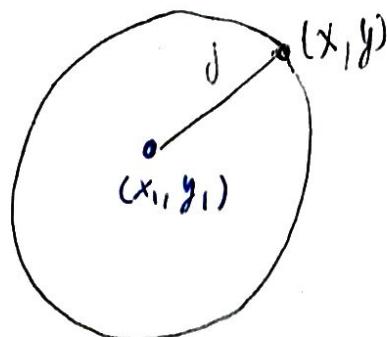
## 12.1.2 Distancias y Superficies Básicas.

En 2-D, la distancia entre  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = d^2.$$



Es Circunferencia  
de radio  $d$ . centrada  
en  $(x_1, y_1)$ .

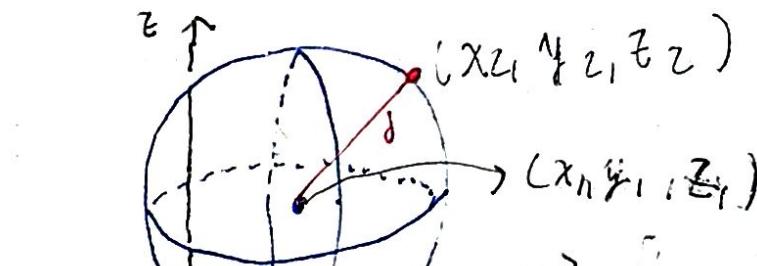
En 3-D, la distancia entre  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  y  $P_2(x_2, y_2, z_2)$

Calcule la diferencia entre  $z_2$  &  $z_1$ .

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

No puede  
ser  
negativa.

Notación  $d = |P_2 P_1|$



$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = d^2$$

Es. de una esfera de radio  $r$   
centrada en  $(x_1, y_1, z_1)$ .

Pág. 15.

Esfera más utilizada centrada en el origen  $(0,0,0)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \text{radio } r.$$

Ejercicio 4: Encuentre el centro y radio de la esfera cuya ecuación es:

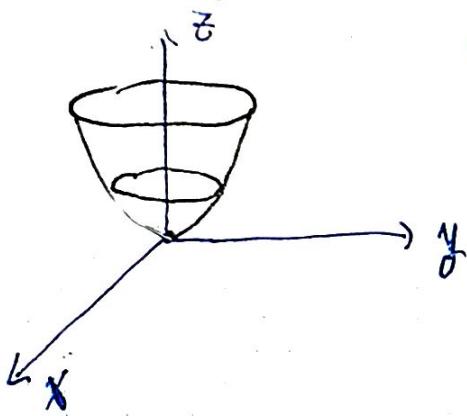
$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 4z + 4 = 0. \quad (\text{P}16).$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 + z^2 + 4z + 4 = -4. + 16 + 9 + 4$$

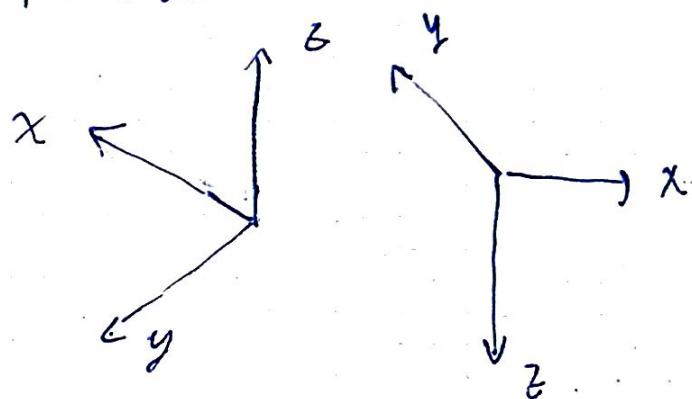
$$(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 25 = r^2$$

Centro de esfera  $(-4, 3, -2)$  Radio  $\sqrt{25} = 5$ .

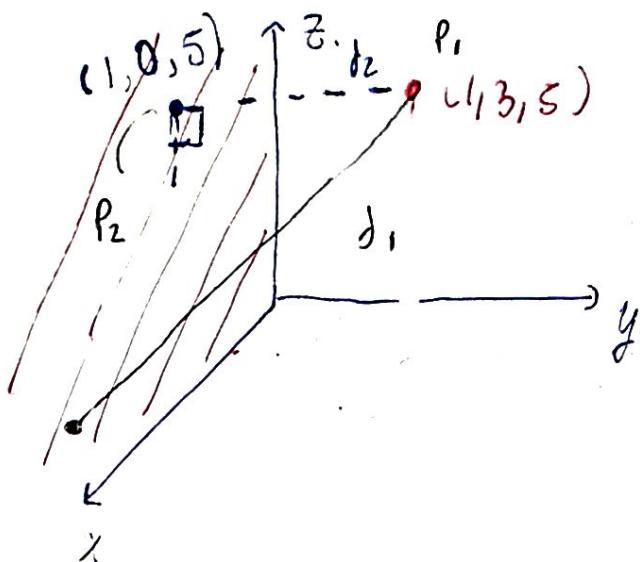
$Z = x^2 + y^2$  no es una esfera.



es un paraboloide.



Distancia entre un punto y un plano-coordenado.



Encuentre la distancia entre el punto  $(1, 3, 5)$  y el plano  $xz$ . (tiene infinitos puntos)

En el plano  $xz$   $y=0$

si se estrella el punto  $(1, 3, 5)$  contra el plano  $xz$  se obtiene el punto  $(1, 0, 5)$ .

"Estrellar": Encuentre la proyección del punto  $P$  sobre el plano.

$$\text{Distancia entre } P_1 \text{ y } P_2 \quad d = \sqrt{(1-1)^2 + (3-0)^2 + (5-5)^2}$$

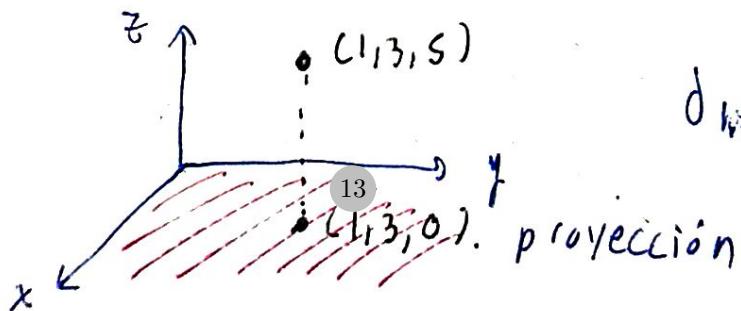
$$d = \sqrt{0+9+0} = 3$$

Gabriel la proyección del punto  $(a, b, c)$  sobre el plano  $xz$  es el punto  $(a, 0, c)$ .

Distancia mínima entre  $P$  y el plano es

$$d = \sqrt{0+b^2+0} = |b|. \quad \text{de la componente } -y.$$

¿Cuál es la distancia entre el punto  $(1, 3, 5)$  y el plano  $xy$ ?  $z=0$ .



$$d_{\min} = \sqrt{0+0+5^2} = 5.$$

Ejercicio 6: considere los puntos  $A(3, 0, -4)$ ,  $B(9, 0, 0)$   
 y  $C(0, 1, \sqrt{15})$ .  
 $\uparrow$   $\uparrow$   $\uparrow$   
 $y=0$ .  $y=0$   $z=0$ .

a. ¿Cuál de los sgs. puntos está más cercano al origen?

Calcule la distancia de cada punto respecto al origen.

$$d_{AO} = |AO| = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5 \quad O(0,0,0)$$

$$|BO| = \sqrt{81+0+0} = \sqrt{81} = 9$$

$$|CO| = \sqrt{0+1+15} = \sqrt{16} = 4.$$

✓ es el más cercano al origen.

b. ¿Cuáles de los puntos están sobre el plano  $yz$ ?

Ec. Plano  $yz$ :  $x=0$ .

A y B no están sobre el plano  $yz$   $x \neq 0$ .

El punto C  $(0, 1, \sqrt{15})$  si está sobre este plano.

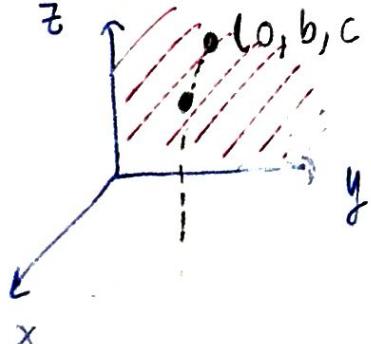
Comentario. A está sobre el plano  $xz$ .

B está sobre el eje x.

está sobre el plano  $xy$  &  $xz$

c. ¿Cuáles de los puntos está más cercano al plano  $yz$ ?  $x=0$ .

$z$   $(0, b, c)$ .



como C está sobre el plano  $yz$   
 éste es el más cercano a este plano  
 $d=0$ .

Encuentre las proyecciones y las distancias

$$A(3,0,-4), \quad P_A = (0,0,-4), \quad d_A = 3$$

$$B(9,0,0), \quad P_B = (0,0,0), \quad d_B = 9.$$

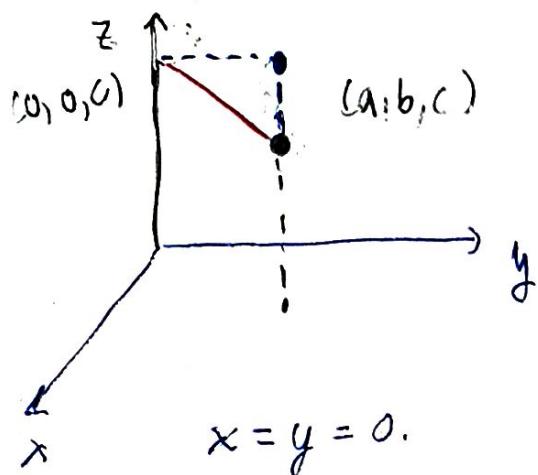
$$C(0,1,\sqrt{15}), \quad P_C = (0,1,\sqrt{15}), \quad d_C = 0 \quad \checkmark$$

mismo punto, éste sobre el plano  $yz$

Distancia entre un punto y un eje.

j. ¿Cuál de los siguientes puntos está más cercano

al eje  $-z$ .



En el eje  $z$   $x=0, y=0$ .

La proyección del punto  $P(a,b,c)$  al eje  $z$  es el punto  $P_1(0,0,c)$ .

$$d_{\min} = \sqrt{a^2 + b^2 + 0}$$

Encuentre las proyecciones sobre el eje  $y$  las distancias.

$$A(3,0,-4), \quad P_A(0,0,-4), \quad d_A = \sqrt{9+0+0} = 3.$$

$$B(9,0,0), \quad P_B(0,0,0), \quad d_B = \sqrt{81+0+0} = 9.$$

$$C(0,1,\sqrt{15}), \quad P_C(0,1,\sqrt{15}), \quad d_C = \sqrt{0+1+0} = 1$$

mas cercano

Plano  $x=0$  plano  $yz$

$y=0$  plano  $xz$

$z=0$  plano  $xy$

Ejes

$x=0, y=0$

$x=0, z=0$

$y=0, z=0$

Eje  $-z$

Eje  $-y$

Eje  $-x$

Superficies. Básicas: Planos, Cilindros y Esfera.

En 12.6 superficies cuádricas cilindro parabólico  
cilindro (función).

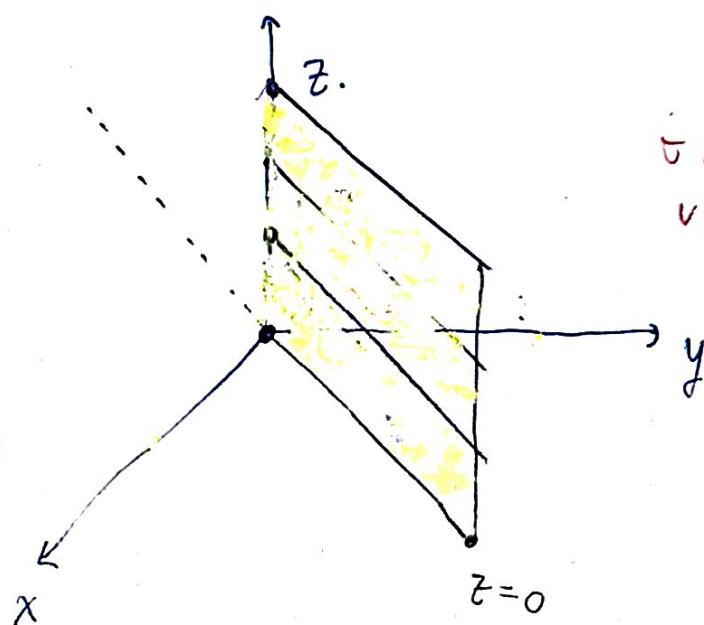
Ejercicio 7: Bosqueje el plano  $y = x$ . en el 1er octante.

$$z = 0 : y = x$$

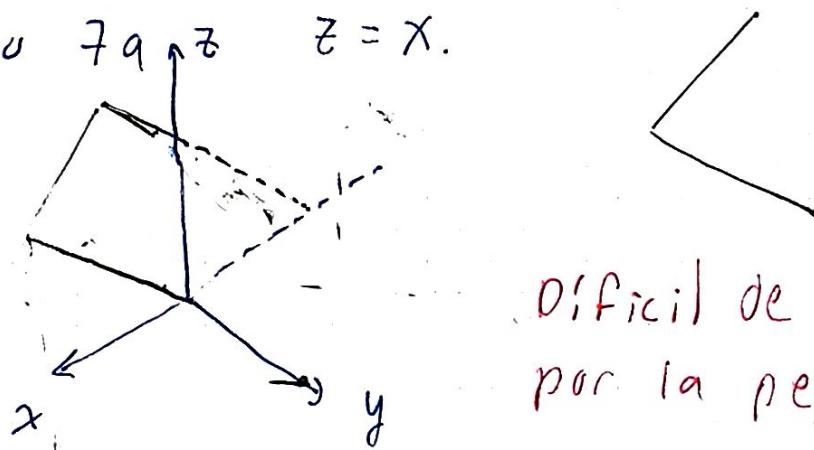
$$z = 1 : y = x$$

$$z = 9 : y = x$$

sólo tiene  
intersectos con el  
eje -z.



Ejercicio 7a)  $z = x$ .

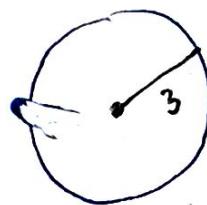


Difícil de graficar  
por la perspectiva.

Ejercicio 8: Grafique las siguientes superficies

a.  $x^2 + z^2 = 9$ .

Variable  $y$ .

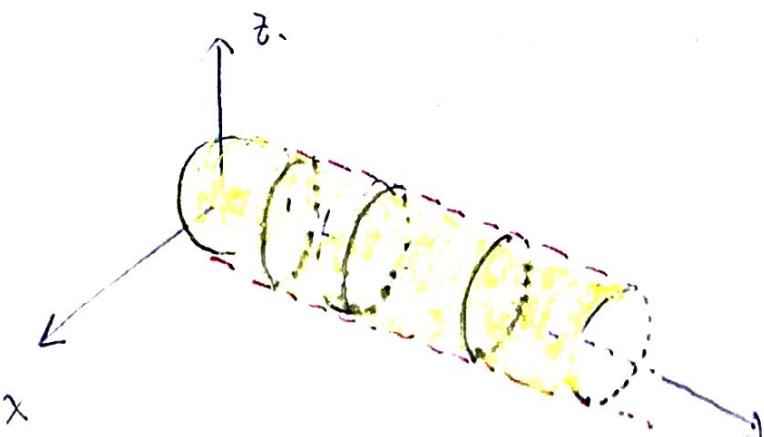


En 2-D

circunferencia  
de radio 3.

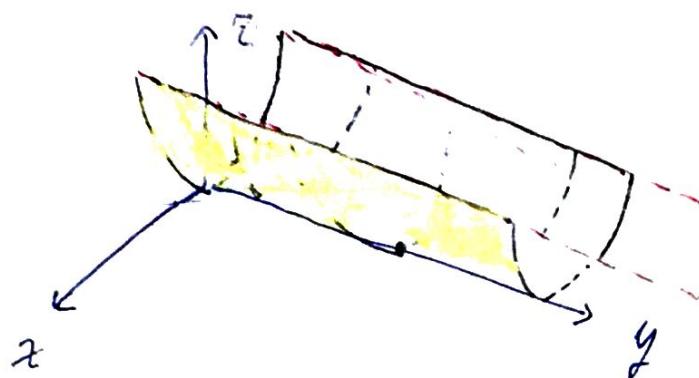
$$y=0 \quad x^2 + z^2 = 9$$

$$y=2 \quad x^2 + z^2 = 9$$



Cilindro circular de radio centrado en el eje -y.

b.  $z = x^2$ .

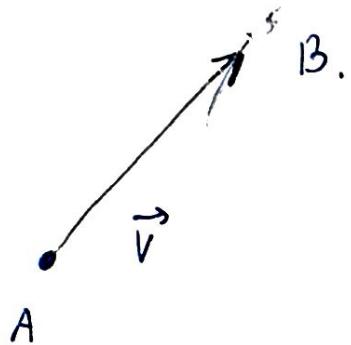


hoja doblada  
cilindro parabólico.

# Capítulo 3

## Vectores

## 12.1 Vectores p. 21.

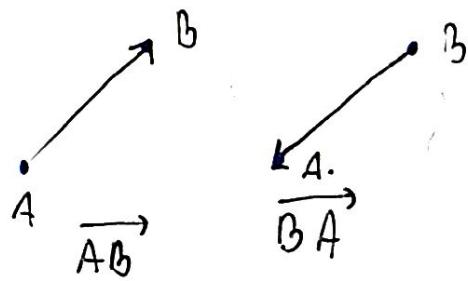


B. Un vector: tiene magnitud y dirección  
se denota en negrilla  $\mathbf{v}$   
o una flecha sobre la letra  
 $\overrightarrow{V}$

la longitud de cada segmento es la magnitud del vector.  
la flecha indica su dirección.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

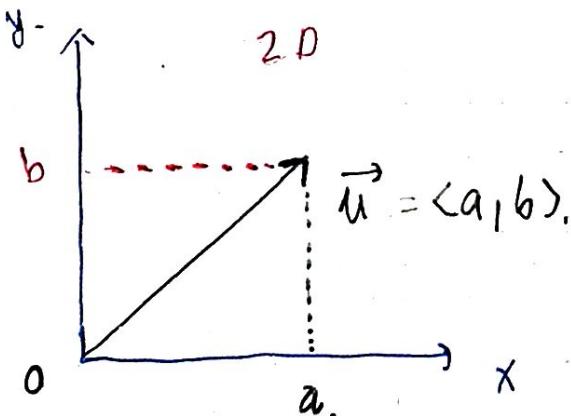
segmento de recta dirigido  
empieza en el punto  $A$  y termina en el  $B$ .



$$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$$

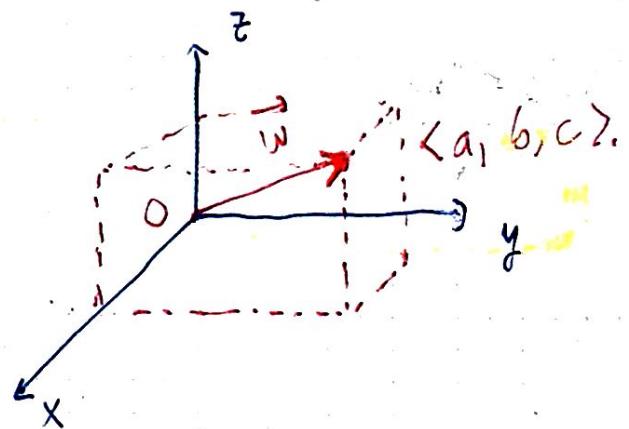
vector cero  $\vec{0}$  no tiene ni  
magnitud ni dirección.

Sistema de coordenadas y las componentes de un vector.



$$\vec{u} = \langle a, b \rangle \text{ ó } [a, b]$$

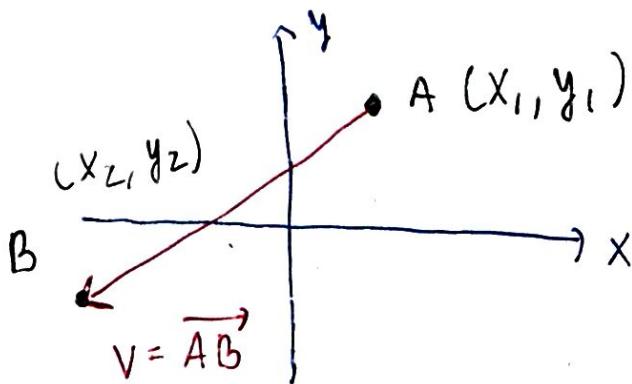
las llaves  $\langle \rangle$  denotan a un vector.



$$\vec{w} = \langle a, b, c \rangle$$

## Vector Posición:

En 2-D.



$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle.$$

En 3-D.

$$A(x_1, y_1, z_1) \text{ & } B(x_2, y_2, z_2)$$

$$\overrightarrow{BA} = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2 \rangle.$$

Magnitud de un vector: la distancia entre el punto B y el punto A.

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

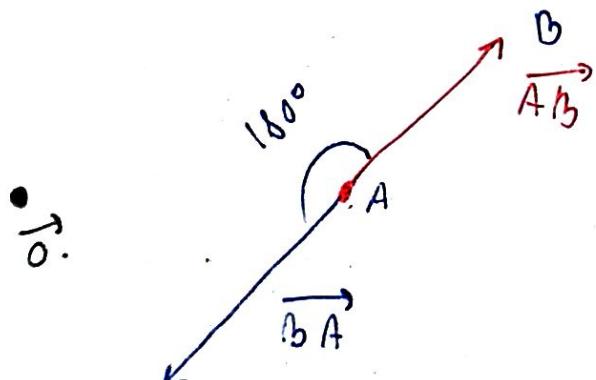
Se nota con || ó |||.

$$\text{si } \vec{v} = \langle a, b, c \rangle \quad |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Observaciones:  $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

$$\text{pero } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|.$$



$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}?$$

20

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0} \text{ vector cero.}$$

no tiene dirección.

$$\langle x_1 - x_1, y_1 - y_1, z_1 - z_1 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle.$$

Ejercicio 1: Considere el vector  $\vec{AB}$  con un punto inicial  $A(1, 2, -4)$  y punto final  $B(4, 8, 2)$ .

a. Encuentre el vector posición  $\vec{u} = \vec{AB}$ .

$$\vec{u} = \langle 3, 6, 6 \rangle \quad 2 - (-4)$$

b. Encuentre la longitud del vector  $\vec{u}$ .

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36 + 36} = \sqrt{81} = 9.$$

## Operaciones de Vectores.

I. Suma de vectores

✓ } Aritmética

II. Multiplicación por un escalar.

✓ } Geometría

12.3 Producto Punto

12.4 Producto Cruz.

### Suma de vectores.

$$\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \quad \vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle.$$

Sume cada componente.

$$\vec{u} + \vec{w} = \langle u_1 + w_1, u_2 + w_2, u_3 + w_3 \rangle.$$

Multiplicación por un escalar.  $K$  es una constante.

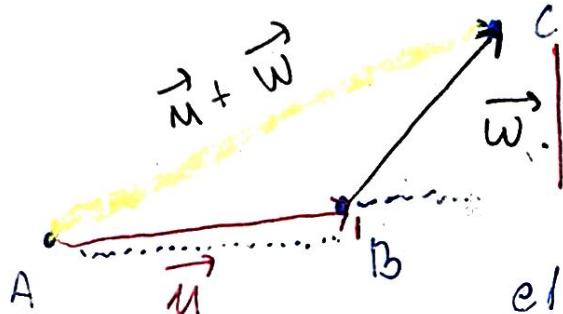
denotada como un escala

Multiplique cada componente.

$$K\vec{w} = \langle Kw_1, Kw_2, Kw_3 \rangle.$$

¿Cómo se pueden visualizar geométricamente estas operaciones?

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \vec{w} = \overrightarrow{BC}$$



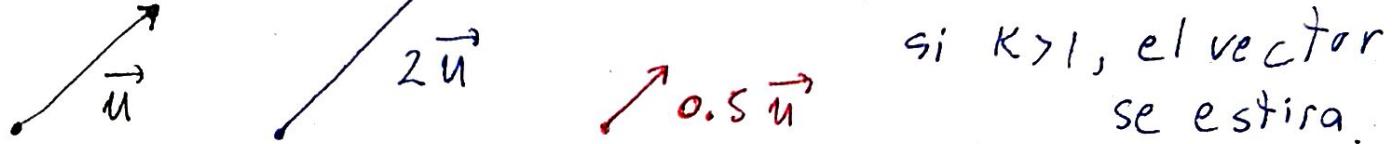
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{u} + \vec{w} = \overrightarrow{AC}$$

Suma de vectores  
el segundo vector  $w$  empieza en el punto donde termina el 1ero

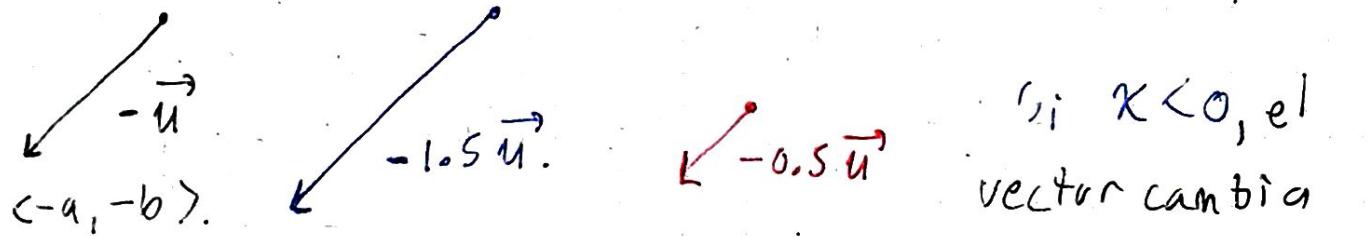
Multiplicación por un escalar

- Se preserva la dirección si  $K > 0$ .



$$\langle a, b \rangle \quad \langle 2a, 2b \rangle \quad 2\langle a, b \rangle.$$

si  $0 < K < 1$ , el vector se comprime.



si  $K < 0$ , el vector cambia de dirección.

(cambia en  $180^\circ$ ).

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \langle 0, 0 \rangle.$$

Negativo de un vector: cuando  $K = -1$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

$$-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$$

Resta o diferencia de vectores: Caso especial de la suma

$$\begin{aligned}\vec{u} + (-\vec{w}) &= \vec{u} - \vec{w} \\ &= \langle u_1 - w_1, u_2 - w_2, u_3 - w_3 \rangle.\end{aligned}$$

Resta cada componente entre sí.

Se puede pensar como la suma entre  $\vec{u}$  y el negativo de  $\vec{w}$ .

