Cálculo Multivariable - Rocket Book Compiliation

Christiaan Ketelaar
Organizado por : David Corzo

2020-01-06

Índice general

Capítulo1

RB_2020-01-07_18_49_53

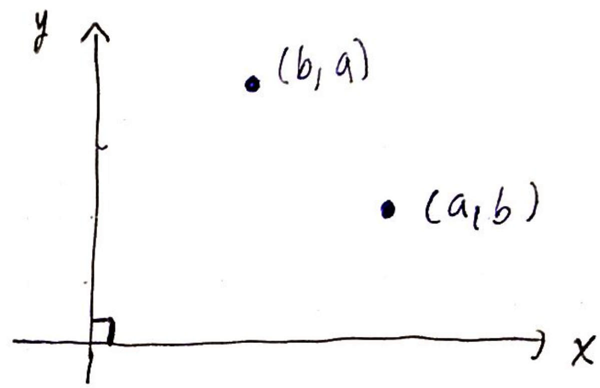
12.1 Sistemas Tridimensionales de Coordenadas.

Para localizar un punto en un plano, se necesitan 2 números.

a la coordenada x

b la coordenada y.

Plano $\mathbb{R}^2$



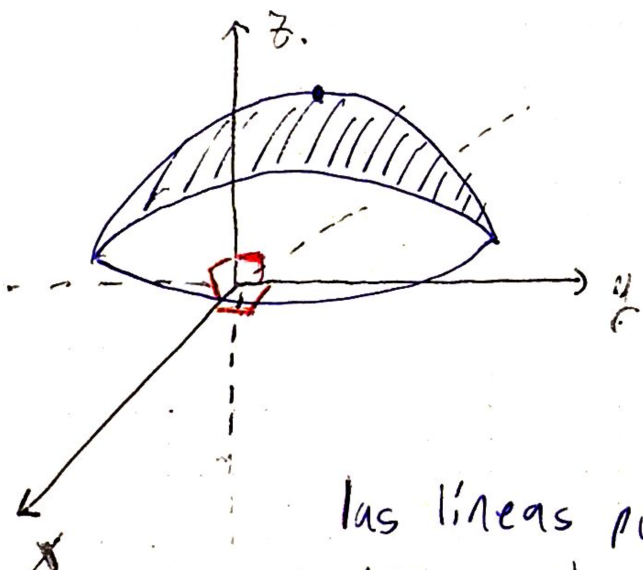
Los ejes de coordenadas son perpendiculares entre sí.

El sistema tridimensional de coordenadas rectangulares

cada punto en el espacio es una terna ordenada (x, y, z)

Espacio $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)$ talque $x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.



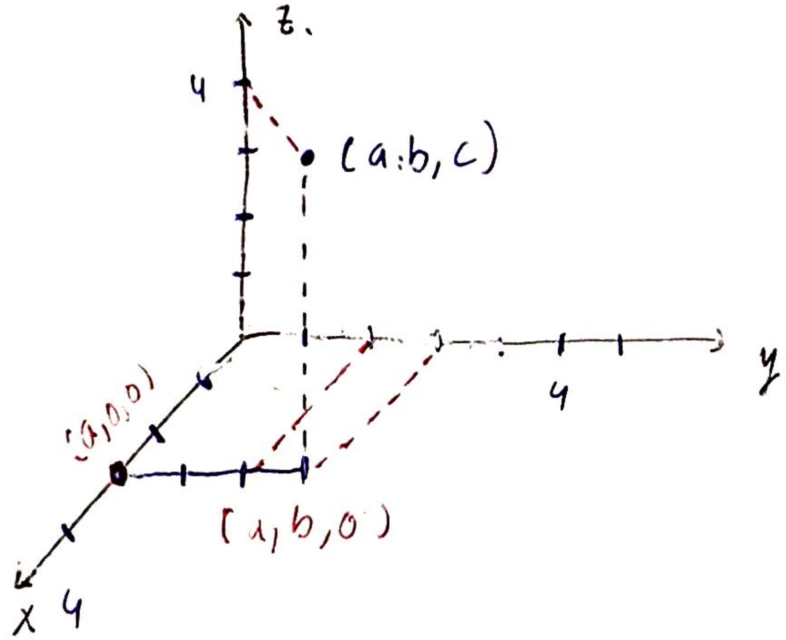
x transversal

y horizontal

z vertical.

$z = f(x, y)$

las líneas punteadas se para simbolizar las partes de abajo, izquierda y detrás.

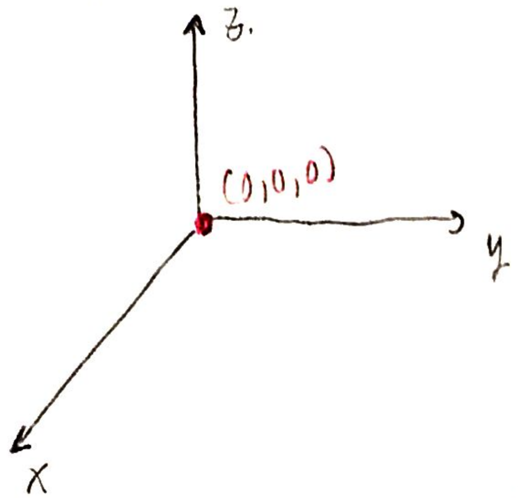


(a,b,c)

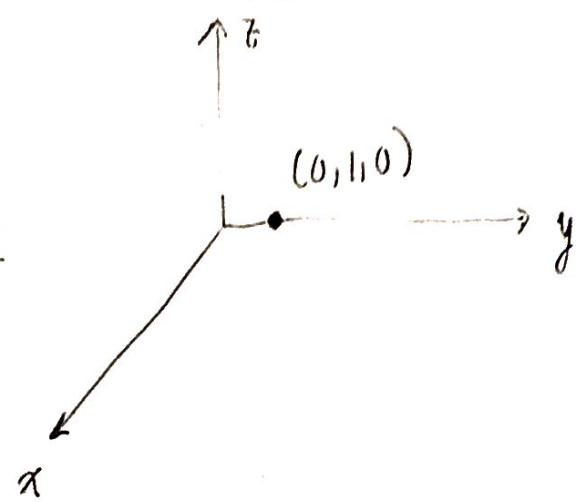
(3,3,4)

Ejercicio 1: Identifique los sigs. puntos.

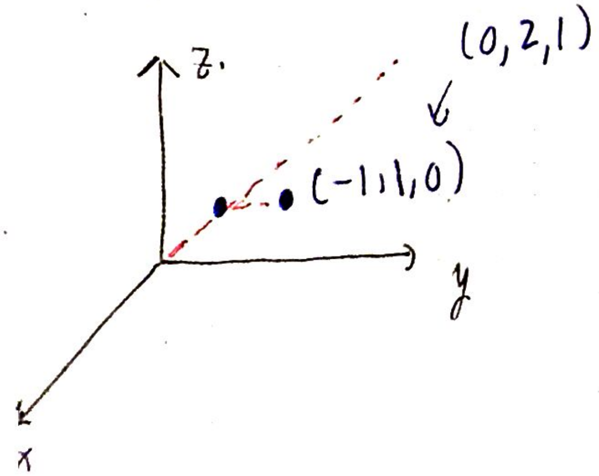
a. (0,0,0)



