d. ¿Cuál es la probabilidad de 130 o más éxitos?
e. ¿Cuál es la ventaja de usar la distribución de probabilidad normal para aproximar las probabilidades binomiales? Use el inciso d para explicar las ventajas.

Aplicaciones

Auto examen

28. El presidente Bush propuso eliminar los impuestos sobre los dividendos que pagan los accionistas debido a que esto resulta en un doble pago de impuestos. Las ganancias que se usan para pagar los dividendos ya han sido grabadas. En un sondeo sobre este tema se encontró que 47% de los estadounidenses estaban a favor de esta propuesta. La posición de los partidos políticos era 64% de los republicanos y 29% de los demócratas a favor de la propuesta (*Investor´s Business Daily*, 13 de enero de 2003). Suponga que 250 estadounidenses se reúnen para una conferencia acerca de la propuesta.
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos la mitad del grupo esté a favor de la propuesta?
    b. Más tarde se entera de que en el grupo hay 150 republicanos y 100 demócratas. Ahora, ¿cuál es su estimación del número esperado a favor de la propuesta?
    c. Ahora que conoce la composición del grupo, ¿cree que un conferencista a favor de la propuesta sea mejor recibido que uno que esté en contra de la propuesta?
29. La tasa de desempleo es de 5.8% (Bureau of Labor Statistics, www.bls.gov, 3 de abril de 2003). Suponga que se seleccionan aleatoriamente 100 personas que se pueden emplear.
    a. ¿Cuál es el número esperado de quienes están desempleados?
    b. ¿Cuál es la varianza y la desviación estándar del número de los que están desempleados?
    c. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente seis estén desempleados?
    d. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos cuatro estén desempleados?
30. Cuando usted firma un contrato para una tarjeta de crédito, ¿lee cuidadosamente el contrato? En un sondeo FindLaw.com le preguntó a las personas "¿Qué tan cuidadosamente lee usted un contrato para una tarjeta de crédito?" Los hallazgos fueron que 44% leen cada palabra, 33% leen lo suficiente para entender el contrato, 11% sólo le echa una mirada y 4% no lo leen en absoluto.
    a. En una muestra de 500 personas ¿cuántas esperaría usted que respondan que leen cada palabra de un contrato para una tarjeta de crédito?
    b. En una muestra de 500 personas ¿cuál es la probabilidad de que 200 o menos digan que leen cada palabra de un contrato para una tarjeta de crédito?
    c. En una muestra de 500 personas ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 15 digan que no leen en absoluto un contrato para una tarjeta de crédito?
31. El Myrtle Beach hotel tiene 120 habitaciones. En los meses de primavera su ocupación es de 75%.
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos la mitad de las habitaciones estén ocupadas en un día dado?
    b. ¿De que 100 o más de las habitaciones estén ocupadas en un día dado?
    c. ¿De que 80 o menos de las habitaciones estén ocupadas en un día dado?

6.4 Distribución de probabilidad exponencial

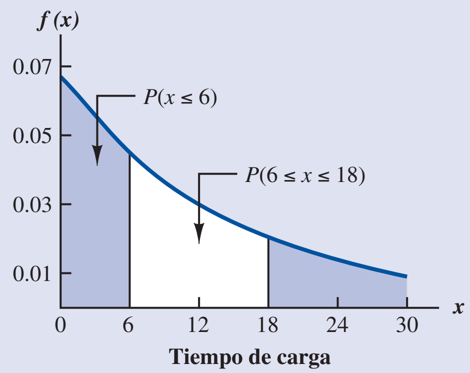
La **distribución de probabilidad exponencial** se aplica a variables como las llegadas de automóviles a un lavado de coches, los tiempos requeridos para cargar un camión, las distancias entre dos averías en una carretera, etc. A continuación se da la función de densidad de probabilidad exponencial.

FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD EXPONENCIAL

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \qquad \text{para } x \geq 0, \mu > 0 \tag{6.4}$$

donde μ = valor esperado o media

FIGURA 6.10 DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL PARA EL EJEMPLO DEL ÁREA DE CARGA



Como ejemplo de la distribución exponencial, suponga que x representa el tiempo que se necesita para cargar un camión en un área de carga, y que este tiempo de carga sigue una distribución exponencial. Si el tiempo de carga medio o promedio es 15 minutos ($\mu = 15$), la función de densidad de probabilidad apropiada para x es

$$f(x) = \frac{1}{15} e^{-x/15}$$

La figura 6.10 es la gráfica de esta función de densidad de probabilidad.