Ejercicio 2: Sean  $\vec{a} = \langle 1, -2, 5 \rangle$ ,  $\vec{b} = \langle -2, 1, -3 \rangle$ .

combinación <sup>lineal</sup> de vectores.  $\vec{u}, \vec{w}$  en 2-D.

$$k_1 \vec{u} + k_2 \vec{w} = \langle k_1 u_1 + k_2 w_1, k_1 u_2 + k_2 w_2 \rangle$$

a.  $\vec{a} + \vec{b} = \langle -1, -1, 2 \rangle$ .

b.  $2\vec{a} - 4\vec{b} = \underbrace{\langle 2, -4, 10 \rangle}_{2\vec{a}} + \underbrace{\langle -8, -4, +12 \rangle}_{-4\vec{b}} = \langle 10, -8, 22 \rangle$

c.  $|2\vec{a} - 4\vec{b}| = \sqrt{100 + 64 + 484} = \sqrt{648} \approx 25.45$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30} \approx 5.47.$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14} \approx 3.74.$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \approx 2.45.$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \neq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

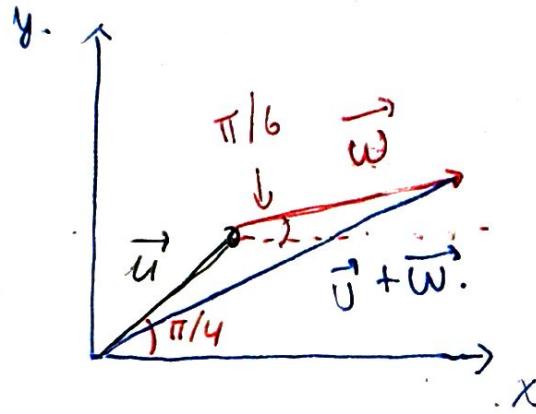
$$\sqrt{|\vec{a} + \vec{b}|^2} \neq \sqrt{|\vec{a}|^2} + \sqrt{|\vec{b}|^2}$$

6.

Problema Bono: Considere el vector  $\vec{u} = \langle 1, 1 \rangle$  y  $\vec{w} = \langle 1, \sqrt{3} \rangle$ .

Encuentre la magnitud y el ángulo respecto al eje -x del vector  $\vec{w} + \vec{u}$ .

$$\vec{w} + \vec{u} = \langle 2, 1 + \sqrt{3} \rangle.$$



$$|\vec{u}| = \sqrt{1+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan \theta = y/x.$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \pi/4.$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1+3^2} = 2.$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi/6.$$

$$|\vec{w} + \vec{u}| = \sqrt{4 + (1 + \sqrt{3})^2}$$

$$\approx 3.3858$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) = 0.93 \text{ rad. } \approx 53.79^\circ$$

Vectores Bases o Estándar.

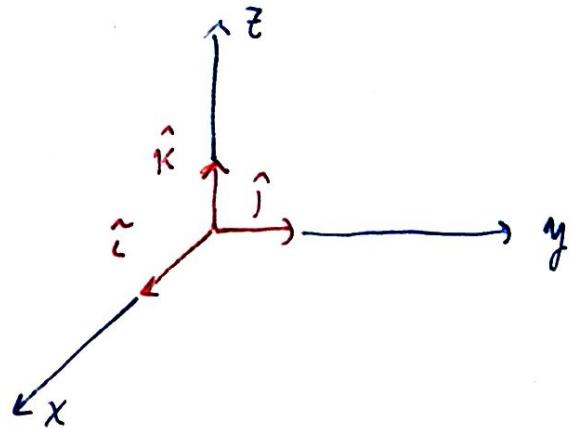
$$\vec{u} = \langle 3, 6, 7 \rangle = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}$$

se denotan como  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  y apuntan en la dirección de cada eje coordenado.

$$\hat{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

$$\hat{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

$$\hat{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$



Permiten expresar cada vector  $\vec{u}$  como una combinación de los vectores estándar.

$$\vec{u} = \langle a, b, c \rangle = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

Magnitud de  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

JNQ.

$$|\hat{i}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1 \quad |\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

Vectores Unitarios: Tienen longitud igual a 1,  
 $|\vec{u}| = 1$

¿Qué sucede si  $|\vec{a}| \neq 1$ ? Se encuentra el vector unitario  $\vec{u}$  asociado a dividiendo por  $|\vec{a}|$ .<sup>25</sup>

El vector  $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$  es siempre unitario.

Ejercicio 3: Sean  $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{k}$ ,  $\vec{b} = 5\hat{j} + 4\hat{k}$ .

Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ .

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = 4\hat{i} - 6\hat{k} + 15\hat{j} + 12\hat{k} = 4\hat{i} + 15\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{16 + 225 + 36} = \sqrt{277}$$

unitario  $\vec{u} = \frac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{|2\vec{a} + 3\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{277}} \langle 4, 15, 6 \rangle$ .

# Capítulo 4

## Producto punto

## 12.3 Producto Punto

Operaciones entre vectores  $\vec{a} + \vec{b}$  (suma)

suma  $\vec{a} + \vec{b}$

Mult. por un escalar  $k\vec{a}$

Producto punto  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Producto cruz  $\vec{a} \times \vec{b}$

Producto punto entre  $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  y  $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

es el número a.o.b. dado por:

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Para un vector en n dimensiones.

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Para que sea posible  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  tienen que tener la misma dimensión

$$\vec{a} = \langle 1, 2, 0, 4 \rangle \quad \vec{b} = \langle 2, 1 \rangle$$

Faltan 2 componentes.

$\vec{a} \cdot \vec{b}$  indefinido

Propiedades:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  Comunitativa.

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  Distributiva

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Ejercicio 1: Calcule el producto punto.

a.  $\vec{a} = \langle 6, -2, 3 \rangle, \vec{b} = \langle 2, 5, 1 \rangle.$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6(2) - 2(5) + 3(1) = 12 - 10 + 3 = 5$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = 12 - 10 + 3 = 5 \quad \text{Gracias AA.}$$

b.  $\vec{u} = \underline{\hat{j}} + \underline{\hat{2}\hat{i}} + \underline{\hat{3}\hat{k}} \quad \vec{v} = \underline{\hat{2}\hat{k}} + \underline{\hat{4}\hat{i}} + \underline{0\hat{j}}$  vectores base

$$\langle \vec{u} \rangle = \langle \hat{j} + 2\hat{i} + 3\hat{k} \rangle \quad \langle \vec{v} \rangle = \langle 2\hat{k} + 4\hat{i} + 0\hat{j} \rangle$$

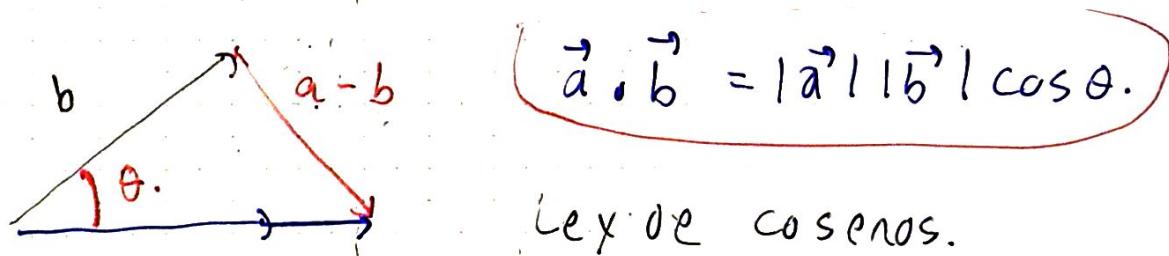
$$\langle \vec{u} \cdot \vec{v} \rangle = \langle 2, 1, 3 \rangle \cdot \langle 4, 0, 2 \rangle = 8 + 0 + 6 = 14$$

c.  $\vec{w} = \langle 1, 0, -2 \rangle \quad \vec{v} = \langle 2, 0, 1 \rangle.$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 2 + 0 - 2 = 0$$

$$\boxed{\vec{w} \cdot \vec{v} = 0}$$

Definición Alternativa del Producto.



Ley de cosenos.

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \theta.$$

$\vec{a}^2$  no existe

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

$$\underline{\vec{a} \cdot \vec{a}} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \underline{|\vec{a}|^2}.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

$$(a-b) \cdot (a-b) = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta.$$

$$a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b$$

$$|a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta.$$

$$a \cdot b = |a||b|\cos\theta.$$

$$|a \times b| = |a||b|\sin\theta.$$

Dados dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , el ángulo  $\theta$  entre los vectores es

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a \cdot b}{|a||b|}\right)$$

Ejercicio 2: determine el ángulo entre los dos vectores.

q.  $\vec{a} = \langle 4, 3 \rangle$   $\vec{b} = \langle -3, 4 \rangle$ .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -12 + 12 = 0 \quad |a| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$|b| = \sqrt{9+16} = 5.$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{0}{25}\right) = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  y el ángulo es  $90^\circ$   $\vec{a} \perp \vec{b}$  ortogonales

ortogonalidad  $\Leftrightarrow$  perpendicularidad.

$$b. \vec{a} = \langle 1, -2 \rangle, \vec{b} = \langle 3, -1 \rangle$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \quad |\vec{a}| = \sqrt{5} \quad |\vec{b}| = \sqrt{10}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi/4$$

c.  $\vec{a} = \hat{i} + \hat{k}, \vec{b} = \hat{i} + \hat{j}$   $\langle 1, 0, 1 \rangle$   $\langle 1, 1, 0 \rangle$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad |\vec{b}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$\approx 16, \pi/4, \pi/3$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Vectores perpendiculares ó ortogonales., denotado como  
 $a \perp b$ .

$$(a \perp b \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0)$$

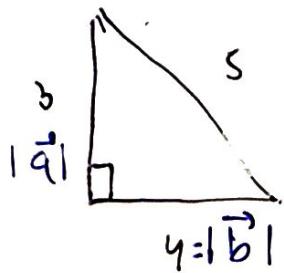
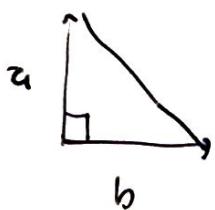
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \pi/2 = 0$$

Ejercicio 3: Determinese si los sigs. son ortogonales entre sí.

$$\vec{a} = \langle 4, 3, 1 \rangle, \vec{b} = \langle 2, -2, -2 \rangle,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 - 6 - 2 = 0$$

Si son ortogonales.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

El triángulo es rectángulo

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

b.  $\vec{u} = \langle 1, 8, -2, 4 \rangle \quad \vec{w} = \langle 3, 4, 6, -1 \rangle$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 3 + 32 - 12 - 4 = 19 \neq 0$$

No son ortogonales.

c.  $\vec{a} = \langle 1, 0, 0 \rangle \quad \vec{b} = \langle 0, 1, 0 \rangle \quad \vec{c} = \langle 0, 0, 1 \rangle$

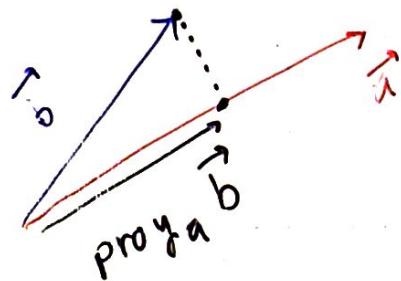
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0. \quad \text{G. sw.}$$

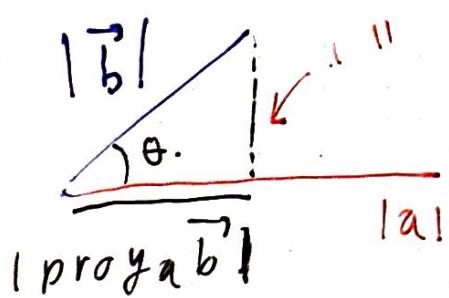
Mutuamente ortogonales.

Proyecciones: un vector se proyecta sobre otro vector



El vector  $\text{proy}_a(\vec{b})$  es la proyección vectorial de  $\vec{b}$  sobre  $\vec{a}$ .

si el ángulo entre  $a$  y  $b$  es  $\theta$ .

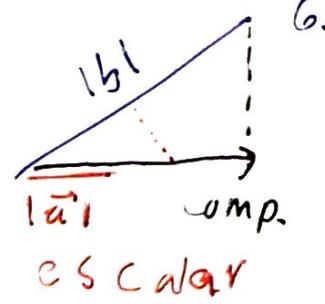


$$\frac{|\text{proy}_a \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \cos \theta. = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

proyección escalar:

$$|\text{proy}_a \vec{b}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$$

proyección escalar:  $\text{Comp}_a \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$



proyección vectorial

tiene la misma dirección que el vector  $\vec{a}$ .

utilice el vector  $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$  para encontrar la dirección de  $\vec{a}$

$$\text{proj}_a \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \right) \vec{a} \quad \text{vector.}$$

Observaciones:  $\text{Comp}_b \vec{a} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{b}|} = \neq \text{comp}_a \vec{b}$

Ejercicio 5: Halle la proyección escalar y la proyección vectorial de  $\vec{b}$  sobre  $\vec{a}$ .

a.  $\vec{a} = \langle -6, 8 \rangle \quad \vec{b} = \langle 3, 4 \rangle$ .

Proy escalar:  $\text{Comp}_a \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{-18 + 32}{\sqrt{100}} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$ .

Proy. vectorial:  $\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{7}{5} \langle -6, 8 \rangle$   
so

b.  $\vec{a} = \langle 1, 1, 3 \rangle \quad \vec{b} = \langle -2, 3, 1 \rangle$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + 3 + 3 = 4 \quad |\vec{a}| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$$

Escalar  $\text{Comp}_a \vec{b} = \frac{4}{\sqrt{11}}$  33

Vectorial  $\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{4}{\sqrt{11}} \langle 1, 1, 3 \rangle$

# Capítulo 5

Producto cruz

## 12.4 Productos Cruz.

Determinantes Matriz (Arreglo rectangular de números)  
Cuadrada (mismo # de filas y columnas)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad \text{Jet orden 2. Matrix } 2 \times 2$$

$$\text{P.e.} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-1)(4) = 6 + 4 = 10$$

Determinante de orden 3: Matriz  $3 \times 3$   
 suma de tres determinantes de orden 2.

$$\left| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \right| = a_1 \left| \begin{array}{cc} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{array} \right| - a_2 \left| \begin{array}{cc} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{array} \right| + a_3 \left| \begin{array}{cc} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{array} \right|$$

$3 \times 3$       3 matrices     $2 \times 2$ .

$$\begin{aligned}
 \text{P.e} \quad & \left| \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right| = 2 \left| \begin{array}{cc} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{array} \right| - 0 \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{array} \right| + 2 \left| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{array} \right| \\
 & = 2(6 - 0) - 0 + 2(-1 - 3) \\
 & = 12 - 8 = 4.
 \end{aligned}$$

## El Producto Cruz.

Dados dos vectores  $\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$  &  $\vec{b} = b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}$

¿Cómo se encuentra un vector  $\vec{c}$  que es perpendicular a  $\vec{a}$  y a  $\vec{b}$ ?

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \quad \vec{c} \cdot \vec{b} = 0.$$

Resuelva para  $c_1, c_2, c_3$

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0$$

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 = 0$$

El producto cruz  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  es un vector perpendicular a ambos vectores  $\vec{a}$  &  $\vec{b}$ .

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \hat{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \hat{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Observaciones:

- El producto cruz es un vector, mientras que el producto es un número o escalar.
  - El producto <sup>cruz</sup> no es commutativo  $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$
- $$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(b_2 a_3 - a_2 b_3) + \hat{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \hat{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 15\hat{i} - 10\hat{j} - 3\hat{k}$$

II. verifique  $\vec{a} \times \vec{b}$  es ortogonal a  $\vec{a}$  &  $\vec{b}$ .

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 1, 3, 0 \rangle = 30 - 30 + 0 = 0.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 1, 0, 5 \rangle = 15 + 0 - 15 = 0.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp a, b.$$

$3 \times 2$ .

claracion: 2-D  $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$  no es posible evaluarlo,  
Existe en 3-D. porque la matriz

$$4-0 \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \vec{l} \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

no es cuadrada  
jD ES POSIBLE  
evaluarlo.

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 15\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}$$

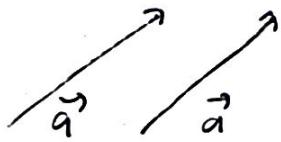
En general  $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

Ejercicio 1: Encuentre el producto cruz entre  
 $\vec{a} = \langle 1, 1, -1 \rangle$  &  $\vec{b} = \langle 2, -2, 3 \rangle$ .

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}(3 - 2) - \hat{j}|1 - 1| + \hat{k}(-2 - 2)$$

$$= \boxed{\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}$$



Ejercicio 2: Encuentre  $\vec{a} \times \vec{a}$ .

$\vec{a}$  es paralelo a si mismo  $\vec{a} \times K\vec{a}$ .

$$\vec{a} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(a_1 a_2 - a_1 a_2) - \hat{j}(0) + \hat{k}(0).$$

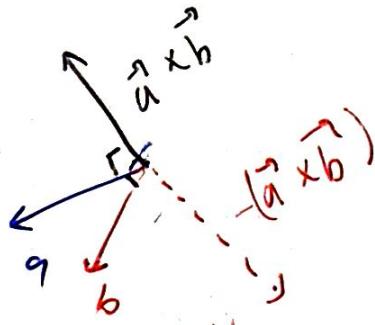
$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

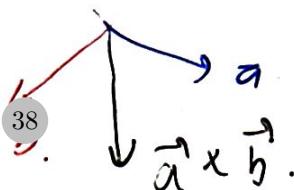
Dos vectores en  $V_3$  (conjunto de vectores 3-D)

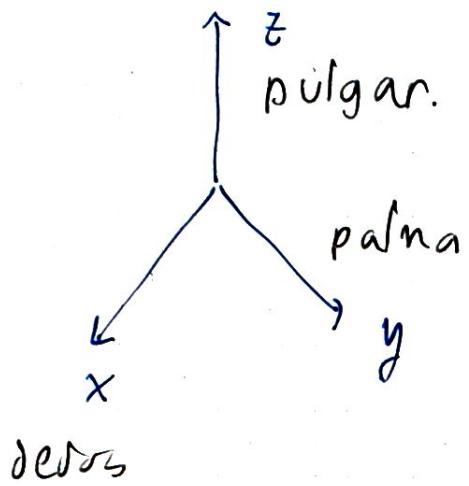
son paralelos si y sólo si  $\vec{a} \times K\vec{a} = \vec{0}$   
 vector cero.

Interpretación Geométrica.

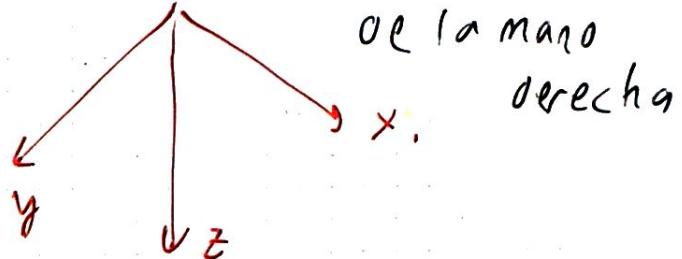


Convenção Mano  
Derecha.





vector ortogonal a ambas que apunta siguiendo la convención de la mano derecha



Propiedad: Dadas  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$  y el ángulo entre estos dos vectores  $\theta$ .

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta. \checkmark$$

En el producto punto  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ .

Para encontrar el ángulo entre dos vectores, es recomendable utilizar el producto punto.

$$\text{Si } \sin \theta = 0 \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0. \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0$$

vectores paralelos.

$$\theta = 0.$$

$$\sin \theta = 0$$

$$\theta = 0.$$

Dos vectores 3-D son paralelos, al  $\vec{b}$ , si y sólo

$$\text{si } \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \text{ vector cero.}$$

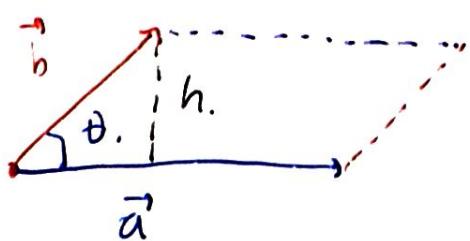
**Recomendable:** inspeccione si  $\vec{b} = K \vec{a}$   
no importa la dimensión del vector.

$$\text{Propiedades} \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Se puede utilizar para áreas de "rectángulos inclinados" y cubos "inclinados."



Paralelogramo.

$$\text{Área} = b h.$$

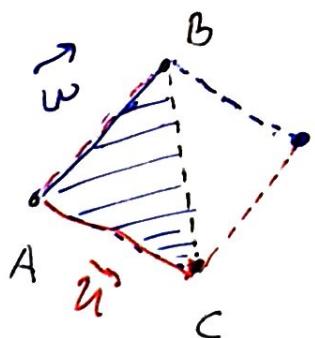
$$\text{base} = |\vec{a}|.$$

$$\text{altura } h = |\vec{b}| \sin \theta$$

$$\text{Área: } A = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta. = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

del Paralelogramo

Ejercicio 3: ¿Cuál es el área del triángulo con vértices en  $A(1,0,1)$ ,  $B(-2,1,3)$  y  $C(1,2,1)$ ?



Área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo

$$A_T = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{w}|$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} = \langle 0, 2, 0 \rangle.$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \langle -3, 1, 2 \rangle.$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(4) - \hat{j}(0) + \hat{k}(6) = 4\hat{i} + 6\hat{k}$$

## Producto Triple Escalar.

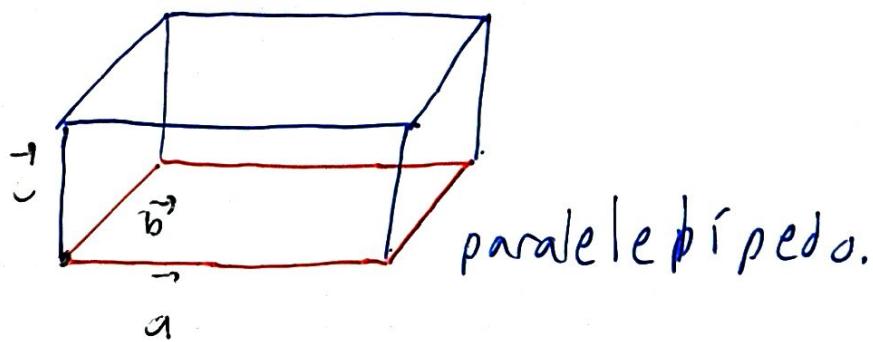
Combina el producto punto y el producto cruz.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

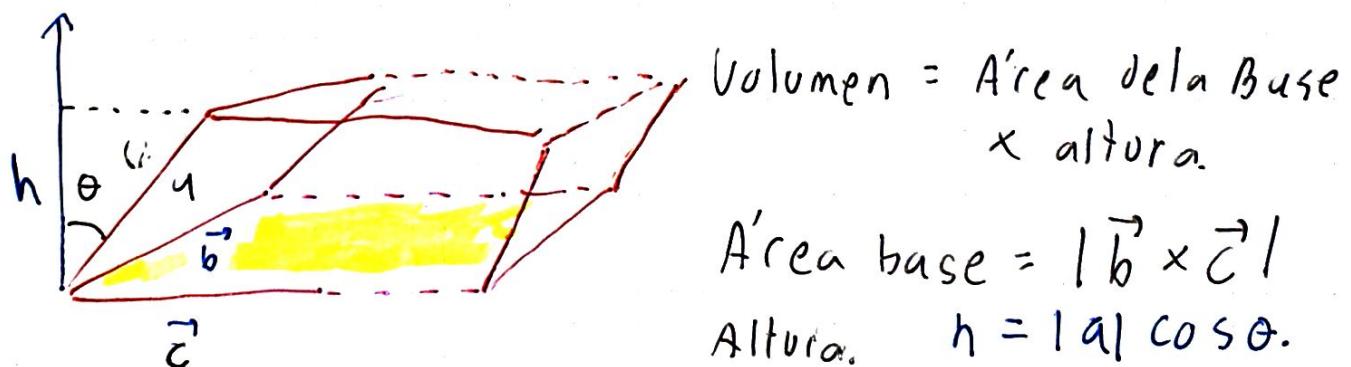
$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ .

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \quad //$$

Volumen de un cubo inclinado Paralelepípedo.

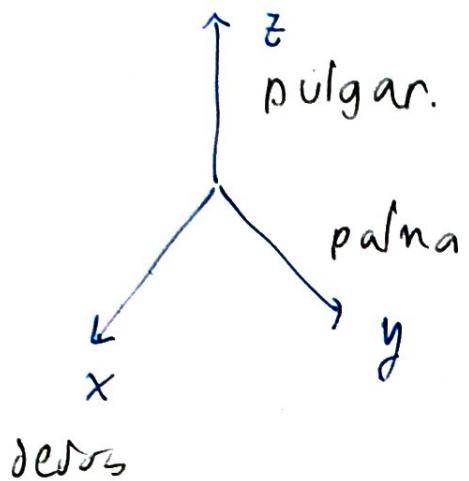


$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

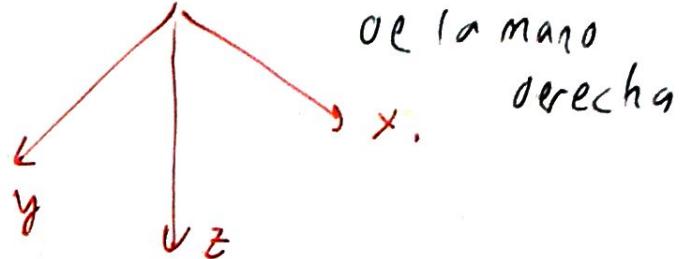


$$\text{Volumen } V = A h. = |\vec{a}| |\vec{b} \times \vec{c}| / \cos \theta.$$

$$U = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$



: vector ortogonal a ambas que apunta siguiendo la convención de la mano derecha



Propiedad: Dadas  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$  y el ángulo entre estos dos vectores  $\theta$ .

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta. \checkmark$$

En el producto punto  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ .

Para encontrar el ángulo entre dos vectores, es recomendable utilizar el producto punto.

$$\text{Si } \sin \theta = 0 \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0. \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0$$

vectores Paralelos.  
 $\theta = 0.$

$$\sin \theta = 0 \\ \theta = 0.$$

Dos vectores 3-D son paralelos, a  $\parallel b$ , si y sólo si  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$  vector cero.

Recomendable: inspeccione si  $\vec{b} = K \vec{a}$   
 no importa la dimensión del vector.

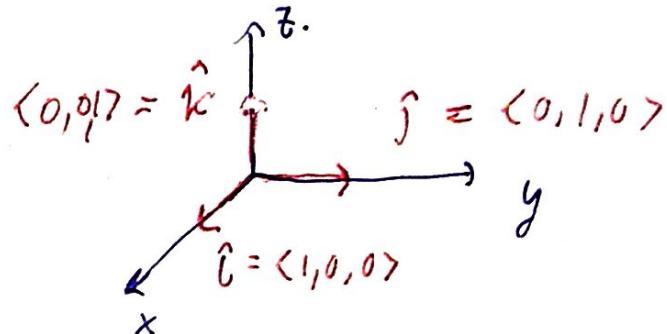
# Capítulo 6

Ángulo entre vectores y ejes & Vectores paralelos y perpendiculares en n-dimensiones, Ecuación vectorial de una recta

Ángulo entre un vector  $\vec{a}$  y un eje

se utiliza la fórmula del producto punto.

