

# Rocket Book Compilation - Cálculo Multivariable

Christiaan Ketelaar  
Organizado por : David Corzo

2020-01-06

# Índice general

1. Sistemas Tridimensionales de coordenadas	4
2. Distancias y superficies básicas	11
3. Vectores	19
4. Producto punto	28
5. Producto cruz	35
6. Ángulo entre vetores y ejes & Vectores paralelos y perpendiculares en n-dimensiones, Ecuación vectorial de una recta	44
7. Rectas y planos	51
8. Continuación de rectas y planos	60
9. Funciones Vectoriales & Límites y continuidad	67
10. Cálculo con funciones vectoriales: derivadas, integrales, etcétera	74
11. Continuación de cálculo con funciones vectoriales	79
12. Funciones de varias variables	87
13. Curvas de nivel	93
14. Derivadas parciales	102
15. Derivadas parciales, rectas tangentes y planos tangentes	108
16. Regla de la cadena, derivación implícita, planos y rectas tangentes	117
17. Derivadas direccionales y gradiente	125
18. Máximos y mínimos & problemas de aplicación, optimización	133
19. Multiplicadores LaGrange	141
20. Integrales dobles	148
21. Integrales dobles con coordenadas polares	153
22. Repaso de parcial	158
23. Integrales dobles en coordenadas polares	166

<b>24. Integrales triples</b>	<b>174</b>
<b>25. Integrales dobles en polares</b>	<b>182</b>
<b>26. Integrales triples en cilíndricas</b>	<b>188</b>

# Capítulo 1

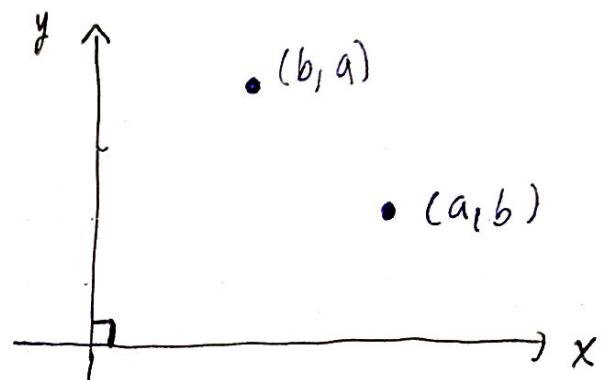
## Sistemas Tridimensionales de coordenadas

## 12.1 Sistemas Tridimensionales de Coordenadas.

Para localizar un punto en un plano, se necesitan 2 números.

- a la coordenada  $x$
- b la coordenada  $y$ .

Plano  $\mathbb{R}^2$

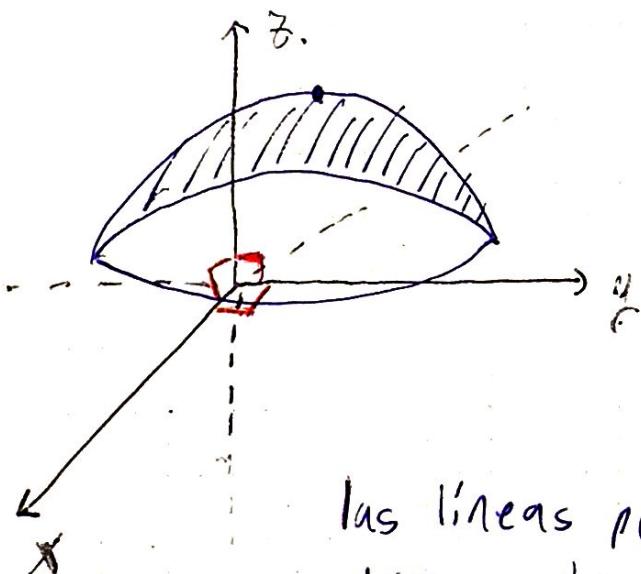


Los ejes de coordenadas son perpendiculares entre sí.

El sistema tridimensional de coordenadas rectangulares cada punto en el espacio es una terna ordenada  $(x, y, z)$

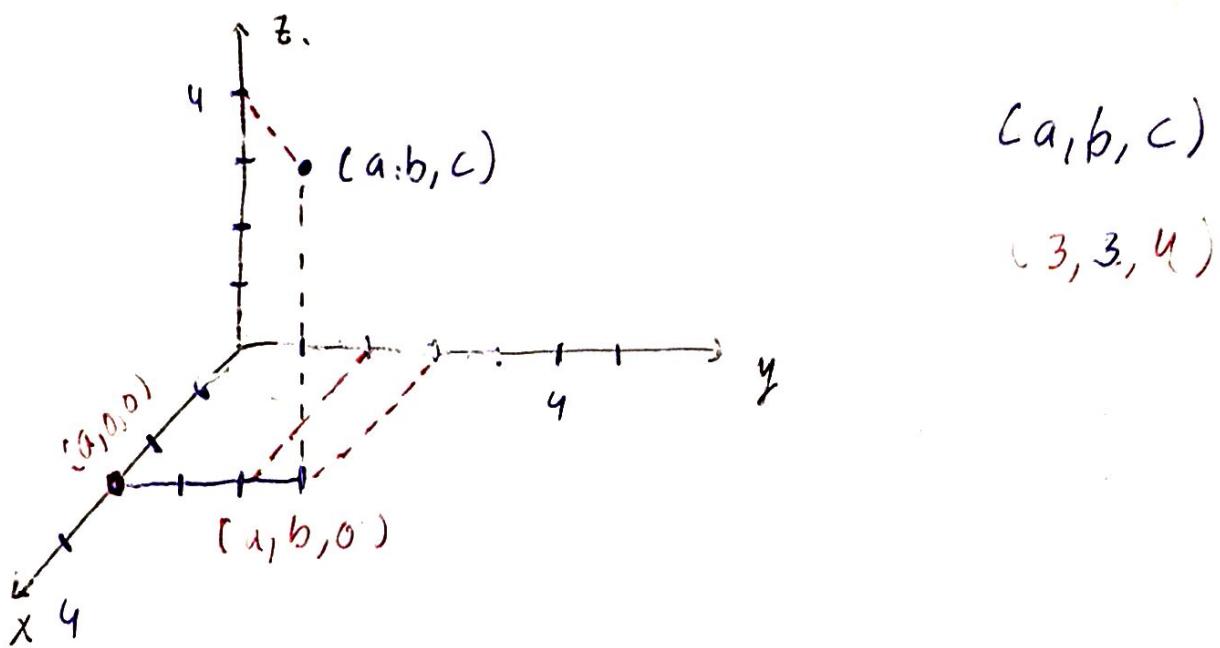
Espacio  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \text{ tal que } x, y, z \in \mathbb{R}\}$ .

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}.$$



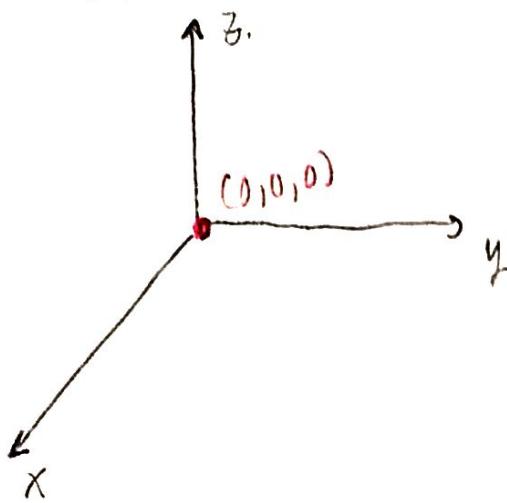
$x$  transversal  
 $y$  horizontal  
 $z$  vertical.  
 $z = f(x, y)$

las líneas punteadas se para simbolizar las partes de abajo, izquierda y detrás.

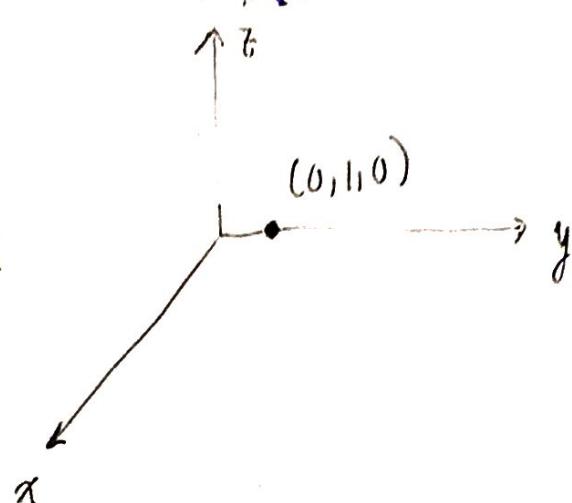


Ejercicio 1: Identifique los siguientes puntos.

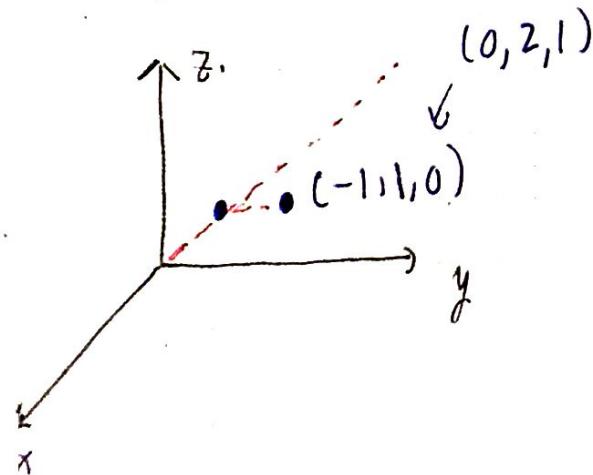
a.  $(0, 0, 0)$



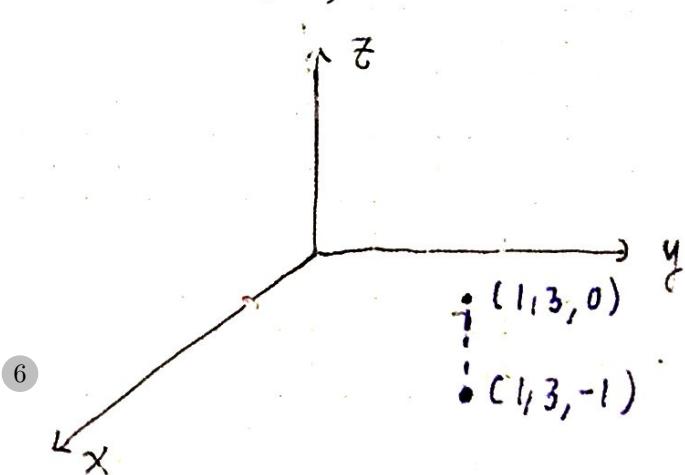
b.  $(0, 1, 0)$



b.  $(-1, 1, 0)$

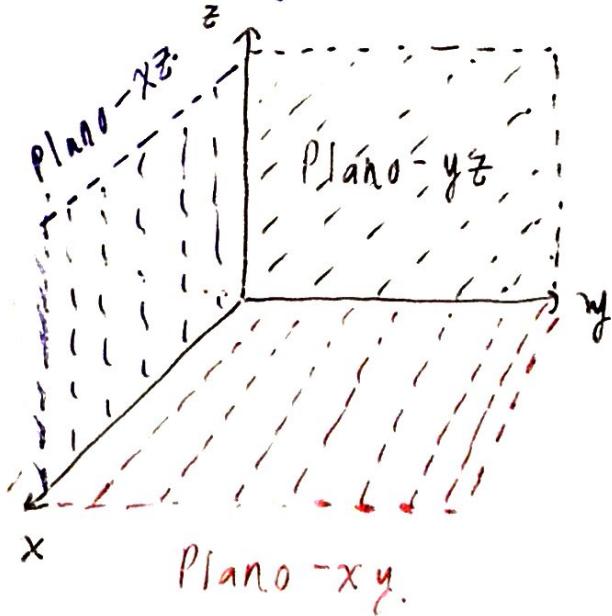


c.  $(1, 3, -1)$



## Planos Coordenados.

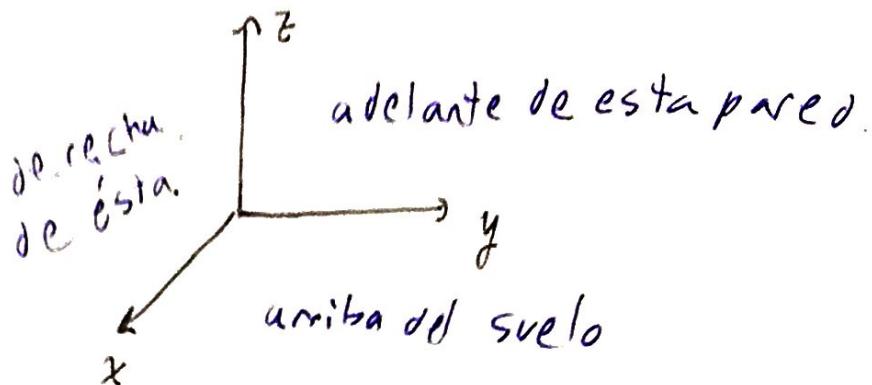
Plano -  $xy$  :  $z = 0$ . (el suelo) Plano -  $yz$   $x = 0$   
 (pared de atrás)



Plano -  $xz$   $y = 0$ .  
 (pared izquierda)

1er octante.

$$x > 0, y > 0, z > 0$$



## Planos en el espacio.

En 2-D.

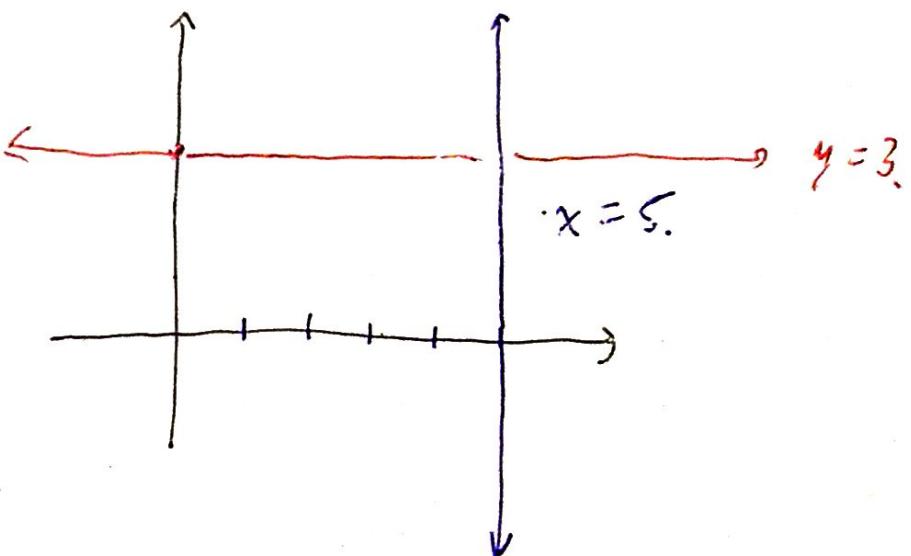
$$x = 5 \text{ ó } y = 3.$$

$$x = a$$

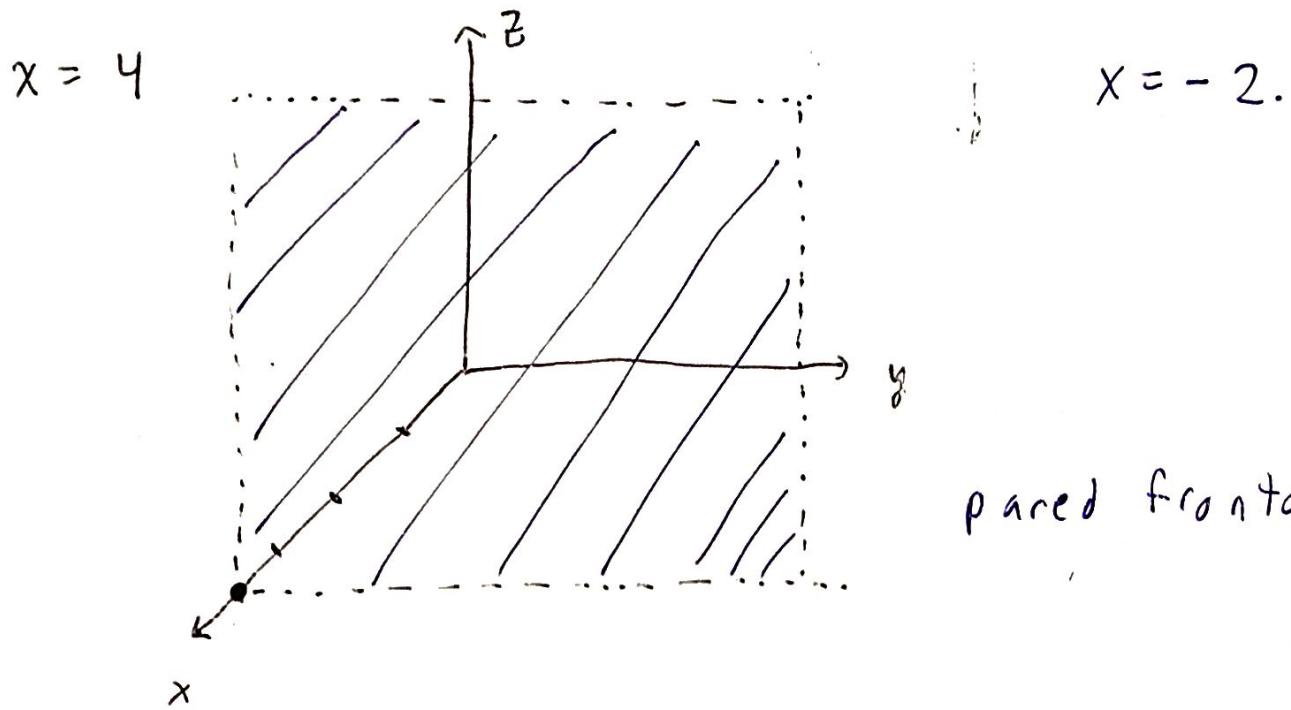
Rectas Verticales.

$$y = b.$$

Rectas Horizontales.

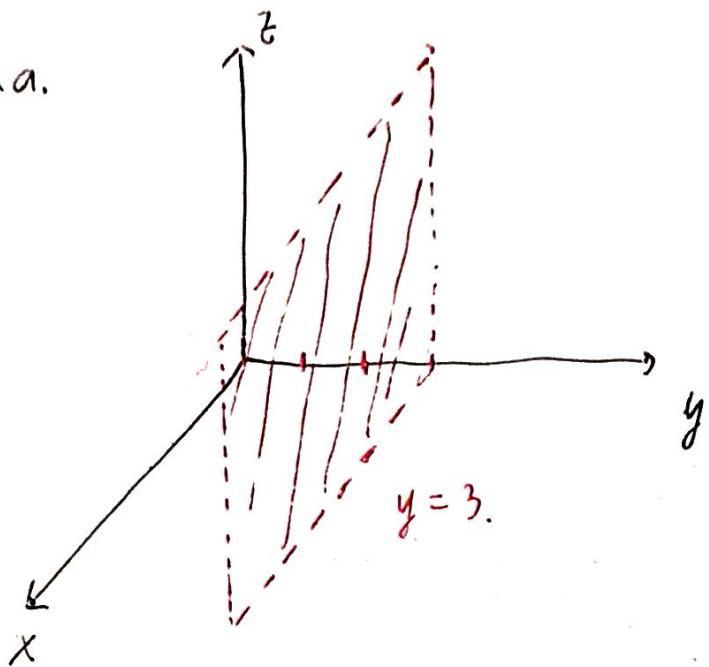


En 3-D  $x=a$ ,  $y=b$ ,  $z=c$  son gráficas de planos.

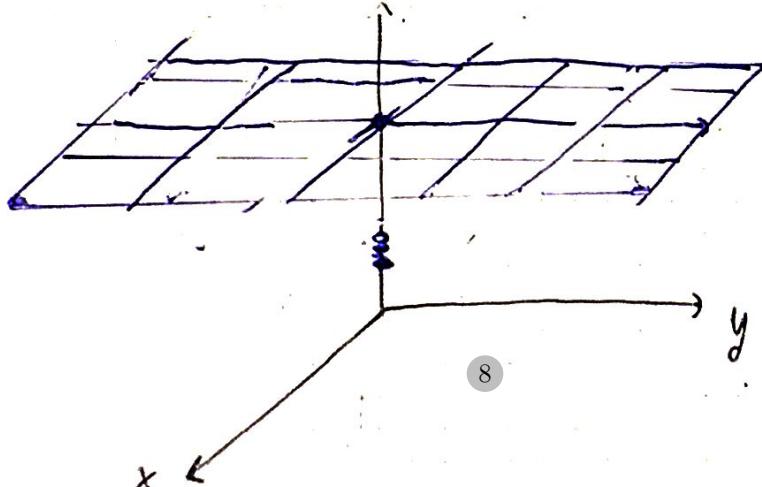


pared frontal.

$y = 3$ . pared derecha.



$z = 2$ .  
(techo)



5

Ec. lineal en 3-D va a graficar un plano.

Ec. Plano.  $ax + by + cz = d$ .

generalmente se grafican sólo en el primer octante  
si cada  $a, b, c$  y  $d$  es positiva.

Intersección  $x$ :  $y=0, z=0$   $(a, 0, 0)$

Intersección  $y$ :  $x=0, z=0$   $(0, b, 0)$

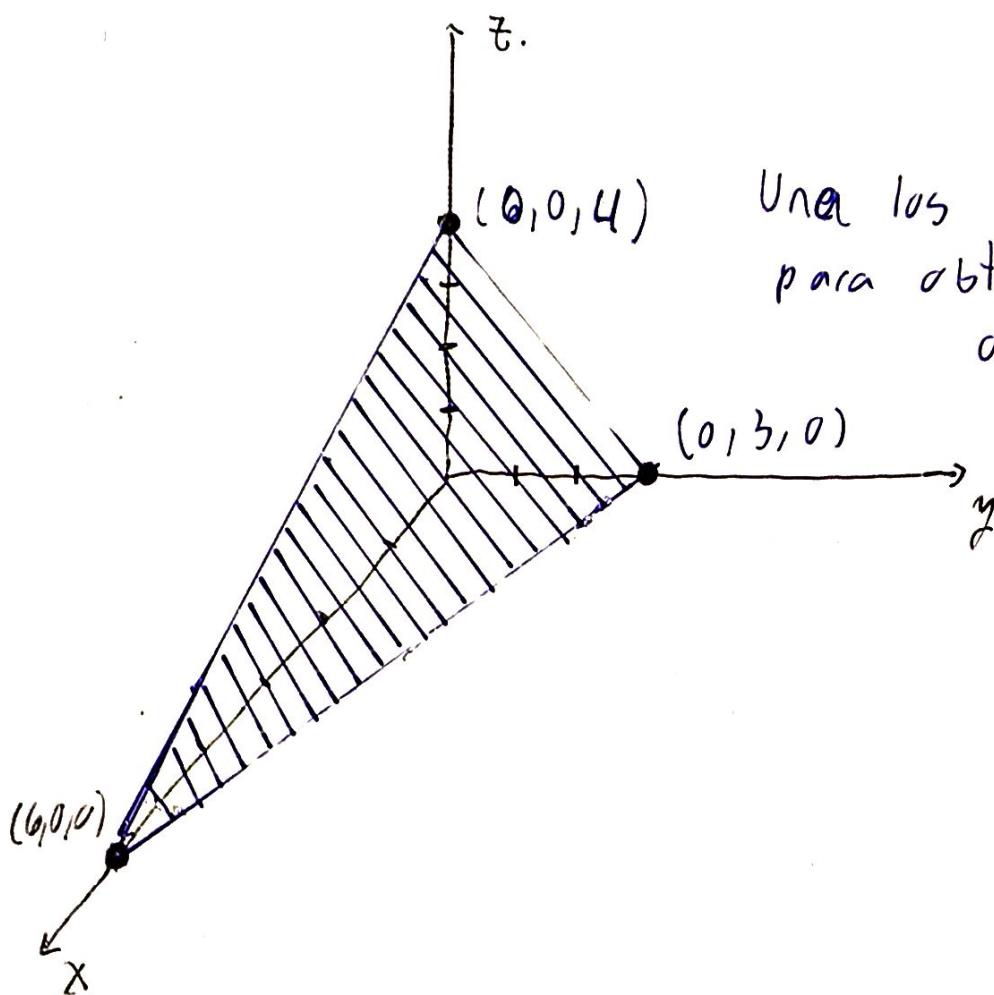
Intersección  $z$ :  $x=0, y=0$   $(0, 0, c)$

Ejercicio 3: Bosqueje el plano  $2x + 4y + 3z = 12$   
sólo en el primer octante.

Intersección  $x$ :  $2x = 12 \Rightarrow (6, 0, 0)$

Intersección  $y$ :  $4y = 12 \Rightarrow (0, 3, 0)$

Intersección  $z$ :  $3z = 12 \Rightarrow (0, 0, 4)$



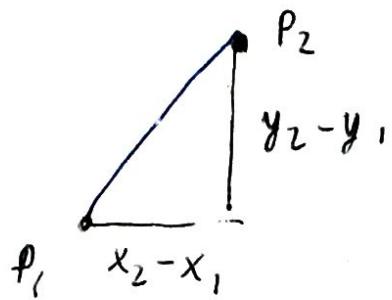
Une los tres puntos  
para obtener un segmento  
del plano o

# Capítulo 2

## Distancias y superficies básicas

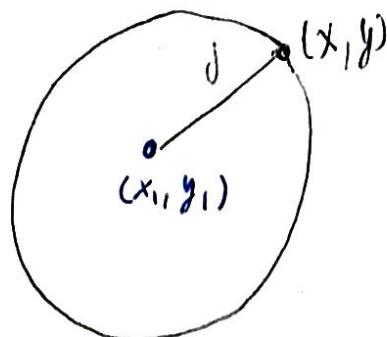
## 12.1.2 Distancias y Superficies Básicas.

En 2-D, la distancia entre  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = d^2.$$



Ec. Circunferencia  
de radio  $d$ . centrada  
en  $(x_1, y_1)$ .

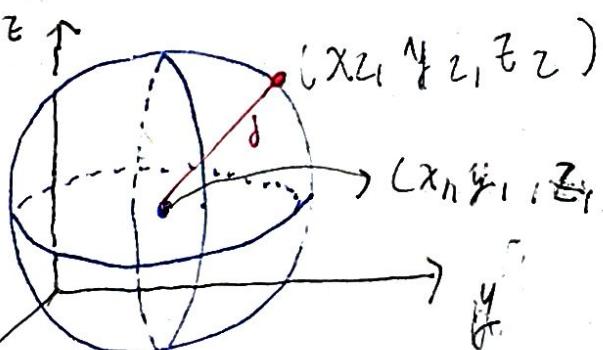
En 3-D, la distancia entre  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  y  $P_2(x_2, y_2, z_2)$

Calcule la diferencia entre  $z_2$  &  $z_1$ .

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

No puede  
ser  
negativa.

Notación  $d = |P_2 P_1|$



$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = d^2$$

Ec. de una esfera de radio  $r$   
centrada en  $(x_1, y_1, z_1)$ .

Pág. 15.

Esfera más utilizada centrada en el origen  $(0,0,0)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \text{radio } r.$$

Ejercicio 4: Encuentre el centro y radio de la esfera cuya ecuación es:

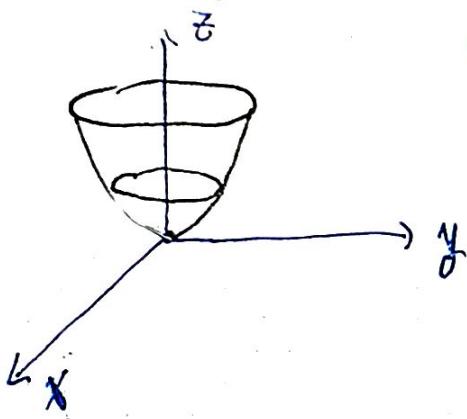
$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 4z + 4 = 0. \quad (\text{P}16).$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 + z^2 + 4z + 4 = -4. + 16 + 9 + 4$$

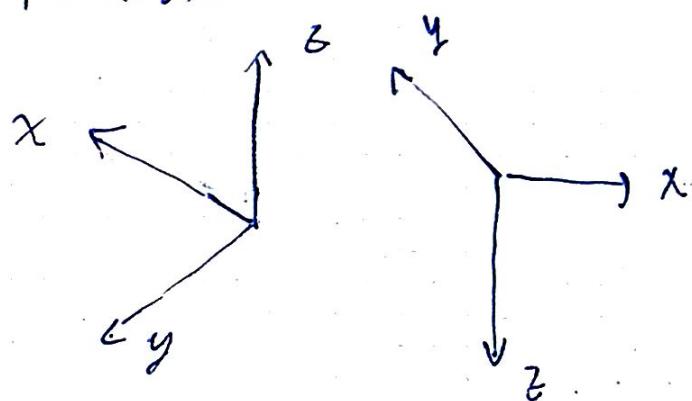
$$(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 25 = r^2$$

Centro de esfera  $(-4, 3, -2)$  Radio  $\sqrt{25} = 5$ .

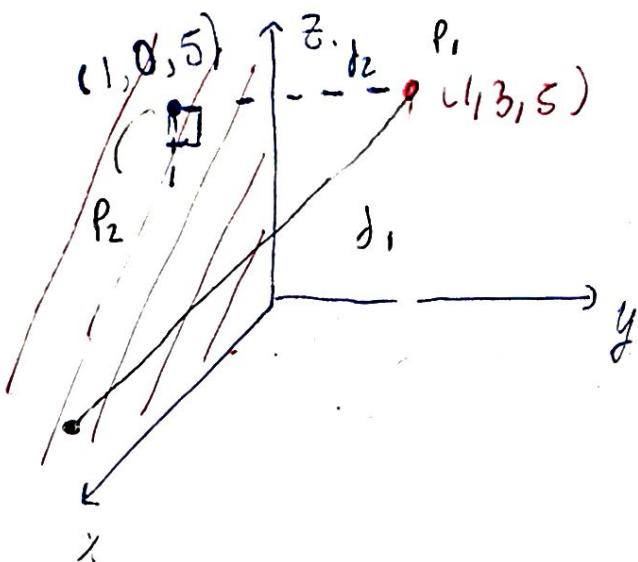
$Z = x^2 + y^2$  no es una esfera.



es un parabolóide.



Distancia entre un punto y un plano-coordenado.



Encuentre la distancia entre el punto  $(1, 3, 5)$  y el plano  $xz$ . (tiene infinitos puntos)

En el plano  $xz$   $y=0$

si se estrella el punto  $(1, 3, 5)$  contra el plano  $xz$  se obtiene el punto  $(1, 0, 5)$ .

"Estrellar": Encuentre la proyección del punto  $P$  sobre el plano.

$$\text{Distancia entre } P_1 \text{ y } P_2 \quad d = \sqrt{(1-1)^2 + (3-0)^2 + (5-5)^2}$$

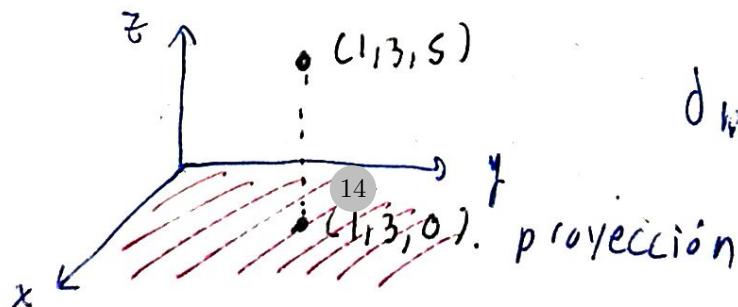
$$d = \sqrt{0 + 9 + 0} = 3$$

Gabriel la proyección del punto  $(a, b, c)$  sobre el plano  $xz$  es el punto  $(a, 0, c)$ .

Distancia mínima entre  $P$  y el plano es

$$d = \sqrt{0 + b^2 + 0} = |b|. \quad \text{de la componente } -y.$$

¿Cuál es la distancia entre el punto  $(1, 3, 5)$  y el plano  $xy$ ?  $z=0$ .



$$d_{\min} = \sqrt{0 + 0 + 5^2} = 5.$$

Ejercicio 6: considere los puntos  $A(3, 0, -4)$ ,  $B(9, 0, 0)$   
 y  $C(0, 1, \sqrt{15})$ .  
 $\uparrow$   $\uparrow$   $\uparrow$   
 $y=0$ .  $y=0$   $z=0$ .

a. ¿Cuál de los sgs. puntos está más cercano al origen?

Calcule la distancia de cada punto respecto al origen.

$$d_{AO} = |AO| = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5 \quad O(0,0,0)$$

$$|BO| = \sqrt{81+0+0} = \sqrt{81} = 9$$

$$|CO| = \sqrt{0+1+15} = \sqrt{16} = 4.$$

✓ es el más cercano al origen.

b. ¿Cuáles de los puntos están sobre el plano  $yz$ ?

Ec. Plano  $yz$ :  $x=0$ .

A y B no están sobre el plano  $yz$   $x \neq 0$ .

El punto C  $(0, 1, \sqrt{15})$  si está sobre este plano.

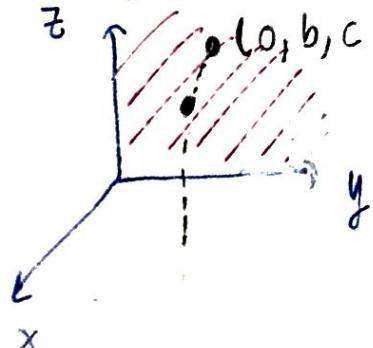
Comentario. A está sobre el plano  $xz$ .

B está sobre el eje x.

está sobre el plano  $xy$  &  $xz$

c. ¿Cuáles de los puntos está más cercano al plano  $yz$ ?  $x=0$ .

$z$   $(0, b, c)$ .



como C está sobre el plano  $yz$   
 éste es el más cercano a este plano  
 $d=0$ .

Encuentre las proyecciones y las distancias

$$A(3,0,-4), \quad P_A = (0,0,-4), \quad d_A = 3$$

$$B(9,0,0), \quad P_B = (0,0,0), \quad d_B = 9.$$

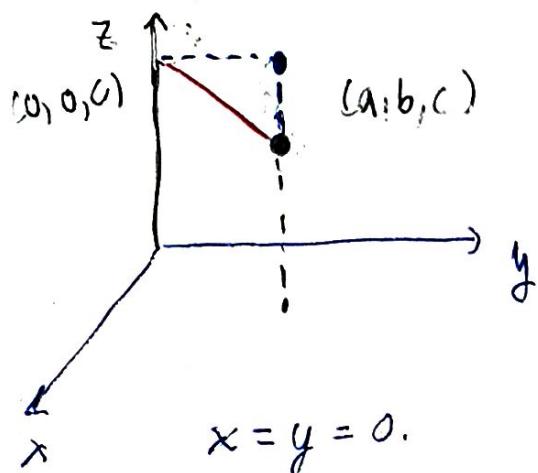
$$C(0,1,\sqrt{15}), \quad P_C = (0,1,\sqrt{15}), \quad d_C = 0 \quad \checkmark$$

mismo punto, éste sobre el plano  $yz$

Distancia entre un punto y un eje.

j. ¿Cuál de los siguientes puntos está más cercano

al eje  $-z$ .



En el eje  $z$   $x=0, y=0$ .

La proyección del punto  $P(a,b,c)$  al eje  $z$  es el punto  $P_1(0,0,c)$ .

$$d_{\min} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Encuentre las proyecciones sobre el eje  $y$  las distancias.

$$A(3,0,-4), \quad P_A(0,0,-4), \quad d_A = \sqrt{9+0+0} = 3.$$

$$B(9,0,0), \quad P_B(0,0,0), \quad d_B = \sqrt{81+0+0} = 9.$$

$$C(0,1,\sqrt{15}), \quad P_C(0,1,\sqrt{15}), \quad d_C = \sqrt{0+1+0} = 1$$

mas cercano

Plano  $x=0$  plano  $yz$

$y=0$  plano  $xz$

$z=0$  plano  $xy$

Ejes

$x=0, y=0$

$x=0, z=0$

$y=0, z=0$

Eje- $z$

Eje- $y$

Eje- $x$ .

Superficies. Básicas: Planos, Cilindros y Esfera.

En 12.6 superficies cuádricas cilindro parabólico  
cilindro (función).

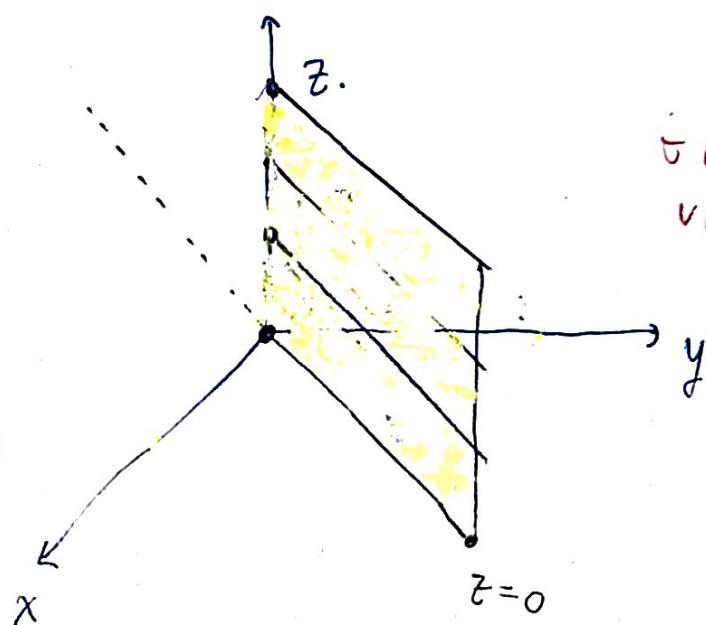
Ejercicio 7: Bosqueje el plano  $y = x$ . en el 1er octante.

$$z = 0 : y = x$$

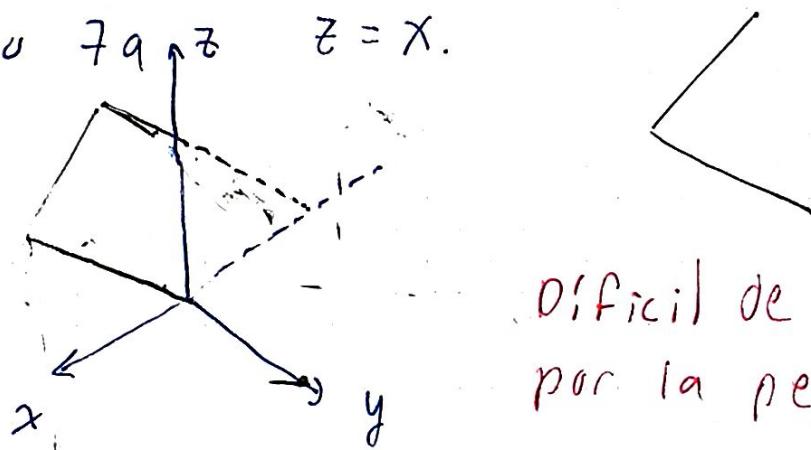
$$z = 1 : y = x$$

$$z = 9 : y = x$$

sólo tiene  
intersectos con el  
eje -z.



Ejercicio 7a)  $z = x$ .

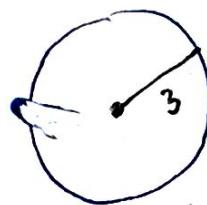


Difícil de graficar  
por la perspectiva.

Ejercicio 8: Grafique las siguientes superficies

a.  $x^2 + z^2 = 9$ .

Variable  $y$ .

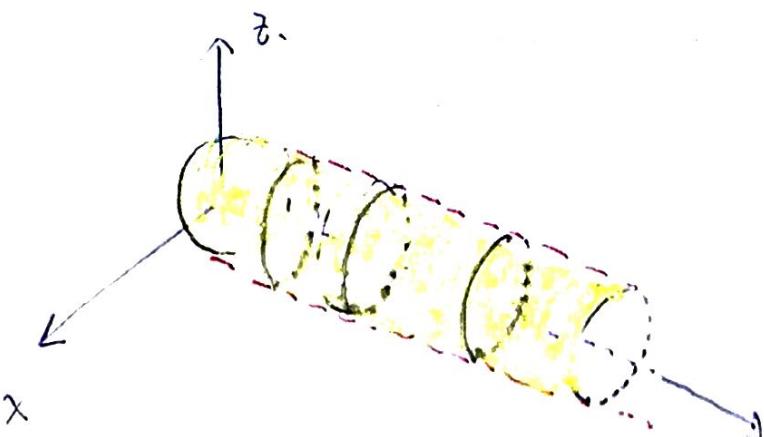


En 2-D

circunferencia  
de radio 3.

