Tarea #12, Cálculo Multivariable

Entrega: Martes 14 de abril, 2019

Nombre y Apellidos: ____

Entregue sólo un ejercicio de cada tema.
Se le recomienda como práctica realizar la mayor cantidad posible de ejercicios.

1. **Tema 1: Planos Tangentes y Aproximaciones Lineales**

   (a) Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.
   - $z = x^2 + y^2, \quad (1, 1, 3)$
   - $z = x \sin(x + y), \quad (-1, 1, 0)$

   (b) Encuentre la aproximación lineal $L(x, y)$ de la función en el punto indicado.
   - $z = xe^{xy}, \quad (1, 0)$
   - $z = \sqrt{x + e^{4y}}, \quad (3, 0)$

2. **Tema 2: Derivación Implícita**

   (a) Encuentre dy/dx:
   - $y \cos x = x^2 + y^2$
   - $e^y \sin x = x + xy$

   (b) Encuentre las primeras derivadas parciales de z dada la ecuación $e^z + e^{xy} = xyz$.

   (c) Encuentre la derivada parcial de z para función implícita $\cos yx + \sin yz = \cot zx$

3. **Tema 3: Regla de la Cadena**

   (a) Encuentre $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$
   - $z = e^r \cos \theta, \qquad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}, \qquad r = st$
   - $z = \arcsin(x - y), \qquad x = s^2 + t^2, \qquad y = 1 - 2st$

   (b) Un manufactor ha modelado su producción anual P como una función Cobb-Douglas de la forma

   $$P(L, K) = 10L^{1/2}K^{1/2}$$

   donde L es el número de horas (en miles), K son las horas de capital (en miles) y P está en toneladas. Suponga que $L = 25$ y que $K = 16$. La labor de horas está decreciendo con una tasa de 2 mil horas por año y el capital está aumentando con una tasa de 3 mil horas por año. Encuentre la tasa de cambio de la producción.

   (c) La temperatura en un punto (x, y) es medida en grados Celsius. Un bicho viaja tal que su posición después de t segundos está dada por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, donde x y y están dadas en cms. La función de temperatura satisface que $T_x(2, 3) = 4$ y $T_y(2, 3) = 3$. ¿Cuán rápido está aumentando la temperatura a lo largo de la trayectoria del bicho después de 3 segundos?

   (d) El voltaje V en un circuito simple decrece gradualmente a medida que la batería se agota. La resistencia R crece despacio a medida que el resistor se calienta. Utilice la ley de Ohm, $V = IR$, para encontrar como está cambiando la corriente I en el momento que la resistencia es $R = 400\ \Omega$, $I = 0.08A$, $dV/dt = -0.01\ V/s$ y $dR/dt = 0.03\ \Omega/s$.

4. **Tema 4: Derivada Direccional**

   (a) Halle la derivada direccional de la función en el punto P, en la dirección del vector $\vec{v}$.

   - $f(x, y) = x^3 - y^3$, $P(4, 3)$, $\vec{v} = \sqrt{2}/2(\hat{\imath} + \hat{\jmath})$
   - $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $P(1, 1, 1)$, $\vec{v} = \sqrt{3}/3(\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k})$

   (b) Encuentre la razón de cambio instántanea de la función en P, en la dirección del vector $\vec{v}$.

   - $f(x, y) = e^x \sin y$, $P(1, \pi/2)$, $\vec{v} = -\hat{\imath}$
   - $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $P(1, 1, 1)$, $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}\right)$

   (c) Halle la derivada direccional de la función en la dirección del vector unitario $\vec{u} = \cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}$

   - $f(x, y) = \sin(2x + y)$, $\theta = \pi/3$
   - $f(x, y) = \dfrac{y}{x + y}$, $\theta = -\pi/6$

5. **Tema 5: Optimización**

   Una compañía produce dos variedades de dulces, A y B, para los cuales los costos promedio de producción son constantes de 60 y 70 (centavos por libra), respectivamente. Las funciones de demanda para A y B están dadas por $q_A = 5(p_B - p_A)$ y $q_B = 500 + 5(p_A - 2p_B)$. Encuentre los precios de venta p_A y p_B que maximicen la utilidad de la compañía.

6. **Tema 6: Multiplicadores de Lagrange**

   Suponga que una empresa ha recibido un pedido por 200 unidades de su producto y desea distribuir su fabricación entre dos de sus plantas, planta 1 y planta 2. Sean q_1 y q_2 las producciones de las plantas 1 y 2, respectivamente, y suponga que la función de costo total está dada por $c = f(q_1, q_2) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 200$ ¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos?