Cálculo Multivariable - Clases y apuntes de clase

David Gabriel Corzo Mcmath

2020-01-06

Índice general

0.1. 12.1 Sistema tridimensional de coordenadas

- Para localizar un punto en un plano, se necesitan dos números.
- Los ejes de coordenadas son perpendiculares entre sí.
- En el sistema tridimensional de coordenadas rectangulares, cada punto en el espacio es una terna ordenada.

$$\text{Espacio: } \mathbb{R}^3\{ \quad (x, y, z) \quad \text{Talque } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

&

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

- Sistema 2-D vs. 3-D:
- Las líneas punteadas se usan para simbolizar las partes debajo, izquierda y detrás.

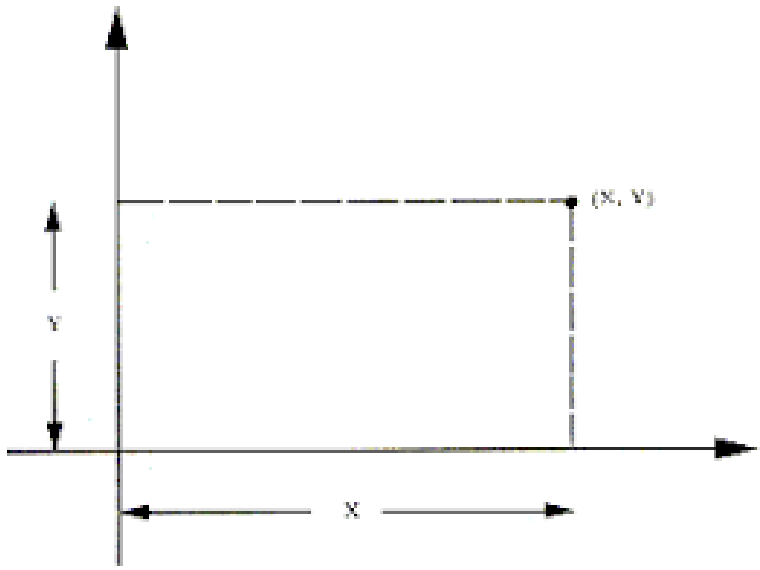


Figura 1:

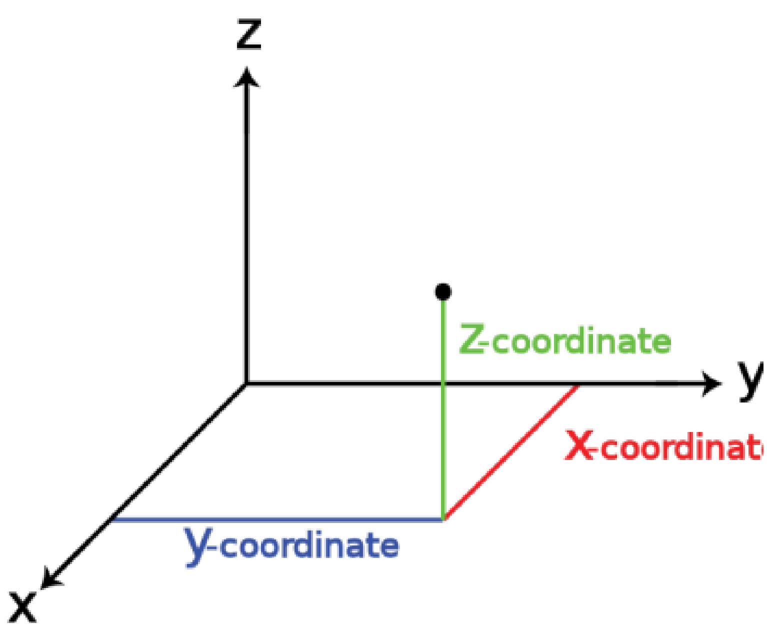


Figura 2:

Capítulo1

Clase - 2020-01-23

1.1. 12.4 Producto Cruz

- ***Definición de "Determinantes":*** *Matriz (arreglo rectangular de números).*
- ***Definición de "Cuadrada":*** *Mismo número de filas y columnas.*
- $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

  # Determinante de orden 2. Matriz de 2x2
- pie:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-1)(4) = 6 + 4 = 10$$

- Determinante de orden 3: Matriz 3x3 suma de tres determinantes de orden 2:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

  3 matrices de 2x2.
- p.e.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$2(6 - 0) - 0 + 2(-1 - 3) = 12 - 8 = 4$$

1.2. Producto Cruz

- Dados dos vectores :

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$
$$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cómo se encuentra un vector $\vec{c}$ que es perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$?

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

- Resuelva para c_1, c_2, c_3 :

$$\begin{aligned} c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0 \\ c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 = 0 \end{aligned}$$

- El producto cruz $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = 0$ es un vector perpendicular a ambos vectores $\vec{a}$ & $\vec{b}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \hat{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \hat{k}(a_1b_2 - a_2b_1)$$

- Observaciones:
  - El producto cruz es un vector, mientras que el producto es un número o escalar.
  - El producto cruz **no** es conmutativo $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$.

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(b_2a_3 - a_2b_3) + \hat{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \hat{k}(a_2b_1 - a_1b_2)$$

- Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{a} \times \vec{b} = 15\hat{i} - 10\hat{j} - 3\hat{k}$$

- Verifique $\vec{a} \times \vec{b}$ es ortogonal a $\vec{a}$ & a $\vec{b}$.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 2, 3, 0 \rangle = 30 - 30 + 0 = 0 \therefore \text{ son ortogonales}$$
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 1, 0, 5 \rangle = 15 + 0 - 15 = 0 \therefore \text{ son ortogonales}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp a_1 b$$

- Aclaración: en dos dimensiones $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ No es posible evaluarlo.

- Existen en tres dimensiones pero si se intenta evaluar en cuatro dimensiones la siguiente matriz no es posible:

En 3-D: $\exists$ En 4-D: $\nexists$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{l} \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

No es posible evaluarlo.

- Ejemplo:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 0 & 5\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix} &= \hat{i}\begin{vmatrix}0 & 5\\ 3 & 0\end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 0\end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}\\ &= 15\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}\end{aligned}$$

Entonces... en general:

$$\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$$

Capítulo2

Clase - 2020-01-28

2.1. 12.5 Rectas y planos

- Ecuación de una recta
- Vector posición $\vec{r}_0 = \langle x_0, y, z_0 \rangle$
- Vector dirección $\vec{v}_0 = \langle a, b, c \rangle$
- Ecuación vectorial: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$ donde t es el parámetro.
- Ecuaciónes paramétricas:

$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0 + at$$
$$z = z_0 + at$$

- Resuelva para t en las tres ecuaciones:

$$t = \frac{x - x_0}{a} t = \frac{y - y_0}{b} t = \frac{z - z_0}{c}$$

Estas son las ecuaciónes simétricas de la recta donde $a, b, c \neq 0$.

- Vector dirección $\vec{v} = \langle a, 0, c \rangle$ las ecuaciones en la recta cambian:

$$\underbrace{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}}_{\text{Vectorial}}$$
$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0$$
$$z = z_0 + ct$$

Entonces queda así:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}$$
$$\underbrace{y = y_0}_{\text{Simétrica}}$$

2.1.1. Ejercicio 3: Encuentre las ecs. simétricas de la recta que pasa por los puntos dados. Encuentre en qué punto la recta interseca al plano xz. pg.41

- P(2,8,-2) & Q(2,6,4)

$$\text{Vector posición } = \overrightarrow{OP} = R_0 = \langle 2, 6, 7 \rangle$$
$$\text{Vector dirección } \overrightarrow{PQ} = \vec{V} = \langle 0, -2, 6 \rangle$$
$$\text{Ec. vectorial } = \vec{r} = \langle 2, 8, -2 \rangle + t\langle 0, -2, 6 \rangle$$
$$\text{Ecs. simétricas } = x = a, \frac{y - 8}{-2} = \frac{z + 2}{6}$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cual es la intersección con el plano xz?

$$\text{Use, y=0}x = 2, \frac{-8}{-2} = \frac{z+2}{6}$$
$$= 6 \cdot 4 = z + 2 \implies z = 22$$

- La intersección con el plano xz es el punto $(1, 0, 22)$:

$$\vec{r}_0 = \langle 4, 6, 10 \rangle$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2, 0, 0 \rangle$$
$$\text{Vectorial: } \vec{r} = \langle 4, 6, 10 \rangle + t\langle 2, 0, 0 \rangle$$
$$\text{Paramétricas: } x = 4 + 2t, y = 6, z = 10$$
$$\text{Simétricas: } t = \frac{x-4}{2}, y = 6, z = 10$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cual es el punto de instersección con el plano xz?

Use: y=0

Explicación: por la recta $y = 6$ siempre será 6, nunca podrá ser 0, no puede intersecar con el plano xz, **No hay**.

2.2. Rectas paralelas

Dos rectas $\vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + t\vec{v}$ & $\vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + t\vec{v}_2$ son paralelas si y solo si sus vectores de dirección $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son paralelas.

