Material de apoyo - Cálculo Multivariable

David Gabriel Corzo Mcmath

2020-01-06

Índice general

I Laboratorios **5**

1. Laboratorio #01 **7**

2. Laboratorio #01 **9**

II Tareas **17**

3. Tarea #02 **19**

4. Tarea #02 **21**

5. Tarea #03 **35**

6. Tarea #03 **37**

7. Tarea #04 **49**

8. Tarea #04 **51**

9. Tarea #05 **65**

10. Tarea #05 **67**

11. Tarea #06 **77**

12. Tarea #06 **79**

13. Tarea #08 **91**

III Examenes Cortos **93**

14. Examen corto #01 **95**

15. Examen corto #03 **97**

IV Material y documentos de apoyo **99**

16. Material o documento de apoyo #Cr **101**

Parte I

Laboratorios

Capítulo1

Laboratorio #01

Laboratorio #1 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 16 de enero

Nombre:_____ **Carnet:** _____

Tema:	1	2	3	4	5	6	7	Total
Puntos:	20	20	20	20	10	10	10	110
Nota:								

Resuelva las siguientes ejercicios:

1. (20 pts.) Determine la distancia del punto $(4, -2, 6)$ al eje x

2. (20 pts.) Halle la ecuación de la esfera con centro $(-3, 2, 5)$ y radio 4.
   ¿Cuál es la intersección de esta esfera con el plano yz?

3. (20 pts.) Encuentre el radio y centro de la esfera cuya ecuación es $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15$.

4. (20 pts.) Halle la longitud de los lados del triángulo $P(3, -2, -3), Q(7, 0, 1), R(1, 2, 1)$.
   ¿Es un triángulo isósceles? ¿Es un triángulo rectángulo? Utilice el Teorema de Pitágoras.

5. (10 pts.) Describa y bosqueje la superficie en R^3 representada por la ecuación $x + y = 2$.

6. (10 pts.) Describa y bosqueje la superficie en R^3 representada por la ecuación $2z = 8 - 4x$.

7. (10 pts.) **BONO:**
   Encuentre la ecuación de la esfera con centro $(2, -3, 6)$ que toca el plano x.

Capítulo2

Laboratorio #01

LABORATORIO #01

Wednesday, January 15, 2020
13:03

DAVID CORZO 20190432

1) Punto $(4, -2, 6)$ al eje x:

$$d = \sqrt{(6)^2 + (2)^2}$$

$$d = \sqrt{36 + 4}$$

$$d = \sqrt{40}$$

2) Ecuación de la esfera con centro $(-3, 2, 5)$ & radio 4. Intersección de la esfera con el plano yz.

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-d)^2$$
$$= \sqrt{(x-(-3))^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}$$
$$= \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}$$

...

$$4 = \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}$$

Se asume $x = 0$

$$(4)^2 = \left(\sqrt{(0+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}\right)^2$$
$$16 = 9 + (y-2)^2 + (z-5)^2$$
$$16 - 9 = (y-2)^2 + (z-5)^2$$
$$7 = (y-2)^2 + (z-5)^2$$

Queda la ecuación de un círculo correspondiente a el círculo que deja la esfera en el plano yz.

3) Encuentre el radio y centro de la esfera cuya ec. es $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15$.

$x: \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$

$y: \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4$

$z: \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$

$$[x^2 - 2x + 1] + [y^2 - 4y + 4] + [z^2 + 8z + 16] = 21 + 15$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 36$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2} = 6$$

radio: 6

centro: $(1, 2, -4)$

4) Longitud de los lados del triángulo $P(3,-2,-3)$, $Q(7,0,1)$, $R(1,2,1)$. ¿Isósceles, triángulo rectángulo?

$$|P_A \,\&\, P_B| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Isósceles

$P = x_2 \quad Q = x_1$

$$|P_P P_Q| = \sqrt{(3-7)^2 + (-2-0)^2 + (-3-1)^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 4 + 16}$$
$$= \sqrt{36} = 6$$

$Q = x_2 \quad R = x_1$

$$|P_Q P_R| = \sqrt{(7-1)^2 + (0-2)^2 + (1-1)^2}$$
$$= \sqrt{(6)^2 + (-2)^2 + (0)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$$

$R = x^2 \quad P = x_2$

$$|P_R P_P| = \sqrt{(1-3)^2 + (2+2)^2 + (1+3)^2}$$
$$= \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (4)^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

5) Describa & bosqueje la superficie en R^3 representada por la ecuación $x + y = 2$

$x = 2 - y$; $y = 2 - x$

$x + y + 0z = 2$

6) Describa y bosqueje la superficie $\mathbb{R}^3$ representada por la ecuación $2z = 8 - 4x$

$I;\ x = 0$

$2z - 8 = 0$

$z = \frac{+8}{2}$

$z = +4$

$I;\ z = 0$

$0 = 8 - 4x$

$-8 = -4x$

$\frac{-8}{-4} = x$

$x = 2$

7) Bono: La ecuación de la esfera con centro $(2,-3,6)$ que toca el plano xy.

El radio es 6.

$$6 = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2}$$

Parte II

Tareas

Capítulo3

Tarea #02

Tarea #2 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 23 de enero

Nombre:_____ **Carnet:** _____

Tema:	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos:	20	20	20	20	22	0	102
Nota:							

Resuelva las siguientes ejercicios:

1. Dados los vectores: $a = \langle 5, -12, 0\rangle$, $b = \langle 0, -3, -6\rangle$, $c = \langle 1, 0, 2\rangle$ encuentre:
   (a) (5 pts.) $a + 2(b + c) - (a - 2b)$
   (b) (5 pts.) $2a \cdot (3b + 4c) - 2c \cdot (4a + 0b)$
   (c) (5 pts.) $|a + c - (a + b)|$
   (d) (5 pts.) $|a + c| \; - \; |a + b|$

2. (20 pts.) Halle un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector $\langle -3,\ 4,\ 6,\ -8\rangle$

3. Encuentre el ángulo entre los siguientes vectores.
   No necesita utilizar calculadora para encontrar el ángulo.
   (a) (10 pts.) $\mathbf{a} = \langle 3,\ 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5,\ 5\rangle$
   (b) (10 pts.) $\mathbf{b} = \langle 2,\ -4,\ 5\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2,\ 4,\ -5\rangle$

4. Determine si los vectores son ortogonales, paralelos o ninguno.
   (a) (5 pts.) $a = \langle -5, 3, 7\rangle, b = \langle 6, -8, 2\rangle$
   (b) (5 pts.) $a = \langle 4, 6\rangle, b = \langle -3, 2\rangle$
   (c) (5 pts.) $a = -i + 2j + 5k, b = 3i + 4j - k$
   (d) (5 pts.) $a = 2i + 6j - 4k, b = -3i - 9j + 6k$

5. Considere los vectores $a = \langle 3, 6, -2\rangle$ y $b = \langle 1, 2, 3\rangle$. Encuentre las proyecciones escalar y vectorial:
   (a) (8 pts.) de $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{a}$.
   (b) (8 pts.) de $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{b}$.
   (c) (6 pts.) Explique si $\text{proy}_a b \; = \; \text{proy}_a b$.

6. **BONO: (10 pts.)**
   Encuentre los valores de x tales que el ángulo entre los vectores $\langle 2, 1, -1\rangle$ y $\langle 1, x, 0\rangle$ es de 45° .

Capítulo4

Tarea #02

Tarea #2
David Gabriel Corzo Mcmath – 20190432
Cálculo Multivariable

1) Vectores:

$a = \langle 5, -12, 0 \rangle$

$b = \langle 0, -3, -6 \rangle$

$c = \langle 1, 0, 2 \rangle$

$2b = \langle 0, -6, -12 \rangle$

a) $a + 2(b + c) - (a - 2b) =$

$= a + 2\left[(0+1), (-3+0), (-6+2)\right] - \left[(5-0), (-12+6), (0+12)\right]$

$= a + 2\langle 1, -3, -4 \rangle - \langle 5, -6, 12 \rangle$

$= a + \langle 2, -6, -8 \rangle - \langle 5, -6, 12 \rangle$

$= a + \left[(2-5), (-6+6), (-8-12)\right]$

$= a + \langle -3, 0, -20 \rangle$

$= \langle 5, -12, 0 \rangle + \langle -3, 0, -20 \rangle$

$= \left[(5-3), (-12+0), (0-20)\right]$

$= \langle 2, -12, -20 \rangle$

b) $2a \cdot (3b + 4c) - 2c \cdot (4a + 0b)$

$2a = \langle 16, -24, 0 \rangle$ $\quad$ $4a = \langle 20, -48, 0 \rangle$

$3b = \langle 0, -9, -24 \rangle$ $\quad$ $0b = \langle 0, 0, 0 \rangle$

$2c = \langle 2, 0, 4 \rangle$ $\quad$ # Sacar nuevos vectores

$4c = \langle 4, 0, 8 \rangle$

$= 2a \cdot \langle (0 + 4), (-9 + 0), (-24 + 8) \rangle - 2c \cdot \langle (20 + 0), (-48 + 0), (0 + 0) \rangle$

$= 2a \cdot \langle 4, -9, -16 \rangle - 2c \cdot \langle 20, -48, 0 \rangle$

$= \langle (16 \cdot 4), (-24 \cdot -9), (0 \cdot -16) \rangle - \langle (2 \cdot 20), (0 \cdot -48), (4 \cdot 0) \rangle$

$= \langle 40, 216, 0 \rangle - \langle 40, 0, 0 \rangle$

$= \langle (40 - 40), (216 - 0), (0, 0) \rangle$

$= \langle 0, 216, 0 \rangle$

c) $|a + c - (a + b)| =$

$a = \langle 5, -12, 0 \rangle \quad b = \langle 0, -3, -6 \rangle \quad c = \langle 1, 0, 2 \rangle$

$= |\langle (5+1), (-12+0), (0+2) \rangle - (\langle (5+0), (-12-3), (0-6) \rangle)|$

$= |\langle 6, -12, 2 \rangle - \langle 5, -15, -6 \rangle|$

$= |\langle (6-5), (-12+15), (2+6) \rangle|$

$= |\langle 1, 3, 8 \rangle| \Rightarrow \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (8)^2}$

$= \sqrt{1 + 9 + 64}$

$= \sqrt{74}$

d) $|a + c| - |a + b|$

$= |\langle (5+1), (-12+0), (0+2) \rangle| - |\langle (5+0), (-12-3), (0-6) \rangle|$

$= |\langle 6, -12, 2 \rangle| - |\langle 5, -15, -6 \rangle|$

$= \sqrt{6^2 + (-12)^2 + 2^2} - \sqrt{5^2 + (-15)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{36 + 144 + 4} - \sqrt{25 + 225 + 36}$

