# Clase -2020-01-28

David Gabriel Corzo Mcmath

2020-Jan-28 10:08:14

## 1. 12.5 Rectas y planos

- Ecuación de una recta
- Vector posición $\vec{r}_0 = \langle x_0, y, z_0 \rangle$
- Vector dirección $\vec{v}_0 = \langle a, b, c \rangle$
- Ecuación vectorial: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$ donde t es el parámetro.
- Ecuaciónes paramétricas:

$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0 + at$$
$$z = z_0 + at$$

- Resuelva para $t$ en las tres ecuaciones:

$$t = \frac{x - x_0}{a} t = \frac{y - y_0}{b} t = \frac{z - z_0}{c}$$

Estas son las ecuaciónes simétricas de la recta donde $a, b, c \neq 0$.

- Vector dirección $\vec{v} = \langle a, 0, c \rangle$ las ecuaciones en la recta cambian:

$$\underbrace{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}}_{\text{Vectorial}}$$
$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0$$
$$z = z_0 + ct$$

Entonces queda así:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}$$
$$\underbrace{y = y_0}_{\text{Simétrica}}$$

### 1.1. Ejercicio 3: Encuentre las ecs. simétricas de la recta que pasa por los puntos dados. Encuentre en qué punto la recta interseca al plano xz. pg.41

- P(2,8,-2) & Q(2,6,4)

$$\text{Vector posición } = \overrightarrow{OP} = R_0 = \langle 2,6,7\rangle$$
$$\text{Vector dirección } \overrightarrow{PQ} = \vec{V} = \langle 0,-2,6\rangle$$
$$\text{Ec. vectorial } = \vec{r} = \langle 2,8,-2\rangle + t\langle 0,-2,6\rangle$$
$$\text{Ecs. simétricas } = x = a, \frac{y-8}{-2} = \frac{z+2}{6}$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cual es la intersección con el plano xz?

$$\text{Use, y=0} x = 2, \frac{-8}{-2} = \frac{z+2}{6}$$
$$= 6 \cdot 4 = z + 2 \implies z = 22$$

- La intersección con el plano xz es el punto $(1, 0, 22)$:

$$\vec{r}_0 = \langle 4,6,10\rangle$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2,0,0\rangle$$
$$\text{Vectorial: } \vec{r} = \langle 4,6,10\rangle + t\langle 2,0,0\rangle$$
$$\text{Paramétricas: } x = 4+2t, y = 6, z = 10$$
$$\text{Simétricas: } t = \frac{x-4}{2}, y = 6, z = 10$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cual es el punto de instersección con el plano xz?

Use: y=0

Explicación: por la recta $y = 6$ siempre será 6, nunca podrá ser 0, no puede intersecar con el plano xz, **No hay**.

# 2. Rectas paralelas

Dos rectas $\vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + t\vec{v}$ & $\vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + t\vec{v}_2$ son paralelas si y solo si sus vectores de dirección $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son paralelas.

Figura 1:

Entones en el espacio tenemos 3 tipos de rectas:

1. Rectas paralelas
2. Rectas intersecan en un punto
3. Rectas Ublicuas (no paralelas & no intersecan)

## 2.1. Ejercicio 4: Determine si los siguientes pares de rectas son paralelas, oblicuas o se intersecan.

- $$\frac{x-2}{8}=\frac{y-3}{24}=\frac{z-2}{16},\frac{x-10}{-2}=\frac{y+15}{-6}=\frac{z+24}{-4}$$
  $$\vec{v}_1=\langle 8,24,16\rangle,\vec{v}_2=\langle -2,-6,-4\rangle$$
  $$\text{Entoces... },\left\langle\frac{8}{-2},\frac{24}{-6},\frac{16}{-4}\right\rangle$$
  $$\langle -4,-4,-4\rangle\,,\therefore\ \text{Son paralelas}$$

  El vector dirección está en el denominador.