Figura 2.1:

Entones en el espacio tenemos 3 tipos de rectas:

1. Rectas paralelas
2. Rectas intersecan en un punto
3. Rectas Ublicuas (no paralelas & no intersecan)

2.2.1. Ejercicio 4: Determine si los siguientes pares de rectas son paralelas, oblicuas o se intersecan.

- $$\frac{x-2}{8} = \frac{y-3}{24} = \frac{z-2}{16}, \frac{x-10}{-2} = \frac{y+15}{-6} = \frac{z+24}{-4}$$
$$\vec{v}_1 = \langle 8, 24, 16 \rangle, \vec{v}_2 = \langle -2, -6, -4 \rangle$$
$$\text{Entoces... }, \left\langle \frac{8}{-2}, \frac{24}{-6}, \frac{16}{-4} \right\rangle$$
$$\langle -4, -4, -4 \rangle, \therefore \text{ Son paralelas}$$

El vector dirección está en el denominador.

■

$$L_1 : x = 3 - 4t, y = 6 - 2t, z = 2 + 0t, t \in IR$$
$$L_2 : x = 3 + 8s, y = -2s, z = 8 + 2s, s \in IR$$
$$\text{Utilize una variable parámetro para cada recta}$$
$$v_1 = \langle -4, -2, 0\rangle, v_2 = \langle 8, -2, 2\rangle \text{ No son paralelas}$$
$$\text{Analice si las rectas se intersecan}$$
$$x = x \to 5 - 4t = 3 + 8s$$
$$y = y \to 6 - 2t = -2s$$
$$z = z \to 2 = 8 + 2s \to s = -3$$
$$5 - 4 = -22 \to 4t = -27 \to -4t = -27 \to = \frac{27}{4}$$
$$6 - 2t = 6 \to 2t = 0 \to t = 0$$
$$\therefore \text{ Como no hay una } t \text{ única (no es posible } 0 \neq \frac{27}{4}\text{), las dos rctas no se intersecan.}$$
$$L_1 \ \&\ L_2 \text{ Son oblicuas}$$
$$\text{Eliminación Gausiana}$$
$$\begin{matrix} 4t + 8s = 2 \\ 2t + 25 = 6 \\ 0t + 2s = -6 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} 0, 0, \text{ número} \implies \text{No hay solución}$$

2.3. La ecuación de un plano

Previamente en 12.1 $ax + by + cz = 0$. Para encontrar la ec. de un plano se necesita:

Figura 2.2:

1. Un punuto sobre el plano P: $\vec{r_0} = \overrightarrow{OP}$
2. Un vector normal u ortognoal al plano: $\hat{n}_0 \langle a, b, c\rangle$

2.3.1. Derivación de la e. plano

$$P(x_0, y_0, z_0), Q(x_1, y_1, z_1) \text{ Son dos puntos sobre el plano}$$
$$\vec{r_0} == \overrightarrow{0P} = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$$
$$\vec{r} = \overrightarrow{0Q} = \langle x, y, z\rangle$$

El vector $\vec{RP} = \vec{r} + r \vec{-} 0$ está sobre el plano, por lo que tiene que ser ortogonal a $\hat{n}$.

$$\hat{n} \perp \vec{r} - \vec{r_0} \rightarrow \qquad \underbrace{\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0})}_{\text{Ec. vectorial de un plano}}$$

$$\text{Se puede reescribir como:}$$

$$\underbrace{\langle a, b, c\rangle \cdot \langle x + x_0, y - y_0, z - z_0\rangle + c(z - z_0) = 0}_{\text{Ecuación escalar de un plano}}$$

$$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_{0}$$

Para encontrar la ec. de un plano se necesita 3 puntos P,Q,R: **hay infinitas respuestas equivalentes** $\hat{n} = \vec{} \times \vec{}.$

$$\vec{r_0} = \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{0Q}, \overrightarrow{0R}$$

$$\underbrace{\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}}_{\text{Tienen que empezar en el mismo punto}}$$

$$\text{Hat infinitas respuestas:}$$

$$\hat{n} = \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ}$$

2.3.2. Ejercicio 1: pg45 Encuentre la ec. del plano que pasa por los 3 puntos dados.

1. $P(3, -1, 3), Q(8, 2, 4), R(1, 2, 5)$

$$\text{Ecuación del plano : }, \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$

$$\text{Ecuaciónn de la recta : }, \vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$$

$$\vec{r_0} = \langle 8, 2, 4\rangle$$

Encuentre dos vectores que están sobre el plano y que comiencen en el mismo punto.

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle 5, 3, 1\rangle, \vec{v} = \overrightarrow{PR} = \langle -2, 3, 2\rangle$$

$$\text{¡¡ } \hat{n} \text{ es ortogonal a ambos vectores !!}$$

$$\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 12\hat{j} - +21\hat{k}$$

$$\text{Ec. Plano }, \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$

$$\text{Ec. Vectorial }, \langle 3, -12, 21\rangle \cdot \langle x - 8, y - 2, z - 4\rangle = 0$$

$$\text{Escalar }, 3(x - 8) -$$

2. P(0,0,0), Q(1,0,2), y R(0,2,3)

$$\text{Vector posición: } \vec{r_0} = \langle 0,0,0 \rangle$$

$$\text{dos vectoes sobre el plano: } \begin{array}{l} \vec{PQ} = \langle 1,0,2 \rangle \\ \vec{PR} = \langle 0,2,3 \rangle \end{array}$$

$$\text{Vector normal: } \hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \text{terminar} & & \end{vmatrix}$$

3. Ecuación del plano:

$$-4x - 3y + 2z = 0$$

2.4. Rectas paralelas v_1 y v_2 son paralelos

Dos planos $\hat{n_1} \cdot (\vec{r} - \vec{r_1}) = 0$ y $\hat{n_2} \cdot (\vec{r} - \vec{r_2}) = 0$ son paralelas sí y sólo si $\hat{n_1}$ y $\hat{n_2}$ son paralelas. En caso que no sean paralelas, se puede encontrar el ángulos de intersección entre dos planos.

Capítulo3

Clase - 2020-01-30

3.1. Resolución de corto

- Determine el área del triángulo entre los puntos P(), Q(), R():

$$\begin{aligned}
\vec{a} = \overrightarrow{PQ} &= \langle 4, 3, -2\rangle \\
\vec{b} = \overrightarrow{PR} &= \langle 5, 5, 1\rangle \\
\text{Área } &= \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| \\
\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} &= 13\hat{i} - 14\hat{j} + 5\hat{k} \\
\text{Área } &= \frac{1}{2}\surd
\end{aligned}$$

3.2. Rectas y planos

- Ecs. Rectas: $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$

$$\text{si } a \neq b \neq c \neq 0 \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

- Paramétricas:

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + at \\
y &= y_0 + bt \\
z &= z_0 + ct
\end{aligned}$$

- Ecuación de plano:

$$\begin{aligned}
\hat{n} &= \cdot\vec{r} - \vec{r_0} \\
a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\
\hat{n} &= \vec{a}\times\vec{b}
\end{aligned}$$

3.2.1. Ejercicios

1. Considere los planos $x + y = 0$ & $x + 2y + z = 1$.

   a) Determine si los planos son paralelos so no lo son encuentre el ángulo entr ellos:

$$\hat{n_1} = \langle 1, 1, 0\rangle$$
$$\hat{n_2} = \langle 1, 2, 1\rangle$$
$$\therefore \text{ Los dos planos no son paralelos}$$

- El $\hat{n_1}$ & $\hat{n_2}$ no son necesariamente ortogonales.

$$\cos\theta = \frac{\hat{n_1}\cdot\hat{n_2}}{|\hat{n_1}|\,|\hat{n_2}|} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$
$$\cos\theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

2. Encuentre la ec. de la recta que interseca a ambos planos $x + y = 0$ & $x + 2y + z = 1$:

$$r = \vec{r_0} + t\vec{v}$$
$$\text{Dos puntos sobre la recta}$$
$$\text{Como la recta esta en ambos planos, se debe resolver el sig. sistema de ecuaciones}$$
$$x + y = 0 \implies x = -y$$
$$x + 2y + z = 1 \implies y = z - 1$$
$$\text{z tiene cualquier valor, ahora encontrar escogiendo cualquier punto sobre la recta, en este caso 0}$$
$$\text{Primer punto} \quad z = 0$$
$$y = 1$$
$$x = -1$$
$$\therefore \langle -1, 1, 0\rangle$$
$$\text{Segundo punto} \quad z = 1$$
$$y = 0$$
$$x = 0$$
$$\therefore \langle 0, 0, 1\rangle$$

3. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por P(-1,1,0) y Q$\underbrace{(0, 0, 1)}_{r_0}$:

$$\vec{r_0} = \langle 0, 0, 1\rangle\langle -1, 1, 0\rangle$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{QP}0\,\langle -1, 1, -1\rangle$$
$$\text{Ecuaciones paramétricas de la recta:}$$
$$x = 0 - t \quad y = 0 + t \quad z = 1 - t$$

4. Solución alterna:

$$x = -y \quad y = 1 - z \quad \text{Más incognitas que ecuaciones.}$$
$$x, y \ \text{ ó } \ z \quad \text{pueden tener cualquier valor} \quad z = t$$
$$\begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 1 - t \ \therefore v_2 = \langle 1, -1, 1 \rangle \quad \vec{r_0} = \langle -1, 1 - 0 \rangle \\ t &= t \end{aligned}$$

5. Solución geométrica:
   - Encuentre un punto en ambos planos (0,0,1).
   - L arecta está en el plano I, entonces la recta es perpendicular al vector normal del plano I.
   - Está en el plano z, entonces también es perpendicular al segundo vector normal.
   - $\therefore$ la recta es perpendicular a ambos $\hat{n_1}$ & $\hat{n_2}$

$$\vec{v} = \hat{n_1} \times \hat{n_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$
$$\text{Ecuación de la recta:} \quad r = \langle 0, 0, 1 \rangle + t \langle 1, -1, 0 \rangle$$

6. Ejercicio 3: Encuentre el punto en el que la línea recta $x = 1 + 2t$, $y = 4t$, $z = 5t$ interseca al plano. $x - y + 2z = 17$.

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 4t \\ z &= 5t \\ &\text{Plano} \\ x - y + 2z = 17 \quad 1 + 2t - 4t + 10t &= 17 \\ 8t = 16 &\implies \therefore t = 2 \end{aligned}$$

   El punto de intersección es (5,8,10).

7. Ejercicio 4: Encuentre una ec. del plano que contiene la recta $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 4 - 3t$ y es paralela a plano $5x + 2y + z = 1$.
   - Cualquier punto sobre la recta que también esté sobre el plano, t= 0.

$$\begin{aligned} \text{Evaluemos en t=0} \quad x = 1,\, y = 2,\, z &= 4 \\ \vec{r_0} = \langle 1, 2, 4 \rangle \end{aligned}$$

   - **Nos preguntamos:** ¿Cómo se encuentra $\hat{n}$?
   - El vectos de dirección de la recta $v = \langle 1, -1, -2 \rangle$ es paralelo al plano.

- Como es paralelo al seguno plano, entonces tiene que ser perpendicular $\hat{n_2} = \langle 5, 2, 1\rangle$
- Lo que ocurre entonces es:

$$\begin{aligned} \vec{r_0} &= \langle 1,2,4\rangle \quad \hat{n} = \langle 5,2,1\rangle \\ \text{Ec. Plano:} \quad \Longrightarrow \quad & 5(x-1)+2(y-2)+1(z-4) = 0 \end{aligned}$$

8. Ejercicio 5: Encuentre los números directores para la recta de intersección entre los planos $x+y+z=1$ & $x+2y+3z=1$.

   - ***Definición de "numeros directores":*** *a,b,c del vector de dirección* $\langle a,b,c\rangle$
   - La recta es ortogonal a ambos vectores normales:

$$\begin{aligned} \hat{n_1} = \langle 1,1,1\rangle \quad text\&\hat{n_2} &= \langle 1,2,3\rangle \qquad \text{de ambos planos} \\ \vec{v} = \hat{n_1} \times \hat{n_2} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} \\ \text{Los números directores:} \quad & a = 1, b = 2, c = 1 \end{aligned}$$

9. Ejercicio 6: Encuentre las ecs. aparamétricas de la recta que pasa por el punto (0,1,2), que es paralelo al plano $x+y+z=2$ y es perpendicular a la recta $r = \langle -2t, 0, 3t\rangle$.

$$L_1 r = \vec{r_0} + t\vec{v} \quad r_0 = \langle 0,1,2\rangle$$

   - Aclaraciones: L_1 es la incógnita que tenemos que encontrar.
   - **Nos preguntamos:** ¿Cómo se encuentra r?
   - Plano I: $\hat{n} = \langle 1,1,1\rangle$ es perpendicular al plano, es paralelo a L_1.
   - Recta II: $\hat{v_2} = \langle -2,0,3\rangle$ es perpendicular a L_1
   - La recta es perpendiculae a $\hat{n}$ y a $\vec{v_2}$

$$\begin{aligned} v = \hat{n} \times \vec{v_2} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k} \\ & r_0 = \langle 0,1,2\rangle \\ v = \hat{v_2} \times \hat{n} \quad & \text{Ecuaciones paramétricas:} \\ & x = 0 - 3t \\ & y = 1 - 5t \\ & z = 2 + 2t \end{aligned}$$

Capítulo4

Clase - 2020-02-04

4.1. 13.1 Funciones vectoriales y curvas en el espacio

- Una función vectorial $\vec{r} : R \implies V_3$:

$$\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), z(t) \rangle$$

La variable t es un parámetro.

- Dominio: Números reales, Rango: vector 3D:

$$\vec{r}\mathbb{IR} \implies V_3 \quad \vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$$
$$\text{t es un parámetro} \quad \vec{r} = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath} + h(t)\hat{k}$$

- Ejemplo de una función vectorial:

$$\vec{r} = \langle a, b, c \rangle + t \langle d, e, f \rangle$$
$$\vec{r} = \langle a + td, b + et, c + tf \rangle$$
$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

- Ecs. Paramétricas de una función vectorial:
- Dominio de ina función vectorial: encuentre el dominio de cada función componente. El dominio de $\vec{r}$ es la intersección de los dominios de cada función componente.

4.1.1. Ejercicios

1. Encuentre el dominio:

$$r(t) = \left\langle \sqrt{r^2 - 9}, e^{5ln(t)}, ln(t+5) \right\rangle$$
$$\text{Evadir raíces negativas, y ln(0)}$$
$$\sqrt{t^2 - 9} \quad \implies \quad \text{Definida} \quad t^2 \geq 9$$
$$e^{\sin(t)} \quad \text{siempore definida}$$
$$ln(t+5) \quad \text{Definida cuando} \quad t + 5 > 0 \quad (-5, \infty)$$
$$\therefore \text{ El dominio es de} \quad (-5, \infty) \cup (-5, -3) \cup (-3, 3) \cup [3, \infty)$$

- Recordar: [a,b] el numero si es parte del dominio a,b son partes del dominio. (a,b) los puntos a,b no son parte del dominio.

2.

$$\vec{s}(t) = \left\langle \sin^3(t^2), \cosh(\frac{t}{t^2+1}), \frac{1}{e^t+4} \right\rangle$$
$$sin^3(t^2), ID_{f(t)} = IR$$
$$\cosh(\tfrac{t}{t^2+1}), ID_{g(t)} = IR$$
$$\tfrac{1}{e^t+4}, ID_{h(t)} = IR$$
$$\therefore \text{ Dominio de } \vec{s}(t) = (-\infty, \infty)$$
$$e^+4 \neq 0 \implies e^t = -4 \implies t = \underbrace{ln(-4)}_{\text{indefinido}}$$

4.2. Limites y continuidad

- $$\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t) \right\rangle$$
- Evalúe el límite de cada función componente.
- Si no existe por lo menos un límite de una función componente, entonces $\lim_{t\to a} \vec{r}(t)$ no existe.
- f(t) está definida en t=a
$$\lim_{t\to a} f(t) = f(a)$$
- Si se indefine y tiene forma de $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ usar L'Hôpital.

$$\lim_{t\to a} \frac{f(t)}{g(t)} \underbrace{=}_{\frac{0}{0}} \lim_{t\to a} \frac{f'(t)}{g'(t)} \qquad \text{L'Hopital}$$

- Contínua en $t = a$ si $\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$
- Evite asíntotas verticales, saltos y agujeros. Ejemplo:

$$\lim_{t\to a} \frac{\sin(x)}{x} \underbrace{=}_{\text{LH}} \lim_{t\to a} \frac{cos(x)}{1} = 1$$

4.2.1. Ejercicios

- Sea $\vec{r}(t) = \left\langle \frac{\tan(\pi t)}{t}, e^{t-2}, \frac{ln(t-1)}{t^2-1} \right\rangle$.
- Analice si la función $\vec{r}(t)$ es contínua en $t = 2$.

$$\vec{r}(t) = \left\langle \frac{\tan 2\pi}{2}, e^0, \frac{ln(1)}{3} \right\rangle$$
$$\lim_{t\to 2} \underbrace{\frac{\tan \pi t}{t}}_{\frac{0}{2}} = 0$$
$$\lim_{t\to 2} e^{t-2} = 1$$
$$\lim_{t\to 2} \frac{ln(t-1)}{t^2-1} = 0$$
$$\therefore \vec{r} \text{ si es contínua en t=2 } \lim_{t\to 1} \vec{r}(t) = \vec{r}(2)$$

- Encuentre $\lim_{t\to 1} \vec{r}(t)$ analice el límite de cada función componente por separado.

$$f: \lim_{t\to 1} \frac{\tan 2\pi}{2} = \frac{0}{1}$$
$$g: \lim_{t\to 1} e^{t-2} = e^{-1}$$
$$h: \lim_{t\to 1} \frac{ln(t-1)}{t^2-1} = \text{ No existe, por ln(0) estar indefinido.}$$

- Analice si $\vec{r}(t)$ es contínua e t=1.

