CAPÍTULO 5

Distribuciones de probabilidad discreta

CONTENIDO

LA ESTADÍSTICA *en* LA PRÁCTICA

CITIBANK*

LONG ISLAND CITY, NUEVA YORK

Citibank, una división de Citigroup, proporciona una amplia gama de servicios financieros, que comprende cuentas de cheques y de ahorro, préstamos e hipotecas, seguros y servicios de inversión, todos dentro del marco de una estrategia única llamada Citibanking. Citibanking significa una identidad de marca consistente en todo el mundo, una oferta coherente de productos y servicios de calidad para el cliente. Citibanking permite al cliente disponer de dinero en cualquier momento, en cualquier parte y de la manera que lo desee. Ya sea que el cliente desee ahorrar para el futuro o solicitar un préstamo para hoy, lo puede hacer en Citibank.

Los cajeros automáticos de Citibank, localizados en los Citicard Banking Center (CBC), permiten al cliente hacer todas sus operaciones bancarias en un solo lugar con un simple toque de su dedo, 24 horas al día y 7 días a la semana. Más de 150 operaciones bancarias diferentes, desde depósitos hasta manejo de inversiones, pueden ser realizadas con facilidad. Los cajeros automáticos Citibanking son mucho más que un simple cajero automático y en la actualidad los clientes realizan en ellos 80% de sus transacciones.

Cada Citibank CBC opera como un sistema de espera en línea al que los clientes llegan en forma aleatoria a solicitar el servicio de uno de los cajeros automáticos. Si todos los cajeros automáticos están ocupados, debe esperar en la fila. Con periodicidad realizan estudios acerca de la capacidad de los CBC para determinar los tiempos de espera para el cliente y establecer si son necesarios más cajeros automáticos.

Los datos recolectados por Citibank muestran que la llegada aleatoria de los clientes sigue una distribución de probabilidad conocida como distribución de Poisson. Mediante la distribución de Poisson, Citibank calcula las probabilidades de que llegue un número determinado de clientes a un CBC durante un determinado periodo y decidir cuál es el número de cajeros que necesita. Por ejemplo, sea x la cantidad de clientes que llega en un periodo de un minuto. Suponga que la tasa media de llegadas de clientes a un determinado CBC es dos clientes por minuto, la tabla siguiente da las probabilidades de que llegue un determinado número de clientes por minuto.

Un vanguardista cajero automático de Citibank.

x	Probabilidad
0	0.1353
1	0.2707
2	0.2707
3	0.1804
4	0.0902
5 o más	0.0527

Las distribuciones de probabilidad discretas como la empleada por Citibank, son el tema de este capítulo. Además de la distribución de Poisson, verá las distribuciones binomial e hipergeométrica; conocerá también cómo emplear estas distribuciones de probabilidad para obtener información de utilidad.

*Los autores agradecen a Stacey Karter, Citibank, por proporcionarnos este artículo para *La estadística en práctica.*

En este capítulo se continúa con el estudio de la probabilidad introduciendo los conceptos de variable aleatoria y distribuciones de probabilidad. El punto sustancial de este capítulo son las distribuciones de probabilidad discreta de tres distribuciones de probabilidad discreta que serán estudiadas son: la binomial, la de Poisson y la hipergeométrica.

5.1 Variables aleatorias

En el capítulo 4 se definió el concepto de experimento con sus correspondientes resultados experimentales. Una variable aleatoria proporciona un medio para describir los resultados experimen-

VARIABLE ALEATORIA

Una **variable aleatoria** es una descripción numérica del resultado de un experimento.

Las variables aleatorias deben tomar valores numéricos.

tales empleando valores numéricos. Las variables aleatorias deben tomar valores numéricos. En efecto, una variable aleatoria asocia un valor numérico a cada uno de los resultados experimentales. El valor numérico de la variable aleatoria depende del resultado del experimento. Una variable aleatoria puede ser *discreta* o *continua*, depende del tipo de valores numéricos que asuma.

Variables aleatorias discretas

A una variable aleatoria que asuma ya sea un número finito de valores o una sucesión infinita de valores tales como 0, 1, 2, . . ., se le llama **variable aleatoria discreta**. Considere, por ejemplo, el siguiente experimento: un contador presenta el examen para certificarse como contador público. El examen tiene cuatro partes. Defina una variable aleatoria x como x = número de partes del examen aprobadas. Ésta es una variable aleatoria discreta porque puede tomar el número finito de valores 0, 1, 2, 3 o 4.

Para tener otro ejemplo de una variable aleatoria discreta considere el experimento de observar los automóviles que llegan a una caseta de peaje. La variable aleatoria que interesa es x = número de automóviles que llega a la caseta de peaje en un día. Los valores que puede tomar la variable aleatoria son los de la secuencia 0, 1, 2, etc. Así, x es una variable aleatoria discreta que toma uno de los valores de esta sucesión infinita.

Aunque los resultados de muchos experimentos se describen mediante valores numéricos, los de otros no. Por ejemplo, en una encuesta se le puede preguntar a una persona si recuerda el mensaje de un comercial de televisión. Este experimento tiene dos resultados: que la persona no recuerda el mensaje y que la persona recuerda el mensaje. Sin embargo, estos resultados se describen numéricamente definiendo una variable aleatoria x como sigue: sea $x = 0$ si la persona no recuerda el mensaje y sea $x = 1$ si la persona recuerda el mensaje. Los valores numéricos de esta variable son arbitrarios (podría haber usado 5 y 10), pero son aceptables de acuerdo con la definición de una variable aleatoria, es decir, x es una variable aleatoria porque proporciona una descripción numérica de los resultados del experimento.

En la tabla 5.1 aparecen algunos otros ejemplos de variables aleatorias discretas. Observe que en cada ejemplo la variable aleatoria discreta asume un número finito de valores o asume los valores de una secuencia infinita como 0, 1, 2, ... Este tipo de variables aleatorias discretas se estudia con detalle en este capítulo.

TABLA 5.1 EJEMPLOS DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Experimento	Variable aleatoria (x)	Valores posibles para la variable aleatoria
Llamar a cinco clientes	Número de clientes que hacen un pedido	0, 1, 2, 3, 4, 5
Inspeccionar un envío de 50 radios	Número de radios que tienen algún defecto	0, 1, 2, · · · , 49, 50
Hacerse cargo de un restaurante durante un día	Número de clientes	0, 1, 2, 3, · · ·
Vender un automóvil	Sexo del cliente	0 si es hombre; 1 si es mujer

Variables aleatorias continuas

A una variable que puede tomar cualquier valor numérico dentro de un intervalo o colección de intervalos se le llama **variable aleatoria continua**. Los resultados experimentales basados en escalas de medición tales como tiempo, peso, distancia y temperatura pueden ser descritos por variables aleatorias continuas. Considere, por ejemplo, el experimento de observar las llamadas telefónicas que llegan a la oficina de atención de una importante empresa de seguros. La variable aleatoria que interesa es $x =$ tiempo en minutos entre dos llamadas consecutivas. Esta variable aleatoria puede tomar cualquier valor en el intervalo $x \geq 0$. En efecto, x puede tomar un número infinito de valores, entre los que se encuentran valores como 1.26 minutos, 2.751 minutos, 4.3333 minutos, etc. Otro ejemplo, considere el tramo de 90 millas de una carretera entre Atlanta y Georgia. Para el servicio de ambulancia de emergencia en Atlanta, la variable aleatoria x es $x =$ número de millas hasta el punto en que se localiza el siguiente accidente de tráfico en este tramo de la carretera. En este caso, x es una variable aleatoria continua que toma cualquier valor en el intervalo $0 \leq x \leq 90$. En la tabla 5.2 aparecen otros ejemplos de variables aleatorias continuas. Observe que cada ejemplo describe una variable aleatoria que toma cualquier valor dentro de un intervalo de valores. Las variables aleatorias continuas y sus distribuciones de probabilidad serán tema del capítulo 6.

TABLA 5.2 EJEMPLOS DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Experimento	Variable aleatoria (x)	Valores posibles para la variable aleatoria
Operar un banco	Tiempo en minutos entre la llegada de los clientes	$x \geq 0$
Llenar una lata de refresco (máx. 12.1 onzas)	Cantidad de onzas	$0 \leq x \leq 12.1$
Construir una biblioteca	Porcentaje del proyecto terminado en seis meses	$0 \leq x \leq 100$
Probar un proceso químico nuevo	Temperatura a la que tiene lugar la reacción deseada (min. 150°F; máx. 212°F)	$150 \leq x \leq 212$

NOTAS Y COMENTARIOS

Un modo de determinar si una variable aleatoria es discreta o continua es imaginar los valores de la variable aleatoria como puntos sobre un segmento de recta. Elegir dos puntos que representen valores de la variable aleatoria. Si todo el segmento de recta entre esos dos puntos representa también valores posibles para la variable aleatoria, entonces la variable aleatoria es continua.

Ejercicios

Métodos

Autoexamen

1. Considere el experimento que consiste en lanzar una moneda dos veces.
   a. Enumere los resultados experimentales.
   b. Defina una variable aleatoria que represente el número de caras en los dos lanzamientos.
   c. Dé el valor que la variable aleatoria tomará en cada uno de los resultados experimentales.
   d. ¿Es una variable aleatoria discreta o continua?

2. Considere el experimento que consiste en un empleado que arma un producto.
   a. Defina la variable aleatoria que represente el tiempo en minutos requerido para armar el producto.
   b. ¿Qué valores toma la variable aleatoria?
   c. ¿Es una variable aleatoria discreta o continua?

Aplicaciones

Autoexamen

3. Tres estudiantes agendan entrevistas para un empleo de verano en el Brookwood Institute. En cada caso el resultado de la entrevista será una oferta de trabajo o ninguna oferta. Los resultados experimentales se definen en términos de los resultados de las tres entrevistas.
   a. Enumere los resultados experimentales.
   b. Defina una variable aleatoria que represente el número de ofertas de trabajo. ¿Es una variable aleatoria continua?
   c. Dé el valor de la variable aleatoria que corresponde a cada uno de los resultados experimentales.
4. Suponga que conoce la tasa hipotecaria de 12 instituciones de préstamo. La variable aleatoria que interesa es el número de las instituciones de préstamo en este grupo que ofrecen una tasa fija a 30 años de 8.5% o menos. ¿Qué valores toma esta variable aleatoria?
5. Para realizar cierto análisis de sangre, los técnicos laboratoristas tienen que llevar a cabo dos procedimientos. En el primero requieren uno o dos pasos y en el segundo requieren uno, dos o tres pasos.
   a. Enumere los resultados experimentales correspondientes a este análisis de sangre.
   b. Si la variable aleatoria que interesa es el número de pasos requeridos en todo el análisis (los dos procedimientos), dé los valores que toma la variable aleatoria en cada uno de los resultados experimentales.
6. A continuación se da una serie de experimentos y su variable aleatoria correspondiente. En cada caso determine qué valores toma la variable aleatoria y diga si se trata de una variable aleatoria discreta o continua.

Experimento	Variable aleatoria (x)
a. Hacer un examen con 20 preguntas	Número de preguntas contestadas correctamente
b. Observar los automóviles que llegan a una caseta de peaje en 1 hora	Número de automóviles que llegan a la caseta de peaje
c. Revisar 50 declaraciones de impuestos	Número de declaraciones que tienen algún error
d. Observar trabajar a un empleado	Número de horas no productivas en una jornada de 8 horas
e. Pesar un envío	Número de libras

5.2 Distribuciones de probabilidad discreta

La **disribución de probabilidad** de una variable aleatoria describe cómo se distribuyen las probabilidades entre los valores de la variable aleatoria. En el caso de una variable aleatoria discreta x, la distribución de probabilidad está definida por una **función de probabilidad**, denotada por $f(x)$. La función de probabilidad da la probabilidad de cada valor de la variable aleatoria.

Como ejemplo de una variable aleatoria discreta y de su distribución de probabilidad, considere las ventas de automóviles en DiCarlo Motors en Saratoga, Nueva York. Durante los últimos 300 días de operación, los datos de ventas muestran que hubo 57 días en los que no se vendió ningún automóvil, 117 días en los que se vendió 1 automóvil, 72 días en los que se vendieron 2 automóviles, 42 días en los que se vendieron 3 automóviles, 12 días en los que se vendieron 4 automóviles y 3 días en los que se vendieron 5 automóviles. Suponga que considera el experimento de seleccionar un día de operación en DiCarlo Motors y se define la variable aleatoria de interés como x = número de automóviles vendidos en un día. De acuerdo con datos del pasado, se sabe que x es una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4 o 5. En la notación de funciones de probabilidad $f(0)$ da la probabilidad de vender 0 automóviles, $f(1)$ da la probabilidad de vender 1 automóvil, y así en lo sucesivo. Como los datos del pasado indican que en 54 de 300 días se vendieron 0 automóviles, a $f(0)$ se le asigna el valor $54/300 = 0.18$, lo que significa que la probabilidad de que se vendan 0 automóviles en un día es 0.18. De manera similar, como en 117 de los 300 días se vendió un automóvil, a $f(1)$ se le asigna el valor $117/300 = 0.39$, que significa que la probabilidad de que se venda exactamente 1 automóvil en un día es 0.39. Continuando de esta manera con los demás valores de la variable aleatoria, se obtienen los valores de $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ y $f(5)$, valores que se muestran en la tabla 5.3, que es la distribución de probabilidad para el número de automóviles vendidos en un día en DiCarlo Motors.

