CAPÍTULO 12

Pruebas de bondad de ajuste e independencia

CONTENIDO

LA ESTADÍSTICA *en* LA PRÁCTICA

UNITED WAY*
ROCHESTER, NUEVA YORK

United Way of Greater Rochester es una organización no lucrativa que se dedica a mejorar la calidad de vida de todas las personas en las siete zonas en las que proporcionan servicios para cubrir las necesidades humanas más importantes de las comunidades.

La campaña anual de United Way/Cruz Roja para la recolección de fondos, que se realiza todas las primaveras, patrocina cientos de programas ofrecidos por más de 200 proveedores de servicios. Estos proveedores atienden una amplia variedad de necesidades humanas —físicas, mentales y sociales— atendiendo a personas de cualquier edad, origen y situación económica

Debido a la gran cantidad de voluntarios, United Way mantiene sus costos de operación a sólo 8 centavos por dólar recaudado.

United Way of Great Rochester decidió hacer un estudio para saber más acerca de la percepción de la comunidad sobre la caridad. Entrevistas enfocadas a grupos fueron realizadas con profesionales, personal de servicio y trabajadores generales para obtener información preliminar sobre sus percepciones. La información obtenida se usó para elaborar los cuestionarios para el estudio. El cuestionario fue probado, modificado y distribuido a 440 personas; se obtuvieron 323 cuestionarios contestados.

A partir de los datos recolectados se consiguieron diversos estadísticos descriptivos, como distribuciones de frecuencias y tabulaciones cruzadas. Una parte importante del análisis fue el uso de tablas de contingencia y de pruebas chi-cuadrada de independencia. Uno de los usos de dichos estadísticos fue determinar si las percepciones sobre los gastos administrativos eran independientes de la ocupación.

Las hipótesis para la prueba de independencia fueron:

H_0: La percepción sobre los gastos administrativos de United Way es independiente de la ocupación del entrevistado.

H_a: La percepción sobre los gastos administrativos de United Way no es independiente de la ocupación del entrevistado

*Los autores agradecen al doctor Philip R. Tyler, consultor de marketing de United Way por proporcionar este artículo para *La estadística en la práctica.*

Los programas de United Way cubren necesidades tanto de los niños como de los adultos. © Ed Bock/CORBIS.

Dos de las preguntas del estudio suministraron los datos para la prueba estadística. Con una de las preguntas se obtenía información sobre las percepciones de los recursos que se destinaban a gastos administrativos (hasta 10%, 11-20% y 21% o más). Con la otra se preguntaba sobre la ocupación del entrevistado.

La prueba chi cuadrada con 0.05 como nivel de significancia llevó a rechazar la hipótesis nula de independencia y, de esta manera, a la conclusión de que las percepciones sobre los gastos administrativos variaban de acuerdo con la ocupación. En realidad los gastos administrativos eran menores que 9%, pero 35% de los entrevistados tenía la percepción de que eran 21% o más. Así que muchos tenían una percepción inadecuada sobre los gastos administrativos. De este grupo, los empleados de líneas de producción, los empleados de oficina, los vendedores y los técnicos profesionistas tenían percepciones más equivocadas que otros grupos.

El estudio sobre la percepción de la comunidad sirvió para que United Way of Rochester hiciera ajustes a sus programas y a sus actividades de recaudación de fondos. En este capítulo verá cómo se realiza una prueba estadística de independencia, como la descrita aquí.

En el capítulo 11 se vio la forma de usar la distribución chi-cuadrada en estimaciones y en pruebas de hipótesis para la varianza poblacional. En el capítulo 12 se presentan otras dos pruebas de hipótesis, ambas establecidas en el uso de la distribución chi-cuadrada. Como en otras pruebas de hipótesis, en éstas se comparan los resultados muestrales con los esperados si la hipótesis nula es verdadera. La conclusión de la prueba de hipótesis se basa en qué tan "cerca" se encuentran los resultados muestrales de los resultados esperados.

En la sección siguiente se presenta la prueba de bondad de ajuste para una población multinomial. Más adelante se ve la prueba de independencia usando tablas de contingencia y después pruebas de bondad de ajuste para distribuciones normales y de Poisson.

12.1 Prueba de bondad de ajuste: una población multinomial

En esta sección se estudia el caso en que cada elemento de una población corresponde a una y sólo a una de varias clases o categorías. A estas poblaciones se les conoce como **poblaciones multinomiales**. La distribución multinomial se puede entender como una extensión de la distribución binomial al caso en el que hay tres o más categorías de resultados. En cada ensayo de un experimento multinomial uno y sólo uno de los resultados ocurre. Se supone que cada ensayo del experimento es independiente y que en todos los ensayos las probabilidades para los resultados permanecen constantes.

Las suposiciones en un experimento multinomial son las mismas que en un experimento binomial, salvo que en el experimento multinomial en cada ensayo hay tres o más resultados.

Como ejemplo, considere un estudio sobre participación en el mercado realizado por la empresa Scott Marketing Research. A lo largo de los años las participaciones en el mercado se han estabilizado en 30% para la empresa A, 50% para la empresa B y 20% para la empresa C. Recién la empresa C ha elaborado un nuevo y mejorado producto para sustituir a uno de sus productos en el mercado y pidió a la empresa Scott Marketing Research que determinara si el nuevo producto modificaría su participación en el mercado.

En este caso, la población de interés es multinomial, cada cliente se clasifica como cliente de la empresa A, de la empresa B o de la empresa C. De manera que se tiene una población multinomial con tres resultados. Para las proporciones se usa la notación siguiente.

$$p_A = \text{participación en el mercado de la empresa A}$$
$$p_B = \text{participación en el mercado de la empresa B}$$
$$p_C = \text{participación en el mercado de la empresa C}$$

Scott Marketing Research realizará un estudio muestral y calculará la proporción que prefiere el producto de cada empresa. Después aplicará una prueba de hipótesis para ver si el nuevo producto modifica las participaciones en el mercado. Suponga que el nuevo producto de la empresa C no modifica las participaciones en el mercado; entonces, las hipótesis nula y alternativa serán las siguientes.

$$H_0\text{: } p_A = 0.30, p_B = 0.50, \text{ y } p_C = 0.20$$
$$H_a\text{: Las proporciones poblacionales no son}$$
$$p_A = 0.30, p_B = 0.50, \text{ y } p_C = 0.20$$

Si los resultados muestrales llevan al rechazo de H_0 Scott Marketing Research tendrá evidencias de que la introducción del nuevo producto afecta las participaciones del mercado.

Considere que para este estudio la empresa de investigación de mercado ha empleado un panel de 200 consumidores. A cada individuo se le pide que indique su preferencia entre el producto de la empresa A, el producto de la empresa B o el nuevo producto de la empresa C. Las 200 respuestas obtenidas se presentan a continuación en forma resumida.

El panel de 200 consumidores en donde a cada consumidor se le pide que elija una de tres alternativas, es equivalente a un experimento multinomial consistente de 200 ensayos.

Frecuencia esperada		
Producto de la empresa A	**Producto de la empresa B**	**Producto de la empresa C**
48	98	54

Ahora se realiza la **prueba de bondad de ajuste** para determinar si la muestra de las 200 preferencias de los clientes coincide con la hipótesis nula. La prueba de bondad de ajuste se basa en la comparación de los resultados muestrales *observados* con los resultados *esperados,* bajo la suposición de que la hipótesis nula es verdadera. Por tanto, el paso siguiente es calcular las preferencias esperadas en los 200 clientes, con el supuesto de que $p_A = 0.30$, $p_B = 0.50$ y $p_C = 0.20$ hacerlo dará los resultados esperados.

Frecuencia observada

Producto de la empresa A	Producto de la empresa B	Producto de la empresa C
200(0.30) = 60	200(0.50) = 100	200(0.20) = 40

Como se observa, la frecuencia esperada de cada categoría se encuentra multiplicando el tamaño de la muestra, 200, por la proporción hipotética de esa categoría.

En la prueba de bondad de ajuste lo que interesa son las diferencias entre frecuencias observadas y frecuencias esperadas. Grandes diferencias entre frecuencias observadas y frecuencias esperadas harán dudar sobre la exactitud de las proporciones o participaciones en el mercado hipotéticas. El que las diferencias entre frecuencias observadas y esperadas sean "grandes" o "pequeñas" es una cuestión que se determina con ayuda del estadístico de prueba.

ESTADÍSTICO DE PRUEBA PARA LA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i} \tag{12.1}$$

donde

f_i = frecuencia observada en la categoría i
e_i = frecuencia esperada en la categoría i
k = número de categorías

Nota: El estadístico de prueba tiene una distribución chi-cuadrada con $k - 1$ grados de libertad, siempre que en todas las categorías las frecuencias esperadas sean *5 o más*.

Ahora, de regreso con Scott Marketing Research, los datos muestrales se emplearán para probar la hipótesis de que en la población multinomial las proporciones sigan siendo $p_A = 0.30$, $p_B = 0.50$ y $p_C = 0.20$. El nivel de significancia que se va a usar es 0.05. Mediante las frecuencias observadas y esperadas se calcula el valor del estadístico de prueba. Como las frecuencias esperadas son todas 5 o más, se calcula el estadístico de prueba chi-cuadrada como se muestra en la tabla 12.1. Se obtiene $\chi^2 = 7.34$.

La prueba de bondad de ajuste siempre es una prueba de una cola, en la que el rechazo se presenta en la cola superior de la distribución chi-cuadrada.

La hipótesis nula se rechaza si las diferencias entre las frecuencias observadas y esperadas son *grandes*. Diferencias grandes entre las frecuencias esperadas y observadas darán un valor grande del estadístico de prueba. Entonces, la prueba de bondad de ajuste siempre será una prueba de la cola superior. El área en la cola superior se emplea en el método del estadístico de prueba y en el método del valor-*p* para determinar si se puede rechazar la hipótesis nula. Para $k - 1 = 3 - 1 = 2$ grados de libertad, en la tabla de la distribución chi-cuadrada se observan los datos siguientes:

En la sección 11.1 se presenta una introducción a la distribución chi-cuadrada y al uso de la tabla de la distribución chi-cuadrada.

Área en la cola superior	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
Valor χ^2 (2 *gl*)	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597

$\chi^2 = 7.34$

TABLA 12.1 CÁLCULO DEL ESTADÍSTICO DE PRUEBA CHI-CUADRADA PARA EL ESTUDIO DE PARTICIPACIÓN DE MERCADO REALIZADO POR SCOTT MARKETING RESEARCH

Categoría	Proporción hipotética	Frecuencia observada (f_i)	Frecuencia esperada (e_i)	Diferencia $(f_i - e_i)$	Cuadrado de la diferencia $(f_i - e_i)^2$	Cuadrado de la diferencia dividido entre frecuencia esperada $(f_i - e_i)^2/e_i$
Empresa A	0.30	48	60	−12	144	2.40
Empresa B	0.50	98	100	−2	4	0.04
Empresa C	0.20	54	40	14	196	4.90
Total		200				$\chi^2 = 7.34$

El estadístico de prueba $\chi^2 = 7.34$ se encuentra entre 5.991 y 7.378. Por consiguiente, el área correspondiente en la cola superior o valor-p debe estar entre 0.05 y 0.025. Como el valor-$p \leq \alpha = 0.05$, se rechaza H_0 y se concluye que la introducción del nuevo producto de la empresa C sí modifica la estructura de la participación de mercado. Con los procedimientos de Excel y Minitab, que se presentan en el apéndice F, al final del libro, se obtiene que si $\chi^2 = 7.34$, el valor-p = 0.0255.