$$\underbrace{\lim_{t\to 1}\vec{r}(t)=\vec{r}(1)}_{\text{No es contínua en t=1, r(1) está indefinida.}}$$

- Agujero $\vec{s}(t)=\left\langle \frac{\tan \pi t}{t-1}, e^{t-2}, \frac{ln(2t-1)}{t^2-1}\right\rangle$
  No es contínua en t=1, pero su límite existe.

$$\lim_{t\to 1}\frac{\tan \pi t}{t-1}\underbrace{=}_{LH}\lim_{t\to 1}\frac{\pi \sec^2 \pi t}{1}=\frac{\pi}{(\cos\pi)^2}=\pi$$

$$\lim_{t\to 1}e^{t-2}=e^{-}1=\frac{1}{e}$$

$$\lim_{t\to 1}\frac{\ln(2t-1)}{t^2-1}\underbrace{=}_{\frac{0}{0}}=\lim_{t\to 1}\frac{\frac{2}{2t-1}}{2t}=\lim_{t\to 1}\frac{2}{2t(2t-1)}=\frac{1}{1(2-1)}=1$$

$$\therefore \lim_{t\to 1}\left\langle \pi, \frac{1}{e}, 1\right\rangle \quad \text{es un agujero } \vec{s}(1) \text{ está indefinido}$$

4.3. Curvas en el espacio

$$x=f(t)$$
$$y=g(t)$$
$$z=h(t)$$

Figura 4.1: Curvas paramétricas en el espacio

4.3.1. Espirales

- Grafique la curva $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t)=\underbrace{2\hat{i}\sin(t)}_{x}+\underbrace{2\hat{j}\cos(t)}_{y}+\underbrace{\hat{k}\frac{t}{\pi}}_{z}$$

t	x	y	z
0	0	2	0,5
$\frac{\pi}{2}$	2	0	0,5
π	0	-2	1
$\frac{3\pi}{2}$	2	0	1,5
2π	0	2	2

Figura 4.2: Curva paramétrica

- Grafique:

$$\vec{r}(t) = \langle \sin \pi t, t, \cos \pi t \rangle$$
$$\text{Graficar la circumferencia } x^2 + z^2 = 1\,, y = 0$$
$$\vec{r}(0) = \langle 0, 0, 1 \rangle \quad \text{El vector que nos servirá para delimitar la gráfica del espiral}$$
$$\text{Por ejemplo: } \vec{s}(t) = \left\langle \sin t, t^2, \cos t \right\rangle$$

Capítulo5

Clase - 2020-02-06

5.1. 13.2 Cálculo con funciones vectoriales, pg.55

- Derivadas:

$$\vec{r}\,'(t) \quad \text{Respecto a t}$$

- Integrales:

$$\int \vec{r}\,'(t)dt \quad \text{Respecto a t}$$

5.1.1. Derivadas

-

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$$

- Como la función $\vec{r}(t)$ está definida por tres funciones componentes se puede hacer:

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{h\to 0} \left\langle \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}_{f'(t)}, \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}}_{g'(t)}, \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{h(t+h) - h(t)}{h}}_{h('t)} \right\rangle$$

- Derivada entonces es :

$$\vec{r}\,'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

5.1.2. Integrales

- Integral:

$$\int \vec{r}(t)dt == \int (f\hat{i} + g\hat{j} + h\hat{k})dt$$

$$\hat{i} \int f dt + \hat{j} \int g dt + \hat{k} \int h dt$$

Integrar la función componente.

5.2. Ejercicios

1. Encuentre la 1era y segunda derivada de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \left\langle \sin(4t), t^2, ln(\sin(t)) \right\rangle \\ \vec{r}\,'(t) &= \left\langle 4\cos(4t), 2t, \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \right\rangle \\ \vec{r}\,'(t) &= \langle 4\cos(4t), 2t, \cot(t) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}\,''(t) &= \langle f''(t), g''(t), h''(t) \rangle \\ \therefore \quad \vec{r}\,''(t) &= \left\langle -16\sin(4t), 2, -\csc^2(t) \right\rangle \end{aligned}$$

2. Derive: $\vec{s}(t) = \hat{i}\tan(4t) + hatjln(4t+1) + \hat{k}(5-2t)^{\frac{1}{2}}$

$$\vec{s}\,'(t) = 4\hat{i}(\sec(4t))^2 + \hat{j}4(4t+1)^{-1} - \hat{k}(5-2t)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\vec{s}\,''(t) = 8\hat{i} \times \sec(4t) \times \sec(4t) \times \tan(4t) \times 4 - 16\hat{j}(4t-1)^{-2} - \frac{\hat{k}}{2}(5-2t)^{-\frac{3}{2}} \times (-2)$$
$$\vec{s}\,''(t) = 32\hat{i} \times \sec^2(4t) \times \tan(4t) - 16\hat{j}(4t-1)^{-2} - \frac{\hat{k}}{2}(5-2t)^{-\frac{3}{2}} \times (-2)$$

5.3. Recordatorios & rectas tangentes de funciones vectoriales

- ***Recordar lo siguiente:*** *$f'(a)$ es igual a la pendiente de la drecta tangeente a $f(x)$ en $x = a$.*
- ***Recordar lo siguiente:*** *La recta tangente.*

$$L_1: \quad y = f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \text{Ec. Recta Tangente}$$

- Con una función vectorial:

$$\vec{r} = \langle f, g, h \rangle, \qquad x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)$$

Hay ecuaciones paramétricas para cada variable:

$$\vec{r}\,'(a) = \langle f'(a), g'(a), h'(a) \rangle$$

Vector de pendientes de rectas tangentes a la curva $\vec{r}(t)$.

- La derivada de una función vectorial se le da elnombre de **"vector tangente"** $\vec{r}(t) : \vec{r}\,'(a)$.
- Recta tangente: es ahora una función vectorial.

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(a) + \vec{r}\,'(a)t$$

- Ecs. Paramétricas:

$$x = f(a) + f'(a)t$$
$$y = g(a) + g'(a)t$$
$$z = h(a) + h'(t)t$$

- Vector tangente: $r'(a)$ en $t = a$
- Vector tangente unitario: $\frac{r'(a)}{|r'(a)|} = \vec{T}(a)$

5.4. Ejercicios

- Encuentre las ecs. paramétricas de la recta tangente a la curva : $s(t) = \langle 2\cos(t), 2\sin(t), 4\cos(2t) \rangle$ en el punto $(\sqrt{3}, 1, 2)$:

$$\text{Recta tangente:} \quad \vec{r}_T(t) = \vec{r}(a) + t\vec{r}\,'(a)$$
$$\vec{r}_T(a) = \left\langle \sqrt{3}, 1, 2 \right\rangle$$
$$\text{Derivada:} \quad \vec{r}\,'(t) = \langle -2\sin(t), 2\cos(t), -8\sin(2t) \rangle$$
$$\textbf{Nos preguntamos: } \text{¿Cómo encuentro “a” ? igualamos} \quad r(t) = \left\langle \sqrt{3}, 1, 2 \right\rangle$$
$$2\cos(t) = \sqrt{3} \implies \cos(t) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \implies t = \tfrac{\pi}{6}$$
$$2\sin(t) = 1 \implies 2\sin(\tfrac{\pi}{6}) = 2 \times \tfrac{1}{2} = 1$$
$$4\cos(2t) = 2 \implies 4\cos(\tfrac{\pi}{3}) = 4 \times \tfrac{1}{2} = 2$$
$$\text{Vector tangente:} \quad \vec{r}\,'(\frac{\pi}{6}) = \left\langle -2\sin(\frac{\pi}{6}), 2cos(\frac{\pi}{6}), -8\sin(\frac{\pi}{3}) \right\rangle$$
$$\vec{r}_T(t) = \left\langle \sqrt{3}, 1, 2 \right\rangle + t \left\langle -1, \sqrt{3}, -4\sqrt{3} \right\rangle$$
$$\therefore$$
$$x = \sqrt{3} - 1t$$
$$y = 1 + \sqrt{3}t$$
$$z = 2 - 4\sqrt{3}t$$

Capítulo6

Clase - 2020-02-11

6.1. 13.2 Cálculo de funciones vectoriales

- Derivadas:

$$\vec{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

- Vector Tangente:

$$\vec{r}'(t)$$

- Tangente unitario:

$$\vec{T}(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

- Integrales indefinidas:

$$\int \langle f, g, h \rangle \, dt = \langle F + C_1, G + C_2, H + C_3 \rangle$$

$$\int \vec{r}(t) dt = \vec{R}(t) + \vec{C}$$

$$\vec{R} \quad \text{vector de Antiderivadas}$$
$$\vec{C} \quad \text{Vector de constantes}$$

- Integrales definidas:

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \hat{i} \int_a^b f(t) dt + \hat{j} \int_a^b g(t) dt + \hat{k} \int_a^b h(t) dt$$