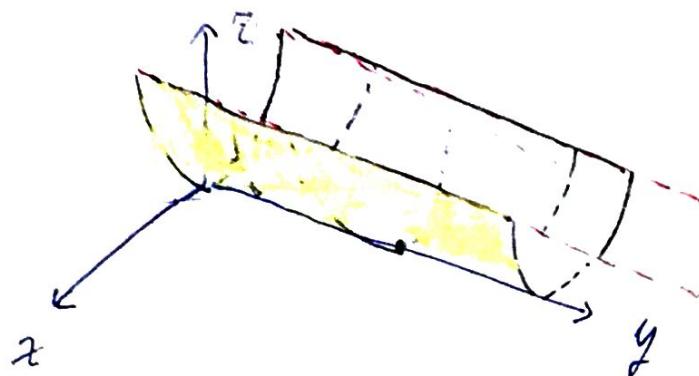
$$y=0 \quad x^2 + z^2 = 9$$

$$y=2 \quad x^2 + z^2 = 9$$



Cilindro circular de radio centrado en el eje -y.

b.  $z = x^2$ .

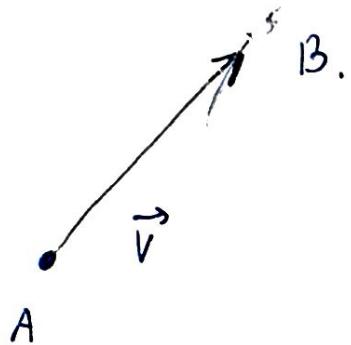


hoja doblada  
cilindro parabólico.

# Capítulo 3

## Vectores

## 12.1 Vectores p. 21.

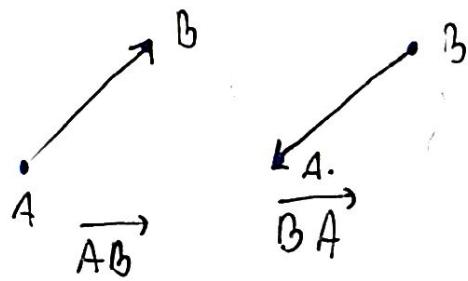


B. Un vector: tiene magnitud y dirección  
se denota en negrilla  $\mathbf{v}$   
o una flecha sobre la letra  
 $\overrightarrow{V}$

la longitud de cada segmento es la magnitud del vector.  
la flecha indica su dirección.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

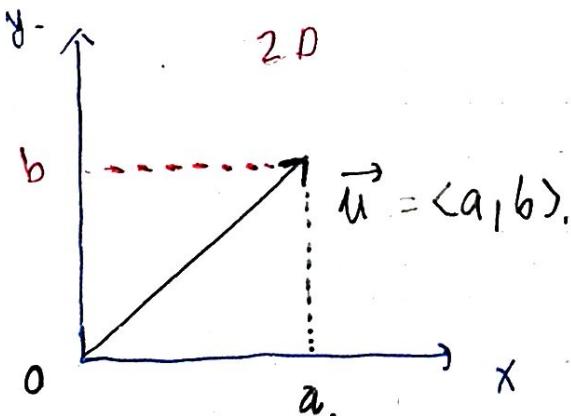
segmento de recta dirigido  
empieza en el punto  $A$  y termina en el  $B$ .



$$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$$

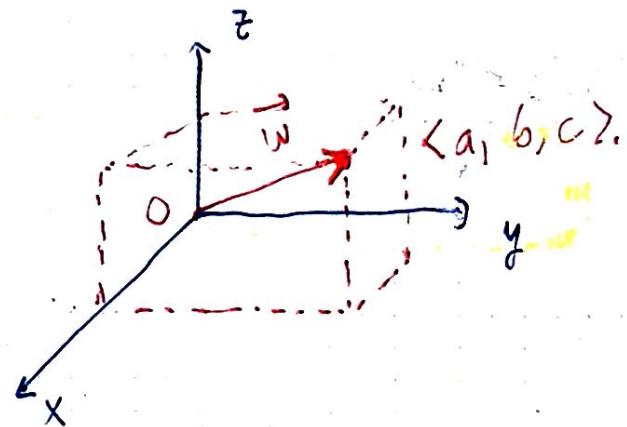
vector cero  $\vec{0}$  no tiene ni  
magnitud ni dirección.

Sistema de coordenadas y las componentes de un vector.



$$\vec{u} = \langle a, b \rangle \text{ ó } [a, b]$$

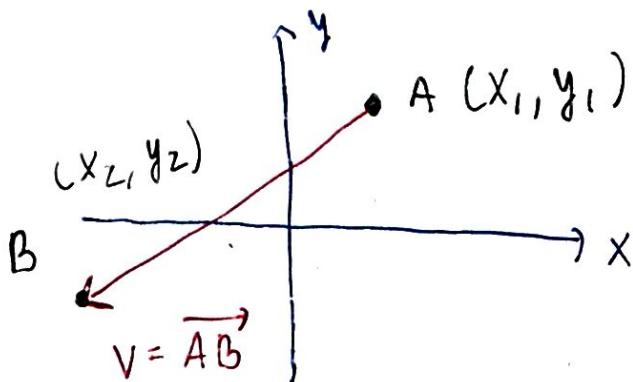
las llaves  $\langle \rangle$  denotan a un vector.



$$\vec{w} = \langle a, b, c \rangle$$

## Vector Posición:

En 2-D.



$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle.$$

En 3-D.

$$A(x_1, y_1, z_1) \text{ & } B(x_2, y_2, z_2)$$

$$\overrightarrow{BA} = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2 \rangle.$$

Magnitud de un vector: la distancia entre el punto B y el punto A.

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

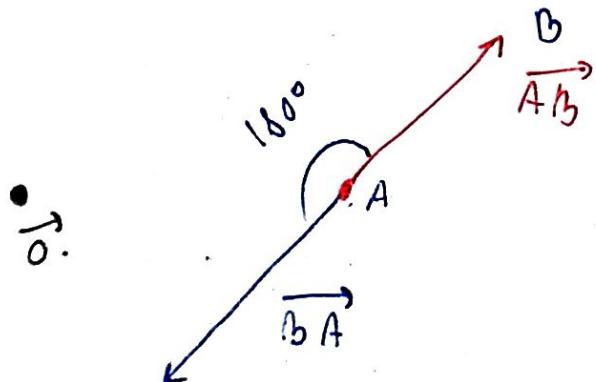
Se nota con || ó |||.

$$\text{si } \vec{v} = \langle a, b, c \rangle \quad |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Observaciones:  $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

$$\text{pero } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|.$$



$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}?$$

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0} \text{ vector cero.}$$

no tiene dirección.

$$\langle x_1 - x_1, y_1 - y_1, z_1 - z_1 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle.$$

Ejercicio 1: Considere el vector  $\vec{AB}$  con un punto inicial  $A(1, 2, -4)$  y punto final  $B(4, 8, 2)$ .

a. Encuentre el vector posición  $\vec{u} = \vec{AB}$ .

$$\vec{u} = \langle 3, 6, 6 \rangle \quad 2 - (-4)$$

b. Encuentre la longitud del vector  $\vec{u}$ .

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36 + 36} = \sqrt{81} = 9.$$

## Operaciones de Vectores.

I. Suma de vectores

✓ } Aritmética

II. Multiplicación por un escalar.

✓ } Geometría

12.3 Producto Punto

12.4 Producto Cruz.

### Suma de vectores.

$$\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \quad \vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle.$$

Sume cada componente.

$$\vec{u} + \vec{w} = \langle u_1 + w_1, u_2 + w_2, u_3 + w_3 \rangle.$$

Multiplicación por un escalar.  $K$  es una constante.

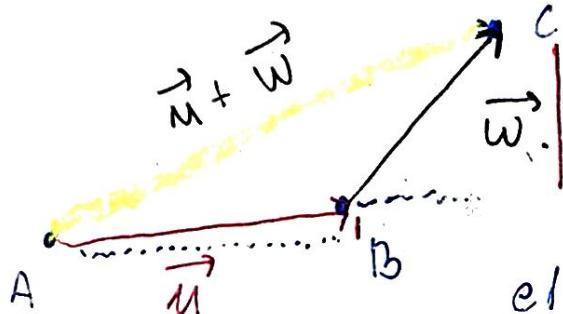
denotada como un escala

Multiplique cada componente.

$$K\vec{w} = \langle Kw_1, Kw_2, Kw_3 \rangle.$$

¿Cómo se pueden visualizar geométricamente estas operaciones?

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \vec{w} = \overrightarrow{BC}$$



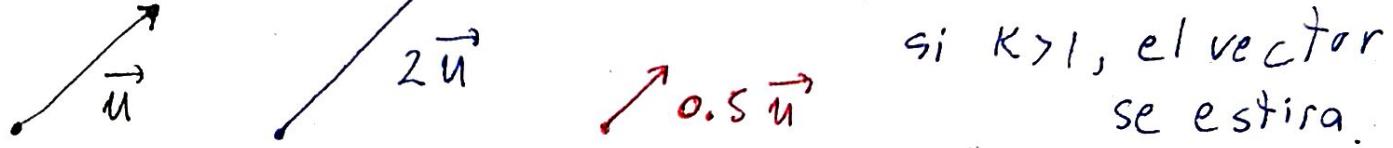
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{u} + \vec{w} = \overrightarrow{AC}$$

Suma de vectores  
el segundo vector  $w$  empieza en el punto donde termina el 1ero

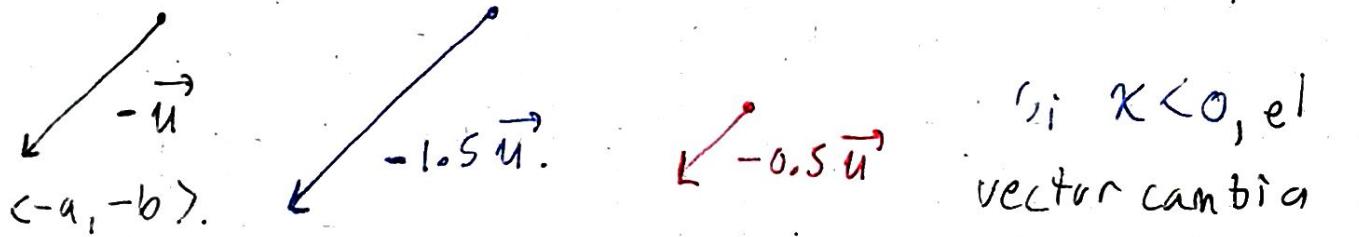
Multiplicación por un escalar

- Se preserva la dirección si  $K > 0$ .



$$\langle a, b \rangle \quad \langle 2a, 2b \rangle \quad 2\langle a, b \rangle.$$

si  $0 < K < 1$ , el vector se comprime.



si  $K < 0$ , el vector cambia de dirección.

(cambia en  $180^\circ$ ).

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \langle 0, 0 \rangle.$$

Negativo de un vector: cuando  $K = -1$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

$$-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$$

Resta o diferencia de vectores: Caso especial de la suma

$$\begin{aligned}\vec{u} + (-\vec{w}) &= \vec{u} - \vec{w} \\ &= \langle u_1 - w_1, u_2 - w_2, u_3 - w_3 \rangle.\end{aligned}$$

Rreste cada componente entre sí.

Se puede pensar como la suma entre  $\vec{u}$  y el negativo de  $\vec{w}$ .

Ejercicio 2: Sean  $\vec{a} = \langle 1, -2, 5 \rangle$ ,  $\vec{b} = \langle -2, 1, -3 \rangle$ .

combinación <sup>lineal</sup> de vectores.  $\vec{u}, \vec{w}$  en 2-D.

$$k_1 \vec{u} + k_2 \vec{w} = \langle k_1 u_1 + k_2 w_1, k_1 u_2 + k_2 w_2 \rangle$$

a.  $\vec{a} + \vec{b} = \langle -1, -1, 2 \rangle$ .

b.  $2\vec{a} - 4\vec{b} = \underbrace{\langle 2, -4, 10 \rangle}_{2\vec{a}} + \underbrace{\langle -8, -4, +12 \rangle}_{-4\vec{b}} = \langle 10, -8, 22 \rangle$

c.  $|2\vec{a} - 4\vec{b}| = \sqrt{100 + 64 + 484} = \sqrt{648} \approx 25.45$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30} \approx 5.47.$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14} \approx 3.74.$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \approx 2.45.$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \neq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

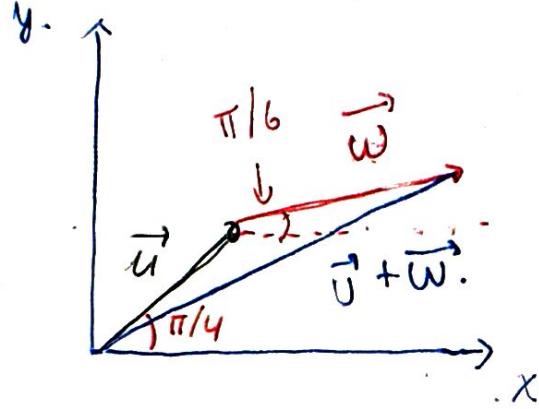
$$\sqrt{|\vec{a} + \vec{b}|^2} \neq \sqrt{|\vec{a}|^2} + \sqrt{|\vec{b}|^2}$$

6.

Problema Bono: Considere el vector  $\vec{u} = \langle 1, 1 \rangle$  y  $\vec{w} = \langle 1, \sqrt{3} \rangle$ .

Encuentre la magnitud y el ángulo respecto al eje -x del vector  $\vec{w} + \vec{u}$ .

$$\vec{w} + \vec{u} = \langle 2, 1 + \sqrt{3} \rangle.$$



$$|\vec{u}| = \sqrt{1+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan \theta = y/x.$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \pi/4.$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1+3^2} = 2.$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi/6.$$

$$|\vec{w} + \vec{u}| = \sqrt{4 + (1 + \sqrt{3})^2} \\ \approx 3.3858$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) = 0.93 \text{ rad. } \approx 53.79^\circ$$

Vectores Bases o Estándar.

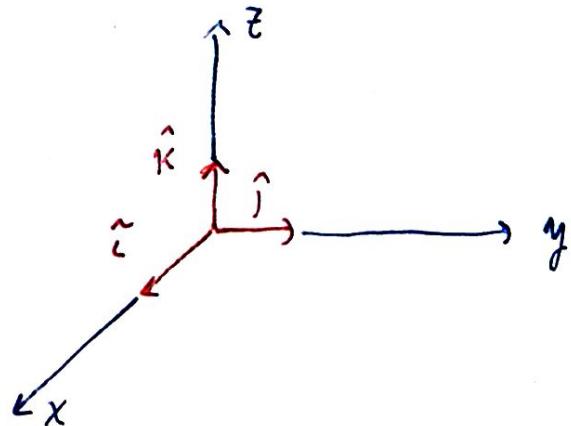
$$\vec{u} = \langle 3, 6, 7 \rangle = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}$$

se denotan como  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  y apuntan en la dirección de cada eje coordenado.

$$\hat{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

$$\hat{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

$$\hat{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$



Permiten expresar cada vector  $\vec{u}$  como una combinación de los vectores estándar.

$$\vec{u} = \langle a, b, c \rangle = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

Magnitud de  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

JNQ.

$$|\hat{i}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1 \quad |\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

Vectores Unitarios: Tienen longitud igual a 1,  
 $|\vec{u}| = 1$

¿Qué sucede si  $|\vec{a}| \neq 1$ ? Se encuentra el vector unitario  $\vec{u}$  asociado a  $\vec{a}$  dividiendo por  $|\vec{a}|$ .

El vector  $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$  es siempre unitario.

Ejercicio 3: Sean  $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{k}$ ,  $\vec{b} = 5\hat{j} + 4\hat{k}$ .

Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ .

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = 4\hat{i} - 6\hat{k} + 15\hat{j} + 12\hat{k} = 4\hat{i} + 15\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{16 + 225 + 36} = \sqrt{277}$$

unitario  $\vec{u} = \frac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{|2\vec{a} + 3\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{277}} \langle 4, 15, 6 \rangle$ .

# Capítulo 4

## Producto punto

## 12.3 Producto Punto

Operaciones entre vectores  $\vec{a} + \vec{b}$  (suma)

suma  $\vec{a} + \vec{b}$

Mult. por un escalar  $k\vec{a}$

Producto punto  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Producto cruz  $\vec{a} \times \vec{b}$

Producto punto entre  $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  y  $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

es el número a.o.b. dado por:

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Para un vector en n dimensiones.

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Para que sea posible  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  tienen que tener la misma dimensión

$$\vec{a} = \langle 1, 2, 0, 4 \rangle \quad \vec{b} = \langle 2, 1 \rangle$$

Faltan 2 componentes.

$\vec{a} \cdot \vec{b}$  indefinido

Propiedades:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  Comunitativa.

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  Distributiva

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Ejercicio 1: Calcule el producto punto.

a.  $\vec{a} = \langle 6, -2, 3 \rangle, \vec{b} = \langle 2, 5, 1 \rangle.$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6(2) - 2(5) + 3(1) = 12 - 10 + 3 = 5$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = 12 - 10 + 3 = 5 \quad \text{Gracias AA.}$$

b.  $\vec{u} = \underline{\hat{j}} + \underline{\hat{2}\hat{i}} + \underline{\hat{3}\hat{k}} \quad \vec{v} = \underline{\hat{2}\hat{k}} + \underline{\hat{4}\hat{i}} + \underline{0\hat{j}}$  vectores base

$$\langle \vec{u} \rangle = \langle \hat{j} \rangle + \langle \hat{2}\hat{i} \rangle + \langle \hat{3}\hat{k} \rangle \quad \langle \vec{v} \rangle = \langle \hat{2}\hat{k} \rangle + \langle \hat{4}\hat{i} \rangle + \langle 0\hat{j} \rangle$$

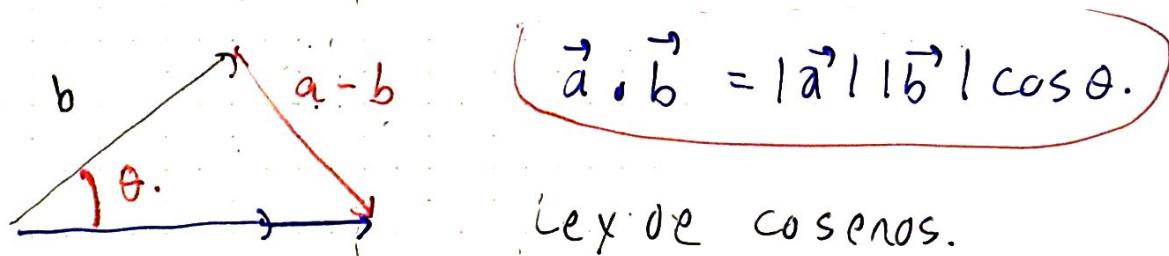
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \hat{j}, \hat{2}\hat{i}, \hat{3}\hat{k} \rangle \cdot \langle \hat{2}\hat{k}, \hat{4}\hat{i}, 0\hat{j} \rangle = 8 + 0 + 6 = 14$$

c.  $\vec{w} = \langle 1, 0, -2 \rangle \quad \vec{v} = \langle 2, 0, 1 \rangle.$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 2 + 0 - 2 = 0$$

$$\boxed{\vec{w} \cdot \vec{v} = 0}$$

Definición Alternativa del Producto.



Ley de cosenos.

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \theta.$$

$\vec{a}^2$  no existe

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

$$\underline{\vec{a} \cdot \vec{a}} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \underline{|\vec{a}|^2}.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

$$(a-b) \cdot (a-b) = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta.$$

$$a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b$$

$$|a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta.$$

$$a \cdot b = |a||b|\cos\theta.$$

$$|a \times b| = |a||b|\sin\theta.$$

Dados dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , el ángulo  $\theta$  entre los vectores es

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a \cdot b}{|a||b|}\right)$$

Ejercicio 2: determine el ángulo entre los dos vectores.

q.  $\vec{a} = \langle 4, 3 \rangle$   $\vec{b} = \langle -3, 4 \rangle$ .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -12 + 12 = 0 \quad |a| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$|b| = \sqrt{9+16} = 5.$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{0}{25}\right) = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  y el ángulo es  $90^\circ$   $\vec{a} \perp \vec{b}$  ortogonales

ortogonalidad  $\Leftrightarrow$  perpendicularidad.

b.  $\vec{a} = \langle 1, -2 \rangle$ ,  $\vec{b} = \langle 3, -1 \rangle$ .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \quad |\vec{a}| = \sqrt{5} \quad |\vec{b}| = \sqrt{10}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi/4$$

c.  $\vec{a} = \hat{i} + \hat{k}$ ,  $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j}$   $\langle 1, 0, 1 \rangle$   $\langle 1, 1, 0 \rangle$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad |\vec{b}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
 $\Rightarrow 16, \pi/4, \pi/3$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Vectores perpendiculares ó ortogonales., denotado como  
 $a \perp b$ .

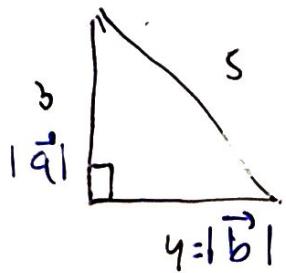
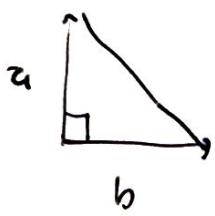
$$(a \perp b \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \pi/2 = 0.$$

Ejercicio 3: Determinese si los sigs. son ortogonales entre sí.

$$\vec{a} = \langle 4, 3, 1 \rangle, \vec{b} = \langle 2, -2, -2 \rangle,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 - 6 - 2 = 0$$
 $\Rightarrow$  Si son ortogonales.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

El triángulo es rectángulo

$$|a|^2 + |b|^2 = |c|^2$$

b.  $\vec{u} = \langle 1, 8, -2, 4 \rangle$   $\vec{w} = \langle 3, 4, 6, -1 \rangle$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 3 + 32 - 12 - 4 = 19 \neq 0$$

No son ortogonales.

c.  $\vec{a} = \langle 1, 0, 0 \rangle$   $\vec{b} = \langle 0, 1, 0 \rangle$   $\vec{c} = \langle 0, 0, 1 \rangle$

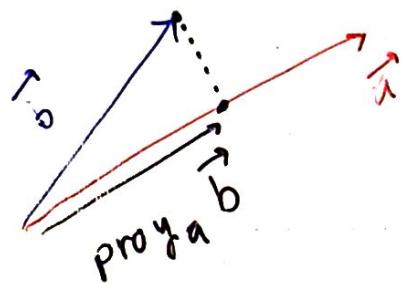
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0. \text{ G SW.}$$

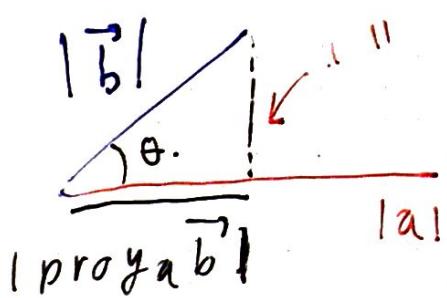
Mutuamente ortogonales.

Proyecciones: un vector se proyecta sobre otro vector



El vector  $\text{proy}_a(\vec{b})$  es la proyección vectorial de  $\vec{b}$  sobre  $\vec{a}$ .

si el ángulo entre  $a$  y  $b$  es  $\theta$ .

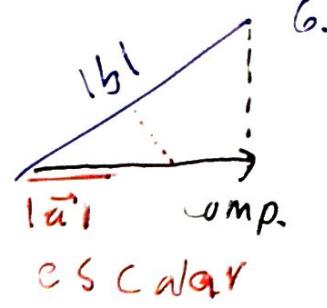


$$\frac{|\text{proy}_a \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

proyección escalar:

$$|\text{proy}_a \vec{b}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$$

proyección escalar:  $\text{Comp}_a \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$



proyección vectorial

tiene la misma dirección que el vector  $\vec{a}$ .

utilice el vector  $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$  para encontrar la dirección de  $\vec{a}$

$$\text{proy}_a \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \right) \vec{a} \quad \text{vector.}$$

Observaciones:  $\text{Comp}_b \vec{a} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{b}|} = \neq \text{comp}_a \vec{b}$

Ejercicio 5: Halle la proyección escalar y la proyección vectorial de  $\vec{b}$  sobre  $\vec{a}$ .

a.  $\vec{a} = \langle -6, 8 \rangle \quad \vec{b} = \langle 3, 4 \rangle$ .

Proy escalar:  $\text{Comp}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{-18 + 32}{\sqrt{100}} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$ .

Proy. vectorial:  $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{7}{5} \langle -6, 8 \rangle$   
so

b.  $\vec{a} = \langle 1, 1, 3 \rangle \quad \vec{b} = \langle -2, 3, 1 \rangle$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + 3 + 3 = 4 \quad |\vec{a}| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$$

Escalar  $\text{Comp}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{4}{\sqrt{11}}$  34

Vectorial  $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{4}{\sqrt{11}} \langle 1, 1, 3 \rangle$

# Capítulo 5

## Producto cruz

## 12.4 Productos Cruz.

Determinantes Matriz (Arreglo rectangular de números)  
Cuadrada (mismo # de filas y columnas)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad \text{Jet orden 2. Matrix } 2 \times 2$$

$$\text{P.e. } \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-1)(4) = 6 + 4 = 10$$

Determinante de orden 3: Matriz  $3 \times 3$   
suma de tres determinantes de orden 2.

$$\left| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \right| = a_1 \left| \begin{array}{cc} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{array} \right| - a_2 \left| \begin{array}{cc} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{array} \right| + a_3 \left| \begin{array}{cc} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{array} \right|$$

$3 \times 3$       3 matrices     $2 \times 2$ .

$$\begin{aligned}
 \text{p.e} \quad & \left| \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right| = 2 \left| \begin{array}{cc} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{array} \right| - 0 \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{array} \right| + 2 \left| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{array} \right| \\
 & = 2(6 - 0) - 0 + 2(-1 - 3) \\
 & = 12 - 8 = 4.
 \end{aligned}$$

## El Producto Cruz.

Dados dos vectores  $\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$  &  $\vec{b} = b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}$

¿Cómo se encuentra un vector  $\vec{c}$  que es perpendicular a  $\vec{a}$  y a  $\vec{b}$ ?

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \quad \vec{c} \cdot \vec{b} = 0.$$

Resuelva para  $c_1, c_2, c_3$

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0$$

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 = 0$$

El producto cruz  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  es un vector perpendicular a ambos vectores  $\vec{a}$  &  $\vec{b}$ .

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \hat{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \hat{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Observaciones:

- El producto cruz es un vector, mientras que el producto es un número o escalar.
  - El producto <sup>cruz</sup> no es conmutativo  $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$
- $$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(b_2 a_3 - a_2 b_3) + \hat{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \hat{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 15\hat{i} - 10\hat{j} - 3\hat{k}$$

II. verifique  $\vec{a} \times \vec{b}$  es ortogonal a  $\vec{a}$  &  $\vec{b}$ .

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 1, 3, 0 \rangle = 30 - 30 + 0 = 0.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 1, 0, 5 \rangle = 15 + 0 - 15 = 0.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp a, b.$$

$3 \times 2$ .

claracion: 2-D  $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$  no es posible evaluarlo,  
Existe en 3-D. porque la matriz

$$4-0 \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \vec{l} \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

no es cuadrada  
jD ES POSIBLE  
evaluarlo.

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 15\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}$$

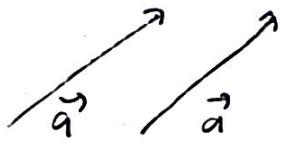
En general  $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

Ejercicio 1: Encuentre el producto cruz entre  
 $\vec{a} = \langle 1, 1, -1 \rangle$  &  $\vec{b} = \langle 2, -2, 3 \rangle$ .

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}(3 - 2) - \hat{j}|1 - 1| + \hat{k}(-2 - 2)$$

$$= \boxed{\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}$$



Ejercicio 2: Encuentre  $\vec{a} \times \vec{a}$ .

$\vec{a}$  es paralelo a si mismo  $\vec{a} \times K\vec{a}$ .

$$\vec{a} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(a_1 a_2 - a_1 a_2) - \hat{j}(0) + \hat{k}(0).$$

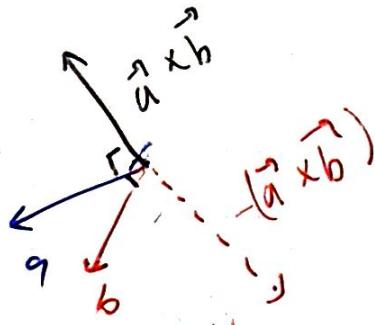
$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

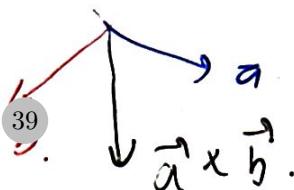
Dos vectores en  $V_3$  (conjunto de vectores 3-D)

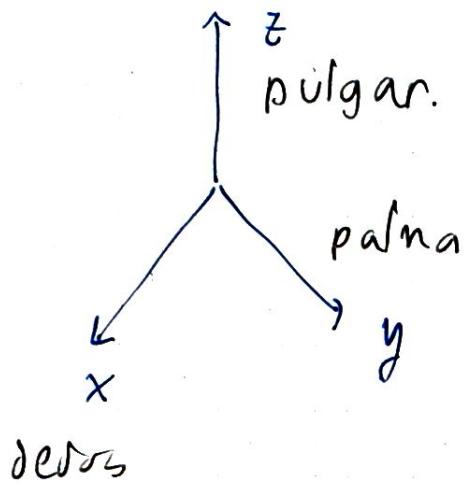
son paralelos si y sólo si  $\vec{a} \times K\vec{a} = \vec{0}$   
 vector cero.

Interpretación Geométrica.

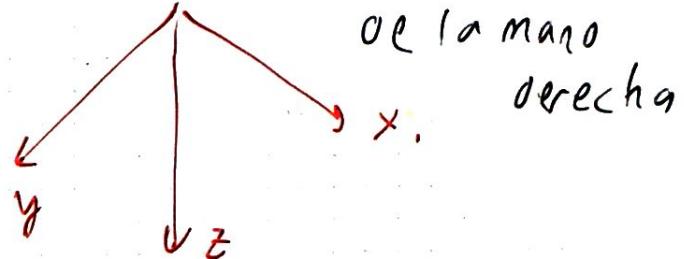


Convenção Mano  
Derecha.





: vector ortogonal a ambas que apunta siguiendo la convención de la mano derecha



Propiedad: Dadas  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$  y el ángulo entre estos dos vectores  $\theta$ .

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta. \checkmark$$

En el producto punto  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ .

Para encontrar el ángulo entre dos vectores, es recomendable utilizar el producto punto.

$$\text{Si } \sin \theta = 0 \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0. \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0$$

vectores paralelos.

$$\xrightarrow{\hspace{1cm}} \\ \theta = 0.$$

$$\sin \theta = 0 \\ \theta = 0.$$

Dos vectores 3-D son paralelos, a ll b, si y sólo

$$\text{si } \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \text{ vector cero.}$$

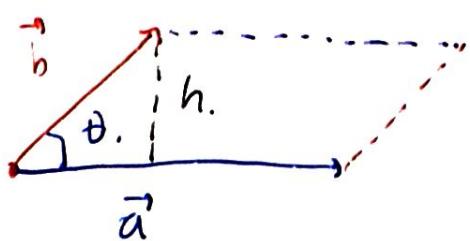
**Recomendable:** inspeccione si  $\vec{b} = K \vec{a}$   
no importa la dimensión del vector.

$$\text{Propiedades} \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Se puede utilizar para áreas de "rectángulos inclinados" y cubos "inclinados."



Paralelogramo.

$$\text{Área} = b h.$$

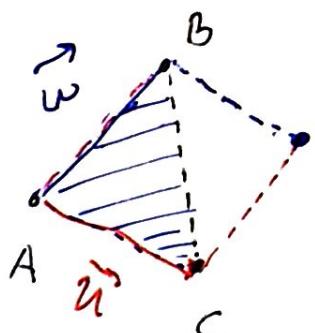
$$\text{base} = |\vec{a}|.$$

$$\text{altura } h = |\vec{b}| \sin \theta$$

$$\text{Área: } A = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta. = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

del Paralelogramo

Ejercicio 3: ¿Cuál es el área del triángulo con vértices en  $A(1,0,1)$ ,  $B(-2,1,3)$  y  $C(1,2,1)$ ?



Área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo

$$A_T = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{w}|$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} = \langle 0, 2, 0 \rangle.$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \langle -3, 1, 2 \rangle.$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(4) - \hat{j}(0) + \hat{k}(6) = 4\hat{i} + 6\hat{k}$$

## Producto Triple Escalar.

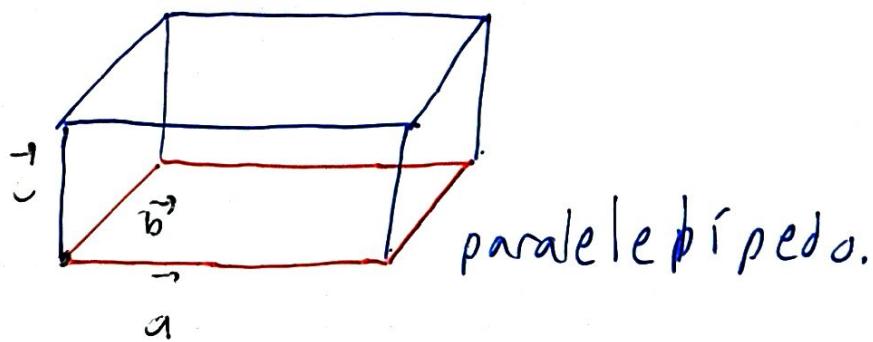
Combina el producto punto y el producto cruz.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

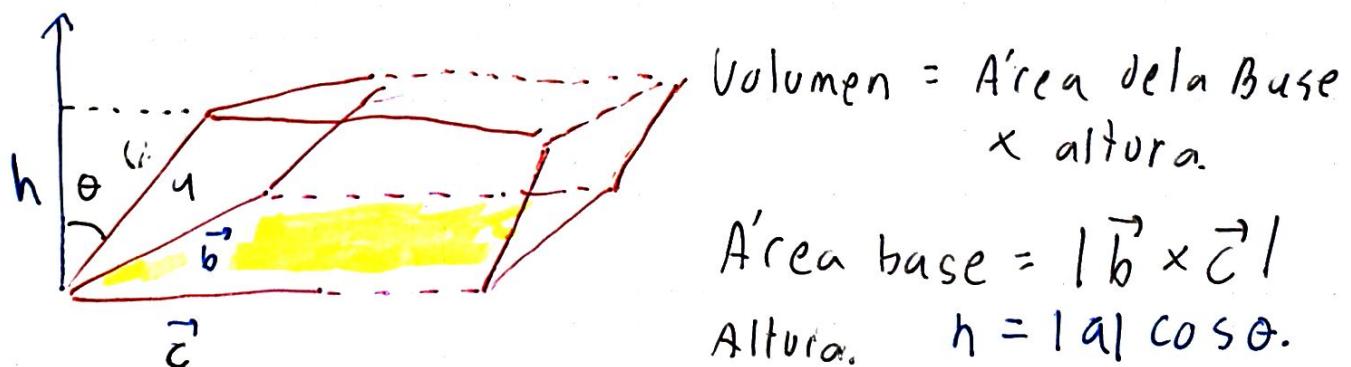
$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ .

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \quad //$$

Volumen de un cubo inclinado Paralelepípedo.

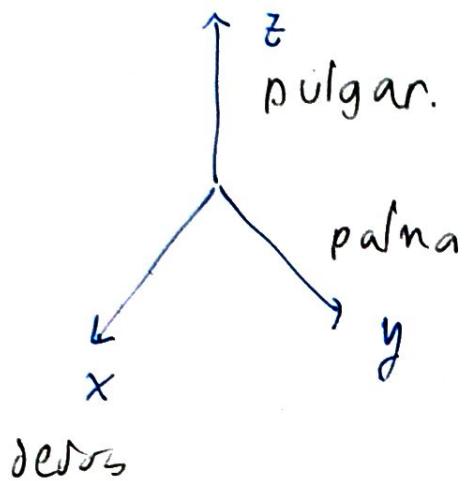


$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

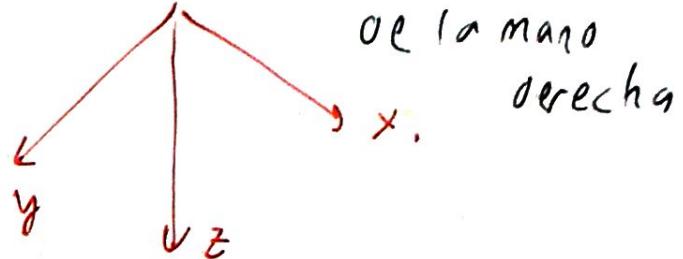


$$\text{Volumen } V = A h. = |\vec{a}| |\vec{b} \times \vec{c}| / \cos \theta.$$

$$U = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$



: vector ortogonal a ambas que apunta siguiendo la convención de la mano derecha



Propiedad: Dadas  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$  y el ángulo entre estos dos vectores  $\theta$ .

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta. \checkmark$$

En el producto punto  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ .

Para encontrar el ángulo entre dos vectores, es recomendable utilizar el producto punto.

$$\text{Si } \sin \theta = 0 \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0. \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0$$

vectores Paralelos.  
 $\theta = 0.$

$$\sin \theta = 0 \\ \theta = 0.$$

Dos vectores 3-D son paralelos, a  $\parallel b$ , si y sólo si  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$  vector cero.

Recomendable: inspeccione si  $\vec{b} = K \vec{a}$   
 no importa la dimensión del vector.

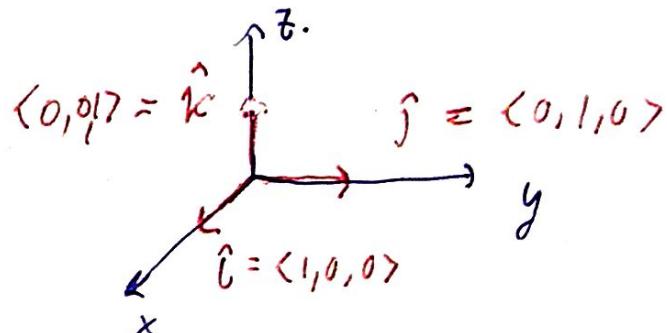
# Capítulo 6

Ángulo entre vetores y ejes & Vectores paralelos y perpendiculares en n-dimensiones, Ecuación vectorial de una recta

Ángulo entre un vector  $\vec{a}$  y un eje

se utiliza la fórmula del producto punto.

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$



Ángulo entre  $\vec{a}$  y el eje y.

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \hat{j}}{|\vec{a}| |\hat{j}|} = \frac{\langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle 0, 1, 0 \rangle}{|\vec{a}|} = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

Ángulos entre el vector y cada eje.

Eje - x:  $\theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{a_1}{|\vec{a}|}\right)$  Eje - y:  $\cos \theta_y = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$

Eje - z:  $\cos \theta_z = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$

Estos ángulos se conocen como seno directores.

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

$$\vec{a} = |\vec{a}| \langle \cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z \rangle$$

Vectores paralelos o perpendiculares en  $n$ -dimensiones.

Dos vectores  $\vec{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$   
 $\vec{b} = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ .

-1

Son paralelos: si  $\vec{a} = K\vec{b}$   $K$  escalar 0.2

1

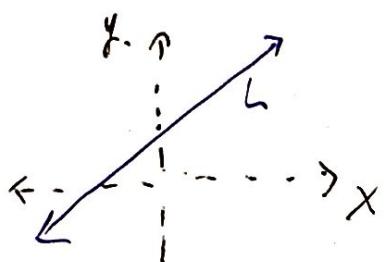
perpendiculares: si  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

ángulo

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

## 12.5 Rectas (p. 39)

En 2-D.