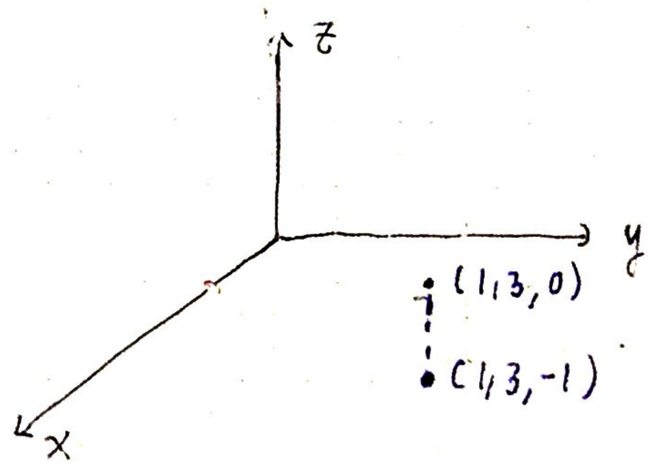
b. (0,1,0)



b. (-1,1,0)



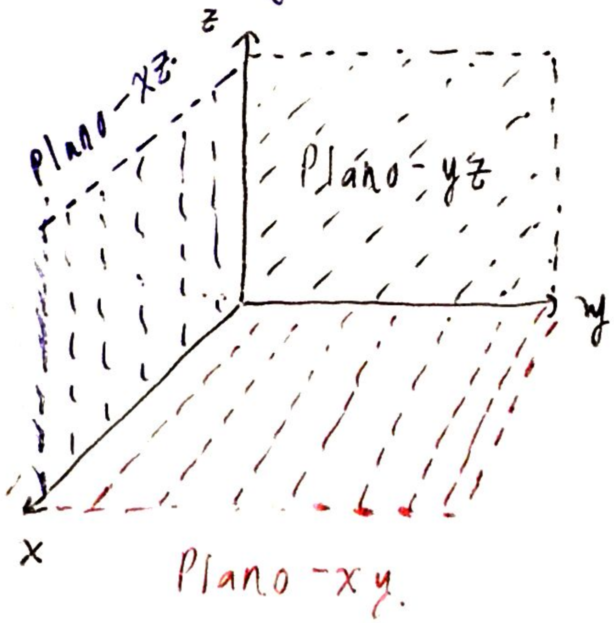
c. (1,3,-1)



Planos coordenados.

Plano-xy: $z = 0$. (el suelo)

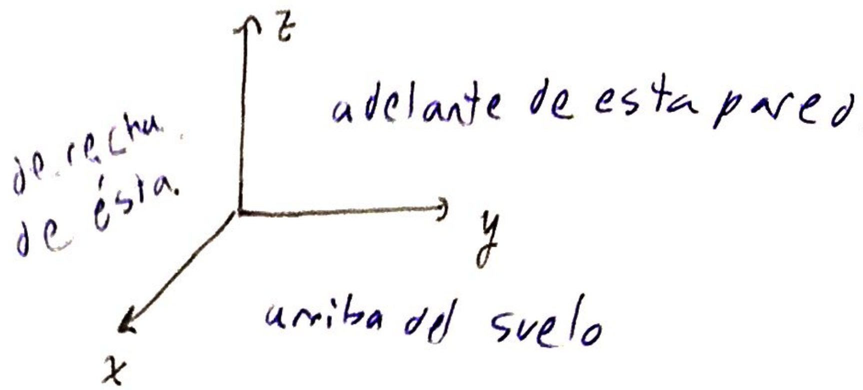
Plano-yz $x = 0$ (pared de atrás)



Plano-xz $y = 0$. (pared izquierda)

1er octante.

