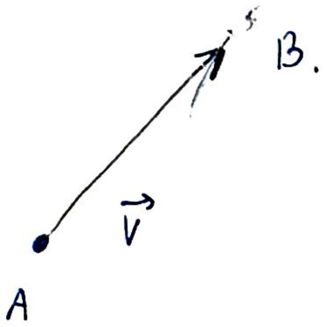
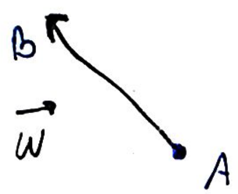
12.1 Vectores p. 21.



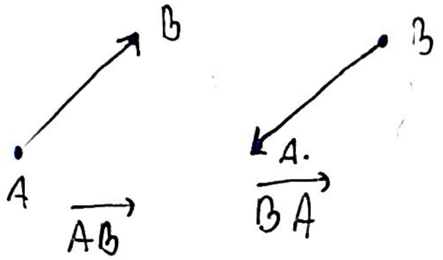
Un vector: tiene magnitud y dirección



se denota en negrilla **v**
o una flecha sobre la letra
$\vec{V}$

la longitud de cada segmento es la magnitud del vector.
la flecha indica su dirección.

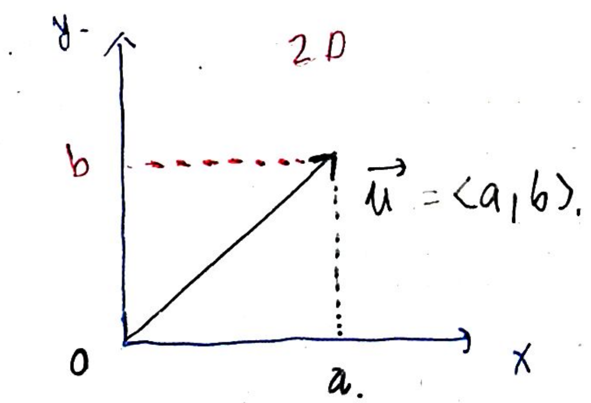
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ segmento de recta dirigido
empieza en el punto A y termina en el B.

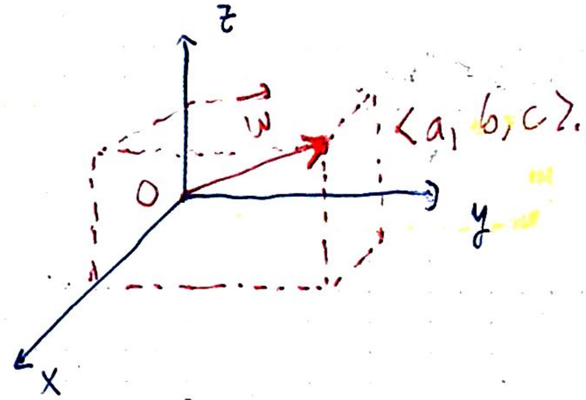


$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

vector cero $\vec{0}$ no tiene ni magnitud ni dirección.

Sistema de coordenadas y las componentes de un vector.



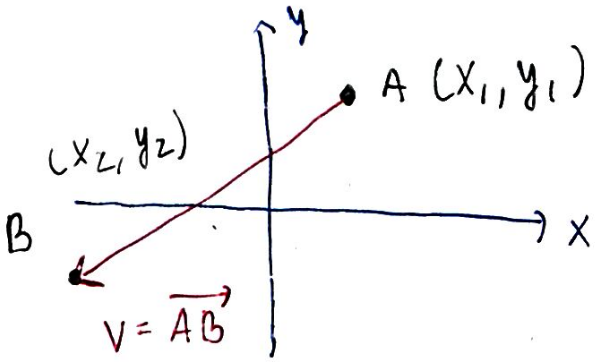


$\vec{u} = \langle a, b\rangle$ ó $[a, b]$

$\vec{w} = \langle a, b, c\rangle$.

las llaves $\langle\ \rangle$ denotan a un vector.

Vector Posición:



En 2-D.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$.

En 3-D.

$A(x_1, y_1, z_1)$ & $B(x_2, y_2, z_2)$

$\overrightarrow{BA} = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2 \rangle$.

Magnitud de un vector: la distancia entre el punto B y el punto A.

$$\boxed{|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}$$

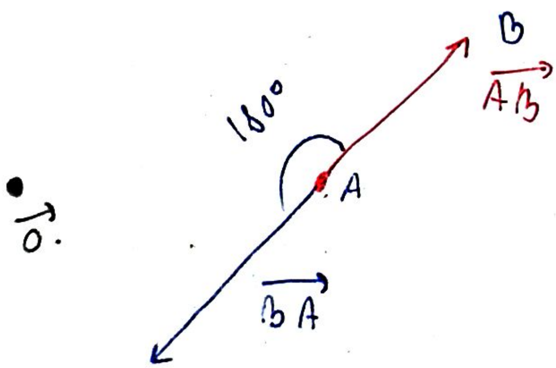
denota con $|\ |$ ó $\|\ \|$.

si $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ $\quad |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Observaciones: $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

pero $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$.