En lugar del método del valor-p se puede utilizar el método del valor crítico con el que se llega a la misma conclusión. Como $\alpha = 0.05$ y los grados de libertad son 2, el valor crítico para el estadístico de prueba es $\chi^2_{0.05} = 5.991$. La regla de rechazo de la cola superior es

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } \chi^2 \geq 5.991$$

Como $7.34 > 5.991$, se rechaza H_0. Con el método del valor crítico o con el método del valor-p se llega a la misma conclusión.

Aunque no se obtienen más conclusiones como resultado de la prueba, es posible comparar las frecuencias observadas y las frecuencias esperadas de manera informal para tener una idea de cómo ha cambiado la estructura de la participación en el mercado. Se observa que para la empresa C, la frecuencia observada, que es 54, es mayor que la frecuencia esperada, 40. Como la frecuencia esperada estaba basada en la participación existente en el mercado, que la frecuencia observada sea mayor indica que el nuevo producto de la empresa C tendrá un efecto positivo sobre la participación en el mercado de esta empresa. Comparando las frecuencias observadas y esperadas de las otras dos empresas, se observa que la empresa C gana en participación en el mercado afectando más a la empresa A que a la empresa B.

A continuación se presentan, en forma resumida, los pasos que se siguen para realizar una prueba de bondad de ajuste para una distribución poblacional multinomial hipotética.

DISTRIBUCIÓN MULTINOMIAL DE PRUEBAS DE BANDA DE AJUSTE: RESUMEN

1. Establecer las hipótesis nula y alternativa:

   H_0: La población tiene una distribución multinomial con la probabilidad especificada de cada una de las k categorías

   H_a: La población tiene una distribución multinomial con la probabilidad no especificada de cada una de las k categorías

2. Seleccionar una muestra aleatoria y anotar la frecuencia observada f_i en cada categoría.
3. Suponer que la hipótesis nula es verdadera y determinar la frecuencia esperada e_i en cada categoría multiplicando la probabilidad de esa categoría por el tamaño de la muestra.

4. Calcular el valor del estadístico de prueba.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i}$$

5. Regla de rechazo:

Método del valor-p: Rechazar H_0 si el valor-$p \leq \alpha$

Método del valor crítico: Rechazar H_0 si $\chi^2 \geq \chi^2_\alpha$

donde α es el nivel de significancia utilizado para la prueba y se tienen $k - 1$ grados de libertad.

Ejercicios

Métodos

Autoexamen

1. Probar la hipótesis siguiente usando la prueba de bondad de ajuste χ^2.

$$H_0: p_A = 0.40, p_B = 0.40, \text{ y } p_C = 0.20$$
$$H_a: \text{Las proporciones poblacionales no son } p_A = 0.40, p_B = 0.40, \text{ y } p_C = 0.20$$

En una muestra de 200 elementos se tiene que 60 pertenecen a la categoría A, 120 a la categoría B y 20 a la categoría C.
Use $\alpha = 0.01$ y pruebe si las proporciones son las afirmadas en H_0.
a. Use el método del valor-p.
b. Repita la prueba usando el método del valor crítico.

2. Suponga que tiene una población multinomial con cuatro categorías: A, B, C y D. La hipótesis nula es que la proporción de elementos es la misma en todas las categorías. La hipótesis nula es

$$H_0: p_A = p_B = p_C = p_D = 0.25$$

En la muestra, que es de 300, se obtienen los resultados siguientes:

A: 85 B: 95 C: 50 D: 70

Use $\alpha = 0.05$ para determinar si se rechaza H_0. ¿Cuál es el valor-p?

Aplicaciones

Autoexamen

3. Durante las primeras 13 semanas, se registraron las proporciones siguientes de televidentes los sábados de 8 a 9 de la noche: ABC 29%, CBS 28%, NBC 25% e independientes 18%. Dos semanas después en una muestra de 300 hogares se obtuvieron las audiencias siguientes en sábado por la noche: ABC 95 hogares, CBS 70 hogares, NBC 89 hogares e independientes 46 hogares. Use $\alpha = 0.05$ para determinar si han variado las proporciones en la audiencia de televidentes.

4. M&M/Mars, fabricantes de los chocolates M&M, realizaron un sondeo nacional en el que más de 10 millones de personas dieron su preferencia para un nuevo color. El resultado de este sondeo fue el reemplazo de un color café claro por uno azul. En el prospecto "Colors" de M&M/Mars, la distribución de los colores de estos chocolates es la siguiente:

Café	Amarillo	Rojo	Anaranjado	Verde	Azul
30%	20%	20%	10%	10%	10%

En un estudio posterior se emplearon como muestras bolsas de 1 libra para determinar si los porcentajes dados eran reales. En la muestra de 506 dulces los resultados encontrados fueron los siguientes.

Café	Amarillo	Rojo	Anaranjado	Verde	Azul
177	135	79	41	36	38

Use $\alpha = 0.05$ para determinar si estos datos coinciden con los datos dados por la empresa.

5. ¿Dónde es más frecuente que las mujeres compren ropa informal? Según la base de datos de U.S. Shopper se obtuvieron los porcentajes siguientes acerca de las compras de ropa que realizan las mujeres en cada uno de los distintos tipos de tiendas.

Tienda	Porcentaje	Tienda	Porcentaje
Wal-Mart	24	Kohl's	8
Tiendas departamentales tradicionales	11	Por correo	12
JC Penney	8	Otras	37

La categoría otras comprende tiendas como Target, Kmart y Sears, así como numerosas tiendas especializadas. Ninguna de las tiendas de este grupo tiene más de 5% de las compras femeninas. En Atlanta, Georgia, un estudio reciente en el que se usó una muestra de 140 mujeres, los datos encontrados fueron Wal-Mart, 42; Tiendas departamentales tradicionales, 20; JC Penny, 8; Kohl´s, 10; por correo, 21; otras, 39. ¿Estos datos muestran que en Atlanta las compras femeninas difieren de las preferencias que indica la base de datos de U.S. Shopper? ¿Cuál es el valor-*p*? ¿Cuál es la conclusión?

6. La American Bankers Association recoge datos sobre el uso de tarjetas de crédito, tarjetas de débito, efectivo y cheques personales en el pago de compras en tienda (*The Wall Street Journal*, 16 de diciembre de 2003). En 1999, los datos encontrados fueron los siguientes:

Compras en tienda	Porcentaje
Tarjeta de crédito	22
Tarjeta de débito	21
Cheque personal	18
Efectivo	39

En una muestra tomada en el 2003, en 220 compras en tienda se encontró que en 46 se usó tarjeta de crédito, en 67 se usó tarjeta de débito, en 33 se usó un cheque personal y en 74 se pagó en efectivo.

a. Con $\alpha = 0.01$ ¿puede concluir que en este periodo de cuatro años, de 1999 a 2003, ha habido un cambio en la manera en que los clientes pagan sus compras en las tiendas? ¿Cuál es el valor-*p*?
b. A partir de los datos muestrales del 2003, calcule el porcentaje de uso de cada método de pago. ¿Cuál parece haber sido el principal o los principales cambios ocurridos en este periodo de cuatro años?
c. En 2003, ¿qué porcentaje de los pagos se hicieron con tarjeta (tarjeta de crédito o débito)?

7. En el cuadro de accionistas de *The Wall Street Journal* se sigue el comportamiento de las 1 000 empresas principales de Estados Unidos (*The Wall Street Journal*, 10 de marzo de 2003). El comportamiento de cada empresa se califica con base en los rendimientos anuales totales, que comprenden cambios en los precios de las acciones y reinversión de dividendos. Las calificaciones se asignan dividiendo las 1000 empresas en 5 grupos, del A (20% mejor), B (siguiente 20%), hasta E (20% inferior). Lo que se muestra a continuación son las calificaciones en un año obtenidas por las 60 empresas más grandes. ¿El comportamiento de las empresas más grandes difiere de las 1000 empresas del cuadro de accionistas?

A	B	C	D	E
5	8	15	20	12

8. ¿Qué tan bueno es el servicio que dan las líneas aéreas a sus clientes? En un estudio las evaluaciones dadas por los clientes fueron las siguientes: 3% excelente, 28% bueno, 45% aceptable y 24% malo (*BusinessWeek*, 11 de septiembre de 2000). En otro estudio sobre las empresas de servicio telefónico, en una muestra de 400 adultos las evaluaciones fueron las siguientes: 24 excelente, 124 bueno, 172 aceptable y 80 malo. ¿La distribución de las evaluaciones a las empresas telefónicas difiere de la distribución de las evaluaciones a las líneas aéreas? Emplee $\alpha = 0.01$. ¿Cuál es su conclusión?

12.2 Prueba de independencia

Otra aplicación importante de la distribución chi-cuadrada es el empleo de datos muestrales para probar la independencia de dos variables. Para ilustrar la prueba de independencia se considerará la prueba de independencia realizada por la Alber's Brewery de Tucson, Arizona. Alber's produce y distribuye tres tipos de cerveza: ligera, clara y oscura. Al analizar los segmentos de mercado de las tres cervezas, el grupo de investigación de mercado de la empresa se preguntó si las preferencias de los consumidores por estos tipos de cerveza diferían entre hombres y mujeres. En caso de que las preferencias fueran independientes del género del consumidor, iniciarían una campaña publicitaria para todas las cervezas de Alber's. Pero, si las preferencias por los distintos tipos de cerveza dependían del género del consumidor, la empresa ajustaría sus promociones a los mercados.

Para determinar si la preferencia por un tipo de cerveza (ligera, clara u oscura) era independiente del género del consumidor (hombre o mujer) se usó una prueba de independencia. Las hipótesis para esta prueba de independencia fueron:

H_0: La preferencia por un tipo de cerveza es independiente del género del consumidor.
H_a: La preferencia por un tipo de cerveza no es independiente del género del consumidor.

Para describir la situación a estudio se usa la tabla 12.2. Después de identificar la población como todos los consumidores de cerveza, hombres y mujeres, se toma una muestra y a cada individuo

TABLA 12.2 TABLA DE CONTINGENCIA DE CERVEZA PREFERIDA Y GÉNERO DEL CONSUMIDOR

		Cerveza preferida		
		Ligera	**Clara**	**Oscura**
Género	**Hombre**	celda (1,1)	celda (1,2)	celda (1,3)
	Mujer	celda (2,1)	celda (2,2)	celda (2,3)

TABLA 12.3 RESULTADOS MUESTRALES DEL TIPO DE CERVEZA QUE PREFIEREN HOMBRES Y MUJERES (FRECUENCIAS OBSERVADAS)

		Cerveza preferida			
		Ligera	Clara	Oscura	Total
Género	Hombre	20	40	20	80
	Mujer	30	30	10	70
	Total	50	70	30	150

Para probar si dos variables son independientes, se toma una muestra y se usa una tabulación cruzada para resumir los datos de las dos variables simultáneamente.

se le pide que indique cuál de las tres cervezas de Alber's prefiere. Cada individuo de la muestra pertenecerá a una de las seis celdas de la tabla. Así, por ejemplo, se puede tener un individuo que sea hombre y que prefiera la cerveza clara (celda (1,2)), o una mujer que prefiera la cerveza ligera (celda (2,1)), o una mujer que prefiera la cerveza oscura (celda (2,3)), etc. Dado que en la tabla se han enumerado todas las posibles combinaciones de cerveza preferida y género o, en otras palabras, todas las posibles contingencias, a la tabla 12.2 se le llama **tabla de contingencia**. Como en la prueba de independencia se usa el formato de las tablas de contingencia, a esta prueba también se le suele llamar *prueba de tabla de contingencia*.