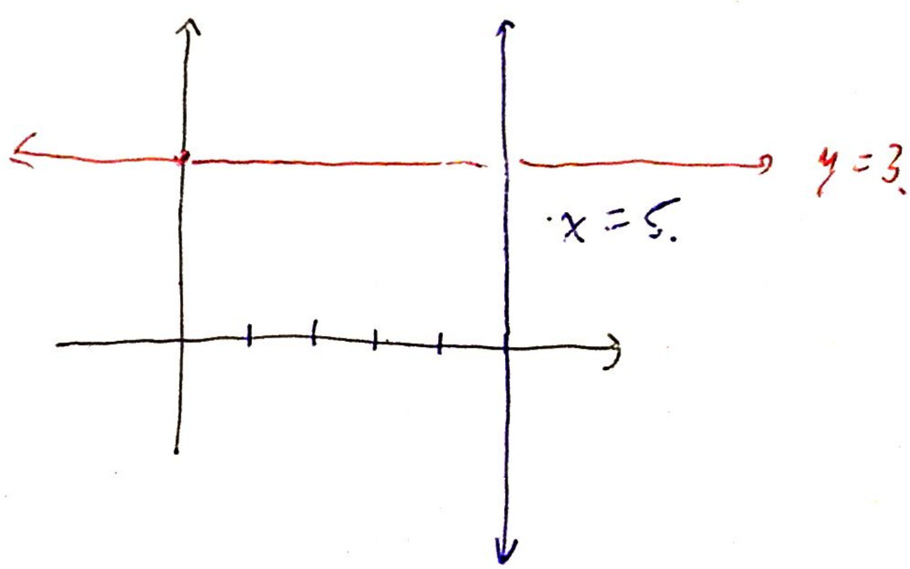
$x > 0, y > 0, z > 0$



Planos en el espacio.

En 2-D.

$x = 5$ ó $y = 3$.



$x = a$

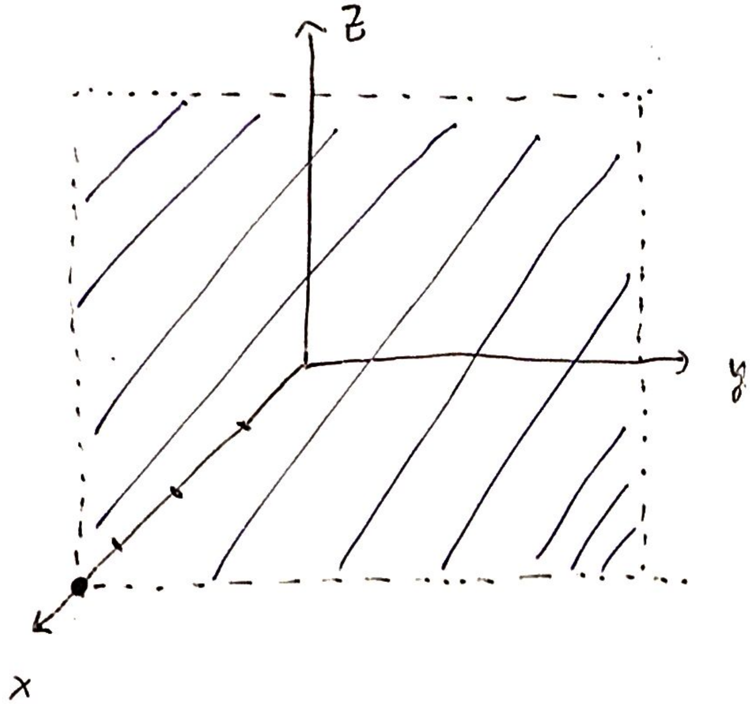
Rectas Verticales.

$y = b$.

Rectas Horizontales.

En 3-D $x = a$, $y = b$, $z = c$ son gráficas de planos.