Una ventaja importante de definir una variable aleatoria y su correspondiente distribución de probabilidad es que una vez que se conoce la distribución de probabilidad, es relativamente fácil determinar la probabilidad de diversos eventos que pueden ser útiles para tomar decisiones. Por ejemplo, empleando la distribución de probabilidad de DiCarlo Motors, tabla 5.3, se observa que el número de automóviles que es más probable vender en un día es 1, ya que es $f(1) = 0.39$. Además se observa que la probabilidad de vender tres o más automóviles en un día es $f(3) + f(4) + f(5) = 0.14 + 0.04 + 0.01 = 0.19$. Estas probabilidades, junto con otras que pueden interesar para tomar decisiones, proporcionan información que sirve de ayuda al encargado de la toma de decisiones para entender la venta de automóviles en DiCarlo Motors.

Al elaborar una función de probabilidad para una variable aleatoria discreta, deben satisfacerse las dos condiciones siguientes.

Estas condiciones son análogas a los dos requerimientos básicos, presentados en el capítulo 4, para asignar probabilidades a los resultados experimentales.

CONDICIONES REQUERIDAS PARA UNA FUNCIÓN DE PROBABILIDAD DISCRETA

$$f(x) \geq 0 \tag{5.1}$$

$$\Sigma f(x) = 1 \tag{5.2}$$

En la tabla 5.3 se observa que las probabilidades de la variable aleatoria x satisfacen la ecuación (5.1); para todos los valores de x, $f(x)$ es mayor o igual que 0; además, como estas probabilidades suman 1, también se satisface la ecuación (5.2). Por tanto, la función de probabilidad de DiCarlo Motors es una función de probabilidad discreta válida.

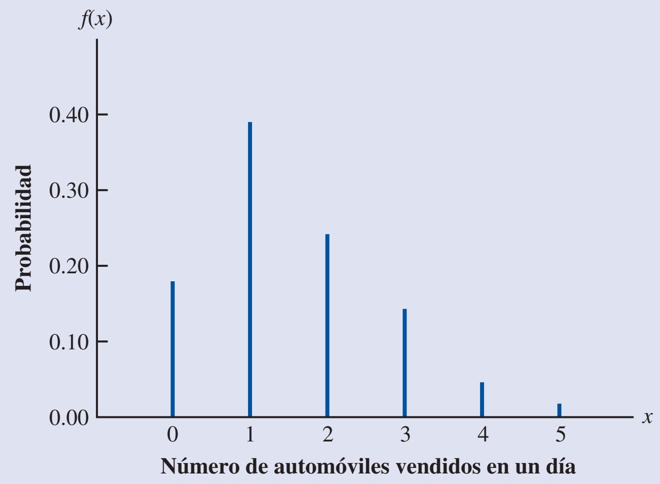
Las distribuciones de probabilidad también se representan gráficamente. En la figura 5.1, en el eje horizontal aparecen los valores de la variable aleatoria x para el caso de DiCarlo Motors y en el eje vertical aparecen las probabilidades correspondientes a estos valores.

Además de tablas y gráficas, para describir las funciones de probabilidad se suele usar una fórmula que da el valor de la función de probabilidad, $f(x)$, para cada valor x. El ejemplo más sencillo

TABLA 5.3 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD PARA EL NÚMERO DE AUTOMÓVILES VENDIDOS EN UN DÍA EN DICARLO MOTORS

x	$f(x)$
0	0.18
1	0.39
2	0.24
3	0.14
4	0.04
5	0.01
Total	1.00

FIGURA 5.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DEL NÚMERO DE AUTOMÓVILES VENDIDOS EN UN DÍA EN DICARLO MOTORS



de una distribución de probabilidad discreta dada mediante una fórmula es la **distribución de probabilidad uniforme discreta**. Su función de probabilidad está definida por la ecuación (5.3).

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD UNIFORME DISCRETA

$$f(x) = 1/n \tag{5.3}$$

donde

n = número de valores que puede tomar la variable aleatoria.

Por ejemplo, si en el experimento que consiste en lanzar un dado se define una variable aleatoria x como el número de puntos en la cara del dado que cae hacia arriba. En este experimento la variable aleatoria toma $n = 6$ valores; $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Por tanto, la función de probabilidad de esta variable aleatoria uniforme discreta es

$$f(x) = 1/6 \qquad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Los valores de la variable aleatoria con sus probabilidades correspondientes se presentan a continuación.

x	$f(x)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

Otro ejemplo, la variable aleatoria x tiene la siguiente distribución de probabilidad discreta.

x	$f(x)$
1	1/10
2	2/10
3	3/10
4	4/10

Esta distribución de probabilidad se define mediante la fórmula

$$f(x) = \frac{x}{10} \quad \text{para } x = 1, 2, 3 \text{ o } 4$$

Si evalúa $f(x)$ para un valor determinado de la variable aleatoria obtiene la probabilidad correspondiente. Por ejemplo, con la función de probabilidad dada arriba se ve que $f(2) = 2/10$ da la probabilidad de que la variable aleatoria tome el valor 2.

Las funciones de probabilidad discreta más empleadas suelen especificarse mediante fórmulas. Tres casos importantes son las distribuciones binomial, de Poisson e hipergeométrica; estas distribuciones se estudian más adelante en este capítulo

Ejercicios

Métodos

Autoexamen

7. A continuación se presenta la distribución de probabilidad de una variable aleatoria x.

x	$f(x)$
20	0.20
25	0.15
30	0.25
35	0.40

   a. ¿Es válida esta distribución de probabilidad?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que $x = 30$?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que x sea menor o igual que 25?
   d. ¿Cuál es la probabilidad de que x sea mayor que 30?

Aplicaciones

Autoexamen

8. Los datos siguientes se obtuvieron contando el número de salas de operaciones de un hospital que fueron usadas en un periodo de 20 días. Tres de estos 20 días sólo se usó una sala de operaciones, cinco de estos 20 días se usaron dos, ocho de estos 20 días se usaron tres salas de operaciones y cuatro de estos 20 días se usaron las cuatro salas de operaciones del hospital.
   a. Use el método de las frecuencias relativas para elaborar una distribución de probabilidad para el número de salas de operaciones usadas en un día.
   b. Elabore una gráfica a partir de la distribución de probabilidad.
   c. Muestre que la distribución de probabilidad elaborada satisface las condiciones requeridas para una distribución de probabilidad.

9. En Estados Unidos 38% de los niños de cuarto grado no pueden leer un libro adecuado a su edad. La tabla siguiente muestra, de acuerdo con las edades, el número de niños que tienen problemas de lectura. La mayoría de estos niños tienen problemas de lectura que debieron ser detectados y corregidos antes del tercer grado.

Edad	Número de niños
6	37 369
7	87 436
8	160 840
9	239 719
10	286 719
11	306 533
12	310 787
13	302 604
14	289 168

Si desea tomar una muestra de niños que tienen problemas de lectura para que participen en un programa que mejora las habilidades de lectura. Sea x la variable aleatoria que indica la edad de un niño tomado en forma aleatoria.

a. Con estos datos elabore una distribución de probabilidad para x. Especifique los valores de la variable aleatoria y los correspondientes valores de la función de probabilidad $f(x)$.
b. Trace la gráfica de esta distribución de probabilidad.
c. Muestre que la distribución de probabilidad satisface las ecuaciones (5.1) y (5.2).

10. En la tabla 5.4 se muestra la distribución de frecuencias porcentuales para las puntuaciones dadas a la satisfacción con el trabajo por una muestra de directivos en sistemas de información de nivel alto y de nivel medio. Las puntuaciones van de 1 (muy insatisfecho) a 5 (muy satisfecho).

TABLA 5.4 DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIA PORCENTUAL DE LAS PUNTUACIONES DADAS POR DIRECTIVOS DE NIVEL ALTO Y DE NIVEL MEDIO A LA SATISFACCIÓN CON EL TRABAJO

Puntuación de la satisfacción con el trabajo	Directivos de alto nivel	Directivos de nivel medio
1	5	4
2	9	10
3	3	12
4	42	46
5	41	28

a. Elabore una distribución de probabilidad con las puntuaciones dadas a la satisfacción con el trabajo por los directivos de nivel alto.
b. Elabore una distribución de probabilidad con las puntuaciones dadas a la satisfacción con el trabajo por los directivos de nivel medio.
c. ¿Cuál es la probabilidad de que un ejecutivo de nivel alto dé una puntuación de 4 o 5 a su satisfacción con el trabajo?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que un ejecutivo de nivel medio esté muy satisfecho?
e. Haga una comparación entre la satisfacción con el trabajo de los ejecutivos de nivel alto y la que tienen los ejecutivos de nivel medio.

11. Un técnico da servicio a máquinas franqueadoras de empresas en el área de Phoenix. El servicio puede durar 1, 2, 3 o 4 horas dependiendo del tipo de falla. Los distintos tipos de fallas se presentan aproximadamente con la misma frecuencia.

a. Elabore una distribución de probabilidad de las duraciones de los servicios.
b. Elabore una gráfica de la distribución de probabilidad.
c. Muestre que la distribución de probabilidad que ha elaborado satisface las condiciones requeridas para ser una distribución de probabilidad discreta.
d. ¿Cuál es la probabilidad de que un servicio dure tres horas?
e. Acaba de llegar una solicitud de servicio y no se sabe cuál es el tipo de falla. Son las 3:00 p.m. y los técnicos de servicio salen a las 5:00 de la tarde. ¿Cuál es la probabilidad de que el técnico de servicio tenga que trabajar horas extras para reparar la máquina hoy?

12. El jefe del departamento de admisión de una universidad calcula subjetivamente una distribución de probabilidad para x, el número de estudiantes que ingresarán en la universidad. A continuación se presenta esta distribución de probabilidad.

x	$f(x)$
1000	0.15
1100	0.20
1200	0.30
1300	0.25
1400	0.10

a. ¿Es válida esta distribución de probabilidad? Explique.
b. ¿Cuál es la probabilidad de que ingresen 1200 o menos estudiantes? Explique.

13. Un psicólogo encuentra que el número de sesiones necesarias para ganarse la confianza de un paciente es 1, 2 o 3. Sea x la variable aleatoria que representa el número de sesiones necesarias para ganarse la confianza de un paciente. Se ha propuesto la función de probabilidad siguiente.

$$f(x) = \frac{x}{6} \qquad \text{para } x = 1, 2 \text{ o } 3$$

a. ¿Es válida esta función de probabilidad? Explique.
b. ¿Cuál es la probabilidad de que se necesiten exactamente 2 sesiones para ganarse la confianza del paciente?
c. ¿De que se necesiten por lo menos 2 sesiones para ganarse la confianza del paciente?

14. La tabla siguiente es una distribución parcial de probabilidades para las ganancias proyectadas de MRA Company (x ganancias en miles de dólares) durante el primer año de operación (los valores negativos indican pérdida).

x	$f(x)$
−100	0.10
0	0.20
50	0.30
100	0.25
150	0.10
200	

a. ¿Cuál es el valor adecuado para $f(200)$? ¿Qué interpretación le da a este valor?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa sea rentable?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa gane por lo menos $100 000?

5.3 Valor esperado y varianzas

Valor esperado

El **valor esperado**, o media, de una variable aleatoria es una medida de la localización central de la variable aleatoria. A continuación se da la fórmula para obtener el valor esperado de una variable aleatoria x.

El valor esperado es un promedio ponderado de los valores que toma la variable aleatoria. Los pesos son las probabilidades.

VALOR ESPERADO DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

$$E(x) = \mu = \Sigma x f(x) \tag{5.4}$$

Las dos notaciones $E(x)$ y μ se usan para denotar el valor esperado de una variable aleatoria x.

El valor esperado no tiene que ser un valor que pueda tomar la variable aleatoria.

La ecuación (5.4) indica que para calcular el valor esperado de una variable aleatoria discreta se multiplica cada valor de la variable aleatoria por su probabilidad correspondiente $f(x)$ y después se suman estos productos. Usando el ejemplo de la sección 5.2 sobre las ventas de automóviles en DiCarlo Motors, en la tabla 5.5 se muestra cómo se calcula el valor esperado del número de automóviles vendidos en un día. La suma de las entradas en la columna $xf(x)$ indica que el valor esperado es 1.50 automóviles por día. Por tanto, aunque se sabe que en un día las ventas pueden ser de 0, 1, 2, 3, 4 o 5 automóviles, DiCarlo prevé que a la larga se venderán 1.50 automóviles por día. Si en un mes hay 30 días de operación, el valor esperado, 1.50, se emplea para pronosticar que las ventas promedio mensuales serán de 30(1.5) = 45 automóviles.

Varianza

Aunque el valor esperado proporciona el valor medio de una variable aleatoria, también suele ser necesaria una medida de la variabilidad o dispersión. Así como en el capítulo 3 se usó la varianza para resumir la variabilidad de los datos, ahora se usa la **varianza** para resumir la variabilidad en los valores de la variable aleatoria. A continuación se da la fórmula para calcular la

La varianza es un promedio ponderado de los cuadrados de las desviaciones de una variable aleatoria de su media. Los pesos son las probabilidades.

VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = \Sigma(x - \mu)^2 f(x) \tag{5.5}$$

TABLA 5.5 CÁLCULO DEL VALOR ESPERADO PARA EL NÚMERO DE AUTOS QUE SE VENDEN EN UN DÍA EN DICARLO MOTORS

x	$f(x)$	$xf(x)$
0	0.18	0(.18) = 0.00
1	0.39	1(.39) = 0.39
2	0.24	2(.24) = 0.48
3	0.14	3(.14) = 0.42
4	0.04	4(.04) = 0.16
5	0.01	5(.01) = 0.05
		1.50

$E(x) = \mu = \Sigma x f(x)$

TABLA 5.6 CÁLCULO DE LA VARIANZA PARA EL NÚMERO DE AUTOS QUE SE VENDEN EN UN DÍA EN DICARLO MOTORS

x	$x - \mu$	$(x-\mu)^2$	$f(x)$	$(x-\mu)^2 f(x)$
0	$0 - 1.50 = -1.50$	2.25	0.18	$2.25(0.18) = 0.4050$
1	$1 - 1.50 = -0.50$	0.25	0.39	$0.25(0.39) = 0.0975$
2	$2 - 1.50 = 0.50$	0.25	0.24	$0.25(0.24) = 0.0600$
3	$3 - 1.50 = 1.50$	2.25	0.14	$2.25(0.14) = 0.3150$
4	$4 - 1.50 = 2.50$	6.25	0.04	$6.25(0.04) = 0.2500$
5	$5 - 1.50 = 3.50$	12.25	0.01	$12.25(0.01) = 0.1225$
				1.2500

$\sigma^2 = \Sigma(x-\mu)^2 f(x)$

varianza de una variable aleatoria. Como indica la ecuación (5.5), un parte esencial de la fórmula de la varianza es la desviación $x - \mu$, la cual mide qué tan alejado del valor esperado, o media μ, se encuentra un valor determinado de la variable aleatoria. Para calcular la varianza de una variable aleatoria, estas desviaciones se elevan al cuadrado y después se ponderan con el correspondiente valor de la función de probabilidad. A la suma de estas desviaciones al cuadrado, ponderadas, se le conoce como *varianza*. Para denotar la varianza de una variable aleatoria se usan las notaciones Var(x) y σ^2.

