14.8 Multiplicadores de Lagrange.

Una función de dos o tres variables puede estar sujeta a una restricción

$$xy + x\ln y = 100.$$

Máximo $z = f(x,y)$ s.A $g(x,y) = c.$

Si no es posible resolver para y ó x en la restricción, el problema no se puede reducir a una sola variable.

Se introduce una nueva variable
Multiplicador de Lagrange. λ "lambda"
para incorporar la restricción en la función objetivo.

$$c - g(x,y) = 0$$

$$F(x,y,\lambda) = \underbrace{f(x,y)}_{\text{objetivo}} + \lambda\big(\underbrace{c - g(x,y)}_{\text{restricción}}\big)$$

Extremos relativos $F_x = F_y = F_\lambda = 0.$

$$F_x = f_x - \lambda g_x = 0.$$
$$F_y = f_y - \lambda g_y = 0$$
$$F_\lambda = c - g(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{\nabla f = \lambda \nabla g.} \\ g(x,y) = c. \end{array}\right\} \text{condiciones necesarias para un extremo relativo}$$

Problema $w = f(x,y,z)$ sujeta a $g(x,y,z) = c$.

$$\underbrace{F(x,y,z,\lambda)}_{\text{Lagrangiano}} = \underbrace{f(x,y,z)}_{\text{objetivo}} + \underbrace{\lambda(c - g(x,y,z))}_{\text{restricción}}$$

objetivo + restricción

$F_x = F_y = F_z = F_\lambda = 0$. λ "variable artificial"

condiciones $\nabla f = \lambda \nabla g$ & $g(x,y,z) = c$.

Ejercicio 1: Encuentre los extremos relativos de $w = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a $2x + y - z = 18$.} restricción

Método 1: Resuelva para z $z = 2x + y - 18$.

sustituya en w para obtener una función de 2 variables.

$$w = x^2 + y^2 + (2x + y - 18)^2. \qquad \nabla w = \vec{0}$$

$$w_x = 2x + 4(2x + y - 18) = 10x + 4y - 72 = 0. \quad R_1$$
$$w_y = 2y + 2(2x + y - 18) = 4x + 4y - 36 = 0. \quad R_2.$$

$R_1 - R_2$: $6x - 36 = 0 \Rightarrow x = 6$.

R_2: $4y = 36 - 4x = 12 \Rightarrow y = 3$.

¿Cómo se encuentra z? $z = 2(6) + 3 - 18 = -3$.

Punto crítico: $(6, 3, -3)$.

Prueba 2da Derivada

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} w_{xx} & w_{xy} \\ w_{yx} & w_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 24 > 0$$

$w_{xx} = 10 > 0$. mínimo relativo.

Método 2: Multiplicadores de Lagrange

Lagrangiano $F = \omega + \lambda(\overbrace{c - g}^{0})$

$$F(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(18 - 2x - y + z)$$

$$F_x = 2x - 2\lambda = 0 \Rightarrow x = \lambda = 6 \quad ✓$$

$$F_y = 2y - \lambda = 0 \Rightarrow y = \lambda/2 = 3 \quad ✓$$

$$F_z = 2z + \lambda = 0 \Rightarrow z = -\lambda/2 = -3 \quad ✓$$

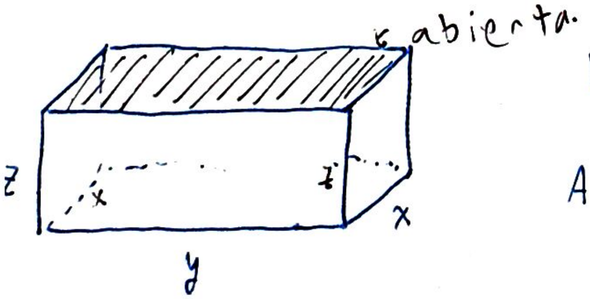
$$F_\lambda = 18 - 2x - y + z = 0 \Rightarrow 2x + y - z = 18$$

Sustituya x, y y z en la restricción.

$$2\lambda + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = 3\lambda = 18 \Rightarrow \lambda = 6.$$

Punto crítico es $(6, 3, -3)$ $\underline{\lambda = 6.}$

Ejercicio 2: Una caja sin tapa tiene un volumen de $32{,}000\ cm^3$. Encuentre las dimensiones de la caja que minimizan su área superficial.



