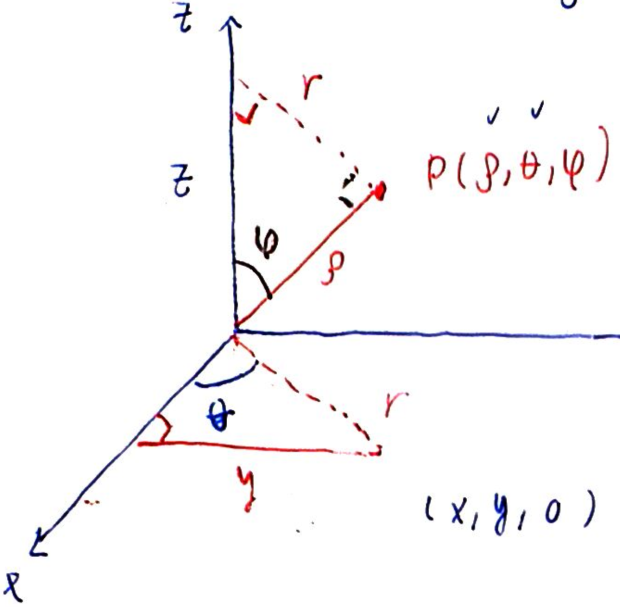
15.9 Coordenadas Esféricas

Un punto P en el espacio se puede representar con las coordenadas (ρ, θ, φ)

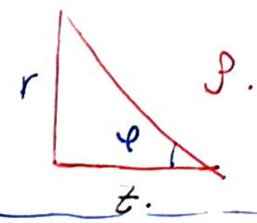
r radio polar $r^2 = x^2 + y^2$.

ρ radio esférico $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$

θ ángulo polar ángulo entre el eje x & $(x, y, 0)$.



φ el ángulo entre el eje z el segmento $\overrightarrow{OP}$



$\boxed{z = \rho\cos\varphi \quad r = \rho\sin\varphi}$

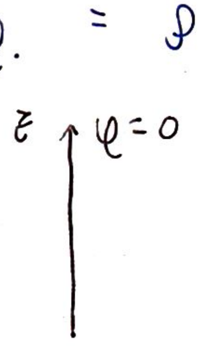
Cambio de coordenadas esféricas a cartesianas.

$$x = r\cos\theta. = \rho\sin\varphi\cos\theta.$$
$$y = r\sin\theta. = \rho\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = \rho\cos\varphi. = \rho\cos\varphi.$$

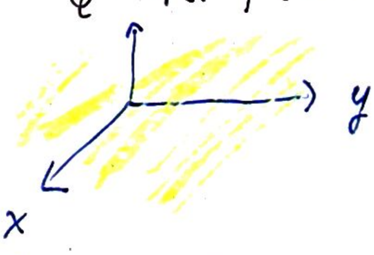
$\varphi = 0$

Polo Norte

Eje z positivo



$\varphi = \pi/2$, $z = 0$



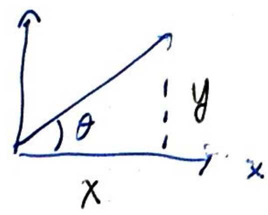
Plano xy

$\varphi = \pi$

Polo sur

Cambio de coordenadas cartesianas a esféricas

$(x, y, z) \to (\rho, \theta, \varphi).$



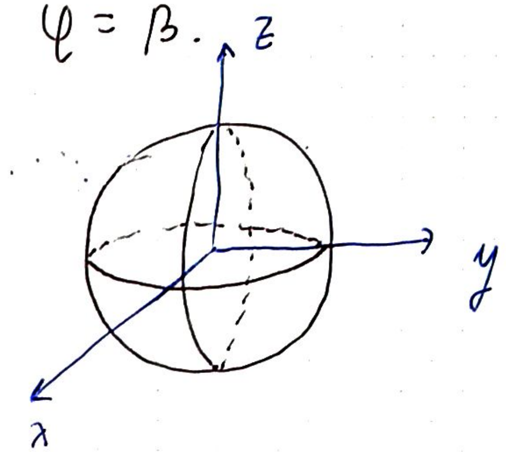
$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}.$

$\cos\varphi = \dfrac{z}{\rho} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Superficies Esféricas Básicas.

$\rho = K \qquad \theta = \alpha \qquad \varphi = \beta.$



Esféricas $\boxed{\rho = K,}$

Cartesianas

$x^2 + y^2 + z^2 = K^2.$

Esfera de radio K

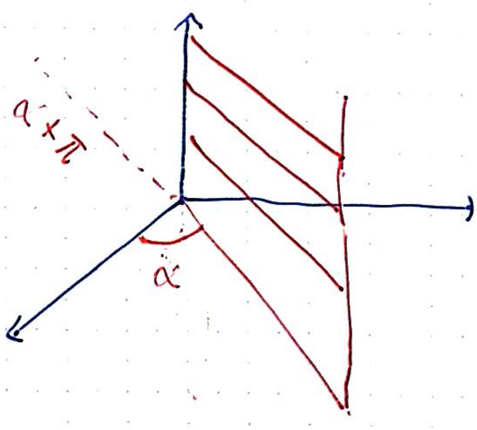
$1 \leq \rho \leq 2$ Cascarón esférico.