$= \sqrt{184} - \sqrt{286}$

$\cos\theta = \dfrac{A \cdot B}{|A||B|}$

2) Misma dirección que el vector $\langle -3, 4, 6, -8 \rangle$

$$= \left| \langle -3, 4, 6, -8 \rangle \right|$$

Calcular magnitud

$$= \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (6)^2 + (-8)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16 + 36 + 64}$$

$$= \sqrt{125}$$

Entonces...

$$\left| \left\langle -\frac{3}{\sqrt{125}}, \frac{4}{\sqrt{125}}, \frac{6}{\sqrt{125}}, -\frac{8}{\sqrt{125}} \right\rangle \right| = 1$$

Comprobar...

$$= \sqrt{\frac{9}{125} + \frac{16}{125} + \frac{36}{125} + \frac{64}{125}} = \sqrt{\frac{125}{125}} = 1$$

3) Encuentre el ángulo de los vectores

a) $a = \langle 3, 0 \rangle$, $b = \langle 5, 5 \rangle$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{A \cdot B}{|A||B|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{\langle (3 \cdot 5), (0 \cdot 5) \rangle}{|\langle 3, 0 \rangle||\langle 5, 5 \rangle|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{15 + 0}{3 \cdot \sqrt{50}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{15}{3 \cdot \sqrt{2 \cdot 25}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{15}{3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{15}{15} \cdot (2)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

b) $a = \langle 2, -4, 5 \rangle$

$b = \langle -2, 4, -5 \rangle$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|a||b|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{-45}{(45)^{1/2}(45)^{1/2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{-45}{45}\right)$$

$$= \cos^{-1}(-1)$$

$$= \pi$$

$\vec{a} \cdot \vec{b}$

$\hookrightarrow$

2 -2	-4 4	5 -5
-4	-16	-25

$$= (-4) + (-16) + (-25)$$

$$= -20 - 25$$

$$= -45$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$|a|$

$$= \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (5)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 16 + 25} = \sqrt{45}$$

$|b|$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (4)^2 + (-5)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 16 + 25} = \sqrt{45}$$

4) Determine si los vectores son ortogonales, paralelos o ninguno.

a) $a = \langle -5, 3, 7 \rangle$ $b = \langle 6, -8, 2 \rangle$

Producto punto de a & b

$-5 \cdot 6$	$3 \cdot -8$	$7 \cdot 2$
-30	-24	$+14$

$(-30) + (-24) + (14) = -40$ Ninguno

b) $a = \langle 4, 6 \rangle$

$b = \langle -3, 2 \rangle$

4	6
-3	2
-12	12

$\underbrace{(-12) + 12}_{0}$

Son ortogonales

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \dots a_n b_n$$

c) $a = -i + 2j + 5k$

$b = 3i + 4j - k$

$a = \langle -1, 2, 5 \rangle$

$b = \langle 3, 4, -1 \rangle$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \\ \hline -3 & 8 & -5 \\ \hline \end{array}$$

$$\underbrace{(-3) + 8 + (-5)}_{\downarrow}$$

$$\underbrace{-8 + 8}_{0}$$

Son ortogonales

d) $a = 2i + 6j - 4k$

$b = -3i - 9j + 6k$

$a = \langle 2, 6, -4 \rangle$

$b = \langle -3, -9, 6 \rangle$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 6 & -4 \\ -3 & -9 & 6 \\ \hline -6 & 54 & -24 \\ \hline \end{array}$$

$(-6) + 54 + (-24)$

$-30 + 54$

24

Son paralelos por $\vec{a} \cdot \vec{b}$ son multiplos entre sí.

5) Considerar vectores:

$a = \langle 3, 6, -2 \rangle$ esc: $\text{Proy}_a b = \dfrac{a \cdot b}{|a|}$

$b = \langle 1, 2, 3 \rangle$ vec: $\text{Proy}_a b = \dfrac{a \cdot b}{|a|} \dfrac{a}{|a|}$

a) Proyección de b sobre a:

Escalar:

$$\text{proy}_a b = \frac{3 + 12 - 6}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{9 + 36 + 4}} =$$

$$= \frac{9}{\sqrt{49}} = \frac{9}{7}$$

Vectorial:

$$\text{proy}_a b = \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{49}} \langle 3, 6, -2 \rangle$$

$$= \frac{9}{(49)^{\frac{1}{2}} \cdot (49)^{\frac{1}{2}}} \langle 3, 6, -2 \rangle$$

$$= \frac{9}{49} \langle 3, 6, -2 \rangle$$

$$= \left\langle \frac{27}{49}, \frac{54}{49}, -\frac{18}{49} \right\rangle$$

b) a sobre b:

$a = \langle 3, 6, -2 \rangle$

$b = \langle 1, 2, 3 \rangle$

$$\text{proy}_b\, a = \frac{a \cdot b}{|b|} \cdot \frac{b}{|b|}$$

$$\text{proy}_b\, a = \frac{a \cdot b}{|b|}$$

escalar: $\text{proy}_b\, a = \dfrac{9}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{14}}$

vectorial: $\text{proy}_b\, a = \dfrac{9}{\sqrt{14}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{14}} \left[\langle 1, 2, 3 \rangle \right]$

$$= \frac{9}{(14)^{\frac{1}{2}} \cdot (14)^{\frac{1}{2}}} \langle 1, 2, 3 \rangle$$

$$= \frac{9}{14} \langle 1, 2, 3 \rangle$$

$$= \left\langle \frac{9}{14}, \frac{18}{14}, \frac{27}{14} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{9}{14}, \frac{9}{7}, \frac{27}{14} \right\rangle$$

c) proyección de b sobre a no es igual a proyección de a sobre b; si estos cumplen la condición de $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ si resultan ser la misma proyección.

* el lab decía proyab = proyab que sí serían iguales pero asumí que quería decir proyab = $\text{proy}_b a$ que en cuyo caso no siempre son iguales.

BONO: Encontrar tal valor de x que $\langle 2, 1, -1\rangle$ & $\langle 1, x, 0\rangle$ es de $45°$.

θ tiene que ser igual a $45°$ ó $\frac{\pi}{4}$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{[(2\cdot 1)+(1\cdot x)+\cancel{(-1\cdot 0)}^{\,0}]}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+x^2+0^2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{2+x}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{2+x}{\sqrt{6}\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2+x}{\sqrt{6}\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{1+x^2} = 2+x$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{6}\right)\sqrt{1+x^2}$$

$$\frac{\sqrt{12}}{2}\sqrt{1+x^2} = 2+x$$

$$\left(\frac{\sqrt{12}}{2}\sqrt{1+x^2}\right)^2 = (2+x)^2$$

$$3(1+x^2) = x^2+4x+4$$

$$3+3x^2 = x^2+4x+4$$

$$3+3x^2 = x^2+4x+4$$

$$0 = x^2-3x+4x+4-3$$

$$0 = -2x^2+4x+1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{16-4(-2)(1)}}{2(-2)}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{-4}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{-4} \approx -0.22$$

$$\approx 2.22$$

Capítulo5

Tarea #03

Tarea #3 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 30 de enero

Nombre:_____ **Carnet:** _____

Tema:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Puntos:	20	10	10	10	20	10	10	10	0	100
Nota:										

Resuelva las siguientes ejercicios:

1. Diga si cada expresión tiene sentido. Si no, explique por qué. En caso afirmativo, diga si la expresión es un vector ó un escalar.
   (a) (5 pts.) $(a \cdot b) \cdot c$
   (b) (5 pts.) $(a \cdot b) \times c$
   (c) (5 pts.) $(a \times b) \times c$
   (d) (5 pts.) $(a \times c) \cdot b$

2. (10 pts.) Encuentre dos vectores unitarios ortogonales a $\langle 3, 2, 1\rangle$ y $\langle -1, 1, 0\rangle$.

3. (10 pts.) Calcule el triple producto escalar entre $a = \langle 1, 2, 3\rangle$, $b = \langle 3, 2, 5\rangle$, y $c = \langle 0, 4, 3\rangle$. ¿Es $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$?

4. (10 pts.) Calcule el área del paralelogramo entre los puntos $A(1, 4, -7)$, $B(2, -1, 4)$ y $C(0, -9, 18)$.

5. Considere los puntos $P = (1, 0, 1)$, $Q = (-2, 1, 3)$ y $R = (4, 2, 5)$.
   (a) (10 pts.) Encuentre un vector no cero ortogonal al plano que contiene los tres puntos.
   (b) (10 pts.) Determine el área del triángulo PQR.

6. (10 pts.) Encuentre el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $a = \langle 1, 2, 3\rangle$, $b = \langle -1, 1, 2\rangle$ y $c = \langle 2, 1, 4\rangle$.

7. (10 pts.) ¿Están los puntos $A(1, 4-7)$, $B(2, -1, 4)$, $C(0, -9, 18)$ y $D(0, 0, 0)$ sobre el mismo plano?

8. (10 pts.) Si $(a \cdot b) = \sqrt{3}$ y $(a \times b) = \langle 1, 2, 2\rangle$ encuentre el ángulo entre a y b.

9. **BONO: (10 pts.)** Utilice propiedades del producto punto y cruz para demostrar que
   (a) $| a \times b |^2 = | a |^2 | b |^2 - (a \cdot b)^2$
   (b) $(a - b) \times (a + b) = 2(a \times b)$

Propiedades del producto punto y del producto cruz

Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores y k es un escalar, entonces

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
4. $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b})$
5. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{b} = 0$
6. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$
7. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$
8. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \pm \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \pm (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$
9. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$
10. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$

Capítulo6

Tarea #03

1) a. $(a \cdot b) \cdot c$

asumiendo que a, b, c son vectores.

Resulta en un escalar. producto punto resultan en escalares siempre

b. $(a \cdot b) \times c$

El producto cruz es entre vectores no se puede hacer entre escalares, $a \cdot b$ resulta en un escalar por ende no tiene sentido.

c. $(a \times b) \times c$

Resulte en un vector

d. $(a \times c) \cdot b$

Resulta en un escalar. producto cruz de a, c resulta en vector, ese vector con producto punto b resulta en escalar

2) Encuentre vectores unitarios ortogonales a $\langle 3, 2, 1 \rangle$ & $\langle -1, 1, 0 \rangle$.