Suponga que toma una muestra aleatoria simple de 150 consumidores de cerveza. Cada individuo de la muestra prueba los tres tipos de cerveza y después se le pide que indique cuál prefiere o cuál es su primera elección. En la tabulación cruzada de la tabla 12.3 se presentan las respuestas obtenidas en el estudio. Como se ve, los datos para la prueba de independencia se obtienen contando las cantidades o frecuencias correspondientes a cada celda o categoría. De las 150 personas que formaban la muestra, 20 hombres prefirieron la cerveza ligera, 40 hombres prefirieron la cerveza clara, 20 hombres prefirieron la cerveza oscura, etcétera.

Los datos de la tabla 12.3 son las frecuencias observadas para cada una de las seis clases o categorías. Si determina las frecuencias esperadas bajo la suposición de independencia entre cerveza preferida y género del consumidor, se puede emplear la distribución chi-cuadrada para establecer si existe diferencia significativa entre las frecuencias observadas y las esperadas.

Las frecuencias esperadas para las celdas de la tabla de contingencia se basan en la idea siguiente. Primero se supone que la hipótesis nula es verdadera, es decir, que la cerveza preferida es independiente del género del consumidor. Después se observa que en toda la muestra de 150 consumidores de cerveza, 50 prefirieron la cerveza ligera, 70 prefirieron la cerveza clara, y 30 prefirieron la cerveza oscura. En términos de proporciones se concluye que $^{50}/_{150} = ^{1}/_{3}$ de los consumidores prefirió la cerveza ligera, $^{70}/_{150} = ^{7}/_{15}$ prefirieron la cerveza clara y $^{30}/_{150} = ^{1}/_{5}$ prefirió la cerveza oscura. Si la suposición de *independencia* es correcta, estas proporciones serán las que se observen tanto entre los hombres como entre las mujeres. Por consiguiente, bajo la suposición de independencia, es de esperarse que en la muestra de 80 consumidores del sexo masculino, $(^{1}/_{3})80 = 26.67$ prefieran la cerveza ligera, $(^{7}/_{15})80 = 37.33$ prefieran la cerveza clara y $(^{1}/_{5})80 = 16$ prefieran la cerveza oscura. Aplicando las proporciones correspondientes a los 70 consumidores del sexo femenino, se obtienen las frecuencias esperadas que se muestran en la tabla 12.4.

TABLA 12.4 FRECUENCIAS ESPERADAS SI LA PREFERENCIA POR UNO DE LOS TIPOS DE CERVEZA ES INDEPENDIENTE DEL GÉNERO DEL CONSUMIDOR

		Cerveza preferida			
		Ligera	Clara	Oscura	Total
Género	Hombre	26.67	37.33	16.00	80
	Mujer	23.33	32.67	14.00	70
	Total	50.00	70.00	30.00	150

Sea e_{ij} la frecuencia esperada en el renglón i columna j de la tabla de contingencia. Mediante dicha notación, ahora se reconsidera el cálculo de la frecuencia esperada correspondiente a los hombres (renglón $i = 1$) que prefieren la cerveza clara (columna $j = 2$); es decir, la frecuencia esperada e_{12}. Siguiendo el argumento anterior para el cálculo de las frecuencias esperadas, se ve que

$$e_{12} = (7/15)80 = 37.33$$

Expresión que se formula de una manera ligeramente diferente como

$$e_{12} = (7/15)80 = (70/150)80 = \frac{(80)(70)}{150} = 37.33$$

Observe que en esta expresión, 80 es el número total de hombres (total del renglón 1), 70 es la cantidad total de individuos que prefieren la cerveza clara (total de la columna 2) y 150 es el tamaño total de la muestra. De lo que se ve que

$$e_{12} = \frac{\text{(Total del renglón 1) (Total de la columna 2)}}{\text{Tamaño de la muestra}}$$

La generalización de esta expresión lleva a la fórmula siguiente para obtener las frecuencias esperadas en una tabla de contingencia para una prueba de independencia.

FRECUENCIAS ESPERADAS EN UNA TABLA DE CONTINGENCIA BAJO LA SUPOSICIÓN DE INDEPENDENCIA

$$e_{ij} = \frac{\text{(Total del renglón } i\text{) (Total de la columna } j\text{)}}{\text{Tamaño de la muestra}} \qquad \textbf{(12.2)}$$

Al aplicar esta fórmula para los consumidores hombres que prefieren cerveza oscura, se encuentra que la frecuencia esperada es $e_{13} = (80)(30)/150 = 16.00$, como se muestra en la tabla 12.4. Use la ecuación 12.2 para verificar las otras frecuencias esperadas que se presentan en la tabla 12.4.

El procedimiento de prueba para comparar las frecuencias esperadas de la tabla 12.4 con las frecuencias observadas de la tabla 12.3 es semejante a los cálculos para la prueba de bondad de ajuste de la sección 12.1. En concreto, el valor χ^2 que se basa en frecuencias observadas y esperadas se calcula como se indica a continuación.

ESTADÍSTICO DE PRUEBA PARA INDEPENDENCIA

$$\chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \qquad \textbf{(12.3)}$$

donde

f_{ij} = frecuencia observada en la categoría del renglón i columna j de la tabla de contingencia

e_{ij} = frecuencia esperada en la categoría del renglón i columna j de la tabla de contingencia, basada en la suposición de independencia.

Nota: Si una tabla de contingencia tiene n renglones y m columnas, el estadístico de prueba tiene una distribución chi-cuadrada con $(n - 1)(m - 1)$ grados de libertad, siempre y cuando en todas las categorías las frecuencias esperadas sean cinco o más.

TABLA 12.5 CÁLCULO DEL ESTADÍSTICO DE PRUEBA CHI-CUADRADA PARA DETERMINAR SI LA PREFERENCIA POR UN TIPO DE CERVEZA ES INDEPENDIENTE DEL GÉNERO DEL CONSUMIDOR

Género	Cerveza preferida	Frecuencia observada (f_{ij})	Frecuencia esperada (e_{ij})	Diferencia ($f_{ij} - e_{ij}$)	Cuadrado de la diferencia $(f_{ij} - e_{ij})^2$	Cuadrado de la diferencia dividido entre frecuencia esperada $(f_{ij} - e_{ij})^2/e_{ij}$
Hombre	Ligera	20	26.67	−6.67	44.44	1.67
Hombre	Clara	40	37.33	2.67	7.11	0.19
Hombre	Oscura	20	16.00	4.00	16.00	1.00
Mujer	Ligera	30	23.33	6.67	44.44	1.90
Mujer	Clara	30	32.67	−2.67	7.11	0.22
Mujer	Oscura	10	14.00	−4.00	16.00	1.14
	Total	150				$\chi^2 = 6.12$

La doble sumatoria que aparece en la ecuación (12.3) indica que el cálculo debe hacerse con todas las celdas que aparecen en la tabla de contingencia.

En las frecuencias esperadas que aparecen en la tabla 12.4, se ve que en cada categoría la frecuencia esperada es de 5 o más. Por tanto se puede proceder a calcular el estadístico de prueba chi-cuadrada. En la tabla 12.5 se presentan los cálculos necesarios para obtener el estadístico de prueba chi-cuadrada que se utiliza para determinar si la preferencia por una cerveza es independiente del género del consumidor. Como se observa, el valor del estadístico de prueba es $\chi^2 = 6.12$.

La prueba de independencia siempre es una prueba de una cola, en la que la región de rechazo se encuentra en la cola superior de la distribución chi-cuadrada.

El número de grados de libertad para la distribución chi-cuadrada adecuada se obtiene multiplicando el número de renglones menos 1 por el número de columnas menos 1. Como se tienen dos renglones y tres columnas, los grados de libertad son $(2 - 1)(3 - 1) = 2$. Como ocurre en la prueba de bondad de ajuste, en la prueba de independencia se rechaza H_0 si las diferencias entre frecuencias observadas y esperadas dan un valor grande del estadístico de prueba. De manera que la prueba de independencia es también una prueba de la cola superior. La tabla de la distribución chi-cuadrada (tabla 3 del apéndice B), proporciona la información siguiente para 2 grados de libertad.

Área en la cola superior	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
Valor χ^2 (2 *df*)	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597

$\chi^2 = 6.12$

El estadístico de prueba, $\chi^2 = 6.12$, se encuentra entre 5.991 y 7.378. Por tanto, el área correspondiente en la cola superior o valor-*p* está entre 0.05 y 0.025. Empleando los procedimientos de Minitab o de Excel que se presentan en el apéndice F, se obtiene que, valor-p = 0.0469. Como el valor-$p \leq \alpha$ 0.05, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que la preferencia por una cerveza no es independiente del género del consumidor.

Para simplificar los cálculos que se requieren en una prueba de independencia se usan paquetes de software como Minitab o Excel. La información a suministrar en estos procedimientos es la tabla de contingencia con las frecuencias observadas como se muestran en la tabla 12.3. El software calcula automáticamente las frecuencias esperadas, el valor del estadístico de prueba χ^2 y el valor-*p*. En los apéndices 12.1 y 12.2 se presentan los procedimientos de Minitab y de Excel para esta prueba de independencia. En la figura 12.1 aparecen los resultados que da Minitab para la prueba de la Alber's Brewery.

Mediante una comparación informal de las frecuencias observadas y esperadas se obtiene una idea de la dependencia entre cerveza preferida y género. Al observar las tablas 12.3 y 12.4 resalta que en los consumidores de sexo masculino las frecuencias observadas en la preferencia por cervezas clara y oscura son más altas que las frecuencias esperadas, mientras que en las mu-

FIGURA 12.1 RESULTADOS DE MINITAB PARA LA PRUEBA DE INDEPENDENCIA DE LA ALBER'S BREWERY

```
Expected counts are printed below observed counts

         Light   Regular    Dark   Total
    1       20        40      20      80
         26.67     37.33   16.00

    2       30        30      10      70
         23.33     32.67   14.00

Total       50        70      30     150

DF = 2, P-Value = 0.047
```

jeres la frecuencia observada en la preferencia por cerveza ligera es mayor que la frecuencia esperada. Dichas observaciones permiten comprender las diferentes preferencias por cerveza entre los hombres y las mujeres.

A continuación se resumen los pasos para una prueba de tabla de contingencia para independencia.

PRUEBA DE INDEPENDENCIA: RESUMEN

1. Establecer las hipótesis nula y alternativa.

H_0: La variable de las columnas es independiente de la variable de los renglones
H_a: La variable de las columnas no es independiente de la variable de los renglones

2. Seleccionar una muestra aleatoria y anotar en cada celda de la tabla de contingencias las frecuencias observadas.
3. Emplear la ecuación (12.2) para calcular las frecuencias esperadas de cada celda.
4. Utilizar la ecuación (12.3) para calcular el valor del estadístico de prueba.
5. Regla de rechazo:

Método del valor-p:	Rechazar H_0 si el valor-$p \leq \alpha$
Método del valor crítico:	Rechazar H_0 si $\chi^2 \geq \chi^2_\alpha$

donde α es el nivel de significancia, y los n renglones y las m columnas dan los $(n - 1)(m - 1)$ grados de libertad.

NOTAS Y COMENTARIOS

El estadístico de prueba para las pruebas chi-cuadrada de este capítulo requiere una frecuencia esperada de cinco en cada categoría. Si en una categoría la frecuencia esperada es menor que cinco, es conveniente combinar dos categorías adyacentes para tener una frecuencia esperada de cinco o más en cada categoría.

Ejercicios

Métodos

Autoexamen

9. La siguiente tabla de contingencia 2 × 3 contiene las frecuencias observadas en una muestra de tamaño 200. Pruebe la independencia de las variables de renglón y de columna usando la prueba χ^2 con $\alpha = 0.05$.