En la tabla 5.6 aparece en forma resumida el cálculo de la varianza de la distribución de probabilidad del número de automóviles vendidos en un día en DiCarlo Motors. Como ve, la varianza es 1.25. La **desviación estándar**, σ, se define como la raíz cuadrada positiva de la varianza. Por tanto, la desviación estándar del número de automóviles vendidos en un día es

$$\sigma = \sqrt{1.25} = 1.118$$

La desviación estándar se mide en las mismas unidades que la variable aleatoria ($\sigma = 1.1180$ automóviles) y por tanto suele preferirse para describir la variabilidad de una variable aleatoria. La varianza σ^2 se mide en unidades al cuadrado por lo que es más difícil de interpretar.

Ejercicios

Métodos

15. La tabla siguiente muestra la distribución de probabilidad de una variable aleatoria x.

x	$f(x)$
3	0.25
6	0.50
9	0.25

a. Calcule $E(x)$, el valor esperado de x.
b. Calcule σ^2, la varianza de x.
c. Calcule σ, la desviación estándar de x.

Auto examen

16. La tabla siguiente muestra la distribución de probabilidad de una variable aleatoria y.

y	$f(y)$
2	0.20
4	0.30
7	0.40
8	0.10

a. Calcule $E(y)$.
b. Calcule $\text{Var}(y)$ y σ.

Aplicaciones

17. Una ambulancia de voluntarios realiza de 0 a 5 servicios por día. A continuación se presenta la distribución de probabilidad de los servicios por día.

Número de servicios	Probabilidad	Número de servicios	Probabilidad
0	0.10	3	0.20
1	0.15	4	0.15
2	0.30	5	0.10

a. ¿Cuál es el valor esperado del número de servicios?
b. ¿Cuál es la varianza del número de servicios? ¿Cuál es la desviación estándar?

Auto examen

18. Los datos siguientes son el número de recámaras en casas rentadas y en casas propias en ciudades centrales de Estados Unidos (www.census.gov, 31 de marzo de 2003).

	Número de casas (en miles)	
Recámaras	**Rentadas**	**Propias**
0	547	23
1	5012	541
2	6100	3832
3	2644	8690
4 o más	557	3783

a. Defina una variable aleatoria x = número de recámaras en casas rentadas y elabore una distribución de probabilidad para esta variable. ($x = 4$ representará 4 recámaras o más.)
b. Calcule el valor esperado y la varianza del número de recámaras en casas rentadas.
c. Defina una variable aleatoria y = número de recámaras en casas propias y elabore una distribución de probabilidad para esta variable. ($y = 4$ representará 4 recámaras o más.)
d. Calcule el valor esperado y la varianza del número de recámaras en casas propias.
e. ¿Qué observaciones resultan al comparar el número de recámaras en casas rentadas y en casas propias?

19. La National Basketball Association (NBA) lleva diversas estadísticas de cada equipo. Dos se refieren al porcentaje de tiros de campo hechos por un equipo y el porcentaje de tiros de tres puntos hechos por un equipo. En parte de la temporada del 2004, el registro de tiros de los 29 equipos de la NBA indicaba que la probabilidad de anotar dos puntos en un tiro de campo era 0.44, y que la probabilidad de anotar tres puntos en un tiro de tres puntos era 0.34 (www.nba.com, 3 de enero de 2004).

a. ¿Cuál es el valor esperado para un tiro de dos puntos de estos equipos?
b. ¿Cuál es el valor esperado para un tiro de tres puntos de estos equipos?
c. Si la probabilidad de hacer un tiro de dos puntos es mayor que la probabilidad de hacer uno de tres puntos, ¿por qué los entrenadores permiten a algunos jugadores hacer un tiro de tres puntos si tienen oportunidad? Use el valor esperado para explicar su respuesta.

20. A continuación se presenta la distribución de probabilidad para los daños pagados por una empresa de seguros para automóviles, en seguros contra choques.

Pago	Probabilidad
0	0.85
500	0.04
1 000	0.04
3 000	0.03
5 000	0.02
8 000	0.01
10 000	0.01

a. Use el pago esperado para determinar la prima en el seguro de choques que le permitirá a la empresa cubrir los gastos.
b. La empresa de seguros cobra una tasa anual de $520 por la cobertura de choques. ¿Cuál es el valor esperado de un seguro de choques para un asegurado? (*Indicación*: son los pagos esperados de la empresa menos el costo de cobertura.) ¿Por qué compran los asegurados un seguro de choques con este valor esperado?

21. La siguiente distribución de probabilidad sobre puntuaciones dadas a la satisfacción con el trabajo por una muestra de directivos de alto nivel y de nivel medio en sistemas de la información va desde 1 (muy insatisfecho) hasta 5 (muy satisfecho).

	Probabilidad	
Puntuación de la satisfacción con el trabajo	**Directivo de nivel alto**	**Directivo de nivel medio**
1	0.05	0.04
2	0.09	0.10
3	0.03	0.12
4	0.42	0.46
5	0.41	0.28

a. ¿Cuál es el valor esperado en las puntuaciones dadas a la satisfacción con el trabajo por los ejecutivos de nivel alto?
b. ¿Cuál es el valor esperado en las puntuaciones dadas a la satisfacción con el trabajo por los directivos de nivel medio?
c. Calcule la varianza de las puntuaciones dadas a la satisfacción con el trabajo por los directivos de nivel medio.
d. Calcule la desviación estándar de las puntuaciones dadas a la satisfacción con el trabajo en las dos distribuciones de probabilidad.
e. Compare la satisfacción con el trabajo de los directivos de alto nivel con la que tienen los directivos de nivel medio.

22. La demanda de un producto de una empresa varía enormemente de mes a mes. La distribución de probabilidad que se presenta en la tabla siguiente, basada en los datos de los dos últimos años, muestra la demanda mensual de la empresa.

Demanda unitaria	Probabilidad
300	0.20
400	0.30
500	0.35
600	0.15

a. Si la empresa basa las órdenes mensuales en el valor esperado de la demanda mensual, ¿cuál será la cantidad ordenada mensualmente por la empresa para este producto?
b. Suponga que cada unidad demandada genera $70 de ganancia y que cada unidad ordenada cuesta $50. ¿Cuánto ganará o perderá la empresa en un mes si coloca una orden con base en su respuesta al inciso a y la demanda real de este artículo es de 300 unidades?

23. El estudio 2002 New York City Housing and Vacancy Survey indicó que había 59 324 viviendas con renta controlada y 236 263 unidades con renta estabilizada construidas en 1947 o después. A continuación se da la distribución de probabilidad para el número de personas que viven en estas unidades (www.census.gov, 12 de enero de 2004).

Número de personas	Renta controlada	Renta estabilizada
1	0.61	0.41
2	0.27	0.30
3	0.07	0.14
4	0.04	0.11
5	0.01	0.03
6	0.00	0.01

a. ¿Cuál es el valor esperado para el número de personas que viven en cada tipo de unidad?
b. ¿Cuál es la varianza para el número de personas que viven en cada tipo de unidad?
c. Haga comparaciones entre el número de personas que viven en una unidad de renta controlada y el número de personas que viven en una unidad de renta estabilizada.

24. J. R. Ryland Computer Company está considerando hacer una expansión a la fábrica para empezar a producir una nueva computadora. El presidente de la empresa debe determinar si hacer un proyecto de expansión a mediana gran escala. La demanda del producto nuevo es incierta, la cual, para los fines de planeación puede ser demanda pequeña, mediana o grande. Las probabilidades estimadas para la demanda son 0.20, 0.50 y 0.30, respectivamente. Con x y y representando ganancia anual en miles de dólares, los encargados de planeación en la empresa elaboraron el siguiente pronóstico de ganancias para los proyectos de expansión a mediana y gran escala.

		Ganancia con la expansión a mediana escala		Ganancia con la expansión a gran escala	
		x	$f(x)$	y	$f(y)$
Demanda	Baja	50	0.20	0	0.20
	Mediana	150	0.50	100	0.50
	Alta	200	0.30	300	0.30

a. Calcule el valor esperado de las ganancias correspondientes a las dos alternativas de expansión. ¿Cuál de las decisiones se prefiere para el objetivo de maximizar la ganancia esperada?
b. Calcule la varianza de las ganancias correspondientes a las dos alternativas de expansión. ¿Cuál de las decisiones se prefiere para el objetivo de minimizar el riesgo o la incertidumbre?

5.4 Distribución de probabilidad binomial

La distribución de probabilidad binomial es una distribución de probabilidad que tiene muchas aplicaciones. Está relacionada con un experimento de pasos múltiples al que se le llama experimento binomial.

Un experimento binomial

Un **experimento binomial** tiene las cuatro propiedades siguientes.

PROPIEDADES DE UN EXPERIMENTO BINOMIAL

1. El experimento consiste en una serie de n ensayos idénticos.
2. En cada ensayo hay dos resultados posibles. A uno de estos resultados se le llama *éxito* y al otro se le llama *fracaso*.
3. La probabilidad de éxito, que se denota p, no cambia de un ensayo a otro. Por ende, la probabilidad de fracaso, que se denota $1 - p$, tampoco cambia de un ensayo a otro.
4. Los ensayos son independientes.

Jacob Bernoulli (1654-1705), el primero de la familia Bernoulli de matemáticos suizos, publicó un tratado sobre probabilidad que contenía la teoría de las permutaciones y de las combinaciones, así como el teorema del binomio.

Si se presentan las propiedades 2, 3 y 4, se dice que los ensayos son generados por un proceso de Bernoulli. Si, además, se presenta la propiedad 1, se trata de un experimento binomial. En la figura 5.2 se presenta una sucesión de éxitos y fracasos de un experimento binomial con ocho ensayos.

En un experimento binomial lo que interesa es el *número de éxitos en* n *ensayos*. Si x denota el número de éxitos en n ensayos, es claro que x tomará los valores 0, 1, 2, 3, ..., n. Dado que el número de estos valores es finito, x es una variable aleatoria *discreta*. A la distribución de probabilidad correspondiente a esta variable aleatoria se le llama **distribución de probabilidad binomial**. Por ejemplo, considere el experimento que consiste en lanzar una moneda cinco veces y observar si la cara de la moneda que cae hacia arriba es cara o cruz. Suponga que se desea contar el número de caras que aparecen en los cinco lanzamientos. ¿Presenta este experimento las propiedades de un experimento binomial? ¿Cuál es la variable aleatoria que interesa? Observe que:

1. El experimento consiste en cinco ensayos idénticos; cada ensayo consiste en lanzar una moneda.
2. En cada ensayo hay dos resultados posibles: cara o cruz. Se puede considerar cara como éxito y cruz como fracaso.
3. La probabilidad de éxito y la probabilidad de fracaso son iguales en todos los ensayos, siendo $p = 0.5$ y $1 - p = 0.5$.
4. Los ensayos o lanzamientos son independientes porque al resultado de un ensayo no afecta a lo que pase en los otros ensayos o lanzamientos.

FIGURA 5.2 UNA POSIBLE SUCESIÓN DE ÉXITOS Y FRACASOS EN UN EXPERIMENTO BINOMIAL DE OCHO ENSAYOS

Propiedad 1: El experimento consiste en $n = 8$ ensayos idénticos.

Propiedad 2: En cada ensayo se obtiene como resultado un éxito o un fracaso.

Ensayos →	1	2	3	4	5	6	7	8
Resultados →	*S*	*F*	*F*	*S*	*S*	*F*	*S*	*S*

Por tanto, se satisfacen las propiedades de un experimento binomial. La variable aleatoria que interesa es x = número de caras que aparecen en cinco ensayos. En este caso, x puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4 o 5.

Otro ejemplo, considere a un vendedor de seguros que visita a 10 familias elegidas en forma aleatoria. El resultado correspondiente de la visita a cada familia se clasifica como éxito si la familia compra un seguro y como fracaso si la familia no compra ningún seguro. Por experiencia, el vendedor sabe que la probabilidad de que una familia tomada aleatoriamente compre un seguro es 0.10. Al revisar las propiedades de un experimento binomial aparece que:

1. El experimento consiste en 10 ensayos idénticos; cada ensayo consiste en visitar a una familia.
2. En cada ensayo hay dos resultados posibles: la familia compra un seguro (éxito) o la familia no compra ningún seguro (fracaso).
3. Las probabilidades de que haya compra y de que no haya compra se supone que son iguales en todas las visitas, siendo $p = 0.10$ y $1 - p = 0.90$.
4. Los ensayos son independientes porque las familias se eligen en forma aleatoria.