6.2. Ejercicios de integración

1. $\int_0^1 \left[\frac{4}{1+t^2} \hat{i} + sec^2(\frac{\pi t}{4}) \right] dt$:

$$4\hat{i} \times \tan^{-1}(t)\Big|_0^1 + \hat{k} \times \tan(\frac{\pi t}{4})\Big|_0^1$$
$$I_i = 4\hat{i}\frac{\pi}{4} + \hat{k}\frac{4}{\pi} = pi\hat{i} + \hat{k}\frac{4}{\pi} = \left\langle \pi, 0, \frac{4}{\pi} \right\rangle$$

2. $\int \left\langle te^{t^2}, te^t, \frac{q}{\sqrt{1-t^2}} \right\rangle dt$:

$$x: \quad \int e^{t^2} t\, dt = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^{t^2} + C_1$$

$$u = t^2$$
$$du = 2tdt$$

$$y: \quad \int te^t dt = te^t - \int te^t - e^t + C_2$$

$$\begin{matrix} u = t & dv = e^t dt \\ du = dt & v = e^t \end{matrix} \quad t: \quad \int \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta = \int d\theta = \underbrace{\theta + C_3}_{\sin^{-1}(t)+C_3} = \sin^{-1}(t) + C_3$$

$$\therefore \quad \int \left\langle te^{t^2}, te^t, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right\rangle dt = \frac{1}{2}et^{t^2} + C_1, te^t - e^t + C_2, \sin^1(t) + C_3$$

6.3. Movimiento en el espacio

Dado el vector posición $\vec{r}(t)$ de un objeto:

- Vector velocidad:

$$\vec{c}(t) = \vec{r}\,'(t)$$

- Vector aceleración:

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,(t) = \vec{r}\,''(t)$$

- Rapidez:

$$|\vec{v}(t)|$$

- Distancia:

$$|\vec{r}(t)|$$

Dado el vector de aceleración $\vec{a}(t)$:

- Velocidad:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt + \vec{C}_1$$

- Desplazamiento o posición:

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt + C_2$$

6.3.1. Ejercicios

1. Encuentre la velocidad, aceleración y rapidez dada la posición del objeto:

$$\begin{aligned}
&& \vec{r}(t) &= \hat{\imath}t + 2\hat{\jmath}\cosh(4t) + 3\hat{k}\sinh(3t)\\
&\text{Encontramos velocidad:} & \vec{r}\,'(t) = \vec{v}(t) &= \hat{\imath} + 8\hat{\jmath}\sinh(4t) + 9\hat{k}\cosh(3t)\\
&\text{Encontramos la aceleración:} & \vec{r}\,''(a) = \vec{a}(t) &+ 32\hat{\jmath}\cosh(4t) + 27\hat{k}\sinh(3t)\\
&\text{Encontramos la rapidez:} & |\vec{v}(t)| &= \sqrt{1 + 64\sinh(4t) + 81\sinh^2(3t)}\\
&\text{Encontramos la distancia:} & |\vec{r}(t)| &= \sqrt{t^2 + 4\cosh^2(4t) + 9\sinh^2(3t)}
\end{aligned}$$

Tarea # 6: Integrales func. vectoriales 14.1 Funciones en varias variables.

Tarea opcional consolidado: 12,13,14.1

2. Encuentre la velocidad y posición del objeto dada $\vec{a}(t)$ y las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
\vec{a}(t) = 6t\hat{\imath} + \hat{\jmath}\cos(t) - \hat{k}\sin(2t), \quad \vec{v}(0) = & \quad \hat{\imath} + \hat{k}\\
& \vec{r}(0) = 2\hat{\jmath} - \hat{k}\\
\text{Velocidad:} \quad & \int \vec{a}(t)dt\\
\vec{v}(t) = \left\langle 3t^2 + C_1, \sin(t) + C_2, \frac{1}{2}\cos(2t) + C_3 \right\rangle &\\
\text{Encuentro } \ \vec{v}(0) = \left\langle C_1, C_2, \frac{1}{2} + C_3 \right\rangle &= \langle 1, 0, 1\rangle\\
& C_1 = 1,\\
\text{Resolver para las constantes:} \quad & C_2 = 0,\\
\tfrac{1}{2} + C_3 = 1 \quad \Longrightarrow \quad & C_3 = \tfrac{1}{2}\\
\text{Posición:} \quad & \int \vec{v}(t)dt\\
\vec{r}(t)\left\langle t^3 + t + d_1, -\cos(t) + d_2, \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2} + d_3 \right\rangle &\\
\vec{r}(0) = \left\langle \underbrace{d_1, -1 + d_2, d_3} \right\rangle &\\
d_1 &= 0\\
-1 + d_2 = 2 \implies d_2 &= 3\\
d_3 &= -1\\
\text{Posición:} \quad \vec{r}(t) = \left\langle t^3 + t, 3 - \cos(t), \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2} - 1 \right\rangle &
\end{aligned}$$

3. $\vec{a}(t) = 8t\hat{\imath} + \sinh(t)\hat{\jmath} - \hat{k}e^{\frac{t}{2}}$:

$$\underbrace{\vec{v}(0)=\vec{0}}_{\text{Está en reposo}} \qquad \vec{s}(0)=2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$$

$$\text{Velocidad:} \quad \vec{v}(t)=\left\langle 4t^2+C_1, \cosh(t)+C_2, -2e^{\frac{t}{2}}+C_3\right\rangle$$

$$\vec{v}(0)=\left\langle \underbrace{C_1, 1+C_2, -2+C_3}_{\substack{C_1=0,\\ C_2=-1\\ C_3=2}}\right\rangle=\langle 0,0,0\rangle$$

$$\vec{v}(t)=\left\langle 4t^2, \cosh(t)-1, -2e^{\frac{t}{2}+2}\right\rangle$$

$$\text{Posición:} \quad \vec{r}(t)=\left\langle \frac{4}{3}t^3+C_1, \sinh(t)-t+C_2, -4e^{\frac{t}{2}}+2t+C_3\right\rangle$$

$$\vec{r}(0)=\langle C_1, C_2, -4+C_3\rangle = \underbrace{\langle 2,1,-3\rangle}_{C_2=1}$$

$$C_3=-3+4=1$$

$$\vec{r}(t)=\left\langle \frac{4}{3}t^3+2, \sinh(t)-t+1, -4e^{\frac{t}{2}}+2t+1\right\rangle$$

\# Se evalúa el vector en 0 por que se quiere saber el valor de las constantes cuando están en reposo.

\# Por defecto siempre evaluar en 0 para encontrar $C_1, C_2 \& C_3$.

6.4. 13.3 Longitud de arco

10.4 Ecs. Paramétricas de una curva en el plano de dos dimensiones era:

$$x=f(t)$$
$$y=g(t)$$

- La longitud de arco:

$$L=\int_a^b \sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}dt$$

- Función vectorial:

$$\vec{r}=\langle f,g,h\rangle=\langle x,y,z\rangle$$

- Derivada de función vectorial:

$$\vec{r}\,'=\langle x',y',z'\rangle$$

- Magnitud:

$$|\vec{r}\,'|=\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}$$

- En general:

$$L=\int_a^b=|\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

6.5. Ejercicios

Encuentre la longitud de las siguientes curvas:

1. $\vec{r}(t) = \langle \cos(t), \sin(t), \ln(\cos) \rangle$ en $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\vec{r}\,'(t)|\, dt$$

$$\vec{r}\,'(t) = \left\langle -\sin(t), \cos(t), \tan^2(t) \right\rangle$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + \tan^2(t)} = \sqrt{1 + \tan^2(t)} = \sec^2(t) = \sec^2(t)$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(t)dt = \ln|\sec(t) + \tan(t)|\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left|\sec(\frac{\pi}{4}) + \tan(\frac{\pi}{4})\right| - \ln|\sec(0) + \tan(0)|$$

$$L = \ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right| - \ln|1| = \ln\left|\sqrt{2} + 1\right|$$

2. $\vec{r}(t) = \left\langle 12t, 8t^{\frac{3}{2}}, 3t^2 \right\rangle$ en $0 \leq t \leq 1$:

$$\vec{r}\,'(t) = \left\langle 12, 12t^{\frac{1}{2}}, 6t \right\rangle = 6\left\langle 2, 2t^{\frac{1}{2}}, t \right\rangle$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = 6\sqrt{4 + 4t + t^2} = 6\sqrt{(t+2)^2} = 6(t+2)$$

$$L = \int_0^1 (6t + 12)dt = 3t^2 + 12t\Big|_0^1 = 3 + 12 = 15$$

Capítulo7

Clase - 2020-02-11

7.1. Resolución de corto

1. Analice la función $r = \left\langle 3e^{-t}, ln(2t^2 - 1), \tan(2\pi) \right\rangle$ en $t = 1$:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1} \vec{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to 1} 3e^{-t}, \lim_{t\to 1} ln(2t^2-1), \lim_{t\to 1} \tan(2\pi) \right\rangle \\ \vec{r} = \left\langle 3e^{-1}, ln(1), \tan(2\pi) \right\rangle = \left\langle 3e^{-1}, 0, 0 \right\rangle \\ \therefore \quad \text{r es contínua en t=1}\end{aligned}$$

Si la pregunta hubiese sido en cuándo se indefine, se saca el dominio de cada función.

2. Encuentre la ec. de la recta tatente a $r(t) = \left\langle te^{t-1}, \frac{8}{\pi}\arctan(t), 2\ln(t) \right\rangle$ en $t = 1$.

$$\begin{aligned}\vec{r}(0) = \left\langle 1 \times e^0, \frac{8}{\pi}\arctan(1), 2ln(0) \right\rangle = \langle 1, 2, 0 \rangle \\ \text{Terminar de copiar}\end{aligned}$$

7.2. 14.1 Funciones de varias variables

- Cuando teníamos sólo una función de una variable no había tanta complicación, las gráficas eran curvas en el plano. Cuando empezaba y terminaba la curva en x nos daba el dominio. Había una variable independiente x y la variable dependiente y, los dominios eran intervalos, y cada x sólo podía tener **un** sólo valor de y.
- En funciones de 2 variables se va a describir como:

$$\begin{aligned} z = f(x, y) \quad & \text{Dos variables independientes x,y} \\ & \text{Variable dependiente z}\end{aligned}$$

  - Entonces f es una regla que asigna a cada punto (x, y) a lo sumo un valor de z.

$$f : \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{Dominio}} \to \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Rango}}$$

  - Estamos pasando de una región por medio de una función z llego a tener $f(x, y)$ en la dimensión correspondiente.
  - Los dominios en estas funciones se vuelven superficies.
- El dominio de una función de dos variables: un conjunto que consiste de todos los puntos o pares ordenados (x, y) para los cuales $f(x, y)$ para los cuales $f(x, y)$ está definida.

$\mathbb{D}$: En una dimensión: Todos los números x para los cuales f(x) está definida

  - Evite la división por cero.
  - Raíces pares de números negativos.
  - Logaritmos de números negativos o cero.
- El dominio de f en una función de dos variables es una región:
  - Las regiones que estén sombreadas son partes del dominio.

  # Para graficar funciones de dos variables son más fáciles de graficar que de una sola variable.

7.3. Ejercicios

Encuentre y bosqueje el dominio de las sigs. funciones.
Sombree la región dque es parte del $\mathbb{D}$ y utilice líneas discontínuas para denotar a curvas que no son parte del $\mathbb{D}$

1. $c(x, y) = 10x + 20y$:

$$\text{Nunca se indefine.}$$
$$\mathbb{D} : \underbrace{(-\infty, \infty)}_{x} \underbrace{\times}_{\text{Producto cartesiano}} \underbrace{(-\infty, \infty)}_{y} = \mathbb{R}^2$$

   - \# Producto cartesiano denota **todas las combinaciones posibles en un conjunto de n elementos**.
   - \# Explicaciones de productos cartesianos:

$$\mathbb{R} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

   - \# Definición de producto cartesiano:

$$x \times y = \{(x, y) \text{ tal que } x \in X, y \in Y\}$$

   - \# Producto cartesiano vs. unión:

$$x \times y = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$
$$x \cup y = \{(1), (2), (3)\}$$

2. $z = \frac{8}{x^2 - y^2}$:

$$\text{Definida si } x^2 \neq y^2$$
$$\mathbb{R}^2 - \{x^2 \neq y^2\}$$
$$y \neq \sqrt{x^2}$$
$$y \neq \pm x$$

3. $R(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$:

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0$$
$$\text{Definida} \quad 9 \geq x^2 + y^2$$
$$\mathbb{D} : x^2 + y^2 \neq 9$$
$$\text{Círculo de radio 3 centrado en el orígen}$$
$$\mathbb{D} = \{(x, y) \text{ tal que } x^2 + y^2 \leq 9\}$$

4. $Q(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$:

$$\mathbb{D}: \begin{array}{l} x^2+y^2>0 \\ x^2+y^2>9 \end{array}$$

$\therefore$ Afuera del círculo o disco de radio 3

5. $z = \frac{(x+4)}{(y-2)(x-4)(y+2)}$:

$$\begin{array}{rl} \text{Definida si} : & y \neq \pm 2,\ x \neq 4 \\ \mathbb{D}: & \mathbb{R}^2 - \{y \neq \pm 2, x \neq 4\} \end{array}$$

6. $h(x,y) = \ln(2-yx)$:

$$\text{Definida si} : \begin{array}{cl} 2-yx & >0 \\ 2 & >yx \\ y & <\frac{2}{x} \end{array}$$

$$\therefore \mathbb{D}: \ y < \frac{2}{x}$$

7.3.1. Gráfica de $z = f(x,y)$

- Gráfica de $z = f(x,y)$: Son superficies y consisten de todas las *triplas* ordenadas (x,y,z) donde z.

7.4. Curva de nivel o traza horizontal

- En $f(x,y) = k$ k es una constante, rebane la superficie con los planos horizontales $z = k$ y grafique cada curva en el plano.

Capítulo8

Clase - 2020-02-20

8.1. 14.3 Derivadas parciales

- Derivada en una dimensión:
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$
- En una función con dos variables independientes:
$$f(x,y)=\left.\begin{matrix}f_x(x,y)\\ f_y(x,y)\end{matrix}\right\}\text{ Derivadas parciales}$$
- Al derivarse parcialmente respecto a una variable, la otra se mantiene constante:
$$f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\qquad \#\text{ y se mantiene constante}$$
$$f_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\qquad \#\text{ x se mantiene constante}$$
- Se pueden utilizar todas las reglas de derivación para funciones de 1 variable:
  - Suma
  - Producto
  - Cociente
  - Cadena
- 1 $^{\text{eras}}$ derivadas parciales de $f(x,y)$: encuentre todas las derivadas parciales posibles de f_x & f_y
  - Notación:
$$f_x=\frac{\delta f}{\delta x}=\frac{\delta z}{\delta x}$$
$$f_x=\frac{\delta f}{\delta y}=\frac{\delta z}{\delta y}$$
  - Evite $f'(x,y)$ para evitar ambigüedad.

8.1.1. Ejercicios

Encuentre las derivadas parciales de las siguientes funciones.

1. $f(x,y)=2x^2+3xy$: ***Recordar lo siguiente:*** $f_x(x,y)$ *&* $f_y(x,y)$

$$f_x=4x+3y\qquad f_y=0+3x$$

2. $g(x,y)=y(x^2+1)^3+x^2(y^4-4)^4+5x^2y^3$:

$$g_x=3y(x^2+1)^2 2x+2x(y^4-4)^4+10xy^3$$
$$g_y=1\cdot(x^2+1)^3+16y^3x^2(y^4-4)^3+15x^2y^2$$

3. $h(s,t) = (s^2+10t)^2 \cdot (t^4+s^3)^3$: # Regla del producto y de la cadena.

$$
\begin{aligned}
h_s &= 4s(s^2+10t)^1 \cdot (t^4+s^3)^3 + 3 \cdot 3s^2(s^2+10t)^2 \cdot (t^4+s^3)^2 \\
h_t &= 20(s^2+10t)^1 \cdot (t^4+s^3)^3 + 12t^3(s^2+10t)^2, .(t^4+s^3)^2
\end{aligned}
$$

Evalúe la derivada en punto (a,b):

$$f_x(a,b) = \frac{\delta f}{\delta x}\Big|_{(a,b)}$$

1. $w(r,\theta) = r^2\sin(2\theta) + e^{\pi r-\theta}$, encuentre $\frac{\delta w}{\delta \theta}\Big|_{(2,\pi)}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta w}{\delta \theta} &= 2r^2\cos(2\theta) - e^{\pi r-\theta} \\
\frac{\delta w}{\delta \theta}\Big|_{(2,\pi)} &= w_\theta(2,\pi) = 2\cdot 4\cos(2\pi) - e^{2\pi-\pi} \\
&= 8 - e^{\pi}
\end{aligned}
$$

8.2. Derivadas parciales par funciones de 2 o más variables

- Se deriva respecto a una variable y el resto se mantienen constantes.

$$w = f(x,y,z)$$

3 1 $^{\text{eras}}$ derivadas parciales: f_x, f_y, f_z.

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

n derivadas parciales:

$$\frac{\delta u}{\delta x}, \ldots \frac{\delta u}{\delta x_n}$$

8.2.1. Ejercicio

Encuentre todas las primeras derivadas pariales de las sigentes funciones:

- $f(x,y,z) = \sqrt[4]{x^4+8xz+2y^2}$

$$
\begin{aligned}
f_x &= \frac{1}{4}(x^4+8xz+2y^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot (4x^3+8z+0) \\
f_y &= \frac{1}{4}(x^4+8xz+2y^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot (4y) \\
f_z &= \frac{1}{4}(x^4+8xz+2y^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot (8x)
\end{aligned}
$$

- $p(r,\theta,\phi) = r\cdot\tan(\phi^2 - 4\theta)$:

$$
\begin{aligned}
p_r &= \tan(\phi^2 - 4^\theta) \\
p_\theta &= -4r\sec^2(\phi^2 - 4\theta) \\
p_\phi &= 2\phi r\sec^2(\phi^2 - 4\theta)
\end{aligned}
$$

Funciones vectoriales 1 variable: $\vec{r}\,'(t), \ldots$

8.3. Derivadas parciales de orden superior (pág. 100)

- Orden superior: Segundas, terceras, cuartas, etc. derivadas.
- Como $f_x(x,y)$ & $f_y(x,y)$ son también funciones en dos variables, pueden tener derivadas parciales.

$$
\begin{tikzcd}
f_x \arrow[r] \arrow[dr] & f_{xx} & f_y \arrow[r] \arrow[dr] & f_{yy} \\
 & f_{xy} & & f_{yx}
\end{tikzcd}
$$

- Las segundas derivadas parciales, éstas también tienen sus derivadas parciales, terceras derivadas parciales.

$$
\begin{matrix}
f_{xxx} & f_{xxy} & f_{yyy} & f_{yxy} \\
f_{xxy} & f_{xyx} & f_{yyx} & f_{yxx}
\end{matrix}
$$

- Las derivadas parciales cruzadas f_{xy} & f_{yx} son iguales si la función es diferenciable.

$$
f_{xy} = f_{yx} \qquad f_{xyy} = f_{yyx} = f_{yxy}
$$

- Notación delta:

$$
\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} & f_{yy} &= \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \\
f_{xy} &= \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} & f_{yx} &= \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta y}
\end{aligned}
$$

8.3.1. Ejercicios

Encuentre todas las 2das derivadas parciales:

1. $f(x,y) = \sin(mx+ny) \quad m,n \in \mathbb{R}:$

Primeras derivadas parciales :

$$f_x = m\cos(mx+ny)$$
$$f_y = n\cos(mx+ny)$$

Segundas derivadas parciales:

$$f_{xx} = -m^2\sin(mx+ny)$$
$$f_{yy} = -n^2\sin(mx+ny)$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xy} &= -mn\sin(mx+ny) \\ f_{yx} &= -mn\sin(mx+ny) \end{aligned}\right\} \text{Iguales}$$

2. $z = \cos(2xy)$:

$$1^{\text{ eras}} : \quad \frac{\delta z}{\delta x} = -2\sin(2xy), \quad \frac{\delta z}{\delta y} = -2x\sin(2xy)$$
$$2^{\text{ das}} : \quad \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = -4y^2\cos(2xy), \quad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = -4x^2\cos(2xy)$$

Capítulo9

Clase - 2020-02-27

9.1. Derivadas parciales, rectas tangentes y planos tangentes

9.1.1. Interpretación de la derivada parcial

- $\mathbb{C}$ curva de intersección entre $z = f(x, y)$ y $y = b$.
- Recta tantente a eta curva en el punto $(a, b, f(a, b))$:

$$\text{Derivada : } f_x(x, b) \qquad \text{Pendiente: } f_x(a, b)$$

- Derivadas parciales: $f_x(a, b)$ resulta ser la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x, b)$ en la dirección de x.

$$L = \langle a, b, f(a, b)\rangle + t\,\langle 1, 0, f(a, b)\rangle \qquad \text{donde: } x = t, y = b, z = f(t, b)$$

- Para encontrar L_2 $x = a$:

$$\begin{aligned}
&x = a, y = t, x = f(z, y) \implies z_y = f_y(a, y) \implies z_y = f_y(a, b)\\
&z_y = f(a, b) \text{ es la pendiente de la tangente a la curva } f(a, y) \text{ en la dirección de } y\\
&L_2 = \langle a, b, f(a, y)\rangle + t\,\langle 0, 1, f_y(a, b)\rangle
\end{aligned}$$

- Estas dos rectas se utilizan para construir un plano tangente a la superficie.
- La ecuación del plano es un plano que es paralelo a L_1 & L_2.

$$\begin{aligned}
L_1 &= \langle a, b, f(a, b)\rangle + t\,\overbrace{\langle 1, 0, f(a, b)\rangle}^{v_1}\\
L_2 &= \langle a, b, f(a, b)\rangle + t\,\underbrace{\langle 0, 1, f(a, b)\rangle}_{v_2}
\end{aligned}$$

La ec. vectorial:

$$\hat{n} \cdot (-r_0) = 0 \quad \vec{r}_0 = \langle a, b, f(a, b)\rangle$$

terminar excursión.

9.1.2. Ejercicios

- Encuentre el plano tangenge a la superficie $z = \ln(x - 2y)$ en el punto $(3, 1, 0)$:

$$\begin{aligned}
f(a, b) \quad f_x(a, b) \quad f_y(a, b) \quad a = 3,\ b = 1\\
f(3, 1) = \ln(3 - 2) = \ln(1) = 0\\
\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x - 2y} \quad \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|^{(3,1)} = \frac{1}{3 - 2} = 1\\
\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2}{x - 2y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|^{(3,1)} = \frac{-2}{3 - 2} = -2\\
z = f(3, 1) + f_x(x - 3) + f_y(y - 1)
\end{aligned}$$

La ecuación del plano tangente:

$$\begin{aligned}
z &= 0 + x - 3 - 2y + 2\\
\therefore \quad z &= x - 2y - 1
\end{aligned}$$

9.2. Aproximaciones lineales

- La aproximación lienal de $z = f(x, y)$, linearización.
- La aproximación lineal de z en (a, b) es el plano tangente a la superficie.

$$L(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial}{}$$

9.2.1. Ejercicios

Considere la función $f(x, y) = \sqrt{2x + 2e^y}$:

- Encuentre la aproximación lineal de f en el punto $(7, 0)$:
  Encuentre $f(7, 0)$ $\quad f_y(7, 0)$

$$f(7, 0) = \sqrt{14 + 2} = 4$$
$$f_x(x, y) = (2x + 2e^y)^{-\frac{1}{2}} \qquad f_x(0, 7) = \frac{1}{\sqrt{14 + 2}} ? \frac{1}{4}$$
$$f_y(x, y) = \frac{e^y}{\sqrt{2x + 2e^y}} \qquad f_y(7, 0) = \frac{1}{\sqrt{14 + 2}} ? \frac{1}{4}$$
$$\therefore \text{ La aproximación lineal o plano tangente: } L = 4 + \frac{1}{4}(x - 7) + \frac{1}{4}y$$
$$\text{Cerca de (7,0): } \sqrt{2x + 2e^y} \approx \frac{9}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y$$

- Utilice la aproximación lineal para aproximar el valor de $\sqrt{8 + 2e}$:

$$f(4, 1) = \sqrt{8 + 2e} \approx 3{,}5 \approx L(4, 1)$$
$$L(4, 1) = \frac{9}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$
$$\text{En realidad : } \sqrt{8 + 2e} \approx 3{,}665592$$

- Ejercicio 3: Encuentre la aproximación lineal de $g(x, y) = 1 + \ln(xy - 5)$ en el punto $(2, 3)$:

$$g(2, 3) = 1 + 2\ln(6 - 5) = 1 + 0 = 1$$
$$g_x(x, y) = 0 + 1 \cdot \ln(xy - 5) + \frac{xy}{xy - 5}$$
$$g_x(2, 3) = \ln(1) + \frac{6}{6 - 5} = 0 + \frac{6}{1} = 6$$
$$g_y(x, y) = 0 + \frac{x \cdot x}{xy - 5}$$
$$g_y(2, 3) = \frac{4}{6 - 5} = 4$$

La aproximación lineal entonces es:

$$\begin{aligned}
&\therefore \\
&L(x,y) = 1 + 6(x-2) + 4(y-3) \\
&L(x,y) = -23 + 6x + 4y
\end{aligned}$$

9.3. 12.4 Derivadas implicitas y 12.5 Regla de la cadena

- Funciones 2 variables $z = f(x,y)$
- Explícita: z no está sólo en función de x & y.
- Ejemplos: $x^2 + y^2 + z^2 = 16, \sqrt{z^2 - x^2} = y + z$
- ¿Cómo se encuetnran $\frac{\partial z}{\partial x}$ & $\frac{\partial z}{\partial y}$?:
  - Implicita $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ es una esfera de 4 (rango [-4,4]) en dos hemisferios:

$$z = +\sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{2}(16 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{z} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{y}{z}
\end{aligned}$$

- Derivación implicita, se pueden encontrar z_x & z_y sin necesidad de resolver para z.

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 = 16 \quad & \text{z \& y son independientes} \\
\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2(x,y)) &= \frac{\partial}{\partial x}(16) \\
2x + 0 + 2z\frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\
2z\frac{\partial z}{\partial x} = -2x \quad \Longrightarrow \quad & \frac{\partial z}{\partial x} ? \frac{-x}{z} \\
\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2) &= \frac{\partial}{\partial y}(0) \\
0 + 2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \Longrightarrow \quad & \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{z}
\end{aligned}$$

9.3.1. Derivación parcial implícita abreviada

- $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ como $x\ln(y) + x^2\sqrt{1 + x + z} = k$
- Forma implícita: $F(x,y,z(x,y)) =$ constante. $\frac{\partial z}{\partial x}$ use la regla de la cadena.

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad z_x = -\frac{f_x}{f_z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \Longrightarrow \quad z_y = -\frac{f_y}{f_z}$$

9.3.2. Ejercicios

Encuentre las primeras derivadas parciales de z.