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(2 \cdot 0) - (1 \cdot 1)\right] - \hat{j}\left[(3 \cdot 0) - (1 \cdot -1)\right] + \ldots$$

$$+ \hat{k}\left[(3 \cdot 1) - (2 \cdot -1)\right]$$

$$= \hat{i}\left[0 - 1\right] - \hat{j}\left[0 - (-1)\right] + \hat{k}\left[3 - (-2)\right]$$

$$= -\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\therefore \langle -1, -1, 5 \rangle$$

Este es el vector ortogonal a
$\langle 3, 2, 1\rangle$ & $\langle -1, 1, 0\rangle$ Ahora sólo
falta la división por la magnitud
para que sea ortogonal unitario.

$$|O_\perp| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (5)^2} = \sqrt{1 + 1 + 25}$$
$$= \sqrt{27}$$

unit $\Rightarrow$ $O_\perp \cdot \frac{1}{\sqrt{27}} \Rightarrow \langle -1, -1, 5\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{27}} =$

$$R_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{1}{\sqrt{27}}, -\frac{5}{\sqrt{27}} \right\rangle$$

invierto signos para encontrar segundo vector

$$R_2 = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{27}}, -\frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{5}{\sqrt{27}} \right\rangle$$

Comprobación de ser unitario.

$$1 = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^2 + \left(-\frac{5}{\sqrt{27}}\right)^2}$$

$$1 = \sqrt{\left(\frac{1}{27}\right) + \left(\frac{1}{27}\right) + \left(\frac{25}{27}\right)}$$

$$1 = \sqrt{\frac{1 + 1 + 25}{27}}$$

$$1 = \sqrt{\frac{27}{27}}$$

$$1 = 1$$

$\therefore$ es unitario & ortogonal.

3) Calcule el triple producto escalar entre $a = \langle 1, 2, 3\rangle$ & $b = \langle 3, 2, 5\rangle$ & $c = \langle 0, 4, 3\rangle$ ¿ $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$

$b \times c = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ & & \end{vmatrix}$

$$b \times c = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(2\cdot 3)-(5\cdot 4)\right] - \hat{j}\left[(3\cdot 3)-(5\cdot 0)\right] + \hat{k}\left[(3\cdot 4)-(2\cdot 0)\right]$$

$$= \hat{i}\left[6-20\right] - \hat{j}\left[9-0\right] + \hat{k}\left[12-0\right]$$

$$= \hat{i}\left[-14\right] - \hat{j}\left[9\right] + \hat{k}\left[12\right]$$

$$= -14\hat{i} - 9\hat{j} + 12\hat{k}$$

$$= \langle -14, -9, 12 \rangle$$

$$a \cdot (b \times c) = \langle 1, 2, 3 \rangle \cdot \langle -14, -9, 12 \rangle$$

$$= \langle (1 \cdot -14), (2 \cdot -9), (3 \cdot 12) \rangle$$

$$= -14 - 18 + 36 = 4$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(2\cdot 5)-(3\cdot 2)\right] - \hat{j}\left[(1\cdot 5)-(3\cdot 3)\right] + \hat{k}\left[(1\cdot 2)-(3\cdot 2)\right]$$

$$= \hat{i}\left[10-6\right] - \hat{j}\left[5-9\right] + \hat{k}\left[2-6\right]$$

$$= \hat{i}\left[4\right] - \hat{j}\left[-4\right] + \hat{k}\left[-4\right]$$

$$= 4\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$= \langle 4, 4, -4 \rangle$$

$$(a \times b) \cdot c = \langle 4, 4, -4 \rangle \cdot \langle 0, 4, 3 \rangle$$

$$= 0 + 16 - 12 = 4$$

$\therefore \quad a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$ Sí es igual ya que los dos dan 4, el mismo resultado.

4) Calcule el área del paralelogramo entre los puntos $A(1, 4, -7)$, $B(2, -1, 4)$ e $C(0, 3, 10)$

$A(1,4,-7)$, $B(2,-1,4)$ & $C(0,-9,18)$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \langle (2-1), (-1-4), (4+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{u} = \langle 1, -5, 11 \rangle}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = \langle (0-1), (-9-4), (18+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{w} = \langle -1, -13, 25 \rangle}$$

Paralelogramo

$P = b \cdot a$

base $= |\vec{a}|$

altura $= |b| \sin\theta$

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -5 & 11 \\ -1 & -13 & 25 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{i}\left[(-5 \cdot 25) - (11 \cdot -13)\right] - \hat{j}\left[(1 \cdot 25) - (11 \cdot -1)\right] + \hat{k}\left[(1 \cdot -13) - (-5 \cdot -1)\right]$$

$$= \hat{i}\left[-125 + 143\right] - \hat{j}\left[25 + 11\right] + \hat{k}\left[-13 - 5\right] =$$

$$= 18\hat{i} - 36\hat{j} - 18\hat{k}$$

$$= \langle 18, -36, -18 \rangle$$

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = \sqrt{18^2 + (-36^2) + (-18^2)} = 18\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} = 9\sqrt{6}$$

5) Considere los puntos $P(1,0,1)$ & $Q(-2,1,3)$ & $R(4,2,5)$.

a) Encontrar el vector no cero ortogonal al plano

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (-2-1), (1-0), (3-1) \rangle$$

$$\boxed{\vec{u} = \langle -3, 1, 2 \rangle}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{PR} = \langle (4-1), (2-0), (5-1) \rangle$$

$$\boxed{\vec{w} = \langle 3, 2, 4 \rangle}$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(1\cdot 4)-(2\cdot 2)\right] - \hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow \hat{j}\left[(-3\cdot 4)-(3\cdot 2)\right] + \hat{k}\left[(-3\cdot 2)-(3\cdot 1)\right]$$

$$= \hat{i}\left[4-4\right] - \hat{j}\left[-12-6\right] + \hat{k}\left[-6-3\right]$$

$$= 0\hat{i} + 18\hat{j} - 9\hat{k}$$

$\therefore \langle 0, 18, -9 \rangle$ es el vector ortogonal no cero al plano.

b) Determine el área del triángulo PQR

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\left|\vec{u} \times \vec{w}\right| = \frac{1}{2}\underbrace{\left|\langle 0, 18, -9 \rangle\right|}_{\sqrt{0^2 + 18^2 + (-9)^2}}$$

$$\sqrt{324 + 81}$$

$$\sqrt{405}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{405} = \frac{1}{2}\, 9 \cdot \sqrt{5} = \frac{9 \cdot \sqrt{5}}{2}$$ es el

≈ 10.06

área del triángulo PQR

6) Volúmen del paralelelipípedo determinado por los vectores $a = \langle 1,2,3 \rangle$; $b = \langle -1,1,2 \rangle$; $c = \langle 2,1,4 \rangle$.

$$V_p = |a \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{\imath}\left[(1\cdot 4)-(1\cdot 2)\right] - \hat{\jmath}\left[(-1\cdot 4)-(2\cdot 2)\right] + \hat{k}\left[(-1\cdot 1)-(2\cdot 1)\right]$$

$$\dots = \hat{\imath}\left[4-2\right] - \hat{\jmath}\left[-4-4\right] + \hat{k}\left[-1-2\right] = 2\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

Ahora $\hat{\imath} = 1$; $\hat{\jmath} = 2$; $\hat{k} = 3$; (por vector a)

$$= 2(1) + 8(2) - 3(3)$$

$$= 2 + 16 - 9 = 18 - 9 = 9$$

es el volúmen del paralelelipípedo a, b, c.

7) ¿Están los pts. $A(1,4,-7)$; $B(2,-1,4)$; $C(0,-9,18)$; $D(0,0,0)$ sobre el mismo plano?

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \langle (2-1),(-1-4),(4+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{u} = \langle 1, -5, 11 \rangle}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = \langle (0-1),(-9-4),(18+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{w} = \langle -1, -13, 25 \rangle}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AD} = \langle (0-1),(0-4),(0+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{v} = \langle -1, -4, 7 \rangle}$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v})}$$

$$\vec{u}\,(\vec{w} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & -13 & 25 \\ -1 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{\imath}\left[(-13 \cdot 7) - (-4 \cdot 25)\right] - \hat{\jmath}\left[(-1 \cdot 7) - (25 \cdot -1)\right] + \hat{k}\left[(-1 \cdot -4) - (-1 \cdot -13)\right]$$

$$= 9\hat{\imath} - 18\hat{\jmath} - 9\hat{k}$$

remplazar $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ con $\vec{u}$.

$$= 9(1) - 18(-5) - 9(11)$$

$$= 9 + 90 - 99$$

$$= 9 - 99 + 90$$

$$= -90 + 90 = 0$$

$\therefore$ sí son parte del mismo plano.

8) $(a \cdot b) = \sqrt{3}$ & $(a \times b) = \langle 1, 2, 2 \rangle$

encontra ángulo entre a & b.

$$\underbrace{a \cdot b}_{\sqrt{3}} = |a||b|\cos\theta \qquad |\underbrace{a \times b}_{|\langle 1,2,2\rangle|}| = |a||b|\sin\theta$$

$$|a||b|\cos\theta = \sqrt{3}$$

$$\underbrace{|a||b|}_{} = \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$$

Sustituir en

$$|\langle 1,2,2\rangle| = \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Big\} \tan\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{1 + 4 + 4}}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = 3 \cdot 3^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tan\theta = \frac{\quad}{\quad}$$

$$= 3^{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{3}$$

$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3})$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore$ El ángulo es $\theta = \frac{\pi}{3}$

BONO:

9) a) $|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2$

Partimos desde la siguiente propiedad.

$\hookrightarrow |a \times b| = |a||b| \sin\theta$ # Elevamos al cuadrado

$\Rightarrow |a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 \sin^2\theta$

Propiedad pitagórica

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

Sustituir

$$|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2(1 - \cos^2\theta)$$ # Distribuyo

$$|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - \underbrace{|a|^2|b|^2\cos^2\theta}_{(a \cdot b)^2}$$

$$\therefore \quad |a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2 \quad \square$$

b) $(a - b) \times (a + b) = 2(a \times b)$ # Quiero llegar a eso

$$= (a - b) \times (a + b)$$

Propiedad distributiva

$$= (a - b) \times (a + b)$$

$$= \cancel{(a \times a)}^{0} + (a \times b) - (b \times a) - \cancel{(b \times b)}^{0}$$

$$= (a \times b) - (b \times a)$$

$\# \ (a \times b) = -(b \times a)$

$= (a \times b) + (a \times b)$

$\therefore \ 2(a \times b)$ $\square$

Capítulo7

Tarea #04

Tarea #3 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 06 de febrero

Nombre:_____ **Carnet:** _____

Tema:	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Puntos:	20	10	10	10	15	15	20	0	100
Nota:									

1. Considere los planos $x + 3y + 2z = 3$ & $-2x + y + 3z = 8$.
   (a) (10 pts.) Encuentre el ángulo de intersección entre los dos planos.
   (b) (10 pts.) Encuentre la recta de intersección entre los dos planos.

2. (10 pts.) Considere la recta que pasa por $(-2, 5, 7)$ y $(1, 3, 4)$. ¿Es perpendicular a la recta que pasa por $(4, 3, 2)$ y $(3 - 1, 8)$?

3. (10 pts.) Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ y $(1, 1, 0)$.

4. (10 pts.) Encuentre una ec. del plano que pasa por $(1, 4, -7)$ y contiene a la recta $z = 2y = 3x$.