$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ vector cero

no tiene dirección. $\quad \langle x_1 - x_1, y_1 - y_1, z_1 - z_1 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$.

Ejercicio 1: Considere el vector $\overrightarrow{AB}$ con un punto inicial $A(1, 2, -4)$ y punto final $B(4, 8, 2)$.

a. Encuentre el vector posición $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

$\vec{u} = \langle 3, 6, 6 \rangle$ $\qquad 2-(-4)$

b. Encuentre la longitud del vector $\vec{u}$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36 + 36} = \sqrt{81} = 9.$$

Operaciones de vectores.

I. Suma de vectores ✓
II. Multiplicación por un escalar. ✓ } A'lgebra Lineal.

12.3 Producto Punto
12.4 Producto Cruz.

Suma de vectores.

$\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \qquad \vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle.$

Sume cada componente.

$$\vec{u} + \vec{w} = \langle u_1 + w_1, u_2 + w_2, u_3 + w_3 \rangle.$$

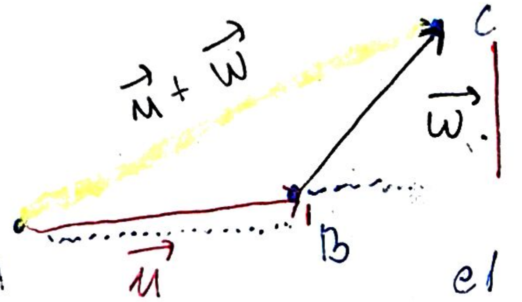
Multiplicación por un escalar. K es una constante. denotada como un escala

Multiplique cada componente.

$$K\vec{w} = \langle Kw_1, Kw_2, Kw_3 \rangle.$$

¿Cómo se pueden visualizar geométricamente estas operaciones?

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \qquad \vec{w} = \overrightarrow{BC}$



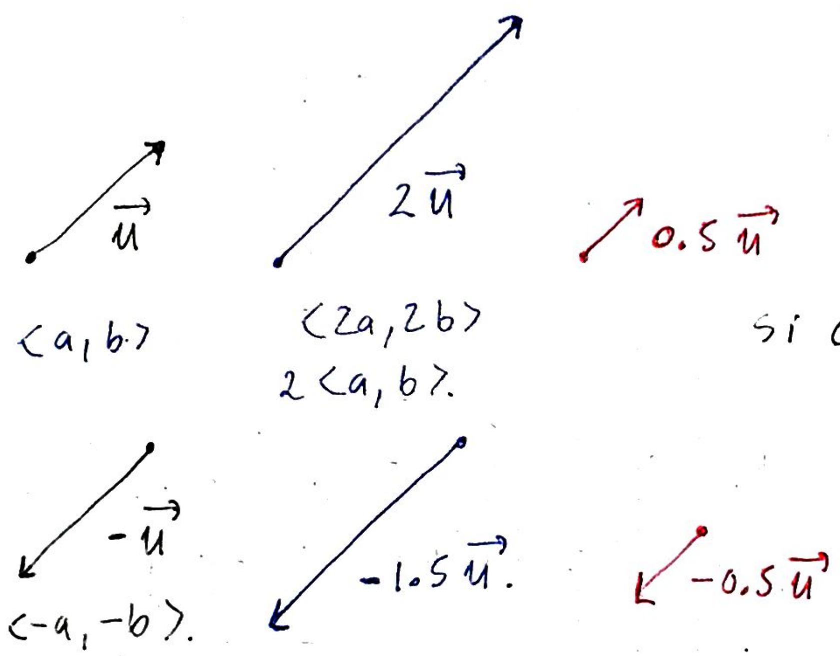
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\vec{u} + \vec{w} = \overrightarrow{AC}$

Suma de vectores

el segundo vector w empieza en el punto donde termina el 1ero

Multiplicación por un escalar



- Se preserva la dirección si $K \geq 0$.

si $K > 1$, el vector se estira.

si $0 < K < 1$, el vector se comprime.

Si $K < 0$, el vector cambia de dirección. (cambia en 180°).

$\vec{u} + (-\vec{u}) = \langle 0, 0 \rangle$.

Negativo de un vector: cuando $K = -1$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \qquad -\vec{u} = \overrightarrow{BA}$.

Resta o diferencia de vectores: Caso especial de la suma

$$\vec{u} + (-\vec{w}) = \vec{u} - \vec{w}$$
$$= \langle u_1 - w_1, u_2 - w_2, u_3 - w_3 \rangle.$$

Reste cada componente entre sí.

Se puede pensar como la suma entre $\vec{u}$ y el negativo de $\vec{w}$.