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$



Ángulo entre  $\vec{a}$  y el eje y.

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \hat{j}}{|\vec{a}| |\hat{j}|} = \frac{\langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle 0, 1, 0 \rangle}{|\vec{a}|} = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

Ángulos entre el vector y cada eje.

Eje - x:  $\theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{a_1}{|\vec{a}|}\right)$  Eje - y:  $\cos \theta_y = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$

Eje - z:  $\cos \theta_z = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$

Estos ángulos se conocen como seno directores.

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

$$\vec{a} = |\vec{a}| \langle \cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z \rangle$$

Vectores paralelos o perpendiculares en  $n$ -dimensiones.

Dos vectores  $\vec{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$   
 $\vec{b} = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ .

-1

Son paralelos: si  $\vec{a} = K\vec{b}$   $K$  escalar 0.2

1

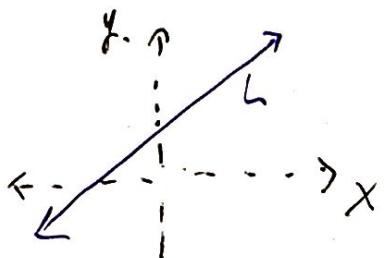
perpendiculares: si  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

ángulo

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

## 12.5 Rectas (p. 39)

En 2-D.



1.  $m$  pendiente

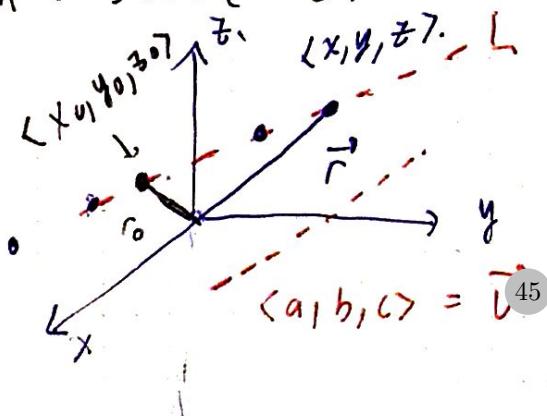
2.  $(x_0, y_0)$  punto sobre  $L$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

En 3-D, para encontrar una recta en el espacio se necesita conocer

1.  $m$  "pendiente", dirección de la recta vector  $\langle a, b, c \rangle$ .

2. punto sobre  $L$ .  $(x_0, y_0, z_0)$ .



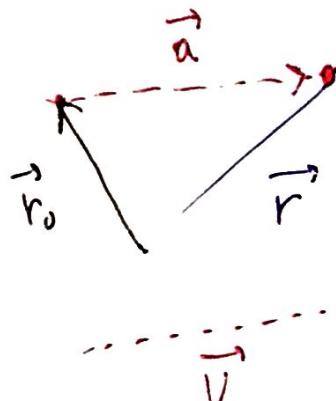
los puntos sobre  $L$ .

Vector punto sobre  $L$   $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle = \vec{r}_0$

Vector cualquier punto sobre  $L$   $\langle x, y, z \rangle = \vec{r}$

Vector dirección

$$\langle a, b, c \rangle = \vec{v}$$



$\vec{a}$  y  $\vec{v}$  son paralelos.

$$\vec{a} = k \vec{v} = \underline{t} \vec{v}$$

Variable parámetro  $t$ .

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} = \boxed{\vec{r}_0 + t \vec{v}} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ec. Vectorial Recta: punto  $\vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$

y dirección  $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ .

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}}$$

parámetro  $t$ .

Ec. componente por componente.

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t \langle a, b, c \rangle.$$

Ec. Paramétrica de la Recta.

$$\boxed{x = x_0 + at. \\ y = y_0 + bt. \\ z = z_0 + ct.}$$

$t \in \mathbb{R}$ .

Punto V.

Posición inicial  $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ .

Velocidad constante  $\langle a, b, c \rangle$ .

$$x = x_0 + v_{ox} t$$

$$y = y_0 + v_{oy} t$$

$$z = z_0 + v_{oz} t$$

Ejercicio 1: Encuentre la ec. vectorial y las paramétricas para la recta que pasa por el punto dado y es paralela al vector dado. (p 30.)

a. P(3,4,-2)     $\vec{v} = \langle -8, 2, 5 \rangle.$      $\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}.$

Vector Posición:  $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP} = \langle 3, 4, -2 \rangle.$

Vector Dirección:  $\vec{v} = \langle -8, 2, 5 \rangle.$

Ec. Vectorial:  $\boxed{\vec{r} = \langle 3, 4, -2 \rangle + t \langle -8, 2, 5 \rangle.}$

Ecs. Paramétricas:  $x = 3 - 8t$   
 $y = 4 + 2t$      $t \in \mathbb{R}.$   
 $z = -2 + 5t.$

Observaciones:  $\vec{r}(1) = \langle -5, 6, 3 \rangle$

$\vec{r}(10) = \langle -77, 24, -48 \rangle.$

Ec. Vectorial para  $\ell:$   $\boxed{\vec{r} = \langle -5, 6, 3 \rangle + t \langle -8, 2, 5 \rangle.}$

vector de dirección  $v$  es paralelo a varios vectores

$\vec{w} = k \vec{v}$  puede ser también vector dirección.

$\vec{v}_1 = \langle 8, -2, -5 \rangle$      $\vec{v}_2 = \langle -8\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 5\sqrt{3} \rangle.$

$\boxed{\vec{r} = \langle -77, 24, -48 \rangle + t \vec{v}_2.}$  la misma recta.

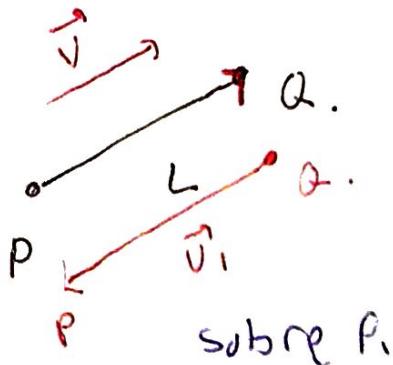
La ec. vectorial de una recta no es única. ✓

Ejercicio 2: Encuentre la ec. vectorial de la recta que pasa por los puntos dados.

a.  $P(3, -2, 4)$  y  $Q(5, 2, -1)$ .

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}$$
  $\vec{r}_0 = \langle 3, -2, 4 \rangle$  ó  $\langle 5, 2, -1 \rangle$

vector de dirección  $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$  ó  $\overrightarrow{QP}$



$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2, 4, -5 \rangle.$

Ec. Vectorial  $\vec{r}$  sobre P.

 $\vec{r} = \langle 3, -2, 4 \rangle + t \langle 2, 4, -5 \rangle.$

2  $\vec{r}_0 = \langle 5, 2, -1 \rangle$   $\vec{v} = \overrightarrow{QP} = \langle -2, -4, 5 \rangle.$

$\vec{r} = \langle 5, -2, -1 \rangle + t \langle -2, -4, 5 \rangle.$  sobre Q

b.  $P(3, 0, 4)$  y  $Q(3, 4, 2)$ .

$$\vec{r}_0 = \langle 3, 0, 4 \rangle. = \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{v} = \langle 0, 4, -2 \rangle. = \overrightarrow{PQ}$$

$$\vec{v} \neq \vec{PQ}$$

$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v} = \langle 3, 0, 4 \rangle + t \langle 0, 4, -2 \rangle.$

c. ¿Qué pasa si hay 3 puntos?

- 
- R.
- P
- Q
- $P(3,0,4)$ ,  $Q(3,4,2)$     $R(5,3,4)$
- No están sobre  $L$ .
- $\vec{V}_1 = \overrightarrow{PQ} = \langle 0, 4, -2 \rangle$ . no son
- $\vec{V}_2 = \overrightarrow{PR} = \langle 2, 3, 0 \rangle$  paralelos.

Estos tres puntos No están sobre la misma recta.

$$\underbrace{(0, 1)}_{m=1} \quad \underbrace{(1, 2)}_{m=2} \quad \underbrace{(2, 5)}_{m=2}$$

# Capítulo 7

## Rectas y planos

## 12.5 Rectas y Planos

Ecuación de una Recta.

Vector Posición

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0).$$

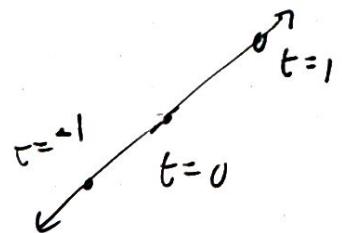
Vector dirección

$$\vec{v} = (a, b, c).$$

Ec. Vectorial

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}}$$

$t$  es el parámetro



Ecs. Paramétricas:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct. \end{aligned}}$$

Resuelva para  $t$  en las tres ecs.

$$\boxed{t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c.}}$$

Ecs. simétricas

$$a, b, c \neq 0.$$

vector dirección  $\vec{v} = (a, 0, c)$ , las ecs. de la recta cambiarán,

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}$$

vectorial

$$x = x_0 + a t$$

$$y = y_0$$

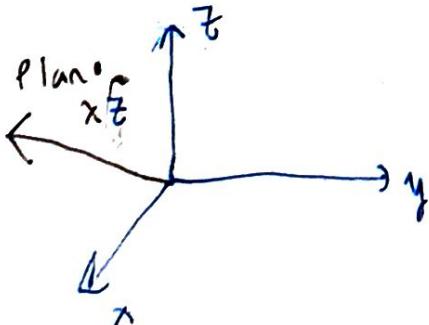
$$z = z_0 + c t.$$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c.}$$

$$y = y_0$$

simétricas

Ecs. Paraleléticas



Ejercicio 3: Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los puntos dados.

Encuentre en qué punto la recta intersecta al plano  $XZ$ .

Pág. 41.

a.  $P(2, 8, -2)$  y  $Q(2, 6, 4)$ .

Vector Posición:  $\overrightarrow{OP} = \vec{r}_0 = \langle 2, 8, -2 \rangle$ .  $\vec{r} = \langle x, y, z \rangle$ .

Vector Dirección.  $\overrightarrow{PQ} = \vec{v} = \langle 0, -2, 6 \rangle$ .

Ec. Vectorial:  $\vec{r} = \langle 2, 8, -2 \rangle + t \langle 0, -2, 6 \rangle$ .

Ecs. simétricas:  $x = 2, \frac{y-8}{-2} = \frac{z+2}{6}$

¿Cuál es la intersección con el plano  $XZ$ ?

$$\text{use } y=0. \quad x=2, \quad \frac{-8}{-2} = \frac{z+2}{6}$$

$$6 \cdot 4 = z+2 \Rightarrow z=22.$$

La intersección con el plano  $XZ$  es el punto  $(2, 0, 22)$ .

b.  $P(4, 6, 10)$  y.  $Q(6, 6, 10)$

$$\vec{r}_0 = \langle 4, 6, 10 \rangle. \quad \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2, 0, 0 \rangle.$$

vectorial:  $\vec{r} = \langle 4, 6, 10 \rangle + t \langle 2, 0, 0 \rangle$ .

paramétricas:  $x = 4+2t$  simétricas.

$$\begin{array}{l} y = 6 \\ z = 10 \end{array} \quad 52 \quad t = \frac{x-4}{2}, y = 6, z = 10.$$

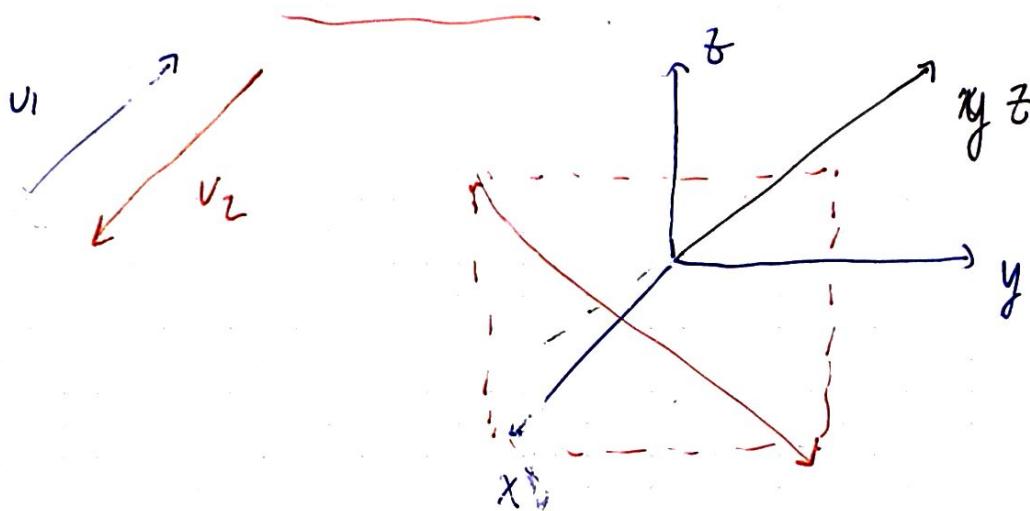
¿Cuál es el punto intersección con el plano  $xz$ ?

Use  $y = 0$ , como cualquier punto sobre esta recta pasa sólo por  $y = 6$ , esta recta no puede intersectar al plano  $xz$ . **NO HAY.**

Rectas Paralelas.

Dos rectas  $\vec{r}_1 = \vec{r}_{o1} + t_1 \vec{v}_1$  y  $\vec{r}_2 = \vec{r}_{o2} + t_2 \vec{v}_2$

son paralelas. si y sólo si sus vectores de dirección  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  son paralelos.



En el espacio hay 3 tipos de rectas.

- Paralelas.
- Intersecan en 1 punto
- Oblicuas (ni son paralelas ni se intersecan).

Ejercicio 4: Determine si los sgs. pares de rectas  
son paralelas, oblicuas o se intersecan.

$$a. \frac{x-2}{8} = \frac{y-3}{24} = \frac{z-2}{16}, \quad \frac{x-10}{-2} = \frac{y+15}{-6} = \frac{z+24}{-4}$$

$$U_1 = \langle 8, 24, 16 \rangle$$

$$U_2 = \langle -2, -6, -4 \rangle.$$

$$x = 2 + 8t, \quad y = 3 + 24t, \quad z = 2 + 16t.$$

$$U_1 = -4U_2. \quad U_1 \text{ y } U_2 \text{ son paralelos.}$$

Las dos rectas son paralelas.

$$b. L_1: x = 5 - 4t, \quad y = 6 - 2t, \quad z = 2 + 0t \quad t \in \mathbb{R}$$

$$L_2: x = 3 + 8s, \quad y = -2s, \quad z = 8 + 2s. \quad s \in \mathbb{R}$$

Utilice una variable parámetro para cada recta

$$U_1 = \langle -4, -2, 0 \rangle, \quad U_2 = \langle 8, -2, 2 \rangle. \quad \text{No son paralelas.}$$

Analice si las rectas se intersecan.

$$\begin{aligned} x &= x & 5 - 4t &= 3 + 8s. & (1) &\Rightarrow 2 = 4t + 8s \\ y &= y & 6 - 2t &= -2s. & (2) &\Rightarrow 6 = 2t + 2s \\ z &= z. & \boxed{2 = 8 + 2s} && \Rightarrow s = -3. \end{aligned}$$

3 ecs. y sólo 2 incógnitas  $t$  y  $s$ .

Sustituya  $s = -3$  en las ecs. (1) y (2)

$$\begin{aligned} 5 - 4t &= -22 & \Rightarrow -4t &= -27 & \Rightarrow t = 27/4. \} \\ 6 - 2t &= 6 & \Rightarrow -2t &= 0 & \Rightarrow t = 0 \end{aligned}$$

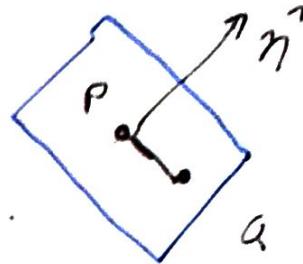
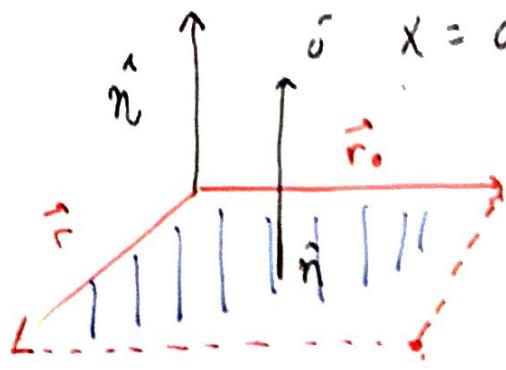
Si no hay una t única (no es posible  $t \neq 27/9$ ), las dos rectas no se intersecan.

$L_1$  y  $L_2$  son oblicuas (ni paralelas ni se intersecan).

$$\begin{array}{l} 4t + 8s = 2 \\ 2t + 2s = 6 \\ 0t + 2s = -6 \end{array} \quad \left[ \begin{array}{cc|c} 4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -6 \end{array} \right] \rightarrow \text{0 o 1 número.}$$

### Ecuación de un Plano.

Previamente en 12.1  $ax + by + cz = d.$  } Ecs de Planos.



Para encontrar la ec. de un plano se necesita.

1. un punto sobre el plano.  $P \quad \vec{r}_0 = \overrightarrow{OP}$

2. un vector normal  $v$  ortogonal al plano  $\hat{n} = \langle a, b, c \rangle.$

~ sombrero, hat.

### Derivación de la ec. Plano.

$P(x_0, y_0, z_0)$        $Q(x_1, y_1, z_1)$       son dos puntos sobre el plano.

$$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle \quad \vec{r} = \overrightarrow{OQ} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle.$$

El vector  $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0$  está sobre el plano, por lo que tiene que ser ortogonal a  $\hat{\vec{n}}$ .

$$\hat{\vec{n}} \perp \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0 \Rightarrow \hat{\vec{n}} \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0) = 0.$$

Ec. Vectorial de un Plano.

Se puede escribir como.

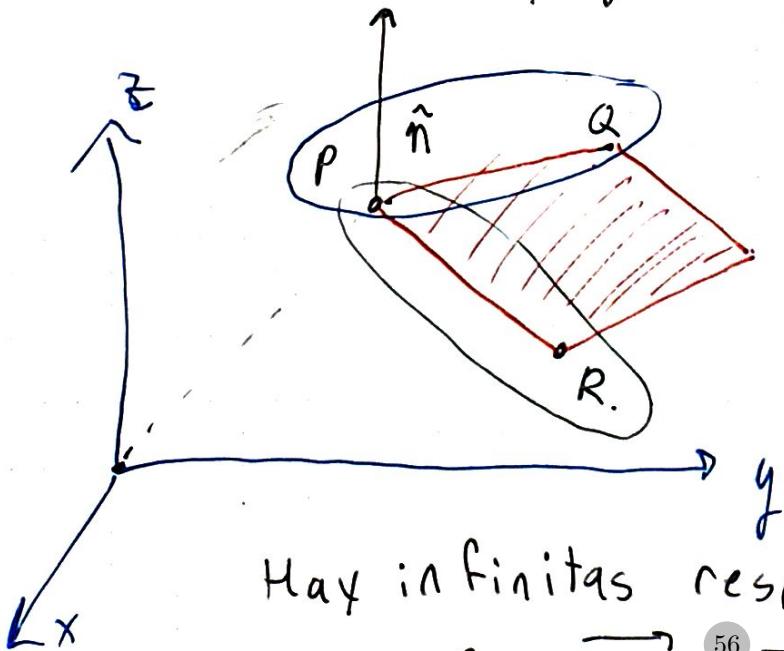
$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0 + z - z_0 \rangle = 0.$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Ec. escalar de un plano.

$$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_d.$$

Para encontrar la ec. de un plano, se necesitan 3 puntos  $P, Q$  y  $R$ .



$$\overrightarrow{r}_0 = \overrightarrow{OP}$$

$$\hat{\vec{n}} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$$

tienen que comenzar en el mismo punto

Hay infinitas respuestas equivalentes

$$\hat{\vec{n}} = \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ}$$

Ejercicio 1: PYS. Encuentre la ec. del plano que pasa por los 3 puntos dados.

a. P(3, -1, 3), Q(8, 2, 4) y R(1, 2, 5)

$$\text{Ec. plano } \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\text{Ec. Recta } \vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}$$

$$\vec{r}_0 = \langle 8, 2, 4 \rangle.$$

Encuentre dos vectores que estén sobre el plano y que comiencen en el mismo punto.

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle 5, 3, 1 \rangle \quad \vec{v} = \overrightarrow{PR} = \langle -2, 3, 2 \rangle.$$

ii  $\hat{n}$  es ortogonal a ambos vectores !!

$$\boxed{\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \underline{3\hat{i} - 12\hat{j} + 21\hat{k}}$$

$$\text{Ec. Plano: } \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\text{Vectorial: } \langle 3, -12, 21 \rangle \cdot \langle x-8, y-2, z-4 \rangle = 0.$$

$$\text{Escalar. } 3(x-8) - 12(y-2) + 21(z-4) = 0.$$

b.  $P(0,0,0)$ ,  $Q(1,0,2)$  y  $R(0,2,3)$

Vector Posición:  $\vec{r}_0 = \langle 0,0,0 \rangle$ .

2 vectores sobre el plano.  $\overrightarrow{PQ} = \langle 1,0,2 \rangle$ .  
 $\overrightarrow{PR} = \langle 0,2,3 \rangle$ .

Vector Normal:  $\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$

$$\hat{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

Ecuación Plano.  $-4x - 3y + 2z = 0$ .

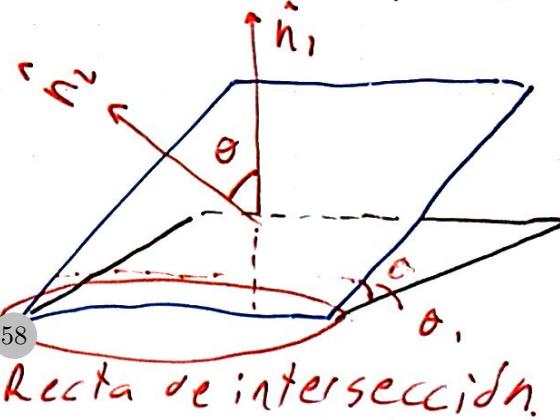
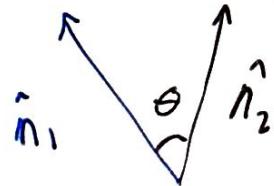
Rectas paralelas  $v_1$  y  $v_2$  son paralelos.

Dos planos  $\hat{n}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$  y  $\hat{n}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = 0$ .

Son paralelos si y sólo si  $\hat{n}_1$  y  $\hat{n}_2$  son paralelos.

En caso que no sean paralelos, se puede encontrar el ángulo de intersección entre dos planos.

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1| |\hat{n}_2|} \right)$$



# Capítulo 8

Continuación de rectas y planos

Rectas y planos.

$$\vec{V} = \overrightarrow{PQ}$$

Ecs. Rectas:  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

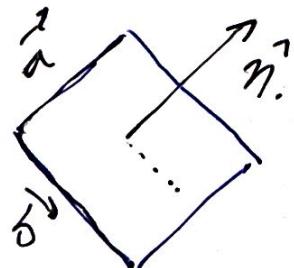
si  $a \neq b \neq c \neq 0$   $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

$$\boxed{\begin{aligned}x &= x_0 + at \\y &= y_0 + bt \\z &= z_0 + ct\end{aligned}}$$

Ec. Plano:  $\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$\hat{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

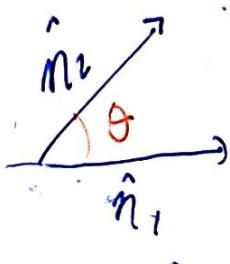


Ejercicio 2: Considere los planos  $x+y=0$  &  
 $x+2y+z=1$ .

a. Determine si los planos son paralelos. Si no lo son encuentre el ángulo de intersección entre ellos.

$\hat{n}_1 = \langle 1, 1, 0 \rangle$ . no son paralelos  $\hat{n}_1$  y  $\hat{n}_2$

$\hat{n}_2 = \langle 1, 2, 1 \rangle$ . los dos planos NO SON PARALELOS.



$$\cos \theta = \frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1| |\hat{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{2} \sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{12}}$$

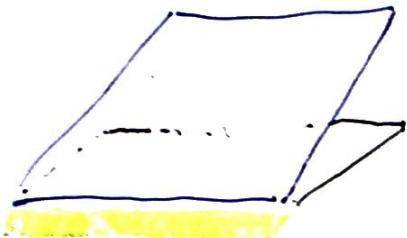
$$\boxed{\cos \theta} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \theta = \frac{\pi}{6} \text{ ó } 30^\circ$$

$$0 \quad \pi/6 \quad \pi/4 \quad \pi/3 \quad \pi/2$$

$$\cos \theta \quad 1 \quad \sqrt{3}/2 \quad \sqrt{2}/2 \quad 1/2 \quad 0$$

$$\sin \theta \quad 0 \quad 1/2 \quad \sqrt{2}/2 \quad \sqrt{3}/2 \quad 1$$

O. Encuentre la ec. de la recta que interseca a ambos planos.  $x+y=0$  +  $x+2y+z=1$ .



$$r = \vec{r}_0 + t \vec{v}$$

Dos puntos sobre la recta,

como la recta está en ambos planos, se debe resolver el sig. sistema.

$$x+y=0 \Rightarrow x=-y.$$

$$x+2y+z=1 \Rightarrow y=1-z.$$

$z$  tiene cualquier valor.

1er punto  $z=0$ :

$$(-1, 1, 0) \quad \begin{matrix} y=1 \\ x=-1 \end{matrix}$$

2do punto  $z=1$

$$(0, 0, 1) \quad \begin{matrix} y=0 \\ x=0 \end{matrix}$$

Encuentre la ec. de la recta que pasa por  $P(-1, 1, 0)$

$$y \quad \underbrace{Q(0, 0, 1)}_{\vec{r}_0}$$

$$\vec{r}_0 = \langle 0, 0, 1 \rangle. \quad \vec{v} = \overrightarrow{QP} = \langle -1, 1, -1 \rangle.$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{QP} = \langle -1, 1, -1 \rangle.$$

Ec. Paramétrica  
de la recta.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 0 - t \\ y &= 0 + t \\ &= 1 - t. \end{aligned}}$$

II. Solución.  $x = -y$ .      más incógnitas  
 $y = 1 - z$       que ecuaciones.

$x, y$  ó  $z$  pueden tener cualquier valor.  $\boxed{z = t}$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 1 - t \\ z &= t \end{aligned}}$$

$$U_L = \langle 1, -1, 1 \rangle \quad \vec{r}_0 = \langle -1, 1, 0 \rangle$$

### III. Solución Geométrica.

por ejemplo.

1. Encuentre un punto en ambos planos  $(0, 0, 1)$

La recta está en el plano  $l$ , entonces la recta es perpendicular al vector normal del plano  $l$ .

Está en el plano  $z$ , entonces también es perpendicular al segundo vector normal.

∴ La recta es perpendicular a ambos  $\hat{n}_1$  y  $\hat{n}_2$ .

$$\vec{J} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\text{Ec. Recta } r = \langle 0, 0, 1 \rangle + t \langle 1, -1, 1 \rangle.$$

Ejercicio 3: Encuentre el punto en el que la línea recta  $x=1+2t$ ,  $y=4t$ ,  $z=5t$  interseca al plano  $x-y+2z=17$ .

Plano.

$$x = 1 + 2t$$

$$y = 4t$$

$$z = 5t$$

Recta

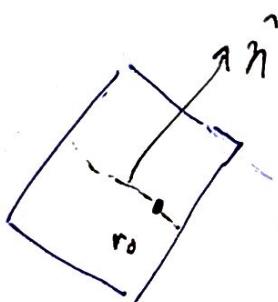
$$x - y + 2z = 17.$$

$$1 + 2t - 4t + 10t = 17.$$

$$8t = 16 \Rightarrow t = 2$$

El Pto. de Intersección es  $(5, 8, 10)$ .

Ejercicio 4: Encuentre una ec. del plano que contiene, a la recta  $x=1+t$ ,  $y=2-t$ ,  $z=4-3t$  y es paralela al plano  $5x+2y+z=1$ .



Qualquier punto sobre la recta también está sobre el plano.

$$t=0: x=1, y=2, z=4 \quad \vec{r}_0 = \langle 1, 2, 4 \rangle.$$

¿Cómo se encuentra  $\vec{n}$ ?

El vector de dirección de la recta  $v = \langle 1, -1, -3 \rangle$  es paralelo al plano.

Como es paralelo al segundo plano, entonces tiene que ser perpendicular  $\vec{n} = \langle 5, 2, 17 \rangle$ .

$$\vec{r}_0 = \langle 1, 2, 4 \rangle \quad y \quad \vec{n} = \langle 5, 2, 1 \rangle.$$

5.

Ecuación Plana:  $\underline{5(x-1) + 2(y-2) + 1(z-4) = 0.}$

Ejercicio 5: Encuentre los números directores para la recta de intersección entre los planos  $x+y+z=1$  y.

$$x+2y+3z=1.$$

Los números directores  $a, b$  y  $c$  del vector de dirección  $\langle a, b, c \rangle$ .

La recta es ortogonal a ambos vectores normales.

$\vec{n}_1 = \langle 1, 1, 1 \rangle$  y  $\vec{n}_2 = \langle 1, 2, 3 \rangle$  de ambos planos.

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}}$$

Números directores:  $a=1, b=-2, c=1$

Ejercicio 6: Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto  $(0, 1, 2)$ , que es paralela al plano  $x+y+z=2$  y perpendicular a la recta.

$$\vec{r} = \langle -2t, 0, 3t \rangle.$$

$$L_1: \underline{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}} \quad \underline{\vec{r}_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle}$$

¿Cómo se encuentra  $v$ ?

Plano 1  $\hat{n} = \langle 1, 1, 1 \rangle$  es perpendicular al plano.

Recta 2:  $\hat{v}_2 = \langle -2, 0, 3 \rangle$  es paralelo a  $L_1$ .

La recta es perpendicular a  $\hat{n}$  y a  $\hat{v}_2$ .

$$v = \hat{n} \times \hat{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

✓  $v = \hat{v}_2 \times \hat{n}$

Ecs. Paramétricas.

$$\begin{cases} x = 0 + 3t \\ y = 1 - 5t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

# Capítulo9

Funciones Vectoriales & Límites y continuidad

### 13.1 Funciones Vectoriales.

Una función vectorial:

Dominio: Números Reales

Rango: vectores 3-D.

$$\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow V_3 \quad \vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle.$$

t es un parámetro.

$$\vec{r} = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$$

Ejemplo de una función vectorial

$$\vec{r} = \langle a, b, c \rangle + t \langle d, e, f \rangle. \text{ Recta.}$$

$$\vec{r} = \langle a + td, b + te, c + tf \rangle$$

Ecs. Paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

de una función vectorial

Dominio de una función vectorial:

Encuentre el dominio de cada función componente.

El dominio de  $\vec{r}$  es la intersección de los dominios de cada función componente.

Ejercicio 1: Encuentre el dominio.

Eusto.

a.  $\vec{r}(t) = \langle \sqrt{t^2 - 9}, e^{\sin t}, \ln(t+5) \rangle$

$\sqrt{-}$

$\ln 0 \text{ ó } \ln -$

$\sqrt{t^2 - 9}$  definida.  $t^2 \geq 9$

$(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

$e^{\sin t}$ .  $\sin t$  siempre definida.  
lo mismo  $e^{\sin t}$ .

$(-\infty, \infty)$ .

$\ln(t+5)$  definida cuando  $t+5 > 0$

$t > -5$

$(-5, \infty)$

Dominio de  $\vec{r}(t)$

$(-5, -3] \cup [3, \infty)$

$\cup [-3, 3)$

$\cup [3, \infty)$

$[a, b]$  el número si es parte del dominio  
 $a, b$  son parte del dominio.

(a, b) los números a y b no son parte del dominio.

b.  $\vec{s}(t) = \langle \sin^3(t^2), \cosh\left(\frac{t}{t^2+1}\right), \frac{1}{e^t + 4} \rangle$

$\sin^3(t^2)$  IDf:  $\mathbb{R}$ .

Dominio  $\vec{s}(t)$

$\cosh\left(\frac{t}{t^2+1}\right)$  IDg:  $\mathbb{R}$ .

$(-\infty, \infty)$

$\frac{1}{e^t + 4}$  IDh:  $\mathbb{R}$ .

$e^t + 4 \neq 0 \Rightarrow e^t = -4 \Rightarrow t = \ln(-4)$  indefinido

## Límites y Continuidad

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \left\langle \lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \right\rangle$$

- Evalue el límite de cada función componente
- Si no existe por lo menos un límite de una función componentes, entonces  $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t)$  no existe.

$f(t)$  está definida en  $t=a$ .

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$$

si se indefine y tiene forma  $0/0$  ó  $\infty/\infty$ .

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad \text{→ Hospital.}$$

Continúa en  $t=a$  si  $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$

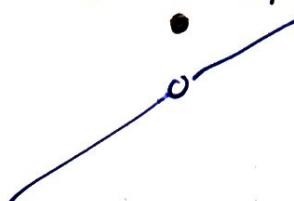
Analiza la continuidad en cada función componente.

Evite AVs, saltos y agujero.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$



(límite existe pero  $\vec{r}(a)$  no está definido)



Ejercicio 2: Sea  $\vec{r}(t) = \left\langle \frac{\tan \pi t}{t}, e^{t-2}, \frac{\ln(t-1)}{t^2-1} \right\rangle$

a. Analice si la función  $\vec{r}(t)$  es continua en  $t=2$ .

$$\vec{r}(2) = \left\langle \frac{\tan 2\pi}{2}, e^0, \frac{\ln 1}{3} \right\rangle = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{\tan \pi t}{t} = 0 \quad \lim_{t \rightarrow 2} e^{t-2} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 2} \frac{\ln(t-1)}{t^2-1} = 0.$$

$\vec{r}$  si es continua en  $t=2$   $\lim_{t \rightarrow 2} \vec{r}(t) = \vec{r}(2).$

b. Encuentre  $\lim_{t \rightarrow 1} \vec{r}(t)$  analice el límite de cada función componente por separado.

$$f: \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\tan \pi t}{t} = \frac{0}{1}$$

$$g: \lim_{t \rightarrow 1} e^{t-2} = e^{-1} \quad \text{en } \vec{r}(t) \text{ no existe.}$$

$$h: \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(t-1)}{t^2-1} \text{ no existe.}$$

$\ln(0)$  no existe.

c. Analice si  $\vec{r}(t)$  es continua en  $t=1$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \vec{r}(t) = \vec{r}(1) \quad r(1) \text{ está indefinido.}$$

limite no existe en  $t=1$

NO ES CONTINUA en  $t=1$ .

5.

$$\text{d. Agujero } \vec{s}(t) = \left\langle \frac{\tan \pi t}{t-1}, e^{t-2}, \frac{\ln(2t-1)}{t^2-1} \right\rangle$$

No es continua en  $t=1$  pero su límite existe en  $t=1$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\tan \pi t}{t-1} \stackrel{\text{LH}}{\underset{0/0}{=}} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\pi \sec^2 \pi t}{1} = \frac{\pi}{(\cos \pi)^2} = \pi.$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} e^{t-2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

ln 1 = 0

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(2t-1)}{t^2-1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2/(2t-1)}{2t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{2}{2t(2t-1)} = \frac{1}{1(2-1)} = 1.$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \vec{s}(t) = \langle \pi, 1/e, 1 \rangle \text{ es un agujero.}$$

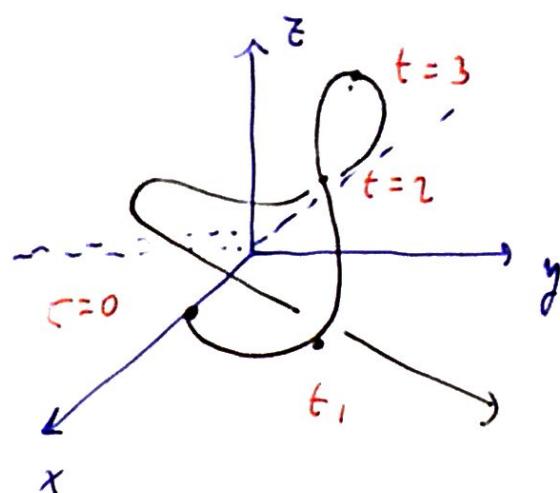
$\vec{s}'(1)$  está indefinida.

Leyes en el espacio.

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)$$

$$z = h(t)$$

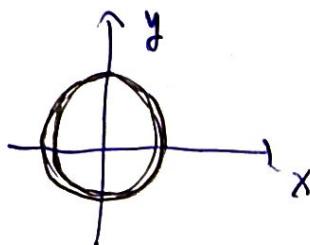


## Espirales:

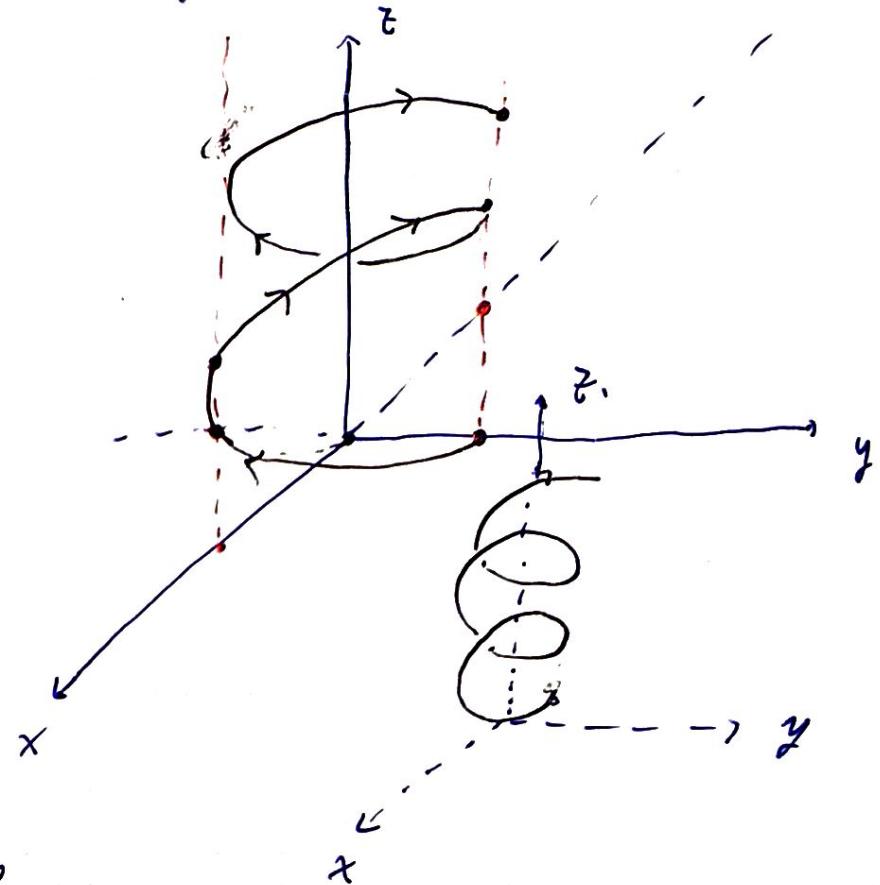
Ejercicio 3: Grafique la curva  $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = \left\{ \begin{array}{l} 2\hat{i} \sin t + 2\hat{j} \cos t \\ x \\ y \\ \hat{k} \frac{t}{\pi} \end{array} \right\}_z$$

$t$	$x$	$y$	$z$
0	0	2	0
$\pi/2$	2	0	0.5
$\pi$	0	-2	1
$3\pi/2$	-2	0	1.5
$2\pi$	0	2	2.



$$x^2 + y^2 = 4$$



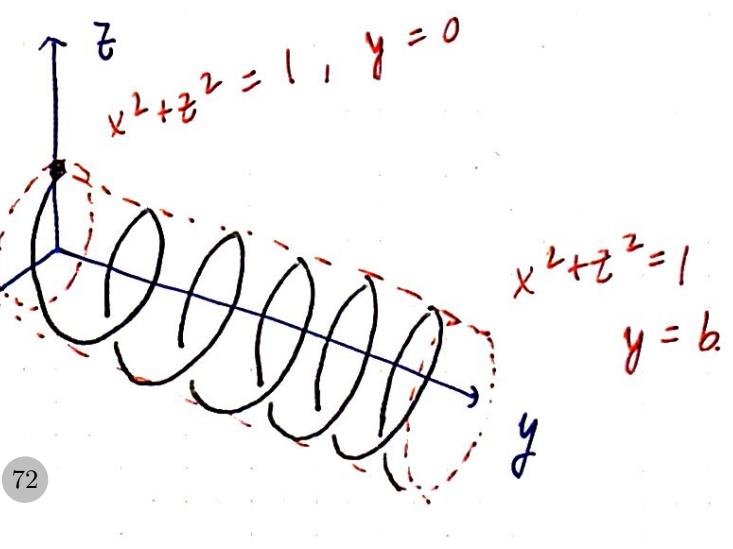
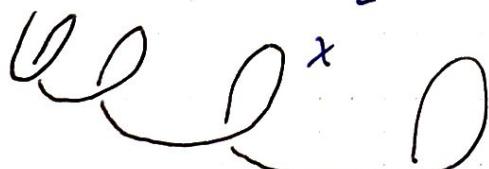
Ejercicio 4: Grafique

$$\vec{r}(t) = \langle \sin \pi t, t, \cos \pi t \rangle.$$

$$x^2 + z^2 = 1$$

$$\vec{r}(0) = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

$$\vec{s}(t) = \langle \sin t, t^2, \cos t \rangle$$



# Capítulo 10

Cálculo con funciones vectoriales: derivadas, integrales, etcétera

13.2 Cálculo con funciones vectoriales. p. 55.

Derivadas  $\vec{r}'(t)$  respecto a t

Integrales:  $\int \vec{r}(t) dt$ . respecto a t.

$$\vec{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} \quad r = \langle f, g, h \rangle$$

$$\vec{r}'(t) = \left\langle \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}_{f'(t)}, \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}}_{g'(t)}, \underbrace{h'(t)}_{h'(t)} \right\rangle$$

Derivada:  $\vec{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$ .

Derive cada función componente.

Integral:  $\int \vec{r}(t) dt = \int (f \hat{i} + g \hat{j} + h \hat{k}) dt$ .

$$i \int f dt + j \int g dt + k \int h dt.$$

Integre cada función componente.

Ejercicio 1: Encuentre la 1ra y 2da derivada de las siguientes funciones.

a.  $\vec{r}(t) = \langle \sin(4t), t^2, \ln(\sin t) \rangle$ .

$$\vec{r}'(t) = \langle 4 \cos(4t), 2t, \cot t / \sin t \rangle$$

$$\vec{r}''(t) = \langle -16 \sin(4t), 2, -\csc^2 t / \sin t \rangle$$

$$r''(t) = \langle f''(t), g''(t), h''(t) \rangle$$

$$r''(t) = \langle -16\sin(4t), 2, -\csc^2 t \rangle.$$

$$\begin{array}{lll} \sin' \rightarrow \cos & \csc' \rightarrow -\csc \cot & \int \sec = \ln(\sec + \tan) \\ \cos' \rightarrow -\sin & \sec' \rightarrow \sec \tan & \\ \tan' \rightarrow \sec^2 & \cot' \rightarrow -\csc^2. & \end{array}$$

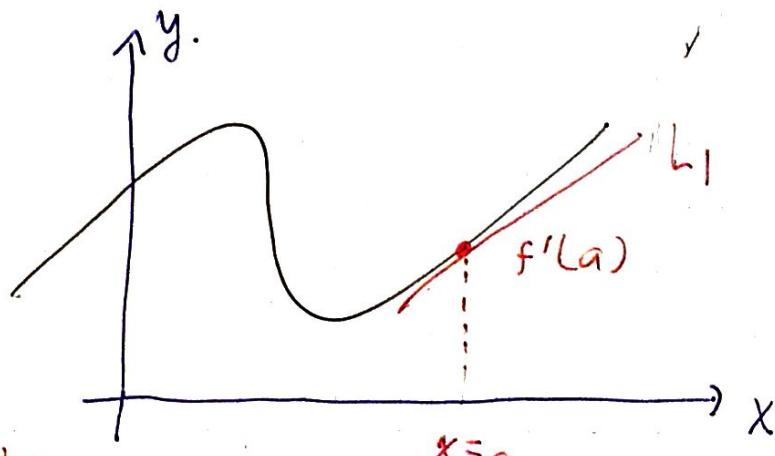
b.  $\vec{s}(t) = \hat{c} \tan(4t) + \hat{j} \ln(4t+1) + \hat{k} (5-2t)^{1/2}$ .

$$\vec{s}'(t) = 4 \hat{c} [\sec(4t)]^2 + \hat{j} 4(4t+1)^{-1} - \hat{k} (5-2t)^{-1/2}.$$

$$\begin{aligned} s'' &= 32 \hat{c} \sec(4t) \sec(4t) \tan(4t) - 16 \hat{j} (4t+1)^{-2} \\ &\quad + \frac{\hat{k}}{2} (5-2t)^{-3/2} \cdot (-2) \end{aligned}$$

para  $y = f(x)$

$f'(a)$  es igual  
a la pendiente  
de la recta tangente  
a  $f(x)$  en  $x=a$ .



$$L_1: y = f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{Ec. Recta Tangente.}$$

con una función vectorial

$$\vec{r} = \langle f, g, h \rangle \quad x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

hay ecuaciones paramétricas para cada variable.

$$\vec{r}'(a) = \langle f'(a), g'(a), h'(a) \rangle.$$

vector de pendientes de rectas tangentes a la curva  $\vec{r}(t)$ .

Vector Tangente a  $\vec{r}(t)$ :  $\boxed{\vec{r}'(a)}$

Recta Tangente: es ahora una función vectorial.

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(a) + \vec{r}'(a)t}$$

Ecs. Paramétricas:  $x = f(a) + f'(a)t$

$$y = g(a) + t g'(a)$$

$$z = h(a) + t h'(a)$$

Vector Tangente:  $\vec{r}'(a)$

en  $t=a$ .

Vector Tangente Unitario:  $\frac{\vec{r}'(a)}{|\vec{r}'(a)|} = \vec{T}(a)$

en  $t=a$

Ejercicio 3: Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva

$$\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\sin t, 4\cos 2t \rangle \text{ en el punto } (\sqrt{3}, 1, 2)$$

Recta Tangente:  $\boxed{\vec{r}_T(t) = \vec{r}(a) + t \vec{r}'(a)}$

$$\vec{r}(a) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle.$$

Derivada:  $\vec{r}'(t) = \langle -2\sin t, 2\cos t, -8\sin(2t) \rangle.$

¿Cómo se encuentra  $a$ ?  $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle.$

$$\rightarrow 2\cos t = \sqrt{3} \quad \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{t = \pi/6.}$$

$$2\sin t = 1 \Rightarrow 2\sin \pi/6 = 2 \frac{1}{2} = 1$$

$$4\cos 2t = 2. \Rightarrow 4\cos \pi/3 = 4 \frac{1}{2} = 2$$

Vector Tangente:  $\mathbf{r}'(\pi/6) = \langle -2\sin \pi/6, 2\cos \pi/6, -8\sin \pi/3 \rangle$

$$\mathbf{r}'(\pi/6) = \left\langle -\frac{2}{2}, 2\frac{\sqrt{3}}{2}, -8\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = \langle -1, \sqrt{3}, -4\sqrt{3} \rangle.$$

$$\vec{r}_T(t) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle + t \langle -1, \sqrt{3}, -4\sqrt{3} \rangle.$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \sqrt{3} - t \\ y &= 1 + \sqrt{3}t \\ z &= 2 - 4\sqrt{3}t \end{aligned}}$$

# Capítulo 11

## Continuación de cálculo con funciones vectoriales

## 13.2 Cálculo.

Derivadas:  $\vec{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$ .

Vector Tangente  $\vec{r}'(t)$  Tangente Unitario  $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$ .

Recta Tangente a la curva.  $\vec{L}(t) = \vec{r}(a) + \vec{r}'(a)t$ .

$$\begin{aligned} x &= f(a) + t f'(a) \\ y &= g(a) + t g'(a) \\ z &= h(a) + t h'(a). \end{aligned}$$

Integradas:  $\int \langle f, g, h \rangle dt = \langle F + C_1, G + C_2, H + C_3 \rangle$

$$\int \vec{r}(t) dt = \vec{R}(t) + \vec{C}$$

$\vec{R}$  vector de antiderivadas

$\vec{C}$  vector de constantes

Definida:  $\int_a^b \vec{r}(t) dt = \hat{i} \int_a^b f(t) dt + \hat{j} \int_a^b g(t) dt + \hat{k} \int_a^b h(t) dt$

Ejercicio 4: Evalúe los sigs. integrales.

$$a. \int_0^1 \left[ \frac{4}{1+t^2} \hat{i} + \sec^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) \hat{k} \right] dt = I, \tan(\pi/4) = 1$$

$$I_1 = 4 \hat{i} \tan^{-1} t \Big|_0^1 + \hat{k} \frac{4}{\pi} \tan\left(\frac{\pi t}{4}\right) \Big|_0^1$$

$$\tan^{-1} 1 = \pi/4$$

$$\tan^{-1} 0 = 0.$$

$$I_1 = 4 \hat{i} \frac{\pi}{4} + \hat{k} \frac{4}{\pi} \stackrel{79}{=} \pi \hat{i} + \hat{k} \frac{4}{\pi} = \left\langle \pi, 0, \frac{4}{\pi} \right\rangle$$

$$b. \int \langle te^{t^2}, te^t, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \rangle dt.$$

2.

Integre cada función.

$$x: \int e^{t^2} (t dt) = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^{t^2} + C_1$$

$u = t^2 \quad du = 2t dt.$

$$y: \int te^t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C_2$$

$u \quad dv = uv - \int v du.$

$$u = t \quad dv = e^t dt.$$

$$du = dt \quad v = e^t$$

$$z: \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{\cos \theta}{\cos \theta} d\theta = \int d\theta = \theta + C_3$$

$$= \sin^{-1}(t) + C_3.$$

$t = \sin \theta.$   
 $dt = \cos \theta d\theta.$   
 $\sqrt{1-t^2} = \cos \theta.$

$$\int \langle te^{t^2}, te^t, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \rangle dt = \left\langle \frac{1}{2} e^{t^2} + C_1, te^t - e^t + C_2, \sin^{-1} t + C_3 \right\rangle$$

1 23)

Movimiento en el espacio.

Dado el vector de posición  $\vec{r}(t)$ . De un objeto.

Vector Velocidad:  $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$

Vector Aceleración  $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$

Rapidez:  $| \vec{v}(t) |$  Distancia  $| \vec{r}(t) |$

Dado el vector de aceleración  $\vec{a}(t)$

velocidad:  $\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t) dt + \vec{C}_1$

desplazamiento:  $\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) dt + \vec{C}_2$

o posición

Las CI's  $\vec{v}(0)$  y  $\vec{r}(0)$  nos permiten encontrar el valor de  $\vec{C}_1$  y  $\vec{C}_2$  resp.

Ejercicio 1: Encuentre la velocidad, aceleración y rapidez dada la posición del objeto. y la distancia

$$\vec{r}(t) = \hat{i}t + 2\hat{j} \cosh(4t) + 3\hat{k} \sinh(3t).$$

Velocidad:  $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \hat{i} + 8\hat{j} \sinh(4t) + 9\hat{k} \cosh(3t).$

Aceleración:  $\vec{r}''(t) = \vec{a}(t) = 32\hat{j} \cosh(4t) + 27\hat{k} \sinh(3t)$

Rapidez:  $|\vec{v}(t)| = \sqrt{1 + 64 \sinh^2(4t) + 81 \cosh^2(3t)}$

Distancia:  $|\vec{r}(t)| = \sqrt{t^2 + 4 \cosh^2(4t) + 9 \sinh^2(3t)}$

## Tarea 6 Integrales Func. Vectoriales

### 14.1 Funciones en Varias Variables

Tarea Opcional Consolidado 12, 13, 14.1.