Como estos cuatro puntos se satisfacen, este ejemplo es un experimento binomial. La variable aleatoria que interesa es el número de ventas al visitar a las 10 familias. En este caso los valores que puede tomar x son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

La propiedad 3 de un experimento binomial se llama *suposición de estacionaridad* y algunas veces se confunde con la propiedad 4, independencia de los ensayos. Para ver la diferencia entre estas dos propiedades, reconsidere el caso del vendedor que visita a las familias para venderles un seguro. Si a medida que el día avanza, el vendedor se va cansando y va perdiendo entusiasmo, la probabilidad de éxito puede disminuir, por ejemplo, a 0.05 en la décima llamada. En tal caso la propiedad 3 (estacionaridad) no se satisface, y no se tiene un experimento binomial. Incluso si la propiedad 4 se satisface —en cada familia la decisión de comprar o no se hizo de manera independiente— si no se satisface la propiedad 3, no se trata de un experimento binomial.

En las aplicaciones de los experimentos binomiales se emplea una fórmula matemática llamada *función de probabilidad binomial* que sirve para calcular la probabilidad de x éxitos en n ensayos. Empleando los conceptos de probabilidad presentados en el capítulo 4, se mostrará, en el contexto de un ilustrativo problema, cómo se desarrolla la fórmula.

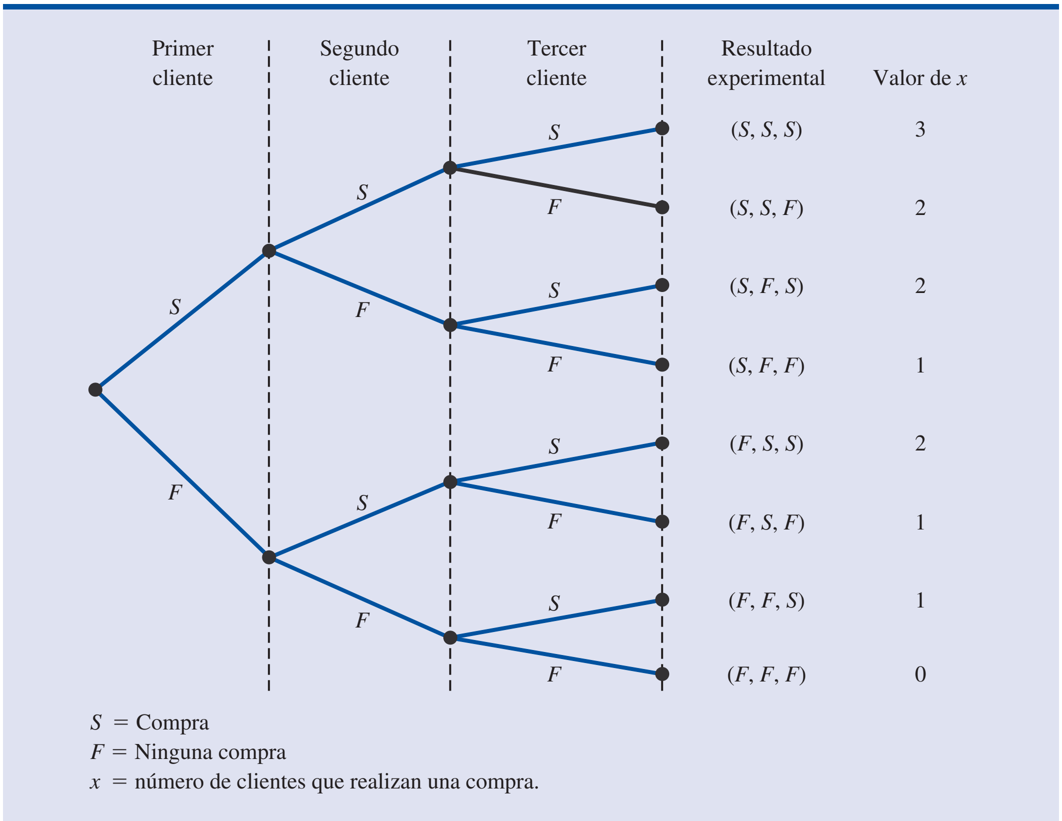
El problema de la tienda de ropa Martin Clothing Store

Considere las decisiones de compra de los próximos tres clientes que lleguen a la tienda de ropa Martin Clothing Store. De acuerdo con la experiencia, el gerente de la tienda estima que la probabilidad de que un cliente realice una compra es 0.30. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de los próximos tres clientes realicen una compra?

Un diagrama de árbol (figura 5.3), permite advertir que el experimento de observar a los tres clientes para ver si cada uno de ellos decide realizar una compra tiene ocho posibles resultados. Entonces, si S denota éxito (una compra) y F fracaso (ninguna compra), lo que interesa son los resultados experimentales en los que haya dos éxitos (decisiones de compra) en los tres ensayos. A continuación verifique que el experimento de las tres decisiones de compra es un experimento binomial. Al verificar los cuatro requerimientos de un experimento binomial, se observa que:

1. Es posible describir el experimento como una serie de tres ensayos idénticos, un ensayo por cada uno de los tres clientes que llegan a la tienda.
2. Cada ensayo tiene dos posibles resultados: el cliente hace una compra (éxito) o el cliente no hace ninguna compra (fracaso).
3. La probabilidad de que el cliente haga una compra (0.30) o de que no haga una compra (0.70) se supone que es la misma para todos los clientes.
4. La decisión de comprar de cada cliente es independiente de la decisión de comprar de los otros clientes.

FIGURA 5.3 DIAGRAMA DE ÁRBOL PARA EL PROBLEMA DE LA TIENDA DE ROPA MARTIN CLOTHING STORE



En consecuencia, se satisfacen las propiedades de un experimento binomial.

Con la fórmula siguiente* se calcula el número de resultados experimentales en los que hay exactamente x éxitos en n ensayos.

NÚMERO DE RESULTADOS EXPERIMENTALES EN LOS QUE HAY EXACTAMENTE x ÉXITOS EN n ENSAYOS

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \tag{5.6}$$

donde

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)$$

y por definición,

$$0! = 1$$

Ahora regrese al experimento de las decisiones de compra de tres clientes de la tienda Martin Clothing Store. La ecuación (5.6) sirve para determinar el número de resultados experimentales

* Esta fórmula presentada en el capítulo 4, determina el número de combinaciones de n objetos tomados de x a la vez. En el experimento binomial esta fórmula combinatoria da el número de resultados experimentales (series de n ensayos) en los que hay x éxitos.

en los que hay dos compras; el número de maneras en que son posibles $x = 2$ éxitos en $n = 3$ ensayos. De acuerdo con la ecuación (5.6)

$$\binom{n}{x} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{(3)(2)(1)}{(2)(1)(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

La ecuación (5.6) indica que en tres de los resultados experimentales hay dos éxitos. En la figura 5.3 aparecen denotados por (*S, S, F*), (*S, F, S*) y (*F, S, S*).

Empleando la ecuación (5.6) para determinar en cuántos resultados experimentales hay tres éxitos (compras) en tres ensayos, se obtiene

$$\binom{n}{x} = \binom{3}{3} = \frac{3!}{3!(3-3)!} = \frac{3!}{3!0!} = \frac{(3)(2)(1)}{3(2)(1)(1)} = \frac{6}{6} = 1$$

El único resultado experimental con tres éxitos es el identificado por (*S, S, S*) mostrado en la figura 5.3.

Ya sabe que usando la ecuación (5.6) es posible determinar el número de resultados experimentales en los que hay x éxitos. Sin embargo, si va a determinar la probabilidad de x éxitos en n ensayos, es necesario conocer también la probabilidad correspondiente a cada uno de estos resultados experimentales. Como en un experimento binomial, los ensayos son independientes, para hallar la probabilidad de una determinada sucesión de éxitos y fracasos simplemente se multiplican las probabilidades correspondientes al resultado de cada ensayo.

La probabilidad de que los dos primeros clientes compren y el tercero no compre, denotada por (*S, S, F*) está dada por

$$pp(1-p)$$

Puesto que la probabilidad de compra en cualquier ensayo es 0.30, la probabilidad de que haya una compra en los dos primeros ensayos y que no haya compra en el tercer ensayo es

$$(0.30)(0.30)(0.70) = (0.30)^2(0.70) = 0.063$$

Hay otros dos resultados experimentales en los que también se obtienen dos éxitos y un fracaso. A continuación se presentan las probabilidades de los tres resultados experimentales en los que hay dos éxitos.

Resultados de los ensayos				
1er. cliente	**2o. cliente**	**3er. cliente**	**Resultado experimental**	**Probabilidad de este resultado experimental**
Compra	Compra	No hay compra	(*S, S, F*)	$pp(1-p) = p^2(1-p)$ $= (0.30)^2(0.70) = 0.063$
Compra	Compra	Compra	(*S, F, S*)	$p(1-p)p = p^2(1-p)$ $= (0.30)^2(0.70) = 0.063$
No hay compra	Compra	Compra	(*F, S, S*)	$(1-p)pp = p^2(1-p)$ $= (0.30)^2(0.70) = 0.063$

Observe que los tres resultados experimentales en los que hay dos éxitos tienen la misma probabilidad. Esto se cumple en general. En cualquier experimento binomial todas las series de resultados de ensayos en las que hay x éxitos en n ensayos tienen la *misma probabilidad* de ocurrencia. A continuación se presenta la probabilidad de cada una de las series de ensayos en las que hay x éxitos en n ensayos.

$$\begin{array}{l}\text{Probabilidad de una}\\ \text{determinada serie de}\\ \text{resultados de ensayos}\end{array} = p^x(1-p)^{(n-x)}$$

En el caso de la tienda de ropa Martin Clothing Store, esta fórmula indica que la probabilidad de cualquier resultado experimental con dos éxitos es $p^2(1-p)^{(3-2)} = p^2(1-p)^1 = (0.30)^2(0.70^1) = 0.63$.

Como la ecuación (5.6) da el número de resultados de un experimento binomial en el que hay x éxitos, y la ecuación (5.7) da la probabilidad de cada serie en la que hay x éxitos, combinando las ecuaciones (5.6) y (5.7) se obtiene la **función de probabilidad binomial** siguiente.

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD BINOMIAL

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{(n-x)} \tag{5.8}$$

donde

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{probabilidad de } x \text{ éxitos en } n \text{ ensayos} \\ n &= \text{número de ensayos} \\ \binom{n}{x} &= \frac{n!}{x!(n-x)!} \\ p &= \text{probabilidad de un éxito en cualquiera de los ensayos} \\ 1-p &= \text{probabilidad de un fracaso en cualquiera de los ensayos} \end{aligned}$$

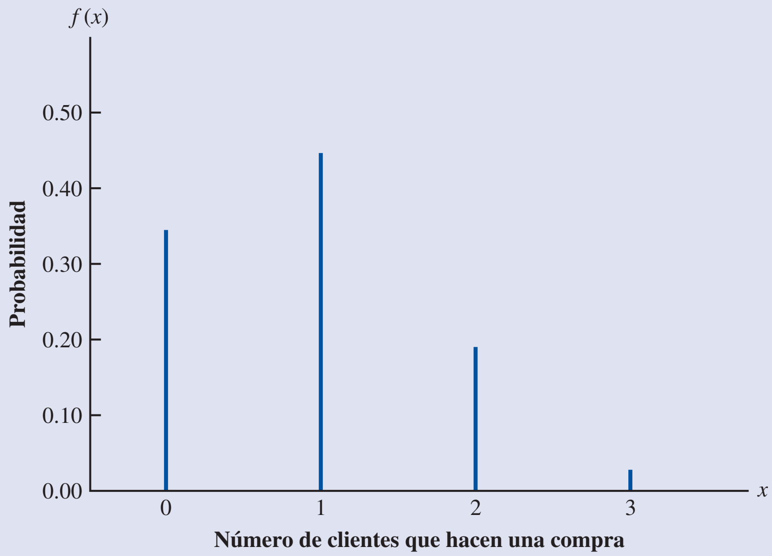
En el ejemplo de la tienda de ropa Martin Clothing Store se calculará ahora la probabilidad de que ningún cliente realice una compra, de que exactamente un cliente realice una compra, de que exactamente dos clientes realicen una compra y de que los tres clientes realicen una compra. Los cálculos se presentan en forma resumida en la tabla 5.7, que da la distribución de probabilidad para el número de clientes que hacen una compra. La figura 5.4 es una gráfica de esta distribución de probabilidad.

La función de probabilidad binomial es aplicable a *cualquier* experimento binomial. Si encuentra que una situación presenta las propiedades de un experimento binomial y conoce los valores de n y p, use la ecuación (5.8) para calcular la probabilidad de x éxitos en n ensayos.

TABLA 5.7 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD BINOMIAL PARA EL NÚMERO DE CLIENTES QUE HACEN UNA COMPRA

x	$f(x)$
0	$\frac{3!}{0!3!}(0.30)^0(0.70)^3 = 0.343$
1	$\frac{3!}{1!2!}(0.30)^1(0.70)^2 = 0.441$
2	$\frac{3!}{2!1!}(0.30)^2(0.70)^1 = 0.189$
3	$\frac{3!}{3!0!}(0.30)^3(0.70)^0 = 0.027$
	1.000

FIGURA 5.4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD BINOMIAL PARA EL NÚMERO DE CLIENTES QUE HACEN UNA COMPRA



Si considera variaciones del experimento de la tienda de ropa, por ejemplo, que lleguen a la tienda 10 clientes en lugar de tres clientes, también se emplea la función de probabilidad binomial dada por la ecuación (5.8). Suponga que tiene un experimento binomial con $n = 10$, $x = 4$ y $p = 0.30$. La probabilidad de que cuatro de los 10 clientes que entran en la tienda de ropa realicen una compra es

$$f(4) = \frac{10!}{4!6!}(0.30)^4(0.70)^6 = 0.2001$$

Uso de las tablas de probabilidades binomiales

Existen tablas que dan la probabilidad de x éxitos en n ensayos de un experimento binomial. Estas tablas son fáciles de usar y los resultados se obtienen más rápidamente que con la ecuación (5.8). La tabla 5 del apéndice B es una de estas tablas de probabilidades binomiales. Una parte de esta tabla se presenta en la tabla 5.8. Para usarla es necesario especificar los valores de n, p y x en el experimento binomial de que se trate. En el ejemplo que se presenta en la parte superior de la tabla 5.8 se ve que la probabilidad de $x = 3$ éxitos en un experimento binomial con $n = 10$ y $p = 0.40$ es 0.2150. Use la ecuación (5.8) para verificar que este mismo resultado se obtiene si usa la función de probabilidad binomial directamente.