Variable de los renglones	Variable de las columnas		
	A	B	C
P	20	44	50
Q	30	26	30

10. La siguiente tabla de contingencia 3 × 3 contiene las frecuencias observadas en una muestra de 240. Pruebe la independencia de la variable de los renglones y la variable en las columnas usando la prueba χ^2 con $\alpha = 0.05$.

Variable de los renglones	Variable de las columnas		
	A	B	C
P	20	30	20
Q	30	60	25
R	10	15	30

Aplicaciones

Auto examen

11. Una de las preguntas a los suscriptores de *BusinessWeek* fue, "En sus viajes de negocios de los últimos 12 meses, ¿qué tipo de boleto de avión ha comprado?" Los datos obtenidos se presentan en la tabla de contingencia siguiente.

Tipo de boleto	Tipo de vuelo	
	Vuelo nacional	Vuelo internacional
Primera clase	29	22
Clase negocios/ejecutivo	95	121
Vuelo tradicional/clase económica	518	135

Use $\alpha = 0.05$ y pruebe la independencia entre tipo de vuelo y tipo de boleto. ¿Cuál es la conclusión?

12. Visa Card USA estudió la frecuencia con que los consumidores de diversos rangos de edades usan tarjetas plásticas (de crédito o de débito) al pagar sus compras (Associated Press, 16 de enero de 2006). A continuación se presentan los datos muestrales de 300 clientes divididos en cuatro grupos de edades.

Forma de pago	Grupo de edad			
	18–24	25–34	35–44	45 y más
Plástico	21	27	27	36
Efectivo o cheque	21	36	42	90

a. Pruebe la independencia entre el método de pago y el grupo de edad. ¿Cuál es el valor-p? Usando $\alpha = 0.05$, ¿cuál es su conclusión?
b. Si la forma de pago y el grupo de edad no son independientes, ¿qué observación puede hacer acerca de la diferencia en el uso de plástico en los diversos grupos de edades?
c. ¿Qué consecuencias tiene este estudio para empresas como Visa, MasterCard y Discover?

13. Dados los incrementos porcentuales anuales de dos dígitos en los costos de los seguros médicos (en Estados Unidos), cada día más trabajadores carecen de un seguro de esta naturaleza (*USA Today*, 23 de enero de 2004). Los datos muestrales siguientes proporcionan una comparación entre los trabajadores con y sin seguro médico en empresas pequeñas, medianas y grandes. Para los propósitos de este estudio, empresas pequeñas son empresas que tienen menos de 100 emplea-

dos. Empresas medianas son empresas que tienen de 100 a 999 empleados y empresas gran des son empresas que tienen 1000 o más empleados. Los datos muestrales corresponden a 50 empleados de empresas pequeñas, 75 empleados de empresas medianas y 100 empleados de empresas grandes.

	Seguro médico		
Tamaño de la empresa	**Sí**	**No**	**Total**
Pequeño	36	14	50
Mediano	65	10	75
Grande	88	12	100

a. Realice una prueba de independencia para determinar si tener un seguro médico es independiente del tamaño de la empresa.
b. El artículo de *USA Today* considera más probable que los empleados de empresas pequeñas carezcan de un seguro médico. Use porcentajes basados en la tabla anterior para apoyar dicha conclusión.

14. Un estudio del Public Interest Research Group (PIRG) del estado de Washington indica que 46% de los estudiantes universitarios de tiempo completo trabaja 25 o más horas por semana. El estudio del PIRG proporciona datos sobre los efectos del trabajo en las calificaciones *USA Today*, 17 de abril de 2002). En este estudio, de 200 estudiantes que conformaban la muestra, 90 trabajaban 1-15 horas por semana, 60 trabajaban 16-24 horas por semana y 50 trabajaban 25-34 horas por semana. A continuación se presentan las cantidades muestrales de estudiantes que indicaron que su trabajo tenía un efecto positivo, ningún efecto o un efecto negativo sobre sus calificaciones.

	Efecto sobre las calificaciones			
Horas trabajadas por semana	**Positivo**	**Ninguno**	**Negativo**	**Total**
1–15 horas	26	50	14	90
16–24 horas	16	27	17	60
25–34 horas	11	19	20	50

a. Realice una prueba de independencia para determinar si el efecto sobre las calificaciones es independiente de las horas trabajadas por semana. Use $\alpha = 0.05$. ¿Cuál es el valor-p y cuál es su conclusión?
b. Use porcentajes de renglón para conocer más acerca del efecto del trabajo sobre las calificaciones.

15. FlightStats, Inc., recoge datos sobre el número de vuelos programados y el número de vuelos efectuados en los principales aeropuertos de Estados Unidos. Los datos de FlightStats indican que 56% de los vuelos programados en los aeropuertos de Newark, La Guardia y Kennedy se efectuaron durante una tormenta de nieve que duró tres días (*The Wall Street Journal*, 21 de febrero de 2006). Todas las aerolíneas afirman que siempre operan dentro de parámetros de seguridad preestablecidos: si las condiciones son muy malas, no vuelan. Los siguientes datos presentan una muestra de 400 vuelos programados durante tormentas de nieve.

	Aerolínea				
¿Voló?	**American**	**Continental**	**Delta**	**United**	**Total**
Sí	48	69	68	25	210
No	52	41	62	35	190

Use la prueba de independencia chi-cuadrada y 0.05 como nivel de significancia para analizar estos datos. ¿Cuál es la conclusión? ¿Qué aerolínea elegiría para volar en semejantes condiciones de tormentas de nieve? Explique.

16. En los negocios cada vez se hacen más pedidos en línea. Una asociación recabó datos sobre la proporción de órdenes electrónicas llenadas correctamente de acuerdo con el tipo de industria (*Investor's Business Daily*, 8 de mayo de 2000). En una muestra de 700 órdenes electrónicas se obtuvieron los resultados siguientes.

	Industria			
Orden	**Farmacéutica**	**De consumo**	**Computadoras**	**Telecomunicación**
Correcta	207	136	151	178
Incorrecta	3	4	9	12

a. Haga una prueba de hipótesis para determinar si el llenado correcto de las órdenes es independiente de la industria. Use $\alpha = 0.05$. ¿Cuál es la conclusión?
b. ¿Qué industria tiene el porcentaje más alto de órdenes llenadas correctamente?

17. La National Sleep Foundation realiza encuestas para determinar si las horas de sueño por noche son independientes de la edad (*Newsweek*, 19 de enero de 2004). Las siguientes son las horas de sueño entre semana en una muestra de personas de 49 años o menos y en otra muestra de personas de 50 años o más.

	Horas de sueño				
Edad	**Menos de 6**	**6 a 6.9**	**7 a 7.9**	**8 o más**	**Total**
49 o menos	38	60	77	65	240
50 o más	36	57	75	92	260

a. Realice una prueba de independencia para determinar si las horas de sueño entre semana son independientes de la edad. Use $\alpha = 0.05$. ¿Cuál es el valor-p y cuál es la conclusión?
b. Dé una estimación del porcentaje de personas que duermen menos de 6 horas, de 6 a 6.9 horas, de 7 a 7.9 horas y 8 horas o más.

18. Muestras tomadas en tres ciudades, Anchorage, Atlanta y Miniápolis, se usaron para obtener información acerca del porcentaje de parejas casadas en las que los dos cónyuges trabajan (*USA Today*, 15 de enero de 2006). Analice los datos siguientes para ver si el hecho de que los dos cónyuges trabajen es independiente del lugar donde viven. Use 0.05 como nivel de significancia. ¿Cuál es su conclusión? Dé la estimación general del porcentaje de parejas casadas en las que ambos cónyuges trabajan.

	Ubicación		
Trabajan	**Anchorage**	**Atlanta**	**Minneapolis**
Ambos	57	70	63
Sólo uno	33	50	90

19. En un programa de televisión los dos presentadores suelen dar la impresión de no estar en absoluto de acuerdo al evaluar películas. En la evaluación de una película pueden estar a favor ("pul-

gar hacia arriba”), en contra (“pulgar hacia abajo”) o indiferente. Se presentan las evaluaciones de 160 películas hechas por los dos presentadores.

	Presentador B		
Presentador A	**A favor**	**Indiferente**	**En contra**
A favor	24	8	13
Indiferente	8	13	11
En contra	10	9	64

Para analizar estos datos use la prueba chi-cuadrada de independencia con 0.01 como nivel de significancia. ¿Cuál es la conclusión?

12.3 Prueba de bondad de ajuste: distribuciones de Poisson y normal

En la sección 12.1 se introdujo la prueba de bondad de ajuste para poblaciones multinomiales. En general, la prueba de bondad de ajuste puede usarse con cualquier distribución de probabilidad hipotética. En esta sección se ilustra el uso de la prueba de bondad de ajuste para el caso en que se tiene la hipótesis de que la población tiene una distribución de Poisson o una distribución normal. Como verá, en la prueba de bondad de ajuste y en el uso de la distribución chi-cuadrada se sigue el mismo procedimiento general aplicado para la prueba de bondad de ajuste de la sección 12.1.

Distribución de Poisson

El uso de la prueba de bondad de ajuste se ilustra en el caso de una distribución poblacional que hipotéticamente tiene una distribución de Poisson. Considere, por ejemplo, las llegadas de los clientes al Dubek’s Food Market en Tallase, Florida. Dado que recién ha habido algunos problemas de personal, los gerentes solicitan los servicios de una empresa de consultoría para que les ayude en la programación de los empleados de cajas. Después de revisar el avance de las filas en las cajas, la empresa de consultoría sugerirá un procedimiento para la programación de los empleados de cajas. Este procedimiento se basa en un análisis matemático de las filas y sólo es aplicable si el número de llegadas de clientes durante un determinado lapso de tiempo sigue una distribución de Poisson. Por tanto, antes de poner en marcha el procedimiento de programación, habrá que recolectar datos sobre las llegadas de los clientes y realizar una prueba estadística para ver si es razonable suponer que las llegadas de los clientes siguen una distribución de Poisson.

Las llegadas de los clientes a la tienda se definen en términos de *cantidad de clientes* que entran en la tienda durante intervalos de 5 minutos. Por tanto las hipótesis nula y alternativa en este estudio son las siguientes:

H_0: La cantidad de clientes que entran en la tienda durante intervalos de 5 minutos tiene una distribución de probabilidad de Poisson

H_a: La cantidad de clientes que entran en la tienda durante intervalos de 5 minutos no tienen una distribución de probabilidad de Poisson

Si una muestra de llegadas de clientes indica que no se puede rechazar H_0, Dubeck’s procederá a poner en marcha el proceso de programación de la empresa de consultoría. Pero, si la muestra lleva a rechazar H_0, no se podrá suponer que las llegadas siguen una distribución de Poisson y habrá que considerar otro procedimiento de programación.

Para probar la suposición de que las llegadas de los clientes en las mañanas de los días entre semana siguen una distribución de Poisson, un empleado de la tienda toma una muestra aleatoria de 128 intervalos de 5 minutos, en las mañanas de tres semanas consecutivas. Durante cada uno de los intervalos de 5 minutos que forman la muestra, el empleado registra el número de lle-

TABLA 12.6

Frecuencias observadas en las llegadas de los clientes de Dubek's en una muestra de 128 intervalos de 5 minutos

Número de llegadas de clientes	Frecuencia observada
0	2
1	8
2	10
3	12
4	18
5	22
6	22
7	16
8	12
9	6
Total	128

gadas de clientes. Para resumir los datos, el empleado determina el número de intervalos de 5 minutos en los que no hubo ninguna llegada, el número de intervalos de 5 minutos en los que hubo una llegada, el número de intervalos de 5 minutos en los que hubo dos llegadas, etc. Estos datos se presentan en la tabla 12.6

La tabla 12.6 da las frecuencias observadas en las 10 categorías. Ahora se usa la prueba de bondad de ajuste para determinar si la muestra de los 128 lapsos de tiempo favorecen la hipótesis de que las llegadas tienen una distribución de Poisson. Para usar la prueba de bondad de ajuste, se necesitan considerar, las frecuencias esperadas para cada una de las 10 categorías, bajo la suposición de que la distribución de las llegadas siga una distribución de Poisson. Es decir, si en realidad las llegadas de los clientes siguen una distribución de Poisson, se necesita calcular el número esperado de lapsos de tiempo en los que llegarán cero clientes, un cliente, dos clientes, etcétera.