Cálculo de probabilidades en la distribución exponencial

En aplicaciones de colas de espera, la distribución exponencial suele emplearse para tiempos de servicio.

Como ocurre con cualquier distribución de probabilidad continua, el área bajo la curva correspondiendo a un intervalo da la probabilidad de que la variable aleatoria tome algún valor en ese intervalo. En el ejemplo del área de carga, la probabilidad de que cargar un camión necesite 6 minutos o menos $P\ (x \leq 6)$ está definida como el área bajo la curva de la figura 10.6 que va desde $x = 0$ hasta $x = 6$. De manera similar, la probabilidad de que el tiempo de carga sean 18 minutos o menos $P\ (x \leq 18)$ es el área bajo la curva desde $x = 0$ hasta $x = 18$. Observe también que la probabilidad de que el tiempo de carga esté entre 6 y 18 minutos $P\ (6 \leq x \leq 18)$ corresponde al área bajo la curva desde $x = 6$ hasta $x = 18$.

Para calcular probabilidades exponenciales como las que se acaban de describir, se usa la fórmula siguiente. Esta fórmula aporta la probabilidad acumulada de obtener un valor de la variable aleatoria exponencial que sea menor o igual que algún valor específico denotado por x_0.

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL: PROBABILIDADES ACUMULADAS

$$P(x \leq x_0) = 1 - e^{-x_0/\mu} \tag{6.5}$$

En el ejemplo del área de carga, x = tiempo de carga en minutos y $\mu = 15$ minutos. A partir de la ecuación (6.5)

$$P(x \leq x_0) = 1 - e^{-x_0/15}$$

Por tanto, la probabilidad de que cargar un camión requiera 6 minutos o menos es

$$P(x \leq 6) = 1 - e^{-6/15} = 0.3297$$

Con la ecuación (6.5) se calcula la probabilidad de que cargar un camión requiera 18 minutos o menos.

$$P(x \leq 18) = 1 - e^{-18/15} = 0.6988$$

De manera que la probabilidad de que para cargar un camión se necesiten entre 6 y 18 minutos es igual a $0.6988 - 0.3297 = 0.3691$. Probabilidades para cualquier otro intervalo se calculan de manera semejante.

La distribución exponencial tiene la propiedad de que la media y la desviación estándar son iguales.

En el ejemplo anterior el tiempo medio para cargar un camión fue $\mu = 15$ minutos. La distribución exponencial tiene la propiedad de que la media de la distribución y la desviación estándar de la distribución son iguales. Por tanto, la desviación estándar del tiempo que se necesita para cargar un camión es $\sigma = 15$ minutos y la varianza es $\sigma^2 = (15)^2 = 225$.

Relación entre la distribución de Poisson y la exponencial

En la sección 5.5 se presentó la distribución de probabilidad de Poisson como una distribución de probabilidad discreta que se usa para examinar el número de ocurrencias de un evento en un determinado intervalo de tiempo o de espacio. Recuerde que la función de probabilidad de Poisson es

$$f(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

donde

$$\mu = \text{valor esperado o número medio de ocurrencias en un determinado intervalo}$$

Si las llegadas siguen una distribución de Poisson, el tiempo entre las llegadas debe seguir una distribución exponencial.

La distribución de probabilidad exponencial continua está relacionada con la distribución discreta de Poisson. Si la distribución de Poisson da una descripción del número de ocurrencias por intervalo, la distribución exponencial aporta una descripción de la longitud de los intervalos entre las ocurrencias.