Ahora se usará la tabla 5.8 para corroborar la probabilidad de 4 éxitos en 10 ensayos en el problema de la tienda de ropa Martin Clothing Store. Observe que el valor de $f(4) = 0.2001$ se lee directamente de la tabla de probabilidades binomiales, eligiendo $n = 10$, $x = 4$ y $p = 0.30$.

Con las calculadoras modernas estas tablas son casi innecesarias. Es muy fácil evaluar la ecuación (5.8) directamente.

Aun cuando las tablas de probabilidades binomiales son relativamente fáciles de utilizar, es imposible contar con tablas que tengan todos los valores de n y p de un experimento binomial. Sin embargo, con las calculadoras de hoy en día, usar la ecuación (5.8) para calcular la probabilidad deseada no es difícil, en especial si el número de ensayos no es grande. En los ejercicios tendrá la oportunidad de usar la ecuación (5.8) para calcular probabilidades binomiales, a menos que el problema pida que use la tabla de probabilidad binomial.

TABLA 5.8 ALGUNOS VALORES DE LA TABLA DE PROBABILIDAD BINOMIAL
EJEMPLO: $n = 10$, $x = 3$, $p = 0.40$; $f(3) = 0.2150$

						p					
n	***x***	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1004	0.0605	0.0339	0.0176
	2	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2162	0.1612	0.1110	0.0703
	3	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2716	0.2508	0.2119	0.1641
	4	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2194	0.2508	0.2600	0.2461
	5	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.1181	0.1672	0.2128	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0424	0.0743	0.1160	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0098	0.0212	0.0407	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0035	0.0083	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0020
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.3151	0.3874	0.3474	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098
	2	0.0746	0.1937	0.2759	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439
	3	0.0105	0.0574	0.1298	0.2013	0.2503	0.2668	0.2522	0.**2150**	0.1665	0.1172
	4	0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051
	5	0.0001	0.0015	0.0085	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051
	7	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	0.0229	0.0439
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010

Los paquetes de software para estadística como Minitab y los paquetes de hojas de cálculo como Excel también están habilitadas para calcular probabilidades binomiales. Considere el ejemplo de la tienda de ropa Martin Clothing Store con $n = 10$ y $p = 0.30$. En la figura 5.5 se muestran las probabilidades binomiales para todos los valores posibles de x, generadas por Minitab. Observe que estos valores son los mismos que se encuentran en la columna $p = 0.30$ de la tabla 5.8. En el apéndice 5.1 se da paso por paso el procedimiento en Minitab para generar el resultado que se muestra en la figura 5.5. En el apéndice 5.2 se describe cómo usar Excel para calcular probabilidades binomiales.

Valor esperado y varianza en la distribución binomial

En la sección 5.3 se dieron las fórmulas para calcular el valor esperado y la varianza de una variable aleatoria discreta. En el caso especial de que la variable aleatoria tenga una distribución binomial para la que se conoce el número de ensayos n y la probabilidad de éxito p, las fórmulas generales para el valor esperado y la varianza se simplifican. El resultado se muestra a continuación.

VALOR ESPERADO Y VARIANZA EN LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

$$E(x) = \mu = np \tag{5.9}$$

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = np(1 - p) \tag{5.10}$$

FIGURA 5.5 RESULTADOS DE MINITAB QUE MUESTRAN LAS PROBABILIDADES BINOMIALES PARA EL PROBLEMA DE LA TIENDA DE ROPA MARTIN CLOTHING STORE

x	P(X = x)
0.00	0.0282
1.00	0.1211
2.00	0.2335
3.00	0.2668
4.00	0.2001
5.00	0.1029
6.00	0.0368
7.00	0.0090
8.00	0.0014
9.00	0.0001
10.00	0.0000

Para el problema de los tres clientes de la tienda de ropa Martin Clothing Store, use la ecuación (5.9) para calcular el número esperado de clientes que harán una compra.

$$E(x) = np = 3(0.30) = 0.9$$

Suponga que Martin Clothing Store pronostica que el mes próximo 1000 clientes visitarán la tienda. ¿Cuál es el número esperado de clientes que harán una compra? La respuesta es $\mu = np = (1000)(0.30) = 300$. Así, para aumentar el número esperado de compras, Martin debe hacer que más clientes visiten su tienda o de alguna manera aumentar la probabilidad de que una persona que visite la tienda haga una compra.

En el caso de los tres clientes de la tienda de ropa Martin Clothing Store, la varianza y la desviación estándar del número de clientes que harán una compra son

$$\sigma^2 = np(1 - p) = 3(0.3)(0.7) = 0.63$$
$$\sigma = \sqrt{0.63} = 0.79$$

Para los próximos 1000 clientes que visiten la tienda, la varianza y la desviación estándar del número de clientes que harán una compra son

$$\sigma^2 = np(1 - p) = 1000(0.3)(0.7) = 210$$
$$\sigma = \sqrt{210} = 14.49$$

NOTAS Y COMENTARIOS

1. En las tablas binomiales del apéndice B los valores de p llegan sólo hasta 0.50. Es posible pensar que estas tablas no son útiles cuando la probabilidad de éxito es mayor a 0.50. Sin embargo, puede usarlas observando que la probabilidad de $n - x$ fracasos es también la probabilidad de x éxitos. Cuando la probabilidad de éxito es mayor que $p = 0.50$, en lugar de la probabilidad de éxito calcule la probabilidad de $n - x$ fracasos. Cuando $p > 0.50$, la probabilidad de fracaso, $1 - p$, será menor que 0.50.

2. En algunas fuentes se presentan tablas binomiales en forma acumulada. Al usar estas tablas para hallar la probabilidad de x éxitos en n ensayos hay que hacer una resta. Por ejemplo, $f(2) = P(x \leq 2) - P(x \leq 1)$. Las tablas que se presentan en este libro dan estas probabilidades. Para calcular probabilidades acumuladas usando las tablas de este libro, sume las probabilidades individuales. Por ejemplo, para calcular $P(x \leq 2)$ usando las tablas del libro, sume $f(0) + f(1) + f(2)$.

Ejercicios

Métodos

Auto examen

25. Considere un experimento binomial con dos ensayos y $p = 0.4$.
   a. Dibuje un diagrama de árbol para este experimento (véase figura 5.3).
   b. Calcule la probabilidad de un éxito, $f(1)$.
   c. Calcule $f(0)$.
   d. Calcule $f(2)$.
   e. Calcule la probabilidad de por lo menos un éxito.
   f. Calcule el valor esperado, la varianza y la desviación estándar.

26. Considere un experimento binomial con $n = 10$ y $p = 0.10$.
   a. Calcule $f(0)$.
   b. Calcule $f(2)$.
   c. Calcule $P\ (x \leq 2)$.
   d. Calcule $P\ (x \geq 1)$.
   e. Calcule $E(x)$.
   f. Calcule $\text{Var}(x)$ y σ.

27. Considere un experimento binomial con $n = 20$ y $p = 0.70$.
   a. Calcule $f(12)$.
   b. Calcule $f(16)$.
   c. Calcule $P\ (x \geq 16)$.
   d. Calcule $P\ (x \leq 15)$.
   e. Calcule $E(x)$.
   f. Calcule $\text{Var}(x)$ y σ.

Aplicaciones

28. Una encuesta de Harris Interactive para InterContinental Hoteld and Resorts preguntó: "Cuando viaja al extranjero, ¿suele aventurarse usted solo para conocer la cultura o prefiere permanecer con el grupo de su *tour* y apegarse al itinerario?" Se encontró que 23% prefiere permanecer con el grupo de su *tour* (*USA Today,* 21 de enero de 2004).
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de seis viajeros, dos prefieran permanecer con su grupo?
   b. ¿De que en una muestra de seis viajeros, por lo menos dos prefieran permanecer con su grupo?
   c. ¿De que en una muestra de 10 viajeros, ninguno prefiera permanecer con su grupo?

29. En San Francisco, 30% de los trabajadores emplean el transporte público (*USA Today,* 21 de diciembre de 2005).
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de 10 trabajadores exactamente tres empleen el transporte público?
   b. ¿De que en una muestra de 10 trabajadores por lo menos tres empleen el transporte público?

Auto examen

30. Cuando una máquina nueva funciona adecuadamente, sólo 3% de los artículos producidos presentan algún defecto. Suponga que selecciona aleatoriamente dos piezas producidas con la nueva máquina y que busca el número de piezas defectuosas.
   a. Describa las condiciones en las que éste será un experimento binomial.
   b. Elabore un diagrama de árbol como el de la figura 5.3 en el que se muestre este problema como un experimento de dos ensayos.
   c. ¿En cuántos resultados experimentales hay exactamente una pieza defectuosa?
   d. Calcule las probabilidades de hallar ninguna pieza defectuosa, exactamente una pieza defectuosa y dos piezas defectuosas.

31. Nueve por ciento de los estudiantes tienen un balance en su tarjeta de crédito mayor a \$7000 (*Reader's Digest*, julio de 2002). Suponga que selecciona aleatoriamente 10 estudiantes para entrevistarlos respecto del uso de su tarjeta de crédito

a. ¿Es la selección de 10 estudiantes un experimento binomial? Explique.
b. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de los estudiantes tengan un balance en su tarjeta de crédito superior a \$7000?
c. ¿De que ninguno tenga un balance en su tarjeta de crédito superior a \$7000?
d. ¿De que por lo menos tres tengan un balance en su tarjeta de crédito superior a \$7000?

32. Los radares militares y los sistemas para detección de misiles tienen por objeto advertir a un país de un ataque enemigo. Una cuestión de confiabilidad es si el sistema de detección será capaz de detectar un ataque y emitir un aviso. Suponga que la probabilidad de que un determinado sistema de detección detecte un ataque con misiles es 0.90. Use la distribución de probabilidad binomial para responder las preguntas siguientes.
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que un solo sistema de detección detecte un ataque?
    b. Si se instalan dos sistemas de detección en una misma área y los dos operan independientemente, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos uno de los sistemas detecte el ataque?
    c. Si se instalan tres sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos uno de los sistemas detecte el ataque?
    d. ¿Recomendaría que se usaran varios sistemas de detección? Explique.
33. Cincuenta por ciento de los estadounidenses creyeron que el país se encontraba en una recesión aun cuando en la economía no se habían observado dos trimestres seguidos con crecimiento negativo. (*BusinessWeek,* 30 de julio de 2001). Dada una muestra de 20 estadounidenses, calcule lo siguiente.
    a. Calcule la probabilidad de que exactamente 12 personas hayan creído que el país estaba en recesión.
    b. De que no más de cinco personas hayan creído que el país estaba en recesión
    c. ¿Cuántas personas esperaría usted que dijeran que el país estuvo en recesión?
    d. Calcule la varianza y la desviación estándar del número de personas que creyeron que el país estuvo en recesión.
34. En una encuesta realizada por la Oficina de Censos de Estados Unidos se encontró que 25% de las personas de 25 años o más habían estudiado cuatro años en la universidad (*The New York Times Almanac,* 2006). Dada una muestra de 15 individuos de 25 años o más, conteste las preguntas siguientes.
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que cuatro hayan estudiado cuatro años en la universidad?
    b. ¿De que tres o más hayan estudiado cuatro años en la universidad?
35. En una universidad se encontró que 20% de los estudiantes no terminan el primer curso de estadística, al curso se inscriben 20 estudiantes.
    a. Calcule la probabilidad de que dos o menos no terminen.
    b. De que cuatro, exactamente, no terminen.
    c. De que más de tres no terminen.
    d. ¿Cuál es el número esperado de estudiantes que no terminan?
36. En el caso particular de una variable aleatoria binomial, es factible calcular la varianza empleando la fórmula $\sigma^2 = np(1 - p)$. En el caso del problema de la tienda de ropa Martin Clothing Store, en donde $n = 3$ y $p = 0.3$, se encontró que $\sigma^2 = np(1 - p) = 3(0.3)(0.7) = 0.63$. Aplique la definición general de varianza para una variable aleatoria discreta, ecuación (5.5), y las probabilidades de la tabla 5.7 para comprobar que la varianza es 0.63
37. Veintitrés por ciento de los automóviles no cuenta con un seguro (CNN, 23 de febrero de 2006). En un fin de semana determinado hay 35 automóviles que sufren un accidente.
    a. ¿Cuál es el número esperado de estos automóviles que no cuentan con un seguro?
    b. ¿Cuál es la varianza y la desviación estándar?

5.5 Distribución de probabilidad de Poisson

En esta sección estudiará una variable aleatoria discreta que se suele usar para estimar el número de veces que sucede un hecho determinado (ocurrencias) en un intervalo de tiempo o de espacio. Por ejemplo, la variable de interés va desde el número de automóviles que llegan (llegadas) a un lavado de coches en una hora o el número de reparaciones necesarias en 10 millas de una autopista hasta el número de fugas en 100 millas de tubería. Si se satisfacen las condiciones si-

La distribución de probabilidad de Poisson suele emplearse para modelar las llegadas aleatorias a una línea de espera (fila).

guientes, el número de ocurrencias es una variable aleatoria discreta, descrita por la **distribución de probabilidad de Poisson**.

PROPIEDADES DE UN EXPERIMENTO DE POISSON

1. La probabilidad de ocurrencia es la misma para cualesquiera dos intervalos de la misma magnitud.
2. La ocurrencia o no-ocurrencia en cualquier intervalo es independiente de la ocurrencia o no-ocurrencia en cualquier otro intervalo.