1. $\ln(zy) + 9z - xyz = 1$:

$$\begin{aligned} F_x &= -yz \\ F_y &= y^{-1} + 0 - xy \\ F_z &= z^{-1} + 9 - xy \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \tfrac{\partial z}{\partial x} &= -\tfrac{F_x}{F_y} = \tfrac{yz}{z^{-1}+9-xy} \\ \tfrac{\partial z}{\partial y} &= \tfrac{xz-y^{-1}}{z^{-1}+9-xy} \end{aligned}$$

Sin derivación parcial implícita

$z(x, y)$ agregue z_x cada vez que aparece z.

$$\frac{yz_x}{z_y} + 9z_x - y_x$$

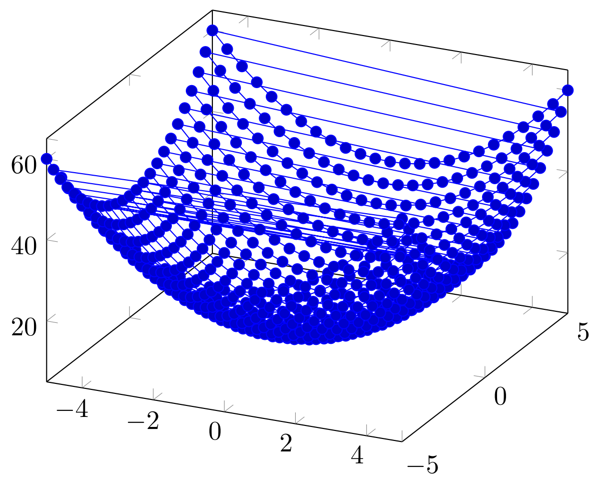
Capítulo10

Clase - 2020-03-10

10.1. Parcial 2

- Planos tangentes y aproximaciones lineales
- Regla de la cadena
- Derivación implícita
- Derivada direccional o razón de cambio en f en la dirección de $\vec{u}$

10.2. 14.7 Máximos y mínimos



- Máximo relativo:
  - $f(a,b) > f(x,y)$
  - (x,v) cerca de (a,b)
- Mínimo relativo:
  - $f(a,b) < f(x,y)$
  - (x,y) cerca de (a,b)

10.2.1. En funciones de una variable

- Números críticos: $f'(c) = 0$ ó $f'(c) =$ indef.
- 2da derivada:

$$
\begin{aligned}
f'(c) < 0 &\qquad \text{Máximo relativo}\\
f'(c) > 0 &\qquad \text{Mínimo relativo}\\
f'(c) = 0 &\qquad \text{Inconcluso}
\end{aligned}
$$

10.2.2. En funciones de dos variables

- Puntos críticos:

$$f_x(a,b)=0 \qquad \& \qquad f_y(a,b)=0$$

- No es suficiente:

$$\begin{aligned} f_{xx}<0 \qquad & \& \ f_{yy}<0 \quad \text{Máx relativo} \\ f_{xx}>0 \qquad & \& \ f_{yy}>0 \quad \text{Mín relativo} \end{aligned}$$

- Prueba de la segunda derivada: (a,b) es un punto crítico y $f(x,y)$ tiene segundas derivadas continuas.

$$D(a,b)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2$$

- Entonces:
  - Máximo relativo: $D(a,b)>0$ & $f_{xx}<0$
  - Mínimo relativo: $D(a,b)>0$ & $f_{xx}>0$
  - Punto de silla: $D(a,b)<0$ no hay ni mínimo ni máximo.
  - Inconcluso: $D(a,b)=0$
- Ejemplo: Considere la función $z=x^2+y^2$.
  - Puntos críticos:

$$\begin{aligned} z_x &= 2x = 0 \\ z_y &= -2y = 0 \\ &\text{Prueba de la segunda derivada} \\ &\begin{vmatrix} 2 & 000 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

10.2.3. Ejercicios máximos y mínimos

1. Encuentre los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones.
   - $f(x,y)=x^2+4y^2-6x+16y$

$$\begin{aligned} \left.\begin{aligned} f_x=2x-6=0 \implies x=3 \\ f_y=8y+16=0 \implies y=-2 \end{aligned}\right\} \text{Único punto crítico en:} \quad (3,-2) \\ D(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 16 \quad 16>0 \\ f_{xx}=2 \quad 2>0 \\ \text{Valor mínimo}\ : \quad f(3,-2)=-25 \end{aligned}$$

- $g(x,y) = 2x^2 + xy + y^2 + 100$

$$
\begin{aligned}
g_x = 4x + 4 = 0 \quad &\implies \quad y = -4x \quad impliesy = 0\\
g_y = x + 2y = 0 \quad implies \quad x - 8x = -9x = 0 \quad implies \quad x = 0\\
&\text{\#Resolver ecuaciones}\\
&\text{Único punto crítico}\\
D(x,y) = \begin{vmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7 \quad &\implies 7 > 0\\
g_{xx} = 4 > 0\\
\\
&\text{Valor mínimo relativo:}\\
g(0,0) = 100
\end{aligned}
$$

- $h(x,y) = 30 - x^2 - 2y^2 + 4x - 12y$

$$
\begin{aligned}
\left.\begin{aligned}\text{Encontrar pts. críticos}\ :\quad h_x = 2x - 4 = 0\\ \text{Encontrar pts. críticos}\ :\quad h_y = -4y - 12 = 0\end{aligned}\right\} x = -\frac{4}{2} = 2\\
y = \frac{12}{-4} = -3\\
\text{Único número crítico es (2,-3)}\\
D(x,y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 > 0 \qquad h_{xx} = -2 < 0\\
\text{Máximo relativo en (2,-3)}\ \ 38
\end{aligned}
$$

2. Una caja de cartón sin tapa, debe de tener un volúmen de $32,000cm^3$, calcule las dimensiones x, y, z que minimicen el cartón utilizado.

$$\begin{aligned}
\text{Volúmen:}\quad V = xyz = 32,000\\
\text{Área:}\quad A = 2zy + 2zx + xy\\
\text{Tengo que minimizar el área}\\
A = 2zy + 2zx + xy \qquad \Longrightarrow \qquad z = \frac{32,000}{xy}\\
x, y, z > 0\\
A(x,y) = 64,000 \cdot \frac{y}{xy} + 64,000\frac{x}{xy} + xy\\
A(x,y) = \frac{64,000}{x^2} + \frac{64,000}{y} + xy\\
A_x = 0: \quad \frac{-64,000}{x^2} + y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y = 64,000x^{-2}\\
A_y = 0: \quad \frac{-64,000}{y^2} + x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad [64,000]^2 x^{-4}\\
\text{Sustituya en Ay} \quad \frac{-64,000}{(64,000)^2 x^{-4}} + x = 0\\
-\frac{x^4}{64,000} = -x\\
x = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{1,000} = 4 \cdot 10 = 40\\
y = \frac{64,000}{x^2} = \frac{64 \cdot 1,000}{16 \cdot 100} = 4 \cdot 10 = 40\\
z = \frac{32,000}{40 \cdot 40} = \frac{32,000}{16,000} = 20\\
\therefore \quad \text{Las dimensiones que minimizan el área es:} \quad x = y = 40, \quad z = 20
\end{aligned}$$

3. Discriminación de precios:

- Demanda:

$$\left.\begin{array}{r} p_1 = 104 - q_1 \\ p_2 = 84 - q_2 \end{array} \text{Producción:}\ q_1, q_2 \right\}$$

- Costos:

$$C = 600 + 4q_1 + 4q_2$$

- Encuentre los precios y las cantidades q_1 & q_2 a la que deben venderse los productos para maximizar la utilidad.

$$\begin{aligned}
\text{Utilidad} &= \text{Ingresos} - \text{Costos} \\
\text{Utilidad}: \quad u(q_1, q_2) &= p_1 q_1 + p_2 q_2 - 600 - 4_q 1 - 4q_2 \\
u(q_1, q_2) &= 104q_1 - q_1^2 + 84q_2 - q_2^2 - 600 - 4q_1 - 4q_2 \\
u(q_1, q_2) &= -q_1^2 - q_2^2 + 100q_1 + 80q_2 - 600 \\
\frac{\partial u}{\partial q_1} &= -2q_1 + 100 = 0 \quad \Longrightarrow \quad q_1 = 50 \\
\frac{\partial u}{\partial q_2} &= -2q_2 + 80 = 0 \quad \Longrightarrow \quad q_2 = 40 \\
\text{Único punto crítico:} \quad & (q_1 = 50, q_2 = 40) \\
\left.\begin{aligned} q_1 = 50 \Longrightarrow p_1 = 40 \\ q_2 = 40 \Longrightarrow p_2 = 44 \end{aligned}\right\} & \text{ discriminación} \\
\text{Utilidad máxima:} \quad u(50, 40) &= 54 \cdot 50 + 44 \cdot 40 - 600 - 360 \\
2,700 + 1,760 - 960 = 35,00 & \quad \text{utilidad máxima} \\
\text{Prueba de la segunda derivada}: & \\
D(x, y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} &= 4 > 0 \\
v_{q_1 q_1} &= -2 < 0
\end{aligned}$$