Para ilustrar esta relación, suponga que el número de automóviles que llegan a un lavado de coches durante una hora se describe mediante la distribución de probabilidad de Poisson, con una media de 10 automóviles por hora. La función de probabilidad de Poisson que da la probabilidad de x llegadas por hora es

$$f(x) = \frac{10^x e^{-10}}{x!}$$

Dado que el número promedio de llegadas es 10 automóviles por hora, el tiempo promedio entre las llegadas de los automóviles es

$$\frac{1 \text{ hora}}{10 \text{ automóviles}} = 0.1 \text{ hora/automóvil}$$

Entonces, la distribución exponencial que describe el tiempo entre las llegadas tiene una media de $\mu = 0.1$ por automóvil; la función de densidad de probabilidad exponencial es

$$f(x) = \frac{1}{0.1} e^{-x/0.1} = 10e^{-10x}$$

NOTAS Y COMENTARIOS

Como se observa en la figura 6.10, la distribución exponencial es sesgada a la derecha. En efecto, la medida del sesgo en la distribución exponencial es 2. La distribución exponencial da una idea clara de cómo es una distribución sesgada.

Ejercicios

Métodos

32. Considere la siguiente función de densidad de probabilidad exponencial.

$$f(x) = \frac{1}{8} e^{-x/8} \quad \text{para } x \geq 0$$

a. Halle $P(x \leq 6)$.
b. Encuentre $P(x \leq 4)$.
c. Halle $P(x \geq 6)$.
d. Encuentre $P(4 \leq x \leq 6)$.

Auto examen

33. Considere la siguiente función de densidad de probabilidad exponencial.

$$f(x) = \frac{1}{3} e^{-x/3} \quad \text{para } x \geq 0$$

a. Dé la fórmula para hallar $P(x \leq x_0)$..
b. Halle $P(x \leq 2)$.
c. Encuentre $P(x \geq 3)$.
d. Halle $P(x \leq 5)$.
e. Halle $P(2 \leq x \leq 5)$.

Aplicaciones

34. El tiempo requerido para pasar por la inspección en los aeropuertos puede ser molesto para los pasajeros. El tiempo medio de espera en los periodos pico en el Cincinnnati/Northern Kentucky Internacional Airport es de 12.1 minutos (*The Cincinnati Enquirer*, 2 de febrero de 2006). Suponga que los tiempos para pasar por la inspección de seguridad tienen una distribución exponencial.
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que durante los periodos pico se requieran 10 minutos para pasar la inspección de seguridad?
    b. ¿De que durante los periodos pico se requieran más de 20 minutos para pasar la inspección de seguridad?
    c. ¿De que durante los periodos pico se requieran entre 10 y 20 minutos para pasar la inspección de seguridad?
    d. Son las 8 de la mañana (periodo pico) y usted se acaba de formar en la fila para la inspección de seguridad. Para alcanzar su avión, tiene que estar en la puerta de arribo en no más de 30 minutos. Si necesitara 12 minutos una vez pasada la inspección de seguridad para llegar a la puerta de arribo, ¿cuál es la probabilidad de que pierda el avión?

Auto examen

35. Los tiempos entre las llegadas de vehículos a un determinado entronque siguen una distribución de probabilidad exponencial cuya media es 12 segundos.
    a. Dibuje esta distribución de probabilidad exponencial.
    b. ¿Cuál es la probabilidad de que los tiempos de llegada entre vehículos sean 12 segundos o menos?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que los tiempos de llegada entre vehículos sean 6 segundos o menos?
d. ¿Cuál es la probabilidad de 30 o más segundos entre los tiempos de llegada?

36. El tiempo de vida (en hora) de un dispositivo electrónico es una variable aleatoria que tiene la siguiente función de densidad de probabilidad exponencial.

$$f(x) = \frac{1}{50} e^{-x/50} \qquad \text{para } x \geq 0$$

a. ¿Cuál es la media del tiempo de vida de este dispositivo?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que el dispositivo tenga una falla en las primeras 25 horas de funcionamiento?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que el dispositivo funcione 100 o más horas sin fallar?

37. Sparagowsky & Associates hace un estudio sobre los tiempos necesarios para atender a un cliente en la ventanilla de su automóvil en los restaurantes de comida rápida. En McDonald´s el tiempo medio para atender a un cliente fue 2.78 minutos (*The Cincinnati Enquirer*, 9 de julio de 2000). Tiempos de servicio como los de estos restaurantes suelen seguir una distribución exponencial.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo para atender a un cliente sea menor que 2 minutos?
b. ¿De que el tiempo para atender a un cliente sean más de 5 minutos?
c. ¿De que el tiempo para atender a un cliente sean más de 2.78 minutos?