La **función de probabilidad de Poisson** se define mediante la ecuación (5.11).

Simeon Poisson dio clases de matemáticas en la Ecole Polytechnique de París de 1802 a 1808. En 1837 publicó un trabajo titulado "Investigación sobre la probabilidad de veredictos en materia criminal y civil" en el que presenta un estudio sobre lo que después se conoció como distribución de Poisson.

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD DE POISSON

$$f(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \qquad \textbf{(5.11)}$$

en donde

$f(x)$ = probabilidad de x ocurrencias en un intervalo
μ = valor esperado o número medio de ocurrencias en un intervalo
e = 2.71828

Antes de considerar un ejemplo para ver cómo se usa la distribución de Poisson, observe que el número de ocurrencias x, no tiene límite superior. Ésta es una variable aleatoria discreta que toma los valores de una sucesión infinita de números ($x = 0, 1, 2, \ldots$).

Un ejemplo considerando intervalos de tiempo

Los laboratorios Bell usaron la distribución de Poisson para modelar las llegadas de llamadas telefónicas.

Suponga que desea saber el número de llegadas, en un lapso de 15 minutos, a la rampa del cajero automático de un banco. Si se puede suponer que la probabilidad de llegada de los automóviles es la misma en cualesquiera dos lapsos de la misma duración y si la llegada o no–llegada de un automóvil en cualquier lapso es independiente de la llegada o no–llegada de un automóvil en cualquier otro lapso, se puede aplicar la función de probabilidad de Poisson. Dichas condiciones se satisfacen y en un análisis de datos pasados encuentra que el número promedio de automóviles que llegan en un lapso de 15 minutos es 10; en este caso use la función de probabilidad siguiente.

$$f(x) = \frac{10^x e^{-10}}{x!}$$

Aquí la variable aleatoria es x = número de automóviles que llegan en un lapso de 15 minutos.

Si la administración desea saber la probabilidad de que lleguen exactamente cinco automóviles en 15 minutos, $x = 5$, y se obtiene

$$\begin{array}{l}\text{Probabilidad de que lleguen}\\ \text{exactamente 5 automóviles}\\ \text{en 15 minutos}\end{array} = f(5) = \frac{10^5 e^{-10}}{5!} = 0.0378$$

Aunque esta probabilidad se obtuvo evaluando la función de probabilidad con $\mu = 10$ y $x = 5$, suele ser más fácil consultar una tabla de probabilidad de Poisson. Dichas tablas proporcionan las probabilidades para valores específicos de x y μ. La tabla 7 del apéndice B es una tabla de probabilidad de Poisson. Para mayor comodidad, en la tabla 5.9 se reproduce parte de la tabla 7 del apéndice B. Observe que para usar una tabla de probabilidades de Poisson se necesitan sólo

TABLA 5.9 ALGUNOS VALORES DE LAS TABLAS DE PROBABILIDAD DE POISSON
EJEMPLO: $\mu = 10, x = 5; f(5) = .0378$

	μ									
x	**9.1**	**9.2**	**9.3**	**9.4**	**9.5**	**9.6**	**9.7**	**9.8**	**9.9**	**10**
0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
2	0.0046	0.0043	0.0040	0.0037	0.0034	0.0031	0.0029	0.0027	0.0025	0.0023
3	0.0140	0.0131	0.0123	0.0115	0.0107	0.0100	0.0093	0.0087	0.0081	0.0076
4	0.0319	0.0302	0.0285	0.0269	0.0254	0.0240	0.0226	0.0213	0.0201	0.0189
5	0.0581	0.0555	0.0530	0.0506	0.0483	0.0460	0.0439	0.0418	0.0398	0.**0378**
6	0.0881	0.0851	0.0822	0.0793	0.0764	0.0736	0.0709	0.0682	0.0656	0.0631
7	0.1145	0.1118	0.1091	0.1064	0.1037	0.1010	0.0982	0.0955	0.0928	0.0901
8	0.1302	0.1286	0.1269	0.1251	0.1232	0.1212	0.1191	0.1170	0.1148	0.1126
9	0.1317	0.1315	0.1311	0.1306	0.1300	0.1293	0.1284	0.1274	0.1263	0.1251
10	0.1198	0.1210	0.1219	0.1228	0.1235	0.1241	0.1245	0.1249	0.1250	0.1251
11	0.0991	0.1012	0.1031	0.1049	0.1067	0.1083	0.1098	0.1112	0.1125	0.1137
12	0.0752	0.0776	0.0799	0.0822	0.0844	0.0866	0.0888	0.0908	0.0928	0.0948
13	0.0526	0.0549	0.0572	0.0594	0.0617	0.0640	0.0662	0.0685	0.0707	0.0729
14	0.0342	0.0361	0.0380	0.0399	0.0419	0.0439	0.0459	0.0479	0.0500	0.0521
15	0.0208	0.0221	0.0235	0.0250	0.0265	0.0281	0.0297	0.0313	0.0330	0.0347
16	0.0118	0.0127	0.0137	0.0147	0.0157	0.0168	0.0180	0.0192	0.0204	0.0217
17	0.0063	0.0069	0.0075	0.0081	0.0088	0.0095	0.0103	0.0111	0.0119	0.0128
18	0.0032	0.0035	0.0039	0.0042	0.0046	0.0051	0.0055	0.0060	0.0065	0.0071
19	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021	0.0023	0.0026	0.0028	0.0031	0.0034	0.0037
20	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0014	0.0015	0.0017	0.0019
21	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
22	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004
23	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001

dos valores, x y μ. En la tabla 5.9 la probabilidad de cinco llegadas en un lapso de 15 minutos se obtiene localizando el valor que se encuentra en el renglón correspondiente a $x = 5$ y la columna correspondiente a $\mu = 10$. Así obtiene $f(5) = 0.0378$

Una propiedad de la distribución de Poisson es que la media y la varianza son iguales.

La media de la distribución de Poisson en el ejemplo anterior fue $\mu = 10$ llegadas en un lapso de 15 minutos. Una propiedad de la distribución de Poisson es que la media y la varianza de la distribución son *iguales*. Por tanto, la varianza del número de llegadas en un lapso de 15 minutos es $\sigma^2 = 10$. La desviación estándar es $\sigma = \sqrt{10} = 3.16$.

En el ejemplo anterior se usó un lapso de 15 minutos, pero también se usan otros lapsos. Suponga que desea calcular la probabilidad de una llegada en un lapso de 3 minutos. Como 10 es el número esperado de llegadas en un lapso de 15 minutos: $10/15 = 2/3$ es el número esperado de llegadas en un lapso de un minuto y que $(2/3)(3 \text{ minutos}) = 2$ es el número esperado de llegadas en un lapso de 3 minutos. Entonces, la probabilidad de x llegadas en un lapso de 3 minutos con $\mu = 2$ está dada por la siguiente función de probabilidad de Poisson.

$$f(x) = \frac{2^x e^{-2}}{x!}$$

La probabilidad de una llegada en un lapso de 3 minutos se obtiene como sigue:

$$\begin{array}{l}\text{Probabilidad de exactamente} \\ \text{una llegada en 3 minutos}\end{array} = f(1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 0.2707$$

Antes se calculó la probabilidad de cinco llegadas en un lapso de 15 minutos; se obtuvo 0.0378. Observe que la probabilidad de una llegada en un lapso de tres minutos (0.2707) no es la misma. Para calcular la probabilidad de Poisson en un lapso diferente, primero hay que convertir la llegada media al lapso que interesa y después calcular la probabilidad.

Un ejemplo considerando intervalos de longitud o de distancia

Ahora se da un ejemplo en el que no aparecen intervalos de tiempo y en el que se usa la distribución de Poisson. Asuma que le interesa la ocurrencia de una avería importante en una autopista un mes después de que ha sido repavimentada. Supondrá que la probabilidad de que haya una avería es la misma en cualesquiera dos tramos, de una misma longitud, de la autopista y que la ocurrencia o no–ocurrencia de una avería en un tramo es independiente de la ocurrencia o no-ocurrencia de una avería en cualquier otro tramo. Por tanto, emplea la distribución de Poisson.

También sabe que el promedio de averías importantes, un mes después de la repavimentación, son dos averías por milla. Desea determinar la probabilidad de que no haya ninguna avería en un determinado tramo de tres millas de autopista. Como lo que interesa es un intervalo cuya longitud es de tres millas, μ = (2 averías/milla)(3 millas) = 6 representa el número esperado de averías importantes en un tramo de tres millas de autopista. Mediante la ecuación (5.11), la probabilidad de que no haya ninguna avería importante es $f(0) = 6^0e^{-6}/0! = 0.0025$. Por tanto, es poco probable que no haya ninguna avería importante en este tramo de tres millas. En efecto, este ejemplo indica que hay una probabilidad de $1 - 0.0025 = 0.9975$ de que haya por lo menos una avería importante en este tramo de tres millas de autopista.

Ejercicios

Métodos

38. Considere una distribución de Poisson con $\mu = 3$.
    a. Dé la adecuada función de probabilidad de Poisson.
    b. Calcule $f(2)$.
    c. Calcule $f(1)$.
    d. Calcule $P(x \geq 2)$.

Autoexamen

39. Considere una distribución de Poisson en que la media es de dos ocurrencias por un periodo de tiempo.
    a. Dé la adecuada función de probabilidad de Poisson.
    b. ¿Cuál es el número esperado de ocurrencias en tres periodos de tiempo?
    c. Dé la adecuada función de probabilidad de Poisson para determinar la probabilidad de x ocurrencias en tres lapsos.
    d. Calcule la probabilidad de dos ocurrencias en un periodo de tiempo.
    e. Calcule la probabilidad de seis ocurrencias en tres periodos de tiempo.
    f. Calcule la probabilidad de cinco ocurrencias en dos periodos de tiempo.

Aplicaciones

40. A la oficina de reservaciones de una aerolínea regional llegan 48 llamadas por hora.
    a. Calcule la probabilidad de recibir cinco llamadas en un lapso de 5 minutos.
    b. Estime la probabilidad de recibir exactamente 10 llamadas en un lapso de 15 minutos.
    c. Suponga que no hay ninguna llamada en espera. Si el agente de viajes necesitará 5 minutos para la llamada que está atendiendo, ¿cuántas llamadas habrá en espera para cuando él termine? ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ninguna llamada en espera?
    d. Si en este momento no hay ninguna llamada, ¿cuál es la probabilidad de que el agente de viajes pueda tomar 3 minutos de descanso sin ser interrumpido por una llamada?

41. Durante el periodo en que una universidad recibe inscripciones por teléfono, llegan llamadas a una velocidad de una cada dos minutos.
    a. ¿Cuál es el número esperado de llamadas en una hora?
    b. ¿Cuál es la probabilidad de que haya tres llamadas en cinco minutos?
    c. ¿De que no haya llamadas en un lapso de cinco minutos?

Autoexamen

42. En Estados Unidos, cada año, más de 50 millones de huéspedes se alojan en un "Bread and breakfast" (B&B). El sitio Web dedicado a los alojamientos tipo Bread and Breakfast en Estados Unidos (www.bestinns.net), que tiene un promedio aproximado de siete visitantes por minuto, permite a muchos B&B obtener huéspedes (*Time*, septiembre de 2001).
    a. Calcule la probabilidad de que no haya ningún visitante al sitio Web en un lapso de un minuto.
    b. De que haya dos o más visitantes al sitio Web en un lapso de un minuto.
    c. De que haya uno o más visitantes al sitio Web en un lapso de 30 segundos.
    d. De que haya cinco o más visitantes al sitio Web en un lapso de un minuto.
43. Los pasajeros de las aerolíneas llegan en forma aleatoria e independiente al mostrador de revisión de pasajeros. La tasa media de llegada es 10 pasajeros por minuto.
    a. Calcule la probabilidad de que no llegue ningún pasajero en un lapso de un minuto.
    b. Calcule la probabilidad de que lleguen tres o menos pasajeros en un lapso de un minuto.
    c. De que no llegue ningún pasajero en un lapso de 15 segundos.
    d. De que llegue por lo menos un pasajero en un lapso de 15 segundos.
44. Cada año ocurren en promedio 15 accidentes aéreos (*The World Almanac and Book of Facts*, 2004).
    a. Calcule el número medio de accidentes aéreos por mes.
    b. Calcule la probabilidad de que no haya ningún accidente en un mes.
    c. De que haya exactamente un accidente en un mes.
    d. De que haya más de un accidente en un mes.
45. El National Safety Council de Estados Unidos estima que los accidentes fuera del trabajo tienen para las empresas un costo de casi $200 mil millones anuales en pérdida de productividad. Con base en estos datos, las empresas que tienen 50 empleados esperan tener por lo menos tres accidentes fuera del trabajo por año. Para estas empresas con 50 empleados, conteste las preguntas siguientes.
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ningún accidente fuera del trabajo en un año?
    b. ¿De que haya por lo menos dos accidentes fuera del trabajo en un año?
    c. ¿Cuál es el número esperado de accidentes fuera del trabajo en un lapso de seis meses?
    d. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ningún accidente fuera del trabajo en los próximos seis meses?

5.6 Distribución de probabilidad hipergeométrica

La **distribución de probabilidad hipergeométrica** está estrechamente relacionada con la distribución binomial. Pero difieren en dos puntos: en la distribución hipergeométrica los ensayos no son independientes y la probabilidad de éxito varía de ensayo a ensayo.

En la notación usual en la distribución hipergeométrica, r denota el número de elementos considerados como éxitos que hay en una población de tamaño N, y $N - r$ denota el número de elementos considerados como fracasos que hay en dicha población. La **función de probabilidad hipergeométrica** se usa para calcular la probabilidad de que en una muestra aleatoria de n elementos, seleccionados sin reemplazo, se tengan x éxitos y $n - x$ fracasos. Para que se presente este resultado, debe tener x éxitos de los r éxitos que hay en la población y $n - x$ fracasos de los $N - r$ fracasos. La siguiente función de probabilidad hipergeométrica proporciona $f(x)$, la probabilidad de tener x éxitos en una muestra de tamaño n.