5. Considere los planos.

$$P_1 : \ 3x + 6y - 3z = 3 \qquad P_2 : \ 2y = x - z - 2$$
$$P_3 : \ 4x - 12y + 8z = 8 \qquad P_4 : \ 9y = 3x + 6z - 6$$

   (a) (05 pts.) ¿Cuáles de los siguientes cuatro planos son paralelos.
   (b) (10 pts.) ¿Cuáles de ellos son idénticos?

6. Considere las rectas.

$$L_1 : \ x = 1 + 6t, \ y = 1 - 3t, \ z = 12t + 5 \qquad L_2 : \ 2x - 2 = 4 - 4y = z + 1$$
$$L_3 : \ x = 1 + 2t, \ y = t, \qquad z = 1 + 4t \qquad L_4 : \ \mathbf{r} = \langle 3, \ 1, \ 5\rangle + t\langle 4, 2, 8\rangle$$

   (a) (05 pts.) ¿Cuáles de los siguientes cuatro rectas son paralelas.
   (b) (10 pts.) ¿Cuáles de ellas son idénticas?

7. Determine si el par de rectas dadas son paralelas, oblicuas o se cortan.
   (a) (10 pts.) $L_1 : \ x = 3 + 2t, \ y = 4 - t, \ z = 1 + 3t, \qquad L_2 : \ x = 1 + 4s, \ y = 3 - 2s, \ z = 4 + 5s$
   (b) (10 pts.) $L_1 : \ x - 1 = 1 - y = \dfrac{z}{2}, \qquad L_2 : \ z = 0, \quad 2 - x = y$

8. **(10 pts.)** Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por el punto $(0, 1, 2)$, es perpendicular a la recta $x = 1 + t, \ y = 1 - t, \ z = 2t$ y corta a esta recta.

Capítulo8

Tarea #04

1) Planos $\underbrace{x + 3y + 2z = 3}_{\hat{n}_1}$ & $\underbrace{-2x + y + 3z}_{\hat{n}_2} = 8$

a) Encontrar el ángulo de intersección.

$$\hat{n}_1 = \langle 1, 3, 2 \rangle$$

$$\hat{n}_2 = \langle -2, 1, 3 \rangle$$

$$\cos\theta = \frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1||\hat{n}_2|}$$

$$\cos\theta = \frac{(1 \cdot -2) + (3 \cdot 1) + (2 \cdot 3)}{\left[\sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (2)^2}\right]\left[\sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (3)^2}\right]}$$

$$= \frac{-2 + 3 + 6}{\left(\sqrt{1 + 9 + 4}\right)\left(\sqrt{4 + 1 + 9}\right)}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{7}{}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{7}{14}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$ ✓

B) Recta de intersección:

Resta de ecuaciones

$r = \vec{r_0} + t\vec{v}$

vector director

$$2(x + 3y + 2z = 3)$$
$$-2x + y + 3z = 8$$

$$2x + 6y + 4z = 6$$
$$-2x + y + 3z = 8$$

$$\frac{1}{7}(0x + 7y + 7z = 14)$$

$$y + z = 2$$
$$y = 2 - z$$

Encuentro dos puntos en común para
encontrar el vector director

Cuando $\boxed{z = 0}$ $\boxed{y = 2}$ $\langle -3, 2, 0 \rangle$

$$x = 3 - 3(2) - 2(0)$$
$$x = 3 - 6$$
$$\boxed{x = -3}$$

Cuando $\boxed{z = 1}$ $\boxed{y = 1}$ $\langle -2, 1, 1 \rangle$

$$x = 3 - 3(1) - 2(1)$$
$$x = 3 - 3 - 2$$
$$\boxed{x = -2}$$

$$\vec{v} = \vec{PQ} = \langle (-2+3), (1-2), (1-0) \rangle$$
$$\vec{v} = \langle 1, -1, 1 \rangle$$

$$\vec{r_0} = \langle -3, 2, 0 \rangle - t\langle 1, -1, 1 \rangle$$ ✓

2) Considere: $P(-2, 5, 7)$ & $Q(1, 3, 4)$.

¿Es perpendicular $A(4,3,2)$ $B(3,-1,8)$

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (-2-1), (5-3), (7-4) \rangle$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \langle (4-3), (3+1), (2-8) \rangle$$

$$\vec{u} = \langle -3, 2, 3 \rangle$$

$$\vec{w} = \langle 1, 4, -6 \rangle$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \langle -3, 2, 3 \rangle \cdot \langle 1, 4, -6 \rangle$$

$$= (-3 \cdot 1) + (2 \cdot 4) + (3 \cdot -6)$$

$$= -3 + 8 - 18$$

$$= -21 + 8$$

$$= -13$$

No son perpendiculares

3) Encuentre la ecuación del plano: $A(0,1,1)$ & $B(1,0,1)$ & $C(1,1,0)$:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \langle (1-0), (0-1), (1-1) \rangle$$

$$= \langle 1, -1, 0 \rangle$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = \langle (1-0), (1-1), (0-1) \rangle$$

$$= \langle 1, 0, -1 \rangle$$

$$\hat{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \ldots$$

$$\ldots = \hat{i}\left[(-1\cdot -1)-(0\cdot 0)\right] - \hat{j}\left[(1\cdot -1)-(1\cdot 0)\right] + \hat{k}\left[(1\cdot 0)-(1\cdot -1)\right]$$

$$= \hat{i}\left[1\right] - \hat{j}\left[-1\right] + \hat{k}\left[1\right]$$

$$= \langle 1, 1, 1 \rangle$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$

$$\hat{i}(x - x_0) + \hat{j}(y - y_0) + \hat{k}(z - z_0) = 0$$

$$1(x-1) + 1(y-1) + 1(z-1) = 0$$

$$x - 1 + y - 1 + z - 1 = 0$$

$$\boxed{x + y + z - 3 = 0}$$

4) Encuentre la ec. del plano que pasa $Q(1,4,-7)$ & contiene a $z = 2y = 3x$

Empieza en el origen $(0,0,0)$ ¿es porque si

$z = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 0$

$z = 2y$

$z = 3x$ $\quad \vec{w} = \underbrace{\left\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \right\rangle}_{\text{El recíproco}}$

$P(0,0,0)$

$Q(1,4,-7)$

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (1-0), (4-0), (-7-0) \rangle$$

$$\vec{u} = \langle 1, 4, -7 \rangle$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = \quad \ldots$$

$$= \hat{i}\left[\left(\tfrac{1}{2} \cdot -7\right) - (1 \cdot 4)\right] - \hat{j}\left[\left(\tfrac{1}{3} \cdot -7\right) - (1 \cdot 1)\right] + \hat{k}\left[\left(\tfrac{1}{3} \cdot 4\right) - \left(\tfrac{1}{2} \cdot 1\right)\right] =$$

$$= -\frac{15}{2}\hat{i} + \frac{10}{3}\hat{j} + \frac{5}{6}\hat{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \left\langle -\frac{15}{2}, \frac{10}{3}, \frac{5}{6} \right\rangle$$

$$= -\frac{15}{2}(x - \overbrace{x_0}^{q \cdot x}) + \frac{10}{3}(y - \overbrace{y_0}^{q \cdot y}) + \frac{5}{6}(z - \overbrace{z_0}^{q \cdot z})$$

$$= -\frac{15}{2}(x - 1) + \frac{10}{3}(y - 4) + \frac{5}{6}(z + 7)$$

5) Considere los planos:

$P_1: \; 3x + 6y - 3z = 3$ $\qquad$ $P_2: \; 2y = x - z - 2$

$P_3: \; 4x - 12y + 5z = 8$ $\qquad$ $P_4: \; 9y = 3x + 6z - 6$

a) ¿Paralelas?

b) ¿idénticas?

$(P_1 \& P_3) \vee (P_3 \& P_1)$:

$$3x + 6y - 3z = 3$$
$$4x - 12y + 5z = 8$$

$$x\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}6\\-12\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$$

no son paralelas

$(P_1 \& P_2) \vee (P_2 \& P_1)$:

$$3x + 6y - 3z = 3$$
$$x - 2y - z = 2$$

$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

no son paralelas

$(P_1 \& P_4) \vee (P_4 \& P_1)$:

$$3x + 6y - 3z = 3$$
$$3x - 9y + 6z = 6$$

$$\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix} \quad -3 \quad 3 \quad 6 \quad 6$$

No son paralelas

$(P_2 \& P_3) \vee (P_3 \& P_2)$:

$$x - 2y - 7 = 2$$
$$4x - 12y + 5z = 8$$

$$\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-2\\-12\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-7\\5\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$$

No son paralelas

$(P_2 \& P_4) \vee (P_4 \& P_2)$:

$$x - 2y - z = 2$$
$$3x - 9y + 6z = 6$$

$$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-2\\-9\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$$

No son paralelas

$(P_3 \& P_4) \vee (P_4 \& P_3)$:

$$4x - 12y + 5z = 8$$
$$3x - 9y + 6z = 6$$

$$\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-12\\-9\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$$

No son paralelas

b) No hay identicas

b)

$$\mathcal{L}_1: \quad \begin{aligned} x &= 1 + 6t \\ y &= 1 - 3t \\ z &= 12t + 5 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_2: \quad 2x - 2 = 4 - 4y = z + 1$$

$$\mathcal{L}_3: \quad \begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= t \\ z &= 1 + 4t \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_4: \quad r = \langle 3, 1, 5 \rangle + t \langle 4, 2, 8 \rangle$$

a) ¿Paralelas?

b) ¿idénticas?

```
if (paralelas) {
    verificar si son identicas,
    todos tienen que ser
    iguales;
} else {
    ¬paralelas & ¬idénticas;
}
```

$\mathcal{L}_1$ & $\mathcal{L}_3$:

$$\mathcal{L}_1: \quad \begin{aligned} x &= 1 + 6t \\ y &= 1 - 3t \\ z &= 12t + 5 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_3: \quad \begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 0t \\ z &= 1 + 4t \end{aligned}$$

$\mathcal{L}_1$ & $\mathcal{L}_3$ No son paralelas

$\mathcal{L}_1$ & $\mathcal{L}_2$:

$\mathcal{L}_1$:
$$x = 1 + 6t$$
$$y = 1 - 3t$$
$$z = 12t + 5$$

$\mathcal{L}_2$:
$$t = 2x - 2 \Rightarrow x = \frac{0t + 2}{2}$$
$$t = 4 - 4y \Rightarrow y = \frac{4 - 0t}{4}$$
$$t = z + 1 \Rightarrow z = 0t - 1$$

$\mathcal{L}_1$ & $\mathcal{L}_2$ son paralelas

Agarro los coeficientes $(1, 1, 5)$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} \\ y &= \frac{4 - 1}{4} = \frac{3}{4} \\ z &= 5 - 1 = 4 \end{aligned}\right\} \text{No iguales}$$

$\mathcal{L}_1$ & $\mathcal{L}_2$: Son paralelas pero no iguales

$\mathcal{L}_1$ & $\mathcal{L}_4$:

$\mathcal{L}_1$:
$$x = 1 + 6t$$
$$y = 1 - 3t$$

60

$\mathcal{L}_4$: $r = \langle 3, 1, 5 \rangle + t\langle 4, 2, 8 \rangle$

$x = 3 + 4t$

$y = \ldots$

$z = 12t + 5$

$x = 5 + 1t$

$y = 1 + 2t$

$z = 5 + 8t$

$\mathcal{L}_1$ & $\mathcal{L}_4$ no son paralelas.

$\mathcal{L}_3$ & $\mathcal{L}_4$:

$\mathcal{L}_3$: $x = 1 + 2t$

$y = t$

$z = 1 + 4t$

$\mathcal{L}_4$: $r = \langle 3, 1, 5 \rangle + t \langle 4, 2, 8 \rangle$

$x = 3 + 4t$

$y = 1 + 2t$

$z = 5 + 8t$

de $\mathcal{L}_3$ extraigo pt. $(1, 0, 1)$

$x = 3 + 4 = 7$

$y = 1 + 0 = 1$

$z = 5 + 8 = 13$

$\mathcal{L}_3$ & $\mathcal{L}_4$ son paralelas pero no iguales

---

$\mathcal{L}_3$ & $\mathcal{L}_2$:

$\mathcal{L}_2$: $x = \dfrac{t+2}{2}$

$y = \dfrac{4-t}{4}$

$z = t - 1$

$\mathcal{L}_4$: $x = 3 + 4t$

$y = 1 + 2t$

$z = 5 + 8t$

...alelas.

$\mathcal{L}_3$ & $\mathcal{L}_2$ no son para...

7) a)

$\mathcal{L}_1$: $x = 3 + 2t$
$y = 4 - t$
$z = 12t + 5$

$\mathcal{L}_2$: $x = 1 + 4s$
$y = 3 - 2s$
$z = 4 + 5s$

$\mathcal{L}_1$: $(3, 4, 1) + t(2, -1, 3)$ $\quad \vec{v} = \langle 2, -1, 3 \rangle$

$\mathcal{L}_2$: $(1, 3, 4) + s(4, -2, 5)$ $\quad \vec{u} = \langle 4, -2, 5 \rangle$

a.1) ¿Paralelas?

$$\underbrace{\vec{u} = k\vec{v}}_{\text{Para ser paralelas}}$$

$$(4, -2, 5) = k(2, -1, 3)$$

$4 = 2k \Rightarrow k = 2$
$-2 = -1k \Rightarrow k = 2$
$5 = 3k \Rightarrow k = 5/3$

$\therefore$ No son vectores paralelos

a.2) ¿Pts en común?

Capítulo9

Tarea #05

Tarea #5 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 13 de febrero

Nombre:_____ **Carnet:** _____

Tema:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	10	20	30	20	20	100
Nota:						

1. Analice si la función $\mathbf{r} = \left\langle 3e^{-t}, \dfrac{\sin^2(\pi t)}{t}, \tan(2\pi t) \right\rangle$ es continua en:
   (a) (6 pts.) $t = 0$
   (b) (4 pts.) $t = 1$

2. Determine el límite de las siguientes funciones
   (a) (10 pts.) $\lim\limits_{t\to 0} \left\langle e^{-3t}, \dfrac{t^2}{\sin^2(t)}, \cos(2t) \right\rangle$
   (b) (10 pts.) $\lim\limits_{t\to \infty} \left\langle \dfrac{1+t^2}{1-t^2}, \arctan(t), \dfrac{1-e^{-2t}}{t} \right\rangle$

3. Dada $\mathbf{r}(t) = \langle \sin(2t), t^2, \cos(2t) \rangle$, encuentre:
   (a) (5 pts.) $r'(t)$
   (b) (8 pts.) $r''(t)$
   (c) (8 pts.) $r''(t) \cdot r'''(t)$
   (d) (9 pts.) $r'' \times r'(t)$

4. (20 pts.) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva $x = t,\ y = e^{-t},\ z = 2t - t^2$ en el punto $(0, 1, 0)$.

5. (20 pts.) Las curvas $\mathbf{r}_1 = \langle \sin t, t^2, t^4 \rangle$ y $\mathbf{r}_2 = \langle \sin t, \sin(2t), t^3 \rangle$ se cortan en el origen. Encuentre el coseno del ángulo de intersección entre las dos rectas tangentes a $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$.

Capítulo10

Tarea #05

TAREA #5 - DAVID CORZO - 20190432 - 2020-02-10

1.a) $r = \left\langle 3e^{-t}, \dfrac{\sin^2(\pi t)}{t}, \tan(2\pi t) \right\rangle$

¿Continua en $t = 0$?

$$\lim_{a \to 0} (r) = \left\langle \underbrace{\lim_{a \to 0}\left(3e^{-t}\right)}_{f(t)}, \underbrace{\lim_{a \to 0}\left(\frac{\sin^2(\pi t)}{t}\right)}_{g(t)}, \underbrace{\lim_{a \to 0}\left(\tan(2\pi t)\right)}_{h(t)} \right\rangle$$

$$\lim_{a \to 0}\left(f(t)\right) = \lim_{a \to 0}\left(3e^{-t}\right)$$

$$= 3e^{-0}$$

$$= \boxed{3}$$

$$\lim_{a \to 0}\left(g(t)\right) = \lim_{a \to 0}\left(\frac{\sin^2(\pi t)}{t}\right) \quad \frac{0}{0}$$

$$\overset{LH}{=} \lim_{a \to 0}\left(\frac{2\sin(\pi t)\cdot\cos(\pi t)\cdot\pi}{1}\right)$$

$$= \lim_{a \to 0}\left(2\sin(\pi t)\cos(\pi t)\cdot\pi\right)$$

$$= 2\sin(\pi\cdot 0)\cos(\pi\cdot 0)\cdot\pi = \boxed{0}$$

$$\lim_{a \to 0}\left(h(t)\right) = \lim_{a \to 0}\left(\tan(2\pi t)\right)$$

$$= \tan(2\pi\cdot 0) = \boxed{0}$$

$$\lim_{a\to 0}(r) = \langle 3, 0, 0 \rangle$$

Discontinuidad

$$r(0) = \left\langle 3 \,,\, \frac{0}{0} \,,\, 0 \right\rangle$$

$\therefore$ No es continua en $t=0$ ya que

$$\lim_{a\to 0}(r) \neq r(0)$$

1.b)

$$\lim_{a\to 1}(r) = \lim_{a\to 1}\left(\left\langle \underbrace{3e^{-t}}_{f(t)}, \underbrace{\frac{\sin^2(\pi t)}{t}}_{g(t)}, \underbrace{\tan(2\pi t)}_{h(t)} \right\rangle\right)$$

$$\lim_{a\to 1}(f(t)) = \lim_{a\to 1}(3e^{-t})$$

$$= 3e^{-1} = \boxed{\frac{3}{e}}$$

$$\lim_{a\to 1}(g(t)) = \lim_{a\to 1}\left(\frac{\sin^2(\pi t)}{t}\right)$$

$$= \frac{\sin^2(\pi)}{1} = \sin^2(\pi) = \boxed{0}$$

$$\lim_{a\to 1}(h(t)) = \lim_{a\to 1}(\tan(2\pi t))$$

$$= \tan(2\pi) = \boxed{0}$$

$$\lim_{a \to 1} (r) = \left\langle \frac{3}{e}, 0, 0 \right\rangle$$

$$r(1) = \left\langle \frac{3}{e}, 0, 0 \right\rangle$$

Sí es continua en $t = 1$ ya que

$$\lim_{a \to 1} (r) = r(0)$$

2) Determine el límite de las sigs funciones.

2a) $$\lim_{t \to 0} \left(\left\langle \underbrace{e^{-3t}}_{f(t)}, \underbrace{\frac{t^2}{\sin^2(t)}}_{g(t)}, \underbrace{\cos(2t)}_{h(t)} \right\rangle \right)$$

$$\lim_{a \to 0} (f(t)) = \lim_{a \to 0} (e^{-3t})$$

$$= e^{-3 \cdot 0} = e^0 = 1$$

$$\lim_{a \to 0} (g(t)) = \lim_{a \to 0} \left(\frac{t^2}{\sin^2(t)} \right) \leftarrow \frac{0}{0} \text{ indef.}$$

$$\overset{LH}{=} \lim_{a \to 0} \left(\frac{\cancel{2}t}{\cancel{2}\sin(t)\cos(t)} \right) \leftarrow \frac{0}{0} \text{ indef}$$

$f'g + fg'$

$$\overset{LH}{=} \lim_{a \to 0} \left(\frac{1}{\cos^2(t) - \sin^2(t)} \right)$$

$$= \frac{1}{1^2 - 0} = 1$$

$$\lim_{a \to 0} \left(h(t) \right) = \lim_{a \to 0} \left(\cos(2t) \right)$$

$$= \boxed{1}$$

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \left(\left\langle e^{-3t}, \frac{t^2}{\sin^2(t)}, \cos(2t) \right\rangle \right) = \langle 1, 1, 1 \rangle}$$

2 b) $$\lim_{t \to \infty} \left(\left\langle \underbrace{\frac{1+t^2}{1-t^2}}_{f(t)}, \underbrace{\arctan(t)}_{g(t)}, \underbrace{\frac{1-e^{-2t}}{t}}_{h(t)} \right\rangle \right)$$

$$\lim_{a \to \infty} \left(f(t) \right) = \lim_{a \to \infty} \left(\frac{1+t^2}{1-t^2} \right) \leftarrow \frac{\infty}{\infty}$$

$$\overset{LH}{=} \lim_{a \to \infty} \left(\frac{0 + 2t}{0 - 2t} \right)$$

$$= \lim_{a \to \infty} \left(\frac{2t}{-2t} \right) = \boxed{-1}$$

$$\lim_{a \to \infty} \left(g(t) \right) = \lim_{a \to \infty} \left(\arctan(t) \right)$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{a \to \infty} \left(h(t) \right) = \lim_{a \to \infty} \left(\frac{1 - e^{-2t}}{t} \right) \leftarrow \frac{1^{\infty}}{\infty}$$ algo así.

$$\overset{LH}{=} \lim_{a \to \infty} \left(\frac{-e^{-2t} \cdot 2}{1} \right)$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(e^{-2t}\right) = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{e^{2t}}\right) \leftarrow \frac{1}{\infty} \to \emptyset$$

$$= \boxed{\emptyset}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\left\langle \frac{1+t^2}{1-t^2}, \arctan(t), \frac{1-e^{-2t}}{t}\right\rangle\right) = \left\langle -1, \frac{\pi}{2}, \emptyset\right\rangle$$