Ejercicio 2: Encuentre la velocidad y posición del objeto dada  $\vec{a}(t)$  y las condiciones iniciales.

$$\vec{a}(t) = \underline{6t} \hat{i} + \hat{j} \underline{\cos t} - \hat{k} \underline{\sin(2t)}, \quad \vec{V}(0) = \hat{i} + \hat{k}$$

$$\vec{r}(0) = 2\hat{j} - \hat{k}$$

Velocidad:  $\int \vec{a}(t) dt$

o

1/2.

$$\vec{V}(t) = \left\langle 3t^2 + C_1, \sin t + C_2, \frac{1}{2} \cos(2t) + C_3 \right\rangle$$

$$\vec{V}(0) = \left\langle \underline{C_1}, C_2, \frac{1}{2} + C_3 \right\rangle = \left\langle \underline{1}, 0, \underline{\frac{1}{2}} \right\rangle$$

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad \frac{1}{2} + C_3 = 1 \Rightarrow C_3 = \frac{1}{2}.$$

Posición:  $\int \vec{V}(t) dt$ .

$$\vec{r}(t) = \left\langle t^3 + t + d_1, -\cos t + d_2, \frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{t}{2} + d_3 \right\rangle$$

$$\vec{r}(0) = \left\langle d_1, -1 + d_2, d_3 \right\rangle = \left\langle 0, 2, -1 \right\rangle$$

$$d_1 = 0, \quad -1 + d_2 = 2, \quad d_3 = -1$$

$$d_2 = 3.$$

Posición:  $\vec{r}(t) = \left\langle t^3 + t, 3 - \cos t, \frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{t}{2} - 1 \right\rangle$

$$b. \vec{a}(t) = 8t\hat{i} + \sinh t\hat{j} - \hat{k}e^{\frac{t}{2}}, \quad \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}$$

$$\vec{v}(0) = \vec{0} \quad \vec{s}(0) = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$$

"En reposo"

Velocidad:  $\vec{v}(t) = \langle 4t^2 + C_1, \cosh t + C_2, -2e^{\frac{t}{2}} + C_3 \rangle$

$$\vec{v}(0) = \langle C_1, 1 + C_2, -2 + C_3 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle.$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -1 \quad C_3 = 2$$

$$\vec{v}(t) = \langle 4t^2, \cosh t - 1, -2e^{\frac{t}{2}} + 2 \rangle$$

Posición:  $\vec{r}(t) = \langle \frac{4}{3}t^3 + C_1, \sinh t - t + C_2, -4e^{\frac{t}{2}} + 2t + C_3 \rangle$

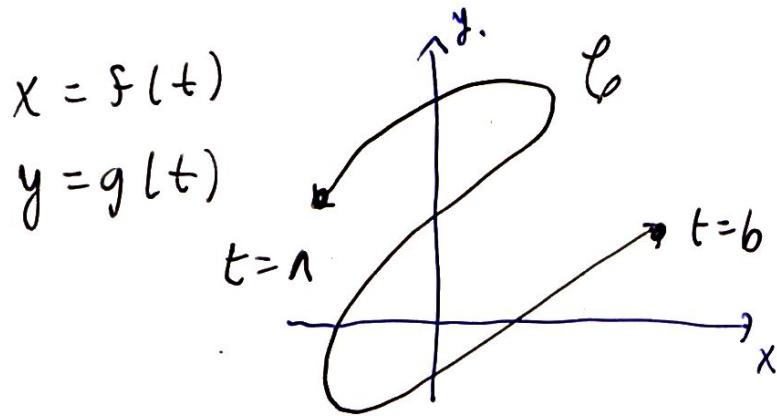
$$\vec{r}(0) = \underbrace{\langle C_1, C_2, -4 + C_3 \rangle}_{C_2 = 1} = \langle 2, 1, -3 \rangle$$

$$C_3 = -3 + 4 = 1$$

$$\vec{r}(t) = \langle \frac{4}{3}t^3 + 2, \sinh t - t + 1, -4e^{\frac{t}{2}} + 2t + 1 \rangle$$

### 13.3 Longitud de Arco.

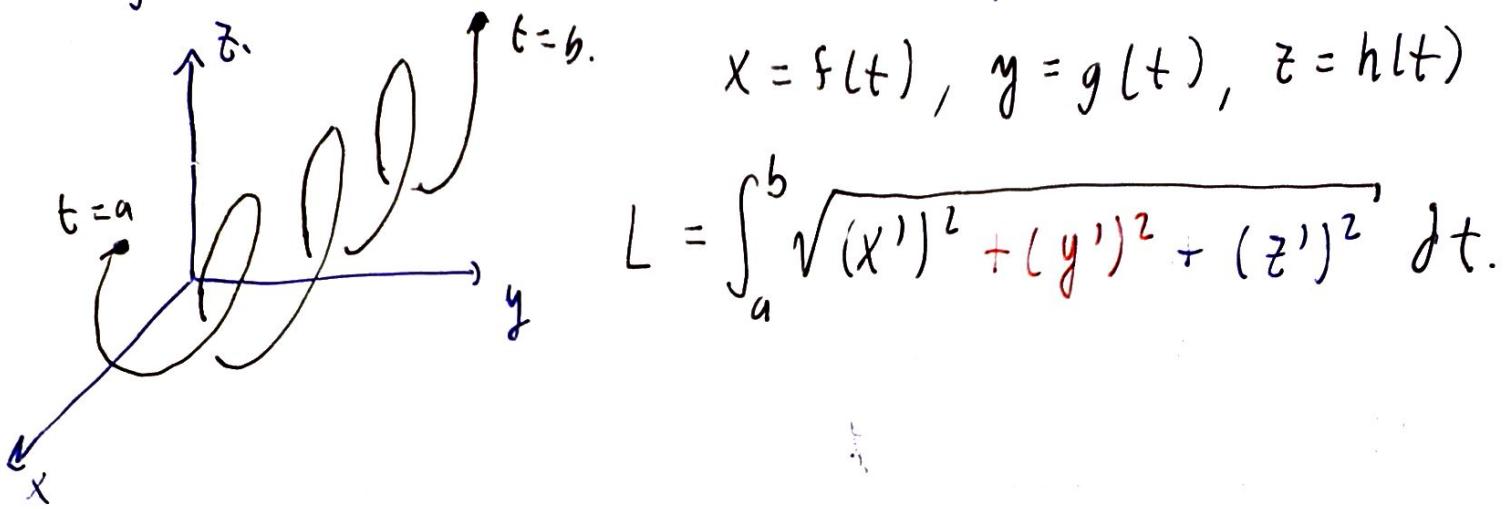
#### 10.4. Ecs. paramétricas de una curva en el plano.



Longitud de arco.

$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt.$$

Longitud de una curva en el espacio



Función vectorial:  $\vec{r} = \langle f, g, h \rangle = \langle x, y, z \rangle$ .

Derivada:

$$\vec{r}' = \langle x', y', z' \rangle.$$

Magnitud:

$$|\vec{r}'| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$$

$$L = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt.$$

integre la magnitud  
del vector tangente.

Ejercicio 1: p 63 Encuentre la longitud de las sigs. curvas.

a.  $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, \ln(\cos t) \rangle \quad 0 \leq t \leq \pi/4.$

$$L = \int_0^{\pi/4} |\vec{r}'(t)| dt. \quad \text{---tan t.}$$

$$\vec{r}'(t) = \left\langle -\sin t, \cos t, \frac{-\sin t}{\cos t} \right\rangle$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{-\sin^2 t + \cos^2 t + \tan^2 t}$$

$$= \sqrt{1 + \tan^2 t} = \sqrt{\sec^2 t} = \sec t.$$

$$L = \int_0^{\pi/4} \sec t dt = \left[ \ln(\sec t + \tan t) \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \ln(\sec \pi/4 + \tan \pi/4)$$

$$- \ln(\sec 0 + \tan 0)$$

$$L = \ln \left( \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 \right) - \ln(1) = \ln \sqrt{2} + 1$$

b.  $\vec{r}(t) = \langle 12t, 8t^{3/2}, 3t^2 \rangle \quad \text{en } 0 \leq t \leq 1$

$$\vec{r}'(t) = \langle 12, 12t^{1/2}, 6t \rangle = 6 \langle 2, 2t^{1/2}, t \rangle.$$

$$|\vec{r}'(t)| = 6 \sqrt{4 + 4t + t^2} = 6 \sqrt{(t+2)^2} = 6(t+2)$$

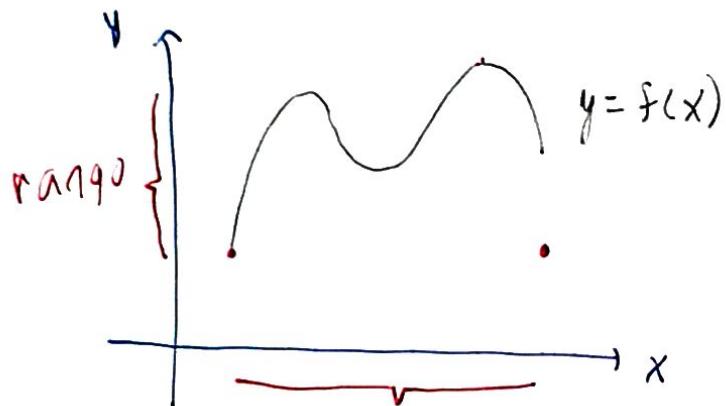
$$L = \int_0^1 (6t+12) dt = \left[ 3t^2 + 12t \right]_0^1 = 3 + 12 = 15$$

# Capítulo 12

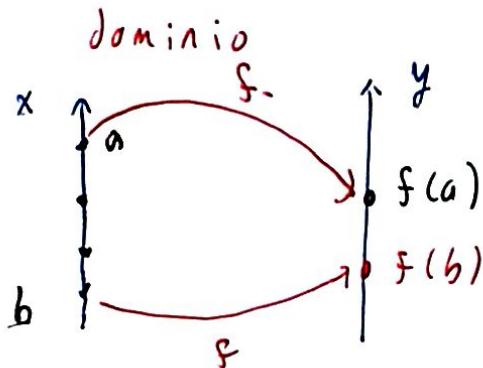
Funciones de varias variables

# 14.1 Funciones de Varias Variables.

## Funciones 1 variable



variable independiente  $x$   
variable dependiente  $y$ .  
D) son intervalos.



Cada  $x$  puede tener  
un sólo valor de  $y$ .

## Funciones 2 variables:

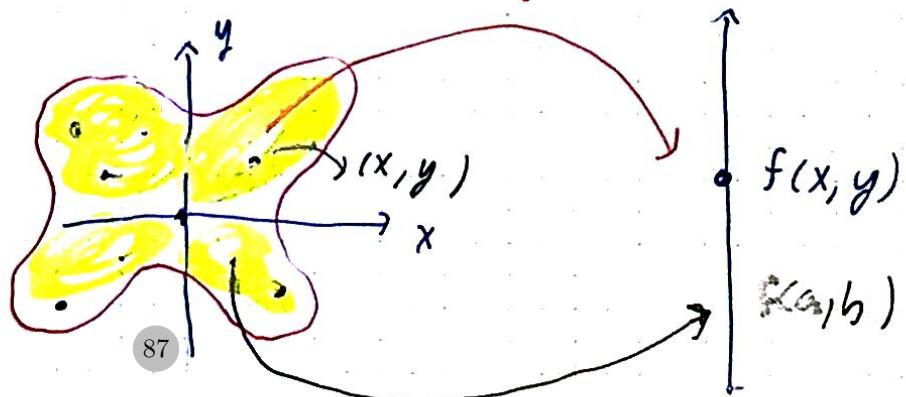
$$z = f(x, y).$$

variables independientes  $x, y$ .  
variable dependiente  $z$

$f$  es una regla que asigna a cada punto  $(x, y)$  a lo sumo un valor de  $z$ .

$$f: \underline{\mathbb{R}^2} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$$

dominio      rango.



Dominio de  $f$ : un conjunto que consiste de todos los puntos o pares ordenados  $(x, y)$  para los cuales  $f(x, y)$  está definida.

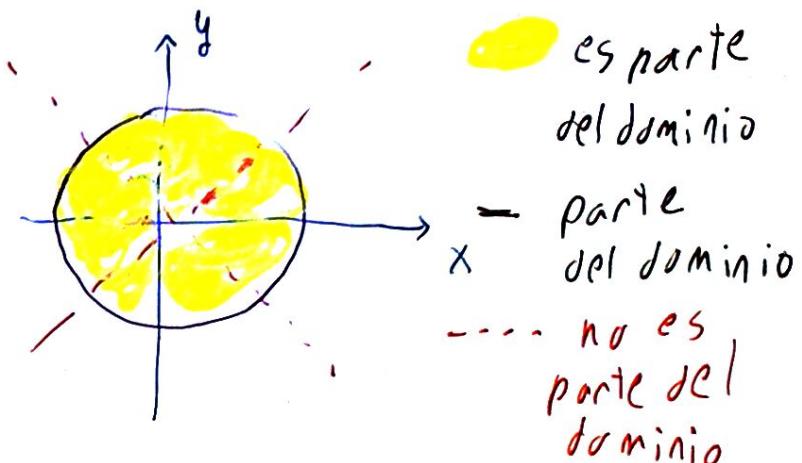
ID: 1-  $\bullet$  todos los números  $x$  para los cuales  $f(x)$  está definida.

- Evite la división por cero
- Raíces pares de números negativos
- Logaritmos de números negativos o cero.

El dominio de  $f$  en una función de dos variables es una región.

$$(1, 2] \cup (3, 4)$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ 0 \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ 1 \\ \text{---} \\ 2 \\ \text{---} \\ 3 \\ \text{---} \\ 4 \end{array}$$

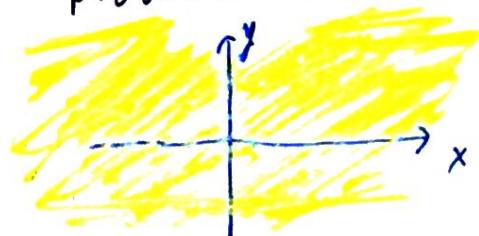


Ejercicio 1: Encuentre y bosqueje el dominio de las sigs funciones.

Sombree la región que es parte del ID y utilice líneas discontinuas para denotar a curvas que no son parte de ID.

a.  $C(x, y) = 10x + 20y$ .  $X \times Y$  producto cartesiano  
nunca se define

$$\text{ID: } \underbrace{(-\infty, \infty)}_x \times \underbrace{(-\infty, \infty)}_y = \mathbb{R}^2$$



$$\mathbb{R} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2. \quad \text{Explic. Producto}$$

*Cartesiano.*

$$X \times Y = \{(x, y) \text{ tal que } x \in X, y \in Y\}.$$

$$X = \{1, 2\} \quad Y = \{1, 2, 3\}.$$

$$X \times Y = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}.$$

$$X \cup Y = \{1, 2, 3\}.$$

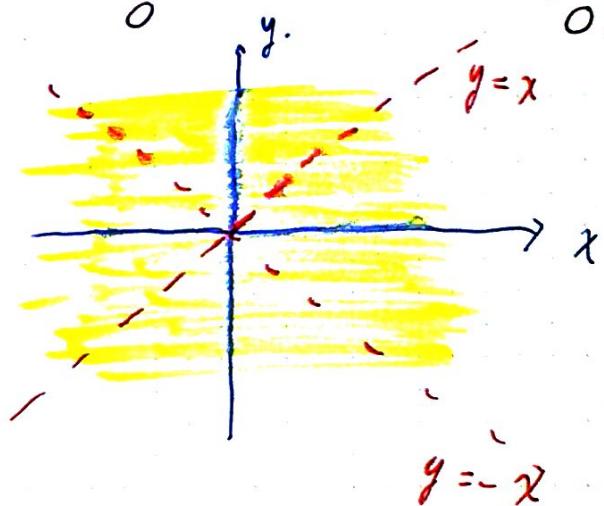

---

$$b. \quad z = \frac{8}{x^2 - y^2} \quad z(1, -1) = \frac{8}{0} \quad z(-2, 2) = \frac{8}{0}.$$

definida si  $x^2 \neq y^2$

$$\text{ID: } \mathbb{R}^2 - \{x^2 + y^2\}.$$

$$y \neq \sqrt{x^2} \quad y \neq +x \\ y \neq -x$$



$$c. \quad R(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

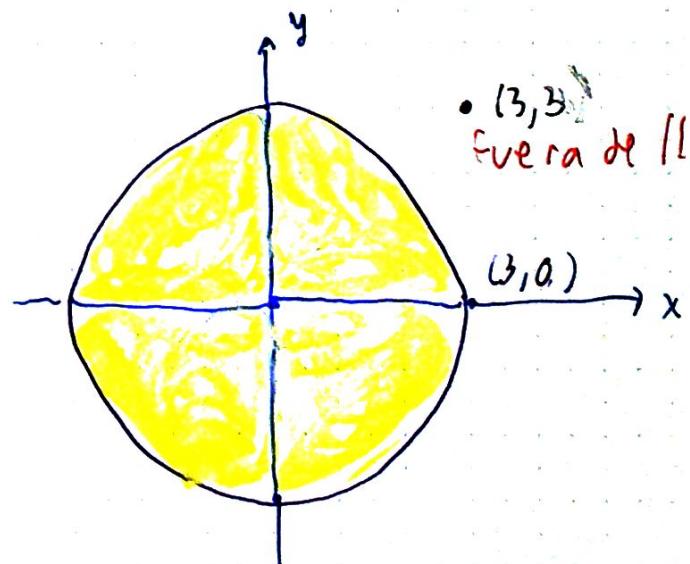
$$\text{definida } 9 - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$9 \geq x^2 + y^2.$$

$$\text{ID: } x^2 + y^2 \leq 9$$

círculo de radio 3  
centrado en el origen

$$\text{ID} = \{(x, y) \text{ tal que } x^2 + y^2 \leq 9\}.$$



J.  $Q(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$

D:  $x^2 + y^2 - 9 > 0$

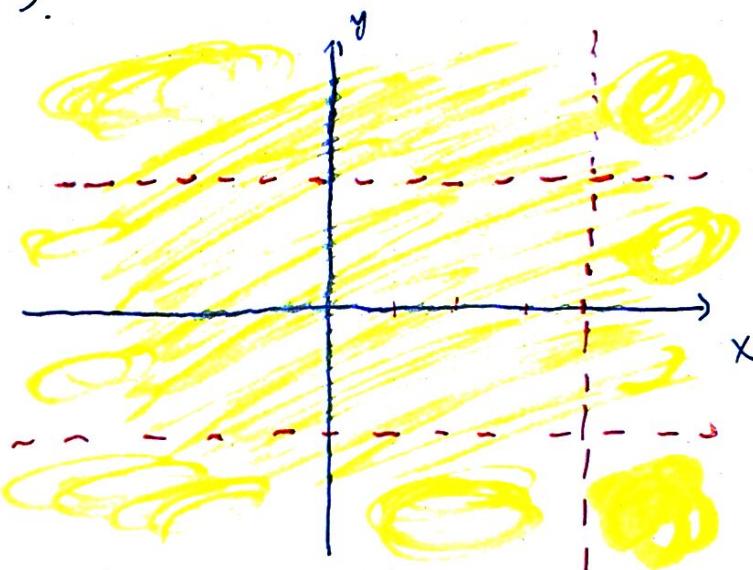
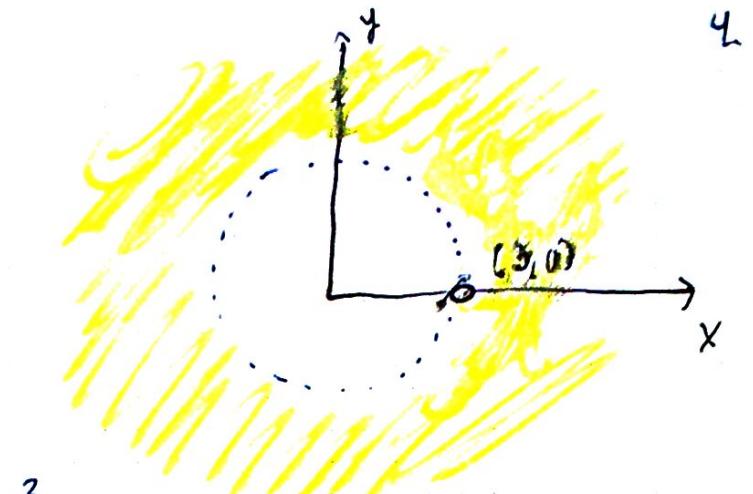
$x^2 + y^2 > 9$

afuera del disco de radio 3.

e.  $\bar{z} = \frac{(x+4)}{(y-2)(x-4)(y+2)}$

Definida si  $y \neq \pm 2, x \neq 4$

D:  $\mathbb{R}^2 - \{y \neq \pm 2, x \neq 4\}$ .



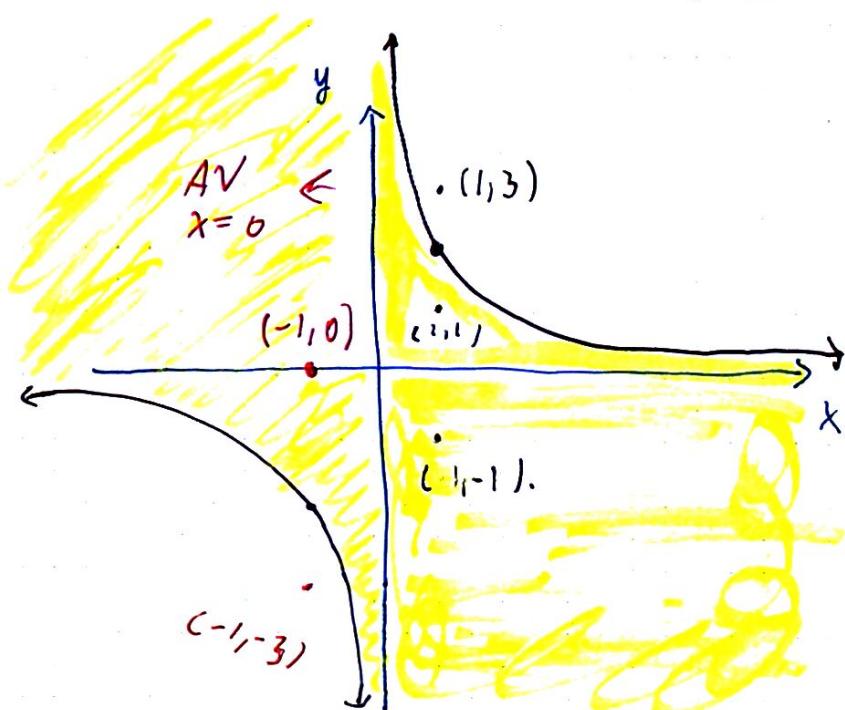
f.  $h(x, y) = \ln(2 - yx)$

Definida si  $2 - yx > 0$

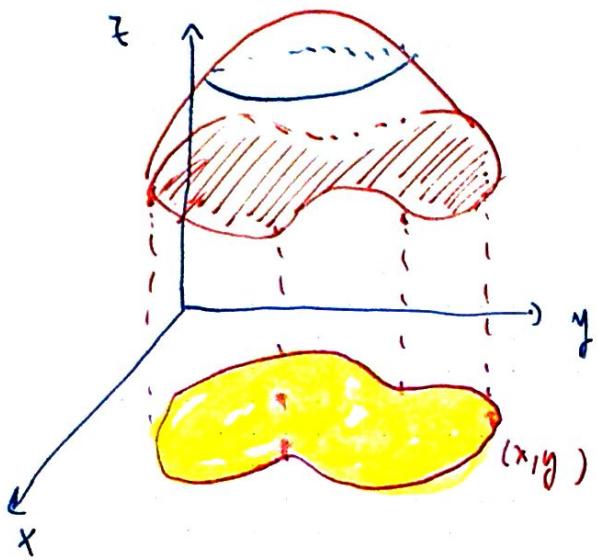
$$2 > yx$$

$y < \frac{2}{x}$

D:  $y < \frac{2}{x}$ .



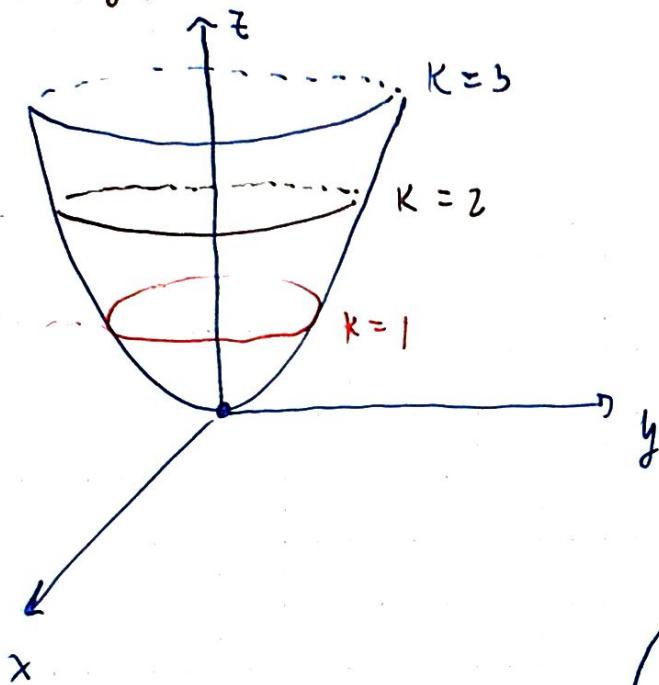
## Gráfica de $z = f(x, y)$



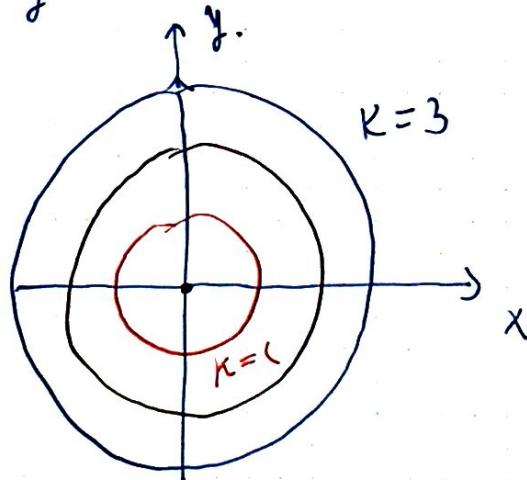
Son superficies y consisten de todas las triples ordenadas  $(x, y, z)$  donde  $z = f(x, y)$ .

Curva de Nivel o traza horizontal:

$$f(x, y) = K \quad K \text{ es una constante.}$$



Rebane la superficie con los planos horizontales  $z = K$  y grafique cada curva en el plano.



# Capítulo 13

Curvas de nivel

Curvas de Nivel  $f(x, y) = K$ . constante.

Ejercicio 9: (p 84) Identifique y grafique las curvas de nivel  $f(x, y)$ .

a.  $f(x, y) = 6 - 6x - 2y$  para  $K = -6, 0, 6, 12$ .

