Tarea #10, Cálculo Multivariable

Entrega: Martes 24 de marzo, 2019

Nombre y Apellidos: ____

Entregue sólo un ejercicio de cada tema.
Se le recomienda como práctica realizar la mayor cantidad posible de ejercicios.

1. **Tema 1: Planos Tangentes y Aproximaciones Lineales**

   (a) Encuentre la ecuacion del plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.
   - $z = x^2 + y^2, (1, 1, 3)$
   - $z = x \sin(x + y), (-1, 1, 0)$

   (b) Encuentre la aproximación lineal $L(x, y)$ de la función en el punto indicado.
   - $z = xe^{xy}, (1, 0)$
   - $z = \sqrt{x + e^{4y}}, (3, 0)$

2. **Tema 2: Derivación Implícita**

   (a) Encuentre dy/dx:
   - $y \cos x = x^2 + y^2$
   - $e^y \sin x = x + xy$

   (b) Encuentre las primeras derivadas parciales de z dada la ecuación $e^z + e^{xy} = xyz$.

   (c) Encuentre la derivada parcial de z para función implicita $\cos yx + \sin yz = zx$

3. **Tema 3: Regla de la Cadena**

   (a) Encuentre $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$
   - $z = e^r \cos\theta, \qquad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}, \qquad r = st$
   - $z = \arcsin(x - y), \qquad x = s^2 + t^2, \qquad y = 1 - 2st$

   (b) Un manufactor ha modelado su producción anual P como una función Cobb-Douglas de la forma

   $$P(L, K) = 10L^{1/2}K^{1/2}$$

   donde L es el número de horas (en miles), K son las horas de capital (en miles) y P está en toneladas. Suponga que $L = 25$ y que $K = 16$. La labor de horas está decreciendo con una tasa de 2 mil horas por año y el capital está aumentando con una tasa de 3 mil horas por año. Encuentre la tasa de cambio de la producción.

   (c) La temperatura en un punto (x, y) es medida en grados Celsius. Un bicho viaja tal que su posición después de t segundos está dada por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, donde x y y están dadas en cms. La función de temperatura satisface que $T_x(2, 3) = 4$ y $T_y(2, 3) = 3$. ¿Cuán rápido está aumentando la temperatura a lo largo de la trayectoria del bicho después de 3 segundos?

   (d) El voltaje V en un circuito simple decrece gradualmente a medida que la batería se agota. La resistencia R crece despacio a medida que el resistor se calienta. Utilice la ley de Ohm, $V = IR$, para encontrar como está cambiando la corriente I en el momento que la resistencia es $R = 400\ \Omega$, $I = 0.08A$, $dV/dt = -0.01\ V/s$ y $dR/dt = 0.03\ \Omega/s$.

4. **Tema 4: Derivada Direccional**

   (a) Halle la derivada direccional de la función en el punto P, en la dirección del vector $\vec{v}$.
   - $f(x,y) = x^3 - y^3$, $P(4,3)$, $\vec{v} = \sqrt{2}/2(\hat{\imath} + \hat{\jmath})$
   - $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $P(1,1,1)$, $\vec{v} = \sqrt{3}/3(\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k})$

   (b) Encuentre la razón de cambio instántanea de la función en P, en la dirección del vector $\vec{v}$.
   - $f(x,y) = e^x \sin y$, $P(1,\pi/2)$, $\vec{v} = -\hat{\imath}$
   - $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $P(1,1,1)$, $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}\right)$

   (c) Halle la derivada direccional de la función en la dirección del vector unitario $\vec{u} = \cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}$
   - $f(x,y) = \sin(2x+y)$, $\theta = \pi/3$
   - $f(x,y) = \dfrac{y}{x+y}$, $\theta = -\pi/6$

5. **Tema 5: Optimización**

   (a) Encuentre y clasifique los extremos relativos de las siguientes funciones:
   - $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 3$
   - $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

   (b) Encuentre y clasifique los extremos relativos de las siguientes funciones:
   - $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{1/3} + 2$
   - $g(x,y) = x^2 - 3xy - y^2$

   (c) Sea P una función de producción dada por

   $$P(L,K) = 2LK - 3K^2 - 2L^2 - 2L + 21K$$

   Encuentre los valores de L (en miles) y K (en miles) que maximizan la producción P.

   (d) Una compañía produce dos tipos de pasteles cuyos costos unitarios de producción son de $\mathcal{Q}20$ y $\mathcal{Q}10$. Las demandas para ambos pasteles son

   $$q_A = 100 - 5x - 2y, \qquad q_B = 250 - 3x - 5y.$$

   Encuentre los precios de venta x y y que maximizan la utilidad de la compañía.

Tema 6: Multiplicadores de Lagrange

(a) Una empresa puede elaborar su producto en dos de sus plantas. El costo de producir x unidades en su primera planta y el costo de producir y unidades en la segunda planta está dado por la función conjunta de costo:

$$C(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$$

¿Cuántas unidades debe producir en cada planta con el objetivo de minimizar el costo total si la empresa tiene que suministrar una orden de 500 unidades?

(b) La función de producción de una empresa es

$$P(L, K) = 118L + 20K + 3LK - L^2 - 2K^2$$

donde L y K representan el número de unidades de mano de obra y de capital utilizados y P es el nivel de producción. Los costos unitarios de mano de obra y del capital son de \$ 80 y \$ 160, respectivamente. Encuentra cuánto trabajo y capital debe utilizar la empresa para maximizar la producción si sólo dispone de un presupuesto de \$ 5,640.

(c) Durante los meses de zafra, un ingenio azucarero Emplea L trabajadores y K trituradoras y produce P kilogramos de caña de azúcar procesada.

$$P(L, K) = 50L^{2/3}K^{1/3}$$

El ingenio contrata cada trabajador a Q 100 diarios por cada trabajador, gasta Q 50 diarios en el uso y mantenimiento de cada trituradora y dispone de un presupuesto diario de Q 450,000 para procesar la caña de azúcar. ¿Cuántos trabajadores se deben de contratar y trituradoras se deben usar a efecto de maximizar la producción?