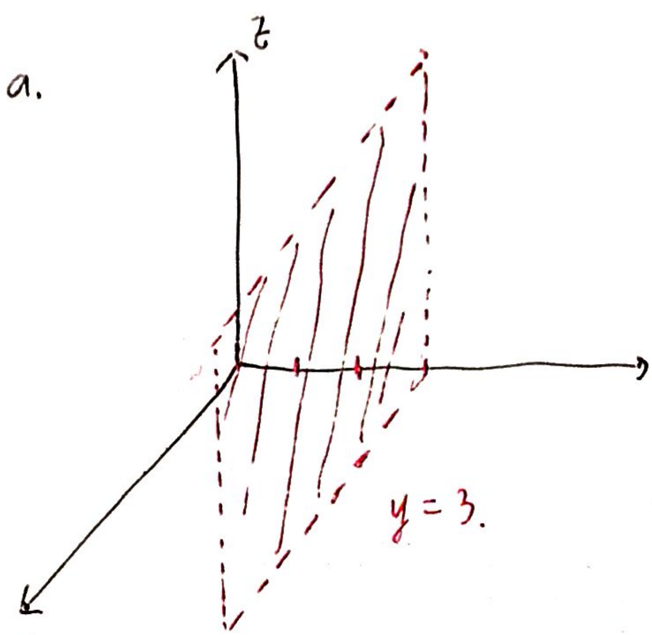
$x = 4$



$x = -2.$

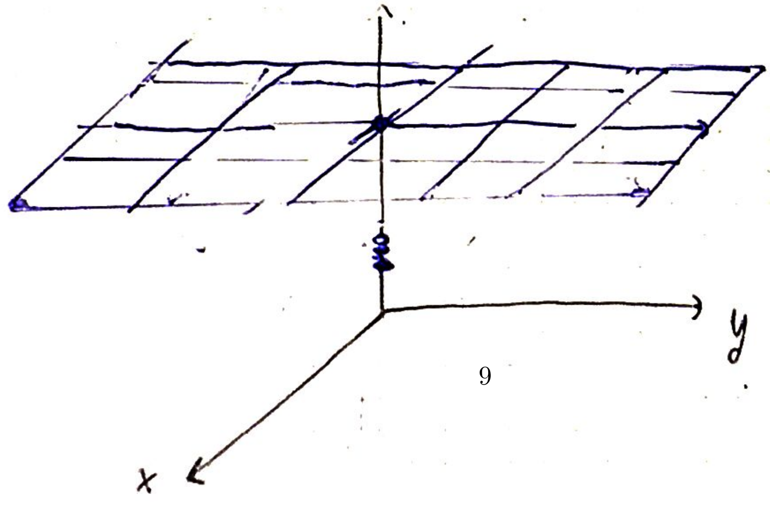
pared frontal.

$y = 3.$ pared derecha.



$z = 2.$

(techo)



Ec. lineal en 3-D va a graficar un plano.

Ec. Plano. $ax + by + cz = d$.

Generalmente se grafican sólo en el primer octante si cada a, b, c y d es positiva.