1. m pendiente

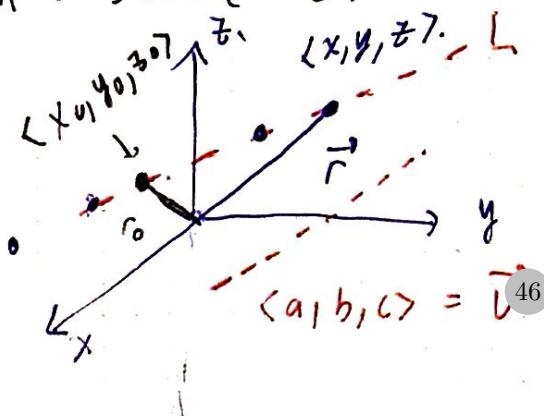
2.  $(x_0, y_0)$  punto sobre L

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

En 3-D, para encontrar una recta en el espacio se necesita conocer

1. m "pendiente", dirección de la recta vector  $\langle a, b, c \rangle$ .

2. punto sobre L.  $(x_0, y_0, z_0)$ .



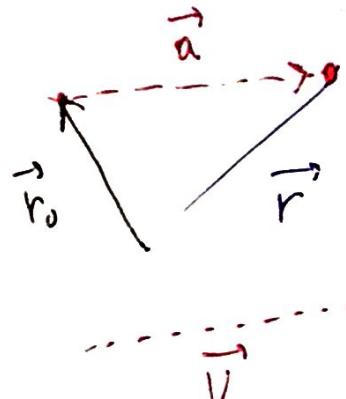
los puntos sobre L.

Vector punto sobre  $L$   $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle = \vec{r}_0$

Vector cualquier punto sobre  $L$   $\langle x, y, z \rangle = \vec{r}$

Vector dirección

$$\langle a, b, c \rangle = \vec{v}$$



$\vec{a}$  y  $\vec{v}$  son paralelos.

$$\vec{a} = k \vec{v} = \underline{t} \vec{v}$$

Variable parámetro  $t$ .

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} = \boxed{\vec{r}_0 + t \vec{v}} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ec. Vectorial Recta: punto  $\vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$

y dirección  $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ .

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}}$$

parámetro  $t$ .

Ec. componente por componente.

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t \langle a, b, c \rangle.$$

Ec. Paramétrica de la Recta.

$$\boxed{x = x_0 + at. \\ y = y_0 + bt. \\ z = z_0 + ct.}$$

$t \in \mathbb{R}$ .

Punto V.

Posición inicial  $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ .

Velocidad constante  $\langle a, b, c \rangle$ .

$$x = x_0 + v_{ox} t$$

$$y = y_0 + v_{oy} t$$

$$z = z_0 + v_{oz} t$$

Ejercicio 1: Encuentre la ec. vectorial y las paramétricas para la recta que pasa por el punto dado y es paralela al vector dado. (p 30.)

a. P(3,4,-2)     $\vec{v} = \langle -8, 2, 5 \rangle.$      $\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}.$

Vector Posición:  $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP} = \langle 3, 4, -2 \rangle.$

Vector Dirección:  $\vec{v} = \langle -8, 2, 5 \rangle.$

Ec. Vectorial:  $\boxed{\vec{r} = \langle 3, 4, -2 \rangle + t \langle -8, 2, 5 \rangle.}$

Ecs. Paramétricas:  $x = 3 - 8t$   
 $y = 4 + 2t$      $t \in \mathbb{R}.$   
 $z = -2 + 5t.$

Observaciones:  $\vec{r}(1) = \langle -5, 6, 3 \rangle$

$\vec{r}(10) = \langle -77, 24, -48 \rangle.$

Ec. Vectorial para  $\ell:$   $\boxed{\vec{r} = \langle -5, 6, 3 \rangle + t \langle -8, 2, 5 \rangle.}$

vector de dirección  $v$  es paralelo a varios vectores

$\vec{w} = k \vec{v}$  puede ser también vector dirección.

$\vec{v}_1 = \langle 8, -2, -5 \rangle$      $\vec{v}_2 = \langle -8\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 5\sqrt{3} \rangle.$

$\boxed{\vec{r} = \langle -77, 24, -48 \rangle + t \vec{v}_2.}$  La misma recta.

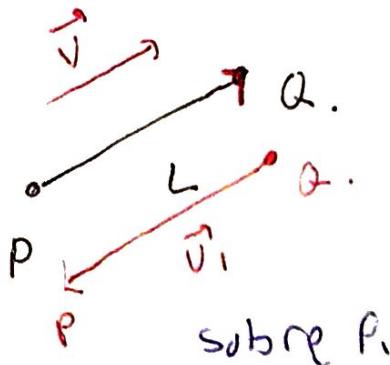
La ec. vectorial de una recta no es única. ✓

Ejercicio 2: Encuentre la ec. vectorial de la recta que pasa por los puntos dados.

a.  $P(3, -2, 4)$  y  $Q(5, 2, -1)$ .

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}$$
  $\vec{r}_0 = \langle 3, -2, 4 \rangle$  ó  $\langle 5, 2, -1 \rangle$

vector de dirección  $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$  ó  $\overrightarrow{QP}$



$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2, 4, -5 \rangle.$

Ec. Vectorial  $\vec{r}$  sobre P.

 $\vec{r} = \langle 3, -2, 4 \rangle + t \langle 2, 4, -5 \rangle.$

2  $\vec{r}_0 = \langle 5, 2, -1 \rangle$   $\vec{v} = \overrightarrow{QP} = \langle -2, -4, 5 \rangle.$

$\vec{r} = \langle 5, -2, -1 \rangle + t \langle -2, -4, 5 \rangle.$  sobre Q

b.  $P(3, 0, 4)$  y  $Q(3, 4, 2)$ .

$$\vec{r}_0 = \langle 3, 0, 4 \rangle. = \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{v} = \langle 0, 4, -2 \rangle. = \overrightarrow{PQ}$$

$$\vec{v} \neq \vec{PQ}$$

$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v} = \langle 3, 0, 4 \rangle + t \langle 0, 4, -2 \rangle.$

c. ¿Qué pasa si hay 3 puntos?

- 
- R.
- P
- Q
- $P(3,0,4)$ ,  $Q(3,4,2)$     $R(5,3,4)$
- No están sobre  $L$ .
- $\vec{V}_1 = \overrightarrow{PQ} = \langle 0, 4, -2 \rangle$ . no son
- $\vec{V}_2 = \overrightarrow{PR} = \langle 2, 3, 0 \rangle$  paralelos.

Estos tres puntos No están sobre la misma recta.

$$\underbrace{(0, 1)}_{m=1} \quad \underbrace{(1, 2)}_{m=2} \quad \underbrace{(2, 5)}_{m=2}$$

# Capítulo 7

## Rectas y planos

## 12.5 Rectas y Planos

Ecuación de una Recta.

Vector Posición

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0).$$

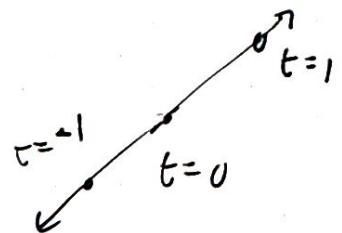
Vector dirección

$$\vec{v} = (a, b, c).$$

Ec. Vectorial

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}}$$

$t$  es el parámetro



Ecs. Paramétricas:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct. \end{aligned}}$$

Resuelva para  $t$  en las tres ecs.

$$\boxed{t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c.}}$$

Ecs. simétricas

$$a, b, c \neq 0.$$

vector dirección  $\vec{v} = (a, 0, c)$ , las ecs. de la recta cambiarán,

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}$$

vectorial

$$x = x_0 + a t$$

$$y = y_0$$

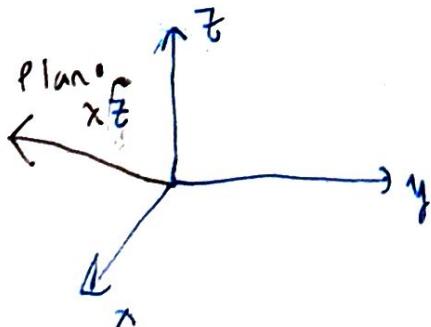
$$z = z_0 + c t.$$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c.}$$

$$y = y_0$$

simétricas

Ecs. Paraleléticas



Ejercicio 3: Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los puntos dados.

Encuentre en qué punto la recta intersecta al plano  $XZ$ .

Pág. 41.

a.  $P(2, 8, -2)$  y  $Q(2, 6, 4)$ .

Vector Posición:  $\overrightarrow{OP} = \vec{r}_0 = \langle 2, 8, -2 \rangle$ .  $\vec{r} = \langle x, y, z \rangle$ .

Vector Dirección.  $\overrightarrow{PQ} = \vec{v} = \langle 0, -2, 6 \rangle$ .

Ec. Vectorial:  $\vec{r} = \langle 2, 8, -2 \rangle + t \langle 0, -2, 6 \rangle$ .

Ecs. simétricas:  $x = 2, \frac{y-8}{-2} = \frac{z+2}{6}$

¿Cuál es la intersección con el plano  $XZ$ ?

$$\text{use } y=0. \quad x=2, \quad \frac{-8}{-2} = \frac{z+2}{6}$$

$$6 \cdot 4 = z+2 \Rightarrow z=22.$$

La intersección con el plano  $XZ$  es el punto  $(2, 0, 22)$ .

b.  $P(4, 6, 10)$  y.  $Q(6, 6, 10)$

$$\vec{r}_0 = \langle 4, 6, 10 \rangle. \quad \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2, 0, 0 \rangle.$$

vectorial:  $\vec{r} = \langle 4, 6, 10 \rangle + t \langle 2, 0, 0 \rangle$ .

paramétricas:  $x = 4+2t$  simétricas.

$$\begin{array}{l} y = 6 \\ z = 10 \end{array} \quad 53 \quad t = \frac{x-4}{2}, y = 6, z = 10.$$

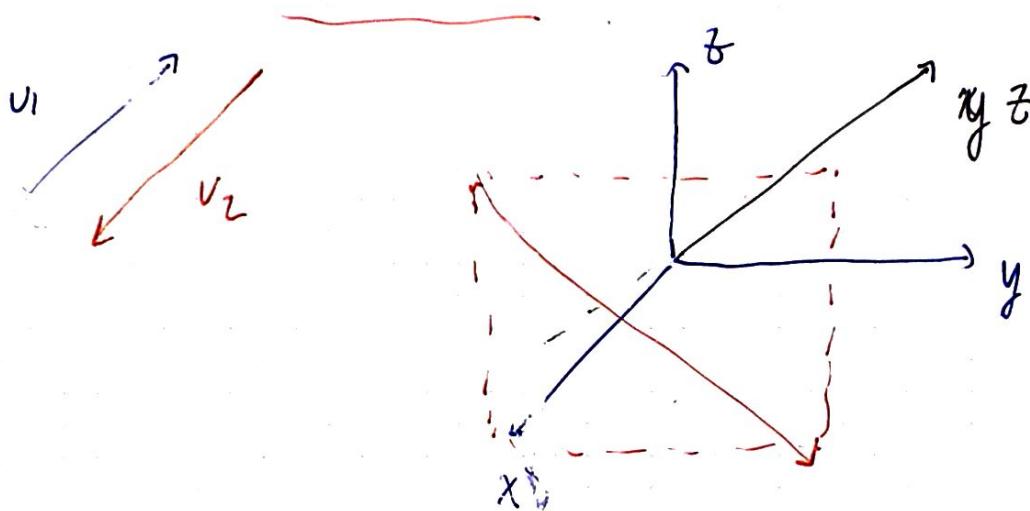
¿Cuál es el punto intersección con el plano  $xz$ ?

Use  $y = 0$ , como cualquier punto sobre esta recta pasa sólo por  $y = 6$ , esta recta no puede intersectar al plano  $xz$ . **NO HAY.**

Rectas Paralelas.

Dos rectas  $\vec{r}_1 = \vec{r}_{o1} + t_1 \vec{v}_1$  y  $\vec{r}_2 = \vec{r}_{o2} + t_2 \vec{v}_2$

son paralelas. si y sólo si sus vectores de dirección  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  son paralelos.



En el espacio hay 3 tipos de rectas.

- Paralelas.
- Intersecan en 1 punto
- Oblicuas (ni son paralelas ni se intersecan).

Ejercicio 4: Determine si los sgs. pares de rectas  
son paralelas, oblicuas o se intersecan.

$$a. \frac{x-2}{8} = \frac{y-3}{24} = \frac{z-2}{16}, \quad \frac{x-10}{-2} = \frac{y+15}{-6} = \frac{z+24}{-4}$$

$$U_1 = \langle 8, 24, 16 \rangle$$

$$U_2 = \langle -2, -6, -4 \rangle.$$

$$x = 2 + 8t, \quad y = 3 + 24t, \quad z = 2 + 16t.$$

$U_1 = -4U_2$ .  $U_1$  y  $U_2$  son paralelos.

Las dos rectas son paralelas.

$$b. L_1: x = 5 - 4t, \quad y = 6 - 2t, \quad z = 2 + 0t \quad t \in \mathbb{R}$$

$$L_2: x = 3 + 8s, \quad y = -2s, \quad z = 8 + 2s. \quad s \in \mathbb{R}$$

Utilice una variable parámetro para cada recta

$$U_1 = \langle -4, -2, 0 \rangle, \quad U_2 = \langle 8, -2, 2 \rangle. \quad \text{No son paralelas.}$$

Analice si las rectas se intersecan.

$$\begin{aligned} x &= x & 5 - 4t &= 3 + 8s. & (1) & \Rightarrow & 2 &= 4t + 8s \\ y &= y & 6 - 2t &= -2s. & (2) & & 6 &= 2t + 2s \\ z &= z. & \boxed{2 = 8 + 2s} & & & \Rightarrow & s &= -3. \end{aligned}$$

3 ecs. y sólo 2 incógnitas  $t$  y  $s$ .

Sustituya  $s = -3$  en las ecs. (1) y (2)

$$\begin{aligned} 5 - 4t &= -22 & \Rightarrow & -4t &= -27 & \Rightarrow & t &= 27/4. \} \\ 6 - 2t &= 6 & \Rightarrow & -2t &= 0 & \Rightarrow & t &= 0 \end{aligned}$$

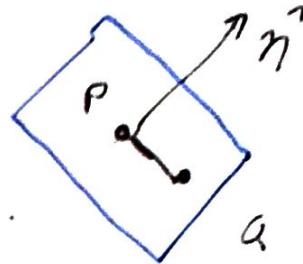
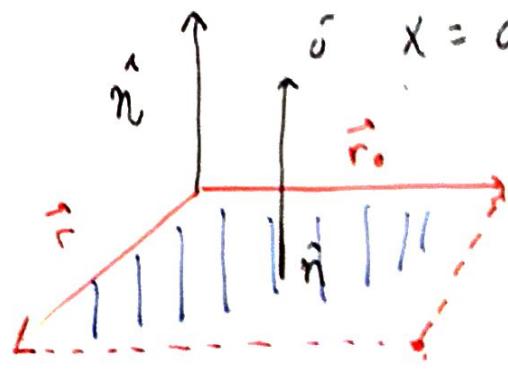
Si no hay una t única (no es posible  $t \neq 27/9$ ), las dos rectas no se intersecan.

$L_1$  y  $L_2$  son oblicuas (ni paralelas ni se intersecan).

$$\begin{array}{l} 4t + 8s = 2 \\ 2t + 2s = 6 \\ 0t + 2s = -6 \end{array} \quad \left[ \begin{array}{cc|c} 4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -6 \end{array} \right] \rightarrow \text{0 o 1 número.}$$

### Ecuación de un Plano.

Previamente en 12.1  $ax + by + cz = d.$  } Ecs de Planos.



Para encontrar la ec. de un plano se necesita:

1. un punto sobre el plano.  $P \quad \vec{r}_0 = \overrightarrow{OP}$

2. un vector normal  $v$  ortogonal al plano  $\hat{n} = \langle a, b, c \rangle.$

→ sombrero, hat.

### Derivación de la ec. Plano.

$P(x_0, y_0, z_0)$        $Q(x_1, y_1, z_1)$       son dos puntos sobre el plano.

$$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle \quad \vec{r} = \overrightarrow{OQ} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle.$$

El vector  $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0$  está sobre el plano, por lo que tiene que ser ortogonal a  $\hat{n}$ .

$$\hat{n} \perp \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0 \Rightarrow \hat{n} \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0) = 0.$$

Ec. Vectorial de un Plano.

Se puede escribir como.

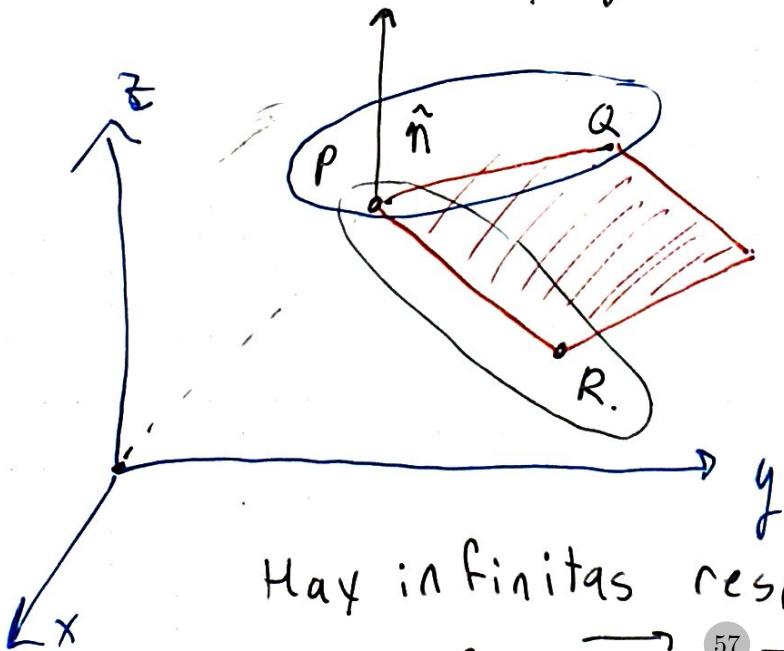
$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0 + z - z_0 \rangle = 0.$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Ec. escalar de un plano.

$$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_d.$$

Para encontrar la ec. de un plano, se necesitan 3 puntos  $P, Q$  y  $R$ .



$$\overrightarrow{r}_0 = \overrightarrow{OP}$$

$$\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$$

tienen que comenzar en el mismo punto

Hay infinitas respuestas equivalentes

$$\hat{n} = \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ}$$

Ejercicio 1: PYS. Encuentre la ec. del plano que pasa por los 3 puntos dados.

a. P(3, -1, 3), Q(8, 2, 4) y R(1, 2, 5)

$$\text{Ec. plano } \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\text{Ec. Recta } \vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}$$

$$\vec{r}_0 = \langle 8, 2, 4 \rangle.$$

Encuentre dos vectores que estén sobre el plano y que comiencen en el mismo punto.

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle 5, 3, 1 \rangle \quad \vec{v} = \overrightarrow{PR} = \langle -2, 3, 2 \rangle.$$

ii  $\hat{n}$  es ortogonal a ambos vectores !!

$$\boxed{\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \underline{3\hat{i} - 12\hat{j} + 21\hat{k}}$$

$$\text{Ec. Plano: } \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\text{Vectorial: } \langle 3, -12, 21 \rangle \cdot \langle x-8, y-2, z-4 \rangle = 0.$$

$$\text{Escalar. } 3(x-8) - 12(y-2) + 21(z-4) = 0.$$

b.  $P(0,0,0)$ ,  $Q(1,0,2)$  y  $R(0,2,3)$

Vector Posición:  $\vec{r}_0 = \langle 0,0,0 \rangle$ .

2 vectores sobre el plano.  $\overrightarrow{PQ} = \langle 1,0,2 \rangle$ .  
 $\overrightarrow{PR} = \langle 0,2,3 \rangle$ .

Vector Normal:  $\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$

$$\hat{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

Ec. Plano.  $-4x - 3y + 2z = 0$ .

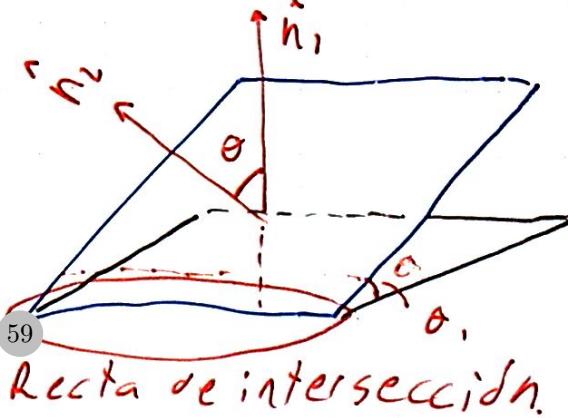
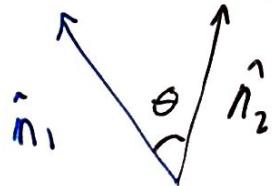
Rectas paralelas  $v_1$  y  $v_2$  son paralelos.

Dos planos  $\hat{n}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$  y  $\hat{n}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = 0$ .

Son paralelos si y sólo si  $\hat{n}_1$  y  $\hat{n}_2$  son paralelos.

En caso que no sean paralelos, se puede encontrar el ángulo de intersección entre dos planos.

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1| |\hat{n}_2|} \right)$$



# Capítulo 8

Continuación de rectas y planos

Rectas y planos.

$$\vec{V} = \overrightarrow{PQ}$$

Ecs. Rectas:  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

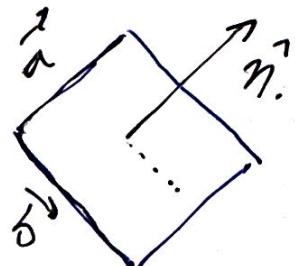
si  $a \neq b \neq c \neq 0$   $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

$x = x_0 + at$
$y = y_0 + bt$
$z = z_0 + ct$

Ec. Plano:  $\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$\hat{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

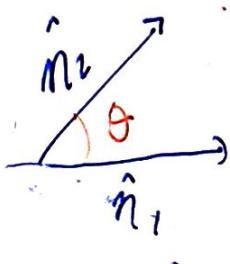


Ejercicio 2: Considere los planos  $x+y=0$  &  $x+2y+z=1$ .

a. Determine si los planos son paralelos. Si no lo son encuentre el ángulo de intersección entre ellos.

$\hat{n}_1 = \langle 1, 1, 0 \rangle$ . no son paralelos  $\hat{n}_1$  y  $\hat{n}_2$

$\hat{n}_2 = \langle 1, 2, 1 \rangle$ . los dos planos NO SON PARALELOS.



$$\cos \theta = \frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1| |\hat{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{2} \sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{12}}$$

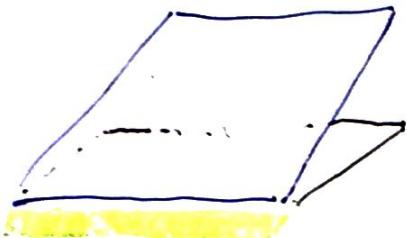
$$\boxed{\cos \theta} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \theta = \frac{\pi}{6} \text{ ó } 30^\circ$$

$$0 \quad \pi/6 \quad \pi/4 \quad \pi/3 \quad \pi/2$$

$$\cos \theta \quad 1 \quad \sqrt{3}/2 \quad \sqrt{2}/2 \quad 1/2 \quad 0$$

$$\sin \theta \quad 0 \quad 1/2 \quad \sqrt{2}/2 \quad \sqrt{3}/2 \quad 1$$

O. Encuentre la ec. de la recta que interseca a ambos planos.  $x+y=0$  +  $x+2y+z=1$ .



$$r = \vec{r}_0 + t \vec{v}$$

Dos puntos sobre la recta,

como la recta está en ambos planos, se debe resolver el sig. sistema.

$$x+y=0 \Rightarrow x=-y.$$

$$x+2y+z=1 \Rightarrow y=1-z.$$

$z$  tiene cualquier valor.

1er punto  $z=0$ :

$$(-1, 1, 0) \quad \begin{matrix} y=1 \\ x=-1 \end{matrix}$$

2do punto  $z=1$

$$(0, 0, 1) \quad \begin{matrix} y=0 \\ x=0 \end{matrix}$$

Encuentre la ec. de la recta que pasa por  $P(-1, 1, 0)$

$$y \quad \underbrace{Q(0, 0, 1)}_{\vec{r}_0}$$

$$\vec{r}_0 = \langle 0, 0, 1 \rangle. \quad \vec{v} = \overrightarrow{QP} = \langle -1, 1, -1 \rangle.$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{QP} = \langle -1, 1, -1 \rangle.$$

Ec. Paramétrica  
de la recta.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 0 - t \\ y &= 0 + t \\ &= 1 - t. \end{aligned}}$$

II. Solución.  $x = -y$ .      más incógnitas  
 $y = 1 - z$       que ecuaciones.

$x, y$  ó  $z$  pueden tener cualquier valor.  $\boxed{z = t}$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 1 - t \\ z &= t \end{aligned}}$$

$$U_L = \langle 1, -1, 1 \rangle \quad \vec{r}_0 = \langle -1, 1, 0 \rangle$$

### III. Solución Geométrica. por ejemplo.

1. Encuentre un punto en ambos planos  $(0, 0, 1)$

La recta está en el plano  $l$ , entonces la recta es perpendicular al vector normal del plano  $l$ .

Está en el plano  $z$ , entonces también es perpendicular al segundo vector normal.

∴ La recta es perpendicular a ambos  $\hat{n}_1$  y  $\hat{n}_2$ .

$$\vec{D} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\text{Ec. Recta } r = \langle 0, 0, 1 \rangle + t \langle 1, -1, 1 \rangle.$$

Ejercicio 3: Encuentre el punto en el que la línea recta  $x=1+2t$ ,  $y=4t$ ,  $z=5t$  interseca al plano  $x-y+2z=17$ .

Plano.

$$x = 1 + 2t$$

$$y = 4t$$

$$z = 5t$$

Recta

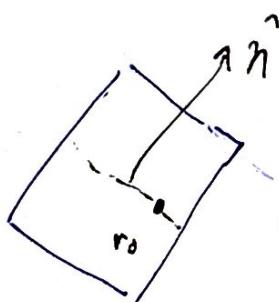
$$x - y + 2z = 17.$$

$$1 + 2t - 4t + 10t = 17.$$

$$8t = 16 \Rightarrow t = 2$$

El Pto. de Intersección es  $(5, 8, 10)$ .

Ejercicio 4: Encuentre una ec. del plano que contiene, a la recta  $x=1+t$ ,  $y=2-t$ ,  $z=4-3t$  y es paralela al plano  $5x+2y+z=1$ .



Qualquier punto sobre la recta también está sobre el plano.

$$t=0: x=1, y=2, z=4 \quad \vec{r}_0 = \langle 1, 2, 4 \rangle.$$

¿Cómo se encuentra  $\vec{n}$ ?

El vector de dirección de la recta  $v = \langle 1, -1, -3 \rangle$  es paralelo al plano.

Como es paralelo al segundo plano, entonces tiene que ser perpendicular  $\vec{n} = \langle 5, 2, 17 \rangle$ .

$$\vec{r}_0 = \langle 1, 2, 4 \rangle \quad y \quad \vec{n} = \langle 5, 2, 1 \rangle.$$

5.

Ecuación Plana:  $\underline{5(x-1) + 2(y-2) + 1(z-4) = 0.}$

Ejercicio 5: Encuentre los números directores para la recta de intersección entre los planos  $x+y+z=1$  y.

$$x+2y+3z=1.$$

Los números directores  $a, b$  y  $c$  del vector de dirección  $\langle a, b, c \rangle$ .

La recta es ortogonal a ambos vectores normales.

$\vec{n}_1 = \langle 1, 1, 1 \rangle$  y  $\vec{n}_2 = \langle 1, 2, 3 \rangle$  de ambos planos.

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}}$$

Números directores:  $a=1, b=-2, c=1$

Ejercicio 6: Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto  $(0, 1, 2)$ , que es paralela al plano  $x+y+z=2$  y perpendicular a la recta.

$$\vec{r} = \langle -2t, 0, 3t \rangle.$$

$$L_1: \underline{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}} \quad \underline{\vec{r}_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle}$$

¿Cómo se encuentra  $v$ ?

Plano 1  $\hat{n} = \langle 1, 1, 1 \rangle$  es perpendicular al plano.

Recta 2:  $\vec{v}_2 = \langle -2, 0, 3 \rangle$  es paralelo a  $L_1$ .

La recta es perpendicular a  $\hat{n}$  y a  $\vec{v}_2$ .

$$v = \hat{n} \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

$\checkmark$   $v = \vec{v}_2 \times \hat{n}$

Ecs. Paramétricas.

$$\begin{cases} x = 0 + 3t \\ y = 1 - 5t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

# Capítulo 9

## Funciones Vectoriales & Límites y continuidad

### 13.1 Funciones Vectoriales.

Una función vectorial:

Dominio: Números Reales

Rango: vectores 3-D.

$$\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow V_3 \quad \vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle.$$

t es un parámetro.  $\vec{r} = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$

Ejemplo de una función vectorial

$$\vec{r} = \langle a, b, c \rangle + t \langle d, e, f \rangle. \text{ Recta.}$$

$$\vec{r} = \langle a + td, b + te, c + tf \rangle$$

Ecs. Paramétricas  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ ,  $z = h(t)$   
de una función vectorial

Dominio de una función vectorial:

Encuentre el dominio de cada función componente.

El dominio de  $\vec{r}$  es la intersección de los dominios de cada función componente.

Ejercicio 1: Encuentre el dominio.

Eusto.

$$\sqrt{-1}$$

$\ln 0$  ó  $\ln -$

$$\sqrt{t^2 - 9}$$

Definida.  $t^2 \geq 9$

$$(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$$

$$e^{\sin t}$$

$\sin t$  siempre definida.

$$(-\infty, \infty)$$

lo mismo  $e^{\sin t}$ .

$$\ln(t+5)$$

definida cuando  $t+5 > 0$

$$(-5, \infty)$$

$$t > -5$$

$$[-5, -3] \cup (-3, 3)$$

Dominio de  $\vec{r}(t)$

$$[-5, -3] \cup [3, \infty)$$

$$\cup [3, \infty)$$

$[a, b]$  el número si es parte del dominio  
 $a, b$  son parte del dominio.

(a, b) los números a y b no son parte del dominio.

$$b. \vec{s}(t) = \left\langle \sin^3(t^2), \cosh\left(\frac{t}{t^2+1}\right), \frac{1}{e^t+4} \right\rangle$$

$$\sin^3(t^2) \quad ID_f : \mathbb{R}$$

Dominio  $\vec{s}(t)$

$$\cosh\left(\frac{t}{t^2+1}\right) \quad ID_g : \mathbb{R} \quad (-\infty, \infty)$$

$$\frac{1}{e^t+4} \quad ID_h : \mathbb{R}$$

$$e^t + 4 \neq 0 \Rightarrow e^t = -4 \Rightarrow t = \ln(-4) \quad \text{indefinido}$$

## Límites y Continuidad

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \left\langle \lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \right\rangle$$

- Evalue el límite de cada función componente
- Si no existe por lo menos un límite de una función componentes, entonces  $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t)$  no existe.

$f(t)$  está definida en  $t=a$ .

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$$

si se indefine y tiene forma  $0/0$  ó  $\infty/\infty$ .

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad \text{→ Hospital.}$$

Continúa en  $t=a$  si  $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$

Analiza la continuidad en cada función componente.

Evite AVs, saltos y agujero.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

(límite existe pero  $\vec{r}(a)$  no está definido)



Ejercicio 2: Sea  $\vec{r}(t) = \left\langle \frac{\tan \pi t}{t}, e^{t-2}, \frac{\ln(t-1)}{t^2-1} \right\rangle$

a. Analice si la función  $\vec{r}(t)$  es continua en  $t=2$ .

$$\vec{r}(2) = \left\langle \frac{\tan 2\pi}{2}, e^0, \frac{\ln 1}{3} \right\rangle = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{\tan \pi t}{t} = 0 \quad \lim_{t \rightarrow 2} e^{t-2} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 2} \frac{\ln(t-1)}{t^2-1} = 0.$$

$\vec{r}$  si es continua en  $t=2$   $\lim_{t \rightarrow 2} \vec{r}(t) = \vec{r}(2).$

b. Encuentre  $\lim_{t \rightarrow 1} \vec{r}(t)$  analice el límite de cada función componente por separado.

$$f: \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\tan \pi t}{t} = \frac{0}{1}$$

$$g: \lim_{t \rightarrow 1} e^{t-2} = e^{-1} \quad \text{en } \vec{r}(t) \text{ no existe.}$$

$$h: \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(t-1)}{t^2-1} \text{ no existe.}$$

$\ln(0)$  no existe.

c. Analice si  $\vec{r}(t)$  es continua en  $t=1$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \vec{r}(t) = \vec{r}(1) \quad r(1) \text{ está indefinido.}$$

limite no existe en  $t=1$

NO ES CONTINUA en  $t=1$ .

5.

$$\text{d. Agujero } \vec{s}(t) = \left\langle \frac{\tan \pi t}{t-1}, e^{t-2}, \frac{\ln(2t-1)}{t^2-1} \right\rangle$$

No es continua en  $t=1$  pero su límite existe en  $t=1$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\tan \pi t}{t-1} \stackrel{\text{LH}}{\underset{0/0}{=}} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\pi \sec^2 \pi t}{1} = \frac{\pi}{(\cos \pi)^2} = \pi.$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} e^{t-2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

ln 1 = 0

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(2t-1)}{t^2-1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2/(2t-1)}{2t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{2}{2t(2t-1)} = \frac{1}{1(2-1)} = 1.$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \vec{s}(t) = \langle \pi, 1/e, 1 \rangle \text{ es un agujero.}$$

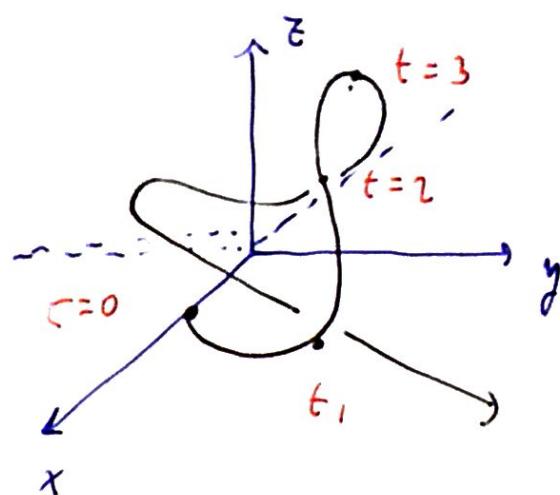
$\vec{s}'(1)$  está indefinida.

Leyes en el espacio.

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)$$

$$z = h(t)$$

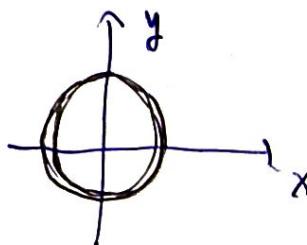


## Espirales:

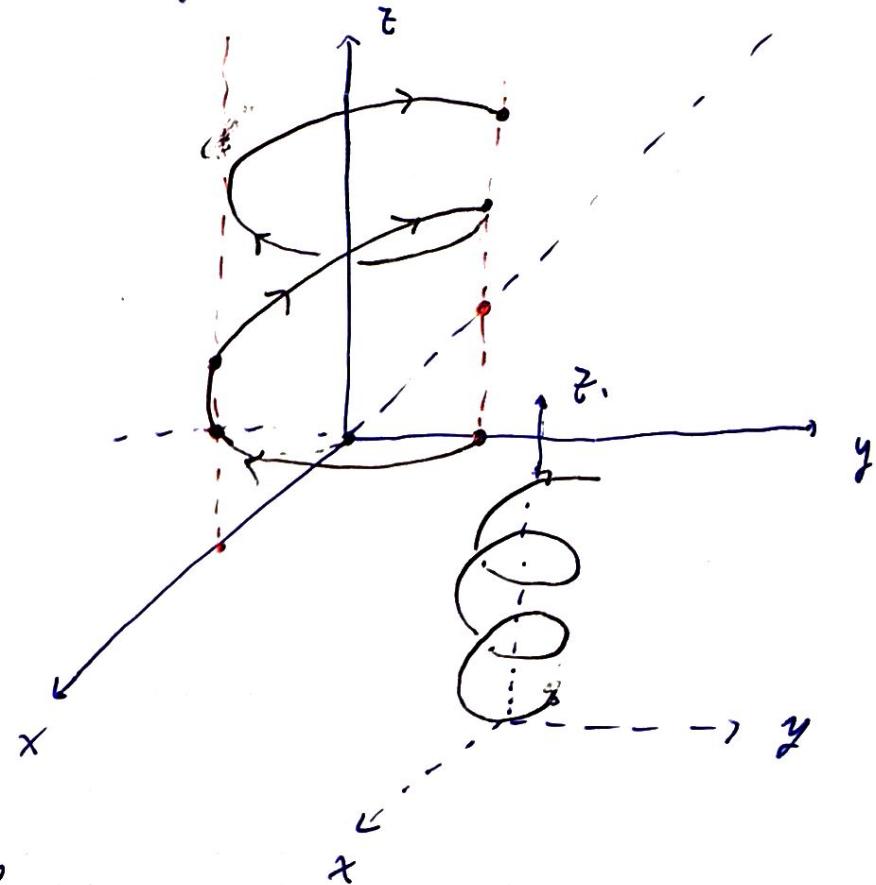
Ejercicio 3: Grafique la curva  $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = \left\{ \begin{array}{l} 2\hat{i} \sin t + 2\hat{j} \cos t \\ x \\ y \\ \hat{k} \frac{t}{\pi} \end{array} \right\}_z$$

$t$	$x$	$y$	$z$
0	0	2	0
$\pi/2$	2	0	0.5
$\pi$	0	-2	1
$3\pi/2$	-2	0	1.5
$2\pi$	0	2	2.



$$x^2 + y^2 = 4$$



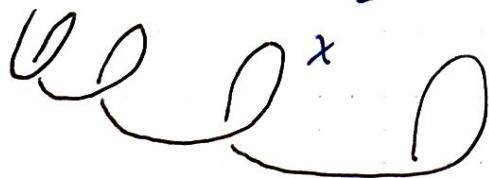
Ejercicio 4: Grafique

$$\vec{r}(t) = \langle \sin \pi t, t, \cos \pi t \rangle.$$

$$x^2 + z^2 = 1$$

$$\vec{r}(0) = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

$$\vec{s}(t) = \langle \sin t, t^2, \cos t \rangle$$



$$x^2 + z^2 = 1, y = 0$$

$$x^2 + z^2 = 1, y = b$$

# Capítulo 10

Cálculo con funciones vectoriales: derivadas, integrales, etcétera

13.2 Cálculo con funciones vectoriales. p. 55.

Derivadas  $\vec{r}'(t)$  respecto a t

Integrales:  $\int \vec{r}(t) dt$ . respecto a t.

$$\vec{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} \quad r = \langle f, g, h \rangle$$

$$\vec{r}'(t) = \left\langle \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}_{f'(t)}, \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}}_{g'(t)}, \underbrace{h'(t)}_{h'(t)} \right\rangle$$

Derivada:  $\boxed{\vec{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle}$

Derive cada función componente.

Integral:  $\int \vec{r}(t) dt = \int (f \hat{i} + g \hat{j} + h \hat{k}) dt$ .

$$i \int f dt + j \int g dt + k \int h dt.$$

Integre cada función componente.