La función de probabilidad de Poisson, que ya se presentó en el capítulo 5, es

$$f(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \tag{12.4}$$

En esta función, μ representa la media o número esperado de llegadas de clientes en lapsos de 5 minutos, x representa la variable aleatoria del número de llegadas de clientes en un lapso de 5 minutos y $f(x)$ es la probabilidad de x llegadas de clientes en un lapso de 5 minutos.

Antes de usar la ecuación (12.4) para calcular las probabilidades de Poisson se necesita una estimación de μ, el número medio de llegadas de clientes en un lapso de 5 minutos. La media muestral de los datos de la tabla 12.6 proporciona dicha estimación. Como se tienen dos lapsos de 5 minutos en los que no llegó ningún cliente, ocho lapsos de 5 minutos en los que llegó un cliente, etc., el número total de llegadas de clientes en los 128 lapsos de 5 minutos es $0(2) + 1(8) + 2(10) + \cdots + 9(6) = 640$. Las 640 llegadas de clientes en los 128 lapsos de tiempo de la muestra dan una media de llegadas $\mu = 640/128 = 5$ llegadas de clientes por lapso de 5 minutos. Con este valor como media para la distribución de Poisson, una estimación de la función de probabilidad de Poisson en el caso de Dubek's es

$$f(x) = \frac{5^x e^{-5}}{x!} \tag{12.5}$$

Esta función de probabilidad puede evaluarse para distintos valores de x y determinar así la probabilidad que corresponde a las diferentes categorías de llegadas. En la tabla 12.7 se presentan tales probabilidades, las cuales pueden encontrarse también en la tabla 7 del apéndice B. Por

TABLA 12.7 FRECUENCIAS ESPERADAS EN LAS LLEGADAS DE LOS CLIENTES A DUBEK'S SUPONIENDO QUE SIGAN UNA DISTRIBUCIÓN DE POISSON CON $\mu = 5$

Número de llegadas de clientes (x)	Probabilidad de Poisson $f(x)$	Número esperado de lapsos de 5 minutos con x llegadas, $128 f(x)$
0	0.0067	0.86
1	0.0337	4.31
2	0.0842	10.78
3	0.1404	17.97
4	0.1755	22.46
5	0.1755	22.46
6	0.1462	18.71
7	0.1044	13.36
8	0.0653	8.36
9	0.0363	4.65
10 o más	0.0318	4.07
	Total	128.00

ejemplo, la probabilidad de que lleguen cero clientes en un lapso de cinco minutos es $f(0) = 0.0067$, la probabilidad de que llegue un cliente en un lapso de 5 minutos es $f(1) = 0.0337$, etc. Como se vio en la sección 12.1, la frecuencia esperada en cada una de las categorías se encuentra multiplicando su probabilidad por el tamaño de la muestra. Por ejemplo, el número de lapsos de tiempo con cero llegadas es $(0.0067)(128) = 0.86$, el número esperado de lapsos de tiempo con una llegada es $(0.0337)(128) = 4.31$, etcétera.

Cuando en alguna categoría el número esperado es menor que cinco, no se satisfacen las condiciones para la prueba χ^2. Cuando esto ocurre, se pueden combinar categorías adyacentes para que el número esperado sea cinco o más.

Antes de hacer los cálculos habituales para comparar las frecuencias observadas y esperadas, hay que observar que en la tabla 12.7, hay cuatro categorías que tienen una frecuencia esperada menor que cinco. Esto viola los requerimientos para el uso de la distribución chi-cuadrada. Sin embargo, no es una dificultad, ya que se pueden combinar categorías menores que cinco para satisfacer la condición de que la frecuencia esperada sea "por lo menos cinco". Aquí, se combinan 0 y 1 en una sola categoría y también se combinan 9 y "10 o más" en una sola categoría. De esta manera se satisface la regla de un mínimo de cinco como frecuencia esperada en cada categoría. En la tabla 12.8 se presentan las frecuencias observadas y las esperadas después de combinar estas categorías.

Como en la sección 12.1, la prueba de bondad de ajuste se centra en las diferencias entre frecuencias observadas y esperadas, $f_i - e_i$. Por tanto, para calcular el estadístico de prueba chi-cuadrada se usarán las frecuencias observadas y las esperadas de la tabla 12.8.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i}$$

En la tabla 12.9 se muestran los cálculos necesarios para obtener el valor del estadístico de prueba chi-cuadrada. El valor del estadístico de prueba es $\chi^2 = 10.96$.

En general, en una prueba de bondad de ajuste la distribución chi-cuadrada tiene $k - p - 1$ grados de libertad, donde k es el número de categorías y p es el número de parámetros poblacionales estimados a partir de los datos muestrales. En este caso, como se ve en la tabla 12.9, $k =$ 9 categorías. Como los datos muestrales se usaron para estimar la media de la distribución de Poisson, $p = 1$. Por ende, se tiene $k - p - = k - 2$ grados de libertad. Como $k = 9$, se tienen $9 - 2 = 7$ grados de libertad.

Suponga que en la prueba de la hipótesis nula de que la distribución de probabilidad de las llegadas de los clientes es una distribución de Poisson se usa 0.05 como nivel de significancia. Para probar esta hipótesis, se necesita determinar el valor-p correspondiente al valor del estadístico de prueba $\chi^2 = 10.96$ hallando el área en la cola superior de la distribución chi-cuadrada con 7 grados de libertad. En la tabla 3 del apéndice B se encuentra que $\chi^2 = 10.96$ corresponde a un área, en la cola superior, mayor que 0.10. Por tanto se sabe que el valor-p es mayor que 0.10. Con los procedimientos de Minitab y de Excel que se describen en el apéndice F se obtiene que va-

TABLA 12.8 FRECUENCIAS OBSERVADAS Y ESPERADAS EN LAS LLEGADAS DE LOS CLIENTES A DUBEK´S, DESPUÉS DE COMBINAR CATEGORÍAS

Número de llegadas de clientes (x)	Frecuencia observada (f_i)	Frecuencia esperada (e_i)
0 or 1	10	5.17
2	10	10.78
3	12	17.97
4	18	22.46
5	22	22.46
6	22	18.72
7	16	13.37
8	12	8.36
9 o más	6	8.72
Total	128	128.00

TABLA 12.9 CÁLCULO DEL ESTADÍSTICO DE PRUEBA CHI-CUADRADA PARA EL ESTUDIO DE DUBEK'S FOOD MARKET

Número de llegadas de clientes (x)	Frecuencia observada (f_i)	Frecuencia esperada (e_i)	Diferencia ($f_i - e_i$)	Cuadrado de la diferencia $(f_i - e_i)^2$	Cuadrado de la diferencia dividido entre la frecuencia esperada $(f_i - e_i)^2/e_i$
0 o 1	10	5.17	4.83	23.28	4.50
2	10	10.78	−0.78	0.61	0.06
3	12	17.97	−5.97	35.62	1.98
4	18	22.46	−4.46	19.89	0.89
5	22	22.46	−0.46	0.21	0.01
6	22	18.72	3.28	10.78	0.58
7	16	13.37	2.63	6.92	0.52
8	12	8.36	3.64	13.28	1.59
9 o más	6	8.72	−2.72	7.38	0.85
Total	128	128.00			$\chi^2 = 10.96$

lor-$p = 0.1404$. Como el valor-$p > \alpha = 0.05$, no se puede rechazar H_0. De manera que no se puede rechazar la suposición de que la distribución de probabilidad de las llegadas de los clientes, en las mañanas entre semana, siga una distribución de probabilidad de Poisson. De esta manera, los administradores de Dubek's pueden continuar con el procedimiento de programación para las mañanas de los días entre semana.

PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE PARA LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON: RESUMEN

1. Establecer las hipótesis nula y alternativa.

H_0: La población tiene una distribución de Poisson
H_a: La población no tiene una distribución de Poisson

2. Tomar una muestra aleatoria y
a. Para cada valor de la variable aleatoria de Poisson anotar la frecuencia observada f_i.
b. Calcular el número medio μ de las ocurrencias.

3. Calcular, para cada valor de la variable aleatoria de Poisson, la frecuencia esperada e_i de ocurrencias. Multiplicar el tamaño de la muestra por la probabilidad de su ocurrencia de cada valor de la variable aleatoria de Poisson. Si para algún valor hay menos de cinco ocurrencias esperadas, combinar valores adyacentes y reducir el número de categorías cuanto sea necesario.

4. Calcular el valor del estadístico de prueba.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i}$$

5. Regla de rechazo:

Método del valor-p: Rechazar H_0 si el valor-$p \leq \alpha$
Método del valor crítico: Rechazar H_0 si $\chi^2 \geq \chi^2_\alpha$

donde α es el nivel de significancia y los grados de libertad son $k - 2$.

Distribución normal

La prueba de bondad de ajuste para la distribución normal también se basa en el uso de la distribución chi-cuadrada. Se sigue un procedimiento similar al aplicado para la distribución de Poisson. Las frecuencias observadas en las diversas categorías de los datos muestrales se comparan con las frecuencias esperadas, cuando se supone que la población tiene una distribución normal. Como la distribución normal es continua, es necesario modificar la manera en que se definen las categorías y la forma en que se calculan las frecuencias esperadas. La prueba de bondad de ajuste para una distribución normal se va a ilustrar empleando los datos de los exámenes presentados por las personas que solicitan empleo en la empresa Chemline, Inc.; estos datos se presentan en la tabla 12.10.

TABLA 12.10 PUNTUACIONES OBTENIDAS POR LOS INTEGRANTES DE UNA MUESTRA ALEATORIA DE 50 SOLICITANTES DE EMPLEO EN LA PRUEBA DE APTITUDES DE CHEMLINE

71	66	61	65	54	93
60	86	70	70	73	73
55	63	56	62	76	54
82	79	76	68	53	58
85	80	56	61	61	64
65	62	90	69	76	79
77	54	64	74	65	65
61	56	63	80	56	71
79	84				

archivo en CD
Chemline

Cada año Chemline contrata cerca de 400 empleados nuevos para sus cuatro fábricas en Estados Unidos. El director de personal se pregunta si la población de las puntuaciones en los exámenes de los solicitantes tendrá una distribución normal. Si es así, esta distribución podría servir para evaluar las puntuaciones; es decir, podrían identificarse fácilmente las puntuaciones en 20% superior, en 40% inferior, etc. Por tanto, se desea probar la hipótesis nula de que la población de las puntuaciones de estos exámenes tiene una distribución normal.

Para empezar, se obtendrán estimaciones de la media y de la desviación estándar de la distribución normal que se considera en la hipótesis nula, usando los datos de la tabla 12.10. La media muestral $\bar{x}$ y la desviación estándar muestral s se usan como estimadores puntuales de la media y de la desviación estándar de la distribución normal. Los cálculos son los siguientes.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{3421}{50} = 68.42$$

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{5310.0369}{49}} = 10.41$$

Con estos datos se establecen las hipótesis siguientes acerca de la distribución de las puntuaciones de examen.