Intersección x : $y=0,\ z=0$ $(a,0,0)$

Intersección y : $x=0,\ z=0$ $(0,b,0)$

Intersección z : $x=0,\ y=0$ $(0,0,c)$

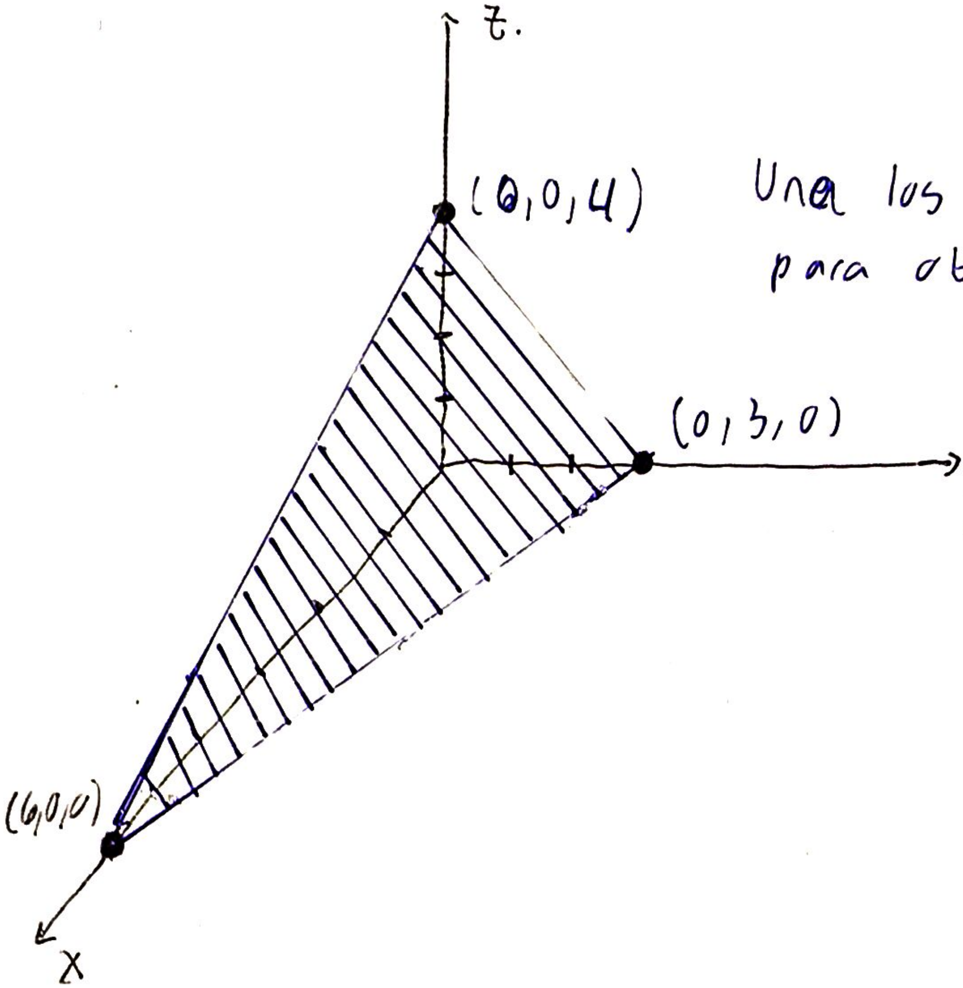
Ejercicio 3: Busqueje el plano $2x+4y+3z=12$ sólo en el primer octante.

Intersecto-x: $2x=12 \Rightarrow (6,0,0)$

Intersecto-y: $4y=12 \Rightarrow (0,3,0)$

Intersecto-z: $3z=12 \Rightarrow (0,0,4)$

6.



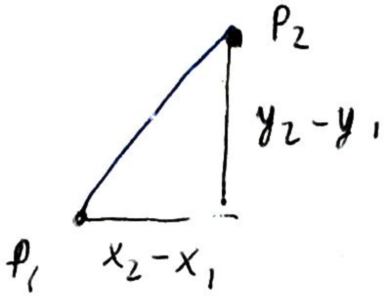
Una los tres puntos para obtener un segmento del plano

Capítulo2

RB_2020-01-09_09_42_27

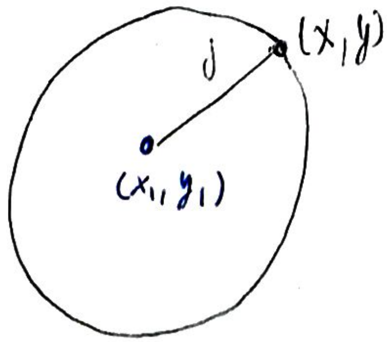
12.1.2 Distancias y Superficies Básicas.

En 2-D, la distancia entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = d^2.$$



Ec. Circunferencia de radio d centrada en (x_1, y_1).