3) $r = \langle \sin(2t), t^2, \cos(2t)\rangle$

a) $r'(t)$

$$r'(t) = \langle 2\cos(2t), 2t, -\sin(2t)\cdot 2\rangle$$

b) $r''(t)$

$$r''(t) = \langle -4\sin(2t), 2, -\cos(2t)\cdot 4\rangle$$

c) $r''(t) \cdot r'''(t)$

$$r'''(t) = \langle -8\cos(2t), \emptyset, \sin(2t)\cdot 8\rangle$$

$$= \langle -4\sin(2t), 2, -4\cos(2t)\rangle \cdot \langle -8\cos(2t), \emptyset, 8\sin(2t)\rangle$$

$$= [-4\sin(2t)\cdot -8\cos(2t)] + [2\cdot\emptyset] + [-4\cos(2t)\cdot 8\sin(2t)]$$

$$= 32\sin(2t)\cos(2t) - 32\sin(2t)\cos(2t)$$

$$= \boxed{\emptyset}$$

d) $r''(t) \times r'(t)$

$$r''(t) = \langle -4\sin(2t),\ 2,\ -\cos(2t)\cdot 4 \rangle$$

$$r'(t) = \langle 2\cos(2t),\ 2t,\ -\sin(2t)\cdot 2 \rangle$$

$$r''(t) \times r'(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -4\sin(2t) & 2 & -4\cos(2t) \\ 2\cos(2t) & 2t & -2\sin(2t) \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{i}\left[(2)(-2\sin(2t)) - (2t)(-4\cos(2t))\right] -$$

$$\hat{j}\left[(-4\sin(2t))(-2\sin(2t)) - (2\cos(2t))(-4\cos(2t))\right] +$$

$$\hat{k}\left[(-4\sin(2t))(2t) - (2\cos(2t))(2)\right] =$$

$$= \hat{i}\left[-4\sin(2t) + 8t\cos(2t)\right] -$$

$$\hat{j}\left[8\sin^2(2t) + 8\cos^2(2t)\right] +$$

$$\hat{k}\left[-8t\sin(2t) - 4\cos(2t)\right]$$

$$= \langle -4\sin(2t) + 8t\cos(2t),\ -8,\ -8t\sin(2t) - 4\cos(2t) \rangle$$

4) $x = t$

$y = e^{-t}$ $\qquad P(0,1,0)$

$z = 2t - t$

Encontramos t

$x: \quad t = 0 \Rightarrow t = 0$

$y: \quad e^{-t} = 1 \Rightarrow t = 0$

$z: \quad 2t - t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$

Armamos $\vec{r}$

$\vec{r}(t) = \langle t, e^{-t}, 2t - t^2 \rangle$

$\vec{r}(0) = \langle 0, 1, 0 \rangle$

Derivamos:

$\vec{r}\,'(t) = \langle 1, -e^{-t}, 2 - 2t \rangle$

$\vec{r}\,'(0) = \langle 1, -1, 2 \rangle$

Armamos la fórmula de recta tangente a vector:

$$\vec{r}_T = \vec{r}(a) + t\,\vec{r}\,'(a)$$

$a = 0$

$$\vec{r}_T = \langle 0, 1, 0 \rangle + t\langle 1, -1, 2 \rangle$$

Ecs. Paramétricas:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 0 + 1t \\ y &= 1 - 1t \\ z &= 0 + 2t \end{aligned}}$$

5) $r_1 = \langle \sin(t), t^2, t^4 \rangle$

$r_2 = \langle \sin(t), \sin(2t), t^3 \rangle$

$\vec{r}_1\,'(t) = \langle \cos(t), 2t, 4t^3 \rangle$

$\vec{r}_1\,'(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle$

$\vec{r}_2\,'(t) = \langle \cos(t), 2\cos(2t), 3t^2 \rangle$

$$\vec{r}_2{}'(0) = \langle 1, 2, 0 \rangle$$

Evaluar el ángulo:

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle 1, 0, 0 \rangle \cdot \langle 1, 2, 0 \rangle}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{1 + 0 + 0}{1 \cdot \sqrt{5}}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

Capítulo11

Tarea #06

Tarea #6 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 20 de febrero

Nombre:_____ **Carnet:** _____

Tema:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	25	15	15	15	30	100
Nota:						

1. Evalúe las siguientes integrales:
   (a) (8 pts.) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{4}{1+t^2}j + \frac{2t}{1+t^2}k\right) dt$
   (b) (9 pts.) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin^2(t)\cos(t)i + 3\sin(t)\cos^2(t)j + 2\sin(t)\cos(t)k)dt$
   (c) (8 pts.) $\displaystyle\int \left(te^t i + t^2\ln(t)j + \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}k\right) dt$

2. Dada la posición $\mathbf{r}(t) = ti + \sin(3t)j + \cos(3t)k$ encuentre:
   (a) (5 pts.) la función de velocidad.
   (b) (5 pts.) la función de aceleración.
   (c) (5 pts.) la función de rápidez.

3. Dada la aceleración $\mathbf{a}(t) = \langle e^t,\ \sin t\cos t,\ \dfrac{1}{(t+1)^2}\rangle$, la velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = \langle 3, -1, 2\rangle$ y la posición inicial $\mathbf{r}(0) = \langle 0, 2, 0\rangle$, encuentre:
   (a) (7 pts.) la función de velocidad.
   (b) (8 pts.) la función de posición.

4. (15 pts.) Calcule la longitud de arco de la helice circular de la ecuación vectorial $r(t) = \cos(t)i + \sin(t)ij + tk$ desde el punto $(1, 0, 0,)$ hasta el punto $(1, 0, 2\pi)$.

5. Encuentre y bosqueje el dominio de las siguientes funciones:
   (a) (10 pts.) $f(x, y) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}$
   (b) (10 pts.) $g(x, y) = \dfrac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$
   (c) (10 pts.) $h(x, y) = \dfrac{9}{9-x-y}$

Capítulo12

Tarea #06

1) Evalúe las integrales:

a) $$\int_0^1 \left(\underbrace{\frac{4}{1+t^2}\hat{j}}_{f(t)} + \underbrace{\frac{2t}{1+t^2}\hat{k}}_{g(t)} \right) dt$$

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \left(\frac{4}{1+t^2} \right) dt$$

$$= 4 \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^2} \right) dt$$

$$= 4 \arctan(t) \Big|_0^1$$

$$= 4 \left\{ \arctan(1) - \arctan(0) \right\}$$

$$= 4 \left\{ \frac{\pi}{4} - 0 \right\} = \boxed{\pi}$$

$$\int_0^1 g(t)\,dt = \int_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2} \right) dt$$

$$u = 1 + t^2$$
$$du = 2t\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{du}{u} \right)$$

$$= \ln|1+t^2| \Big|_0^1$$

$$= \left\{ \ln(2) - \cancel{\ln(1)}^{\,0} \right\} = \boxed{\ln(2)}$$

$$\therefore \quad \langle 0 , \pi , \ln(2) \rangle$$

b) $$\int^{\frac{\pi}{2}} \left(3\sin^2(t)\cos(t)\hat{i} + 3\sin(t)\cos^2(t)\hat{j} + 2\sin(t)\cos(t)\hat{k} \right) dt$$

$$\int_0 \Big(\underbrace{\qquad\qquad}_{f(t)} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{g(t)} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{h(t)} \Big)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos(t)\,dt$$

$$u = \sin(t)$$
$$du = \cos(t)\,dt$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2\,du$$

$$= \frac{3}{3}u^3 = \sin^3(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left\{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin^3(0)\right\}$$

$$= \boxed{1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\sin(t)\cos^2(t)\Big)\,dt$$

$$u = \cos(t)$$
$$-du = \sin(t)\,dt$$

$$= -3\int_{u(0)}^{u(\frac{\pi}{2})} u^2\,du$$

$$= -\frac{3}{3}u^3\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0)\right\}$$

$$= -\{0 - 1\} = \boxed{1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t)\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\sin(t)\cos(t)\Big)\,dt$$

$$u = \sin(t)$$
$$du = \cos(t)\,dt$$

$$= 2\int_{u(0)}^{u(\frac{\pi}{2})} u\,du$$

$$= u^2\Big|^{u(\frac{\pi}{2})=1} = \{1^2 - 0\} = \boxed{1}$$

$|u(0)=0$ ( )

$$\therefore \langle 1, 1, 1 \rangle$$

3) $$\int \left(\underbrace{te^t \hat{i}}_{f(t)} + \underbrace{t^2 \ln(t) \hat{j}}_{g(t)} + \underbrace{\frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}} \hat{k}}_{h(t)} \right) dt$$

$$\int f(t)\,dt = \int \underbrace{te^t}\,dt$$

$u = t \qquad dv = e^t\,dt$

$du = dt \qquad v = e^t$

$$= te^t - \int e^t\,dt$$

$$= \boxed{te^t - e^t + C_1}$$

$$\int g(t)\,dt = \int t^2 \ln(t)\,dt$$

$u = \ln(t) \qquad dv = t^2\,dt$

$du = \frac{1}{t}\,dt \qquad v = \frac{1}{3}t^3$

$$= \ln(t) \cdot \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}\int \frac{t^3}{t}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3 \ln(t) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}t^3 + C_2$$

$$\boxed{= \frac{1}{3}t^3 \ln(t) - \frac{1}{9}t^3 + C_2}$$

$$\int h(t)\,dt = \int \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}\,dt$$

$u = e^t$

$du = e^t\,dt$

$\int \quad du$

$$= \int \frac{\quad}{\sqrt{1 - w^2}}$$

$$= \arcsin(w) + C_3$$

$$\boxed{= \arcsin(e^t) + C_3}$$

$$\therefore \left\langle te^t - e^t + C_1 \,,\, \frac{1}{3} t^3 \ln(t) - \frac{1}{9} t^3 + C_2 \,,\, \arcsin(e^t) + C_3 \right\rangle$$