H_0: La población de las puntuaciones de examen tiene una distribución normal, con una media de 68.42 y desviación estándar de 10.41.

H_a: La población de las puntuaciones de examen no tiene una distribución normal, con media de 68.42 y desviación estándar de 10.41.

En la figura 12.2 se muestra esta distribución normal hipotética.

FIGURA 12.2 DISTRIBUCIÓN NORMAL HIPOTÉTICA DE PUNTUACIONES EN LA PRUEBA DE APTITUDES DE CHEMLINE

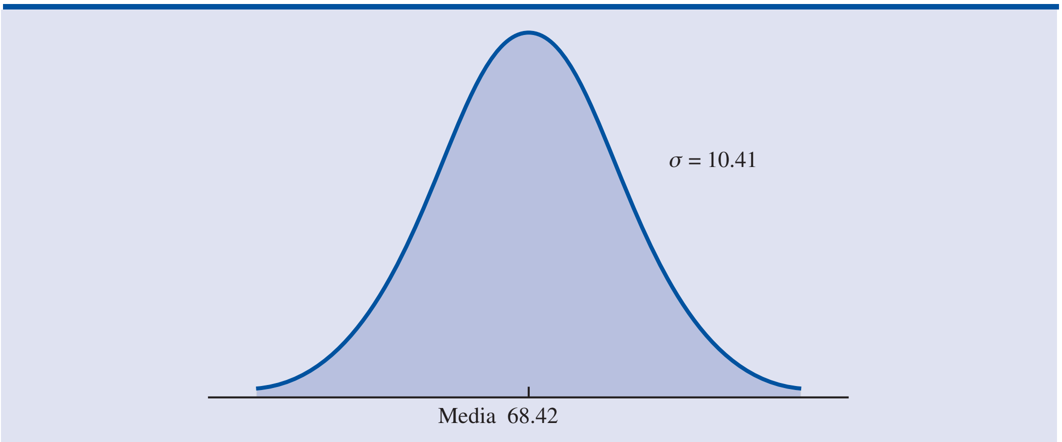
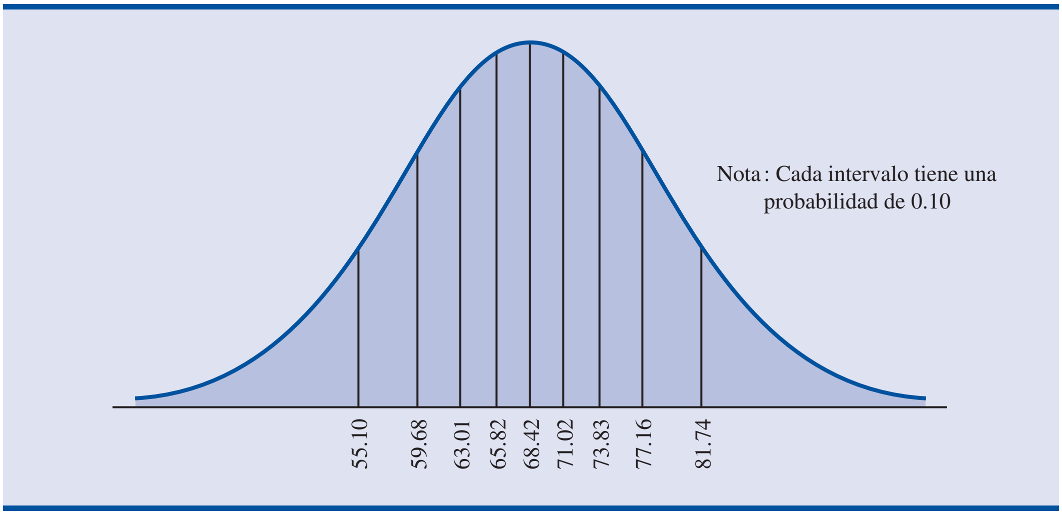


FIGURA 12.3 DISTRIBUCIÓN NORMAL EN EL EJEMPLO DE CHEMLINE CON 10 INTERVALOS DE PROBABILIDAD IGUAL



Ahora se verá cómo definir las categorías para una prueba de bondad de ajuste para una distribución normal. En el caso de la distribución de probabilidad discreta en la prueba para la distribución de Poisson, fue fácil definir las categorías en términos del número de llegadas de los clientes, 0, 1, 2, etc. Sin embargo, en el caso de la distribución de probabilidad normal que es continua, es necesario emplear un procedimiento diferente para definir las categorías. Se necesita definir las categorías en términos de *intervalos* de puntuaciones de examen.

Recuerde la regla de que en cada intervalo o categoría, la frecuencia esperada debe ser por lo menos cinco. Las categorías para las puntuaciones de examen se definen de manera que la frecuencia esperada en cada categoría sea por lo menos cinco. Como el tamaño de la muestra es 50, una manera de establecer las categorías es dividir la distribución normal en 10 intervalos con una misma probabilidad (véase la figura 12.3). Como el tamaño de la muestra es 50, se espera tener cinco resultados en cada intervalo o categoría, con lo que se satisface la regla de las cinco frecuencias esperadas.

Como se trata de una distribución de probabilidad continua, se establecen intervalos de manera que en cada uno la frecuencia esperada sea cinco o más.

El procedimiento para calcular los límites de las categorías es el siguiente. Como se trata de una distribución de probabilidad normal, para determinar estos límites se emplean las tablas de la distribución de probabilidad normal estándar. Primero se determina la puntuación de examen que separa el 10% inferior de las puntuaciones. En la tabla 1 del apéndice B se encuentra que el valor z correspondiente a esta puntuación de examen es -1.28. Por tanto, la puntuación de examen $x = 68.42 - 1.28(10.41) = 55.10$ es el valor que separa el 10% inferior de las puntuaciones de examen. Para el 20% inferior se tiene $z = -0.84$ y, por tanto, $x = 68.42 - 0.84(10.41) = 59.68$. Continuando de esta manera se obtienen los valores siguientes para las puntuaciones de examen.

Porcentaje	z	Puntuación de examen
10%	-1.28	$68.42 - 1.28(10.41) = 55.10$
20%	-0.84	$68.42 - 0.84(10.41) = 59.68$
30%	-0.52	$68.42 - 0.52(10.41) = 63.01$
40%	-0.25	$68.42 - 0.25(10.41) = 65.82$
50%	0.00	$68.42 + 0(10.41) = 68.42$
60%	$+0.25$	$68.42 + 0.25(10.41) = 71.02$
70%	$+0.52$	$68.42 + 0.52(10.41) = 73.83$
80%	$+0.84$	$68.42 + 0.84(10.41) = 77.16$
90%	$+1.28$	$68.42 + 1.28(10.41) = 81.74$

En la gráfica 12.3 se observan estos puntos de separación o límites de los intervalos.

TABLA 12.11 FRECUENCIAS ESPERADAS Y OBSERVADAS DE LAS PUNTUACIONES DE EXAMEN DE LOS SOLICITANTES DE EMPLEO EN CHEMLINE

Intervalo de puntuaciones de examen	Frecuencia observada (f_i)	Frecuencia esperada (e_i)
Menores que 55.10	5	5
55.10 a 59.68	5	5
59.68 a 63.01	9	5
63.01 a 65.82	6	5
65.82 a 68.42	2	5
68.42 a 71.02	5	5
71.02 a 73.83	2	5
73.83 a 77.16	5	5
77.16 a 81.74	5	5
81.74 o más	6	5
Total	50	50

Una vez definidas las categorías o intervalos de las puntuaciones de examen y siendo que la frecuencia esperada en cada categoría es cinco, se usan los datos muestrales de la tabla 12.10 y se determinan las frecuencias observadas en estas categorías. Con esto se obtienen los resultados que aparecen en la tabla 12.11.

Una vez que se tienen los resultados de la tabla 12.11, la prueba de bondad de ajuste procede exactamente como antes. Es decir, se comparan los resultados observados y esperados calculando el valor de χ^2. En la tabla 12.12 se muestran los cálculos necesarios para obtener el estadístico de prueba chi-cuadrada. Como se ve, el valor del estadístico de prueba es $\chi^2 = 7.2$.

Para determinar si este valor de 7.2 obtenido para χ^2 es suficientemente grande para rechazar H_0 se necesita consultar las tablas de la distribución chi-cuadrada. Al aplicar la regla para el cálculo del número de grados de libertad en la prueba de bondad de ajuste, se tiene, $k - p - 1 = 10 - 2 - 1 = 7$ grados de libertad, ya que se tienen 10 categorías y $p = 2$ parámetros (media y desviación estándar) estimados mediante los datos muestrales.

TABLA 12.12 CÁLCULO DEL ESTADÍSTICO DE PRUEBA CHI-CUADRADA EN EL EJEMPLO DE LAS PUNTUACIONES DE EXAMEN DE LOS SOLICITANTES DE EMPLEO EN CHEMLINE

Intervalos de puntuaciones de examen	Frecuencia observada (f_i)	Frecuencia esperada (e_i)	Diferencia ($f_i - e_i$)	Cuadrado de la diferencia $(f_i - e_i)^2$	Cuadrado de la diferencia dividido entre la frecuencia esperada $(f_i - e_i)^2/e_i$
Menores que 55.10	5	5	0	0	0.0
55.10 a 59.68	5	5	0	0	0.0
59.68 a 63.01	9	5	4	16	3.2
63.01 a 65.82	6	5	1	1	0.2
65.82 a 68.42	2	5	−3	9	1.8
68.42 a 71.02	5	5	0	0	0.0
71.02 a 73.83	2	5	−3	9	1.8
73.83 a 77.16	5	5	0	0	0.0
77.16 a 81.74	5	5	0	0	0.0
81.74 y más	6	5	1	1	0.2
Total	50	50			$\chi^2 = 7.2$

Como se estiman dos parámetros de la distribución normal, se pierden dos grados de libertad para la prueba χ^2.

Suponga que se prueba la hipótesis nula de que la distribución de las puntuaciones de examen es una distribución normal usando 0.10 como nivel de significancia. Para probar esta hipótesis se necesita determinar el valor-*p* para el estadístico de prueba $\chi^2 = 7.2$ determinando el área en la cola superior correspondiente en la distribución chi-cuadrada con 7 grados de libertad. Consultando la tabla 3 del apéndice B, se encuentra que el área en la cola superior correspondiente a $\chi^2 = 7.2$ es mayor que 0.10. Por consiguiente, se sabe que el valor-*p* es mayor que 0.10. Con los procedimientos de Minitab y Excel presentados en el apéndice F al final del libro, se encuentra que $\chi^2 = 7.2$ da un valor-$p = 0.4084$. Como el valor-$p > \alpha = 0.10$ no se puede rechazar la hipótesis nula de que las puntuaciones de examen de los solicitantes de empleo en Chemline sea una distribución normal. La distribución normal se puede usar como ayuda en la interpretación de las puntuaciones de examen. A continuación se presenta un resumen de la prueba de bondad de ajuste para una distribución normal.

PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE PARA UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL: RESUMEN

1. Establecer las hipótesis nula y alternativa.

H_0: La población tiene una distribución normal
H_a: La población no tiene una distribución normal

2. Tomar una muestra aleatoria y
   a. Calcular la media muestral y la desviación estándar muestral.
   b. Definir intervalos de valores de manera que la frecuencia esperada en cada intervalo sea por lo menos cinco. Usar intervalos de igual probabilidad es un buen enfoque.
   c. En cada uno de los intervalos definidos anotar la frecuencia observada f_i en los datos.

3. Calcular el número esperado de ocurrencias e_i en cada uno de los intervalos de valores definidos en el paso 2 b. Multiplicar el tamaño de la muestra por la probabilidad de que una variable aleatoria normal pertenezca al intervalo.