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD HIPERGEOMÉTRICA

$$f(x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{para } 0 \le x \le r \tag{5.12}$$

donde

$f(x)$ = probabilidad de x éxitos en n ensayos
n = número de ensayos
N = número de elementos en la población
r = número de elementos en la población considerados como éxitos

Observe que $\binom{N}{n}$ representa el número de maneras en que es posible tomar una muestra de tamaño n de una población de tamaño N; $\binom{r}{x}$ representa el número de formas en que se toman x éxitos de un total de r éxitos que hay en la población, y $\binom{N-r}{n-x}$ representa el número de maneras en que se puede tomar $n - x$ fracasos de un total de $N - r$ que hay en la población.

Para ilustrar los cálculos que se emplean al usar la ecuación (5.12), considere la siguiente aplicación al control de calidad. Una empresa fabrica fusibles que empaca en cajas de 12 unidades cada una. Asuma que un inspector selecciona al azar tres de los 12 fusibles de una caja para inspeccionarlos. Si la caja contiene exactamente cinco fusibles defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que el inspector encuentre que uno de los tres fusibles está defectuoso? En esta aplicación $n = 3$ y $N = 12$. Si $r = 5$ fusibles defectuosos en la caja, la probabilidad de hallar $x = 1$ defectuoso es

$$f(1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{7}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{\left(\frac{5!}{1!4!}\right)\left(\frac{7!}{2!5!}\right)}{\left(\frac{12!}{3!9!}\right)} = \frac{(5)(21)}{220} = 0.4773$$

Ahora suponga que desea conocer la probabilidad de hallar *por lo menos* un fusible defectuoso. La manera más sencilla de contestar es calcular primero la probabilidad de que el inspector no encuentre ningún fusible defectuoso. La probabilidad de $x = 0$ es

$$f(0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{7}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{\left(\frac{5!}{0!5!}\right)\left(\frac{7!}{3!4!}\right)}{\left(\frac{12!}{3!9!}\right)} = \frac{(1)(35)}{220} = 0.1591$$

Si la probabilidad de cero fusibles defectuosos es $f(0) = 0.1591$, se concluye que la probabilidad de hallar por lo menos un fusible defectuoso debe ser $1 - 0.1591 = 0.8409$. Así, existe una probabilidad razonablemente alta de que el inspector encuentre por lo menos un fusible defectuoso.

La media y la varianza de una distribución hipergeométrica son las siguientes.

$$E(x) = \mu = n\left(\frac{r}{N}\right) \tag{5.13}$$

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = n\left(\frac{r}{N}\right)\left(1 - \frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \tag{5.14}$$

En el ejemplo anterior $n = 3$, $r = 5$ y $N = 12$. Por tanto, la media y la varianza del número de fusibles defectuosos es

$$\mu = n\left(\frac{r}{N}\right) = 3\left(\frac{5}{12}\right) = 1.25$$

$$\sigma^2 = n\left(\frac{r}{N}\right)\left(1 - \frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 3\left(\frac{5}{12}\right)\left(1 - \frac{5}{12}\right)\left(\frac{12-3}{12-1}\right) = 0.60$$

La desviación estándar es $\sigma = \sqrt{0.60} = 0.77$.

NOTAS Y COMENTARIOS

Considere una distribución hipergeométrica con n ensayos. Sea $p = (r/N)$ la probabilidad de un éxito en el primer ensayo. Si el tamaño de la población es grande, el término $(N - n)/(N - 1)$ de la ecuación (5.14) se aproxima a 1. Entonces, el valor esperado y la varianza se expresan como $E(x) = np$ y $\text{Var}(x) = np(1 - p)$. Preste atención a que estas expresiones son las mismas que se usan para calcular el valor esperado y la varianza en una distribución binomial, ecuaciones (5.9) y (5.10). Cuando el tamaño de la población es grande, se aproxima una distribución hipergeométrica mediante una distribución binomial con n ensayos y probabilidad de éxito $p = (r/N)$.

Ejercicios

Métodos

Autoexamen

46. Suponga que $N = 10$ y $r = 3$. Calcule las probabilidades hipergeométricas correspondientes a los valores siguiente de n y x.
    a. $n = 4, x = 1$.
    b. $n = 2, x = 2$.
    c. $n = 2, x = 0$.
    d. $n = 4, x = 2$.
47. Suponga que $N = 15$ y $r = 4$. ¿Cuál es la probabilidad de $x = 3$ para $n = 10$?

Aplicaciones

48. En una encuesta realizada por Gallup Organization, se les preguntó a los interrogados, “Cuál es el deporte que prefieres ver”. Futbol y básquetbol ocuparon el primero y segundo lugar de preferencia (www.gallup.com, 3 de enero de 2004). Si en un grupo de 10 individuos, siete prefieren futbol y tres prefieren básquetbol. Se toma una muestra aleatoria de tres de estas personas.
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos prefieren el futbol?
    b. ¿De que la mayoría (ya sean dos o tres) prefiere el futbol?
49. Blackjack, o veintiuno, como se le suele llamar, es un popular juego de apuestas en los casinos de Las Vegas. A un jugador se le reparten dos cartas. Las figuras (sotas, reinas y reyes) y los 10 valen 10 puntos. Los ases valen 1 u 11. Una baraja de 52 cartas tiene 16 cartas que valen 10 (sotas, reinas, reyes y dieces) y cuatro ases.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos cartas repartidas sean ases o cartas que valgan 10 puntos?
b. ¿De que las dos cartas sean ases?
c. ¿De que las dos cartas valgan 10?
d. Un blackjack es una carta de 10 puntos y un as que suman 21. Use sus respuestas a los incisos a, b y c para determinar la probabilidad de que a un jugador se le reparta blackjack. (*Indicación:* El inciso c no es un problema hipergeométrico. Desarrolle su propio razonamiento lógico para combinar las probabilidades hipergeométricas de los incisos a, b y c para responder esta pregunta.)

Autoexamen

50. Una empresa fabrica computadoras personales en dos fábricas, una en Texas y la otra en Hawai. La fábrica de Texas tiene 40 empleados; la fábrica de Hawai tiene 20 empleados. A una muestra aleatoria de 20 empleados se le pide que llene un cuestionario sobre prestaciones.
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los empleados de la muestra trabaje en la fábrica de Hawai?
    b. ¿De que uno de los empleados de la muestra trabaje en la fábrica de Hawai?
    c. ¿De que dos o más de los empleados de la muestra trabajen en la fábrica de Hawai?
    d. ¿De que nueve de los empleados de la muestra trabajen en la fábrica de Texas?
51. En una revista de encuestas se da información sobre la evaluación a los platillos, la decoración y el servicio de varios de los principales restaurantes de Estados Unidos. En 15 de los mejor evaluados restaurantes de Boston, el costo promedio de una cena, que incluye una bebida y la propina, es $48.60. Usted va a ir en viaje de negocios a Boston y le gustaría cenar en tres de estos restaurantes. Su empresa le pagará máximo $50 por cena. Sus conocidos en Boston le han informado que en una tercera parte de estos restaurantes una cena cuesta más de $50. Suponga que escoge al azar tres de estos restaurantes para ir a cenar.
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que el costo de ninguna de las cenas sea mayor a la cantidad que paga su empresa?
    b. ¿De que el costo de una de las cenas sea mayor a la cantidad que paga su empresa?
    c. ¿De que el costo de dos de las cenas sea mayor a la cantidad que paga su empresa?
    d. ¿De que el costo de las tres cenas sea mayor a la cantidad que paga su empresa?
52. En un pedido de 10 artículos hay dos defectuosos y ocho no defectuosos. Para la inspección del pedido se tomará una muestra y se inspeccionará. Si se encuentra un artículo defectuoso todo el pedido de 10 artículos será devuelto.
    a. Si toma una muestra de tres artículos, ¿cuál es la probabilidad de que devuelva el pedido?
    b. Si toma una muestra de cuatro artículos, ¿cuál es la probabilidad de que devuelva el pedido?
    c. Si toma una muestra de cinco artículos, ¿cuál es la probabilidad de que devuelva el pedido?
    d. Si la administración desea que la probabilidad de rechazar un pedido en el que haya dos artículos defectuosos y ocho no defectuosos sea 0.90, ¿de qué tamaño recomienda que sea la muestra?

Resumen

Una variable aleatoria da una descripción numérica de los resultados de un experimento. La distribución de probabilidad de una variable aleatoria describe cómo se reparten las probabilidades entre los valores que toma dicha variable. En toda variable aleatoria discreta, x, su distribución de probabilidad se define mediante una función de probabilidad, que se denota $f(x)$ y la cual da la probabilidad que corresponde a cada valor de la variable aleatoria. Una vez que se ha definido la función de probabilidad, es posible calcular el valor esperado, la varianza y la desviación estándar de la variable aleatoria.

La distribución binomial se usa para determinar la probabilidad de x éxitos en n ensayos, siempre que el experimento satisfaga las propiedades siguientes:

1. El experimento consista en una serie de n ensayos idénticos.
2. En cada ensayo haya dos resultados posibles, uno llamado éxito y el otro fracaso.
3. La probabilidad de un éxito no varíe de un ensayo a otro. Por tanto, la probabilidad de fracaso, $(1 - p)$, tampoco variará de un resultado a otro.
4. Los ensayos sean independientes.

Si se satisfacen estas cuatro propiedades, la probabilidad de x éxitos en n ensayos se determina usando la función de probabilidad binomial. También se presentaron las fórmulas para hallar la media y la varianza de una distribución binomial.

La distribución de Poisson se usa cuando se quiere obtener la probabilidad de x ocurrencias de un evento en un determinado intervalo de tiempo o de espacio. Para que se emplee la distribución de Poisson deben satisfacerse las condiciones siguientes:

1. La probabilidad de una ocurrencia del evento es la misma para cualesquier dos intervalos de la misma longitud.
2. La ocurrencia o no–ocurrencia del evento en un determinado intervalo es independiente de la ocurrencia o no–ocurrencia del evento en cualquier otro intervalo.

En la sección 5.6 se presentó la tercera distribución discreta de probabilidad presentada, la distribución hipergeométrica. Es como la binomial, que se usa para calcular la probabilidad de x éxitos en n ensayos, pero, a diferencia de ésta, la probabilidad de éxito si varía de un ensayo a otro.

Glosario

Variable aleatoria Una descripción numérica del resultado de un experimento.
Variable aleatoria discreta Una variable aleatoria que puede asumir un número finito de valores o un número infinito de valores de una sucesión.
Variable aleatoria continua Ésta toma cualquier valor de un intervalo o de una colección de intervalos.
Distribución de probabilidad Descripción de cómo se distribuyen las probabilidades entre los valores de una variable aleatoria.
Función de probabilidad Se denota $f(x)$ y da la probabilidad de que x tome un determinado valor de una variable aleatoria.
Distribución de probabilidad uniforme discreta Distribución de probabilidad para la cual cada posible valor de la variable aleatoria tienen la misma probabilidad.
Valor esperado Medida de localización central de una variable aleatoria.
Varianza Medida de la variabilidad o dispersión de una variable aleatoria.
Desviación estándar Raíz cuadrada positiva de la varianza.
Experimento binomial Un experimento que tiene cuatro propiedades que se dan al principio de la sección 5.4.
Distribución de probabilidad binomial Distribución de probabilidad da la probabilidad de x éxitos en n ensayos de un experimento binomial.
Función de probabilidad binomial La función usada para calcular las probabilidades binomiales.
Distribución de probabilidad de Poisson Distribución de probabilidad da la probabilidad de x ocurrencias de un evento en un determinado intervalo de tiempo o de espacio.
Función de probabilidad de Poisson La función usada para calcular las probabilidades de Poisson.
Distribución de probabilidad hipergeométrica Distribución de probabilidad da la probabilidad de x éxitos en n ensayos a partir de una población en la que hay r éxitos y $N - r$ fracasos.
Función de probabilidad hipergeométrica La función usada para calcular probabilidades hipergeométricas

Fórmulas clave

Función de probabilidad uniforme discreta

$$f(x) = 1/n \tag{5.3}$$

Valor esperado en una variable aleatoria discreta

$$E(x) = \mu = \Sigma x f(x) \tag{5.4}$$

Varianza en una variable aleatoria discreta

$$\mathrm{Var}(x) = \sigma^2 = \Sigma(x - \mu)^2 f(x) \tag{5.5}$$

Número de resultados experimentales en los que se encuentran exactamente *x* éxitos en *n* ensayos

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \tag{5.6}$$

Función de probabilidad binomial

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)} \tag{5.8}$$

Valor esperado en una distribución binomial

$$E(x) = \mu = np \tag{5.9}$$

Varianza en una distribución binomial

$$\mathrm{Var}(x) = \sigma^2 = np(1-p) \tag{5.10}$$

Función de probabilidad de Poisson

$$f(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \tag{5.11}$$

Función de probabilidad hipergeométrica

$$f(x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{para } 0 \le x \le r \tag{5.12}$$

Valor esperado en la distribución hipergeométrica

$$E(x) = \mu = n\left(\frac{r}{N}\right) \tag{5.13}$$

Varianza en la distribución hipergeométrica

$$\mathrm{Var}(x) = \sigma^2 = n\left(\frac{r}{N}\right)\left(1 - \frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \tag{5.14}$$

Ejercicios complementarios

53. El *Barron´s* Big Money Poll preguntó a 131 gerentes de inversiones de Estados Unidos acerca de sus puntos de vista sobre las inversiones a corto plazo (*Barron´s*, 28 de octubre de 2002). De acuerdo con las respuestas 4% se encontraban muy optimistas, 39 % se encontraban optimistas, 29% se encontraban neutrales, 21% se encontraban pesimistas y 7% se encontraban muy pesimistas. Sea x la variable aleatoria que refleje el grado de optimismo y que vaya desde $x = 1$ para muy pesimista hasta $x = 5$ para muy optimista.
    a. Elabore una distribución de probabilidad para el grado de optimismo de los gerentes de inversiones.
    b. Calcule el valor esperado del grado de optimismo.
    c. Calcule la varianza y la desviación estándar del grado de optimismo.
    d. Haga un comentario sobre lo que le dicen sus resultados acerca del grado de optimismo y su variabilidad.