En 3-D, la distancia entre $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$

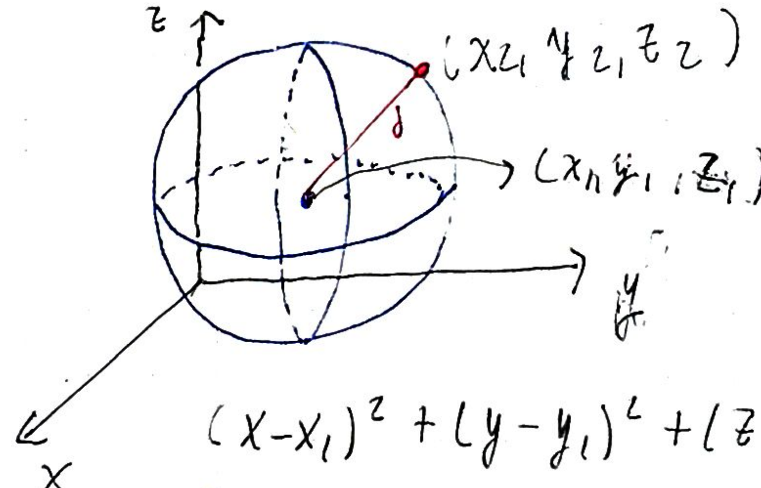
Calcule la diferencia entre z_2 & z_1.

$$\boxed{d = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

no puede ser negativa.

Notación $d = |P_2 P_1|$

Pág. 15.



$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = d^2.$$

Ec. de una esfera de radio r centrada en (x_1, y_1, z_1).

Esfera más utilizada centrada en el origen $(0,0,0)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$ radio r.

Ejercicio 4: Encuentre el centro y radio de la esfera cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 4z + 4 = 0$$ (P 16).

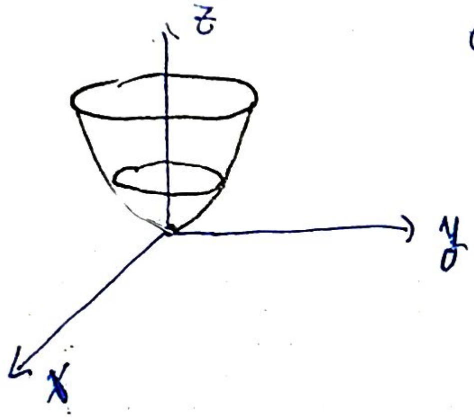
$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 \quad z^2 + 4z + 4 = -4 + 16 + 9 + 4$$

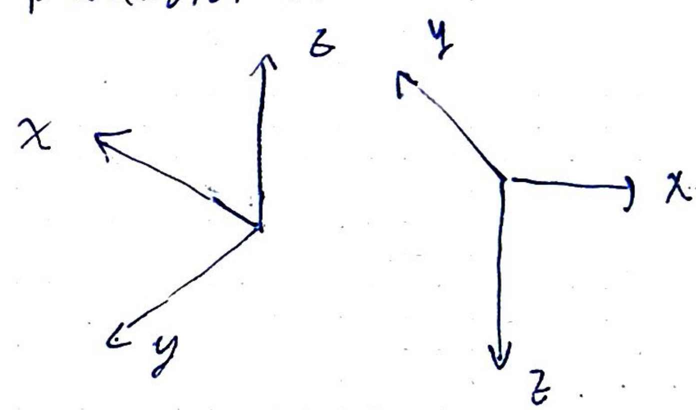
$$(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 25 = r^2$$

Centro de esfera $(-4, 3, -2)$ Radio $\sqrt{25} = 5$.

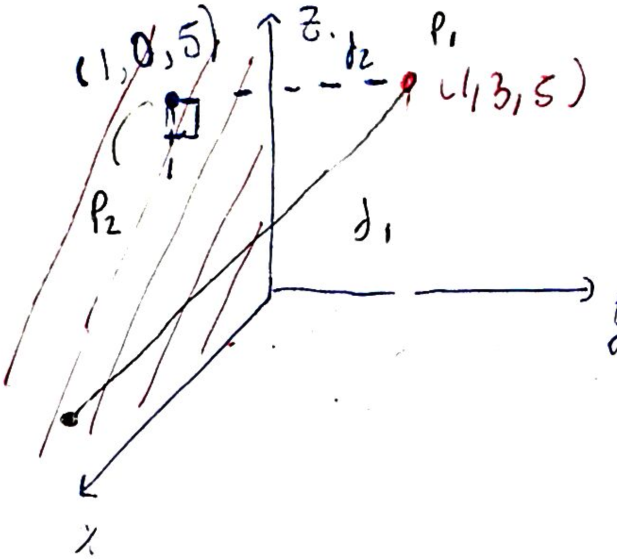
$z = x^2 + y^2$ no es una esfera.

es un paraboloide.