---

2) Dada la posición $r(t) = t\hat{\imath} + \sin(3t)\hat{\jmath} + \cos(3t)\hat{k}$

a) Encuentre la función de velocidad:

$$r'(t) = v(t) = \hat{\imath} + \cos(3t)\cdot 3\,\hat{\jmath} + \sin(3t)\cdot 3\,\hat{k}$$

b) Encuentre la función de aceleración:

$$r''(t) = a(t) = 0\hat{\imath} - 3\sin(3t)\cdot 3\,\hat{\jmath} + 3\cdot 3\cos(3t)\,\hat{k}$$

c) Encuentre la función de rapidez:

$$|v(t)| = \sqrt{(1)^2 + (3\cos(3t))^2 + (3\sin(3t))^2}$$

$$= \sqrt{1 + 9\cos^2(3t) + 9\sin^2(3t)}$$

$$= \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

---

3) Dada la función de aceleración:

$$a(t) = \left\langle e^t \,,\, \sin(t)\cos(t) \,,\, \frac{1}{(t+1)^2} \right\rangle$$

$$v(0) = \langle 3 \quad -1 \quad 2 \rangle$$

$v(0) = \langle 3, -1, 2 \rangle$

$p(0) = \langle 0, 2, 0 \rangle$

a) Encontrar la función de aceleración:

$$\int a(t)\,dt = v(t)$$

$$a(t) = \langle \underbrace{e^t}_{f(t)}, \underbrace{\sin(t)\cos(t)}_{g(t)}, \underbrace{\frac{1}{(t+1)^2}}_{h(t)} \rangle$$

$$\int f(t)\,dt = \boxed{e^t + C_1}$$

$$\int g(t)\,dt = \int \sin(t)\cos(t)\,dt = \boxed{\frac{1}{2}\sin^2(t) + C_2}$$

$u = \sin(t)$

$du = \cos(t)dt$

$$\int h(t)\,dt = \int \frac{1\,dt}{(t+1)^2} = \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{-2+1}u^{-2+1} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{t+1} + C_3$$

$u = t + 1$

$du = 1\,dt$

$$\boxed{= -\frac{1}{t+1} + C_3}$$

$$v(t) = \langle e^t + C_1, \frac{1}{2}\sin^2(t) + C_2, -\frac{1}{t+1} + C_3 \rangle$$

Encontrar constantes

$v(0) = \langle 3, -1, 2 \rangle$

$e^0 + C_1 = 3$

$1 + C_1 = 3$

$C_1 = 3 - 1$

$C_1 = 2$

$\frac{1}{2}\sin^2(0) + C_2 = -1$

$0 + C_2 = -1$

$C_2 = -1$

$$-\frac{1}{0+1} + C_3 = 2$$

$$-1 + C_3 = 2$$

$$C_3 = 2 + 1$$

$$C_3 = 3$$

función de velocidad:

$$v(t) = \left\langle e^t + 2,\ \frac{1}{2}\sin^2(t) - 1,\ -\frac{1}{t+1} + 3 \right\rangle$$

---

b) función posición:

$$\int v(t)\,dt = r(t)$$

$$v(t) = \left\langle \underbrace{e^t + 2}_{f(t)},\ \underbrace{\frac{1}{2}\sin^2(t) - 1}_{g(t)},\ \underbrace{-\frac{1}{t+1} + 3}_{h(t)} \right\rangle$$

$$\int f(t)\,dt = \int (e^t + 2)\,dt$$

$$\boxed{= e^t + 2t + C_1}$$

$$\int g(t)\,dt = \frac{1}{2}\int (\sin^2(t) - 1)\,dt = -\frac{1}{2}\int \cos^2(t)\,dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int (1 - \cos(2t)\,dt$$

$$\boxed{= -\frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right) + C_2}$$

$$\int h(t)\,dt = -\int \left(\frac{1}{t+1} + 3\right)dt = -\left(\ln|t+1| + 3t\right) + C_3$$

$$\boxed{= -\ln|t+1| + 3t + C_3}$$

Encontrar constantes

$$r(0) = \langle 0, 2, 0 \rangle$$

$$e^0 + 2(0) + C_1 = 0$$

$$1 + 0 + C_1 = 0$$

$$-\frac{1}{4}\left(0 - \frac{1}{2}\sin(2\cdot 0)\right) + C_2 = 2$$

$$-\frac{1}{4}\cancel{0}^{\,0} + \frac{1}{2}\cancel{\sin(0)}^{\,0} + C_2 = 2$$

$C_1 = -1$

$C_2 = 2$

$$-\ln|0+1| + 3(0) + C_3 = 0$$

$$0 + 0 + C_3 = 0$$

$$C_3 = 0$$

funcione posición :

$$r(t) = \left\langle e^t + 2t - 1,\ -\frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right) + 2,\ -\ln|t+1| + 3t + 0 \right\rangle$$

4) Calcule la longitud de arco de la helice circular de la ecuación vectorial:

$$r(t) = \cos(t)\,\hat{\imath} + \sin(t)\,\hat{\jmath} + t\,\hat{k}$$

desde el punto $(1,0,0)$ hasta el punto $(1,0,2\pi)$.

$$L = \int_a^b |r'(t)|\,dt$$

$$r'(t) = -\sin(t)\,\hat{\imath} + \cos(t)\,\hat{\jmath} + \hat{k}$$

$$|r'(t)| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1}$$

$$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\,t \Big|_{a=0}^{b=2\pi}$$

$$= \sqrt{2}\cdot\{2\pi - 0\} = \sqrt{2}\cdot 2\pi$$

$P(1,0,0)$ & $Q(1,0,2\pi)$

$$r(t) = \langle \cos(t), \sin(t), t \rangle$$

$x = \cos(t)$ $\quad$ $\cos(t) = 1 \rightarrow t = 0$

$y = \sin(t)$ $\quad$ $\sin(t) = 0 \rightarrow t = 0$

$z = t$ $\quad$ $t = 0 \longrightarrow t = 0$

$\cos(t) = 1 \rightarrow t = 2\pi$

$\sin(t) = 0 \rightarrow t = 2\pi$

$t = 2\pi \rightarrow t = 2\pi$

5) a) $f(x,y) = \underbrace{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-y^2}$

$1 - x^2 \geq 0$

$-x^2 \geq -1$

$x^2 \leq 1$

$x \leq \pm 1$

$-1 \leq x \leq 1$

$1 - y^2 \geq 0$

$-y^2 \geq -1$

$y^2 \leq 1$

$y \leq \pm 1$

$-1 \leq y \leq 1$

$D: \mathbb{R}^2 - \{1 - x^2 \leq 0\}$ &

$\{1 - y^2 \leq 0\}$

$\therefore$ El dominio está definido tal que:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-1 \leq x \leq 1) \ \& \ (-1 \leq y \leq 1)\}$$

b) $g(x,y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

$y - x^2 \geq 0$

$y \geq x^2$

$1 - x^2 \neq 0$

$-x^2 \neq -1$

$x^2 \neq 1$

$x \neq \pm 1$

$\therefore$ El dominio está definido tal que:

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y \geq x^2) \ \& \ (x \neq \pm 1)\}$

c) $h(x,y) = \dfrac{9}{9 - x - y}$

$9 - x - y \neq 0$

$-x - y \neq -9$

$x + y \neq 9$

$\neg(y = 9 - x)$ #excluir

$\therefore$ El dominio está definido tal que:

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y \neq 9)\}$

$y \neq 9 - x$

Capítulo13

Tarea #08

Tarea #8 Cálculo Multivariable

Entrega, jueves 05 de marzo

Nombre:_____ **Carnet:** _____

Tema:	1	2	3	4	5	Total
Puntos:	20	32	24	24	20	120
Nota:						

1. Encuentre dy/dx.

   (a) (10 pts.) $y\tan^{-1}(x) = x\sin^{-1}(y) + x^2y^2$

   (b) (10 pts.) $yx + x^3\ln y = (x^2+y^2)^2$

2. Encuentre las derivadas parciales de z para las sigs. funciones implícitas.

   (a) (16 pts.) $\sin(xy) + \cos(yz) = \cot(zx)$

   (b) (16 pts.) $\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2} = \dfrac{1}{x - 2y - 3z}$

3. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.

   (a) (12 pts.) $z = \dfrac{2x+3}{4y+1}, \qquad (0,0,0)$

   (b) (12 pts.) $z = \sec(xy^2), \qquad \left(\dfrac{\pi}{3}, 1, 2\right)$

4. Encuentre la aproximación lineal $L(x,y)$ de la función en el punto indicado.

   (a) (12 pts.) $z = \dfrac{x}{x+y}, \qquad (\ 4, -2\ )$

   (b) (12 pts.) $z = e^{-xy}\sin(y), \qquad \left(\ \dfrac{\pi}{2},\ 0\ \right)$

5. Encuentre las ecuaciones paramétricas de las rectas tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto indicado. L_1 es la tangente en la dirección de x y L_2 es la tangente en la dirección de y.

   (a) (10 pts.) $z = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad (3,4)$

   (b) (10 pts.) $z = 2\sin^2(3x-2y) + 4\cos^2(x+y), \qquad \left(\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}\ \right)$

   Recuerde encontrar una función vectorial para encontrar la recta tangente a la superficie $z = f(x,y)$.

Dirección-x	Dirección-y
$x = t$	$x = a$
$y = b$	$y = t$
$z = f(t,b)$	$z = f(a,t)$

Parte III

Examenes Cortos

Capítulo14

Examen corto #01

Corto #1 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: David Corzo **Carnet:** 20190432

Resuelva las siguientes problemas:

1. (50 pts.) Halle la ecuación de la esfera con centro $(3, -6, 4)$ y radio 5. 10
   ¿Cuál es la intersección de esta esfera con el plano xz?

Ecuación :

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+6)^2+(z-4)^2} = 10$$

25

se asume $y = 0$;

$$\sqrt{(x-3)^2+(z-4)^2+(6)^2} = 10$$

$$(x-3)^2+(z-4)^2+36 = 10^2$$

$$(x-3)^2+(z-4)^2 = 100-36$$

Intersección : $(x-3)^2+(z-4)^2 = 64$

25

2. (50 pts.) Determine la distancia mínima del punto $(4, -2, 6)$ al plano xz.

La distancia mínima es 2.