Ejercicio 1: Encuentre la 1ra y 2da derivada de las siguientes funciones.

a.  $\vec{r}(t) = \langle \sin(4t), t^2, \ln(\sin t) \rangle$ .

$$\vec{r}'(t) = \langle 4 \cos(4t), 2t, \cot t / \sin t \rangle$$

$$\vec{r}''(t) = \langle -16 \sin(4t), 2, -\csc^2 t / \sin t \rangle$$

$$r''(t) = \langle f''(t), g''(t), h''(t) \rangle$$

$$r''(t) = \langle -16\sin(4t), 2, -\csc^2 t \rangle.$$

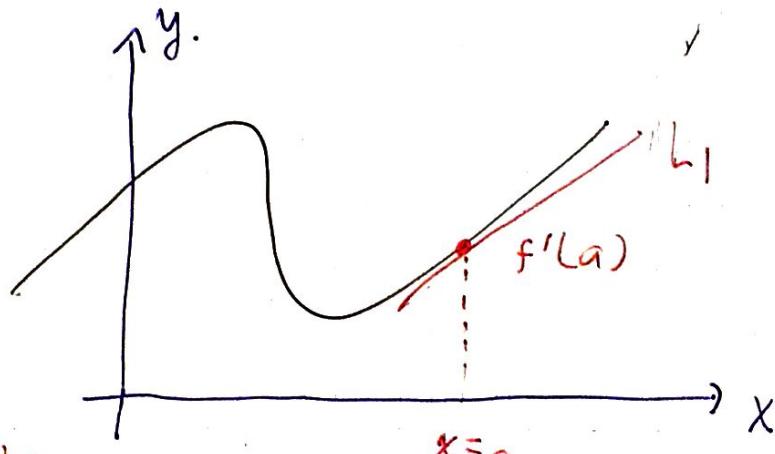
$$\begin{array}{lll} \sin' \rightarrow \cos & \csc' \rightarrow -\csc \cot & \int \sec = \ln(\sec + \tan) \\ \cos' \rightarrow -\sin & \sec' \rightarrow \sec \tan & \\ \tan' \rightarrow \sec^2 & \cot' \rightarrow -\csc^2. & \end{array}$$

b.  $\vec{s}(t) = \hat{c} \tan(4t) + \hat{j} \ln(4t+1) + \hat{k} (5-2t)^{1/2}$ .

$$\vec{s}'(t) = 4 \hat{c} [\sec(4t)]^2 + \hat{j} 4(4t+1)^{-1} - \hat{k} (5-2t)^{-1/2}.$$

$$\begin{aligned} s'' &= 32 \hat{c} \sec(4t) \sec(4t) \tan(4t) - 16 \hat{j} (4t+1)^{-2} \\ &\quad + \frac{\hat{k}}{2} (5-2t)^{-3/2} \cdot (-2) \end{aligned}$$

para  $y = f(x)$



$f'(a)$  es igual  
a la pendiente  
de la recta tangente  
a  $f(x)$  en  $x=a$ .

$$L_1: y = f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{Ec. Recta Tangente.}$$

con una función vectorial

$$\vec{r} = \langle f, g, h \rangle \quad x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

hay ecuaciones paramétricas para cada variable.

$$\vec{r}'(a) = \langle f'(a), g'(a), h'(a) \rangle.$$

vector de pendientes de rectas tangentes a la curva  $\vec{r}(t)$ .

Vector Tangente a  $\vec{r}(t)$ :  $\boxed{\vec{r}'(a)}$

Recta Tangente: es ahora una función vectorial.

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(a) + \vec{r}'(a)t}$$

Ecs. Paramétricas:  $x = f(a) + f'(a)t$

$$y = g(a) + t g'(a)$$

$$z = h(a) + t h'(a)$$

Vector Tangente:  $\vec{r}'(a)$

en  $t=a$ .

Vector Tangente Unitario:  $\frac{\vec{r}'(a)}{|\vec{r}'(a)|} = \vec{T}(a)$

en  $t=a$

Ejercicio 3: Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva

$$\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\sin t, 4\cos 2t \rangle \text{ en el punto } (\sqrt{3}, 1, 2)$$

Recta Tangente:  $\boxed{\vec{r}_T(t) = \vec{r}(a) + t \vec{r}'(a)}$

$$\vec{r}(a) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle.$$

Derivada:  $\vec{r}'(t) = \langle -2\sin t, 2\cos t, -8\sin(2t) \rangle.$

¿Cómo se encuentra  $a$ ?  $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle.$

$$\rightarrow 2\cos t = \sqrt{3} \quad \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{t = \pi/6.}$$

$$2\sin t = 1 \Rightarrow 2\sin \pi/6 = 2 \frac{1}{2} = 1$$

$$4\cos 2t = 2. \Rightarrow 4\cos \pi/3 = 4 \frac{1}{2} = 2$$

Vector Tangente:  $\mathbf{r}'(\pi/6) = \langle -2\sin \pi/6, 2\cos \pi/6, -8\sin \pi/3 \rangle$

$$\mathbf{r}'(\pi/6) = \left\langle -\frac{2}{2}, 2 \frac{\sqrt{3}}{2}, -8 \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = \langle -1, \sqrt{3}, -4\sqrt{3} \rangle.$$

$$\vec{r}_T(t) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle + t \langle -1, \sqrt{3}, -4\sqrt{3} \rangle.$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \sqrt{3} - t \\ y &= 1 + \sqrt{3}t \\ z &= 2 - 4\sqrt{3}t \end{aligned}}$$

# Capítulo 11

## Continuación de cálculo con funciones vectoriales

## 13.2 Cálculo.

Derivadas:  $\vec{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$ .

Vector Tangente  $\vec{r}'(t)$  Tangente Unitario  $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$ .

Recta Tangente a la curva.  $\vec{L}(t) = \vec{r}(a) + \vec{r}'(a)t$ .

$$\begin{aligned} x &= f(a) + t f'(a) \\ y &= g(a) + t g'(a) \\ z &= h(a) + t h'(a). \end{aligned}$$

Integradas:  $\int \langle f, g, h \rangle dt = \langle F + C_1, G + C_2, H + C_3 \rangle$

$$\int \vec{r}(t) dt = \vec{R}(t) + \vec{C}$$

$\vec{R}$  vector de antiderivadas

$\vec{C}$  vector de constantes

Definida:  $\int_a^b \vec{r}(t) dt = \hat{i} \int_a^b f(t) dt + \hat{j} \int_a^b g(t) dt + \hat{k} \int_a^b h(t) dt$

Ejercicio 4: Evalúe los sigs. integrales.

$$a. \int_0^1 \left[ \frac{4}{1+t^2} \hat{i} + \sec^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) \hat{k} \right] dt = I, \tan(\pi/4) = 1$$

$$I_1 = 4 \hat{i} \tan^{-1} t \Big|_0^1 + \hat{k} \frac{4}{\pi} \tan\left(\frac{\pi t}{4}\right) \Big|_0^1$$

$$\tan^{-1} 1 = \pi/4$$

$$\tan^{-1} 0 = 0.$$

$$I_1 = 4 \hat{i} \frac{\pi}{4} + \hat{k} \frac{4}{\pi} \underset{80}{=} \pi \hat{i} + \hat{k} \frac{4}{\pi} = \left\langle \pi, 0, \frac{4}{\pi} \right\rangle$$

$$b. \int \langle te^{t^2}, te^t, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \rangle dt.$$

2.

Integre cada función.

$$x: \int e^{t^2} (t dt) = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^{t^2} + C_1$$

$u = t^2 \quad du = 2t dt.$

$$y: \int te^t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C_2$$

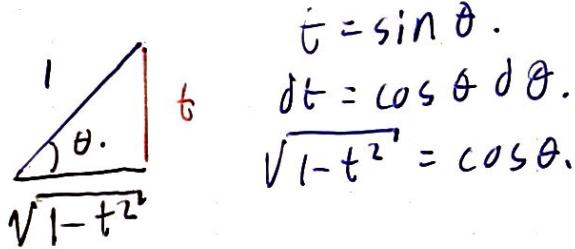
$u \quad dv = uv - \int v du.$

$$u = t \quad dv = e^t dt.$$

$$du = dt \quad v = e^t$$

$$z: \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{\cos \theta}{\cos \theta} d\theta = \int d\theta = \theta + C_3$$

$$= \sin^{-1}(t) + C_3.$$



$$\int \langle te^{t^2}, te^t, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \rangle dt = \left\langle \frac{1}{2} e^{t^2} + C_1, te^t - e^t + C_2, \sin^{-1} t + C_3 \right\rangle$$

1 23)

Movimiento en el espacio.

Dado el vector de posición  $\vec{r}(t)$ . De un objeto.

Vector Velocidad:  $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$

Vector Aceleración  $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$

Rapidez:  $| \vec{v}(t) |$  Distancia  $| \vec{r}(t) |$

Dado el vector de aceleración  $\vec{a}(t)$

velocidad:  $\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t) dt + \vec{C}_1$

desplazamiento:  $\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) dt + \vec{C}_2$

o posición

Las CI's  $\vec{v}(0)$  y  $\vec{r}(0)$  nos permiten encontrar el valor de  $\vec{C}_1$  y  $\vec{C}_2$  resp.

Ejercicio 1: Encuentre la velocidad, aceleración y rapidez dada la posición del objeto. y la distancia

$$\vec{r}(t) = \hat{i}t + 2\hat{j} \cosh(4t) + 3\hat{k} \sinh(3t).$$

Velocidad:  $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \hat{i} + 8\hat{j} \sinh(4t) + 9\hat{k} \cosh(3t).$

Aceleración:  $\vec{r}''(t) = \vec{a}(t) = 32\hat{j} \cosh(4t) + 27\hat{k} \sinh(3t)$

Rapidez:  $|\vec{v}(t)| = \sqrt{1 + 64 \sinh^2(4t) + 81 \cosh^2(3t)}$

Distancia:  $|\vec{r}(t)| = \sqrt{t^2 + 4 \cosh^2(4t) + 9 \sinh^2(3t)}$

## Tarea 6 Integrales Func. Vectoriales

### 14.1 Funciones en Varias Variables

Tarea Opcional Consolidado 12, 13, 14.1.

Ejercicio 2: Encuentre la velocidad y posición del objeto dada  $\vec{a}(t)$  y las condiciones iniciales.

$$\vec{a}(t) = \underline{6t} \hat{i} + \hat{j} \underline{\cos t} - \hat{k} \underline{\sin(2t)}, \quad \vec{V}(0) = \hat{i} + \hat{k}$$

$$\vec{r}(0) = 2\hat{j} - \hat{k}$$

Velocidad:  $\int \vec{a}(t) dt$

o

1/2.

$$\vec{V}(t) = \left\langle 3t^2 + C_1, \sin t + C_2, \frac{1}{2} \cos(2t) + C_3 \right\rangle$$

$$\vec{V}(0) = \left\langle \underline{C_1}, C_2, \frac{1}{2} + C_3 \right\rangle = \left\langle \underline{1}, 0, \underline{\frac{1}{2}} \right\rangle$$

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad \frac{1}{2} + C_3 = 1 \Rightarrow C_3 = \frac{1}{2}.$$

Posición:  $\int \vec{V}(t) dt$ .

$$\vec{r}(t) = \left\langle t^3 + t + d_1, -\cos t + d_2, \frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{t}{2} + d_3 \right\rangle$$

$$\vec{r}(0) = \left\langle d_1, -1 + d_2, d_3 \right\rangle = \left\langle 0, 2, -1 \right\rangle$$

$$d_1 = 0, \quad -1 + d_2 = 2, \quad d_3 = -1$$

$$d_2 = 3.$$

Posición:  $\vec{r}(t) = \left\langle t^3 + t, 3 - \cos t, \frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{t}{2} - 1 \right\rangle$

$$b. \vec{a}(t) = 8t\hat{i} + \sinh t\hat{j} - \hat{k}e^{\frac{t}{2}}, \quad \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}$$

$$\vec{v}(0) = \vec{0} \quad \vec{s}(0) = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$$

"En reposo"

Velocidad:  $\vec{v}(t) = \langle 4t^2 + C_1, \cosh t + C_2, -2e^{\frac{t}{2}} + C_3 \rangle$

$$\vec{v}(0) = \langle C_1, 1 + C_2, -2 + C_3 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle.$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -1 \quad C_3 = 2$$

$$\vec{v}(t) = \langle 4t^2, \cosh t - 1, -2e^{\frac{t}{2}} + 2 \rangle$$

Posición:  $\vec{r}(t) = \langle \frac{4}{3}t^3 + C_1, \sinh t - t + C_2, -4e^{\frac{t}{2}} + 2t + C_3 \rangle$

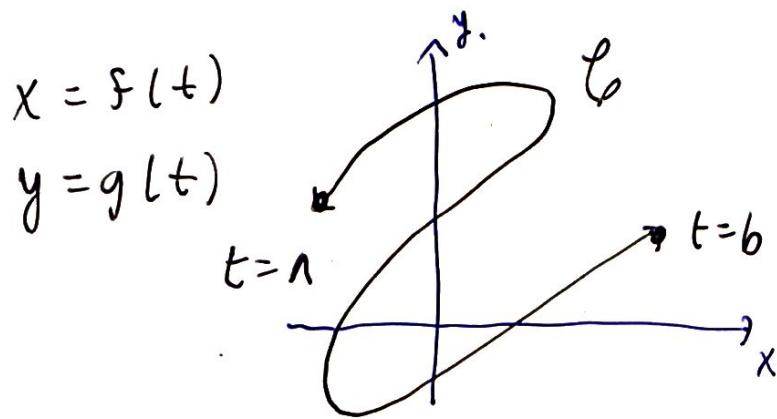
$$\vec{r}(0) = \underbrace{\langle C_1, C_2, -4 + C_3 \rangle}_{C_2 = 1} = \langle 2, 1, -3 \rangle$$

$$C_3 = -3 + 4 = 1$$

$$\vec{r}(t) = \langle \frac{4}{3}t^3 + 2, \sinh t - t + 1, -4e^{\frac{t}{2}} + 2t + 1 \rangle$$

### 13.3 Longitud de Arco.

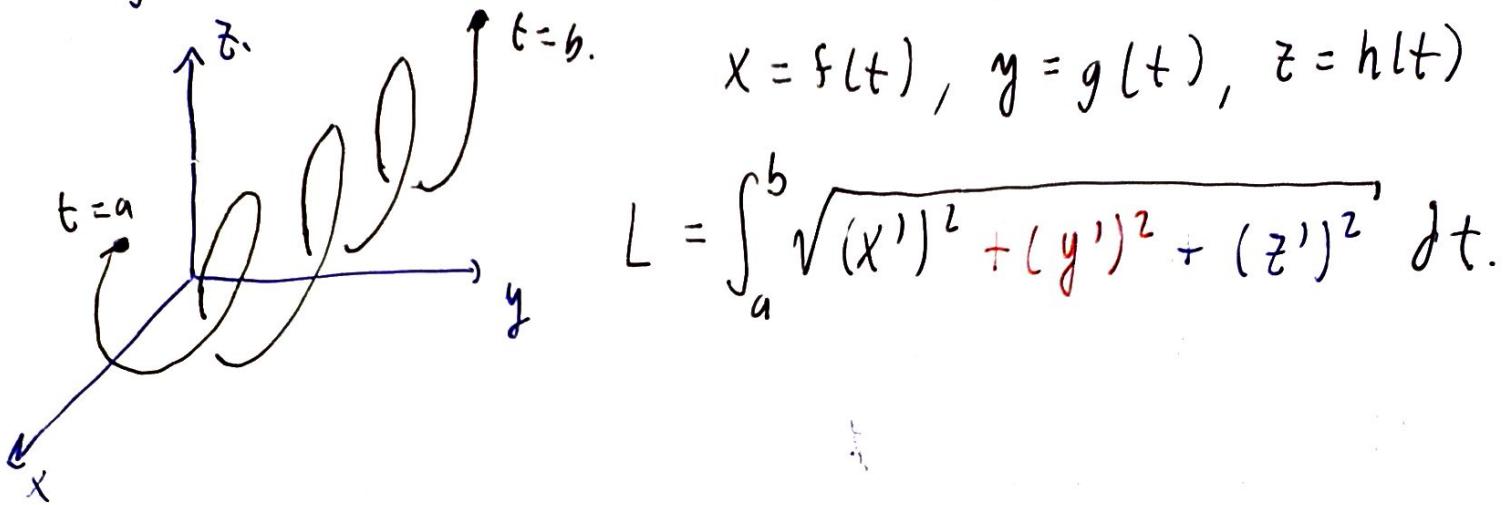
#### 10.4. Ecs. paramétricas de una curva en el plano.



Longitud de arco.

$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt.$$

Longitud de una curva en el espacio



$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt.$$

Función vectorial:  $\vec{r} = \langle f, g, h \rangle = \langle x, y, z \rangle$ .

Derivada:

$$\vec{r}' = \langle x', y', z' \rangle.$$

Magnitud:

$$|\vec{r}'| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$$

$$L = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt.$$

Integre la magnitud del vector tangente.

Ejercicio 1: p 63 Encuentre la longitud de las sigs. curvas.

a.  $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, \ln(\cos t) \rangle \quad 0 \leq t \leq \pi/4.$

$$L = \int_0^{\pi/4} |\vec{r}'(t)| dt. \quad \text{---tan t.}$$

$$\vec{r}'(t) = \left\langle -\sin t, \cos t, \frac{-\sin t}{\cos t} \right\rangle$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{-\sin^2 t + \cos^2 t + \tan^2 t}$$

$$= \sqrt{1 + \tan^2 t} = \sqrt{\sec^2 t} = \sec t.$$

$$L = \int_0^{\pi/4} \sec t dt = \left[ \ln(\sec t + \tan t) \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \ln(\sec \pi/4 + \tan \pi/4)$$

$$- \ln(\sec 0 + \tan 0)$$

$$L = \ln \left( \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 \right) - \ln(1) = \ln \sqrt{2} + 1$$

b.  $\vec{r}(t) = \langle 12t, 8t^{3/2}, 3t^2 \rangle \quad \text{en } 0 \leq t \leq 1$

$$\vec{r}'(t) = \langle 12, 12t^{1/2}, 6t \rangle = 6 \langle 2, 2t^{1/2}, t \rangle.$$

$$|\vec{r}'(t)| = 6 \sqrt{4 + 4t + t^2} = 6 \sqrt{(t+2)^2} = 6(t+2)$$

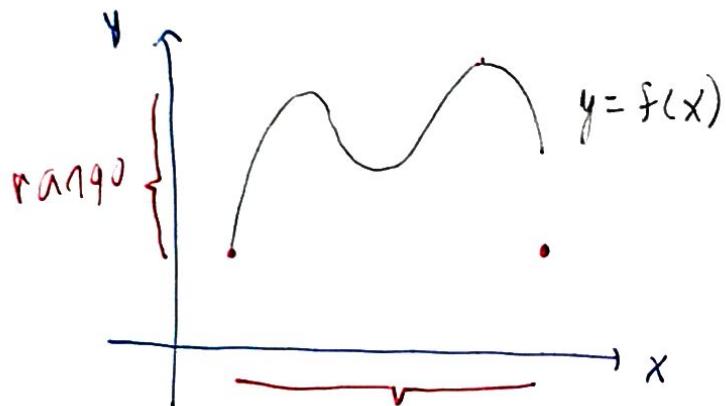
$$L = \int_0^1 (6t+12) dt = \left[ 3t^2 + 12t \right]_0^1 = 3 + 12 = 15$$

# Capítulo 12

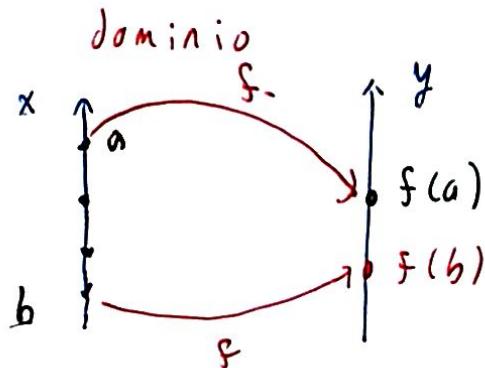
## Funciones de varias variables

# 14.1 Funciones de Varias Variables.

## Funciones 1 variable



variable independiente  $x$   
variable dependiente  $y$ .  
D) son intervalos.



Cada  $x$  puede tener  
un sólo valor de  $y$ .

## Funciones 2 variables:

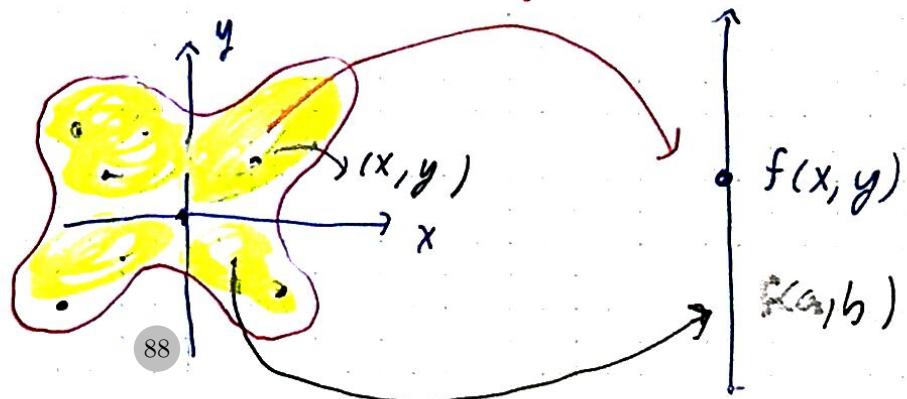
$$z = f(x, y).$$

variables independientes  $x, y$ .  
variable dependiente  $z$

$f$  es una regla que asigna a cada punto  $(x, y)$  a lo sumo un valor de  $z$ .

$$f: \underline{\mathbb{R}^2} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$$

dominio      rango.



Dominio de  $f$ : un conjunto que consiste de todos los puntos o pares ordenados  $(x, y)$  para los cuales  $f(x, y)$  está definida.

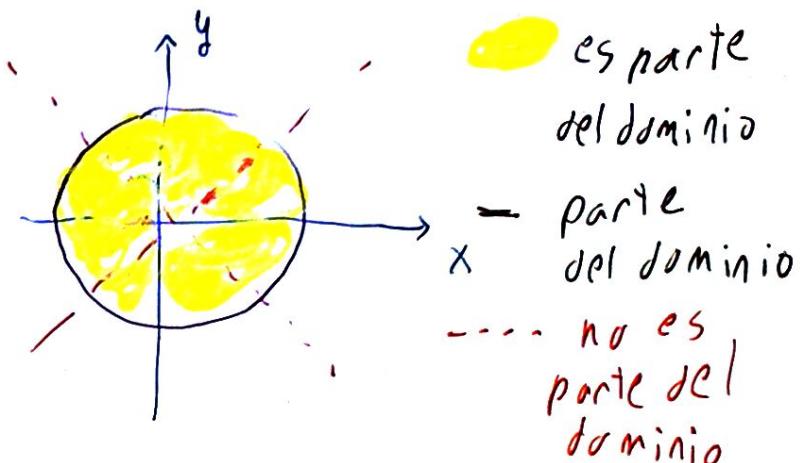
ID: 1-  $\bullet$  todos los números  $x$  para los cuales  $f(x)$  está definida.

- Evite la división por cero
- Raíces pares de números negativos
- Logaritmos de números negativos o cero.

El dominio de  $f$  en una función de dos variables es una región.

$$(1, 2] \cup (3, 4)$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ 0 \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ 1 \\ \text{---} \\ 2 \\ \text{---} \\ 3 \\ \text{---} \\ 4 \end{array}$$

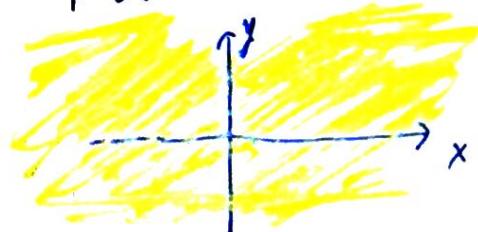


Ejercicio 1: Encuentre y bosqueje el dominio de las sigs funciones.

Sombree la región que es parte del ID y utilice líneas discontinuas para denotar a curvas que no son parte de ID.

a.  $C(x, y) = 10x + 20y$ .  $X \times Y$  producto cartesiano  
nunca se define

$$\text{ID: } \underbrace{(-\infty, \infty)}_x \times \underbrace{(-\infty, \infty)}_y = \mathbb{R}^2$$



$$\mathbb{R} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2. \quad \text{Explic. Producto}$$

*Cartesiano.*

$$X \times Y = \{(x, y) \text{ tal que } x \in X, y \in Y\}.$$

$$X = \{1, 2\} \quad Y = \{1, 2, 3\}.$$

$$X \times Y = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}.$$

$$X \cup Y = \{1, 2, 3\}.$$

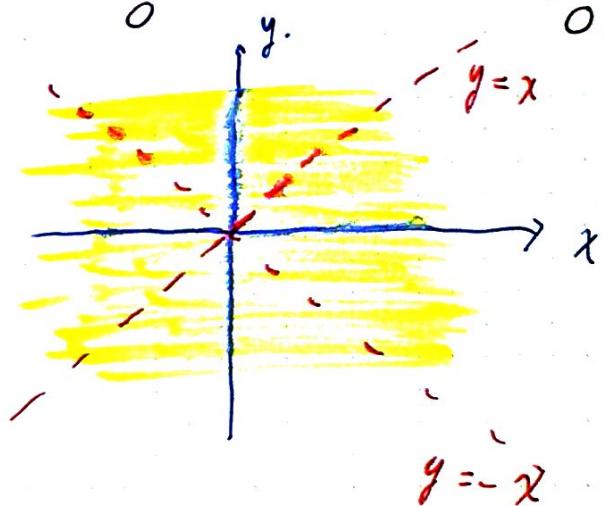

---

$$b. \quad z = \frac{8}{x^2 - y^2} \quad z(1, -1) = \frac{8}{0} \quad z(-2, 2) = \frac{8}{0}.$$

definida si  $x^2 \neq y^2$

$$\text{ID: } \mathbb{R}^2 - \{x^2 + y^2\}.$$

$$y \neq \sqrt{x^2} \quad y \neq +x \\ y \neq -x$$



$$c. \quad R(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

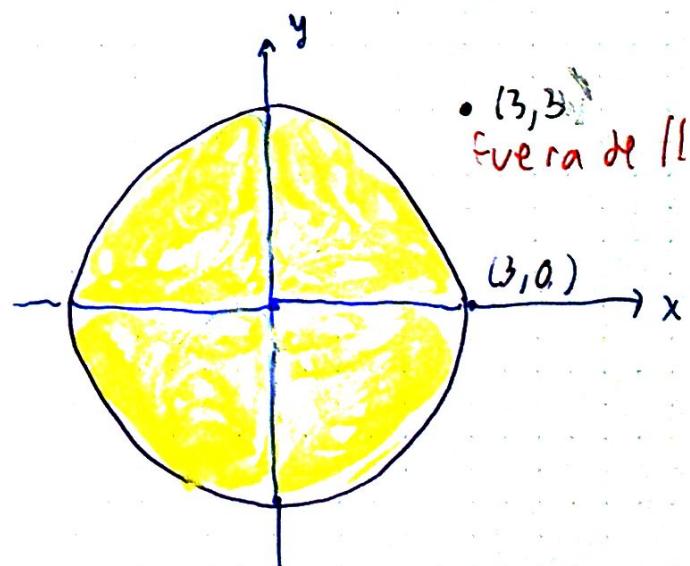
$$\text{definida } 9 - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$9 \geq x^2 + y^2.$$

$$\text{ID: } x^2 + y^2 \leq 9$$

círculo de radio 3  
centrado en el origen

$$\text{ID} = \{(x, y) \text{ tal que } x^2 + y^2 \leq 9\}.$$



J.  $Q(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$

1D:  $x^2 + y^2 - 9 > 0$

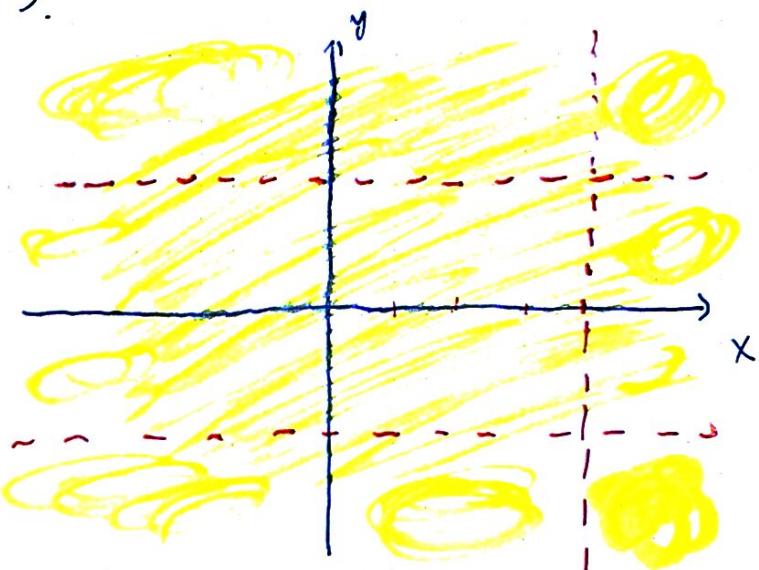
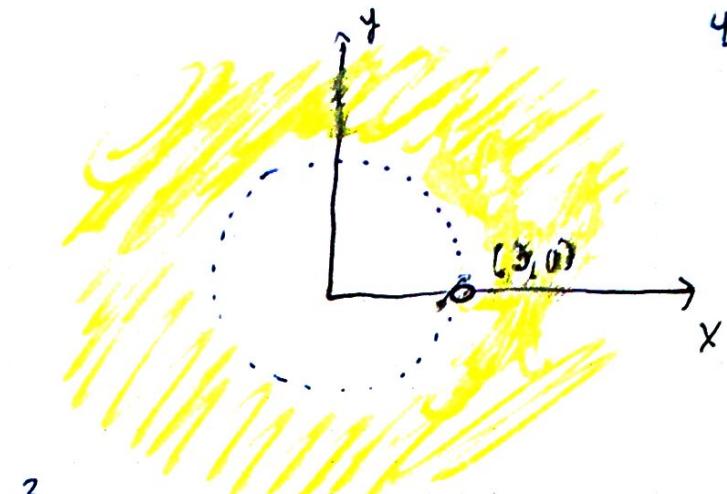
$x^2 + y^2 > 9$

afuera del disco de radio 3.

e.  $\bar{z} = \frac{(x+4)}{(y-2)(x-4)(y+2)}$

Definida si  $y \neq \pm 2, x \neq 4$

1D:  $\mathbb{R}^2 - \{y \neq \pm 2, x \neq 4\}$ .



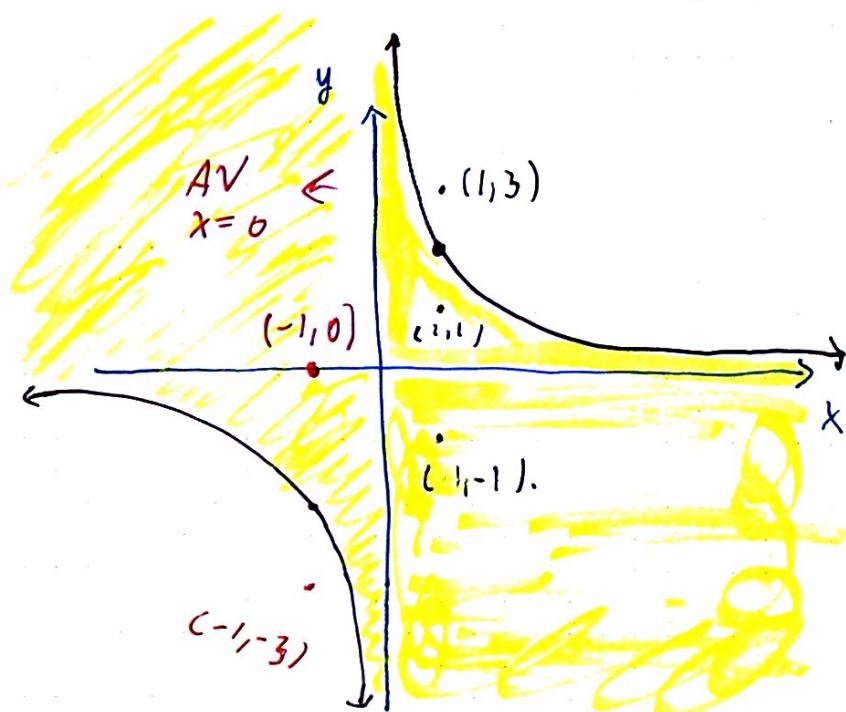
f.  $h(x, y) = \ln(2 - yx)$

Definida si  $2 - yx > 0$

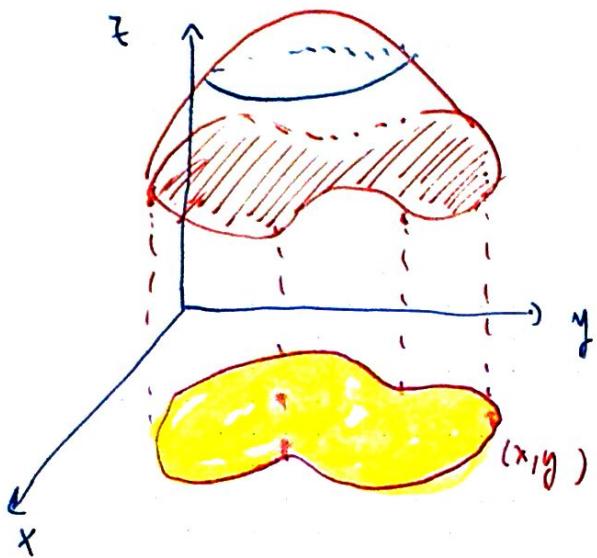
$$2 > yx$$

$y < \frac{2}{x}$

1D:  $y < \frac{2}{x}$ .



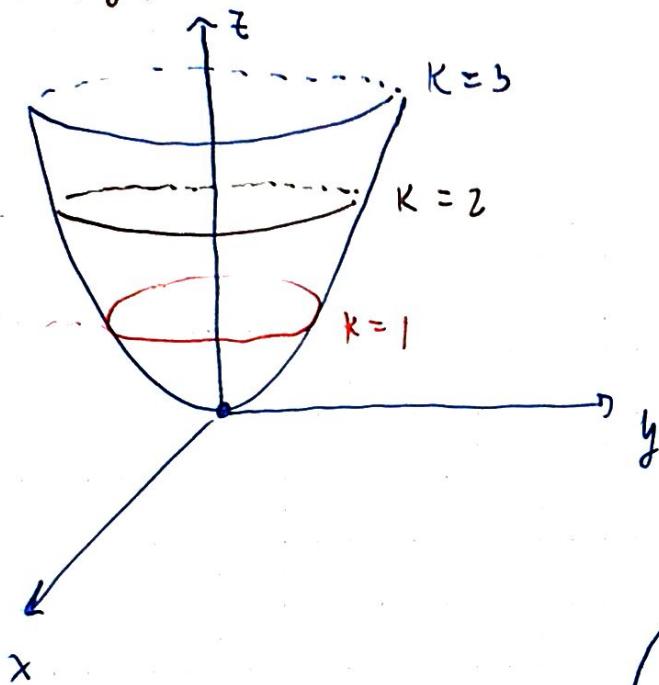
## Gráfica de $z = f(x, y)$



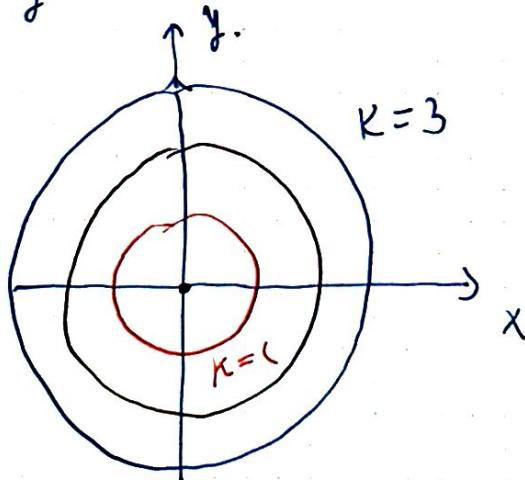
Son superficies y consisten de todas las triples ordenadas  $(x, y, z)$  donde  $z = f(x, y)$ .

Curva de Nivel o traza horizontal:

$$f(x, y) = K \quad K \text{ es una constante.}$$



Rebane la superficie con los planos horizontales  $z = K$  y grafique cada curva en el plano.



# Capítulo 13

## Curvas de nivel

Curvas de Nivel  $f(x, y) = K$ . constante.

Ejercicio 9: (p 84) Identifique y grafique las curvas de nivel  $f(x, y)$ .

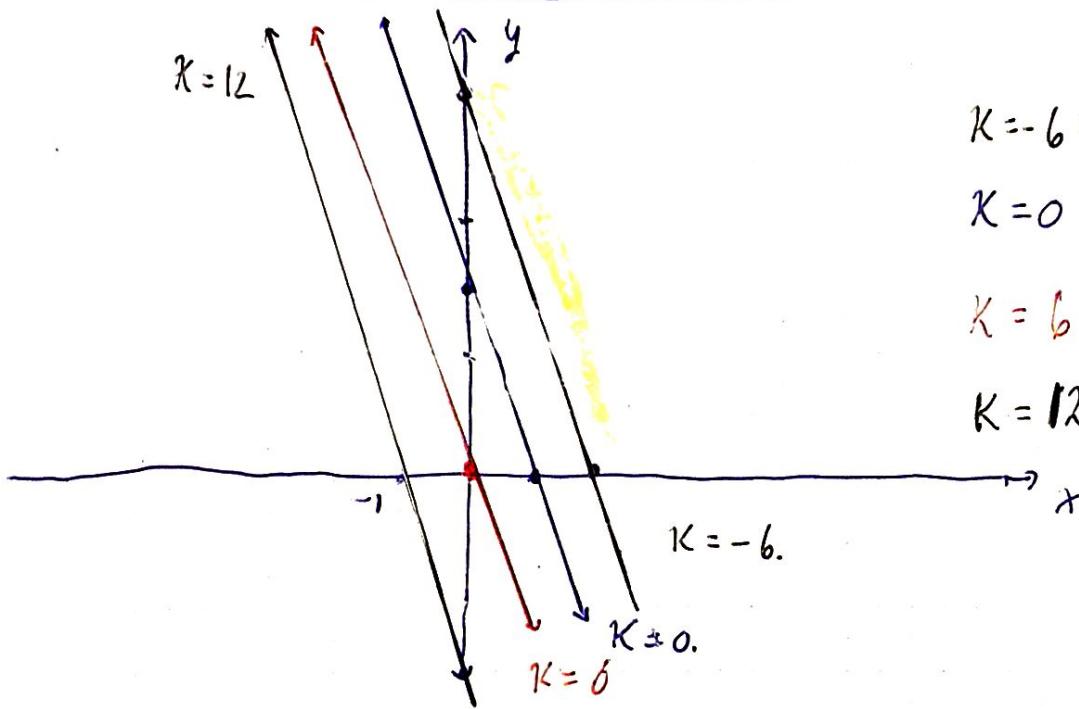
a.  $f(x, y) = 6 - 6x - 2y$  para  $K = -6, 0, 6, 12$ .

Plano  $6 - 6x - 2y = K$ .

$$6 - K - 6x = 2y.$$

$$\boxed{y = 3 - \frac{K}{2} - 3x}$$

Rectas con pendiente  $-3$  e intercepto- $y$   $3 - \frac{K}{2}$ .



$$K = -6: y = 6 - 3x$$

$$K = 0: y = 3 - 3x.$$

$$K = 6: y = -3x$$

$$K = 12: y = -3 - 3x$$

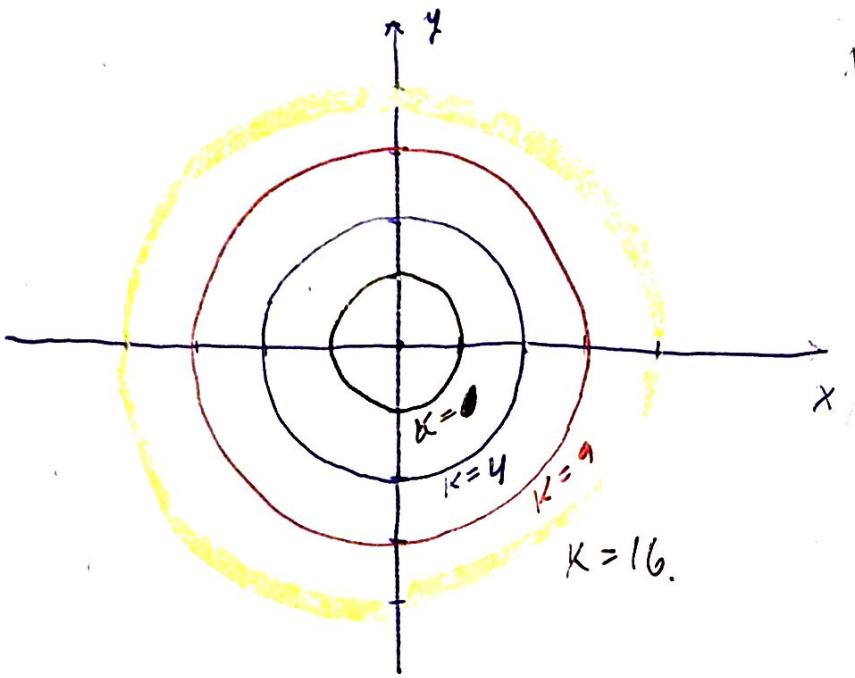
b.  $g(x, y) = x^2 + y^2$   $K = 1, 4, 9, 16$ .

$$x^2 + y^2 = K. \quad \text{circunferencia de radio } \sqrt{K}$$

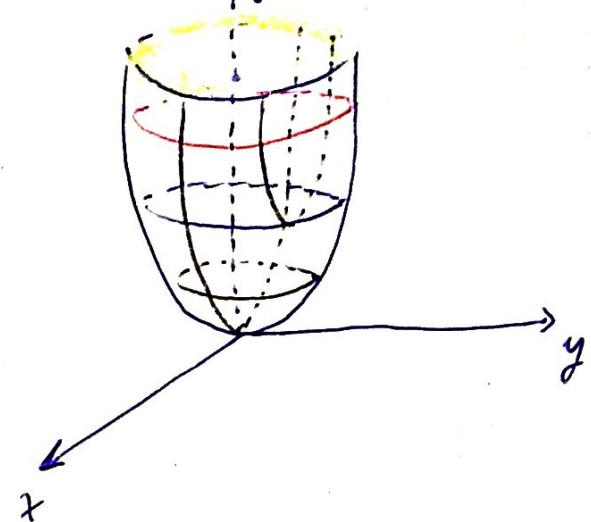
$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{todos están en el origen.}$$

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

$$x^2 + y^2 = 3^2$$



no tiene curvas de nivel para  $K$  negativo.