Ejercicio 2: Sean $\vec{a} = \langle 1, -2, 5 \rangle$, $\vec{b} = \langle -2, 1, -3 \rangle$.

combinación lineal de vectores. $\vec{u}, \vec{w}$ en 2-D.

$$K_1 \vec{u} + K_2 \vec{w} = \langle K_1 u_1 + K_2 w_1, K_1 u_2 + K_2 w_2 \rangle$$

a. $\vec{a} + \vec{b} = \langle -1, -1, 2 \rangle.$

b. $2\vec{a} - 4\vec{b} = \underbrace{\langle 2, -4, 10 \rangle}_{2\vec{a}} + \underbrace{\langle 8, -4, +12 \rangle}_{-4\vec{b}} = \underline{\langle 10, -8, 22 \rangle}.$

c. $|2\vec{a} - 4\vec{b}| = \sqrt{100 + 64 + 484} = \sqrt{648} \approx 25.45$

$|a| = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30} \approx 5.47.$

$|b| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14} \approx 3.74.$

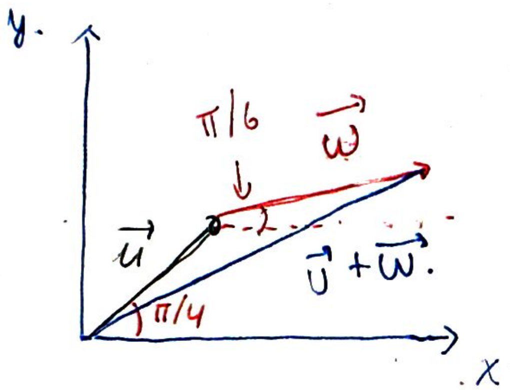
$|a + b| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6} \approx 2.45.$

$$|a + b| \neq |a| + |b|$$
$$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Problema Bono: Considere el vector $\vec{u} = \langle 1, 1 \rangle$ y $\vec{w} = \langle 1, \sqrt{3} \rangle$.

Encuentre la magnitud y el ángulo respecto al eje-x del vector $\vec{w} + \vec{u}$.

$\vec{w} + \vec{u} = \langle 2; 1 + \sqrt{3} \rangle$.



$|\vec{u}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\tan\theta = y/x$.

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \pi/4$.

$|v| = \sqrt{1+3} = 2$.

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi/6$.

$|\vec{w} + \vec{u}| = \sqrt{4 + (1+\sqrt{3})^2}$

≈ 3.3858

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 0.93$ rad. $\approx 53.79°$

Vectores Bases o Estándar.

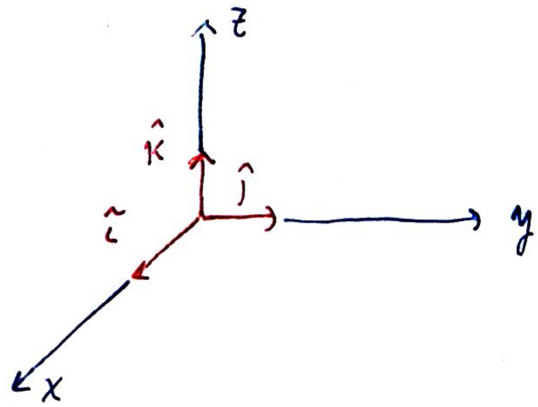
$\vec{u} = \langle 3, 6, 7 \rangle = 3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 7\hat{k}$

se denotan como $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ y apuntan en la dirección de cada eje coordenado.

$\hat{\imath} = \langle 1, 0, 0 \rangle$

$\hat{\jmath} = \langle 0, 1, 0 \rangle$

$\hat{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$



Permiten expresar cada vector $\vec{u}$ como una combinación de los vectores estándar.

$\vec{u} = \langle a, b, c \rangle = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}$

Magnitud de $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$

JNO.

$|\hat{\imath}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1 \qquad |\hat{\imath}| = |\hat{\jmath}| = |\hat{k}| = 1$

Vectores Unitarios: tienen longitud igual a 1,

$|u| = 1$

¿Qué sucede si $|a| \neq 1$? se encuentra el vector unitario $\vec{u}$ asociado $\vec{a}$ dividiendo por $|\vec{a}|$.

El vector $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{|a|}$ es siempre unitario.

Ejercicio 3: Sean $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = 5\hat{j} + 4\hat{k}$.

Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector $2\vec{a} + 3\vec{b}$.

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = 4\hat{i} - 6\hat{k} + 15\hat{j} + 12\hat{k} = 4\hat{i} + 15\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{16 + 225 + 36} = \sqrt{277}$$

unitario $\vec{u} = \dfrac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{|2\vec{a} + 3\vec{b}|} = \dfrac{1}{\sqrt{277}} \langle 4, 15, 6 \rangle$