# 14.3 Derivadas Parciales.

Derivada 1-D. $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$

En una función con 2 variables independientes

$f(x,y)$ $\left.\begin{matrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{matrix}\right\}$ derivadas parciales.

Al derivarse parcialmente respecto a una variable, la otra se mantiene constante.

$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h}$ "y se mantiene constante"

$f_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h}$ "x se mant. constante"

Se pueden utilizar todas las reglas de derivación para funciones de 1 - variable.

- Suma, Producto, Cociente y la Cadena.

1ras Derivadas parcial de $f(x,y)$. encuentre todas las derivadas parciales posibles $f_x$ y $f_y$.

$\partial$ delta.

Notación. $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$ $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Evite $f'(x,y)$ para evitar ambigüedad.

Ejercicio 1: Encuentre las derivadas parciales de las sigs. funciones.

a. $f(x,y) = 2x^2 + 3xy.$ $f_x(x,y)$ & $f_y(x,y)$.

$f_x = 4x + 3y.$ $f_y = 0 + 3x$

b. $g(x,y) = y(x^2+1)^3 + x^2(y^4-4)^4 + 5x^2y^3$

x x x.

$g_x = 3y(x^2+1)^2 2x + 2x(y^4-4)^4 + 10xy^3$

$g_y = 1\cdot(x^2+1)^3 + 16y^3x^2(y^4-4)^3 + 15x^2y^2.$

c. $h(s,t) = (s^2+10t)^2(t^4+s^3)^3$ Regla del Producto y de la Cadena.

$h_s = 4s(s^2+10t)^1(t^4+s^3)^3 + 3\cdot 3s^2(s^2+10t)^2(t^4+s^3)^2$

$h_t = 20(s^2+10t)^1(t^4+s^3)^3 + 12t^3(s^2+10t)^2(t^4+s^3)^2$

Evalúe la derivada en punto $(a,b)$.

$$f_x(a,b) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}$$

d. $w(r,\theta) = r^2\sin(2\theta) + e^{\pi r-\theta}$; Encuentre $\left.\frac{\partial w}{\partial \theta}\right|_{(2,\pi)}$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = 2r^2\cos(2\theta) - e^{\pi r-\theta}.$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \theta}\right|_{(2,\pi)} = w_\theta(2,\pi) = 2\cdot 4\cos(2\pi) - e^{2\pi-\pi}.$$

$$= \boxed{8 - e^{\pi}.}$$

Derivadas parciales para funciones de 2 o más variables

se deriva respecto a una variable y el resto se mantienen constantes.

$w = f(x, y, z)$ $\mu$ miu.

3 1ras derivadas parciales $f_x,\ f_y,\ f_z$.

$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

n derivadas parciales: $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial u}{\partial x_n}$

Ejercicio 3: Encuentre todas las primeras derivadas parciales de las sigs. funciones.

a. $f(x, y, z) = \sqrt[4]{x^4 + 8xz + 2y^2}$ $(\quad)^{1/4}$.

$f_x = \frac{1}{4}(x^4 + 8xz + 2y^2)^{-3/4} \cdot (4x^3 + 8z + 0)$

$f_y = \frac{1}{4}(x^4 + 8xz + 2y^2)^{-3/4}(4y)$

$f_z = \frac{1}{4}(x^4 + 8xz + 2y^2)^{-3/4}(8x)$

b. $P(r, \theta, \phi) = r\tan(\phi^2 - 4\theta)$

$P_r = \tan(\phi^2 - 4\theta)$

$P_\theta = -4r\sec^2(\phi^2 - 4\theta)$

$P_\phi = 2\phi r\sec^2(\phi^2 - 4\theta)$.

funciones vectoriales 1 variable

$\vec{r}\,'(t), \ldots$

$\langle f', g', h' \rangle$

Derivadas parciales de orden superior (Pág 100).

Orden superior: segunda, tercera, cuarta, ....,

Como $f_x(x,y)$ & $f_y(x,y)$ son también funciones en dos variables pueden también tener derivadas parciales.

$$f_x \xrightarrow{x} f_{xx} \qquad f_y \xrightarrow{y} f_{yy}$$
$$f_x \xrightarrow{y} f_{xy}. \qquad f_y \xrightarrow{x} f_{yx}$$

1er derivar izquierda

última derivar derecha

cruzadas

y segundas derivadas parciales, éstas también tienen sus derivadas parciales terceras derivadas parciales.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f_{xxx}$ | $f_{xxy}$ | $f_{yyy}$ | $f_{yxy}.$ |
| $f_{xxy}$ | $f_{xyx}$ | $f_{yyx}$ | $f_{yxx}$ |

Las derivadas parciales cruzadas $f_{xy}$, $f_{yx}$ son iguales si la función es diferenciable.

$$f_{xy} = f_{yx} \qquad f_{xyy} = f_{yyx} = f_{yxy}.$$

el orden de derivación respecto a cada variable no afecta la derivada parcial.

# Notación Delta.

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Ejercicio 4: Encuentre todas las 2das derivadas parciales

a. $f(x,y) = \sin(mx+ny)$, $m,n \in \mathbb{R}$.

1ras parciales: $f_x = m\cos(mx+ny)$

$f_y = n\cos(mx+ny)$.

2das parciales: $f_{xx} = -m^2\sin(mx+ny)$

$f_{yy} = -n^2\sin(mx+ny)$.

$$\left.\begin{array}{l} f_{xy} = -mn\sin(mx+ny). \\ f_{yx} = -mn\sin(mx+ny) \end{array}\right\} \text{iguales.}$$

b. $z = \cos(2xy)$

1ras.: $\frac{\partial z}{\partial x} = -2y\sin(2xy)$ $\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x\sin(2xy)$

2das: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4y^2\cos(2xy)$ $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4x^2\cos(2xy)$

$z_x$ respecto a $y$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2\sin(2xy) - 4yx\cos(2xy) \\ z_{yx} = -2\sin(2xy) - 4xy\cos(2xy) \end{array}\right\} \text{mismo.}$$