Paraboloid circular  $z = x^2 + y^2$ .  $z = K$   $x^2 + y^2 = K$   
circular.

$x = K$  ó  $y = K$  trazas horizontales.

$$z = K^2 + y^2 \quad \text{Par\'abola.}$$

$$z = x^2 + K^2.$$

$$\therefore h(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2} \quad \text{para } K = 0, 1, 4, 9.$$

Dominio:  $y^2 - x^2 \geq 0$ .

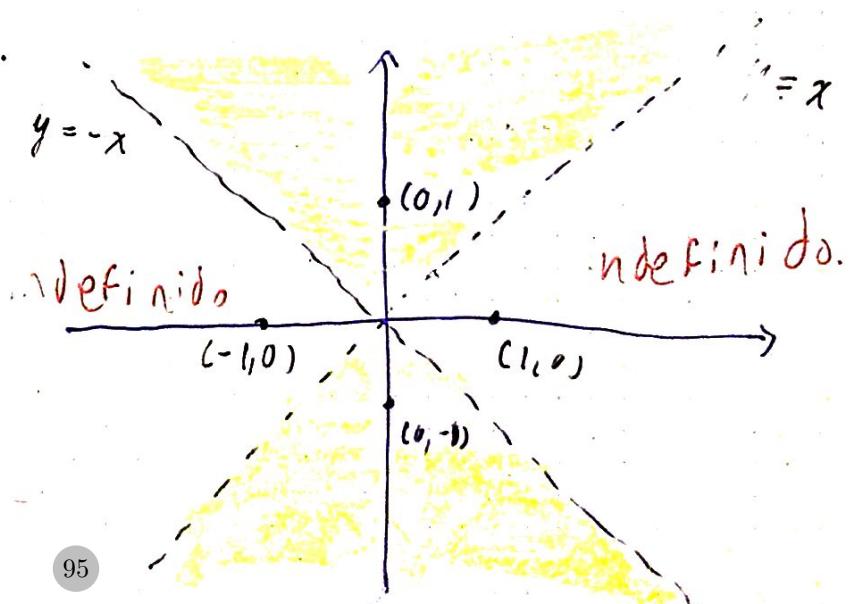
$$y^2 \geq x^2.$$

$$y \geq \pm \sqrt{x^2}$$

$$y^2 - x^2 = 0$$

$$y^2 = x^2.$$

$$y = \pm x$$



$$\sqrt{y^2 - x^2} = K.$$

$$y^2 = K^2 + x^2$$

$$y = \pm \sqrt{K^2 + x^2}$$

↳ Dominio  $(-\infty, \infty)$  en  $x$

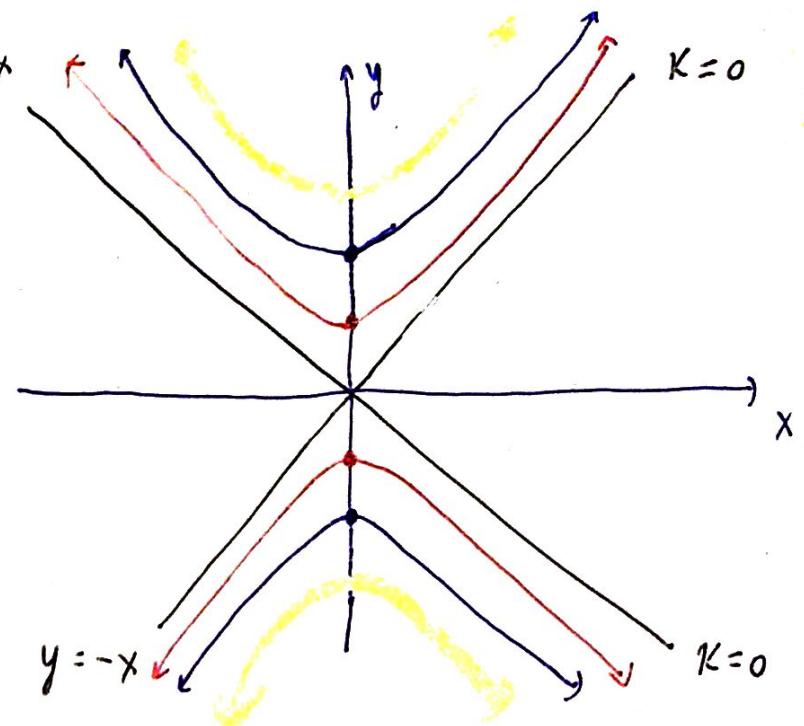
$$K=0 : y = \pm x$$

$$K=1 \quad y = \pm \sqrt{1+x^2}$$

$$y^2 - x^2 = 1.$$

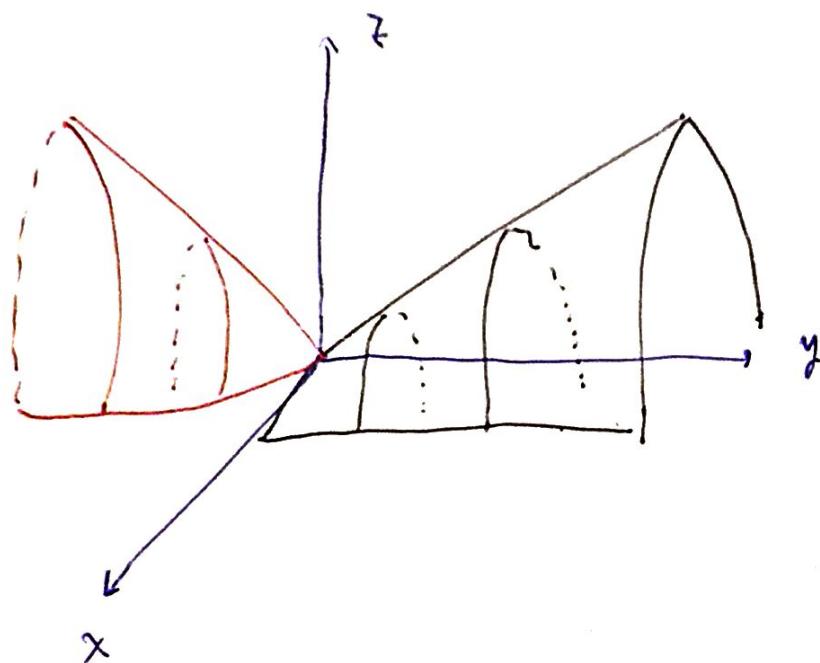
$$x=0 : y^2 = 1$$

$$y=0 : -x^2 = 1 \text{ no es posible}$$



$$K=4 : y = \pm \sqrt{4+x^2}$$

$$y = \pm \sqrt{9+x^2}$$



La superficie  

$$z = \sqrt{y^2 - x^2}$$
  
 se observaría  
 aprox. así.

## Funciones en 3 Variables

independientes  $x, y, z$ .  
dependiente  $u$  ó  $w$ .

$$w = f(x, y, z)$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Dominio: todas las triples ordenadas  $(x, y, z)$  para las cuales  $f(x, y, z)$  está definida.

Gráfica del dominio: es un sólido. (entre dos superficies)

Gráfica de  $f(x, y, z)$  son hiper superficies en 4-D.

## Funciones en $n$ variables.

$$u = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Dominio: todos las  $n$ -tuplas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  para las cuales  $u$  está definida.

En 3-D:  $f(x, y, z) = K$  constante.  
superficies de nivel.

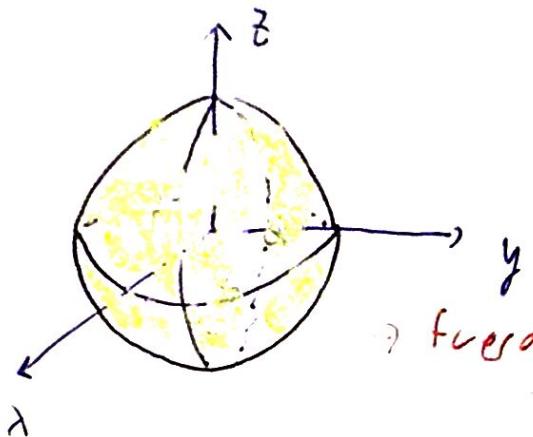
Ejercicio 5: Dominio y superficies de nivel para.

$$f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2} \quad \text{evite raíces negativas.}$$

Definida si  $4 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ .

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$$

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$  una esfera de radio 2.



esfera sólida de radio 2,

fuera de la esfera  $f$  se define.

curvas de nivel

$$\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2} = K.$$

$$4 - x^2 - y^2 - z^2 = K^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 - K^2$$

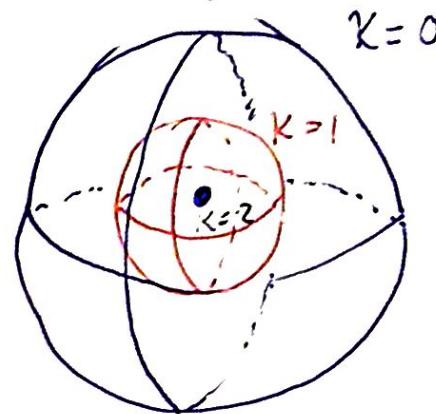
Esferas de radio  $\sqrt{4 - K^2}$

$$K=0 \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

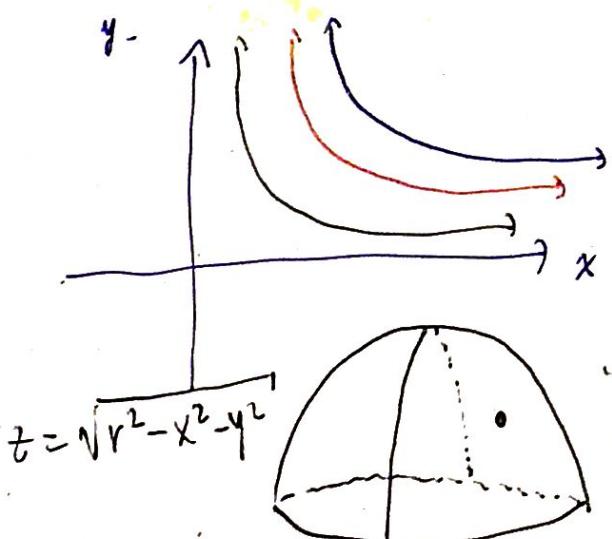
$$K=1 \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

$$K=2 \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

punto  $(0, 0, 2)$



curvas de nivel siempre son paralelas.



$f(x, y)$  sólo puede tener un valor.

Esfera  $z^2 + x^2 + y^2 = 1$ .

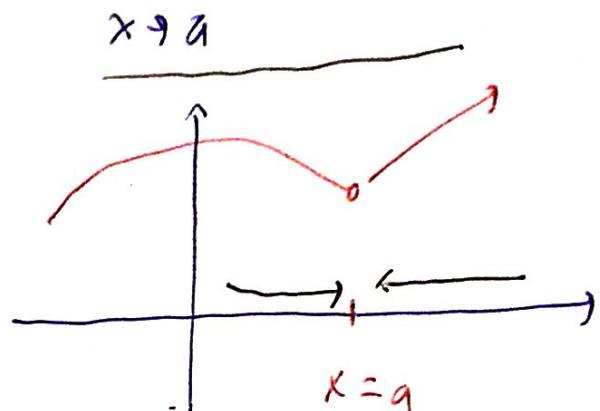
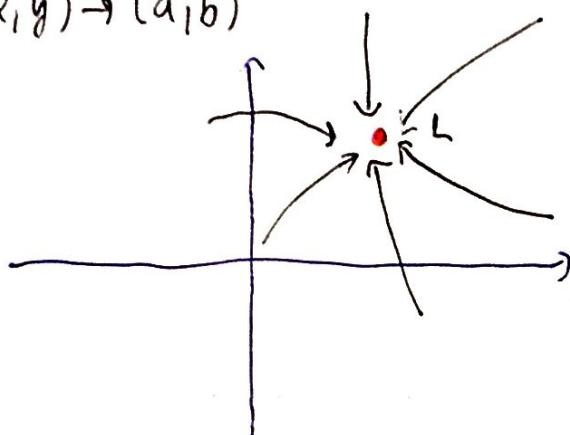
no es una función en 2 variables

si es función, <sup>98</sup> $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ .  
 $Z = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

## 1.2 Límite de una función de 2 variables.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L. \quad \text{1-D} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

único



Si  $f(x,y)$  es una función polinomial, trigonométrica, exponencial, logarítmica, etc y  $f(x,y)$  está definida en  $(a,b)$  entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{2x+y}{x^2+y^2} = \frac{2(1)+1}{1^2+1^2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} \quad \text{indeterminado.}$$

no se puede usar LH

$$y=0: \lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2}{x^2} = 2. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{no existe.}$$

$$x=0: \lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{y^2} = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{no existe.}$$

$$y=x: \lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2+x^2}{x^2+x^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}.$$

Continuidad: es una extensión del concepto de continuidad en una variable.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

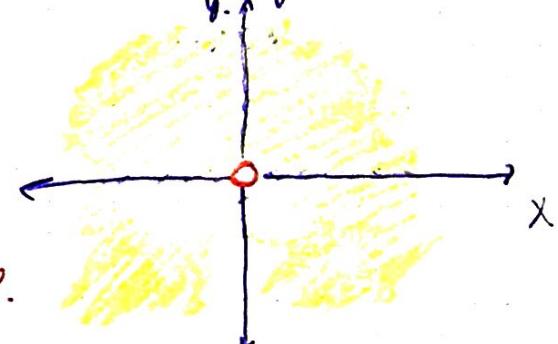
Las funciones exponenciales, polinomiales, logarítmicas, racionales, trigonométricas, etc son continuas en su dominio.

Ejercicio 2: Determine la región donde las sigs. funciones son continuas.

a.  $f(x,y) = \frac{2xy+1}{x^2+y^2}$  Es continua en todo su dominio.

Definida cuando  $x^2+y^2 \neq 0$ .  $x \neq 0, y \neq 0$ .

Continua en  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ .



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy+1}{x^2+y^2} = \frac{1}{0} \text{ no existe.}$$

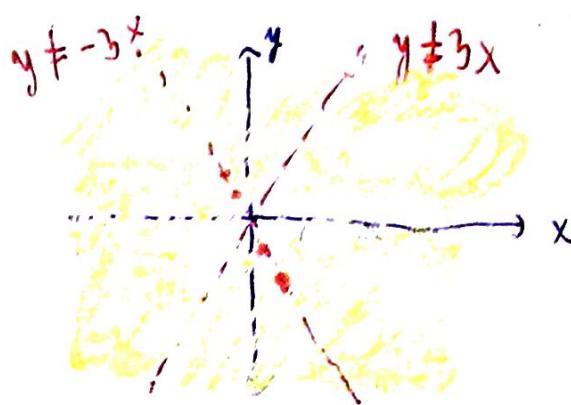
b.  $h(x,y) = \frac{1}{y^2 - 9x^2}$

Definida cuando  $y^2 \neq 9x^2$

$$\sqrt{9x^2} = \pm 3x$$

$$y = 3x^{100} \quad y = -3x$$

$$1D: \mathbb{R}^2 - \{y = \pm 3x\}$$



Enfoque funciones 2 variables.

- Dominio y continuidad *'prácticamente intercambiables'*
- curvas de nivel  $f(x, y) = K$ .

No hay enfoque

- Gráficas de  $f(x, y)$
- Límites de  $f(x, y)$
- Superficies de Nivel.

# Capítulo 14

## Derivadas parciales

### 14.3 Derivadas Parciales.

Derivada 1-D,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

En una función con 2 variables independientes

$$f(x, y) \quad \left. \begin{array}{l} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{array} \right\} \text{derivadas parciales.}$$

Al derivarse parcialmente respecto a una variable, la otra se mantiene constante.

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

"y se mantiene constante"

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

"x se mantiene constante"

Se pueden utilizar todas las reglas de derivación para funciones de 1 - variable.

- Suma, Producto, Cociente y la Cadena.

1<sup>as</sup> Derivadas parcial de  $f(x, y)$  - encuentre todas las derivadas parciales posibles  $f_x$  y  $f_y$ .  
 Δ delta.

$$\text{Notación. } f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Evide  $f'(x, y)$  para evitar ambigüedad.

Ejercicio 1: Encuentre las derivadas parciales de las sigs. funciones.

a.  $f(x, y) = 2x^2 + \underline{3}xy$ .  $f_x(x, y)$  &  $f_y(x, y)$ .

$$f_x = 4x + 3y. \quad f_y = 0 + 3x$$

b.  $g(x, y) = \underline{\underline{y}}(x^2+1)^3 + \underline{\underline{x}}(y^4-4)^4 + \underline{\underline{5x^2y^3}}$

$$g_x = 3y(x^2+1)^2 \cdot 2x + 2x(y^4-4)^4 + 10x^3y^3$$

$$g_y = 1 \cdot (x^2+1)^3 + 16y^3x^2(y^4-4)^3 + 15x^2y^2.$$

c.  $h(s, t) = (s^2+10t)^2(t^4+s^3)^3$  Regla del Producto y de la Cadena.

$$h_s = 4s(s^2+10t)^1(t^4+s^3)^3 + 3 \cdot 3s^2(s^2+10t)^2(t^4+s^3)^2$$

$$h_t = 20(s^2+10t)^1(t^4+s^3)^3 + 12t^3(s^2+10t)^2(t^4+s^3)^2$$

Evalue la derivada en punto  $(a, b)$ .

$$f_x(a, b) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a, b)}$$

d.  $w(r, \theta) = r^2 \sin(2\theta) + e^{\pi r - \theta}$ ; Encuentre  $\left. \frac{\partial w}{\partial \theta} \right|_{(2, \pi)}$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = 2r^2 \cos(2\theta) - e^{\pi r - \theta}.$$

104  $\left. \frac{\partial w}{\partial \theta} \right|_{(2, \pi)} = w_\theta(2, \pi) = 2 \cdot 4 \cos(2\pi) - e^{2\pi - \pi} = \boxed{8 - e^\pi}$

Derivadas parciales para funciones de 2 o más variables se deriva respecto a una variable y el resto se mantiene constantes.

$$w = f(x, y, z)$$

3. <sup>tras</sup> derivadas parciales  $f_x, f_y, f_z$ .

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

n derivadas parciales:  $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ .

Ejercicio 3: Encuentre todas las primeras derivadas parciales de las sigs. funciones.

a.  $f(x, y, z) = \sqrt[4]{x^4 + 8xz + 2y^2} \quad ( )^{1/4}$

$$f_x = \frac{1}{4} (x^4 + 8xz + 2y^2)^{-3/4} \cdot (4x^3 + 8z + 0)$$

$$f_y = \frac{1}{4} (x^4 + 8xz + 2y^2)^{-3/4} (4y)$$

$$f_z = \frac{1}{4} (x^4 + 8xz + 2y^2)^{-3/4} (8x)$$

b.  $P(r, \theta, \phi) = r \tan(\phi^2 - 4\theta)$

funciones

$$P_r = \tan(\phi^2 - 4\theta)$$

vectoriales

$$P_\theta = -4r \sec^2(\phi^2 - 4\theta)$$

1 variable

$$P_\phi = 2\phi r \sec^2(\phi^2 - 4\theta)$$

$\vec{F}(t), \dots$

$\langle f^1, g^1, h^1 \rangle$

Derivadas parciales de orden superior (Pág 100).

Orden superior: segunda, tercera, cuarta, ...,

Como  $f_x(x, y)$  &  $f_y(x, y)$  son también funciones en dos variables pueden también tener derivadas parciales.

$$\begin{array}{ccc} f_x \xrightarrow{x} f_{xx} & & f_y \xrightarrow{y} f_{yy} \\ \searrow y \quad \xrightarrow{x} & & \swarrow x \quad \xrightarrow{y} \\ \text{1er derivar} & \xrightarrow{\text{ultimamente}} & \text{cruzadas} \\ \text{izquierda} & \text{derecha} & \end{array}$$

Y segundas derivadas parciales, éstas también tienen sus derivadas parciales tercera derivadas parciales.

$$\begin{array}{cccc} \textcircled{f_{xxx}} & \textcircled{\underline{\underline{f_{xxy}}}} & \textcircled{\underline{\underline{f_{yyy}}}} & \textcircled{\underline{\underline{f_{yx}\!\!\!}}\!\!\!} \\ \underline{\underline{f_{xx}\!\!\!}}\!\!\! & \underline{\underline{f_{xy}\!\!\!}}\!\!\! & \underline{\underline{f_{yy}\!\!\!}}\!\!\! & \underline{\underline{f_{yx}\!\!\!}}\!\!\! \end{array}$$

Las derivadas parciales cruzadas  $f_{xy}, f_{yx}$  son iguales si la función es diferenciable.

$$f_{xy} = f_{yx} \quad f_{xyy} = f_{yyx} = f_{yx}\!\!\!$$

el orden de derivación respecto a cada variable no afecta la derivada parcial.

## Notación Delta.

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Ejercicio 4: Encuentre todas las 2das derivadas parciales.

a.  $f(x, y) = \sin(mx+ny)$ ,  $m, n \in \mathbb{R}$ .

1ras parciales:  $f_x = m \cos(mx+ny)$

$$f_y = n \cos(mx+ny).$$

2das parciales:  $f_{xx} = -m^2 \sin(mx+ny)$

$$f_{yy} = -n^2 \sin(mx+ny).$$

$$f_{xy} = -mn \sin(mx+ny). \quad \} iguales.$$

$$f_{yx} = -mn \sin(mx+ny)$$

b.  $z = \cos(2xy)$

1ras.:  $\frac{\partial z}{\partial x} = -2y \sin(2xy) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x \sin(2xy)$

2das:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4y^2 \cos(2xy) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4x^2 \cos(2xy)$

respecto a  $y$ :  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2 \sin(2xy) - 4yx \cos(2xy) \quad \} \text{mismo.}$

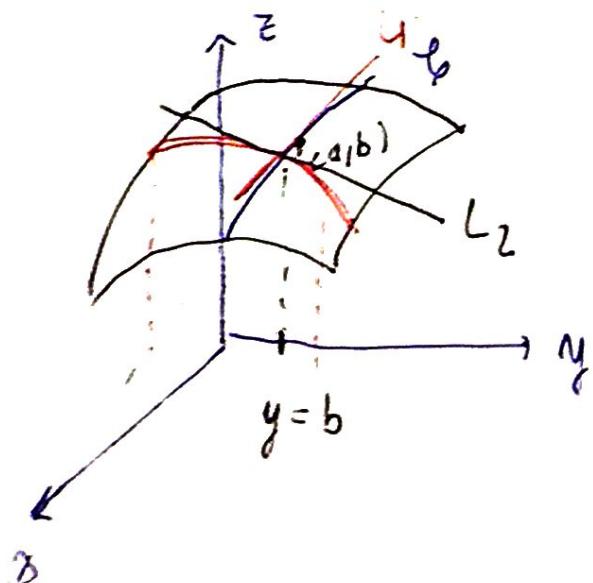
# Capítulo 15

Derivadas parciales, rectas tangentes y  
planos tangentes

# Derivadas Parciales, Rectas Tangentes y Planos tangentes.

P-101

Interpretación de la Derivada Parcial.



La curva de intersección entre  $z = f(x, y)$  y  $y = b$ .

Curva l variable  $z = f(x, b)$

Recta tangente a esta curva.

punto  $(a, b, f(a, b))$

Derivada.  $\frac{f_x(x, b)}{f_x(a, b)}$

pendiente  $f_x(a, b)$

Derivadas parciales.  $f_x(a, b)$  pendiente de la recta tangente a la curva  $f(x, b)$  en la dirección de  $x$ .

$$\tilde{\gamma}_1 - L_1 = \langle a, b, f(a, b) \rangle + t \langle 1, 0, f_x(a, b) \rangle.$$

función vectorial  $x = t, y = b, z = f(t, b)$ .

Para encontrar  $L_2$   $x = a$ .

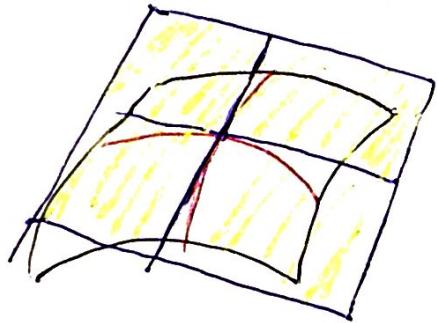
$$x = a, y = t, z = f(a, y)$$

$$\frac{dy}{dz} = f_y(a, y) \Rightarrow \underline{\frac{dy}{dz} = f_y(a, b)}$$

$\frac{dy}{dz} = f_y(a, b)$  es la pendiente de la tangente a la curva  $f(a, y)$  en la dirección de  $y$ .

$$L_1 = \langle a, b, f(a, b) \rangle + t \langle 1, 0, f_x(a, b) \rangle.$$

Estas dos rectas se utilizan para construir el plano tangente a la superficie p. 103.



→ Ec- plano tangente.

plano paralelo a  $L_1$  y a  $L_2$ .

$\underbrace{v_1}_{V_1}$

$$L_1 = \langle a, b, f(a, b) \rangle + t \langle 1, 0, f_x(a, b) \rangle.$$

$$L_2 = \langle a, b, f(a, b) \rangle + t \langle 0, 1, \underbrace{f_y(a, b)}_{V_L} \rangle.$$

$$\text{Ec. vectorial } \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad \vec{r}_0 = \langle a, b, f(a, b) \rangle$$

$$\hat{n} = v_1 \times v_2 - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & f_x(a, b) \\ 0 & 1 & f_y(a, b) \end{vmatrix} = -f_x(a, b)\hat{i} - f_y(a, b)\hat{j} + \hat{k}$$

$$\text{Ec. vectorial plano: } \langle -f_x(a, b), -f_y(a, b), 1 \rangle$$

$$\langle -f_x(a, b) - f_y(a, b), 1 \rangle \cdot \langle x-a, y-b, z-f(a, b) \rangle =$$

$$-f_x(a, b)(x-a) - f_y(a, b)(y-b) + z - f(a, b) = 0.$$

$$\boxed{z = f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b)}$$

Plano tangente a  $z$  en el punto  $(a, b, f(a, b))$ .

Ejercicio 1: Encuentre el plano tangente a la superficie  $z = \ln(x-2y)$  en el punto  $(3, 1, 0)$ .

$$f(a, b) \quad f_x(a, b) \quad f_y(a, b) \quad a = 3, b = 1$$

$$f(3, 1) = \ln(3-2) = \ln 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x-2y} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(3,1)} = \frac{1}{3-2} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2}{x-2y} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(3,1)} = \frac{-2}{3-2} = -2.$$

$$\text{Plano Tangente} \quad z = f(3, 1) + f_x(x-3) + f_y(y-1)$$

$$z = 0 + x-3 - 2y + 2.$$

$$\boxed{z = x-2y-1}$$

Aproximación Lineal de  $z = f(x, y)$ , Linearización.

La aproximación lineal de  $z$  en  $(a, b)$  es el plano tangente a la superficie.

$$L(x, y) = f(a, b) + \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a,b)} (x-a)}_{f_x(a, b)} + \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a,b)} (y-a)}_{f_y(a, b)}$$

Ejercicio 2: Considere la función  $f(x, y) = \sqrt{2x + 2e^y}$

a. Encuentre la aproximación lineal de  $f$  en el punto  $(7, 0)$ .

Encuentre  $f(7, 0)$   $f_x(7, 0)$   $f_y(7, 0)$

$$f(7, 0) = \sqrt{14 + 2} = 4.$$

$$f_x(x, y) = (2x + 2e^y)^{-1/2}. \quad f_x(7, 0) = \frac{1}{\sqrt{14+2}} = \frac{1}{4}.$$

$$f_y(x, y) = \frac{2e^y}{\sqrt{2x + 2e^y}} \quad f_y(7, 0) = \frac{1}{\sqrt{14+2}} = \frac{1}{4}.$$

Aproximación Lineal

o Plano Tangente

$$L = 4 + \frac{1}{4}(x - 7) + \frac{1}{4}y.$$

Cerca de  $(7, 0)$   $\sqrt{2x + 2e^y} \approx \frac{9}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y.$

b. Utilice la aproximación lineal para aproximar el valor de  $\sqrt{8 + 2e^1}$ .  $2x = 8$   $2e^y = 2e^1$

$$f(4, 1) = \sqrt{8 + 2e^1} \approx L(4, 1)$$

$$L(4, 1) = \frac{9}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$\sqrt{8 + 2e^1} \approx 3.5$$

En realidad

$$\sqrt{8 + 2e^1} \approx 3.665592.$$

Ejercicio 3: Encuentre la aproximación lineal de

$$g(x,y) = 1 + x \ln(xy - 5) \text{ en el punto } (2,3).$$

$$\boxed{g(2,3)} = 1 + 2 \ln(6 - 5) = 1 + 0 = \boxed{1}$$

$$g_x(x,y) = 0 + 1 \cdot \ln(xy - 5) + \frac{xy}{xy - 5}$$

$$\boxed{g_x(2,3)} = \ln(1) + \frac{6}{6-5} = 0 + \frac{6}{1} = \boxed{6}$$

$$\boxed{g_y(x,y)} = 0 + \frac{x \cdot x}{xy - 5} \quad g_y(2,3) = \frac{4}{6-5} = \boxed{4}$$

Aproximación Lineal:  $L(x,y) = 1 + 6(x-2) + 4(y-3)$

$$L(x,y) = -23 + 6x + 4y.$$

12.4 Derivación Implícita y 12.5 Regla de la Cadena.

Funciones 2 variables  $z = f(x,y)$

Explícita  $z = x^2 + y^2, z = x \ln(xy - 5), \dots$

Implícita:  $z$  no está sólo en función de  $x$  &  $y$ .

Ejemplos:  $x^2 + y^2 + z^2 = 16, \sqrt{z^2 - x^2} = y + z.$

¿Cómo se encuentran  $\frac{\partial z}{\partial x}$  &  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ?

Implicita.  $x^2 + y^2 + z^2 = 16.$

$$z = \pm \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

Rango  $[0, 4]$ .

Esfera radio  $4$   
Rango  $[-4, 4]$   
Dos hemisferios

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} (16 - x^2 - y^2)^{-1/2} (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{z}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Derivación Implicita se pueden encontrar  $zx$  &  $zy$   
SIN necesidad de resolver para  $z$ .

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16. \quad x \& y \text{ son independientes}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial}{\partial x} (16)$$

$$2x + 0 + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$2z \frac{\partial z}{\partial x} = -2x \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial}{\partial y} (0).$$

$$0 + 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}}$$

# 7

## Derivación Parcial Implícita Abreviada.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \text{ como } x \ln y + z^2 \sqrt{1+x^2+z^2} = K$$

Forma implícita:  $F(x, y, z(y, x)) = \text{constante.}$

$\frac{\partial z}{\partial x}$ , use la regla de la Cadena.

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \boxed{\frac{\partial z}{\partial x}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

Ejemplo  $x^2 + y^2 + z^2 = 16.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2z}.$$

Ejercicios: p. 108 Encuentre las primeras derivadas parciales de  $z$ .

a.  $\underbrace{\ln(zy) + 9z - xyz}_F = 1 \quad \frac{z}{zy} = \frac{1}{y}$

$$F_x = -yz.$$

$$F_y = y^{-1} + 0 - xz$$

$$F_z = z^{-1} + 9 - xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{z^{-1} + 9 - xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xy - y^{-1}}{z^{-1} + 9 - xy}$$

sin derivación parcial implícita derivada.

$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  agrege  $z_x$  cada vez que aparece  $z$ .

$$\frac{y \cancel{z_x}}{\cancel{z} y} + 9 \underline{\cancel{z_x}} - y z - xy \underline{\cancel{z_x}} = 0.$$

$$z^{-1} \cancel{z_x} + 9 \underline{\cancel{z_x}} - xy \underline{\cancel{z_x}} = y z.$$

$$\underline{\cancel{z_x}} = \frac{yz}{z^{-1} + 9 - xy}$$

más laborioso  
más cuidadoso.

# Capítulo 16

Regla de la cadena, derivación implícita,  
planos y rectas tangentes

## 14.5 Regla de la Cadena

$$y = f(g(t))$$

$$y = f(x) \quad x = g(t)$$

$$y \rightarrow x \rightarrow t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

externa interna.

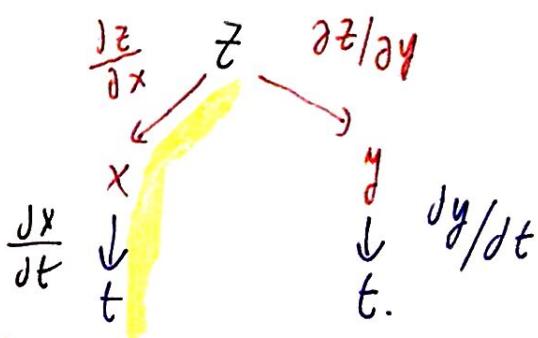
Caso 1:  $z = f(x, y)$   $x = g(t)$   $y = h(t)$

¿Cómo se encuentra  $\frac{dz}{dt}$ ?

$$z = f(x(t), y(t))$$

Diagrama de Árbol.

Variable dependiente  $z$ .



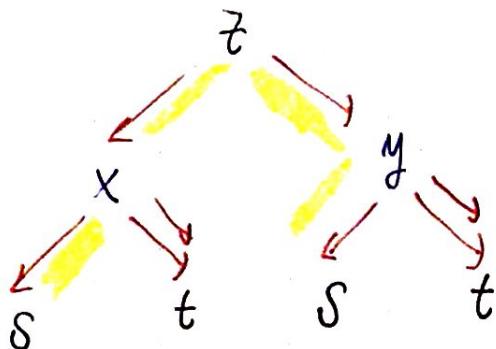
Variables intermedias  $x, y$ .

Variable independiente  $t$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Sume cada trayectoria.

Caso 2:  $z = f(x, y)$   $x = g(s, t)$   $y = h(s, t)$



$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Ejercicio 1: suponga que el costo de producir  $x$  uds. de A. y  $y$  uds. de B es:

$$C(x, y) = (3x^2 + y^3 + 4)^{1/3} \quad \text{explicita}$$

Las funciones de producción para cada producto son:

$$x = 10KL \quad y = 5K^2 + 4L \quad \text{explicita}$$

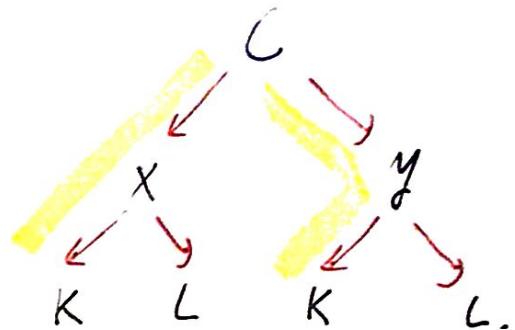
Encuentre la razón de cambio de  $C$  respecto al capital y al trabajo.

$$\frac{\partial C}{\partial K} = \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial K} + \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial K}$$

$$\frac{\partial C}{\partial L} = \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial L} + \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial L}$$

$$\frac{\partial C}{\partial K} = \frac{1}{3} 6x (3x^2 + y^3 + 4)^{-2/3} \frac{10L}{(3x^2 + y^3 + 4)^{1/3}} + \frac{1}{3} \frac{3y^2}{(3x^2 + y^3 + 4)^{1/3}} \frac{10K}{(3x^2 + y^3 + 4)^{1/3}}$$

$$\frac{\partial C}{\partial L} = \frac{2x}{(3x^2 + y^3 + 4)^{1/3}} \frac{10K}{(3x^2 + y^3 + 4)^{1/3}} + \frac{y^2}{(3x^2 + y^3 + 4)^{1/3}} \frac{(4)}{(3x^2 + y^3 + 4)^{1/3}}$$

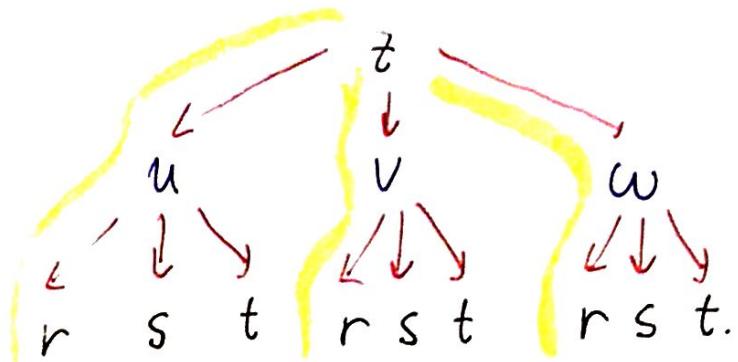


Ejercicio 3: Suponga que  $z = f(u, v, w)$  y que  $u, v, w$  son funciones de  $t$ . Encuentre  $\frac{dz}{dt}$ .

$$\begin{array}{ccc} & t & \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ u & v & w \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t & t & t \end{array} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{dw}{dt}.$$

Ejercicio 4: Suponga ahora que  $z = f(u, v, w)$  y que  $u, v, w$  son funciones de  $r, s, t$ .

Encuentre las derivadas parciales de  $z$  resp. a  $r, s$  &  $t$ .



$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial r}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial s}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Ejercicio 5: Encuentre las derivadas parciales indicadas.

a.  $w = \sqrt{x^2 + y^2}$        $\frac{\partial w}{\partial p} \Big|_{(p=1, q=0, r=3)}$

$$x = p^2 - q^3 + r - 1$$

$$y = \ln(p) + e^q + e^{\ln r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial p}.$$

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \cancel{2p} + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \frac{1}{p}.$$

$$x(1, 0, 3) = 1^2 - 0^3 + 3 - 1 = 3.$$

$$y(1, 0, 3) = \ln(1) + e^0 + e^{\ln 3} = 0 + 1 + 3 = 4.$$

$$\frac{\partial w}{\partial p} \Big|_{(1, 0, 3)} = \frac{3}{\sqrt{9+16}} \cancel{2} + \frac{4}{5} \cancel{\frac{1}{1}} = \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = \underline{\underline{2}}$$

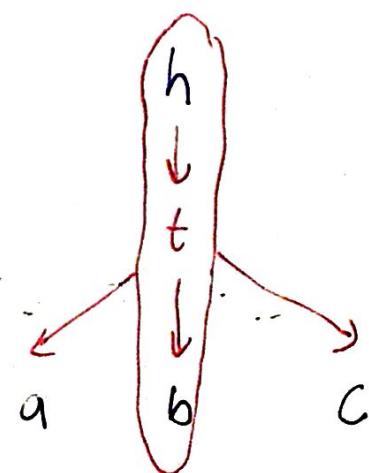
b.  $h = 4 - t^2$ ,     $t = 2a + 3b + 4c$ ,     $\frac{\partial h}{\partial b} \Big|_{(4, 2, 3)}$

$$h(a, b, c) = 4 - (2a + 3b + 4c)^2$$

$$\frac{\partial h}{\partial b} = -2(2a + 3b + 4c) \cancel{3}$$

$$\frac{\partial h}{\partial b} \Big|_{(4, 2, 3)} = -2(8 + \cancel{6} + 12) \cdot \cancel{3}$$

$$h_b(4, 2, 3) = -2(26) = \underline{121} 52 \cdot \cancel{3}$$



$$\hookrightarrow w = \ln(xyz) \quad x = r^2 - s^2, \quad y = rs, \quad z = r^2 + s^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$w_x = \frac{yz}{xyz} = \frac{1}{x}$$

$$w = \ln(xyz) = \ln x + \ln y + \ln z.$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{2r}{x} + \frac{s}{y} + \frac{2r}{z}$$

Ejercicios Derivación Implicita, Planos y Rectas Tangentes.

Ejercicio 6: Encuentre las ecs. paramétricas de las rectas tangentes a  $z = \sin x \tan y$  en la dirección de  $x$  &  $y$  en el punto  $(\pi/6, \pi/4)$

$$\text{En la dirección de } x: m_x = z_x(\pi/6, \pi/4)$$

$$\text{de } y: m_y = z_y(\pi/6, \pi/4)$$

$$z_x = \cos x \tan y. \quad z_x(\pi/6, \pi/4) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1$$

$$z(\pi/6, \pi/4) = \frac{1}{2} \cdot 1 \quad \text{No es recta}$$

$$\text{Intento: } z = z(\pi/6, \pi/4) + z_x(\pi/6, \pi/4)(x - \pi/6)$$

$$\bar{z} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \pi/6)$$

En la dirección de  $x$  no hay cambio en  $y$ .

$$x = t.$$

$$y = \pi/4$$

$$z = \sin t \tan(\pi/4)$$

$$\vec{r}(t)$$

$$\vec{r}'(t) = \langle 1, 0, \cos t \rangle$$

$$\vec{r}'(\pi/6) = \langle 1, 0, \sqrt{3}/2 \rangle.$$

$$L = \vec{r}(\pi/6) + \vec{r}'(\pi/6) t.$$

$$= \langle \pi/6, \pi/4, 1/2 \rangle + t \langle 1, 0, \sqrt{3}/2 \rangle.$$

$$x = \pi/6 + t.$$

$$y = \pi/4.$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} t.$$

Recta  
Tangente a  $z$

en la dirección de  $x$ .

En la dirección de  $y$ .  $x = \pi/6$  use  $t = \pi/4$ .

$$x = \pi/6$$

$$y = t$$

$$z = \sin \frac{\pi}{6} \tan t.$$

$$\vec{r}'(t) = \langle 0, 1, \frac{1}{2} \sec^2 t \rangle.$$

$$\vec{r}'(\pi/4) = \langle 0, 1, \frac{1}{2} \underbrace{(\sqrt{2})^2}_{1} \rangle$$

$$L = \vec{r}(\pi/4) + \vec{r}'(\pi/4) t$$

$$\vec{r}(\pi/4) = \langle \pi/6, \pi/4, 1/2 \rangle.$$

$$x = \pi/6$$

$$y = \pi/4 + t.$$

$$z = \frac{1}{2} + t$$

Ec. del Plano Tangente ó Aproximación Lineal

$$L(x, y) = z(\pi/6, \pi/4) + z_x(\pi/6)(x - \pi/6) + z_y(\pi/4)(y - \pi/4)$$

$$z(x, y) = \sin x \tan y.$$

$$z(\pi/6, \pi/4) = \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$z_x = \cos x \tan y \quad z_x(\pi/6, \pi/4) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1$$

$$z_y = \sin x \sec^2 y \quad z_y(\pi/6, \pi/4) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Plano Tangente:  $L(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \pi/6) + 1 \cdot (y - \pi/4)$

$$x = 2$$

$$z = 3 \quad y = t$$

$$z = -1 - 2t^2.$$

$$r(3) = \langle 2, 3, -19 \rangle$$

$$r'(t) = \langle 0, 1, -4t \rangle.$$

$$r'(3) = \langle 0, 1, -12 \rangle.$$

$$x = 2$$

$$y = 3 + t.$$

$$z = -19 - 12t.$$

# Capítulo 17

Derivadas direccionales y gradiente

## 14.5 Derivadas Direccionales y Gradiente. p. 114.

El Gradiente de  $f$ , denotado como  $Df$  ó  $\text{grad } f$ , es la función vectorial

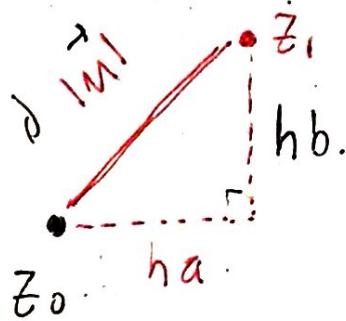
$$Df = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$$

Función de tres variables  $f(x, y, z)$ .

$$Df = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle$$

$f$  es una función escalar.  $Df$  es una función vectorial.

Derivadas Parciales en la dirección de  $x$  ó en la dirección de  $y$ .



La razón de cambio promedio entre  $z_1$  y  $z_0$  si uno se desplaza en la dirección del vector  $\vec{u}$  el cual es unitario.

$$\left( \frac{\Delta z}{\Delta d} \right) = \frac{z_1 - z_0}{h\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{z_1 - z_0}{h}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{a^2+b^2} = 1 \quad z_1 = f(x_0+ha, y_0+hb) \\ z_0 = f(x_0, y_0)$$

2.

Derivada Direccional: es la razón de cambio instantánea ( $h \rightarrow 0$ ) de  $z$  en la dirección de  $\vec{u}$  unitario en el punto  $(x_0, y_0)$

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

$z - D: w_0 = f(x_0, y_0, z_0)$

$$w_1 = f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc)$$

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{u}) - f(\vec{x}_0)}{h}$$

$$\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{u} = (a, b, c).$$

¿Cómo se calcula  $D_u f(\vec{x}_0)$ ?

$u = (1, 0, 0)$ .  
en la dirección  
de  $x$ .

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}.$$

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$u = (0, 1, 0).$$

en la dirección de  $y$ .

$$D_y f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

$$D_z f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

en la dirección de  $z$ .

Sea  $g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc)$

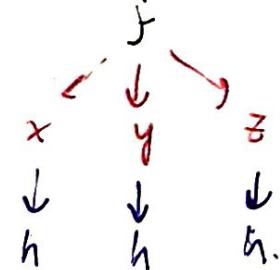
$$g'(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{u}) - f(\vec{x}_0)}{h} = D_{\vec{u}} f(x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{u} = \langle a, b, c \rangle \quad |\vec{u}| = 1$$

$$g(h) = f(x, y, z) \quad x = x_0 + ha \quad z = z_0 + hc$$

$$y = y_0 + hb$$

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial y} b + \frac{\partial f}{\partial z} c.$$



$$Df = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle \quad \vec{u} = \langle a, b, c \rangle$$

Teorema: Si  $f$  es diferenciable en  $x, y, z$ , la derivada direccional de  $f$  en el punto  $\vec{x}_0$  en la dirección del vector unitario  $\vec{u}$  es:

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) = Df \cdot \vec{u}$$

producto punto entre  
el gradiente &  $\vec{u}$

Ejercicio 1: Encuentre la derivada direccional de  $f(x, y) = e^x \sin y$  en el punto  $(0, \pi/3)$  en la dirección de  $\vec{v} = \langle -6, 8 \rangle$ .

$$D_{\vec{u}} f(0, \pi/3) = Df(0, \pi/3) \cdot \vec{u}$$

$\vec{v}$  no es unitario  $|\vec{v}| = \sqrt{36+64} = 10$ .

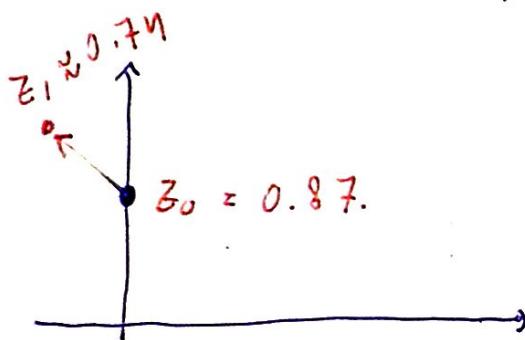
$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \boxed{\frac{1}{10} \langle -6, 8 \rangle}$$

$Df = \langle f_x, f_y \rangle = \langle e^x \sin y, e^x \cos y \rangle$

$Df(0, \pi/3) = \boxed{\langle \sqrt{3}/2, 1/2 \rangle}$

$$D\vec{u} f(0, \pi/3) = \frac{1}{10} \langle -6, 8 \rangle \cdot \langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \rangle \\ = \frac{1}{10} \left( -3\sqrt{3} + 4 \right) \approx -0.119615.$$

Interpretación  $f(0, \pi/3) = e^0 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$ .



Resumen  $Df = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle$

Derivada Direccional  $D_u f(\vec{x}_0) = Df \cdot \vec{u}$

Ejercicio 2: Considere la función  $g(r, t) = r^2 \tan\left(\frac{\pi t}{4}\right)$ .

a. Encuentre el gradiente de  $g(r, t)$  en el punto  $(2, 1)$ .

$$Dg = \langle g_r, g_t \rangle = \left\langle 2r \tan\left(\frac{\pi t}{4}\right), \frac{\pi r^2}{4} \sec^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) \right\rangle$$

$$Dg(2, 1) = \left\langle 4 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right), \pi \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\rangle \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Dg(2, 1) = \langle 4, 2\pi \rangle. \quad \sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

b. Encuentre la razón de cambio instantánea de  $g$  en el punto  $(2, 1)$  en la dirección de  $v = \langle -1, 2 \rangle$ .

$$D_u g(2, 1) = Dg(2, 1) \cdot \vec{U}$$

Falta un vector unitario:  $\vec{U} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle -1, 2 \rangle$ .

$$D_u g(2, 1) = \frac{\langle 4, 2\pi \rangle \cdot \langle -1, 2 \rangle}{\sqrt{5}} = \frac{-4 + 4\pi}{\sqrt{5}} \approx 2.$$

Ejercicio 3: Considere la función  $f(x, y, z) = x^3 y^2 z$ . 5.

a. Encuentre el gradiente de  $f$  en el punto  $(1, 2, 4)$ .

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \langle 3x^2 y^2 z, 2x^3 y z, x^3 y^2 \rangle.$$

$$\nabla f(1, 2, 4) = \langle 3 \cdot 4 \cdot 4, 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4, 1 \cdot 4 \rangle.$$

$$\nabla f(1, 2, 4) = \langle 48, 16, 4 \rangle.$$

b. Encuentre  $D_{\vec{u}} f(x, y, z)$  en  $(1, 2, 4)$  en la dirección de  $\vec{u} = \langle \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \rangle$ .

este vector

$$|\vec{u}| = \frac{1}{3} |\langle 1, -2, 2 \rangle| = \frac{1}{3} \sqrt{1+4+4} = 1 \quad \text{ya es unitario.}$$

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(1, 2, 4) &= \nabla f(1, 2, 4) \cdot \vec{u} \\ &= \frac{48}{3} - \frac{32}{3} + \frac{8}{3} = 16 - \underbrace{\frac{24}{3}}_8 = 18 \end{aligned}$$

La razón instantánea de cambio es de 8 unidades.

Interpretación del gradiente, unitario.

$$D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u} = |\nabla f| |\vec{u}| \cos \theta.$$

$$\underline{D_{\vec{u}} f} = |\nabla f| \cos \theta. \quad \theta \text{ es el ángulo entre } \nabla f \text{ y } \vec{u}.$$

Valor Máximo de  $D_{\vec{u}} f^{(131)}$  cuando  $\theta = 0$ .  $(D_{\vec{u}} f)_{\max} = |\nabla f|$

El valor máximo de la derivada direccional,  
o máxima razón de cambio, es  $|Df|$  y ocurre  
en la dirección  $u = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ . *Steepest Ascent.*

Cuando  $\theta = \pi$   $(D_{\vec{u}} f) = -|Df|$ .  
<sub>min.</sub>

Valor mínimo de la derivada direccional  
es  $-|Df|$  y ocurre en la dirección  $-\nabla f$ .  
*Steepest Descent.*

Ejercicio 4: Encuentre la máxima razón de cambio  
de  $f(x, y) = (y^2 + 1)e^x$  en el punto  $(0, 2)$  y la  
dirección en que ocurre este cambio,

Valor Máximo  $|Df|$  Dirección  $Df$ .

$$\nabla f = \langle e^x(y^2 + 1), 2ye^x \rangle.$$

$$\nabla f(0, 2) = \langle 4+1, 2 \cdot 2 \cdot 1 \rangle = \underline{\underline{\langle 5, 4 \rangle}}$$

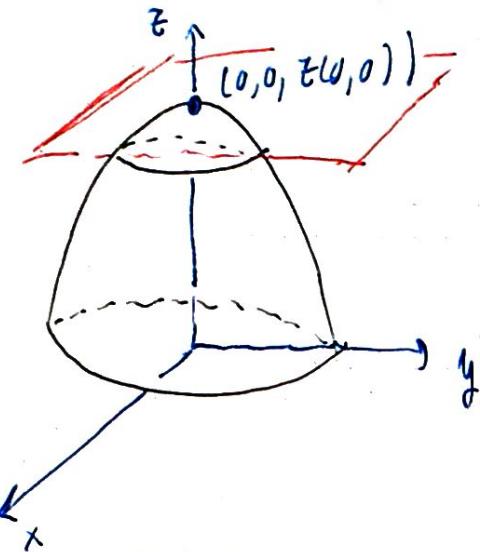
Valor Máximo Razón Cambio  $|Df(0, 2)| = \sqrt{25 + 16}$   
 $\approx 6.40$ .

Dirección Valor Máximo  $\nabla f = \langle 5, 4 \rangle$ .

# Capítulo 18

## Máximos y mínimos & problemas de aplicación, optimización

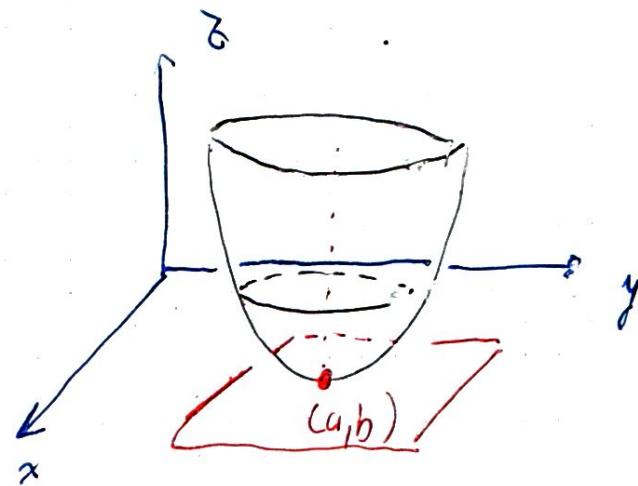
## 14.7 Máximos y mínimos.



Máximo relativo

$$f(a_1, b) > f(x, y)$$

$(x, y)$  cerca de  $(a_1, b)$

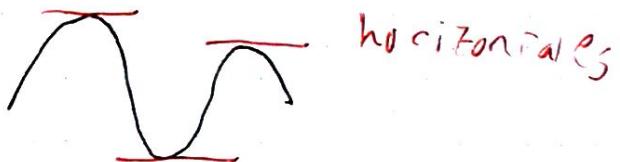


mínimo relativo.

$$f(a_1, b) < f(x, y)$$

$(x, y)$  cerca de  $(a_1, b)$

### Funciones Una variable



Números críticos:  $f'(c) = 0$  ó  $f'(c)$  no existe

2da Derivada:  $f''(c) < 0 \wedge$  Máximo Relativo en  $x=c$ .

$f''(c) > 0 \wedge$  Mínimo relativo en  $x=c$

$f''(c) = 0$  Inconcluso.

### Funciones Dos variables.

Puntos críticos.  $f_x(a, b) = 0 \wedge f_y(a, b) = 0$ .

No es suficiente

$f_{xx} < 0 \wedge f_{yy} < 0$  Max Relativo.

$f_{xx} > 0 \wedge f_{yy} > 0$  min relativo.

2. Prueba 2da Derivada:  $(a, b)$  es un punto crítico.  
 $f(x, y)$  tiene segundas derivadas continuas.

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Max Relativo:  $D(a, b) > 0$  &  $f_{xx} < 0$

Mínimo Relativo:  $D(a, b) > 0$  &  $f_{xx} > 0$ .

Punto de Silla:  $D(a, b) < 0$ . ni max ni min.

Inconcluso:  $D(a, b) = 0$   $\cup$   $\cap$

Ejemplo: Considere la función  $z = x^2 - y^2$ .

Puntos Críticos  $\begin{array}{l} z_x = 2x = 0 \\ z_y = -2y = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}$

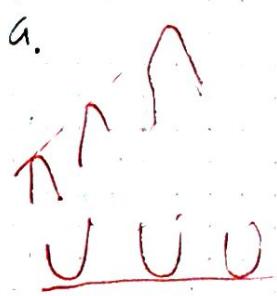
Único punto crítico  $(0, 0)$ .

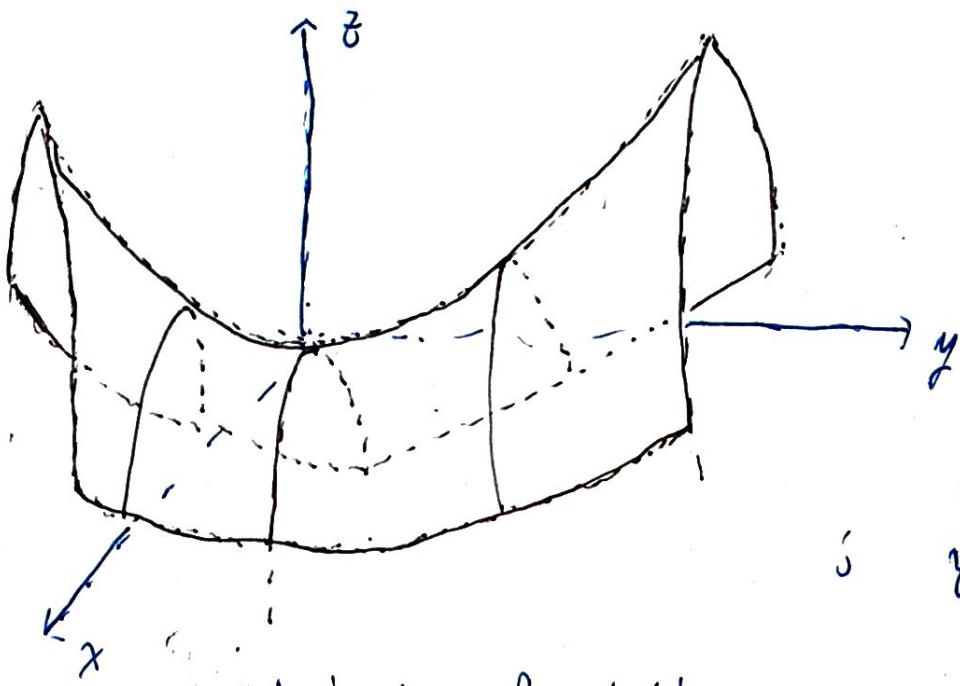
Prueba 2da Derivada  $D(x, y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$

El punto  $(0, 0)$  es un punto de silla.

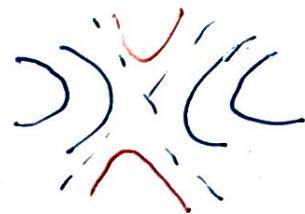
$$z(0, y) = -y^2 \quad \text{hay máximos}$$

$$z(x, 0) = x^2 \quad \text{hay mínimos}$$





Curvas de nivel  
son hiperbolas



Curvas verticales  $x=a$   
y  $y=b$  son parabolás.

### Hiperboloide Parabólico

Ejercicio 1: Encuentre los maxs y minimos relativos de las sigs. funciones.

a.  $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 6x + 16y.$

$$f_x = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad \text{único pto critico}$$

$$f_y = 8y + 16 = 0 \Rightarrow y = -2. \quad (3, -2).$$

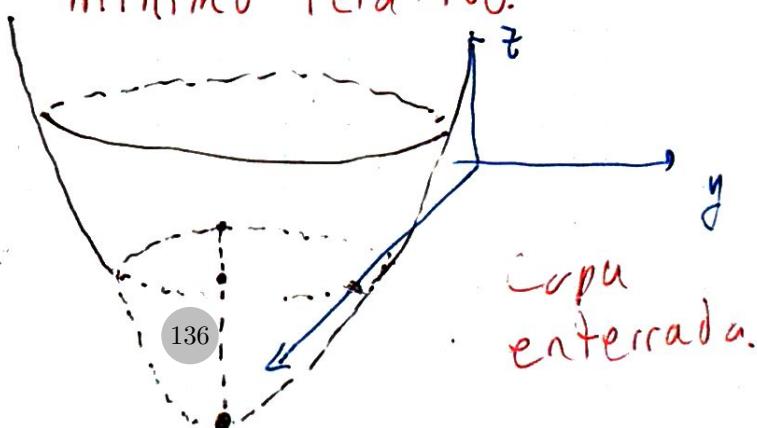
$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 16 > 0.$$

$$f_{xx} = 2 > 0.$$

minimo relativo.

Valor min relativo

$$f(3, -2) = -25$$



cabeza enterrada.

b.  $g(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 + 100$ .

$$\begin{aligned} g_x &= \underline{4x} + y = 0 \Rightarrow y = -4x \Rightarrow y = 0 \\ g_y &= \underline{x} + 2y = 0 \Rightarrow x - 8x = -9x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

único punto crítico.

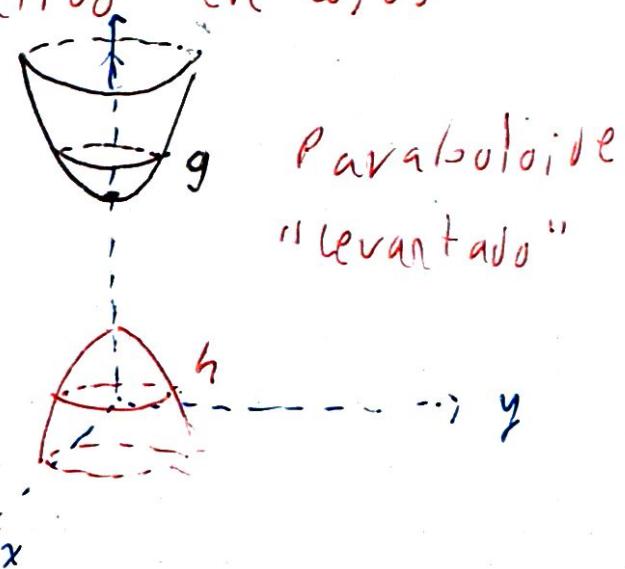
$$D(x, y) = \begin{vmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7 > 0$$

$$g_{xx} = 4 > 0 \quad \text{mínimo relativo en } (0, 0)$$

valor mínimo relativo

$$g(0, 0) = 100$$

Rango  $[100, 00]$



c.  $h(x, y) = 30 - x^2 - 2y^2 + 4x - 12y$ .

$$h_x = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4/(-2) = 2$$

$$h_y = -4y - 12 = 0 \Rightarrow y = 12/(-4) = -3$$

único número crítico. es  $(2, -3)$

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 > 0 \quad h_{xx} = -2 < 0$$

Máximo relativo en  $(2, -3)$ .

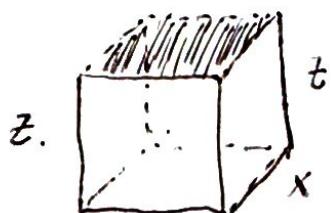
Valor Max relati...  
es 38.

## 5.

### Problemas Aplicados.

Ejercicio 2: Una caja de cartón sin tapa debe tener un volumen de  $32,000 \text{ cm}^3$ .

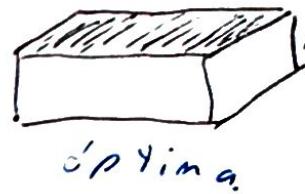
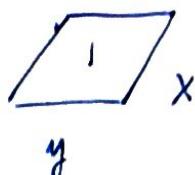
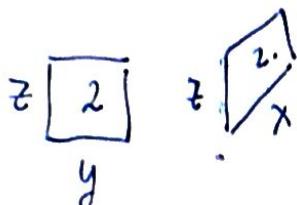
Calcule las dimensiones  $x, y, z$  que minimicen la cantidad de cartón utilizado. No realice la prueba 2da Derivada.



$$\text{Volumen: } xyz = 32,000$$

$$\text{Área: } A = 2zy + 2zx + xy. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \min \end{array} \right.$$

5 paneles



$$\min \quad A = 2zy + 2zx + xy. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{3 variables.} \end{array} \right.$$

$$\text{s.a.} \quad z = \frac{32,000}{xy}. \quad \left. \begin{array}{l} \\ x, y, z \geq 0. \end{array} \right.$$

$$A(x, y) = \frac{64,000}{x} + \frac{64,000}{y} + xy.$$

$$Ax = 0 : -\frac{64,000}{x^2} + y = 0 \Rightarrow y = 64,000x^{-2}.$$

$$Ay = 0 : -\frac{64,000}{y^2} + x = 0 \quad y^2 = [64,000]^2 x^{-4}.$$

sustituya en Ay

$$\frac{-64,000}{(64,000)^2 x^4} + x = 0$$

$$-\frac{x^4}{64000} = -x$$

$$\frac{x^4}{x} = 64 \cdot 1000$$

$$x^3 = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{1000} = 4 \cdot 10 = 40 \Rightarrow 4 \cdot 10$$

$$y = \frac{64,000}{x^2} = \frac{64 \cdot 1000}{16 \cdot 100} = 4 \cdot 10 = 40.$$

$$z = \frac{32,000}{40 \cdot 40} = \frac{32,000}{1600} = 20$$

Dimensiones que minimizan el área  $x = y = 40, z = 20$

### Ejercicio 3: Discriminación de Precios.

Demanda  $p_1 = 104 - q_1$ . producción  $q_1, q_2$ .

$$p_2 = 84 - q_2.$$

Costos  $C = 600 + 4q_1 + 4q_2.$

Encuentre los precios y las cantidades  $q_1$  &  $q_2$  a la que deben venderse los productos para maximizar la utilidad. = ingresos - costos.

$$\text{Utilidad: } U(q_1, q_2) = p_1 q_1 + p_2 q_2 - 600 - 4q_1 - 4q_2$$

$$U(q_1, q_2) = \underbrace{104q_1 - q_1^2}_{139} + \underbrace{84q_2 - q_2^2}_{139} - 600 - \underbrace{4q_1}_{139} - \underbrace{4q_2}_{139}$$

$$U(q_1, q_2) = -q_1^2 - q_2^2 + 100q_1 + 80q_2 - 600$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = -2q_1 + 100 = 0 \Rightarrow q_1 = 50$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = -2q_2 + 80 = 0 \Rightarrow q_2 = 40.$$

Único punto crítico ( $q_1 = 50, q_2 = 40$ )

$p_1 = 54, p_2 = 44$  } discriminación

Utilidad Máxima:

$$U(50, 40) = 54 * 50 + 44 * 40 = 600 - 360.$$

$$2,700 + 1760 - 960 = 3,500.$$

Utilidad máxima.

Prueba  
2da Derivada :  $D(X, y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$

$$D_{q_1 q_1} = -2 < 0 \quad \text{Máximo Relativo}$$

# Capítulo 19

## Multiplicadores LaGrange

## 14.8 Multiplicadores de Lagrange.

Una función de dos o tres variables puede estar sujeta a una restricción  $x_1y + x_2hy = 100$ .

$$\text{Máximo } z = f(x, y) \quad \text{s.t. } g(x, y) = 0.$$

Si no es posible resolver para  $y$  ó  $x$  en la restricción, el problema no se puede reducir a una sola variable.

Se introduce una nueva variable

Multiplicador de Lagrange.  $\lambda$  "lambda" para incorporar la restricción en la función objetivo.

$$c - g(x, y) = 0$$

$$F(x, y, \lambda) = \underbrace{f(x, y)}_{\text{objetivo}} + \lambda \underbrace{(c - g(x, y))}_{\text{restricción}}$$

Extremos relativos  $F_x = F_y = F_\lambda = 0$ .

$$F_x = f_x + \lambda g_x = 0.$$

$$F_y = f_y - \lambda g_y = 0$$

$$F_\lambda = c - g(x, y) = 0$$

$$\boxed{\nabla f = \lambda \nabla g.}$$

$$g(x, y) = c.$$

condiciones necesarias para un extremo relativo

Problema  $w = f(x, y, z)$  sujeta a  $g(x, y, z) = C$ .

Lagrangiano  $F(x, y, z, \lambda) = \underbrace{f(x, y, z)}_{\text{objetivo}} + \lambda \underbrace{(C - g(x, y, z))}_{\text{restricción}}$

$$F_x = F_y = F_z = F_\lambda = 0. \quad \lambda \text{ "variable artificial"}$$

condiciones  $\nabla F = \lambda \nabla g \quad \& \quad g(x, y, z) = C$ .

Ejercicio 1: Encuentre los extremos relativos de  $w = x^2 + y^2 + z^2$  sujeta a  $2x + y - z = 18$ . } restricción.

Método 1: Resuelva para  $z$   $z = 2x + y - 18$ .

Sustituya en  $w$  para obtener una función de 2 variables.

$$w = x^2 + y^2 + (2x + y - 18)^2. \quad \nabla w = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} w_x &= 2x + 4(2x + y - 18) = 10x + \cancel{4y} - 72 = 0. & R_1 \\ w_y &= 2y + 2(2x + y - 18) = 4x + \cancel{4y} - 36 = 0. & R_2 \end{aligned}$$

$$R_1 - R_2: 6x - 36 = 0 \Rightarrow x = 6.$$

$$R_2: 4y = 36 - 4x = 12 \Rightarrow y = 3.$$

¿Cómo se encuentra  $z$ ?  $z = 2(6) + 3 - 18 = -3$ .

Punto crítico:  $(6, 3, -3)$ .

Prueba  
2da

D-derivada

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} w_{xx} & w_{xy} \\ w_{yx} & w_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 24 > 0$$

$$w_{xx} = 10 > 0. \quad \text{mínimo relativo.}$$

## Método 2: Multiplicadores de Lagrange

Lagrangiano  $F = w + \lambda (\overset{\circ}{c} - g)$

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(18 - 2x - y + z)$$

$$F_x = 2x - 2\lambda = 0 \Rightarrow x = \lambda = 6 \quad \checkmark$$

$$F_y = 2y - \lambda = 0 \Rightarrow y = \lambda/2 = 3 \quad \checkmark$$

$$F_z = 2z + \lambda = 0 \Rightarrow z = -\lambda/2 = -3 \quad \checkmark$$

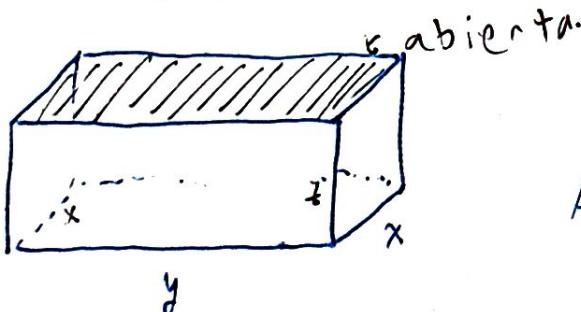
$$F_\lambda = 18 - 2x - y + z = 0 \Rightarrow 2x + y - z = 18$$

Sustituya  $x, y$  &  $z$  en la restricción.

$$2\lambda + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = 3\lambda = 18 \Rightarrow \lambda = 6.$$

Punto critico es  $(6, 3, -3)$   $\lambda = 6$ .

Ejercicio 2: Una caja sin tapa tiene un volumen de  $32,000 \text{ cm}^3$ . Encuentre las dimensiones de la caja que minimizan su área superficial.



$$\text{Volumen } V = xyz = 32,000.$$

$$\text{Área Sup } A = 2zy + 2zx + yx$$

objetivo

$$F = A + \lambda(c - V) = 2zy + 2zx + yx + \lambda(32,000 - xy^2)$$

No Lineal.

$$\begin{aligned} F_x &= 2z + y - \lambda y z = 0 \\ F_y &= 2z + x - \lambda x z = 0 \\ F_z &= 2y + 2x - \lambda x y = 0. \\ F_\lambda &= 32,000 - xyz = 0. \end{aligned} \quad \left\{ \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda y z = y + 2z \quad (1) \\ \lambda x z = x + 2z \quad (2) \\ \lambda x y = 2x + 2y. \quad (3) \\ xyz = 32,000 \quad (4). \end{array} \right.$$

$$\frac{(1)}{(2)} \quad \frac{y}{x} = \frac{y+2z}{x+2z} \quad \begin{aligned} y/x + 2zy &= xy + 2zx \\ y &= \frac{2zx}{2z} = x \end{aligned}$$

$x = y$

$$\frac{(1)}{(3)} \quad \frac{z}{x} = \frac{y+2z}{2x+2y} \quad \begin{aligned} 2xz + 2yz &= xy + 2zx \\ z &= \frac{xy}{2y} = \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

$y = x$ ,  $z = x/2$ . se sustituyen en la restricción

$$x \times \frac{x}{2} = 32000 \quad x^3 = 64 \cdot 1000 \quad x = \sqrt[3]{64} \sqrt[3]{1000} = 4 \cdot 10 = 40.$$

Punto crítico:  $x = 40$ ,  $y = 40$ ,  $z = 20$ .

A'rea mínima:  $A = \checkmark \checkmark \checkmark 2yz + 2xz + xy.$

$$A = 2(800) + 2(800) + 1,600.$$

$$A = 3(1600) = 1,800 \text{ cm}^2.$$

# Aplicaciones a la Economía y Negocios.

Ejercicio 4: Para suministrar una orden de 100 unidades de un producto, la empresa desea distribuir la producción entre sus dos plantas. La función de costo total es.

$$\underline{C(x,y)} = 0.1x^2 + 7x + 15y + 1000 \quad \begin{matrix} x & \text{planta 1} \\ y & \text{planta 2.} \end{matrix}$$

¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos?  $C(0,0) = 1,000$

Objetivo  $\min C(x,y)$  s.a.  $x+y=100$ .

Lagrange  $F = C + \lambda(100-x-y)$  L griego.

$$F = 0.1x^2 + 7x + 15y + 1000 + 100\lambda - \lambda x - \lambda y$$

$$F_x = 0.2x + 7 - \lambda = 0 \Rightarrow 0.2x = \lambda - 7 = 8 \Rightarrow x = 40$$

$$F_y = 15 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 15.$$

$$F_\lambda = 100 - x - y = 0. \Rightarrow y = 100 - x = 60$$

Punto crítico  $(40, 60)$   $\lambda = 15$ . 101 uds, CT aprox 15 uds.

Costo mínimo  $C(x,y) = 0.1(1600) + 280 + 900 + 1000$ .

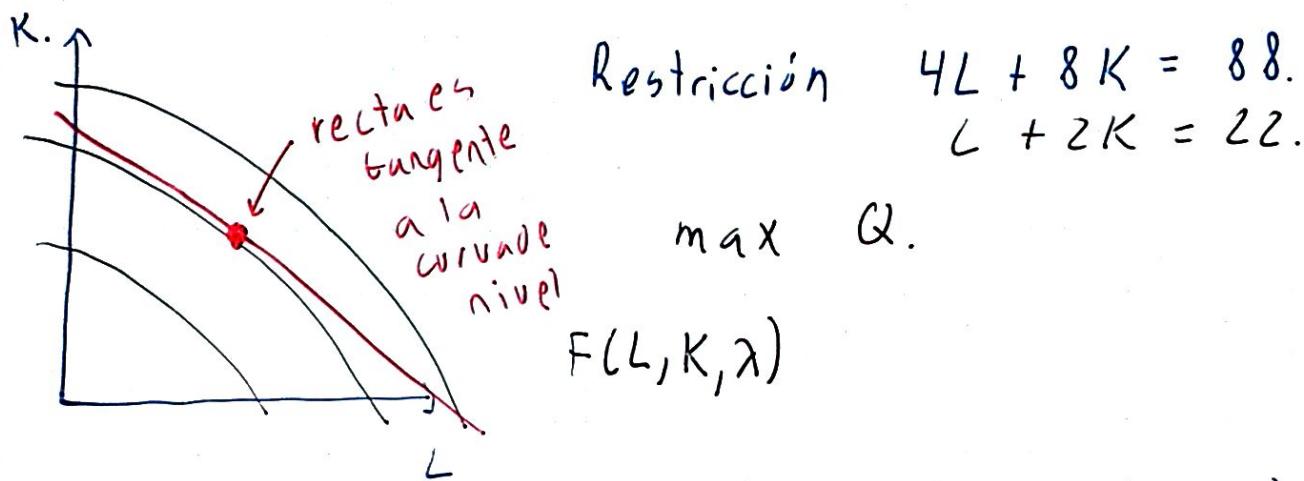
$$C(x,y) = 2,340.$$

Ejercicio 5: Una empresa tiene la función de producción

$$Q(L, K) = 12L + 20K - L^2 - 2K^2.$$

La empresa tiene un presupuesto de \$88 mil para contratar trabajadores y maquinaria. Cada trabajador y cada máquina tienen un costo de \$4 y \$8 mil, resp.

Encuentre la producción máxima.



$$F(L, K, \lambda) = 12L + 20K - L^2 - 2K^2 + \lambda(22 - L - 2K)$$

$$F_L = 12 - 2L - \lambda = 0 \Rightarrow 2L = 12 - \lambda \Rightarrow L = 6 - \lambda/2$$

$$F_K = 20 - 4K - 2\lambda = 0 \Rightarrow 4K = 20 - 2\lambda \Rightarrow K = 5 - \lambda/2.$$

$$F_\lambda = 22 - L - 2K = 0.$$

$$\begin{aligned} L + 2K &= 22 & 6 - \frac{\lambda}{2} + 10 - \lambda &= 22 \\ && -\frac{3\lambda}{2} &= 22 - 16 = 6 \end{aligned}$$

$$\lambda = -4: L = 6 + 4/2 = 8$$

$$K = 5 + 4/2 = 7$$

147

$$\begin{aligned} Q(8, 7) &= 96 + 140 - 64 - 98 \\ &= 74. \end{aligned}$$

# Capítulo 20

## Integrales dobles

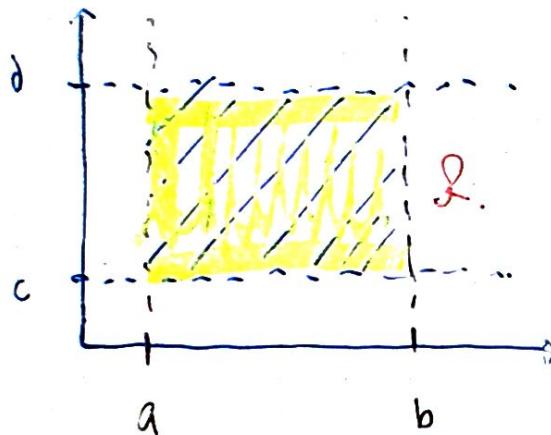
## 15.1 Integrales Dúples.

Dominio de una función  $t = f(x, y)$  es una región  $\mathcal{R}$ .

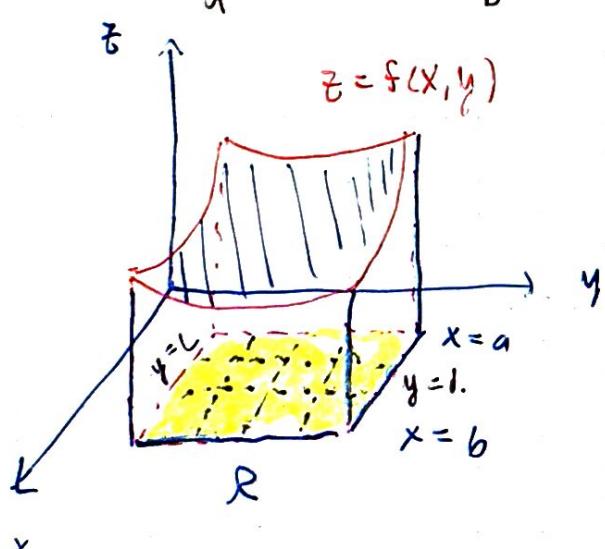
Rectángulo  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

tal que



La gráfica de una función de dos variables es una superficie.