4. Calcular el valor del estadístico de prueba

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i}$$

5. Regla de rechazo:

Método del valor-*p*: Rechazar H_0 si valor-$p \leq \alpha$
Método del valor crítico: Rechazar H_0 si $\chi^2 \geq \chi^2_\alpha$

donde α es el nivel de significancia y los grados de libertad son $k - 3$.

Ejercicios

Métodos

Autoexamen

20. A continuación se presenta el número de ocurrencias por lapso de tiempo y su frecuencia observada. Use $\alpha = 0.05$ y la prueba de bondad de ajuste para ver si estos datos se ajustan a una distribución de Poisson.

Número de ocurrencias	Frecuencia observada
0	39
1	30
2	30
3	18
4	3

Autoexamen

21. Los datos siguientes provienen de una distribución normal. Use la prueba de bondad de ajuste con $\alpha = 0.05$ para probar tal suposición.

17	23	22	24	19	23	18	22	20	13	11	21	18	20	21
21	18	15	24	23	23	43	29	27	26	30	28	33	23	29

Aplicaciones

22. Al parecer el número de accidentes automovilísticos por día en una determinada ciudad tiene una distribución de Poisson. A continuación se presentan los datos de una muestra de 80 días del año anterior. ¿Estos datos apoyan la creencia de que el número de accidentes por día tiene una distribución de Poisson? Use $\alpha = 0.05$.

Número de accidentes	Frecuencia observada (días)
0	34
1	25
2	11
3	7
4	3

23. El número de llamadas telefónicas que llegan por minuto al conmutador de una empresa tiene una distribución de Poisson. Use $\alpha = 0.10$ y los datos siguientes para probar esta suposición.

Número de llamadas telefónicas que llegan por minuto	Frecuencia observada
0	15
1	31
2	20
3	15
4	13
5	4
6	2
Total	100

24. La demanda semanal de un producto tiene una distribución normal. Aplique una prueba de bondad de ajuste y los datos siguientes para probar esta suposición. Use $a = 0.10$. La media muestral es 24.5 y la desviación estándar es 3.

18	20	22	27	22
25	22	27	25	24
26	23	20	24	26
27	25	19	21	25
26	25	31	29	25
25	28	26	28	24

25. Use $\alpha = 0.01$ y realice una prueba de bondad de ajuste para ver si los datos siguientes parecen haber sido tomados de una distribución normal.

55	86	94	58	55	95	55	52	69	95	90	65	87	50	56
55	57	98	58	79	92	62	59	88	65					

Una vez terminada la prueba de bondad de ajuste, elabore un histograma con estos datos. ¿El histograma respalda la conclusión a la que se llegó con la prueba de bondad de ajuste? (*Nota:* $\bar{x} = 71$ y $s = 17$.)

Resumen

En este capítulo se presentó la prueba de bondad de ajuste y la prueba de independencia, las cuales se basan en el uso de la distribución chi-cuadrada. El objeto de la prueba de bondad de ajuste es determinar si una distribución de probabilidad hipotética sirve como modelo para una determinada población de interés. Al hacer los cálculos en una prueba de bondad de ajuste se comparan las frecuencias observadas en una muestra con las frecuencias esperadas suponiendo que la distribución de probabilidad hipotética sea verdadera. Para determinar si las diferencias entre frecuencias observadas y esperadas son suficientemente grandes para rechazar la distribución de probabilidad hipotética se usa la distribución chi-cuadrada. También se ilustró la prueba de bondad de ajuste para las distribuciones multinomial, de Poisson y normal.

Una prueba de independencia entre dos variables es una extensión de la metodología empleada en la prueba de bondad de ajuste para una población multinomial. Para determinar las frecuencias observadas y esperadas se emplea una tabla de contingencia. Después se calcula el valor de chi-cuadrada. Valores grandes de chi-cuadrada, debidos a diferencias grandes entre frecuencias observadas y esperadas, llevan al rechazo de la hipótesis nula de independencia.

Glosario

Población multinomial Población en la que cada elemento corresponde a una y sólo a una de varias categorías. Una distribución multinomial es una extensión de la distribución binomial a tres o más resultados.

Prueba de bondad de ajuste Prueba estadística que se realiza para determinar si se rechaza una distribución de probabilidad hipotética como distribución de una población.

Tabla de contingencia Tabla que se emplea para presentar las frecuencias observadas y esperadas en una prueba de independencia.

Fórmulas clave

Estadístico de prueba para la bondad de ajuste

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i} \tag{12.1}$$

Frecuencias esperadas para tablas de contingencia bajo la suposición de independencia

$$e_{ij} = \frac{(\text{Total del renglón } i)\ (\text{Total de la columna } j)}{\text{Tamaño de la muestra}} \tag{12.2}$$

Estadístico de prueba para independencia

$$\chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \tag{12.3}$$

Ejercicios complementarios

26. Para establecer cuotas de venta, el gerente de marketing supone que en los cuatro territorios de ventas el potencial de ventas es el mismo. A continuación se presenta una muestra de 200 ventas. ¿Debe rechazarse la suposición del gerente? Use $\alpha = 0.05$.

Territorios de venta			
I	II	III	IV
60	45	59	36

27. Siete por ciento de quienes invierten en fondos mutualistas consideran que las acciones corporativas son “muy seguras”, 58% las considera “relativamente seguras”, 24% las considera “no muy seguras”, 4% las considera “no seguras” y 7% “no están seguros”. *Business/Week*/Harris preguntó a 529 inversionistas de fondos mutualistas cómo calificarían ellos los bonos corporativos respecto de su seguridad. Las respuestas fueron las siguientes

Seguridad	Frecuencia
Muy seguros	48
Relativamente seguros	323
No muy seguros	79
Nada seguros	16
No están seguros	63
Total	529

¿La actitud de los inversionistas en fondos mutualistas difiere respecto a los bonos corporativos de su actitud frente a las acciones corporativas? Apoye su conclusión dando una prueba estadística. Use $\alpha = 0.01$

28. Desde el año 2000, Toyota Camry, Honda Accord y Ford Taurus han sido los tres automóviles de pasajeros en Estados Unidos mejor vendidas. Los datos de ventas de 2003 indican que las participaciones en el mercado de estos tres automóviles son las siguientes: Toyota Camry 37%, Honda Accord 34% y Ford Taurus 29%. Suponga que en una muestra de 1 200 ventas de automóviles de pasajeros durante el primer trimestre de 2004 se encuentran los datos siguientes.

Automóviles de pasajeros	Unidades vendidas
Toyota Camry	480
Honda Accord	390
Ford Taurus	330

¿Estos datos sirven para concluir que las participaciones en el mercado de estos tres automóviles de pasajeros cambiaron en el primer trimestre de 2004? ¿Cuál es el valor-p? Use 0.05 como nivel de significancia. ¿Cuál es su conclusión?

29. Una autoridad regional de tránsito está preocupada por el número de pasajeros en una de las rutas de autobús. Al establecer la ruta se supuso que el número de pasajeros era la misma todos los días de la semana, de lunes a viernes. Con los datos siguientes y usando $a = 0.05$ determine si la suposición de la autoridad de transito es correcta.

Día	Números de pasajeros
Lunes	13
Martes	16
Miércoles	28
Jueves	17
Viernes	16

30. *Computerworld's* Annual Job Satisfaction Survey encontró que 28% de los administradores de sistemas de información (SI) estaban muy satisfechos con su trabajo, 46% estaban moderadamente satisfechos con su trabajo, 12% no estaban ni satisfechos ni insatisfechos, 10% estaban ligeramente insatisfechos y 4% estaban muy insatisfechos. Suponga que en una muestra de 500 programadores se encontraron los resultados siguientes.

Categoría	Número de entrevistados
Muy satisfechos	105
Moderadamente satisfechos	235
Ni satisfechos ni insatisfechos	55
Ligeramente insatisfechos	90
Muy insatisfechos	15

Use $\alpha = 0.05$ y realice una prueba para determinar si la satisfacción con el trabajo entre los programadores de computadoras es diferente de la satisfacción con el trabajo de los administradores de SI.

31. De una muestra de piezas se obtiene la tabla de contingencia siguiente sobre la calidad, de acuerdo con el turno de producción.

Turno	Números de piezas	Números de defectuosos
Primero	368	32
Segundo	285	15
Tercero	176	24

Use $\alpha = 0.05$ para probar la hipótesis de que la calidad es independiente del turno de producción. ¿Cuál es la conclusión?

32. *The Wall Street Journal* hizo un estudio sobre el tipo de empleo de sus suscriptores. Los siguientes datos muestrales corresponden a las ediciones del este y del oeste.

	Región	
Tipo de empleo	**Edición del este**	**Edición del oeste**
Tiempo completo	1105	574
Medio tiempo	31	15
Autoempleo/consultor	229	186
No empleado	485	344

Use $\alpha = 0.05$ para probar la hipótesis de que el tipo de empleo es independiente de la región. ¿Cuál es su conclusión?

33. Una institución de préstamo muestra los datos siguientes sobre los préstamos aprobados por cuatro de sus agentes. Use $\alpha = 0.05$ y realice una prueba para determinar si la aprobación de las decisiones de préstamo es independiente del agente que recibe la solicitud de préstamo.

	Decisión de aprobar el préstamo	
Agente de préstamo	**Aprobada**	**Rechazada**
Miller	24	16
McMahon	17	13
Games	35	15
Runk	11	9

34. Como parte de un estudio nacional se obtuvieron datos sobre el estado civil de hombres y mujeres de 20 a 29 años. Los resultados en una muestra de 350 hombre y 400 mujeres son los siguientes.

	Estado civil		
Género	**Soltero**	**Casado**	**Divorciado**
Hombre	234	106	10
Mujer	216	168	16

a. Use $\alpha = 0.01$ para probar la independencia entre el estado civil y el género. ¿Cuál es su conclusión?
b. Dé el porcentaje en cada una de las categorías de estado civil de hombres y mujeres.

35. Barna Research Group presenta datos obtenidos sobre la asistencia a la iglesia de acuerdo con las edades (*USA Today*, 20 de noviembre de 2003). Use los datos muestrales para determinar si la asistencia a la iglesia es independiente de la edad. Use 0.05 como nivel de significancia. ¿Cuál es su conclusión? ¿Qué conclusión se puede sacar acerca de la asistencia a la iglesia a medida que las personas envejecen?

	Asistencia a la iglesia		
Edad	**Sí**	**No**	**Total**
20 a 29	31	69	100
30 a 39	63	87	150
40 a 49	94	106	200
50 a 59	72	78	150

36. Los siguientes son datos sobre el número de llamadas solicitando una ambulancia de emergencia en una zona rural y en una zona urbana de Virginia.

		Día de la semana							
		Domingo	**Lunes**	**Martes**	**Miércoles**	**Jueves**	**Viernes**	**Sábado**	**Total**
Zona	**Urbana**	61	48	50	55	63	73	43	393
	Rural	7	9	16	13	9	14	10	78
	Total	68	57	66	68	72	87	53	471

Realice una prueba de independencia usando $\alpha = 0.05$. ¿Cuál es su conclusión?

37. Las siguientes son las calificaciones en los exámenes finales en un curso universitario.

55	85	72	99	48	71	88	70	59	98	80	74	93	85	74
82	90	71	83	60	95	77	84	73	63	72	95	79	51	85
76	81	78	65	75	87	86	70	80	64					

Use $\alpha = 0.05$ y realice una prueba para determinar si se debe rechazar que una distribución normal sea representativa de la distribución poblacional de estas calificaciones.