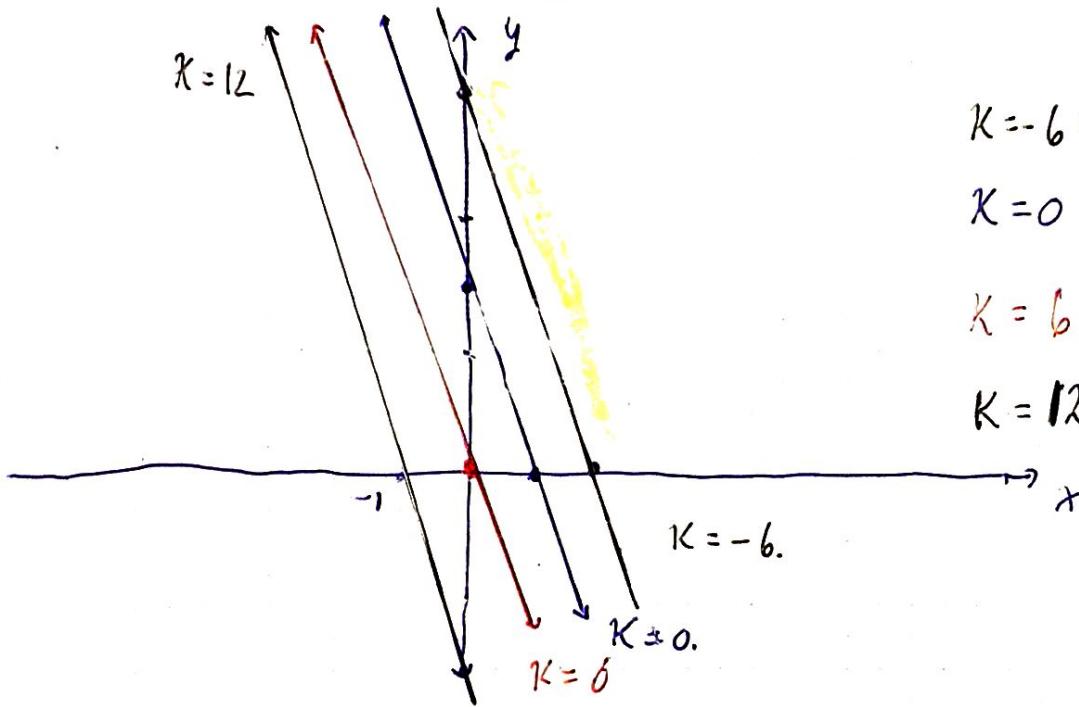
Plano

$$6 - 6x - 2y = K.$$

$$6 - K - 6x = 2y.$$

$$\boxed{y = 3 - \frac{K}{2} - 3x}$$

Rectas con pendiente  $-3$  e intercepto- $y$   $3 - \frac{K}{2}$ .



$$K = -6: y = 6 - 3x$$

$$K = 0: y = 3 - 3x.$$

$$K = 6: y = -3x$$

$$K = 12: y = -3 - 3x$$

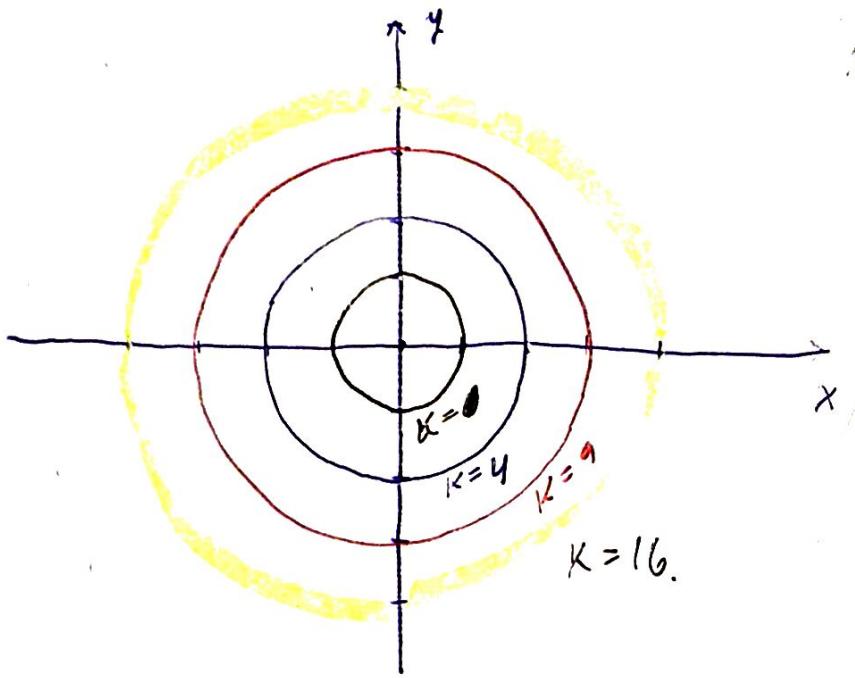
b.  $g(x, y) = x^2 + y^2$   $K = 1, 4, 9, 16$ .

$x^2 + y^2 = K$ . circunferencia de radio  $\sqrt{K}$

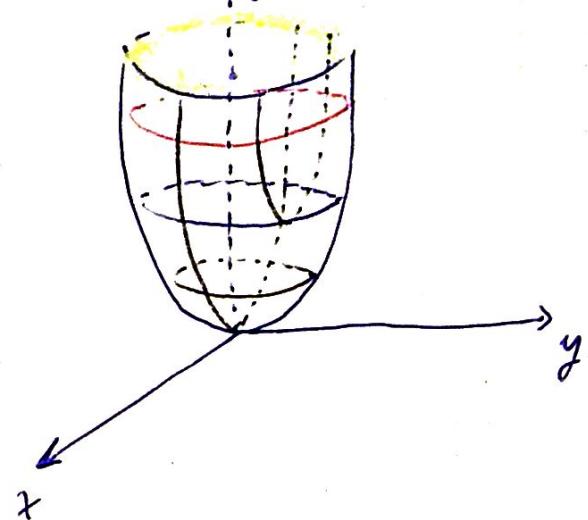
$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{todos están en el origen.}$$

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

$$x^2 + y^2 = 3^2$$



no tiene curvas de nivel para  $K$  negativo.



Paraboloid circular  $z = x^2 + y^2$ .  $z = K$   $x^2 + y^2 = K$   
circular.

$x = K$  ó  $y = K$  trazas horizontales.

$$z = K^2 + y^2 \quad \text{Par\'abola.}$$

$$z = x^2 + K^2.$$

$$\hookrightarrow h(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2} \quad \text{para } K = 0, 1, 4, 9.$$

Dominio:  $y^2 - x^2 \geq 0$ .

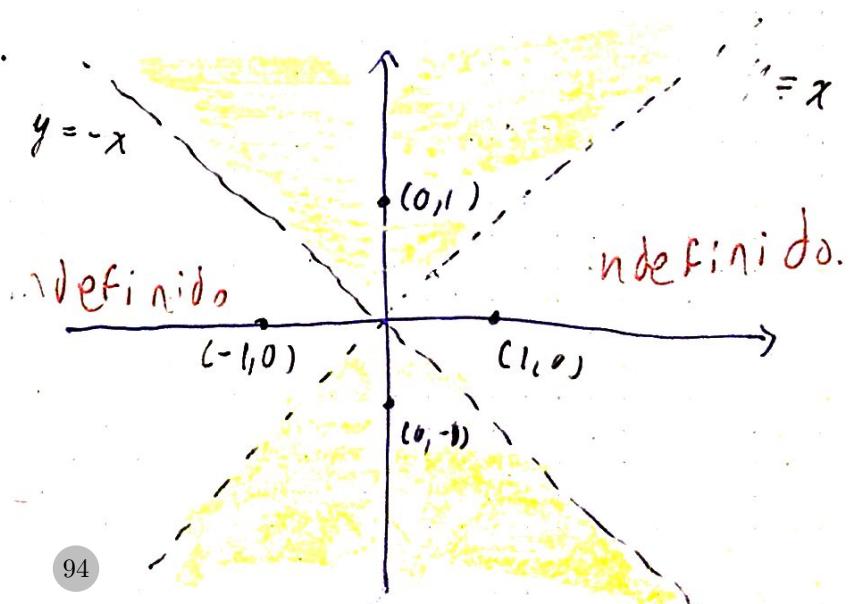
$$y^2 \geq x^2.$$

$$y \geq \pm \sqrt{x^2}$$

$$y^2 - x^2 = 0$$

$$y^2 = x^2.$$

$$y = \pm x$$



$$\sqrt{y^2 - x^2} = K.$$

$$y^2 = K^2 + x^2$$

$$y = \pm \sqrt{K^2 + x^2}$$

↳ Dominio  $(-\infty, \infty)$  en  $x$

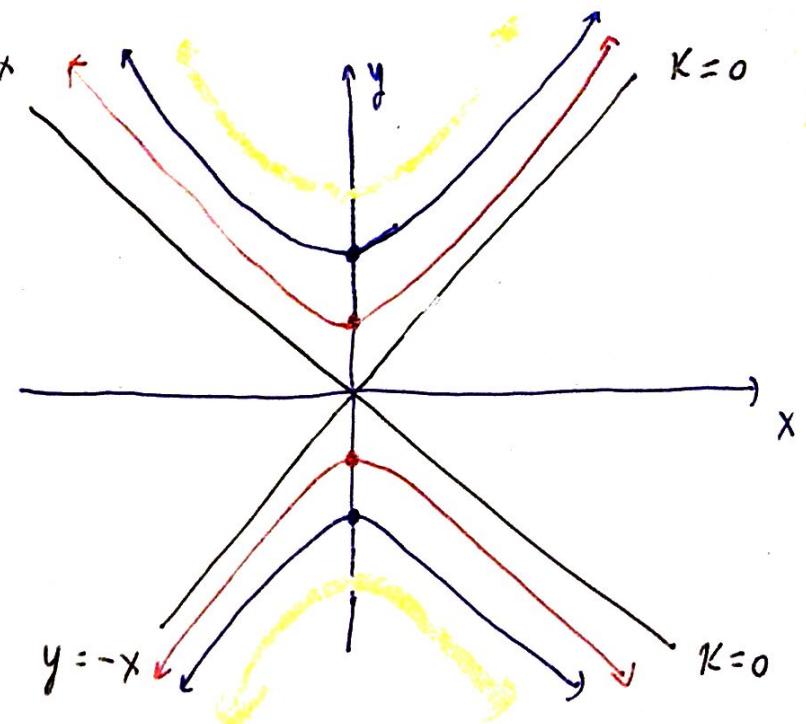
$$K=0 : y = \pm x$$

$$K=1 \quad y = \pm \sqrt{1+x^2}$$

$$y^2 - x^2 = 1.$$

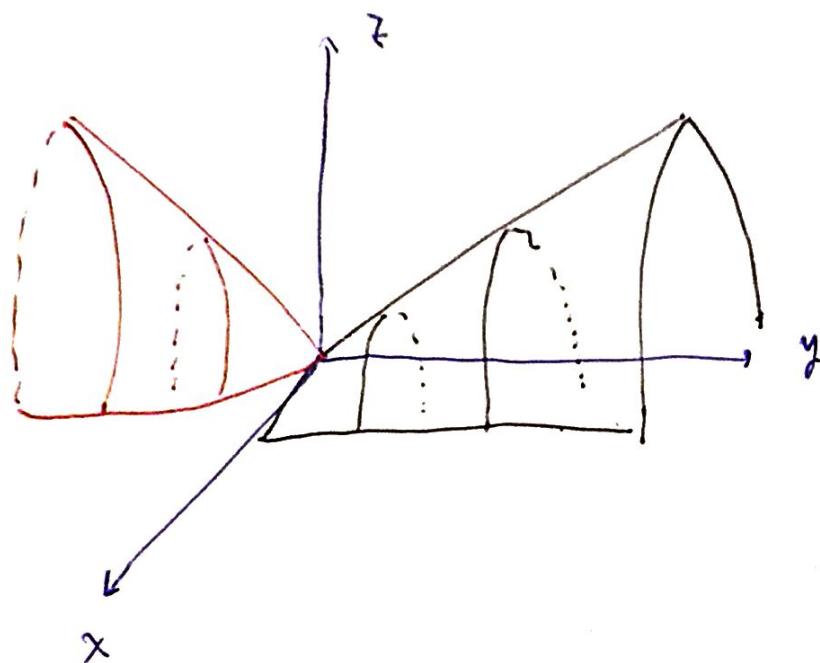
$$x=0 : y^2 = 1$$

$$y=0 : -x^2 = 1 \text{ no es posible}$$



$$K=4 : y = \pm \sqrt{4+x^2}$$

$$y = \pm \sqrt{9+x^2}$$



La superficie  

$$z = \sqrt{y^2 - x^2}$$
  
 se observaría  
 aprox. así.

## Funciones en 3 Variables

independientes  $x, y, z$ .  
dependiente  $u$  ó  $w$ .

$$w = f(x, y, z)$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Dominio: todas las triples ordenadas  $(x, y, z)$  para las cuales  $f(x, y, z)$  está definida.

Gráfica del dominio: es un sólido. (entre dos superficies)

Gráfica de  $f(x, y, z)$  son hiper superficies en 4-D.

## Funciones en $n$ variables.

$$u = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Dominio: todos las  $n$ -tuplas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  para las cuales  $u$  está definida.

En 3-D:  $f(x, y, z) = K$  constante.  
superficies de nivel.

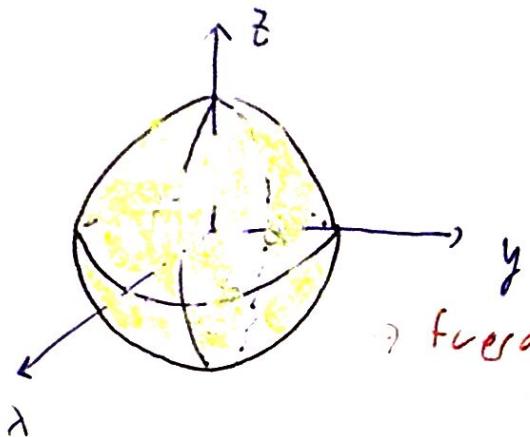
Ejercicio 5: Dominio y superficies de nivel para.

$$f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2} \quad \text{evite raíces negativas.}$$

Definida si  $4 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ .

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \text{una esfera de radio 2.}$$



esfera sólida de radio 2.

$\Rightarrow$  fuera de la esfera  $f$  se define.

Curvas de nivel

$$\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2} = K.$$

$$4 - x^2 - y^2 - z^2 = K^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 - K^2$$

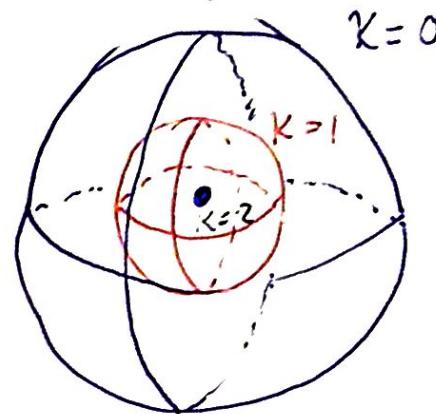
Esferas de radio  $\sqrt{4 - K^2}$

$$K=0 \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

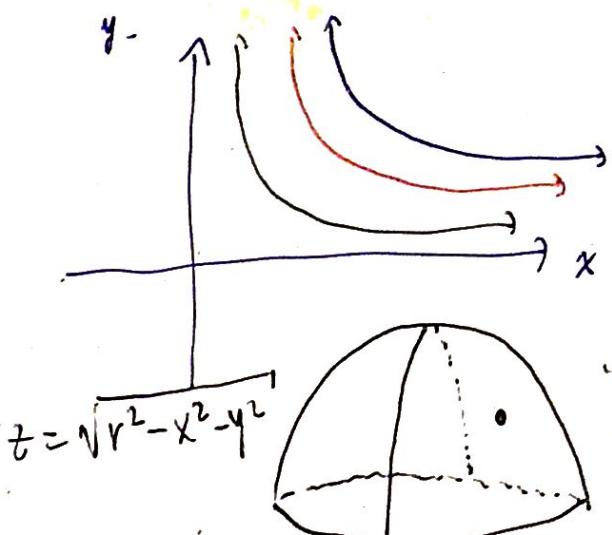
$$K=1 \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

$$K=2 \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

punto  $(0, 0, 2)$



Curvas de nivel siempre son paralelas.



$f(x, y)$  sólo puede tener un valor.

$$\text{Esfera } z^2 + x^2 + y^2 = 1.$$

no es una función en 2 variables

si es función,

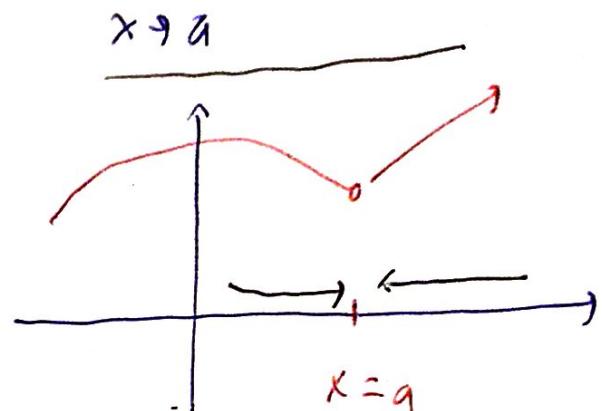
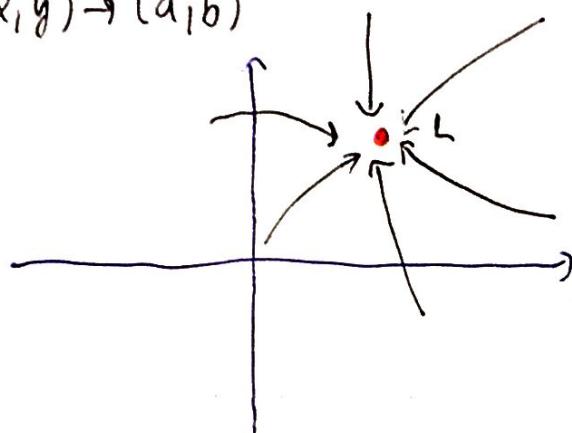
$$z^2 = 1 - x^2 - y^2$$

$$z = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

## 1.2 Límite de una función de 2 variables.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L. \quad \text{1-D} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

único



Si  $f(x,y)$  es una función polinomial, trigonométrica, exponencial, logarítmica, etc y  $f(x,y)$  está definida en  $(a,b)$  entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{2x+y}{x^2+y^2} = \frac{2(1)+1}{1^2+1^2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} \quad \text{indeterminado.}$$

no se puede usar LH

$$y=0: \lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2}{x^2} = 2. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{no existe.}$$

$$x=0: \lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{y^2} = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{no existe.}$$

$$y=x: \lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2+x^2}{x^2+x^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}.$$

Continuidad: es una extensión del concepto de continuidad en una variable.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

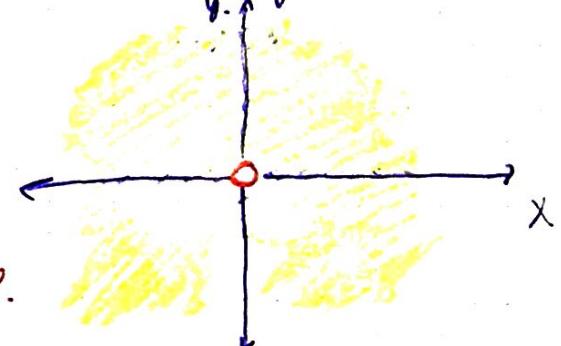
Las funciones exponenciales, polinomiales, logarítmicas, racionales, trigonométricas, etc son continuas en su dominio.

Ejercicio 2: Determine la región donde las sigs. funciones son continuas.

a.  $f(x,y) = \frac{2xy+1}{x^2+y^2}$  Es continua en todo su dominio.

Definida cuando  $x^2+y^2 \neq 0$ .  $x \neq 0, y \neq 0$ .

Continua en  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ .



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy+1}{x^2+y^2} = \frac{1}{0} \text{ no existe.}$$

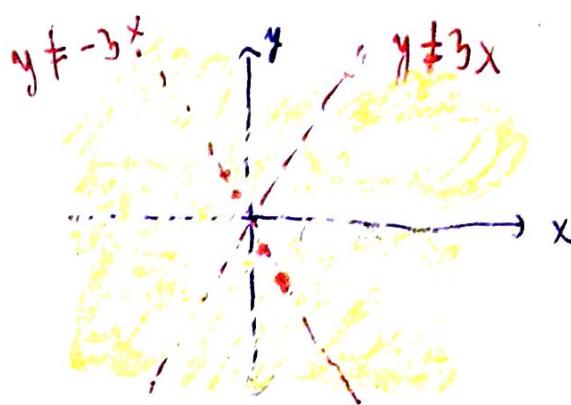
b.  $h(x,y) = \frac{1}{y^2 - 9x^2}$

Definida cuando  $y^2 \neq 9x^2$

$$\sqrt{9x^2} = \pm 3x$$

$$y = 3x \quad y = -3x$$

$$1D: \mathbb{R}^2 - \{y = \pm 3x\}$$



Enfoque funciones 2 variables.

- Dominio y continuidad *'prácticamente intercambiables'*
- curvas de nivel  $f(x, y) = K$ .

No hay enfoque

- Gráficas de  $f(x, y)$
- Límites de  $f(x, y)$
- Superficies de Nivel.

# Capítulo 14

## Derivadas parciales

### 14.3 Derivadas Parciales.

Derivada 1-D,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

En una función con 2 variables independientes

$$f(x, y) \quad \left. \begin{array}{l} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{array} \right\} \text{derivadas parciales.}$$

Al derivarse parcialmente respecto a una variable, la otra se mantiene constante.

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

"y se mantiene constante"

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

"x se mantiene constante"

Se pueden utilizar todas las reglas de derivación para funciones de 1 - variable.

- Suma, Producto, Cociente y la Cadena.

1<sup>as</sup> Derivadas parcial de  $f(x, y)$  - encuentre todas las derivadas parciales posibles  $f_x$  y  $f_y$ .  
 Δ delta.

$$\text{Notación. } f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Evide  $f'(x, y)$  para evitar ambigüedad.

Ejercicio 1: Encuentre las derivadas parciales de las sigs. funciones.

a.  $f(x, y) = 2x^2 + \underline{3}xy$ .  $f_x(x, y)$  &  $f_y(x, y)$ .

$$f_x = 4x + 3y. \quad f_y = 0 + 3x$$

b.  $g(x, y) = \underline{\underline{y}}(x^2+1)^3 + \underline{\underline{x}}(y^4-4)^4 + \underline{\underline{5x^2y^3}}$

$$g_x = 3y(x^2+1)^2 \cdot 2x + 2x(y^4-4)^4 + 10x^3y^3$$

$$g_y = 1 \cdot (x^2+1)^3 + 16y^3x^2(y^4-4)^3 + 15x^2y^2.$$

c.  $h(s, t) = (s^2+10t)^2(t^4+s^3)^3$  Regla del Producto y de la Cadena.

$$h_s = 4s(s^2+10t)^1(t^4+s^3)^3 + 3 \cdot 3s^2(s^2+10t)^2(t^4+s^3)^2$$

$$h_t = 20(s^2+10t)^1(t^4+s^3)^3 + 12t^3(s^2+10t)^2(t^4+s^3)^2$$

Evalue la derivada en punto  $(a, b)$ .

$$f_x(a, b) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a, b)}$$

d.  $w(r, \theta) = r^2 \sin(2\theta) + e^{\pi r - \theta}$ ; Encuentre  $\left. \frac{\partial w}{\partial \theta} \right|_{(2, \pi)}$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = 2r^2 \cos(2\theta) - e^{\pi r - \theta}.$$

103  $\left. \frac{\partial w}{\partial \theta} \right|_{(2, \pi)} = w_\theta(2, \pi) = 2 \cdot 4 \cos(2\pi) - e^{2\pi - \pi}.$

$= \boxed{8 - e^\pi.}$

Derivadas parciales para funciones de 2 o más variables se deriva respecto a una variable y el resto se mantiene constantes.

$$w = f(x, y, z)$$

3. <sup>tras</sup> derivadas parciales  $f_x, f_y, f_z$ .

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

n derivadas parciales:  $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ .

Ejercicio 3: Encuentre todas las primeras derivadas parciales de las sigs. funciones.

a.  $f(x, y, z) = \sqrt[4]{x^4 + 8xz + 2y^2} \quad ( )^{1/4}$

$$f_x = \frac{1}{4} (x^4 + 8xz + 2y^2)^{-3/4} \cdot (4x^3 + 8z + 0)$$

$$f_y = \frac{1}{4} (x^4 + 8xz + 2y^2)^{-3/4} (4y)$$

$$f_z = \frac{1}{4} (x^4 + 8xz + 2y^2)^{-3/4} (8x)$$

b.  $P(r, \theta, \phi) = r \tan(\phi^2 - 4\theta)$

funciones

$$P_r = \tan(\phi^2 - 4\theta)$$

vectoriales

$$P_\theta = -4r \sec^2(\phi^2 - 4\theta)$$

1 variable

$$P_\phi = 2\phi r \sec^2(\phi^2 - 4\theta)$$

$\vec{F}(t), \dots$

$\langle f^1, g^1, h^1 \rangle$

Derivadas parciales de orden superior (Pág 100).

Orden superior: segunda, tercera, cuarta, ...,

Como  $f_x(x, y)$  &  $f_y(x, y)$  son también funciones en dos variables pueden también tener derivadas parciales.

$$\begin{array}{ccc} f_x \xrightarrow{x} f_{xx} & & f_y \xrightarrow{y} f_{yy} \\ \searrow y \quad \xrightarrow{x} & & \swarrow x \quad \xrightarrow{y} \\ \text{1er derivar} & \xrightarrow{\text{última derivar}} & \text{cruzadas} \\ \text{izquierda} & \text{derecha} & \end{array}$$

Y segundas derivadas parciales, éstas también tienen sus derivadas parciales tercera derivadas parciales.

$$\begin{array}{cccc} \textcircled{f_{xxx}} & \textcircled{\underline{\underline{f_{xxy}}}} & \textcircled{\underline{\underline{f_{yyy}}}} & \textcircled{\underline{\underline{f_{yx}\!\!\!}}\!\!\!} \\ \underline{\underline{f_{xx}\!\!\!}}\!\!\! & \underline{\underline{f_{xy}\!\!\!}}\!\!\! & \underline{\underline{f_{yy}\!\!\!}}\!\!\! & \underline{\underline{f_{yx}\!\!\!}}\!\!\! \end{array}$$

Las derivadas parciales cruzadas  $f_{xy}, f_{yx}$  son iguales si la función es diferenciable.

$$f_{xy} = f_{yx} \quad f_{xyy} = f_{yyx} = f_{yx}\!\!\!$$

el orden de derivación respecto a cada variable no afecta la derivada parcial.

## Notación Delta.

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Ejercicio 4: Encuentre todas las 2das derivadas parciales.

a.  $f(x, y) = \sin(mx+ny)$ ,  $m, n \in \mathbb{R}$ .

1ras parciales:  $f_x = m \cos(mx+ny)$

$$f_y = n \cos(mx+ny).$$

2das parciales:  $f_{xx} = -m^2 \sin(mx+ny)$

$$f_{yy} = -n^2 \sin(mx+ny).$$

$$f_{xy} = -mn \sin(mx+ny). \quad \} iguales.$$

$$f_{yx} = -mn \sin(mx+ny)$$

b.  $z = \cos(2xy)$

1ras.:  $\frac{\partial z}{\partial x} = -2y \sin(2xy) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x \sin(2xy)$

2das:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4y^2 \cos(2xy) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4x^2 \cos(2xy)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2 \sin(2xy) - 4yx \cos(2xy) \quad \} \text{mismo.}$

respecto a y:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2 \sin(2xy) - 4xy \cos(2xy)$

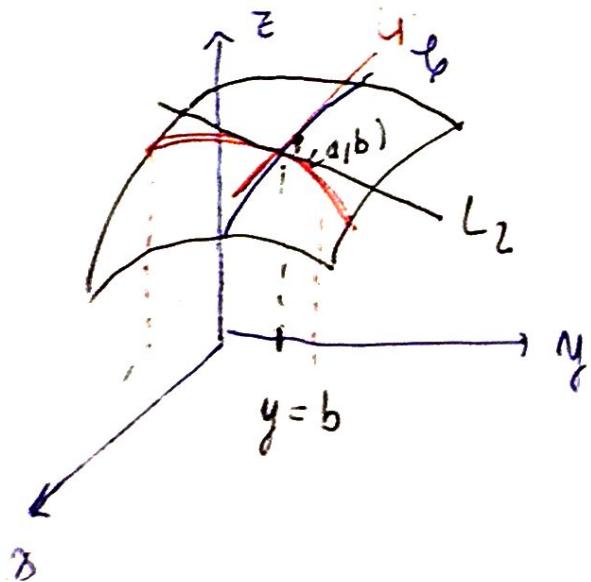
# Capítulo 15

Derivadas parciales, rectas tangentes y  
planos tangentes

# Derivadas Parciales, Rectas Tangentes y Planos tangentes.

P-101

Interpretación de la Derivada Parcial.