Esféricas $\theta = \alpha.$

Cartesianas $\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$

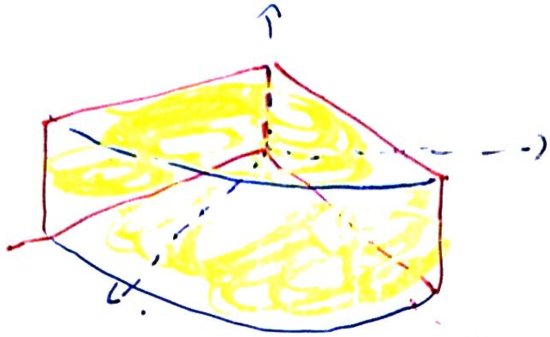
$y = x\tan\alpha.$

Medio Plano.



$\alpha \leq \theta \leq \beta$ dos medios planos

$-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$



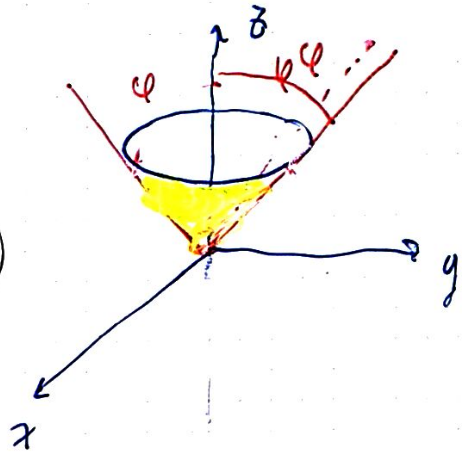
Esféricas $\varphi = \alpha \qquad 0 < \alpha < \pi/2.$

cartesianas $\cos\alpha = \dfrac{z}{\sqrt{z^2+x^2+y^2}}$

$\cos^2\alpha\,(z^2+x^2+y^2) = z^2$

$z^2(1-\cos^2\alpha) = \cos^2\alpha\,(x^2+y^2)$

$z^2\tan^2\alpha = x^2+y^2$



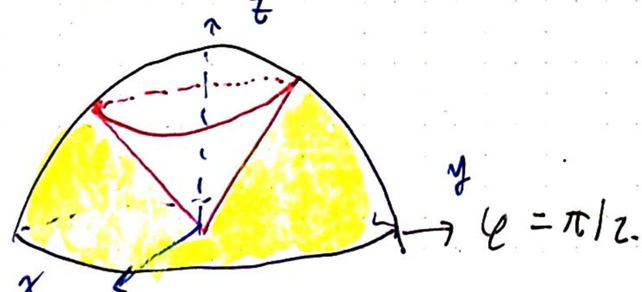
Medio cono.

$\alpha \le \varphi \le \beta$ estamos entre dos medios conos.

$0 \le \varphi \le \pi/4.$ sólido encima del medio cono y debajo de $z = K$.

π

$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$ sólido debajo del cono y encima del plano xy.



Evaluación de una integral triple en esféricas.

Considere el sólido conocido como una cuña esférica.

$$E = \{ (\rho, \theta, \varphi) \mid a \leq \rho \leq b, \ \alpha \leq \theta \leq \beta, \ \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2)$$

Volumen de la cuña esférica. "infinitesimal"

altura $\rho \, d\varphi$

largo $d\rho$.

ancho: $\rho \sin\varphi \, d\theta$.

esféricas

$dV = \rho^2 \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi \, d\rho$.

cilíndricas

$dV = r \, dr \, d\theta \, dz$.

$$\iiint_E f \, dV = \int_a^b \int_\alpha^\beta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho \sin\varphi \cos\theta, \rho \sin\varphi \sin\theta, \rho \cos\varphi) \, dV$$

$dV = \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho$.

$f(x, y, z)$

1. Evalúe $\iiint_E (5x^2 + 5y^2) \, dV$

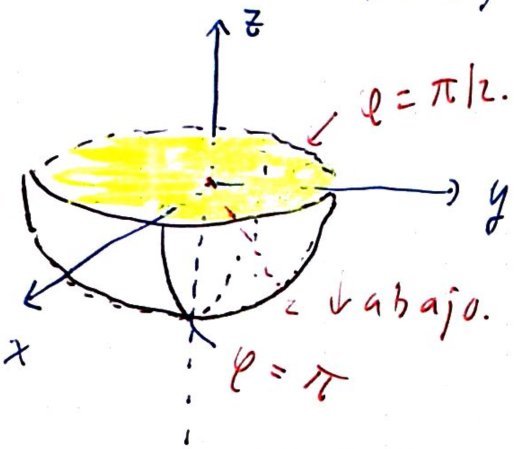
E es el hemisferio inferior $\underbrace{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4}_{\rho^2 \leq 4}$, $z \leq 0$.

$$5x^2 + 5y^2 = 5\rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta + 5\rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta$$

$$= 5\rho^2 \sin^2\varphi (\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$= 5\rho^2 \sin^2\varphi.$$

Límites de Integración



No hay almas verticales

$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$. $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Polo Norte $\varphi = 0$
Plano xy $\varphi = \pi/2$
Polo sur $\varphi = \pi$.

Toda la semiesfera $0 \leq \rho \leq 2$.

$$\iiint_E (5x^2 + 5y^2)\, dV = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^2 5\rho^2 \sin^2\varphi \cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3\varphi \, d\varphi\right)\left(\int_0^2 5\rho^4 \, d\rho\right).$$

$$= 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3\varphi \, d\varphi \left(\rho^5\Big]_0^2\right)$$

$$= 64\pi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3\varphi \, d\varphi.$$

Parcial 3 sólo sobre dobles.