50

100/100

Capítulo15

Examen corto #03

Corto #3 Cálculo Multivariable (20 min)

~~100~~ 90/100

Nombre: David Corzo **Carnet:** 20190432

Resuelva los siguientes problemas:

1. (50 pts.) Determine el área del triángulo entre los puntos $P = (0, -2, 0)$, $Q = (4, 1, -2)$ y $R = (5, 3, 1)$.

$$T_\Delta = \frac{1}{2}\left|\vec{u} \times \vec{w}\right|$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (4-0), (1-(-2)), (-2-0)\rangle = \langle 4, 3, -2\rangle$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{PR} = \langle (5-0), (3-(-2)), (1-0)\rangle = \langle 5, 5, 1\rangle$$

$$\left|\vec{u} \times \vec{w}\right| = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left[(3\cdot 1)-(-2\cdot 5)\right] - \hat{\jmath}\left[(4\cdot 1)-(-2\cdot 5)\right] + \hat{k}\left[(4\cdot 5)-(3\cdot 5)\right]$$

$$= \hat{\imath}\left[3 + 10\right] - \hat{\jmath}\left[4 + 10\right] + \hat{k}\left[20 - 15\right]$$

$$= 13\hat{\imath} - 14\hat{\jmath} + 5\hat{k}$$

$$= \langle 13, -14, 5\rangle$$

$$= \sqrt{(13)^2 + (-14)^2 + (5)^2}$$

$$= \sqrt{169 + 496 + 25}$$

$$= \sqrt{690}$$

$$\boxed{\therefore \frac{1}{2}\sqrt{690}}$$

40

2. (50 pts.) Encuentre el volumen del paralelelípipedo determinado por los vectores $a = \langle 1, 5, -2\rangle$, $b = \langle 3, -1, 0\rangle$, y $c = \langle 5, 9, -4\rangle$.

$$P_\square = \left|c \cdot (a \times b)\right|$$

$$(a \times b) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left[(5\cdot 0)-(-2\cdot -1)\right] - \hat{\jmath}\left[(1\cdot 0)-(-2\cdot 3)\right] + \hat{k}\left[(1\cdot -1)-(5\cdot 3)\right]$$

$$= \hat{\imath}\left[0 - 2\right] - \hat{\jmath}\left[0 + 6\right] + \hat{k}\left[-1 - 15\right]$$

$$= -2\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - 16\hat{k}$$

$$= \langle -2, -6, -16\rangle$$

$$c \cdot (a \times b) = \langle 5, 9, -4\rangle \cdot \langle -2, -6, -16\rangle$$

$$= (5 \cdot -2) + (9 \cdot -6) + (-4 \cdot -16)$$

$$= (-10) + (-54) + 64$$

$$= -64 + 64 = 0$$

Hay un plano no un paralelelipipedo

$$\cancel{\left|c \cdot (a \times b)\right| = \sqrt{(-10)^2 + (-54)^2 + (-64)^2} = \sqrt{100 + 2916 + 4086} = \sqrt{7102}}$$

50

Parte IV

Material y documentos de apoyo

Capítulo16

Material o documento de apoyo #Cr

CÁLCULO MULTIVARIABLE 1er Semestre 2020

1. Información General del Curso

Libro de Texto:

- Stewart, James. Cálculo. Trascendentes Tempranas. Octava Edición. Cengage Learning. México, 2013. ISBN: 978-607-526-548-3
- Ketelaar, Christiaan. Cálculo Multivariable. Cuaderno de Trabajo. Editorial Arjé. 2018. ISBN: 978-1720958307.
- Cualquier otro texto de Cálculo (Leithold, Thomas y Anton) se puede utilizar como texto de apoyo.

Requisito: Cálculo Integral

Se recomienda utilizar una calculadora ó un software como Desmos o Geogebra para realizar ejercicios y laboratorios.

2. Descripción del Curso

El curso comprende cuatro unidades: en la primera se abordan los vectores y la geometría del espacio; en la segunda se tratan las funciones vectoriales, la tercera es acerca de las derivadas parciales y sus aplicaciones; por último, la cuarta unidad comprende las integrales múltiples y sus diversas aplicaciones. Para lograr comprender estos temas, es necesario que el estudiante comprenda los temas de Cálculo Diferencial e Integral.

Este curso está organizado en línea por medio de la plataforma MiU. En esta plataforma voy a hacer anuncios, mantener comunicación electrónica y publicar materiales del curso como notas de clase, laboratorios, soluciones de exámenes, etc.

3. Objetivos

Objetivo General: Proporcionar al estudiante una sólida base conceptual y práctica en el cálculo multivariable que le permita profundizar en las áreas de su competencia y estar capacitado para abordar áreas afines.

Objetivos Específicos

- Entender el concepto de un vector, operaciones vectoriales y aplicaciones de los vectores.
- Conocer y resolver problemas que involucren funciones vectoriales.
- Conocer el concepto de derivadas parciales y aplicarlas para resolver problemas aplicados a la ingeniería.
- Resolver problemas de optimización de varias variables y con restricciones.
- Conocer el concepto de integrales múltiples y aplicarlas en diversos contextos de ingeniería.

4. Evaluación

Se impartirán clases teóricas 2 días por semana y un día de laboratorio.

El curso tiene dos modalidades de evaluación. En la Modalidad A se realizan ejercicios en WebAssign de 5 pts. para tener un final de 20 pts, mientras que en la Modalidad B no se realizan ejercicios de WebAssign y se tiene un final de 25 pts.

Actividad	Modalidad A	Modalidad B
Exámenes Cortos (9)	9 %	9
Laboratorios (10)	10 %	10
Ejercicios WebAssign	5 %	0
Exámenes Parciales (4)	56 %	56
Examen Final	20 %	25
TOTAL	100 %	100

Ejercicios WebAssign: Cada semana se estarán subiendo ejercicios de WebAssign los cuales se deben realizar y entregar en línea.

Exámenes Cortos: Los exámenes cortos se pueden programar durante la sesión de laboratorio o los días martes durante la clase. El contenido de estos exámenes consistirá de los temas de clase, hojas de trabajo y laboratorios vistos en los días anteriores. Previo a los exámenes parciales, los exámenes cortos consistirán de exámenes parciales de simulacro de 1 hora que se realizarán durante la sesión de laboratorio. Van a haber más de diez exámenes cortos, por lo que sólo las nueve notas más altas entre todos los cortos se tomarán en cuenta.

Laboratorios: Durante la sesión de laboratorio semanal, los estudiantes completarán una serie de ejercicios sobre temas que se vieron en la semana anterior de clases. El estudiante deberá trabajar su laboratorio de manera individual pero puede recibir ayuda por parte del instructor. Van a haber más de 10 laboratorios, por lo que sólo los 10 notas más altas se tomarán en cuenta.

Exámenes Parciales: Van a haber tres exámenes parciales en las fechas y horarios listadas abajo. Los contenidos específicos de cada examen parcial serán anunciados con anticipación.

Examen Parcial 1: Miércoles, 19 de febrero, 2:30 PM
Examen Parcial 2: Miércoles, 18 de marzo, 2:30 PM
Examen Parcial 3: Viernes, 3 de abril, 11:30 AM
Examen Parcial 4: Jueves, 7 de mayo, 11:30 AM
Examen Final: Jueves, 14 de mayo,

Una vez entregado el examen parcial el estudiante tiene un período posterior de 2 DÍAS para solicitar la revisión del mismo.

5. Temas

1. **Vectores y Geometría en el Espacio**
2. **Funciones Vectoriales**
3. **Derivadas Parciales**
4. **Integrales Múltiples**

Algunos temas se pueden presentar en un orden diferente o con un enfoque diferente al del libro de texto (Consulte el cronograma tentativo en la página 3.)

CRONOGRAMA

Sesión	Dia	Fecha	Tema
01	Mar	07 Ene	12.1.1 Sistemas 3-D y Planos
02	Jue	09 Ene	12.1.2 Distancias y Superficies Básicas
03	Mar	14 Ene	12.2 Vectores
04	Jue	16 Ene	12.3 Producto Punto
05	Mar	21 Ene	12.4 Producto Cruz
06	Jue	23 Ene	12.5 Ecuaciones de Rectas y Planos
07	Mar	28 Ene	13.1 Funciones vectoriales y curvas en el espacio
08	Jue	30 Ene	13.2 Derivadas e integrales de funciones vectoriales
09	Mar	04 Feb	13.4 Movimiento en el espacio: velocidad y aceleración
10	Jue	06 Feb	13.3 Longitud de arco
11	Mar	11 Feb	14.1 Funciones de Varias Variables
12	Jue	13 Feb	12.6 Superficies Cuádricas
13	Mar	18 Feb	Repaso
	Mie	19 Feb	**EXAMEN PARCIAL 1**
14	Jue	20 Feb	14.3 Derivadas Parciales
15	Mar	25 Feb	14.4 Planos Tangentes y Aproximaciones Lineales
16	Jue	27 Mar	14.5 Regla de la Cadena
17	Mar	03 Mar	14.6 Derivadas Direccionales y Gradientes
18	Jue	05 Mar	14.7 Valores Máximos y mínimos
19	Mar	10 Mar	14.8 Multiplicadores de Lagrange
20	Jue	12 Mar	14.8 Multiplicadores de Lagrange
21	Mar	17 Mar	Repaso
	Mie	18 Mar	**EXAMEN PARCIAL 2**
22	Jue	19 Mar	15.1 Integrales Dobles
23	Mar	24 Mar	15.2 Integrales Iteradas
24	Jue	26 Mar	15.3 Integrales Dobles sobre regiones generales
25	Mar	31 Mar	15.4 Integrales Dobles coordenadas polares
26	Jue	02 Abr	Repaso
	Vie	03 Abr	**EXAMEN PARCIAL 3**
			Semana Santa 6-10 abril
27	Mar	14 Abr	15.6 Área Superficial
28	Jue	16 Abr	15.7 Integrales Triples Cartesianas
29	Mar	21 Abr	15.8 Integrales Triples Cilíndricas
30	Jue	23 Abr	15.8 Integrales Triples Cilíndricas
31	Mar	28 Abr	15.9 Integrales Triples Esféricas
32	Jue	30 Abr	15.9 Integrales Triples Esféricas
33	Mar	05 May	Repaso
34	Jue	07 May	**EXAMEN PARCIAL 4**
	Jue	14 May	**EXAMEN FINAL**

6. Políticas del Curso

- **Cambio de Fechas:** Cualquier cambio a las fechas y contenidos de los exámenes será notificada por escrito por parte del catedrático.

- **Exámenes Cortos o Laboratorios:** No habrá reposición de exámenes cortos o laboratorios en caso el estudiante se ausente estos días.

- **Exámenes Extemporáneos:** En caso de una ausencia a un examen parcial o final, ésta deberá ser debidamente justificada por el estudiante y el estudiante deberá solicitar un examen extemporáneo en la Facultad de Ciencias Económicas. Posteriormente el estudiante y el catedrático deberán acordar una fecha para realizar el examen extemporáneo.

- **Derecho a Examen Final:** Para tener derecho a examen final el estudiante deberá tener una zona de por lo menos 41 puntos.

- **Exoneración de Examen Final:** Para que un estudiante sea exonerado del examen final debe tener una zona mayor o igual a 74 puntos (no se redondearán zonas entre 73.5 y 73.9 puntos), ó de 70 pts si su zona es de 75 pts.. La exoneración consistirá en una nota de examen final correspondiente a 18 puntos. En caso un estudiante exonerado quiera optar a un punteo mayor en el examen final, puedo realizarlo pero pierde el derecho de exoneración al entregar el examen final).

- **Aprobación del Curso:** Para aprobar el curso el estudiante deberá tener una nota final mayor a igual a 61 puntos (no se redondearán notas finales entre 60.5 y 60.9 puntos). Una vez publicadas las notas finales, el estudiante puede solicitar una revisión de examen final en la Facultad de Ciencias Económicas.

- Puede haber algunos temas que el catedrático pueda asignar para que sean estudiados por cuenta del estudiante, dicho material también se evaluará.

El programa de este curso está sujeto a cambios.