La curva de intersección entre  $z = f(x, y)$  y  $y = b$ .

Curva l variable  $z = f(x, b)$

Recta tangente a esta curva.

punto  $(a, b, f(a, b))$

Derivada.  $\frac{f_x(x, b)}{f_x(a, b)}$

pendiente  $f_x(a, b)$

Derivadas parciales  $f_x(a, b)$  pendiente de la recta tangente a la curva  $f(x, b)$  en la dirección de  $x$ .

$$\tilde{\gamma}_1 - L_1 = \langle a, b, f(a, b) \rangle + t \langle 1, 0, f_x(a, b) \rangle.$$

función vectorial  $x = t, y = b, z = f(t, b)$ .

Para encontrar  $L_2$   $x = a$ .

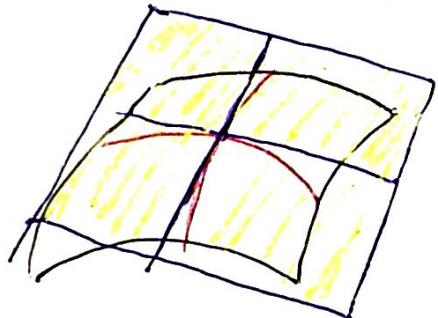
$$x = a, y = t, z = f(a, y)$$

$$\frac{dy}{dz} = f_y(a, y) \Rightarrow \underline{\frac{dy}{dz} = f_y(a, b)}$$

$\frac{dy}{dz} = f_y(a, b)$  es la pendiente de la tangente a la curva  $f(a, y)$  en la dirección de  $y$ .

$$L_1 = \langle a, b, f(a, b) \rangle + t \langle 1, 0, f_x(a, b) \rangle.$$

Estas dos rectas se utilizan para construir el plano tangente a la superficie p. 103.



→ Ec- plano tangente.

plano paralelo a  $L_1$  y a  $L_2$ .

$\underbrace{v_1}_{V_1}$

$$L_1 = \langle a, b, f(a, b) \rangle + t \langle 1, 0, f_x(a, b) \rangle.$$

$$L_2 = \langle a, b, f(a, b) \rangle + t \langle 0, 1, \underbrace{f_y(a, b)}_{V_L} \rangle.$$

$$\text{Ec. vectorial } \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad \vec{r}_0 = \langle a, b, f(a, b) \rangle$$

$$\hat{n} = v_1 \times v_2 - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & f_x(a, b) \\ 0 & 1 & f_y(a, b) \end{vmatrix} = -f_x(a, b)\hat{i} - f_y(a, b)\hat{j} + \hat{k}$$

$$\text{Ec. vectorial plano: } \langle -f_x(a, b), -f_y(a, b), 1 \rangle$$

$$\langle -f_x(a, b) - f_y(a, b), 1 \rangle \cdot \langle x-a, y-b, z-f(a, b) \rangle =$$

$$-f_x(a, b)(x-a) - f_y(a, b)(y-b) + z - f(a, b) = 0.$$

$$\boxed{z = f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b)}$$

Plano tangente a  $z$  en el punto  $(a, b, f(a, b))$ .

Ejercicio 1: Encuentre el plano tangente a la superficie  $z = \ln(x-2y)$  en el punto  $(3, 1, 0)$ .

$$f(a, b) \quad f_x(a, b) \quad f_y(a, b) \quad a = 3, b = 1$$

$$f(3, 1) = \ln(3-2) = \ln 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x-2y} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(3,1)} = \frac{1}{3-2} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2}{x-2y} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(3,1)} = \frac{-2}{3-2} = -2.$$

Plano Tangente  $z = f(3, 1) + f_x(x-3) + f_y(y-1)$

$$z = 0 + x-3 - 2y + 2.$$

$$\boxed{z = x-2y-1}$$

Aproximación Lineal de  $z = f(x, y)$ , Linearización.

La aproximación lineal de  $z$  en  $(a, b)$  es el plano tangente a la superficie.

$$L(x, y) = f(a, b) + \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a,b)} (x-a)}_{f_x(a, b)} + \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a,b)} (y-a)}_{f_y(a, b)}$$

Ejercicio 2: Considere la función  $f(x, y) = \sqrt{2x + 2e^y}$

a. Encuentre la aproximación lineal de  $f$  en el punto  $(7, 0)$ .

Encuentre  $f(7, 0)$   $f_x(7, 0)$   $f_y(7, 0)$

$$f(7, 0) = \sqrt{14 + 2} = 4.$$

$$f_x(x, y) = (2x + 2e^y)^{-1/2}. \quad f_x(7, 0) = \frac{1}{\sqrt{14+2}} = \frac{1}{4}.$$

$$f_y(x, y) = \frac{2e^y}{\sqrt{2x + 2e^y}} \quad f_y(7, 0) = \frac{1}{\sqrt{14+2}} = \frac{1}{4}.$$

Aproximación Lineal

o Plano Tangente

$$L = 4 + \frac{1}{4}(x - 7) + \frac{1}{4}y.$$

Cerca de  $(7, 0)$   $\sqrt{2x + 2e^y} \approx \frac{9}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y.$

b. Utilice la aproximación lineal para aproximar el valor de  $\sqrt{8 + 2e^1}$ .  $2x = 8$   $2e^y = 2e^1$

$$f(4, 1) = \sqrt{8 + 2e^1} \approx L(4, 1)$$

$$L(4, 1) = \frac{9}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$\sqrt{8 + 2e^1} \approx 3.5$$

En realidad

$$\sqrt{8 + 2e^1} \approx 3.665592.$$

Ejercicio 3: Encuentre la aproximación lineal de

$$g(x,y) = 1 + x \ln(xy - 5) \text{ en el punto } (2,3).$$

$$\boxed{g(2,3)} = 1 + 2 \ln(6 - 5) = 1 + 0 = \boxed{1}$$

$$g_x(x,y) = 0 + 1 \cdot \ln(xy - 5) + \frac{xy}{xy - 5}$$

$$\boxed{g_x(2,3)} = \ln(1) + \frac{6}{6-5} = 0 + \frac{6}{1} = \boxed{6}$$

$$\boxed{g_y(x,y)} = 0 + \frac{x \cdot x}{xy - 5} \quad g_y(2,3) = \frac{4}{6-5} = \boxed{4}$$

Aproximación Lineal:  $L(x,y) = 1 + 6(x-2) + 4(y-3)$

$$L(x,y) = -23 + 6x + 4y.$$

12.4 Derivación Implícita y 12.5 Regla de la Cadena.

Funciones 2 variables  $z = f(x,y)$

Explícita  $z = x^2 + y^2, z = x \ln(xy - 5), \dots$

Implícita:  $z$  no está sólo en función de  $x$  &  $y$ .

Ejemplos:  $x^2 + y^2 + z^2 = 16, \sqrt{z^2 - x^2} = y + z.$

¿Cómo se encuentran  $\frac{\partial z}{\partial x}$  &  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ?

Implicita.  $x^2 + y^2 + z^2 = 16.$

$$z = \pm \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

Rango  $[0, 4]$ .

Esfera radio  $4$   
Rango  $[-4, 4]$   
Dos hemisferios

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} (16 - x^2 - y^2)^{-1/2} (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{z}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Derivación Implicita se pueden encontrar  $\frac{\partial z}{\partial x}$  &  $\frac{\partial z}{\partial y}$   
SIN necesidad de resolver para  $z$ .

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16. \quad x \text{ & } y \text{ son independientes}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial}{\partial x} (16)$$

$$2x + 0 + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$2z \frac{\partial z}{\partial x} = -2x \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial}{\partial y} (0).$$

$$0 + 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}}$$

# 7

## Derivación Parcial Implícita Abreviada.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \text{ como } x \ln y + z^2 \sqrt{1+x^2+z^2} = K$$

Forma implícita:  $F(x, y, z(y, x)) = \text{constante}$ .

$\frac{\partial z}{\partial x}$ , use la regla de la Cadena.

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \boxed{\frac{\partial z}{\partial x}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

Ejemplo  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2z}.$$

Ejercicios: p. 108 Encuentre las primeras derivadas parciales de  $z$ .

a.  $\underbrace{\ln(zy) + 9z - xyz}_F = 1 \quad \frac{z}{zy} = \frac{1}{y}$

$$F_x = -yz.$$

$$F_y = y^{-1} + 0 - xz$$

$$F_z = z^{-1} + 9 - xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{z^{-1} + 9 - xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xy - y^{-1}}{z^{-1} + 9 - xy}$$

sin derivación parcial implícita derivada.

$\frac{\partial}{\partial y} (x, y)$  agrege  $\underline{z_x}$  cada vez que aparece  $\underline{z}$ .

$$\frac{y \underline{z_x}}{\underline{z} y} + 9 \underline{z_x} - y z - xy \underline{z_x} = 0.$$

$$\underline{z}^{-1} \underline{z_x} + 9 \underline{z_x} - xy \underline{z_x} = y z.$$

$$\underline{z_x} = \frac{yz}{\underline{z}^{-1} + 9 - xy}$$

más laborioso  
más cuidadoso.

# Capítulo 16

Regla de la cadena, derivación implícita,  
planos y rectas tangentes

## 14.5 Regla de la Cadena

$$y = f(g(t))$$

$$y = f(x) \quad x = g(t)$$

$$y \rightarrow x \rightarrow t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

externa interna.

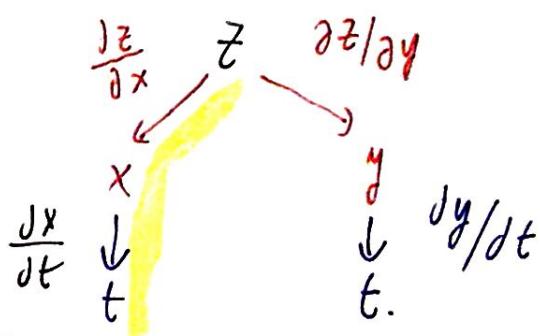
Caso 1:  $z = f(x, y)$      $x = g(t)$      $y = h(t)$

¿Cómo se encuentra  $\frac{dz}{dt}$ ?

$$z = f(x(t), y(t))$$

Diagrama de Árbol.

Variable dependiente  $z$ .



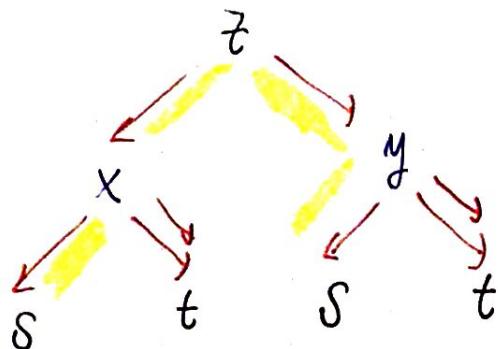
Variables intermedias  $x, y$ .

Variable independiente  $t$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Sume cada trayectoria.

Caso 2:  $z = f(x, y)$      $x = g(s, t)$      $y = h(s, t)$



$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Ejercicio 1: suponga que el costo de producir  $x$  uds. de A. y  $y$  uds. de B es:

$$C(x, y) = (3x^2 + y^3 + 4)^{1/3} \quad \text{explicita}$$

Las funciones de producción para cada producto son:

$$x = 10KL \quad y = 5K^2 + 4L. \quad \text{explicita}$$

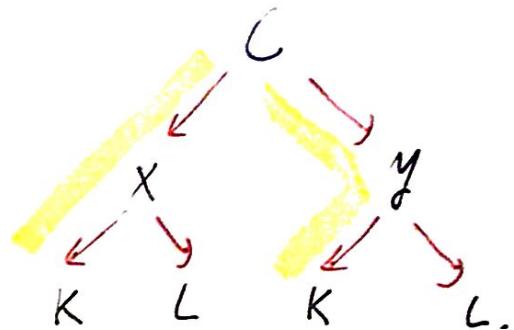
Encuentre la razón de cambio de  $C$  respecto al capital y al trabajo.

$$\frac{\partial C}{\partial K} = \frac{\partial C}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial K} + \frac{\partial C}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial K}.$$

$$\frac{\partial C}{\partial L} = \frac{\partial C}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial L} + \frac{\partial C}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial L}.$$

$$\frac{\partial C}{\partial K} = \frac{1}{3} 6x (3x^2 + y^3 + 4)^{-2/3} 10L + \frac{1}{3} \frac{3y^2}{(3x^2 + y^3 + 4)^{2/3}} 10K.$$

$$\frac{\partial C}{\partial L} = \frac{2x}{(3x^2 + y^3 + 4)^{2/3}} 10K + \frac{y^2}{(3x^2 + y^3 + 4)^{2/3}} (4)$$

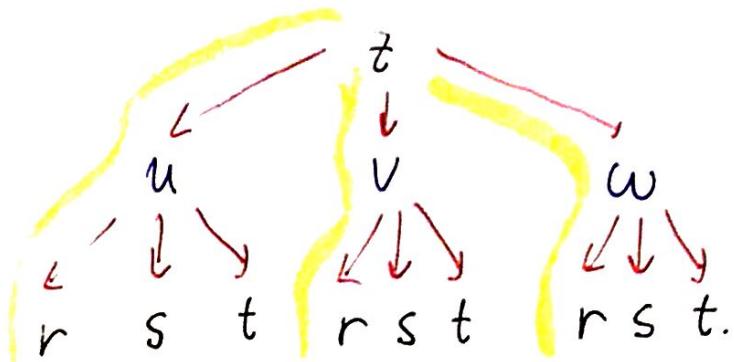


Ejercicio 3: Suponga que  $z = f(u, v, w)$  y que  $u, v, w$  son funciones de  $t$ . Encuentre  $\frac{dz}{dt}$ .

$$\begin{array}{ccc} & t & \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ u & v & w \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t & t & t \end{array} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{dw}{dt}.$$

Ejercicio 4: Suponga ahora que  $z = f(u, v, w)$  y que  $u, v, w$  son funciones de  $r, s, t$ .

Encuentre las derivadas parciales de  $z$  resp. a  $r, s$  &  $t$ .



$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial r}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial s}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Ejercicio 5: Encuentre las derivadas parciales indicadas.

a.  $w = \sqrt{x^2 + y^2}$        $\frac{\partial w}{\partial p} \Big|_{(p=1, q=0, r=3)}$

$$x = p^2 - q^3 + r - 1$$

$$y = \ln(p) + e^q + e^{\ln r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial p}.$$

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \cdot 2p + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \cdot \frac{1}{p}.$$

$$x(1, 0, 3) = 1^2 - 0^3 + 3 - 1 = 3.$$

$$y(1, 0, 3) = \ln(1) + e^0 + e^{\ln 3} = 0 + 1 + 3 = 4.$$

$$\frac{\partial w}{\partial p} \Big|_{(1, 0, 3)} = \frac{3}{\sqrt{9+16}} \cdot 2 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = \underline{\underline{2}}$$

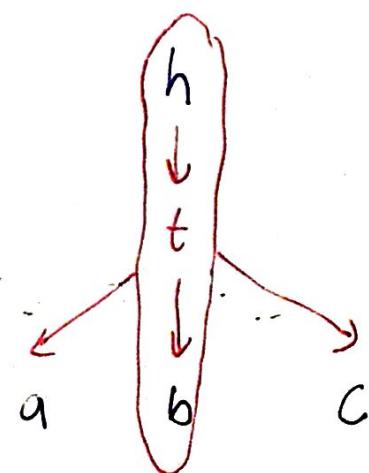
b.  $h = 4 - t^2$ ,     $t = 2a + 3b + 4c$ ,     $\frac{\partial h}{\partial b} \Big|_{(4, 2, 3)}$

$$h(a, b, c) = 4 - (2a + 3b + 4c)^2$$

$$\frac{\partial h}{\partial b} = -2(2a + 3b + 4c) \cdot 3$$

$$\frac{\partial h}{\partial b} \Big|_{(4, 2, 3)} = -2(8 + 6 + 12) \cdot 3$$

$$h_b(4, 2, 3) = -2(26) = \underline{\underline{52}} \cdot 3$$



$$\hookrightarrow w = \ln(xyz) \quad x = r^2 - s^2, \quad y = rs, \quad z = r^2 + s^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$w_x = \frac{yz}{xyz} = \frac{1}{x}$$

$$w = \ln(xyz) = \ln x + \ln y + \ln z.$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{2r}{x} + \frac{s}{y} + \frac{2r}{z}$$

Ejercicios Derivación Implicita, Planos y Rectas Tangentes.

Ejercicio 6: Encuentre las ecs. paramétricas de las rectas tangentes a  $z = \sin x \tan y$  en la dirección de  $x$  &  $y$  en el punto  $(\pi/6, \pi/4)$

$$\text{En la dirección de } x: m_x = z_x(\pi/6, \pi/4)$$

$$\text{de } y: m_y = z_y(\pi/6, \pi/4)$$

$$z_x = \cos x \tan y. \quad z_x(\pi/6, \pi/4) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1$$

$$z(\pi/6, \pi/4) = \frac{1}{2} \cdot 1 \quad \text{No es recta}$$

$$\text{Intento: } z = z(\pi/6, \pi/4) + z_x(\pi/6, \pi/4)(x - \pi/6)$$

$$\bar{z} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \pi/6)$$

En la dirección de  $x$  no hay cambio en  $y$ .

$$x = t.$$

$$y = \pi/4$$

$$z = \sin t \tan(\pi/4)$$

$$\vec{r}(t)$$

$$\vec{r}'(t) = \langle 1, 0, \cos t \rangle$$

$$\vec{r}'(\pi/6) = \langle 1, 0, \sqrt{3}/2 \rangle.$$

$$L = \vec{r}(\pi/6) + \vec{r}'(\pi/6) t.$$

$$= \langle \pi/6, \pi/4, 1/2 \rangle + t \langle 1, 0, \sqrt{3}/2 \rangle.$$

$$x = \pi/6 + t.$$

$$y = \pi/4.$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} t.$$

Recta  
Tangente a  $z$

en la dirección de  $x$ .

En la dirección de  $y$ .  $x = \pi/6$  use  $t = \pi/4$ .

$$x = \pi/6$$

$$y = t$$

$$z = \sin \frac{\pi}{6} \tan t.$$

$$\vec{r}'(t) = \langle 0, 1, \frac{1}{2} \sec^2 t \rangle.$$

$$\vec{r}'(\pi/4) = \langle 0, 1, \frac{1}{2} \underbrace{(\sqrt{2})^2}_{1} \rangle$$

$$L = \vec{r}(\pi/4) + \vec{r}'(\pi/4) t$$

$$\vec{r}(\pi/4) = \langle \pi/6, \pi/4, 1/2 \rangle.$$

$$x = \pi/6$$

$$y = \pi/4 + t.$$

$$z = \frac{1}{2} + t$$

Ec. del Plano Tangente ó Aproximación Lineal

$$L(x, y) = z(\pi/6, \pi/4) + z_x(\pi/6)(x - \pi/6) + z_y(\pi/4)(y - \pi/4)$$

$$z(x, y) = \sin x \tan y.$$

$$z(\pi/6, \pi/4) = \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$z_x = \cos x \tan y \quad z_x(\pi/6, \pi/4) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1$$

$$z_y = \sin x \sec^2 y \quad z_y(\pi/6, \pi/4) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Plano Tangente:  $L(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \pi/6) + 1 \cdot (y - \pi/4)$

$$x = 2$$

$$t = 3 \quad y = t$$

$$z = -1 - 2t^2.$$

$$r(3) = (2, 3, -19)$$

$$r'(t) = (0, 1, -4t).$$

$$r'(3) = (0, 1, -12).$$

$$x = 2$$

$$y = 3 + t.$$

$$z = -19 - 12t.$$

# Capítulo 17

Derivadas direccionales y gradiente

## 14.5 Derivadas Direccionales y Gradiente. p. 114.

El Gradiente de  $f$ , denotado como  $Df$  ó  $\text{grad } f$ , es la función vectorial

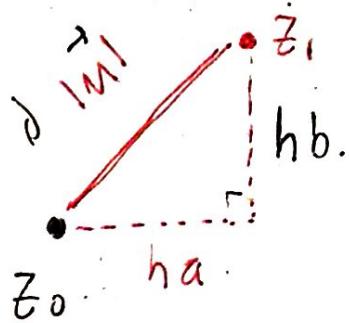
$$Df = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$$

Función de tres variables  $f(x, y, z)$ .

$$Df = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle$$

$f$  es una función escalar.  $Df$  es una función vectorial.

Derivadas Parciales en la dirección de  $x$  ó en la dirección de  $y$ .



La razón de cambio promedio entre  $z_1$  y  $z_0$  si uno se desplaza en la dirección del vector  $\vec{u}$  el cual es unitario.

$$\left( \frac{\Delta z}{\Delta d} \right) = \frac{z_1 - z_0}{h\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{z_1 - z_0}{h}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{a^2+b^2} = 1 \quad z_1 = f(x_0+ha, y_0+hb) \\ z_0 = f(x_0, y_0).$$

2.

Derivada Direccional: es la razón de cambio instantánea ( $h \rightarrow 0$ ) de  $z$  en la dirección de  $\vec{u}$  unitario en el punto  $(x_0, y_0)$

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

$z - D: w_0 = f(x_0, y_0, z_0)$

$$w_1 = f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc)$$

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{u}) - f(\vec{x}_0)}{h}$$

$$\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{u} = (a, b, c).$$

¿Cómo se calcula  $D_u f(\vec{x}_0)$ ?

$u = (1, 0, 0)$ .  
en la dirección  
de  $x$ .

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}.$$

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$u = (0, 1, 0).$$

en la dirección de  $y$ .

$$D_y f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$D_z f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}$$

en la dirección de  $z$ .

Sea  $g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc)$

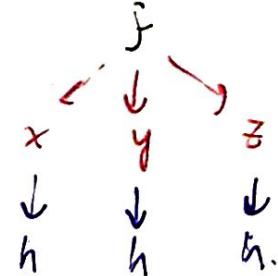
$$g'(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{u}) - f(\vec{x}_0)}{h} = D_{\vec{u}} f(x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{u} = \langle a, b, c \rangle \quad |\vec{u}| = 1$$

$$g(h) = f(x, y, z) \quad x = x_0 + ha \quad z = z_0 + hc$$

$$y = y_0 + hb$$

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial y} b + \frac{\partial f}{\partial z} c.$$



$$Df = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle \quad \vec{u} = \langle a, b, c \rangle$$

Teorema: Si  $f$  es diferenciable en  $x, y, z$ , la derivada direccional de  $f$  en el punto  $\vec{x}_0$  en la dirección del vector unitario  $\vec{u}$  es:

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) = Df \cdot \vec{u}$$

producto punto entre  
el gradiente &  $\vec{u}$

Ejercicio 1: Encuentre la derivada direccional de  $f(x, y) = e^x \sin y$  en el punto  $(0, \pi/3)$  en la dirección de  $\vec{v} = \langle -6, 8 \rangle$ .

$$D_{\vec{u}} f(0, \pi/3) = Df(0, \pi/3) \cdot \vec{u}$$

$\vec{v}$  no es unitario  $|\vec{v}| = \sqrt{36+64} = 10$ .

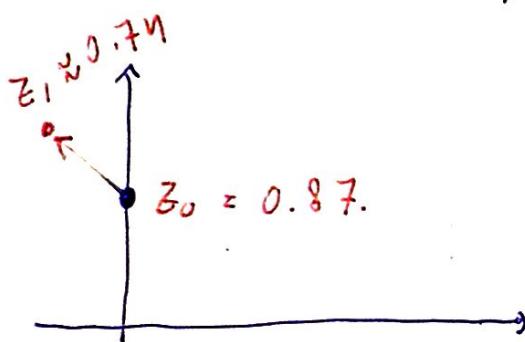
$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \boxed{\frac{1}{10} \langle -6, 8 \rangle}$$

$Df = \langle f_x, f_y \rangle = \langle e^x \sin y, e^x \cos y \rangle$

$Df(0, \pi/3) = \boxed{\langle \sqrt{3}/2, 1/2 \rangle}$

$$D\vec{u} f(0, \pi/3) = \frac{1}{10} \langle -6, 8 \rangle \cdot \langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \rangle \\ = \frac{1}{10} \left( -3\sqrt{3} + 4 \right) \approx -0.119615.$$

Interpretación  $f(0, \pi/3) = e^0 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$ .



Resumen  $Df = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle$

Derivada Direccional  $D_u f(\vec{x}_0) = Df \cdot \vec{u}$

Ejercicio 2: Considere la función  $g(r, t) = r^2 \tan\left(\frac{\pi t}{4}\right)$ .

a. Encuentre el gradiente de  $g(r, t)$  en el punto  $(2, 1)$ .

$$Dg = \langle g_r, g_t \rangle = \left\langle 2r \tan\left(\frac{\pi t}{4}\right), \frac{\pi r^2}{4} \sec^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) \right\rangle$$

$$Dg(2, 1) = \left\langle 4 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right), \pi \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\rangle \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Dg(2, 1) = \langle 4, 2\pi \rangle. \quad \sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

b. Encuentre la razón de cambio instantánea de  $g$  en el punto  $(2, 1)$  en la dirección de  $v = \langle -1, 2 \rangle$ .

$$D_u g(2, 1) = Dg(2, 1) \cdot \vec{U}$$

Falta un vector unitario:  $\vec{U} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle -1, 2 \rangle$ .

$$D_u g(2, 1) = \frac{\langle 4, 2\pi \rangle \cdot \langle -1, 2 \rangle}{\sqrt{5}} = \frac{-4 + 4\pi}{\sqrt{5}} \approx 2.$$

Ejercicio 3: Considere la función  $f(x, y, z) = x^3 y^2 z$ . 5.

a. Encuentre el gradiente de  $f$  en el punto  $(1, 2, 4)$ .

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \langle 3x^2 y^2 z, 2x^3 y z, x^3 y^2 \rangle.$$

$$\nabla f(1, 2, 4) = \langle 3 \cdot 4 \cdot 4, 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4, 1 \cdot 4 \rangle.$$

$$\nabla f(1, 2, 4) = \langle 48, 16, 4 \rangle.$$

b. Encuentre  $D_{\vec{u}} f(x, y, z)$  en  $(1, 2, 4)$  en la dirección de  $\vec{u} = \langle \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \rangle$ .

este vector

$$|\vec{u}| = \frac{1}{3} |\langle 1, -2, 2 \rangle| = \frac{1}{3} \sqrt{1+4+4} = 1 \quad \text{ya es unitario.}$$

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(1, 2, 4) &= \nabla f(1, 2, 4) \cdot \vec{u} \\ &= \frac{48}{3} - \frac{32}{3} + \frac{8}{3} = 16 - \underbrace{\frac{24}{3}}_8 = 18 \end{aligned}$$

La razón instantánea de cambio es de 8 unidades.