38. ¿Las interrupciones durante su trabajo reducen su productividad? De acuerdo con un estudio realizado por la University of California–Irvine, las personas de negocios son interrumpidas aproximadamente 51/2 veces por hora (*Fortune*, 20 de marzo de 2006). Suponga que el número de interrupciones sigue una distribución de probabilidad de Poisson.
a. Dé la distribución de probabilidad para el tiempo entre las interrupciones.
b. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de negocios no tenga ninguna interrupción en 15 minutos?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente interrupción a una determinada persona de negocios ocurra en no más de 10 minutos?

Resumen

En este capítulo se amplía el estudio de las distribuciones de probabilidad al caso de las variables aleatorias continuas. La principal diferencia conceptual entre distribuciones de probabilidades discretas y continuas está en el método para calcular las probabilidades. En el caso de distribuciones discretas la función de probabilidad $f(x)$ da la probabilidad de que la variable aleatoria x tome diversos valores. En el caso de las distribuciones continuas, la función de densidad de probabilidad $f(x)$ no da directamente valores de probabilidad. Aquí, las probabilidades están dadas por áreas bajo la curva o gráfica de la función de densidad de probabilidad $f(x)$. Como el área bajo la curva sobre un solo punto es 0, se observa que en una variable aleatoria continua la probabilidad de cualquier valor particular es 0.

Se vieron a detalle tres distribuciones de probabilidad continua: la uniforme, la normal y la exponencial. La distribución normal es muy empleada en la inferencia estadística y será muy empleada en lo que resta del libro.

Glosario

Función de densidad de probabilidad Función que se usa para calcular probabilidades de una variable aleatoria continua. El área bajo la gráfica de una función de densidad de probabilidad y sobre un intervalo representa probabilidad.

Distribución de probabilidad uniforme Distribución de probabilidad continua en la cual la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor en cualquier intervalo es igual para intervalos de igual longitud.

Distribución de probabilidad normal Una distribución de probabilidad continua. Su función de densidad de probabilidad tiene forma de campana y está determinada por la media μ y la desviación estándar σ.
Distribución de probabilidad normal estándar Distribución normal en la cual la media es cero y la desviación estándar es uno.
Factor de corrección por continuidad Valor de 0.5 que se suma o resta al valor de x cuando se usa una distribución normal continua para aproximar una distribución binomial discreta.
Distribución de probabilidad exponencial Una distribución de probabilidad continua útil para calcular probabilidades acerca del tiempo que se necesita para realizar una tarea.

Fórmulas clave

Función de densidad de probabilidad uniforme

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b - a} & \text{para } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si no es así} \end{cases} \tag{6.1}$$

Función de densidad de probabilidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \tag{6.2}$$

Conversión a la variable aleatoria normal estándar

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \tag{6.3}$$

Función de densidad de probabilidad exponencial

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \qquad \text{para } x \geq 0, \mu > 0 \tag{6.4}$$

Distribución exponencial: probabilidades acumuladas

$$P(x \leq x_0) = 1 - e^{-x_0/\mu} \tag{6.5}$$

Ejercicios complementarios

39. Una ejecutiva de negocios se va a mudar de Chicago a Atlanta y necesita vender rápidamente su casa en Chicago. Un empleado le ofrece comprársela en \$210 000, pero la oferta expira al final de esa semana. En este momento la ejecutiva no tiene otra oferta mejor, pero piensa que puede dejar la casa en el mercado un mes más. De acuerdo con las pláticas que ha tenido con su agente inmobiliario la ejecutiva cree que los precios que pueden ofrecerle dejando la casa un mes más en el mercado están distribuidos uniformemente entre \$200 000 y \$225 000.
    a. Si deja la casa en el mercado un mes más, ¿cuál es la expresión matemática para la función de densidad de probabilidad de los precios de venta que le sean ofrecidos?
    b. Si la deja en el mercado un mes más, ¿cuál es la probabilidad de que venda la casa en por lo menos \$215 000?
    c. Si la deja en el mercado un mes más, ¿cuál es la probabilidad de que venda la casa en menos de \$210 000?
    d. ¿Deberá dejar la ejecutiva su casa en el mercado un mes más? ¿Por qué sí o por qué no?