Volumen $V = xyz = 32{,}000.$

Área Sup $\underset{\text{objetivo}}{\underline{A}} = 2zy + 2zx + yx$

$$F = A + \lambda(c - V) = 2zy + 2zx + yx + \lambda(32{,}000 - xyz)$$

NO LINEAL.

$$F_x = 2z + y - \lambda yz = 0$$
$$F_y = 2z + x - \lambda xz = 0$$
$$\Rightarrow$$

$\lambda yz = y + 2z$ (1)

$\lambda xz = x + 2z$ (2)

$\lambda xy = 2x + 2y.$ (3)

$xyz = 32{,}000$ (4).

$$F_z = 2y + 2x - \lambda xy = 0.$$
$$F_\lambda = 32{,}000 - xyz = 0.$$

$\frac{(1)}{(2)}$ $\quad \frac{y}{x} = \frac{y+2z}{x+2z}.$

$$y\cancel{x} + 2zy = \cancel{x}y + 2zx$$
$$y = \frac{2zx}{2z} = x$$

$\boxed{x = y}$

$\frac{(1)}{(3)}$ $\quad \frac{z}{x} = \frac{y+2z}{2x+2y}.$

$$2\cancel{x}z + 2yz = xy + 2\cancel{z}x$$
$$z = \frac{xy}{2y} = \frac{x}{2}.$$

$y = x, \quad z = x/2.$ se sustituyen en la restricción

$$x\,x\,\frac{x}{2} = 32000 \qquad x^3 = 64 \cdot 1000$$
$$x = \sqrt[3]{64}\,\sqrt[3]{1000} = 4 \cdot 10 = 40.$$

Punto crítico: $x = 40, \; y = 40, \; z = 20.$

A'rea mínima: $A = 2yz + 2xz + xy.$

$$A = 2(800) + 2(800) + 1{,}600.$$
$$A = 3(1600) = 4{,}800 \text{ cm}^2.$$

Aplicaciones a la Economía y Negocios.

Ejercicio 4: Para surtir una orden de 100 unidades de un producto, la empresa desea distribuir la producción entre sus dos plantas. La función de costo total es.

$C(x,y) = 0.1x^2 + 7x + 15y + 1000$ $\quad$ x planta 1, y planta 2.

¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos? $\quad C(0,0) = 1{,}000$

Objetivo $\min C(x,y)$ $\quad$ s. A. $\quad x + y = 100.$

Lagrange $\quad F = C + \lambda(100 - x - y)$ $\quad$ λ griego.

$$F = 0.1x^2 + 7x + 15y + 1000 + 100\lambda - \lambda x - \lambda y$$

$$F_x = 0.2x + 7 - \lambda = 0 \Rightarrow 0.2x = \lambda - 7 = 8 \Rightarrow x = 40$$
$$F_y = 15 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 15.$$
$$F_\lambda = 100 - x - y = 0. \Rightarrow y = 100 - x = 60$$

Punto crítico $(40,60)$ $\quad \lambda = 15.$ $\quad$ 1 01 uds, C ↑ aprox 15 uds.

Costo mínimo $\quad C(x,y) = 0.1(1600) + 280 + 900 + 1000.$

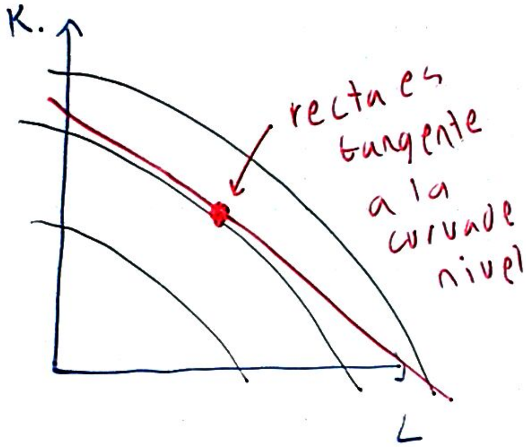
$$C(x,y) = 2{,}340.$$

Ejercicio 5: Una empresa tiene la función de producción

$$Q(L,K) = 12L + 20K - L^2 - 2K^2.$$

La empresa tiene un presupuesto de \$88 mil para contratar trabajadores y maquinaria. Cada trabajador y cada máquina tienen un costo de \$4 y \$8 mil, resp.

Encuentre la producción máxima.



Restricción $4L + 8K = 88.$

$L + 2K = 22.$

$\max Q.$

$F(L,K,\lambda)$

$$F(L,K,\lambda) = 12L + 20K - L^2 - 2K^2 + \lambda(22 - L - 2K)$$

$$F_L = 12 - 2L - \lambda = 0. \Rightarrow 2L = 12 - \lambda \Rightarrow L = 6 - \lambda/2$$

$$F_K = 20 - 4K - 2\lambda = 0 \Rightarrow 4K = 20 - 2\lambda \quad K = 5 - \lambda/2.$$

$$F_\lambda = 22 - L - 2K = 0.$$

$$L + 2K = 22 \qquad 6 - \frac{\lambda}{2} + 10 - \lambda = 22$$

$$-\frac{3\lambda}{2} = 22 - 16 = 6$$

$\lambda = -4:$ $L = 6 + 4/2 = 8$

$K = 5 + 4/2 = 7$

$$Q(8,7) = 96 + 140 - 64 - 98$$
$$= 74.$$