Interpretación del gradiente, unitario.

$$D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u} = |\nabla f| |\vec{u}| \cos \theta.$$

$$\underline{D_{\vec{u}} f} = |\nabla f| \cos \theta. \quad \theta \text{ es el ángulo entre } \nabla f \text{ y } \vec{u}.$$

Valor Máximo de  $D_{\vec{u}} f^{(130)}$  cuando  $\theta = 0$ .  $(D_{\vec{u}} f)_{\max} = |\nabla f|$

El valor máximo de la derivada direccional,  
o máxima razón de cambio, es  $|Df|$  y ocurre  
en la dirección  $u = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ . *Steepest Ascent.*

Cuando  $\theta = \pi$   $(D_{\vec{u}} f) = -|Df|$ .  
<sub>min.</sub>

Valor mínimo de la derivada direccional  
es  $-|Df|$  y ocurre en la dirección  $-\nabla f$ .  
*Steepest Descent.*

Ejercicio 4: Encuentre la máxima razón de cambio  
de  $f(x, y) = (y^2 + 1)e^x$  en el punto  $(0, 2)$  y la  
dirección en que ocurre este cambio,

Valor Máximo  $|Df|$  Dirección  $Df$ .

$$\nabla f = \langle e^x(y^2 + 1), 2ye^x \rangle.$$

$$\nabla f(0, 2) = \langle 4+1, 2 \cdot 2 \cdot 1 \rangle = \underline{\underline{\langle 5, 4 \rangle}}$$

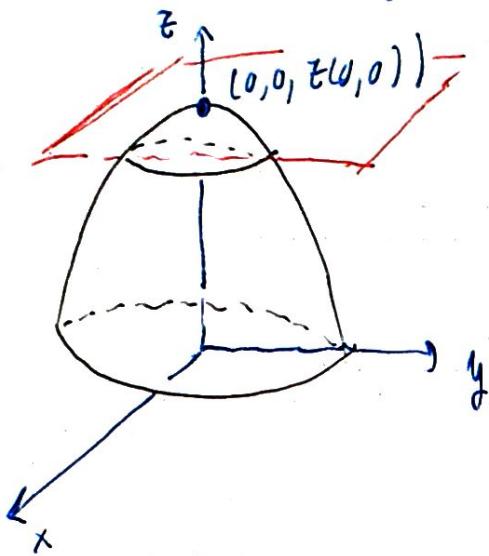
Valor Máximo Razón Cambio  $|Df(0, 2)| = \sqrt{25 + 16}$   
 $\approx 6.40$ .

Dirección Valor Máximo  $\nabla f = \langle 5, 4 \rangle$ .

# Capítulo 18

Máximos y mínimos & problemas de aplicación, optimización

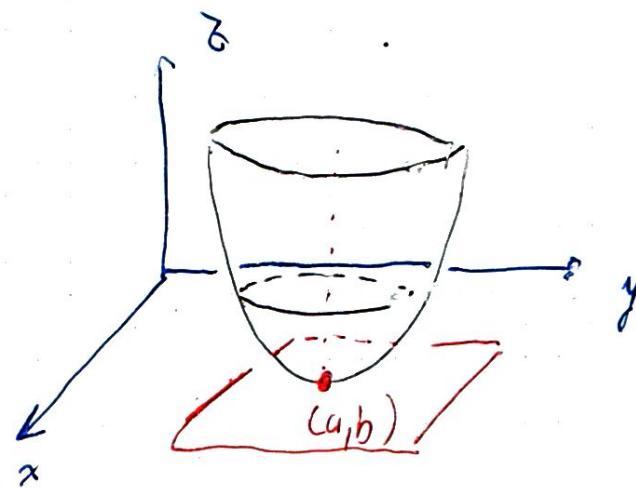
## 14.7 Máximos y mínimos.



Máximo relativo

$$f(a_1, b) > f(x, y)$$

$(x, y)$  cerca de  $(a_1, b)$

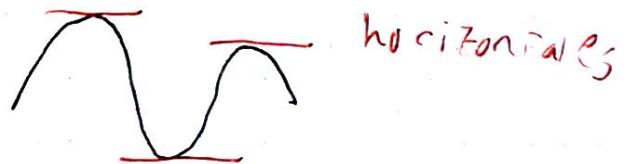


mínimo relativo.

$$f(a_1, b) < f(x, y)$$

$(x, y)$  cerca de  $(a_1, b)$

### Funciones Una variable



Números críticos:  $f'(c) = 0$  ó  $f'(c)$  no existe

2da Derivada:  $f''(c) < 0 \wedge$  Máximo Relativo en  $x=c$ .

$f''(c) > 0 \wedge$  Mínimo relativo en  $x=c$

$f''(c) = 0$  Inconcluso.

### Funciones Dos variables.

Puntos críticos.  $f_x(a, b) = 0 \wedge f_y(a, b) = 0$ .

No es suficiente

$f_{xx} < 0 \wedge f_{yy} < 0$  Max Relativo.

$f_{xx} > 0 \wedge f_{yy} > 0$  min relativo.

2. Prueba 2da Derivada:  $(a, b)$  es un punto crítico.  
 y  $f(x, y)$  tiene segundas derivadas continuas.

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Max Relativo:  $D(a, b) > 0$  &  $f_{xx} < 0$

Mínimo Relativo:  $D(a, b) > 0$  &  $f_{xx} > 0$ .

Punto de Silla:  $D(a, b) < 0$ . ni max ni min.

Inconcluso:  $D(a, b) = 0$   $\cup$   $\cap$

Ejemplo: Considere la función  $z = x^2 - y^2$ .

Puntos Críticos  $\begin{array}{l} z_x = 2x = 0 \\ z_y = -2y = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}$

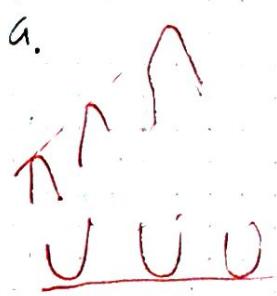
Único punto crítico  $(0, 0)$ .

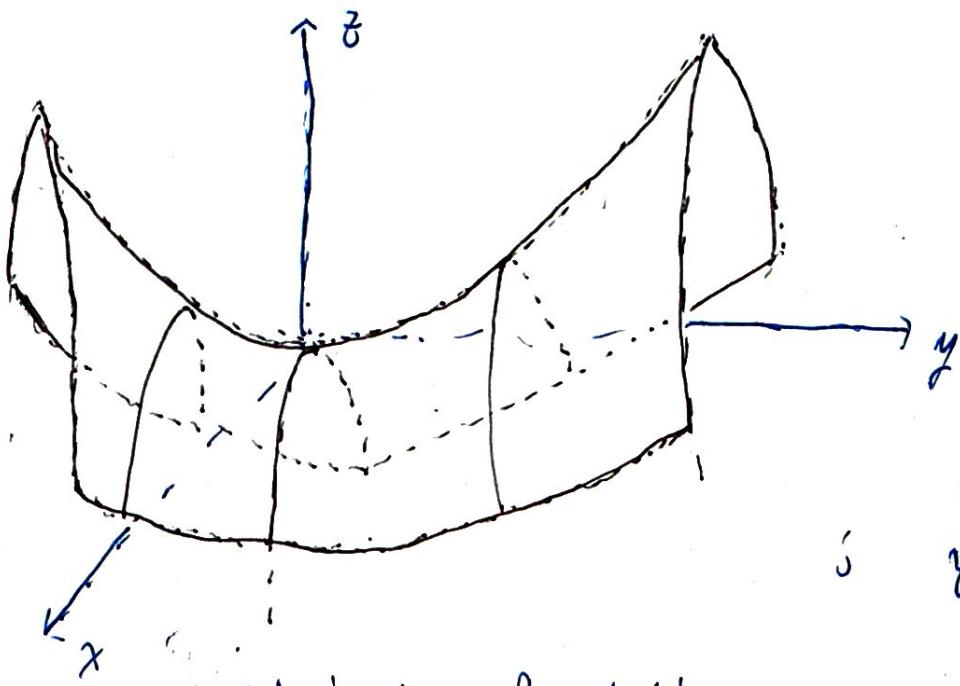
Prueba 2da Derivada  $D(x, y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$

El punto  $(0, 0)$  es un punto de silla.

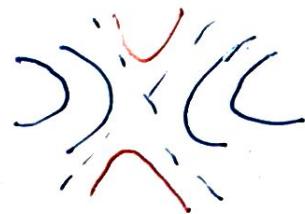
$$z(0, y) = -y^2 \quad \text{hay máximos}$$

$$z(x, 0) = x^2 \quad \text{hay mínimos}$$





Curvas de nivel  
son hiperbolas



ortes verticales  $x=a$   
 $y=b$  son parabolas.

### Hiperboloide Parabólico

Ejercicio 1: Encuentre los maxs y minimos relativos de las sigs. funciones.

a.  $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 6x + 16y.$

$$f_x = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad \text{único pto critico}$$

$$f_y = 8y + 16 = 0 \Rightarrow y = -2. \quad (3, -2).$$

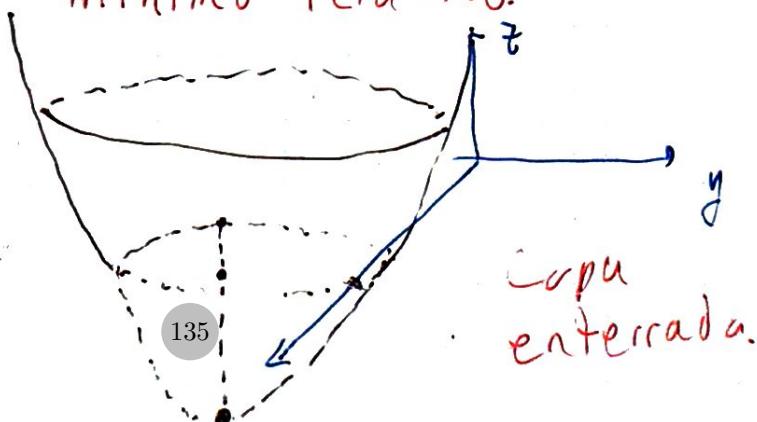
$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 16 > 0.$$

$$f_{xx} = 2 > 0.$$

minimo relativo.

Valor min relativo

$$f(3, -2) = -25$$



copa enterrada.

b.  $g(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 + 100$ .

$$\begin{aligned} g_x &= \underline{4x} + y = 0 \Rightarrow y = -4x \Rightarrow y = 0 \\ g_y &= \underline{x} + 2y = 0 \Rightarrow x - 8x = -9x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

único punto crítico.

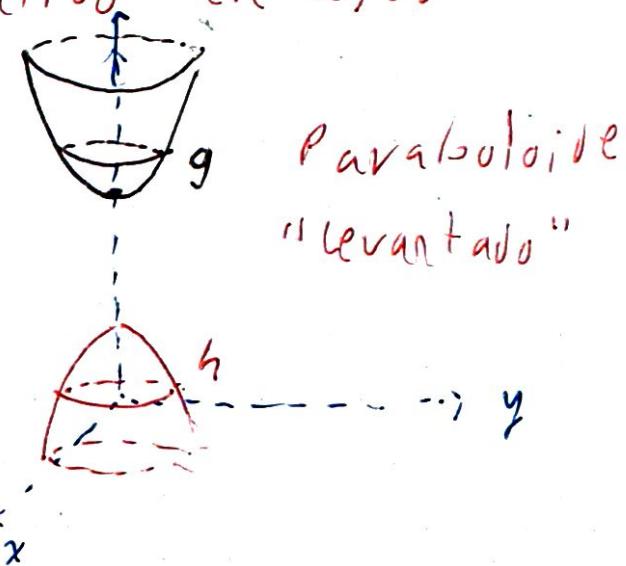
$$D(x, y) = \begin{vmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7 > 0$$

$$g_{xx} = 4 > 0 \quad \text{mínimo relativo en } (0, 0)$$

valor mínimo relativo

$$g(0, 0) = 100$$

Rango  $[100, 00]$



c.  $h(x, y) = 30 - x^2 - 2y^2 + 4x - 12y$ .

$$h_x = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4/-2 = 2$$

$$h_y = -4y - 12 = 0 \Rightarrow y = 12/-4 = -3$$

único número crítico. es  $(2, -3)$

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 > 0 \quad h_{xx} = -2 < 0$$

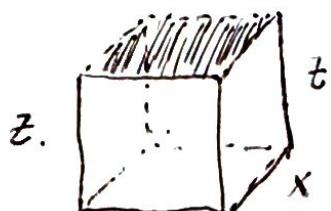
Máximo relativo en  $(2, -3)$ . es 38. Valor Max relati

## 5.

### Problemas Aplicados.

Ejercicio 2: Una caja de cartón sin tapa debe tener un volumen de  $32,000 \text{ cm}^3$ .

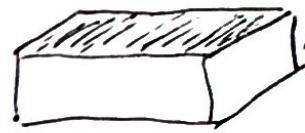
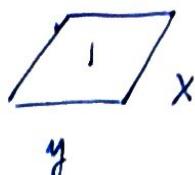
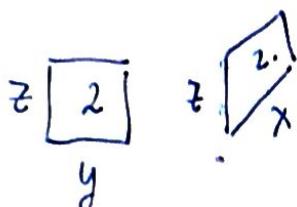
Calcule las dimensiones  $x, y, z$  que minimicen la cantidad de cartón utilizado. No realice la prueba 2da Derivada.



$$\text{Volumen: } xyz = 32,000$$

$$\text{Área: } A = 2zy + 2zx + xy. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \min \end{array} \right.$$

5 paneles



óptima.

$$\min \quad A = 2zy + 2zx + xy. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{3 variables.} \end{array} \right.$$

$$\text{s.a.} \quad z = \frac{32,000}{xy}. \quad \left. \begin{array}{l} \\ x, y, z \geq 0. \end{array} \right.$$

$$A(x, y) = \frac{64000}{x} + \frac{64,000}{y} + xy.$$

$$Ax = 0 : -\frac{64000}{x^2} + y = 0 \Rightarrow y = 64000x^{-2}.$$

$$Ay = 0 : -\frac{64,000}{y^2} + x = 0 \quad y^2 = [64,000]^{-2}x^{-4}.$$

sustituya en Ay

$$\frac{-64,000}{(64,000)^2 x^{-4}} + x = 0$$

$$-\frac{x^4}{64000} = -x$$

$$\frac{x^4}{x} = 64 \cdot 1000$$

$$x^3 = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{1000} = 4 \cdot 10 = 40 \Rightarrow 4 \cdot 10$$

$$y = \frac{64,000}{x^2} = \frac{64 \cdot 1000}{16 \cdot 100} = 4 \cdot 10 = 40.$$

$$z = \frac{32,000}{40 \cdot 40} = \frac{32,000}{1600} = 20$$

Dimensiones que minimizan el área  $x = y = 40, z = 20$

### Ejercicio 3: Discriminación de Precios.

Demanda  $p_1 = 104 - q_1$ . producción  $q_1, q_2$ .

$$p_2 = 84 - q_2.$$

Costos  $C = 600 + 4q_1 + 4q_2.$

Encuentre los precios y las cantidades  $q_1$  &  $q_2$  a la que deben venderse los productos para maximizar la utilidad. = ingresos - costos.

$$\text{Utilidad: } U(q_1, q_2) = p_1 q_1 + p_2 q_2 - 600 - 4q_1 - 4q_2$$

$$U(q_1, q_2) = \underbrace{104q_1 - q_1^2}_{138} + \underbrace{84q_2 - q_2^2}_{138} - 600 - \underbrace{4q_1}_{138} - \underbrace{4q_2}_{138}$$

$$U(q_1, q_2) = -q_1^2 - q_2^2 + 100q_1 + 80q_2 - 600$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = -2q_1 + 100 = 0 \Rightarrow q_1 = 50$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = -2q_2 + 80 = 0 \Rightarrow q_2 = 40.$$

Único punto crítico ( $q_1 = 50, q_2 = 40$ )

$p_1 = 54, p_2 = 44$  } discriminación

Utilidad Máxima:

$$U(50, 40) = 54 * 50 + 44 * 40 = 600 - 360.$$

$$2,700 + 1760 - 960 = 3,500.$$

Utilidad máxima.

Prueba  
2da Derivada :  $D(X, y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$

$$D_{q_1 q_1} = -2 < 0 \quad \text{Máximo Relativo}$$

# Capítulo 19

## Multiplicadores LaGrange

## 14.8 Multiplicadores de Lagrange.

Una función de dos o tres variables puede estar sujeta a una restricción  $x_1y + x_2hy = 100$ .

$$\text{Máximo } z = f(x, y) \quad \text{s.t. } g(x, y) = 0.$$

Si no es posible resolver para  $y$  ó  $x$  en la restricción, el problema no se puede reducir a una sola variable.

Se introduce una nueva variable

Multiplicador de Lagrange.  $\lambda$  "lambda" para incorporar la restricción en la función objetivo.

$$c - g(x, y) = 0$$

$$F(x, y, \lambda) = \underbrace{f(x, y)}_{\text{objetivo}} + \lambda \underbrace{(c - g(x, y))}_{\text{restricción}}$$

Extremos relativos  $F_x = F_y = F_\lambda = 0$ .

$$F_x = f_x + \lambda g_x = 0.$$

$$F_y = f_y - \lambda g_y = 0$$

$$F_\lambda = c - g(x, y) = 0$$

$$\boxed{\nabla f = \lambda \nabla g.}$$

$$g(x, y) = c.$$

condiciones necesarias para un extremo relativo

Problema  $w = f(x, y, z)$  sujeta a  $g(x, y, z) = C$ .

Lagrangiano  $F(x, y, z, \lambda) = \underbrace{f(x, y, z)}_{\text{objetivo}} + \lambda \underbrace{(C - g(x, y, z))}_{\text{restricción}}$

$$F_x = F_y = F_z = F_\lambda = 0. \quad \lambda \text{ "variable artificial"}$$

condiciones  $\nabla F = \lambda \nabla g \quad \& \quad g(x, y, z) = C$ .

Ejercicio 1: Encuentre los extremos relativos de  $w = x^2 + y^2 + z^2$  sujeta a  $2x + y - z = 18$ . } restricción.

Método 1: Resuelva para  $z$   $z = 2x + y - 18$ .

Sustituya en  $w$  para obtener una función de 2 variables.

$$w = x^2 + y^2 + (2x + y - 18)^2. \quad \nabla w = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} w_x &= 2x + 4(2x + y - 18) = 10x + \cancel{4y} - 72 = 0. & R_1 \\ w_y &= 2y + 2(2x + y - 18) = 4x + \cancel{4y} - 36 = 0. & R_2 \end{aligned}$$

$$R_1 - R_2: 6x - 36 = 0 \Rightarrow x = 6.$$

$$R_2: 4y = 36 - 4x = 12 \Rightarrow y = 3.$$

¿Cómo se encuentra  $z$ ?  $z = 2(6) + 3 - 18 = -3$ .

Punto crítico:  $(6, 3, -3)$ .

Prueba  
2da

D-derivada

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} w_{xx} & w_{xy} \\ w_{yx} & w_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 24 > 0$$

$$w_{xx} = 10 > 0. \quad \text{mínimo relativo.}$$

## Método 2: Multiplicadores de Lagrange

Lagrangiano  $F = w + \lambda (\overset{\circ}{c} - g)$

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(18 - 2x - y + z)$$

$$F_x = 2x - 2\lambda = 0 \Rightarrow x = \lambda = 6 \quad \checkmark$$

$$F_y = 2y - \lambda = 0 \Rightarrow y = \lambda/2 = 3 \quad \checkmark$$

$$F_z = 2z + \lambda = 0 \Rightarrow z = -\lambda/2 = -3 \quad \checkmark$$

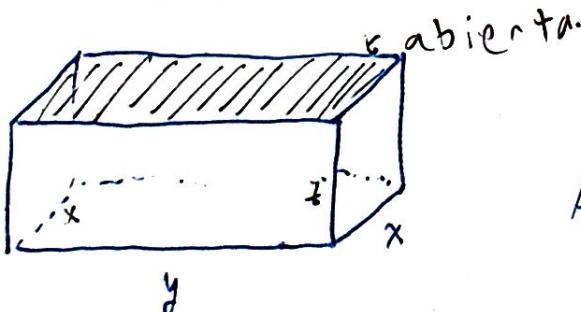
$$F_\lambda = 18 - 2x - y + z = 0 \Rightarrow 2x + y - z = 18$$

Sustituya  $x, y$  &  $z$  en la restricción.

$$2\lambda + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = 3\lambda = 18 \Rightarrow \lambda = 6.$$

Punto critico es  $(6, 3, -3)$   $\lambda = 6$ .

Ejercicio 2: Una caja sin tapa tiene un volumen de  $32,000 \text{ cm}^3$ . Encuentre las dimensiones de la caja que minimizan su área superficial.



$$\text{Volumen } V = xyz = 32,000.$$

$$\text{Área Sup } A = 2zy + 2zx + yx$$

objetivo

$$F = A + \lambda(c - V) = 2zy + 2zx + yx + \lambda(32,000 - xy^2)$$

No LINEAL.

$$\begin{aligned} F_x &= 2z + y - \lambda y z = 0 \\ F_y &= 2z + x - \lambda x z = 0 \\ F_z &= 2y + 2x - \lambda x y = 0. \\ F_\lambda &= 32,000 - xyz = 0. \end{aligned} \quad \left\{ \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda y z = y + 2z \quad (1) \\ \lambda x z = x + 2z \quad (2) \\ \lambda x y = 2x + 2y. \quad (3) \\ xyz = 32,000 \quad (4). \end{array} \right.$$

$$\frac{(1)}{(2)} \quad \frac{y}{x} = \frac{y+2z}{x+2z} \quad \begin{aligned} y/x + 2zy &= xy + 2zx \\ y &= \frac{2zx}{2z} = x \end{aligned}$$

$x = y$

$$\frac{(1)}{(3)} \quad \frac{z}{x} = \frac{y+2z}{2x+2y} \quad \begin{aligned} 2xz + 2yz &= xy + 2zx \\ z &= \frac{xy}{2y} = \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

$y = x$ ,  $z = x/2$ . se sustituyen en la restricción

$$x \times \frac{x}{2} = 32000 \quad x^3 = 64 \cdot 1000 \quad x = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{1000} = 4 \cdot 10 = 40.$$

Punto crítico:  $x = 40$ ,  $y = 40$ ,  $z = 20$ .

A'rea mínima:  $A = \checkmark \checkmark \checkmark \lambda y z + 2x z + x y$ .

$$A = 2(800) + 2(800) + 1,600.$$

$$A = 3(1600) = 1,800 \text{ cm}^2.$$

# Aplicaciones a la Economía y Negocios.

Ejercicio 4: Para suministrar una orden de 100 unidades de un producto, la empresa desea distribuir la producción entre sus dos plantas. La función de costo total es.

$$\underline{C(x,y)} = 0.1x^2 + 7x + 15y + 1000 \quad \begin{matrix} x & \text{planta 1} \\ y & \text{planta 2.} \end{matrix}$$

¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos?  $C(0,0) = 1,000$

Objetivo  $\min C(x,y)$  s.a.  $x+y=100$ .

Lagrange  $F = C + \lambda(100-x-y)$  L griego.

$$F = 0.1x^2 + 7x + 15y + 1000 + 100\lambda - \lambda x - \lambda y$$

$$F_x = 0.2x + 7 - \lambda = 0 \Rightarrow 0.2x = \lambda - 7 = 8 \Rightarrow x = 40$$

$$F_y = 15 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 15.$$

$$F_\lambda = 100 - x - y = 0. \Rightarrow y = 100 - x = 60$$

Punto crítico  $(40, 60)$   $\lambda = 15$ . 101 uds, CT aprox 15 uds.

Costo mínimo  $C(x,y) = 0.1(1600) + 280 + 900 + 1000$ .

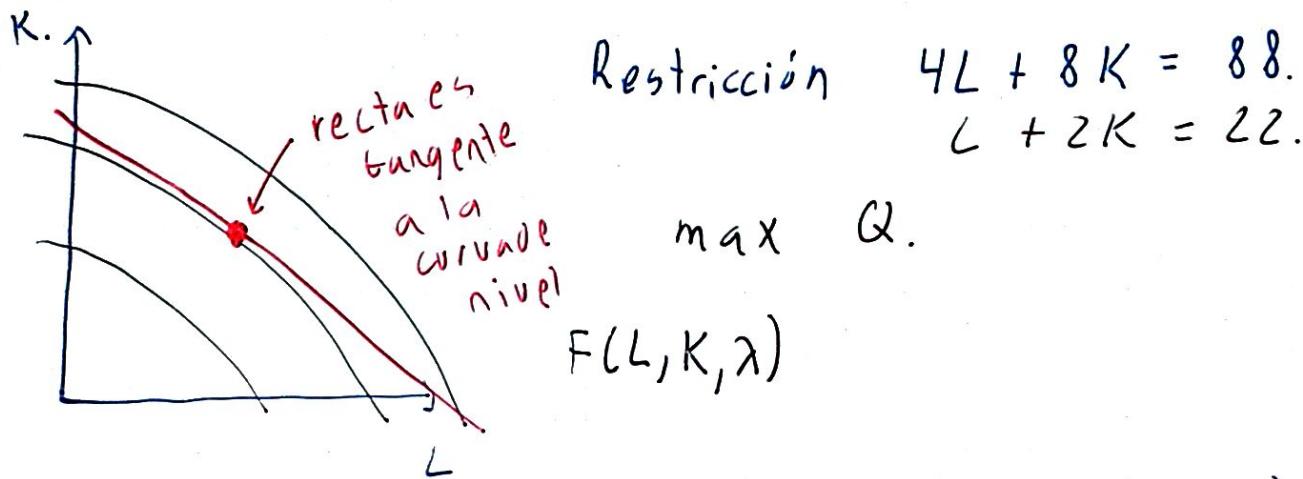
$$C(x,y) = 2,340.$$

Ejercicio 5: Una empresa tiene la función de producción

$$Q(L, K) = 12L + 20K - L^2 - 2K^2.$$

La empresa tiene un presupuesto de \$88 mil para contratar trabajadores y maquinaria. Cada trabajador y cada máquina tienen un costo de \$4 y \$8 mil, resp.

Encuentre la producción máxima.



$$F(L, K, \lambda) = 12L + 20K - L^2 - 2K^2 + \lambda(22 - L - 2K)$$

$$F_L = 12 - 2L - \lambda = 0 \Rightarrow 2L = 12 - \lambda \Rightarrow L = 6 - \lambda/2$$

$$F_K = 20 - 4K - 2\lambda = 0 \Rightarrow 4K = 20 - 2\lambda \Rightarrow K = 5 - \lambda/2.$$

$$F_\lambda = 22 - L - 2K = 0.$$

$$\begin{aligned} L + 2K &= 22 & 6 - \frac{\lambda}{2} + 10 - \lambda &= 22 \\ && -\frac{3\lambda}{2} &= 22 - 16 = 6 \end{aligned}$$

$$\lambda = -4: L = 6 + 4/2 = 8$$

$$K = 5 + 4/2 = 7$$

146

$$\begin{aligned} Q(8, 7) &= 96 + 140 - 64 - 98 \\ &= 74. \end{aligned}$$