54. La American Association of Individual Investors publica una guía anual con los principales fondos mutualistas (*The Individual Investor´s Guide to the Top Mutual Founds*, 22ª ed., American Association of Individual Investors, 2003). En la tabla 5.10 se presenta la clasificación de 29 fondos mutualistas de acuerdo con el riesgo.
    a. Sea x una variable que va desde $x = 1$ con el menor riesgo hasta el mayor riesgo con $x = 5$. Elabore una distribución de probabilidad para el nivel de riesgo.
    b. ¿Cuál es el valor esperado y la varianza del nivel de riesgo?
    c. Se encontró que 11 de éstos eran fondos de renta fija. De ellos siete se clasificaron como bajos y cuatro como abajo del promedio. Compare el riesgo de los fondos de renta fija con los 18 fondos de acciones.

TABLA 5.10 DE 29 FONDOS MUTUALISTAS

Número de fondos	**Nivel de riesgo: categorías**
Bajo	7
Bajo el promedio	6
Promedio	3
Sobre el promedio	6
Alto	7

55. Al hacer el presupuesto de gastos para el próximo año en una universidad, se obtuvieron los siguientes pronósticos de gastos (dados en millones de dólares) \$9, \$10, \$11, \$12 y \$13. Como no se sabe cuáles son los gastos actuales, a los gastos calculados se les asignaron las probabilidades 0.3, 0.2, 0.25, 0.05 y 0.2.
    a. Dé la distribución de probabilidad para estos pronósticos de gastos.
    b. ¿Cuál es el valor esperado en estos pronósticos de gastos?
    c. ¿Cuál es la varianza en el pronóstico de gastos para el año próximo?
    d. Si las proyecciones de ingreso estiman que éste será de \$12 millones, ¿cómo será la situación financiera de la universidad?

56. En un estudio realizado por la Bureau of Transportation Statistics se encontró que, en promedio, la duración del recorrido de la casa al trabajo de una persona es de 26 minutos. También que 5% de las personas necesitan más de una hora para transportarse de su casa al trabajo.
    a. Si interroga a 20 de estas personas, ¿cuál es la probabilidad de que informen que necesitan más de una hora para ir de su casa el trabajo?
    b. Si interroga a 20 de estas personas, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna de ellas informe que necesita más de una hora para ir de su casa al trabajo?

c. Si en una empresa hay 2000 empleados, ¿cuál es el número esperado de empleados que necesita más de una hora para trasladarse de su casa al trabajo?
d. Si en una empresa hay 2000 empleados, ¿cuál es la varianza y la desviación estándar del número de empleados que necesitan más de una hora para trasladarse de su casa al trabajo.

57. Una empresa piensa entrevistar a los usuarios de Internet para saber cómo será recibida su página por los grupos de las distintas edades. De acuerdo con la Census Bureau, 40% de las personas entre 18 y 54 años y 12% de las personas de 55 años o más usan Internet.
a. ¿Cuántas personas entre 18 y 54 años hay que contactar para hallar un número esperado de por lo menos 10 usuarios de Internet?
b. ¿Cuántas personas de 55 años o más hay que contactar para hallar un número esperado de por lo menos 10 usuarios de Internet?
c. Si se contacta el número de personas entre 18 y 54 años sugerido por el inciso a, ¿cuál es la desviación estándar del número que será usuario de Internet?
d. Si se contacta el número de personas de entre 55 años o más sugerido por el inciso b, ¿cuál es la desviación estándar del número de quienes serán usuarios de Internet?

58. Muchas empresas usan una técnica de control de calidad conocida como muestreo de aceptación para vigilar los pedidos que reciben de piezas, materia prima, etc. En la industria electrónica, los componentes se suelen recibir por lotes grandes. La inspección de una muestra de n componentes se considera como n ensayos de un experimento binomial. El resultado de la revisión de cada componente (ensayo) es que el componente sea clasificado como bueno o como defectuoso. Reynolds Electronics acepta el lote de un determinado distribuidor si los componentes defectuosos encontrados en el lote no son más de 1%. Suponga que se prueba una muestra aleatoria de cinco artículos del último lote recibido.
a. Asuma que 1% del lote recibido está defectuoso. Calcule la probabilidad de que ningún elemento de la muestra esté defectuoso.
b. Admita que 1% del lote recibido está defectuoso. Calcule la probabilidad de que exactamente un elemento de la muestra esté defectuoso.
c. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar uno o más artículos defectuosos si 1% del lote está defectuoso?
d. ¿Estaría usted tranquilo al aceptar el lote si se encuentra un artículo defectuoso? ¿Por qué sí o por qué no?

59. La tasa de desempleo es 4.1% (*Barron's*, 4 de septiembre de 2000). Suponga que selecciona aleatoriamente 100 personas empleables.
a. ¿Cuál es el número esperado de personas que están desempleadas?
b. ¿Cuál es la varianza y la desviación estándar del número de personas que están desempleadas?

60. Un sondeo de Zogby encontró que de los estadounidenses para quienes la música es "muy importante" en su vida, 30% dice que su estación de radio "siempre" toca la clase de música que le gusta. Suponga que toma una muestra de 800 personas para quienes la música es muy importante en su vida.
a. ¿Cuántas afirmarían que su estación de radio siempre toca la música que les gusta?
b. ¿Cuál es la desviación estándar del número de interrogados para quienes su estación de radio siempre toca la música que les gusta?
c. ¿Cuál es la desviación estándar del número de interrogados para quienes su estación de radio no siempre toca la música que les gusta?

61. A un lavado de coches los automóviles llegan en forma aleatoria e independiente; la probabilidad de una llegada es la misma en cualesquiera dos intervalos de la misma duración. La tasa de llegada media es 15 automóviles por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que en una hora cualquiera de operación lleguen 20 o más automóviles?

62. En un proceso nuevo de producción automática hay en promedio 1.5 interrupciones por día. Debido al elevado costo de las interrupciones, los directivos están preocupados por la posibilidad de que en un día haya tres o más interrupciones. Suponga que las interrupciones se presentan en forma aleatoria, que la probabilidad de una interrupción es la misma en cualesquiera dos intervalos de una misma duración y que las interrupciones en un intervalo de tiempo son independientes de

las interrupciones en otro intervalo de tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de que haya tres o más interrupciones en un día?

63. Un director regional responsable del desarrollo de los negocios en una determinada área está preocupado por el número de fracasos de pequeños negocios. Si en promedio fracasan 10 pequeños negocios por mes, ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro pequeños negocios fracasen en un mes determinado? Suponga que la probabilidad de fracasos es la misma en cada dos meses que se tomen y que la ocurrencia o no–ocurrencia de fracasos en un determinado mes es independiente de la ocurrencia o no–ocurrencia de fracasos en cualquier otro mes

64. Las llegadas de los clientes a un banco son aleatorias e independientes; la probabilidad de una llegada en un lapso cualquiera de un minuto es la misma que la probabilidad de una llegada en otro lapso cualquiera de un minuto. Conteste las preguntas siguientes suponiendo que la tasa media de llegadas en un lapso de un minuto es tres clientes.
    a. ¿Cuál es la probabilidad de exactamente tres llegadas en un minuto?
    b. ¿Cuál es la probabilidad de por lo menos tres llegadas en un minuto?

65. Una baraja contiene 52 cartas, de las cuales cuatro son ases. ¿Cuál es la probabilidad de que en una repartición de cinco cartas haya:
    a. Un par de ases?
    b. Exactamente un as?
    c. Ningún as?
    d. Por lo menos un as?

66. En la semana que terminó el 16 de septiembre de 2001, Tiger Woods estuvo a la cabeza en ganancia de dinero en el PGA Tour, con una ganancia total de $5 517 777. De los 10 principales jugadores en ganancias de dinero siete usaron pelotas de golf de la marca Titleist (www.pgatour.com). Suponga que toma al azar a dos de estos principales ganadores.
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente uno use una pelota de golf de la marca Titleist?
    b. ¿De que los dos usen una pelota de golf de la marca Titleist?
    c. ¿De que ninguno use una pelota de golf de la marca Titleist?

Apéndice 5.1 Distribuciones de probabilidad con Minitab

Los paquetes para estadística como Minitab ofrecen procedimientos relativamente fáciles y eficientes para calcular probabilidades binomiales. En este apéndice se muestra paso a paso el procedimiento para hallar las probabilidades binomiales del problema de la tienda de ropa Martin Clothing Store de la sección 5.4. Recuerde que las probabilidades binomiales deseadas son para $n = 10$ y $p = 0.30$. Antes de empezar con la rutina de Minitab, el usuario debe ingresar los valores deseados de la variable aleatoria en una columna de la hoja de cálculo. Aquí se han ingresado los valores 0, 1, 2, . . ., 10 en la columna 1 (véase la figura 5.5) para generar la distribución de probabilidad binomial completa. Los pasos para obtener las probabilidades binomiales deseadas usando Minitab son los siguientes.

Paso 1. Seleccionar el menú **Calc**
Paso 2. Elegir **Probability distributions**
Paso 3. Elegir **Binomial**
Paso 4. Cuando aparezca el cuadro de diálogo Binomial Distribution:
Seleccionar **Probability**
Ingresar 10 en el cuadro **Number of trials**
Ingresar 0.3 en el cuadro **Probability of succes**
Ingresar C1 en el cuadro **Input column**
Clic en **OK**

El resultado que da Minitab con las probabilidades binomiales aparecerá como se muestra en la figura 5.5.

De manera similar, Minitab proporciona probabilidades de Poisson e hipergeométricas. Por ejemplo, para calcular probabilidades de Poisson, las únicas diferencias están en el paso 3, en el que se deberá seleccionar la opción **Poisson** y en el paso 4, en el que se deberá ingresar **Mean** en lugar del número de ensayos y la probabilidad de éxito

Apéndice 5.2 Distribuciones de probabilidad discreta con Excel

Excel proporciona funciones para calcular las probabilidades de las distribuciones binomial, de Poisson e hipergeométrica tratadas en este capítulo. La función de Excel para calcular probabilidades binomiales es DISTR.BINOM. Esta función tiene cuatro argumentos: x (el número de éxitos), n (el número de ensayos), p (la probabilidad de éxito) y acumulado. Se usa FALSO como cuarto argumento (acumulado) si se quiere la probabilidad de x éxitos y VERDADERO se usa como cuarto argumento si se desea la probabilidad acumulada de x o menos éxitos. A continuación se muestra cómo calcular la probabilidad de 0 a 10 éxitos en el caso del problema de la tienda de ropa Martin Clothing Store de la sección 5.4 (véase figura 5.5).

A medida que se describe la elaboración de la hoja de cálculo consulte la figura 5.6; la hoja de cálculo con las fórmulas aparece en segundo plano y la hoja de cálculo con los valores en primer plano. En la celda B1 ingrese el número de ensayos (10), en la celda B2 la probabilidad de

FIGURA 5.6 HOJA DE CÁLCULO DE EXCEL PARA CALCULAR PROBABILIDADES BINOMIALES

	A	B	C	D
1	**Number of Trials (*n*)**	10		
2	**Probability of Success (*p*)**	0.3		
3				
4		***x***	***f*(*x*)**	
5		0	=BINOMDIST(B5,B1,B2,FALSE)	
6		1	=BINOMDIST(B6,B1,B2,FALSE)	
7		2	=BINOMDIST(B7,B1,B2,FALSE)	
8		3	=BINOMDIST(B8,B1,B2,FALSE)	
9		4	=BINOMDIST(B9,B1,B2,FALSE)	
10		5	=BINOMDIST(B10,B1,B2,FALSE)	
11		6	=BINOMDIST(B11,B1,B2,FALSE)	
12		7	=BINOMDIST(B12,B1,B2,FALSE)	
13		8	=BINOMDIST(B13,B1,B2,FALSE)	
14		9	=BINOMDIST(B14,B1,B2,FALSE)	
15		10	=BINOMDIST(B15,B1,B2,FALSE)	
16				

	A	B	C	D
1	**Number of Trials (*n*)**	10		
2	**Probability of Success (*p*)**	0.3		
3				
4		***x***	***f*(*x*)**	
5		0	0.0282	
6		1	0.1211	
7		2	0.2335	
8		3	0.2668	
9		4	0.2001	
10		5	0.1029	
11		6	0.0368	
12		7	0.0090	
13		8	0.0014	
14		9	0.0001	
15		10	0.0000	
16				

éxito y en las celdas B5:B15 los valores de la variable aleatoria. Con los pasos siguientes generará las probabilidades deseadas.

Paso 1. Usar la función DISTR.BINOM para calcular la probabilidad de $x = 0$ ingresando la fórmula siguiente en la celda C5:

=BINOMDIST(B5,B1,B2,FALSO)

Paso 2. Copiar la fórmula de la celda C5 en las celdas C6:C15.

La hoja de cálculo con los valores en la figura 5.6 muestra que las probabilidades obtenidas son las mismas que aparecen en la figura 5.5. Las probabilidades de Poisson e hipergeométrica se calculan de manera similar. Se emplean las funciones POISSON y DISTR.HIPERGEOM. La herramienta de Excel Insertar función puede ayudar al usuario a ingresar los argumentos adecuados para estas funciones (véase apéndice 2.2).