- $$L_1: x=3-4t, y=6-2t, z=2+0t, t\in IR$$
  $$L_2: x=3+8s, y=-2s, z=8+2s, s\in IR$$
  $$\text{Utilize una variable parámetro para cada recta}$$
  $$v_1=\langle -4,-2,0\rangle\,,v_2=\langle 8,-2,2\rangle\ \text{No son paralelas}$$
  $$\text{Analice si las rectas se intersecan}$$
  $$x=x\to 5-4t=3+8s$$
  $$y=y\to 6-2t=-2s$$
  $$z=z\to 2=8+2s\to s=-3$$
  $$5-4=-22\to 4t=-27\to -4t=-27\to=\frac{27}{4}$$
  $$6-2t=6\to 2t=0\to t=0$$
  $$\therefore\ \text{Como no hay una } t \text{ única (no es posible } 0\neq\frac{27}{4}\text{), las dos rctas no se intersecan.}$$
  $$L_1\ \&\ L_2\ \text{Son oblicuas}$$
  $$\text{Eliminación Gausiana}$$
  $$\begin{array}{r}4t+8s=2\\2t+25=6\\0t+2s=-6\end{array}=\begin{vmatrix}4&8&2\\2&2&6\\0&2&-6\end{vmatrix}0,0,\ \text{número}\implies\ \text{No hay solución}$$

# 3. La ecuación de un plano

Previamente en 12.1 $ax+by+cz=0$. Para encontrar la ec. de un plano se necesita:

Figura 2:

1. Un punuto sobre el plano $P$: $\vec{r_0}=\overrightarrow{OP}$
2. Un vector normal u ortognoal al plano: $\hat{n}_0\ \langle a,b,c\rangle$

## 3.1. Derivación de la e. plano

$$P(x_0, y_0, z_0), Q(x_1, y_1, z_1) \text{ Son dos puntos sobre el plano}$$
$$\vec{r_0} == \overrightarrow{0P} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$$
$$\vec{r} = \overrightarrow{0Q} = \langle x, y, z \rangle$$

El vector $\vec{RP} = \vec{r} + r \vec{-} 0$ está sobre el plano, por lo que tiene que ser ortogonal a $\hat{n}$.

$$\hat{n} \perp \vec{r} - \vec{r_0} \rightarrow \quad \underbrace{\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0})}_{\text{Ec. vectorial de un plano}}$$
$$\text{Se puede reescribir como:}$$
$$\underbrace{\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x + x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle + c(z - z_0) = 0}_{\text{Ecuación escalar de un plano}}$$
$$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_{0}$$

Para encontrar la ec. de un plano se necesita 3 puntos P,Q,R: **hay infinitas respuestas equivalentes** $\hat{n} = \vec{}\times\vec{}.$

$$\vec{r_0} = \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{0Q}, \overrightarrow{0R}$$
$$\underbrace{\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}}_{\text{Tienen que empezar en el mismo punto}}$$
$$\text{Hat infinitas respuestas:}$$
$$\hat{n} = \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ}$$

## 3.2. Ejercicio 1: pg45 Encuentre la ec. del plano que pasa por los 3 puntos dados.

1. $P(3, -1, 3), Q(8, 2, 4), R(1, 2, 5)$

$$\text{Ecuación del plano : }, \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$
$$\text{Ecuaciónn de la recta : }, \vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$$
$$\vec{r_0} = \langle 8, 2, 4 \rangle$$

Encuentre dos vectores que están sobre el plano y que comiencen en el mismo punto.

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle 5, 3, 1 \rangle, \vec{v} = \overrightarrow{PR} = \langle -2, 3, 2 \rangle$$
$$\text{¡¡ } \hat{n} \text{ es ortogonal a ambos vectores !!}$$
$$\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 12\hat{j} - +21\hat{k}$$
$$\text{Ec. Plano }, \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$
$$\text{Ec. Vectorial }, \langle 3, -12, 21 \rangle \cdot \langle x - 8, y - 2, z - 4 \rangle = 0$$
$$\text{Escalar }, 3(x - 8)-$$

2. P(0,0,0), Q(1,0,2), y R(0,2,3)

$$\text{Vector posición: } \vec{r_0} = \langle 0,0,0\rangle$$
$$\text{dos vectoes sobre el plano: } \begin{array}{l} \vec{PQ} = \langle 1,0,2\rangle \\ \vec{PR} = \langle 0,2,3\rangle \end{array}$$
$$\text{Vector normal: } \hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$$
$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \text{terminar} & & \end{vmatrix}$$

3. Ecuación del plano:

$$-4x - 3y + 2z = 0$$

## 4. Rectas paralelas $v_1$ y $v_2$ son paralelos

Dos planos $\hat{n_1} \cdot (\vec{r} - \vec{r_1}) = 0$ y $\hat{n_2} \cdot (\vec{r} - \vec{r_2}) = 0$ son paralelas sí y sólo si $\hat{n_1}$ y $\hat{n_2}$ son paralelas. En caso que no sean paralelas, se puede encontrar el ángulos de intersección entre dos planos.