Sólido  $S$ :

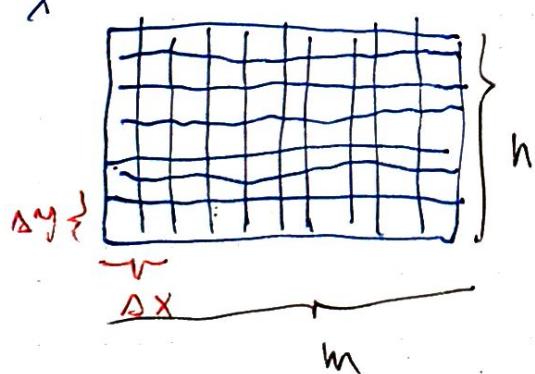
$$a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 0 \leq z \leq f(x, y)$$

¿Cómo se encuentra el volumen del sólido  $S$ ?

Divida el rectángulo  $\mathcal{R}$  en  $m n$  subrectángulos.

$$\text{Ancho. } \Delta x = \frac{b-a}{m}$$

$$\text{Largo. } \Delta y = \frac{d-c}{n}.$$



Dentro de cada subrectángulo se selecciona un punto muestra como la altura de cada "cubo" <sup>149</sup> "cubo"  $f(x_i, y_j)$

2.

Volumen Caja  $\underset{\text{cada}}{V_{i,j}} = f(x_i, x_j) \Delta x \Delta y$ .

Volumen aproximado: sume el volumen de las  $m n$  cajas.

$$V \approx \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(x_i, x_j) \Delta x \Delta y. \quad \Delta A = \Delta x \Delta y.$$

Se obtiene el volumen exacto en el límite cuando  $m, n \rightarrow \infty$ .

Integral Doble: Se  $f$  sobre el rectángulo  $R$  es.

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(x_i, x_j) \Delta x \Delta y.$$

Las integrales son las antiderivadas de  $f(x, y)$  respecto a  $x$  y respecto a  $y$ .

## 15.2 Integrales Iteradas.

Integre  $A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ . se fija  $x$  y se integra sólo respecto a  $y$ .

Ahora integre  $A(x)$  en  $a \leq x \leq b$ .

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

se fija  $y$  & se integra respecto a  $x$ :

Teorema de Fubini: Integrales Dobles como Integrales Iteradas.

Si  $f(x, y)$  es continua en un rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d]$

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Pueden integrar intercambiando los órdenes y se obtiene la misma respuesta si  $R$  es un rectángulo.

Ejercicio 1: Evalúe las sigs. integrales dobles.

$$0. \int_0^4 \int_0^b xy dx dy = \int_0^4 \left[ \frac{x^2}{2} y \right]_{x=0}^{x=b} dy.$$

$y$  "constante."

$$I_0 = \int_0^4 (18y - 0) dy = \left[ 9y^2 \right]_{y=0}^{y=4} = 9 \cdot 16 = 144.$$

Intercambia el orden de integración.

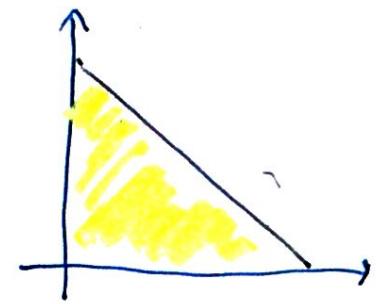
$$\int_0^b \left( \int_0^y xy dy \right) dx = \int_0^b \left( \left[ \frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=y} \right) dx = \int_0^b 8x dx.$$

afuera, el último en integrarse

$$I_0 = \left[ 4x^2 \right]_{x=0}^{x=b} = 4 \cdot 36 = 144. \quad \text{misma respuesta.}$$

$$4. I_a = \int_0^1 \int_1^2 (4x^3 - 9x^2 y^2) dy dx$$

$$I_a = \int_0^1 \left( 4x^3 y - 3x^2 y^3 \right]_{y=1}^{y=2} dx.$$



$$I_a = \int_0^1 (8x^3 - 24x^2 - 4x^3 + 3x^2) dx.$$

$$I_a = \int_0^1 (4x^3 - 21x^2) dx = \left[ x^4 - 7x^3 \right]_{x=0}^{x=1} = 1 - 7 = -6.$$

$$\iint_{C^9}^6 f(x, y) dx dy$$

No hay integrales dobles inefinidas.

$$b. I_b = \iint_R \sin(x-y) dA. \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$I_b = \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^{\pi/2} \sin(x-y) dy \right) dx \quad \begin{array}{l} \text{conjunto: rectángulo} \\ \sin(x-y) \rightarrow +\cos(x-y) \end{array}$$

$$I_b = \int_0^{\pi/2} \cos(x-y) \Big|_{y=0}^{y=\pi/2} dx \quad \begin{array}{l} \text{Antiderivada,} \\ \text{respecto a } y \end{array}$$

$$I_b = \int_0^{\pi/2} \cos(x-\pi/2) - \cos(x) dx.$$

$$I_b = \sin(x-\pi/2) + \sin(x) \Big|_{x=0}^{x=\pi/2}.$$

$$I_b = \underbrace{\sin(0)}_0 + \underbrace{\sin(-\pi/2)}_1 - (\underbrace{\sin(-\pi/2)}_{-1} + \sin 0)$$

$$I_b = 0 + 1 - 1 - 0 = 152 Q.$$

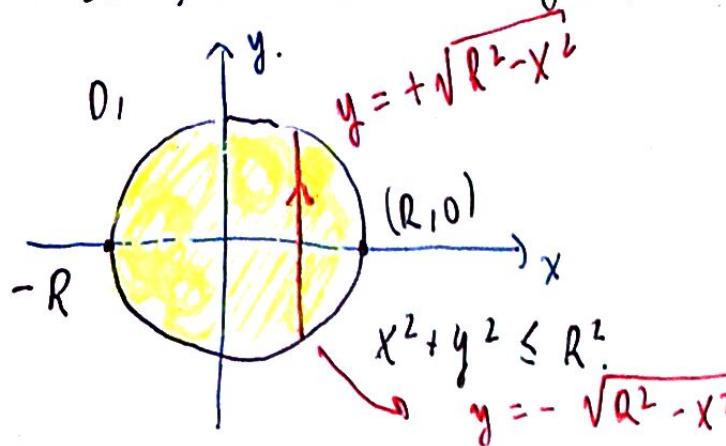
(Blnx)

# Capítulo 21

Integrales dobles con coordenadas polares

## 15.4 Integrales Dobles en Coordenadas Polares.

Varias superficies se integran en regiones que son discos, anillos o regiones con simetría radial.



$$D_1: \sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq -\sqrt{R^2 - x^2}$$

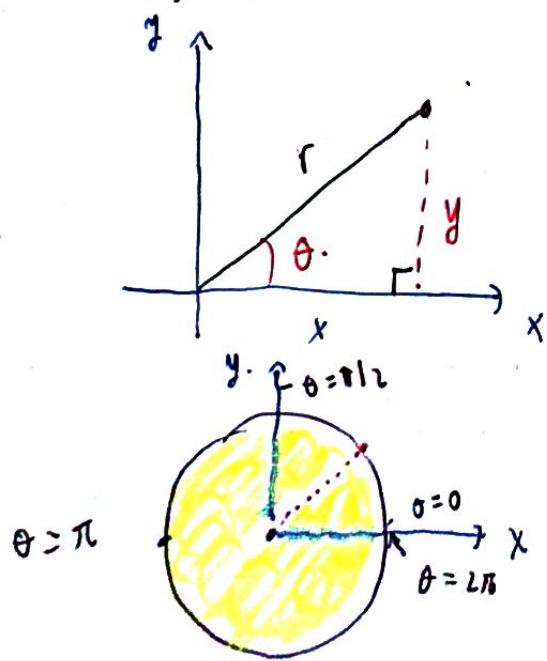
$$-R \leq x \leq R.$$

$$D_1 = \{(x, y) \text{ tal que } 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

$$\iint_{D_1} f(x, y) dA = \int_{-R}^R \left[ \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} f(x, y) dy \right] dx.$$

¿Hay alguna forma más fácil de evaluar  $\iint f dA$ ?

Si, use coordenadas polares.



$$y = r \sin \theta. \quad ; \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

$$x = r \cos \theta. \quad ; \quad \tan \theta = y/x$$

Polares - Cartesianas      Cartesianas a Polares

$$(r, \theta) \rightarrow (x, y) \quad ; \quad (x, y) \rightarrow (r, \theta).$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2$$

$$0 \leq r \leq R \quad ; \quad r = R.$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad ; \quad \text{son constantes.}$$

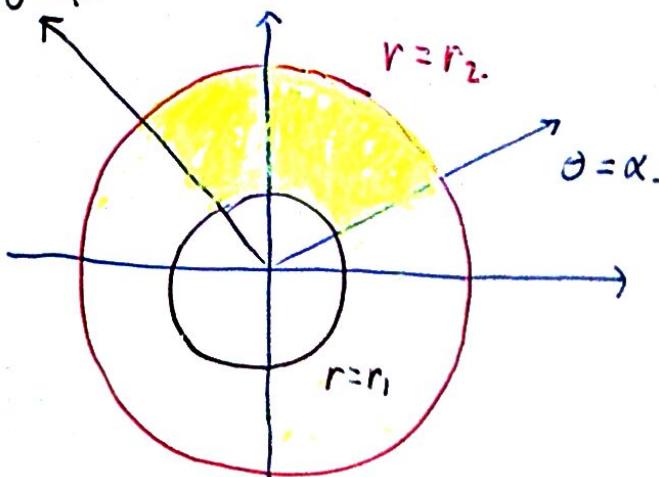
$$D_1: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R.$$

$$\iint_D f(x,y) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta.$$

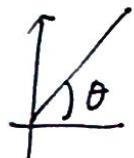
$$dA = dx dy = \underbrace{r dr d\theta}_{\text{no.}}$$

Rectángulo Polar. es la región  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ,  $r_1 \leq r \leq r_2$ .

$$\theta = \beta.$$



$$\theta = \alpha, \theta = \beta. \text{ (rayos)}$$



"Pedazo de Pizza con la punta mordida"

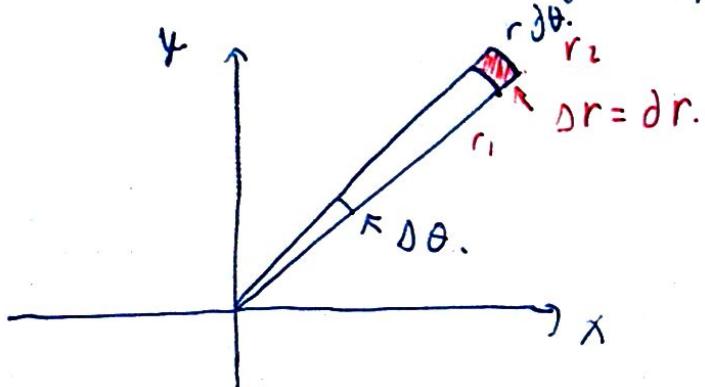
A'rea de un rectángulo polar "infinitesimal".

orilla bien delgada.

Ancho  $dr$ .

Largo  $r d\theta$ .

Pequeña A'rea  $dA = r dr d\theta$ .



Teorema: Integramos Dobles usando coordenadas polares.

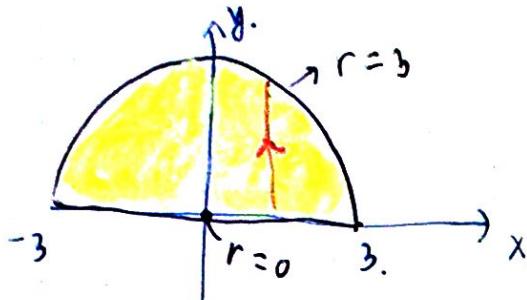
Si  $f(x,y)$  es continua en el rectángulo polar

$R : \alpha \leq \theta \leq \beta, r_1 \leq r \leq r_2$ , entonces

$$\iint_R f(x,y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr \right) d\theta.$$

Ejercicio 1: Evalúe  $\iint_R xy^2 dA$ ,  $R$

$R$  es el semidisco superior de radio 3.



Polares  
 $0 \leq r \leq 3$ .  
 $0 \leq \theta \leq \pi$

Cartesianas.  
 $0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2}$   
 $-3 \leq x \leq 3$ .

$$\iint_R xy^2 dA = \int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} xy^2 dy dx \quad \text{Cartesianas}$$

$$I_1 = \iint_R xy^2 dA = \int_0^3 \int_0^\pi r \cos \theta r^2 \sin^2 \theta \cdot r d\theta dr. \quad \text{"Polares"}$$

intercambie el orden de integración.

$$I_1 = \int_0^3 \int_0^\pi r^4 \sin^2 \theta \cos \theta d\theta dr. \quad \begin{matrix} \text{límites} \\ \text{de constantes} \end{matrix}$$

$$I_1 = \left( \int_0^3 r^4 dr \right) \left( \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{4} \frac{\cos \theta d\theta}{d\theta} \right)$$

$$I_1 = \left( \frac{1}{5} r^5 \Big|_{r=0}^{r=3} \right) \left( \frac{\sin^3 \theta}{3} \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \right)$$

$$I_1 = \frac{1}{5} 3^5 \cdot \frac{1}{3} (\sin^3 \pi - \sin^3 0) = \frac{243}{15} \cdot 0 = 0.$$

4.  
Parcial Estadística Jueves 7:00 & 10. jueves  
Microeconomía 8:30. martes

Parcial 3, Viernes 3 de abril

Parcial 2 Aplazado. → Viernes 11:30. am.  
Examen virtual.

Temas Regla de la Cadena  
Derivación Implícita.  
Derivadas Direccionales. y Gradiente.  
Optimización  
Lagrange.

Martes 31 (Corto "Largo")

Versiónes diferentes del examen

8 preguntas diferentes 4 preguntas.

$$\text{Combinaciones. } {}^8C_4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{24} = 70.$$

Se les envía por correo.

Lo resuelvan a mano, lo escanean.

y lo rego lo envían.

Tarea 10 → Tarea 12.

David realizó buena parte de la tarea.

Tarea 11 → 2 de abril.

Tarea 12 → lunes<sup>157</sup> 6 de abril.

# Capítulo 22

## Repaso de parcial

1. Derivación Implícita. (1, +1, 4) no es parte de S.

$$16^2 - 2 \cdot 2 - 12 = 0 \neq 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{+2}{2z} = +\frac{2}{8} = +\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{+2}{2z} = +\frac{2}{8} = +\frac{1}{4}$$

Ec. Plano Tangente.  $z = 4 + \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(y-1)$ .

b. Derive explícitamente  $z = \sqrt{12 + 2x + 2y}$

$$z(1, -1) = \sqrt{12}$$

$$z_x = \frac{1}{\sqrt{12 + 2x + 2y}} = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$z_y = \frac{1}{\sqrt{12 + 2x + 2y}} = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

Ec. Plano Tangente  $z = \sqrt{12} + \frac{1}{\sqrt{12}}(x-1) + \frac{1}{\sqrt{12}}(y+1)$

2.  $f(x, y) = \cos(yx) + 1 - \sec(zx) - \sin(yz) = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y \sin(yx) - z \sec(zx) \tan(zx) + 0}{x \sec(zx) \tan(zx) + y \cos(yz)} \quad -\frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x \sin(yx) - z \cos(yz)}{x \sec(zx) \tan(zx) + y \cos(yz)} \quad -\frac{F_y}{F_z}$$

$F(x, y) = \text{constante}$

$f(x, y) = G(x, y)$

Razón de cambio o Instantánea  $\frac{\partial T}{\partial t}$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}. \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_w}.$$

Cuando  $t=3$ ,  $x=e^0=1$   $y=\ln(1)+3-2=1$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{y}{1+(yx)^2}, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{(1,1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{x}{1+(yx)^2}, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{(1,1)} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 2e^{2t-6}, \quad x'(3) = 2e^0 = 2.$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left( \frac{2}{2t-5} + 1 \right), \quad y'(3) = \frac{2}{1} + 1 = 3.$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(3) = \frac{5}{2}$$

q. Derivada Direccional  $D_u T = \nabla T \cdot \vec{u} = \frac{\nabla T \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$

$$\nabla T = \langle \sin(\pi y z), x \pi z \cos(\pi y z), \pi x y \cos(\pi y z) \rangle.$$

$$\nabla T(1,1,2) = \langle \sin(2\pi), 2\pi \cos(2\pi), \pi \cos(2\pi) \rangle.$$

$$\nabla T(1,1,2) = \langle 0, 2\pi, \pi \rangle. \quad \text{vector unitario.}$$

$$\vec{u} = \frac{\langle 1, 4, 8 \rangle}{\sqrt{1+16+64}} = \frac{1}{9} \langle 1, 4, 8 \rangle. \quad |u| = 9.$$

$$D_u T = \frac{1}{9} \langle 0, 2\pi, \pi \rangle \cdot \langle 1, 4, 8 \rangle. = \frac{8\pi + 8\pi}{9} = \frac{16\pi}{9}.$$

6. Presupuesto = 20,000       $x$  periódicos y televisión  
 gasto  
 $x + y = 20,000$       gasto.

Ventas  $S = 80x^{1/4}y^{3/4}$  margen de utilidad 10%

$$J = 0.10S - 20,000 = 8x^{1/4}y^{3/4} - 20,000$$

$$J = 80x^{1/4}y^{3/4} - 72x^{1/4}y^{3/4} - 20,000 \quad \text{número es de } 72.$$

$$\text{Max } U = 8x^{1/4}y^{3/4} - 20,000, \quad x + y = 20,000$$

$$\text{Lagrange } F(x, y, \lambda) = 8x^{1/4}y^{3/4} - 20,000 + \lambda(20,000 - x - y)$$

$$f_x = 2x^{-3/4}y^{3/4} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2y^{3/4}x^{-3/4}$$

$$f_y = 6x^{1/4}y^{-1/4} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 6x^{1/4}y^{-1/4}$$

$$f_\lambda = 20,000 - x - y = 0.$$

$$\text{Lagrange } f(x, y, \lambda) + \lambda [C - g(x, y, \lambda)]$$

$$\text{Igualando } \lambda's: \quad \frac{2y^{3/4}}{x^{3/4}} = \frac{6x^{1/4}}{y^{1/4}} \Rightarrow 2y = 6x$$

sustituya  $y = 3x$  en  $f_\lambda$ .      Minimizando la pérdida.

$$20,000 - x - 3x = 0 \quad 4x = 20,000 \Rightarrow x = 5,000.$$

No realice la prueba de la 1<sup>ra</sup> Derivada,  $y = 15,000$   
 $\lambda \approx 4.56$ .

$$\text{Utilidad } U(5,000, 15,000) = 1618 \cdot 5000^{1/4} 15,000^{3/4} - 20,000. \\ 9,118.02 - 20,000.$$

$$U = 8x^{1/4}y^{3/4} - 20000 \quad x+y = 20,000$$

Sustituyendo  $y = 20,000 - x$  en  $U(x)$ .

$$U(x) = 8x^{1/4}(20,000-x)^{3/4} - 20 \text{ mil}$$

$$U'(x) = 2x^{-3/4}(20,000-x)^{3/4} - 6x^{1/4}(20,000-x)^{-1/4} = 0$$

$$\frac{2}{x^{3/4}}(20,000-x)^{3/4} = \frac{6x^{1/4}}{(20,000-x)^{1/4}}$$

$$(20,000-x) = 3x$$

$$20,000 = 4x \Rightarrow x = 5,000$$

$$y = 15,000.$$

Método 3: Microeconomía.

$$P = x^\alpha y^\beta \quad x+y = 20 \text{ mil}$$

$$\alpha + \beta = 1.$$

$$\text{Producción óptima} \quad x = \alpha \cdot 20 \text{ mil} \quad \alpha = 1/4$$

$$y = \beta \cdot 20 \text{ mil} \quad \beta = 3/4.$$

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\alpha y}{\beta x} \quad | \text{ Precavición.}$$

Costo:  $C = 2x + 4y$ . Custo promedio  $\frac{C}{x} = 2$ .

Ingresos:  $I = p_A x + p_B y$ .

Utilidad  $U = p_A x + p_B y - 2x - 4y$ .

$$U(p_A, p_B) = p_A(16 - p_A + p_B) + p_B(24 - 2p_A - 4p_B)$$

$$= 2(16 - p_A + p_B) - 4(24 - 2p_A - 4p_B)$$

$$U(p_A, p_B) = 26p_A - p_A^2 - p_A p_B - 4p_B^2 + 38p_B - 128.$$

$$U_{p_A} = 26 - 2p_A - p_B = 0 \quad 2p_A + p_B = 26$$

$$U_{p_B} = -p_A - 8p_B + 38 = 0 \quad p_A + 8p_B = 38.$$

$$p_B = 26 - 2p_A \Rightarrow p_A + 26 - 16p_A = 38.$$

$$p_A = 11.\overline{33} \quad 26 - 8 - 38 = 15p_A. \quad p_A = \frac{170}{15}$$

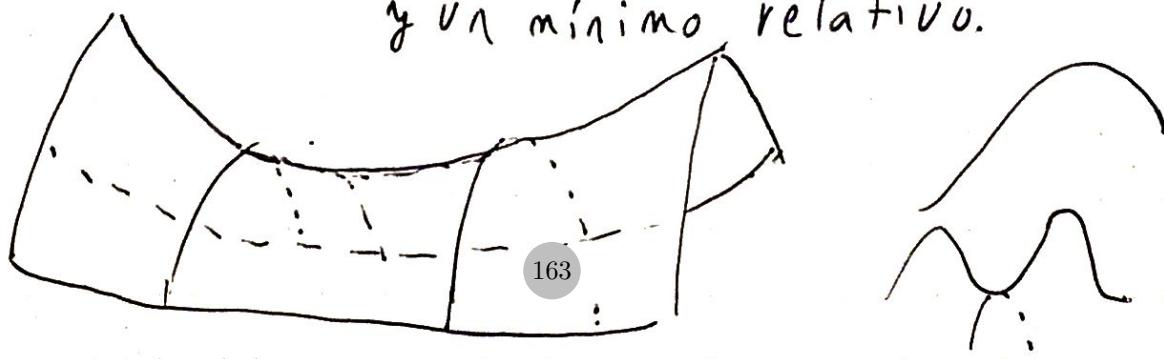
$$p_B = 26 - 2(11.\overline{33}) = \frac{16}{3} = 3.\overline{33}$$

Prueba 2da

$$\text{Derivada: } D(x, y) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15 > 0.$$

$U_{p_A p_A} < 0$  hay un máximo relativo.

Punto de Silla transición entre un máximo relativo  
y un mínimo relativo.



$$U = 8x^{1/4}y^{3/4} - 20000 \quad x+y = 20,000$$

sustituya  $y = 20,000 - x$  en  $U(x)$ .

$$U(x) = 8x^{1/4}(20,000-x)^{3/4} - 20\text{ mil}$$

$$U'(x) = 2x^{-3/4}(20,000-x)^{3/4} - 6x^{1/4}(20,000-x)^{-1/4} = 0$$

$$\frac{2}{x^{3/4}}(20,000-x)^{3/4} = \frac{6x^{1/4}}{(20,000-x)^{1/4}}$$

$$(20,000-x) = 3x$$

$$20,000 = 4x \Rightarrow x = 5,000$$

$$y = 15,000$$

Método 3: Microeconomía.

$$P = x^\alpha y^\beta \quad x+y = 20\text{ mil}$$

$$\alpha + \beta = 1.$$

$$\text{Producción óptima} \quad x = \alpha \cdot 20\text{ mil} \quad \alpha = 1/4$$

$$y = \beta \cdot 20\text{ mil} \quad \beta = 3/4.$$

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\alpha y}{\beta x} \quad | \text{ Precavación.}$$

$$3) \quad V = R I. \quad R = f(t) \quad I = g(t).$$

$$\frac{dV}{dt} = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial t}}_{I} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial t}}_R$$

V  
R  
I  
↓  
t.

$$R = 400, \quad I = 0.08 \quad \frac{dV}{dt} = -0.01 \quad \frac{dR}{dt} = -0.03$$

$$-0.01 = 0.08(-0.03) + 400 \frac{dI}{dt}$$

$$400 \frac{dI}{dt} = -0.01 + 0.0024 = -7.6 \times 10^{-3}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{-7.6 \times 10^{-3}}{4 \times 10^2} = -1.9 \times 10^{-5} \text{ A/s}$$

-19 mA/s

$$3) \quad T(x, y) \quad x = \sqrt{1+t}, \quad y = 2 + \frac{t}{3}$$

$$T_x(2, 3) = 4, \quad T_y(2, 3) = 3, \quad t = 3$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}}_4 + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}}_3. \quad \begin{aligned} x(3) &= 2 \\ y(3) &= 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

$$x'(t) = \frac{1}{2}(1+t)^{-1/2} \quad x'(3) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{4}$$

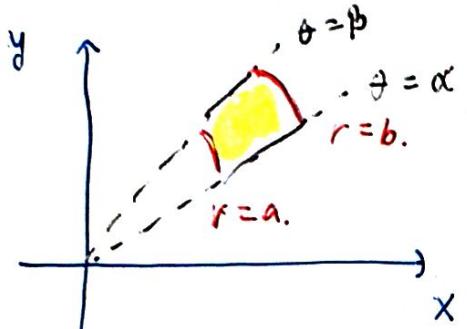
$$y'(t) = \frac{1}{3} \quad y'(3) = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 4\left(\frac{1}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + 1 = 2.$$

# Capítulo 23

Integrales dobles en coordenadas polares

## 15.4 Integrales Dobles en Coordenadas Polares.



$$R: \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad a \leq r \leq b.$$

Rectángulo Polar  $R$ .

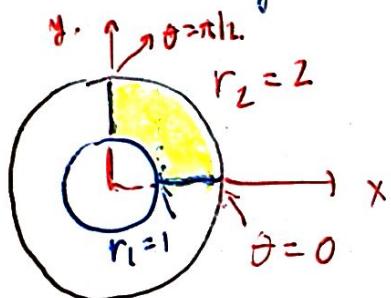
$$dA = r dr d\theta. \quad dA = dx dy$$

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

□

Ejercicio 1: Evalúe  $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dA$ .

$R$  es el cuarto de anillo en el 1er cuadrante con radio interno 1 y radio externo 2.



$$R: 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

Simplifique

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} \\ = r \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = r.$$

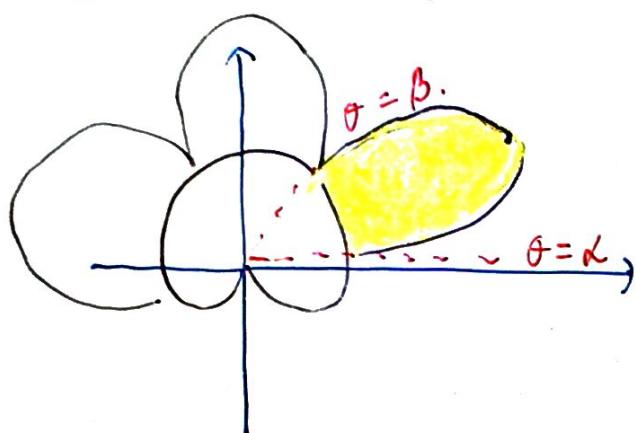
$$I_1 = \iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dA. = \int_0^{\pi/2} \left( \int_1^2 r^2 dr \right) d\theta$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{r^3}{3} \Big|_{r=1}^{r=2} d\theta. = \int_0^{\pi/2} \frac{7}{3} d\theta. = \frac{7}{3} \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{7\pi}{6}.$$

## Región Polar.

$$\mathcal{R}: \alpha \leq \theta \leq \beta.$$

$$r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$$



$$r_1 = 2 + \sin\theta, r_2 = \sin 2\theta.$$

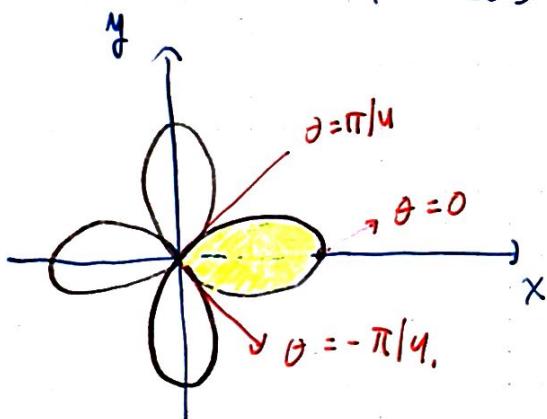
$$\iint_R f dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$\text{Área región Polar: } A = \iint dA.$$

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r dr d\theta. = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \Big|_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} d\theta.$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)] d\theta \quad \text{número fórmula sección 10.4.}$$

Ejercicio 2: Encuentre el área de un pétalo de la rosa  
 $r = \cos 2\theta$ .



$$A = \iint_R dA. \quad 0 \leq r \leq \cos 2\theta. \checkmark$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}. \checkmark$$

$$\cos 2\theta = 0. \quad 2\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}.$$

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r dr d\theta. = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{\cos 2\theta} d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos^2(2\theta)}{2} d\theta.$$

Difícil intercambiar el orden.

$\cos \theta$  y  $\cos^2 \theta$  son funciones pares  $\int \sin = -\cos x$   
 $A = \int_0^{\pi/4} \cos^2(2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta) d\theta$ .  $\int \cos x = \sin x$

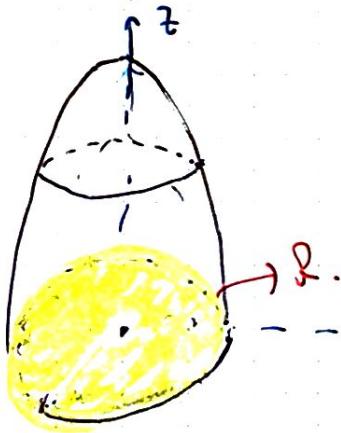
$$\cos^2 2\theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 4\theta) \quad ; \quad \sin^2 2\theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 4\theta)$$

$$A = \frac{1}{2} \left( \theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \cancel{\sin \pi} - \cancel{0} - \cancel{\sin 0} \right)$$

$$A = \pi/8.$$

Ejercicio 3: Encuentre el volumen del sólido entre el paraboloide  $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$  y el plano  $xy$ .

Volumen:  $V = \iint_R f(x, y) dA$ .  $f(x, y) > 0$  en  $R$



Encuentre las ecs. que describen  $R$  es la proyección de  $z$  sobre el plano  $xy$ .

$$z \geq 0. \quad 18 - 2x^2 - 2y^2 \geq 0$$

$$18 \geq 2x^2 + 2y^2$$

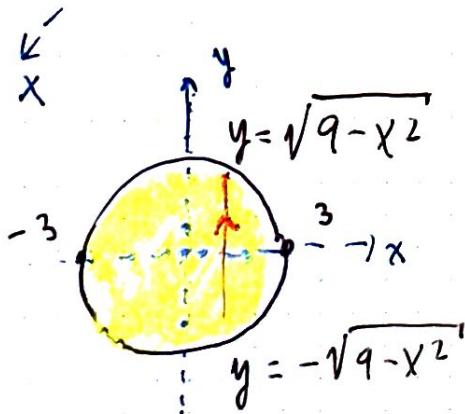
$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 9.$$

región de proyección  
círculo de radio 3.

$$R: -3 \leq x \leq 3 \quad -\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2}$$

Cartesianas.  $R$ .

Polares:  $0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ .



$$\text{Volumen } V = \iiint_Q (18 - 2x^2 - 2y^2) dA.$$

Se recomienda usar polares  $dA = r dr d\theta$ .

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 18 - 2r^2 \cos^2\theta - 2r^2 \sin^2\theta \\ = 18 - 2r^2.$$

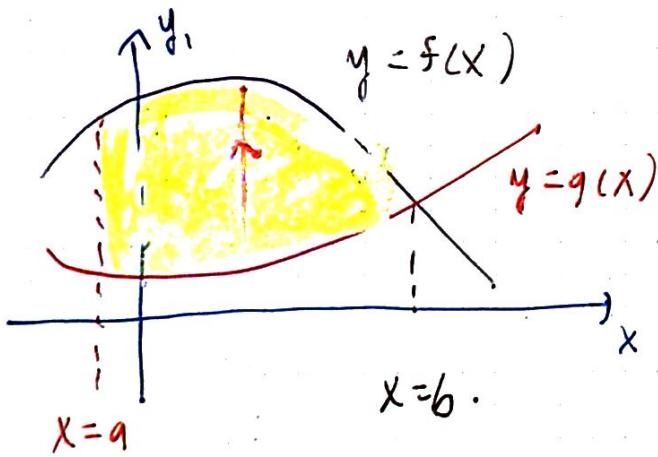
$$V = \iint_Q f dA. = \int_0^3 \int_0^{2\pi} (18 - 2r^2)r d\theta dr = \int_0^3 \int_0^{2\pi} (18 - 2r^2)r dr d\theta.$$

$$V = \int_0^3 (18r - 2r^3) \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = \pi \int_0^3 (36r - 4r^3) dr.$$

$$V = \pi \left( 18r^2 - r^4 \Big|_{r=0}^r \right) = \pi \left( \frac{18 \cdot 9 - 81}{162} \right) = 81\pi.$$

$$V = \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^3 18r - 2r^3 dr \right) = 2\pi \left( \frac{9}{2}r^2 - \frac{r^4}{2} \Big|_0^3 \right)$$

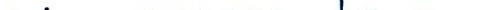
## Integrales Dobles en Coordenadas Generales.



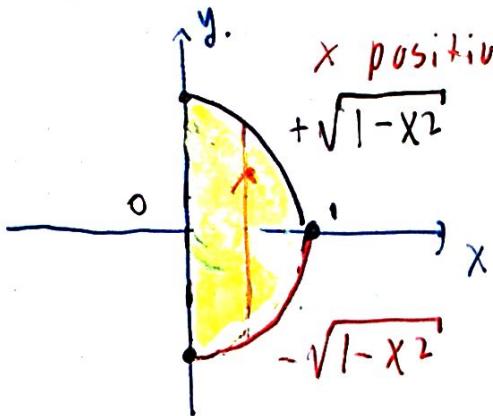
$$a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq f(x)$$

$$\iint_Q z dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} z(x, y) dy dx$$

Región Tipo I.

Ejercicio 4: Considere la región encerrada por  $x=0$  &  $x=\sqrt{1-y^2}$  → 

a. Bosqueje la región y describala como una tipo I, tipo II y como un rectángulo polar.

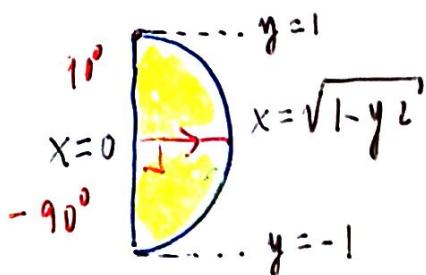


$$x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Tipo 1:  $f(x) \leq y \leq g(x)$

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$



Tip 11:  $f(y) \leq x \leq g(y)$ .

$$-1 \leq y \leq 1 \quad 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$$

Polares :  $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

b. Evaluate  $\iint_D (3x - 6y) dA$ .  $dA = r dr d\theta$ .

$$I_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 (3r^2 \cos \theta - 6r^2 \sin \theta) dr d\theta.$$

$$I_4 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [r^3 \cos\theta - 2r^3 \sin\theta] \Big|_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta - 2\sin\theta) d\theta.$$

$$I_q = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta - 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta d\theta.$$

$\text{par.}$        $\text{impar}$

$$I_y = 2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta J(\theta) = 2 \sin \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} =$$

El problema es más complicado de trabajar en cartesianas.

$$I_4 = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (3x - 6y) dx dy = \int_{-1}^1 \left[ \frac{3}{2}x^2 - 6yx \right]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy.$$

$$I_4 = \int_{-1}^1 \frac{3}{2} (1-y^2) - 6y \sqrt{1-y^2} \, dy. \quad 0.$$

$$I_4 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (1-y^2) dy - 6 \int_{-1}^1 y \sqrt{1-y^2} dy.$$

~~PAR~~ ~~impar~~ ~~par.~~

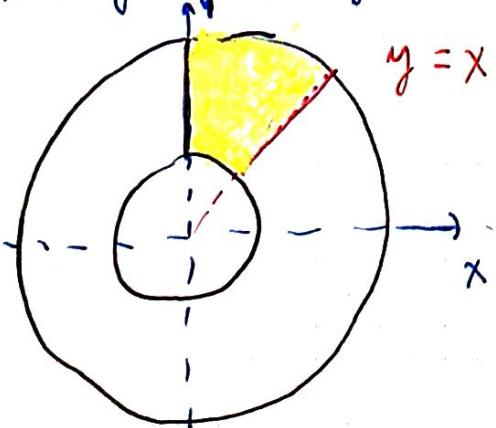
$$I_4 = 3 \int_0^1 (1 - y^2) dy = 3 \left[ y - \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1} = 3 - 1 = 2.$$

resposta

Ejercicio 5: Evalúe  $\iint_R 4 \sin(x^2+y^2) dA$ .

R es la región entre las circunferencias  $x^2 + y^2 = 1$  y

$$x^2 + y^2 = 9 \quad y \text{ las rectas } x=0 \text{ & } y=x.$$



$$1 \leq r \leq 3, \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$r \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(0) = \pi/2$$

$$r \sin \theta = r \cos \theta.$$

$$172 \quad \tan \theta = 1 \Rightarrow \theta = \pi/4.$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad dA = r dr d\theta.$$

$$\iint_Q 4 \sin(x^2 + y^2) dA = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_1^3 4 \sin(r^2) r dr d\theta.$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

$$2 \left[ \int_1^3 \sin(r^2) \left( \underbrace{2r dr}_{du} \right) = -2 \cos(r^2) \right]_1^3 = -2 \cos 9 + 2 \cos 1$$

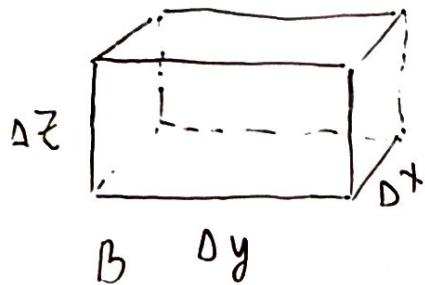
$$\iint_Q 4 \sin(x^2 + y^2) dA = \frac{\pi}{4} (2 \cos 1 - 2 \cos 9)$$

# Capítulo 24

## Integrales triples

## 15.7 Integrales Triples.

Caja rectangular  $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ .



$$V = \Delta x \times \Delta y \times \Delta z \quad \text{volumen caja}$$

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z) dz dy dx$$

Intercambian el orden, 6 permutaciones posibles

$$\begin{array}{l} dx dy dz \quad dx dz dy \quad dy dx dz \quad dy dz dx \\ dz dx dy \quad dz dy dx. \end{array}$$

Ejercicio 1: Evalúe  $\iiint_B (xy + 3z^2) dV$  sólido

$$B = [0, 2] \times [0, 1] \times [0, 3]$$

$$I_1 = \int_0^2 \int_0^1 \int_0^3 (xy + 3z^2) dx dz dy.$$

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^3 \left[ \frac{x^2 y}{2} + 3z^2 x \right]_{x=0}^2 dz dy = \int_0^1 \int_0^3 (2y + 6z^2) dz dy.$$

$$I_3 = \int_0^1 [2yz + 2z^3]_{z=0}^{z=3} dy = \int_0^1 (6y + 54) dy.$$

$$I_4 = [3y^2 + 54y]_{y=0}^{y=1} = 3 + 54 = 57.$$

$$b. \iiint e^{x+y+z} dV \quad D = [0, \ln 2] \times [0, \ln 3] \times [0, \ln 4].$$

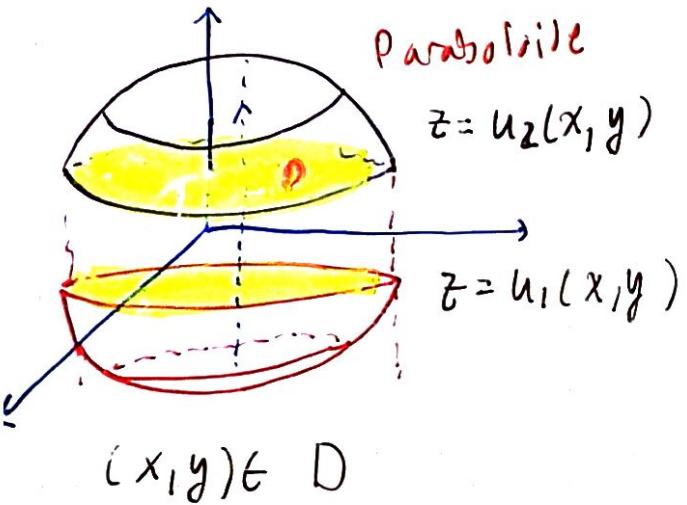
$$I_b = \int_0^{\ln 2} \int_0^{\ln 3} \int_0^{\ln 4} e^{x+y+z} dz dy dx. \quad \text{son } e^{x+y+z}.$$

$$I_b = \int_0^{\ln 2} \int_0^{\ln 3} e^{x+y} \left[ e^z \right]_{z=0}^{z=\ln 4} dy dx \quad e^{\ln 4} - e^0 = 4 - 1 = 3.$$

$$I_b = 3 \int_0^{\ln 2} e^{x+y} \left[ e^y \right]_{y=0}^{y=\ln 3} dx \quad e^{x+\ln 3} - e^x = 3e^x - e^x = 2e^x$$

$$I_b = 3 \cdot 2 \int_0^{\ln 2} e^x dx = 3 \cdot 2 \left[ e^x \right]_{x=0}^{x=\ln 2} = 3 \cdot 2 (2 - 1) = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Integrales triples sobre un sólido general.



$$u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)$$

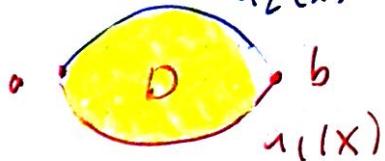
\$D\$ es la región de proyección del sólido \$E\$ sobre el plano \$xy\$.

$$\iiint_E f dV = \iint_D \left( \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dA.$$

\$D\$ como una región tipo I, tipo II o en polares.

$$a \leq x \leq b.$$

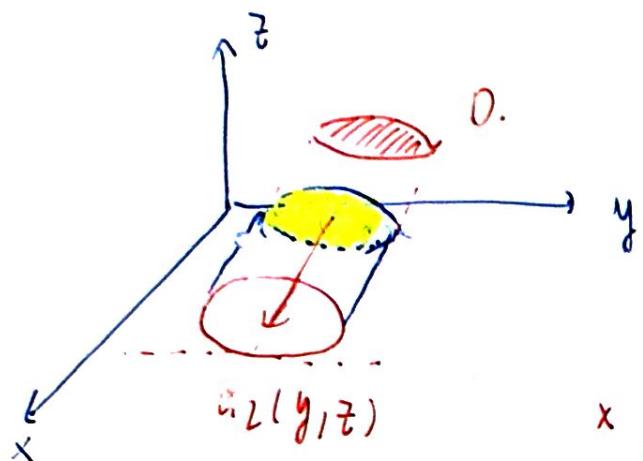
$$a_1(x) \leq y \leq a_2(x)$$



$$\iiint_E f dV = \int_a^b \int_{a_1(x)}^{a_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Sólido tipo I, con región \$D\$ tipo I.