38. Los datos siguientes dan el índice de ocupación de las oficinas en cuatro zonas metropolitanas de California. ¿Los datos indican que la cantidad de oficinas libres es independiente de la zona metropolitana? Use 0.05 como nivel de significancia. ¿Cuál es su conclusión?

Situación	Los Angeles	San Diego	San Francisco	San Jose
Ocupadas	160	116	192	174
Libres	40	34	33	26

39. Un vendedor hace cuatro llamadas por día. En una muestra de 100 días los volúmenes de venta son los siguientes.

Número de ventas	Frecuencia observada (días)
0	30
1	32
2	25
3	10
4	3
Total	100

Por experiencia se sabe que 30% de las llamadas llevan a una venta. Si las llamadas de ventas son independientes, el número de ventas por día deberá seguir una distribución binomial. La función de probabilidad binomial, presentada en el capítulo 5 es

$$f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

En este ejercicio suponga que la población tiene una distribución binomial con $n = 4$, $p = 0.30$ y $x = 0, 1, 2, 3$ y 4.

a. Mediante la distribución de probabilidad binomial, calcule las frecuencias esperadas para $x = 0, 1, 2, 3$ y 4. Si es necesario combine categorías para satisfacer el requerimiento de que la frecuencia esperada en cada categoría debe ser cinco o más.
b. Use la prueba de bondad de ajuste para determinar si se debe rechazar la suposición de una distribución binomial. Use $\alpha = 0.05$. Como no hubo necesidad de estimar ninguno de los parámetros de la distribución binomial a partir de los datos muestrales, los grados de libertad son $k - 1$, donde k es el número de categorías.

Caso problema Una agenda bipartidista para el cambio

En un estudio realizado por Zogby International para *Democrat and Chronicle,* se entrevistaron más de 700 neoyorquinos para determinar si el gobierno del estado de Nueva York funcionaba. Entre los asuntos sobre los que se interrogaba a los entrevistados estaban reducciones de salario a los legisladores, restricciones a los grupos de presión, límites de mandato para los legisladores y si los ciudadanos podrían incluir sus temas en las consultas ciudadanas (*Democrat and Chronicle*, 7 de diciembre de 1997). Los resultados mostraron un amplio apoyo a varias reformas, en niveles políticos y demográficos.

Suponga que en un estudio subsiguiente se entrevistan 100 individuos que viven en la región oeste de Nueva York. De cada entrevistado se registra su afiliación partidaria (demócrata, independiente o republicano), así como sus respuestas a estas tres preguntas.

1. ¿Se les debe reducir el sueldo a los legisladores por cada día que se retrasa el presupuesto para el estado?
   Sí___ No___
2. ¿Debe haber más restricciones para los grupos de presión?
   Sí___ No___
3. ¿Debe haber límites para que el mandato de los legisladores sea de un número determinado de años?
   Sí___ No___

archivo en CD
NYReform

Las respuestas fueron codificadas usando 1 para Sí y 2 para No. Los datos obtenidos se encuentran en el archivo titulado NYReform del disco compacto.

Informe administrativo

1. Use estadísticos descriptivos para resumir los datos de este estudio. ¿Cuáles son, respecto de cada pregunta, las conclusiones preliminares acerca de la independencia entre repuesta (Sí, No) y afiliación política?
2. Respecto de la pregunta 1, pruebe la independencia entre la respuesta (Sí, No) y afiliación política. Use $\alpha = 0.05$.
3. Respecto de la pregunta 2, pruebe la independencia entre la respuesta (Sí, No) y afiliación política. Use $\alpha = 0.05$.
4. Respecto de la pregunta 3, pruebe la independencia entre la respuesta (Sí, No) y afiliación política. Use $\alpha = 0.05$.
5. ¿Parece haber un amplio apoyo para los cambios en todos los estratos políticos? Explique.

Apéndice 12.1 Pruebas de bondad de ajuste e independencia mediante Minitab

Prueba de bondad de ajuste

Este procedimiento de Minitab se usa para pruebas de bondad de ajuste para la distribución multinomial de la sección 12.1 y las distribuciones de Poisson y normal de la sección 12.3. El usuario tendrá que obtener las frecuencias observadas, calcular las frecuencias esperadas e ingresar tanto frecuencias observadas como esperadas en la hoja de cálculo de Minitab. La columna C1 se rotula como Observada y contiene las frecuencias observadas. La columna C2 se rotula como Esperadas y contiene las frecuencias esperadas. Use el ejemplo de Scott Marketing Research de la sección 12.1, abra una hoja de cálculo de Minitab e ingrese las frecuencias observadas 48, 98 y 54 en la columna C1 y las frecuencias esperadas 60, 100 y 40 en la columna C2. Los pasos para la prueba de bondad de ajuste usando Minitab son los siguientes.

Paso 1. Seleccionar el menú **Calc**
Paso 2. Elegir **Calculator**

Paso 3. Cuando aparezca el cuadro de diálogo Calculator:
Ingresar ChiSquare en el cuadro **Store result in variable**
Ingresar Sum((C1-C2)**2/C2) en el cuadro **Expression**
Clic en **OK**
Paso 4. Seleccionar el menú **Calc**
Paso 5. Elegir **Probability Distributions**
Paso 6. Elegir **Chi-Square**
Paso 7. Cuando aparezca el cuadro de diálogo Chi-Square Distribution:
Seleccionar **Cumulative probability**
Ingresar 2 en el cuadro **Degree of freedom**
Seleccionar **Input column** e ingresar ChiSquare en el cuadro
Clic en **OK**

En los resultados que da Minitab presenta la probabilidad acumulada 0.9745, que es el área bajo la curva a la izquierda de $\chi^2 = 7.34$. El área restante en la cola superior es el valor-p. Por tanto, valor-$p = 1 - 0.9745 = 0.0255$.

Prueba de independencia

Con el ejemplo de la Albert's Brewery de la sección 12.2, se empieza con una nueva hoja de cálculo de Minitab y se ingresan los datos de las frecuencias observadas en las columnas 1, 2 y 3, respectivamente. Es decir, las frecuencias observadas que corresponden a las preferencias por la cerveza ligera (20 y 30) se ingresan en la columna C1, las frecuencias observadas que corresponden a las preferencias por la cerveza clara (40 y 30) se ingresan en la columna C2 y las frecuencias observadas que corresponden a las preferencias por la cerveza oscura (20 y 10) se ingresan en la columna C3. Los pasos para la prueba de independencia usando Minitab son los siguientes.

Paso 1. Seleccionar el menú **Stat**
Paso 2. Seleccionar **Tables**
Paso 3. Elegir **Chi-Square Test (Table in Worksheet)**
Paso 4. Cuando aparezca el cuadro de diálogo Chi-Square Test
Ingresar C1-C3 en el cuadro **Columns containing the table**
Clic en **OK**

Apéndice 12.2 Pruebas de bondad de ajuste e independencia mediante Excel

Prueba de bondad de ajuste

archivo en CD
FitTest

Este procedimiento de Excel se usa para pruebas de bondad de ajuste para la distribución multinomial de la sección 12.1 y las distribuciones de Poisson y normal de la sección 12.3. El usuario tendrá que obtener las frecuencias observadas, calcular las frecuencias esperadas e ingresar tanto frecuencias observadas como esperadas en la hoja de cálculo de Excel.

Las frecuencias observadas y las esperadas en el ejemplo de Scott Market Research de la sección 12.1 se ingresan en las columnas A y B, como se muestra en la figura 12.4. El estadístico de prueba $\chi^2 = 7.34$ se calcula en la columna D. Como hay $k = 3$ categorías, el usuario ingresa los grados de libertad $k - 1 = 3 - 1 = 2$ en la celda D11. La función CHIDISTR.CHI. proporciona el valor-p en la celda D13. En la hoja de cálculo que aparece en segundo plano se presentan las fórmulas correspondientes a cada celda.

FIGURA 12.4 HOJA DE CÁLCULO DE EXCEL PARA LA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE EN EL EJEMPLO DE SCOTT MARKET RESEARCH

	A	B	C	D	E
1	**Goodness of Fit Test**				
2					
3	Observed	Expected			
4	Frequency	Frequency		Calculations	
5	48	60		=(A5-B5)^2/B5	
6	98	100		=(A6-B6)^2/B6	
7	54	40		=(A7-B7)^2/B7	
8					
9			Test Statistic	=SUM(D5:D7)	
10					
11			Degrees of Freedom	2	
12					
13			p-Value	=CHIDIST(D9,D11)	
14					

	A	B	C	D	E
1	**Goodness of Fit Test**				
2					
3	Observed	Expected			
4	Frequency	Frequency		Calculations	
5	48	60		2.40	
6	98	100		0.04	
7	54	40		4.90	
8					
9			Test Statistic	7.34	
10					
11			Degrees of Freedom	2	
12					
13			p-Value	0.0255	
14					

Prueba de independencia

archivo en CD

Independence

En el procedimiento de Excel para pruebas de independencia se requiere que el usuario obtenga las frecuencias observadas y las ingrese en una hoja de cálculo. En el ejemplo de la Alber's Brewery presentado en la sección 12.2 se dan las frecuencias observadas, las cuales se ingresan en las celdas B7 a D8, como se muestra en la hoja de cálculo de la figura 12.5. Las fórmulas que aparecen en las celdas de la hoja de cálculo en segundo plano muestran el procedimiento empleado para calcular las frecuencias esperadas. En la celda E22, se ingresan los grados de libertad, que como se tienen dos renglones y tres columnas, serán $(2 - 1)(3 - 1) = 2$. La función PRUEBA.CHI proporciona en la celda E24 el valor-p.

FIGURA 12.5 HOJA DE CÁLCULO DE EXCEL PARA LA PRUEBA DE INDEPENDENCIA DE LA ALBER'S BREWERY

	A	B	C	D	E	F
1	**Test of Independence**					
2						
3	**Observed Frequencies**					
4						
5			**Beer Peference**			
6	**Gender**	Light	Regular	Dark	Total	
7	Male	20	40	20	=SUM(B7:D7)	
8	Female	30	30	10	=SUM(B8:D8)	
9	Total	=SUM(B7:B8)	=SUM(C7:C8)	=SUM(D7:D8)	=SUM(E7:E8)	
10						
11						
12	**Expected Frequencies**					
13						
14			**Beer Peference**			
15	**Gender**	Light	Regular	Dark	Total	
16	Male	=E7*B$9/$E$9	=E7*C$9/$E$9	=E7*D$9/$E$9	=SUM(B16:D16)	
17	Female	=E8*B$9/$E$9	=E8*C$9/$E$9	=E8*D$9/$E$9	=SUM(B17:D17)	
18	Total	=SUM(B16:B17)	=SUM(C16:C17)	=SUM(D16:D17)	=SUM(E16:E17)	
19						
20				**Test Statistic**	=CHIINV(E24,E22)	
21						
22				**Degrees of Freedom**	2	
23						
24				**p-value**	=CHITEST(B7:D8,B16:D17)	
25						

	A	B	C	D	E	F
1	**Test of Independence**					
2						
3	**Observed Frequencies**					
4						
5			**Beer Peference**			
6	**Gender**	Light	Regular	Dark	Total	
7	Male	20	40	20	80	
8	Female	30	30	10	70	
9	Total	50	70	30	150	
10						
11						
12	**Expected Frequencies**					
13						
14			**Beer Peference**			
15	**Gender**	Light	Regular	Dark	Total	
16	Male	26.67	37.33	16	80	
17	Female	23.33	32.67	14	70	
18	Total	50	70	30	150	
19						
20				**Test Statistic**	6.12	
21						
22				**Degrees of Freedom**	2	
23						
24				**p-value**	0.0468	
25						