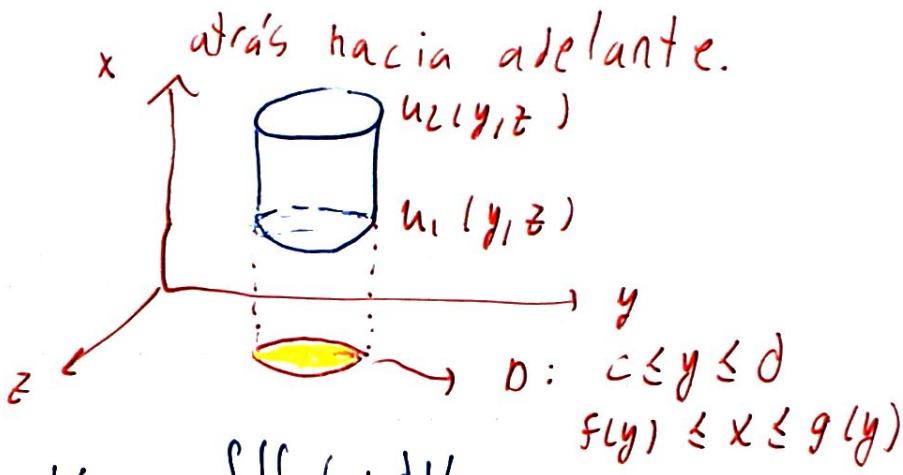
Sólido tipo II  $u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)$ .



$$(y, z) \in D$$

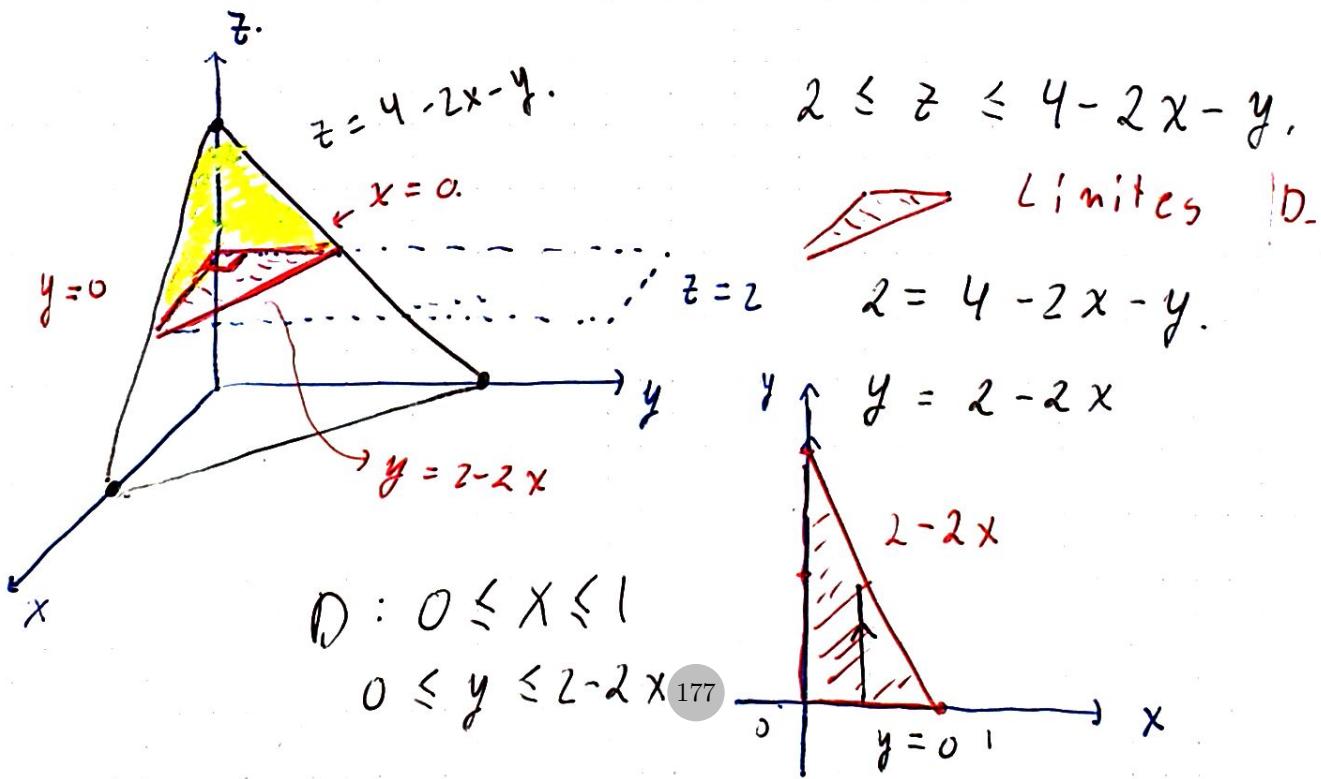
$$\iiint_E f dV = \iint_D \left( \int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f dx \right) dA.$$

$$\text{Área} = \iint_D dA$$



Ejercicio 2: Evalúe  $\iiint_E 6x \, dV$ .

$E$  se encuentra debajo del plano  $z = 4 - 2x - y$ , encima del plano  $z = 2$  y entre  $x = 0, y = 0$ . 1er octante.



Sólido E:  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2-2x$ ,  $2 \leq z \leq 4-2x-y$ . 4.

$$I_2 = \iiint_E 6x \, dV = \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_2^{4-2x-y} 6x \, dz \, dy \, dx.$$

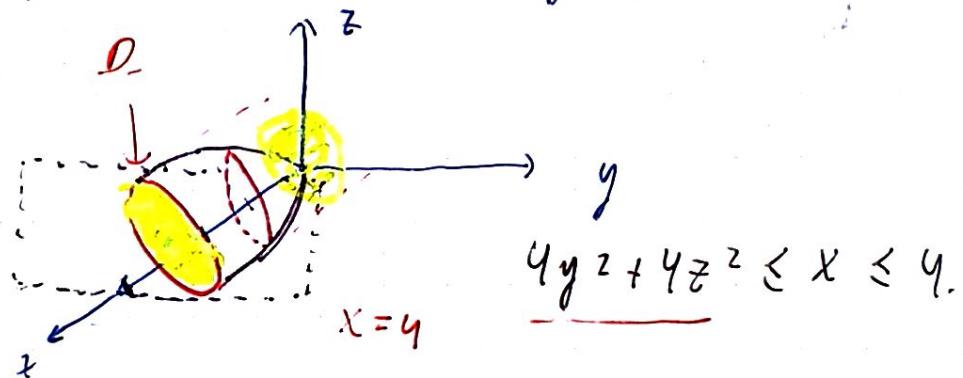
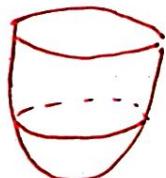
$$6x \int_2^{4-2x-y} dz = (2-2x-y)6x = 12x - 12x^2 - 6xy.$$

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (12x - 12x^2 - 6xy) \, dy \, dx$$

$$I_2 = \int_0^1 (12x - 12x^2)(2-2x) - 3x(2-2x)^2 \, dx$$

Ejercicio 3: Evalúe  $\iiint_E x \, dV$

E está entre el paraboloide  $x = 4y^2 + 4z^2$  &  $x = 4$ .



D es la "intersección" entre  $4y^2 + 4z^2 \leq x \leq 4$ .

$4y^2 + 4z^2 \leq 4$ : D:  $y^2 + z^2 \leq 1$  disco radial

$$I_3 = \iiint_E x \, dV = \iiint_D \left( \int_{4y^2+4z^2}^4 x \, dx \right) \, dA$$

$$4y^2 + 4z^2 \leq x \leq 4$$

$$D: 0 \leq y^2 + z^2 \leq 1$$



$$I_3 = \iint_D \frac{x^2}{2} \Big|_{x=4y^2+4z^2}^{x=4} dA. \quad (4y^2 + 4z^2)^2 = 16(y^2 + z^2)^2$$

$$I_3 = \iint_D 8 - 8(y^2 + z^2)^2 dA.$$

Como D es un disco use coordenadas polares

$$dA = r dr d\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$\text{use } y^2 + z^2 = r^2, \quad y = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta.$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (8 - 8r^4) r dr d\theta.$$

$$I_3 = \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^1 (8r - 8r^5) dr$$

$$I_3 = 2\pi \left( 4r^2 - \frac{8}{6} r^6 \Big|_{r=0}^{r=1} \right) = 2\pi \left( 4 - \frac{8}{6} \right) = \frac{16\pi}{3}$$

Aplicaciones:  $\iiint f dV \rightarrow m^4$

$dV$  volumen de una caja infinitesimal

$$\text{Volumen: } V = \iiint_E dV. \quad \text{Área } A = \iint_D dA$$

$$\text{Densidad volúmetrica } \rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V.$$

Si la densidad no es constante  $\rho(x, y, z)$

$$\text{dm} = \rho(x, y, z) dV. \quad \text{masa: } m_{179} = \iiint_E \rho(x, y, z) dV$$



Ejercicio 4: Considere el sólido  $E: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^3, 0 \leq z \leq y$

a. Encuentre la masa del objeto si la densidad  $\rho = xy^2$ .

$$m = \iiint_E xy^2 dV = \int_0^2 \int_0^{x^3} \int_0^y xy^2 dz dy dx.$$

$$xy^2 z \Big|_{z=0}^y = xy^2 \cdot y = xy^3.$$

$$m = \int_0^2 \int_0^{x^3} xy^3 dy dx, \quad \frac{xy^4}{4} \Big|_{y=0}^{y=x^3} = \frac{x \cdot x^{12}}{4} = \frac{x^{13}}{4}.$$

$$m = \int_0^2 \frac{x^{13}}{4} dx = \frac{x^{14}}{4 \cdot 14} \Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{2^{14}}{8 \cdot 7} = \frac{2^{12}}{7}.$$

b. Encuentre el volumen del objeto  $V = \iiint_E dV = \iint_D f(x, y) dA$ .

$$V = \iiint_E dV = \int_0^2 \int_0^{x^3} \int_0^y dz dy dx = \int_0^2 \int_0^{x^3} y dy dx$$

$$V = \int_0^2 \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=0}^{y=x^3} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^6 dx = \frac{1}{2 \cdot 7} x^7 \Big|_{x=0}^{x=2}.$$

$$V = \frac{2^7}{2 \cdot 7} = \frac{2^6}{7} = \frac{64}{7}.$$

7.

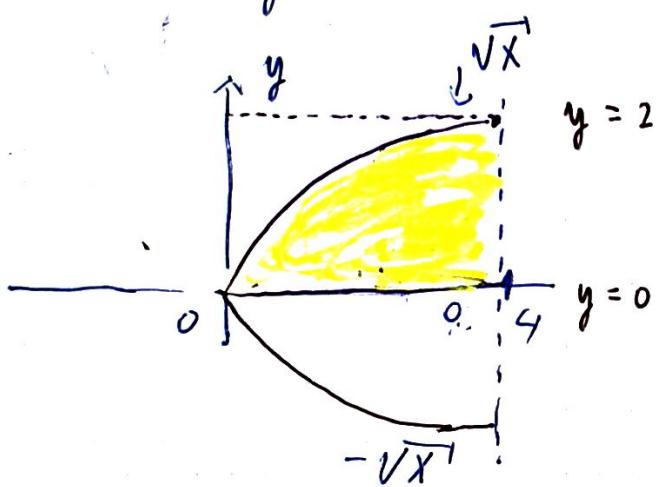
2a)  $\int_0^1 \int_0^{\pi/2} y \cos(xy) dy dx$  cuite IPP.

2b)  $\int_0^2 \int_{y^2}^4 y^2 \sqrt{x} \sin x dx dy = \text{numero.}$

2a)  $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 y \cos(xy) dx dy = \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{y}{x} \sin(xy) \right]_{x=0}^{x=1} dy.$

$I_{2a} = \int_0^{\pi/2} \sin y dy = \left[ -\cos y \right]_{\pi/2}^0 = 1$   $x = y^2$ .

2b)  $\int_0^2 \int_{y^2}^4 y^2 x^{1/2} \sin x dx dy.$   $y^2 \leq x \leq 4$   
 $0 \leq y \leq 2.$



$$0 \leq y \leq \sqrt{x}$$

$$0 \leq x \leq 4$$

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y^2 x^{1/2} \sin x dy dx.$$

$$\int_0^4 \frac{1}{3} x^{3/2} x^{1/2} \sin x dx$$

# Capítulo 25

## Integrales dobles en polares

$$39 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\cos\theta} \sqrt{x^2+y^2} dy dx.$$

$dA = dy dx$   
 $dA = r dr d\theta$

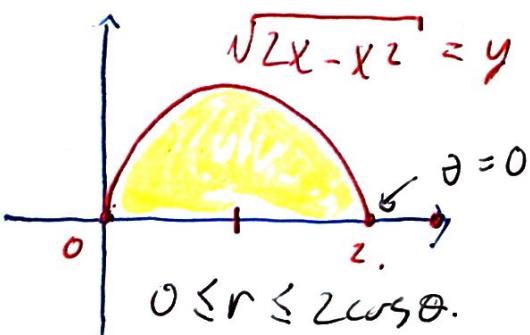
Reescriba en términos de  $r$  e  $\theta$ .

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2} = r.$$

$$\sqrt{2x-x^2} = \sqrt{2r\cos\theta - r^2\cos^2\theta}$$

$$0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}$$

$$y^2 = 2x - x^2 \quad \text{ó} \quad y^2 + x^2 - 2x + 1 = 1$$



$$y^2 + (x-1)^2 = 1$$

$$2x - x^2 = 0 \\ x(2-x) = 0 \\ x=0 \quad \& \quad x=2.$$

$$r^2 \sin^2\theta = 2r\cos\theta - r^2\cos^2\theta.$$

$$r^2 = 2r\cos\theta.$$

$$r = 2\cos\theta.$$

$$r = 2\cos\theta$$

$$r(0) = 2. \quad r(\frac{\pi}{2}) = 0. \\ r(\pi) = -2.$$

$$0 \leq \theta \leq \pi/2 \quad 0 \leq r \leq 2\cos\theta \quad \sqrt{x^2+y^2} = r$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr d\theta. = \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^{2\cos\theta} d\theta.$$

$$(-\sin^2\theta)\cos\theta. = \frac{8}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta d\theta.$$

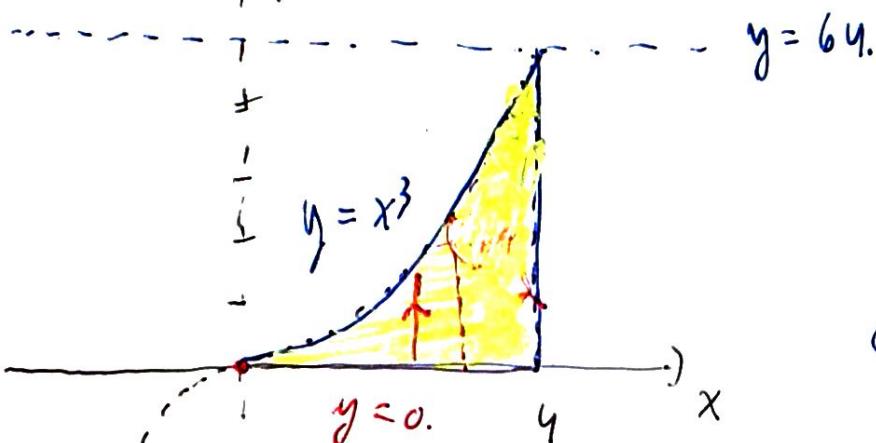
$$S_a \int_0^1 \int_{3y}^3 5e^{x^2} dx dy = \iint_D 5e^{x^2} dA.$$

$$S_b \int_0^{64} \int_{3\sqrt[3]{y}}^4 6e^{x^4} dx dy.$$

$$0 \leq y \leq 64$$

$\uparrow y.$

$$y^{1/3} \leq x \leq 4.$$



$$x = 4$$

$$x = y^{1/3}$$

$$y = x^3$$

$$0 \leq y \leq x^3$$

$$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$0 \leq x \leq 4$$

D  $0 \leq y \leq 64$        $y^{1/3} \leq x \leq 4$  } representan a la  
 D  $0 \leq x \leq 4$        $0 \leq y \leq x^3$  } misma región.

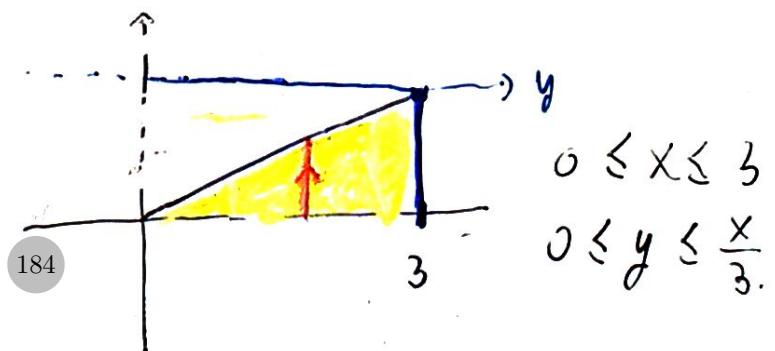
$$\iint_D 6e^{x^4} dA = \int_0^4 \int_0^{x^3} 64e^{x^4} dy dx.$$

$0 \leq x \leq 3y.$

$$0 \leq y \leq 1$$

$$3y \leq x \leq 3.$$

Grafique  $0 = y$        $x = 3$ .  
 $1 = y$        $y = x/3.$



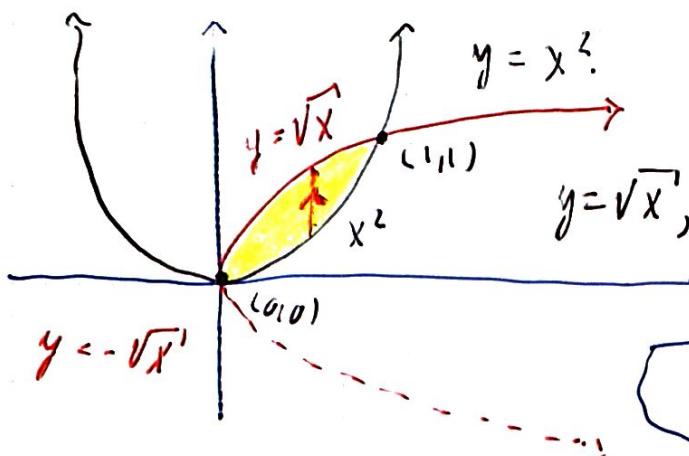
4a) debajo de la superficie  $z = 7x + 2y$ .

y arriba de  $y = x^2$  en la región D.

$$V = \iiint_E dV$$

$$V = \iint_D z dA = \iint_D (7x + 2y) dA.$$

$E: (x, y) \in D \quad 0 \leq z \leq 7x + 2y$ .



sólido debajo

de  $f(x, y)$  y

encima de  $g(x, y)$ .

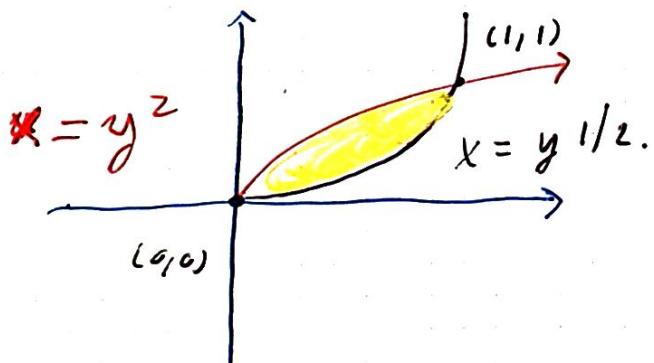
$$\boxed{0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}}$$

$$x^2 = x^{1/2}.$$

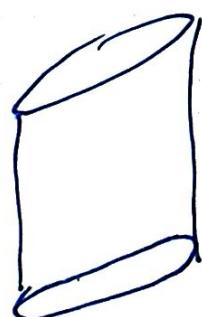
$$x^2 - x^{1/2} = 0.$$

$$x^{1/2}(x^{3/2} - 1) = 0 \Rightarrow x^{3/2} = 1$$

$$x = 1^{2/3} = 1$$



$$\boxed{0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq \sqrt{y}}$$



$$V = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} 7x + 2y \, dx \, dy,$$

$$V = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 7x + 2y \, dy \, dx.$$

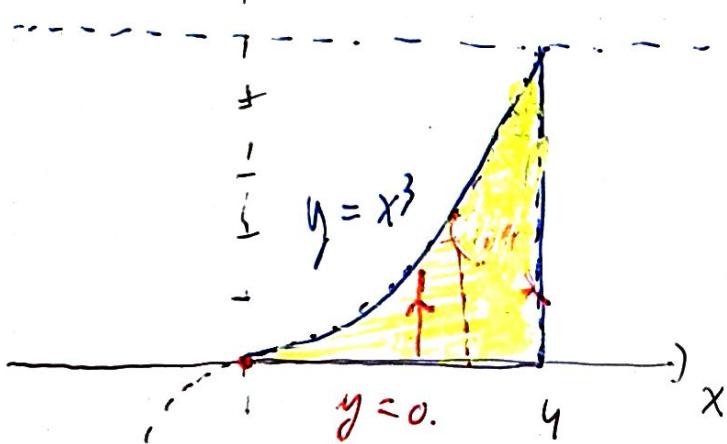
$$S_a \int_0^1 \int_{3y}^3 5e^{x^2} dx dy = \iint_D 5e^{x^2} dA.$$

$$S_b \int_0^{64} \int_{3\sqrt[3]{y}}^4 6e^{x^4} dx dy.$$

$$0 \leq y \leq 64$$

$\uparrow y$ .

$$y^{1/3} \leq x \leq 4.$$



$$y = 64.$$

$$x = 4$$

$$x = y^{1/3}$$

$$y = x^3$$

$$0 \leq y \leq x^3$$

$$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$0 \leq x \leq 4.$$

D  $0 \leq y \leq 64$        $y^{1/3} \leq x \leq 4$  } representan a la  
 o  $0 \leq x \leq 4$        $0 \leq y \leq x^3$  } misma región.

$$\iint_D 6e^{x^4} dA = \int_0^4 \int_0^{x^3} 64e^{x^4} dy dx.$$

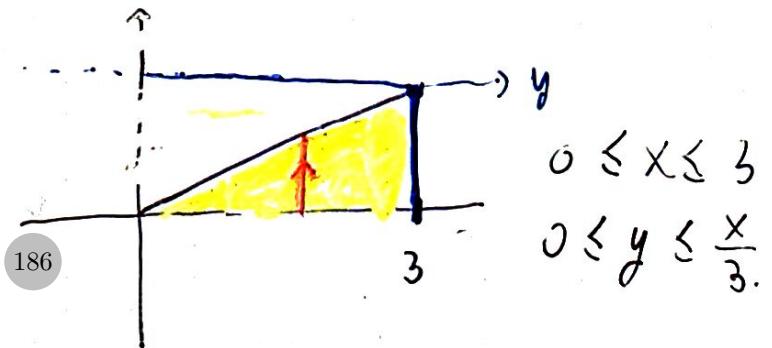
$$0 \leq x \leq 3y.$$

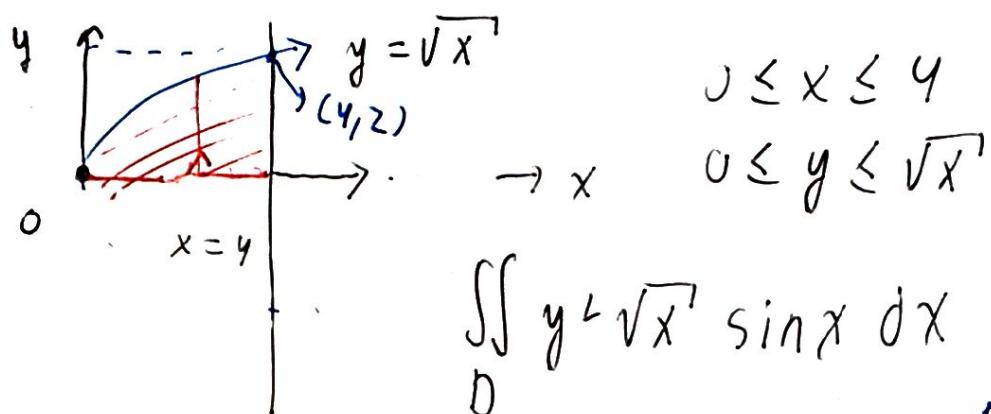
$$0 \leq y \leq 1$$

$$0$$

$$3y \leq x \leq 3.$$

Grafique  $0 = y$        $x = 3$ .  
 $1 = y$        $y = x/3$ .





$$\iint_D y^2 \sqrt{x} \sin x \, dx$$

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y^2 \sqrt{x} \sin x \, dy \, dx$$

$$\int_0^{\sqrt{x}} y^2 \, dy = \frac{y^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{x}}$$

$$\int_0^4 x^{3/2} x^{1/2} \sin x \, dx = \int_0^4 x^2 \sin x \, dx$$

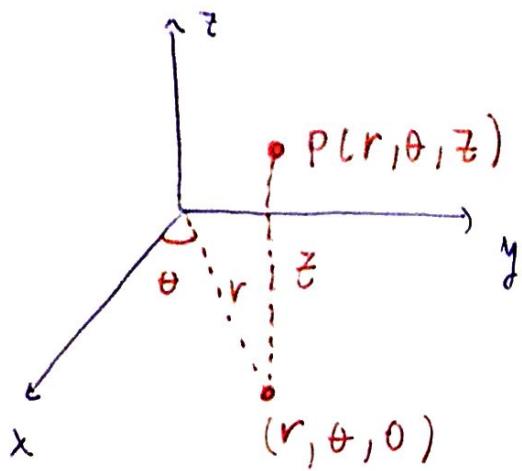
$\rightarrow x^3$

187

# Capítulo 26

## Integrales triples en cilíndricas

## 15.8 Integrales triples en cilíndricas



Coordenadas cilíndricas.

$$P(x, y, z) \rightarrow P(r, \theta, z).$$

$r$  radio polar es la distancia del origen a la proyección de  $P$  en el plano  $xy$   $(r, \theta, 0)$ .

Cilíndricas  $(r, \theta, z) \rightarrow$  Cartesianas  $(x, y, z)$   $\theta$  es el ángulo

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z$$

$\theta$  entre la proyección y el eje  $x$ .

Cartesianas  $(x, y, z) \rightarrow$  cilíndricas  $(r, \theta, z)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad z = z$$

en el cuadrante cuadrante.

Ejercicio 1: Reescriba cada punto en coordenadas cilíndricas.

a.  $P(2\sqrt{3}, 2, 8)$ . 1er cuadrante  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ .

$$r = \sqrt{4 \cdot 3 + 4} = 4$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

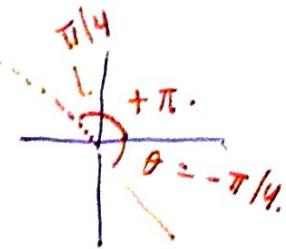
$$z = 8$$

Coordenadas cilíndricas  $(4, \pi/6, 8)$

b.  $\sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$   $(-1, 1)$  está 2do cuadrante  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ .

$$r = \sqrt{1+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = -\frac{\pi}{4} \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$



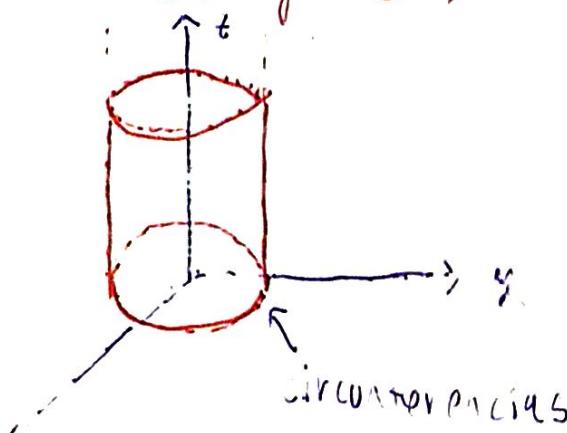
$$z = 3$$

$$\text{Coordenadas cilíndricas } (\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, 3)$$

Superficies cilíndricas Básicas.

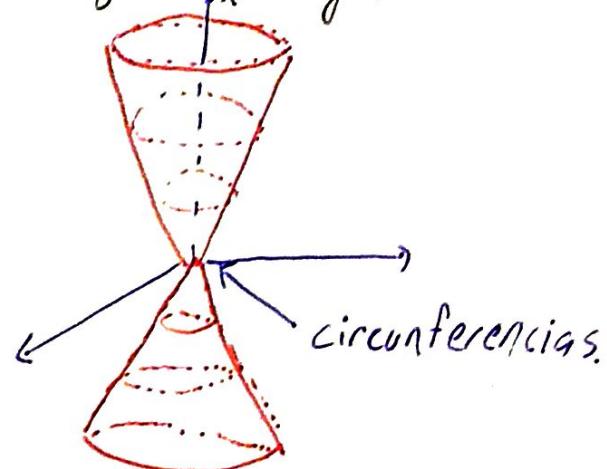
Cilindro:  $r = c$

$$(x^2 + y^2 = c^2)$$

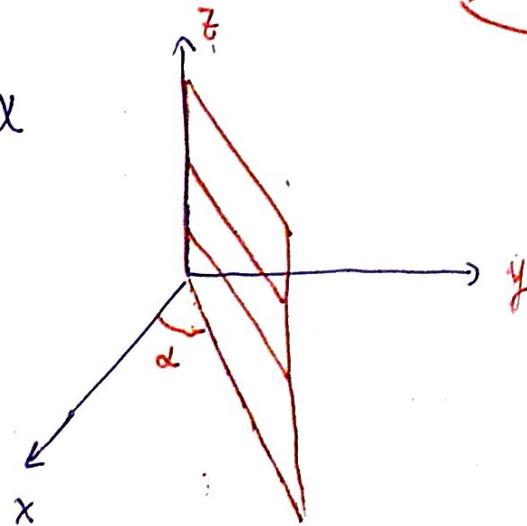


Cono.  $z = r$

$$z^2 = x^2 + y^2$$



Medio plano  $\theta = \alpha$

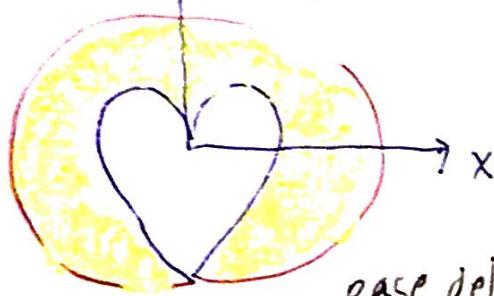


# Integrales Triples en Coordenadas Cilíndricas

Sólido  $E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$ .

La región  $D$  es una región polar.

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, b_1(\theta) \leq r \leq b_2(\theta)\}.$$



$$\text{Evaluate } \iiint_E f(x, y, z) dV$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left( \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dA$$

Utilice coordenadas polares  $dA = r dr d\theta$ .

$$\alpha \leq \theta \leq \beta, b_1 \leq r \leq b_2 \quad x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{b_1(\theta)}^{b_2(\theta)} \left( \int_{u_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{u_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz \right) r dr d\theta$$

1. Cambie las coordenadas.

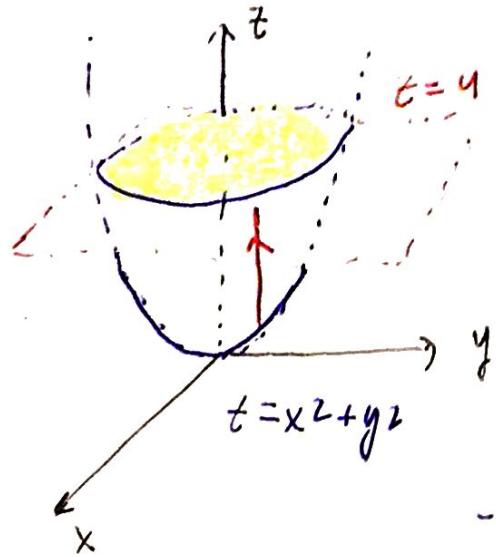
2. Encuentre los límites

3. Use  $dV = dz r dr d\theta$ .

"volumen de una cónica cilíndrica"

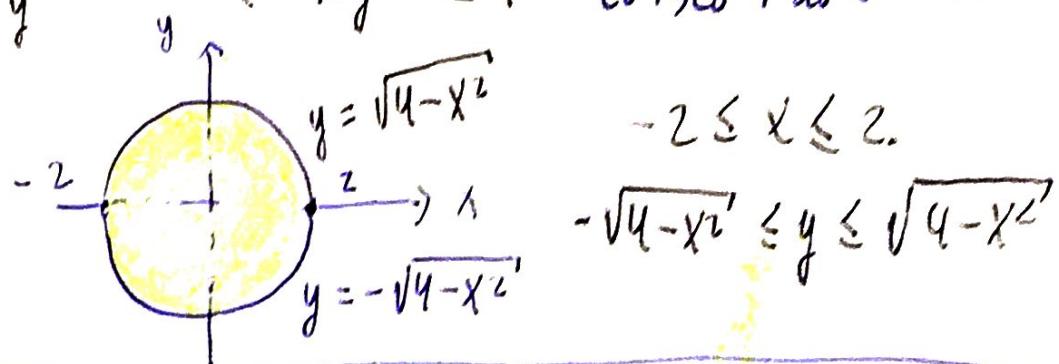
Ejercicio 2: Considere el sólido E que está entre el paraboloides  $z = x^2 + y^2$  y el plano  $z = 4$ . 4

a. Describa el sólido E utilizando coordenadas cartesianas



$$x^2 + y^2 \leq z \leq 4.$$

Los puntos  $(x, y)$  satisfacen  $x^2 + y^2 \leq 4$  (disco radio 2).



$$-2 \leq x \leq 2, \quad -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$$

$E : -2 \leq x \leq 2, \quad -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}, \quad x^2 + y^2 \leq z \leq 4.$

b. Describa el sólido E utilizando coordenadas cilíndricas

$$x = r \cos \theta \quad x^2 + y^2 \leq 4 \rightarrow r \leq 2 \quad 0 \leq r \leq 2.$$

$$y = r \sin \theta \quad \text{todo el disco.} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 4 \rightarrow r \leq z \leq 4.$$

$E : 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2, \quad r^2 \leq z \leq 4.$

c. Evalúe  $\iiint_E z \, dV$ .

Cartesianas:

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 z \, dz \, dy \, dx.$$

resaltante.

$$(x^2+y^2)^2 \sqrt{4-x^2}$$

Cilíndricas:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 z \, dz \, r \, dr \, d\theta.$$

disco

origen  $r=0$

orilla  $r=4$ .

$$\iiint_E z \, dV = \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^2 \int_{r^2}^4 z \, r \, dz \, dr.$$

$$\int_{r^2}^4 z \, dz = \frac{z^2}{2} \Big|_{r^2}^4 = \frac{16}{2} - \frac{r^4}{2}.$$

$$= \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^2 \left( 8r - \frac{r^5}{2} \right) dr$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

$$= 2\pi \left( 4r^2 - \frac{r^6}{6} \Big|_{r=0}^2 \right) = 2\pi \left( 16 - \frac{16}{3} \right)$$

$$= 2\pi \left( \frac{48 - 16}{3} \right) = 2\pi \cdot \frac{32}{3} = \frac{64\pi}{3}.$$

d. Encuentre el volumen del sólido  $E$ .

$$V = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 dz \, r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4-r^2) r \, dr.$$

$$E: 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq 4, 0 \leq r \leq 2. \quad dV = r \, dr \, d\theta \, dz.$$

$$V = 2\pi \int_0^2 (4r - r^3) dr = 2\pi \left( 2r^2 - \frac{r^4}{4} \Big|_{r=0}^2 \right)$$

$$V = 2\pi (8 - 4) = 8\pi.$$

Ejercicio 3: Evalúe  $I = \iint_D \left[ \int_0^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2} dz \right] dA$ .

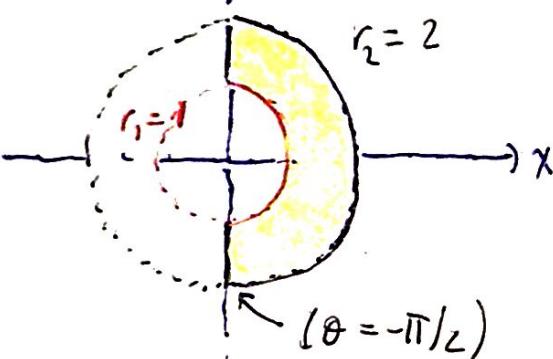
$D$  es el semianillo derecho de radio interno 1 y externo 2 centrado en el origen.

Cartesianas integrar  $\sqrt{x^2+y^2}(9-x^2-y^2)$  es desafiante.

Cilíndricas  $x^2+y^2=r^2$ .  $dz=dz$   $z=z$ .

$$I = \iint_D \left[ \int_0^{9-r^2} r dz \right] dA = \iint_D r \left[ z \right]_{z=0}^{9-r^2} dA = \iint_D (9r - r^3) dA.$$

$\uparrow \gamma (\theta = \pi/2)$



$$1 \leq r \leq 2, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$dA = r dr d\theta.$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^2 (9r - r^3) r dr d\theta.$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_1^2 (9r^2 - r^4) dr = \pi \cdot \left( 3r^3 - \frac{r^5}{5} \right) \Big|_{r=1}^{r=2}$$

$$I = \left( 2^4 - \frac{32}{5} - 3 + \frac{1}{5} \right) \pi = \left( \frac{105}{5} - \frac{31}{5} \right) \pi = \frac{74\pi}{5}.$$

Clave: use las coordenadas polares "bien" cilíndricas  $u_1(r, \theta) \leq z \leq u_2(r, \theta)$