Distancia entre un punto y un plano-coordenado.



Encuentre la distancia entre el punto (1,3,5) y el plano xz. (tiene infinitos puntos)

En el plano xz $y=0$

si se estrella el punto (1,3,5) contra el plano xz se obtiene el punto (1,0,5).

"Estrellar": Encuentre la proyección del punto P sobre el plano.

Distancia entre P_1 y P_2 $\quad d=\sqrt{(1-1)^2+(3-0)^2+(5-5)^2}$

$d=\sqrt{0+9+0}=3$

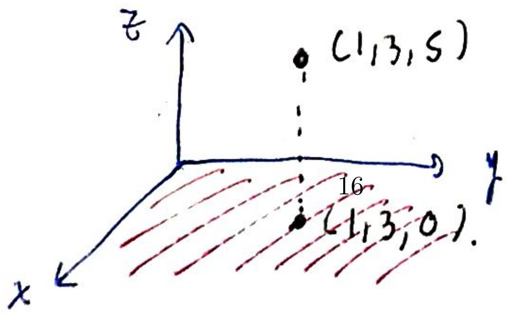
Gabriel la proyección del punto (a,b,c) sobre el plano xz es el punto $(a,0,c)$.

distancia minima entre P y el plano es

$d=\sqrt{0+b^2+0}=|b|$. ¡de la componente $-y$!

¿Cuál es la distancia entre el punto (1,3,5) y el plano xy?

$z=0$.



proyección

$d_{min}=\sqrt{0+0+5^2}$

$=5$.

Ejercicio 6: Considere los puntos $A(3,0,-4)$, $B(9,0,0)$ y $C(0,1,\sqrt{15})$.

$y=0$. $y=0$ $z=0$.

a. ¿Cuál de los sigs. puntos está más cercano al origen?

Calcule la distancia de cada punto respecto al origen. $O(0,0,0)$

$$d_{AO} = |AO| = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5$$
$$|BO| = \sqrt{81+0+0} = \sqrt{81} = 9$$
$$|CO| = \sqrt{0+1+15} = \sqrt{16} = 4.$$

C es el más cercano al origen.

b. ¿Cuáles de los puntos están sobre el plano yz?

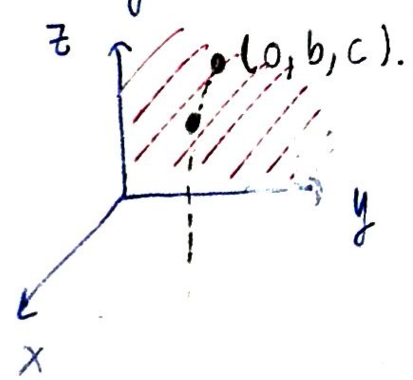
Ec. Plano yz: $x=0$.

A y B no están sobre el plano yz $x \neq 0$.

El punto C $(0,1,\sqrt{15})$ si está sobre este plano.

Comentario. A está sobre el plano xz.
B está sobre el eje x.
está sobre el plano xy & xz

c. ¿Cuáles de los puntos está más cercano al plano yz? $x=0$.



Como C está sobre el plano yz éste es el más cercano a este plano $d=0$.

Encuentre las proyecciones y las distancias

$x=0$

$A(3,0,-4)$, $P_A=(0,0,-4)$, $d_A=3$

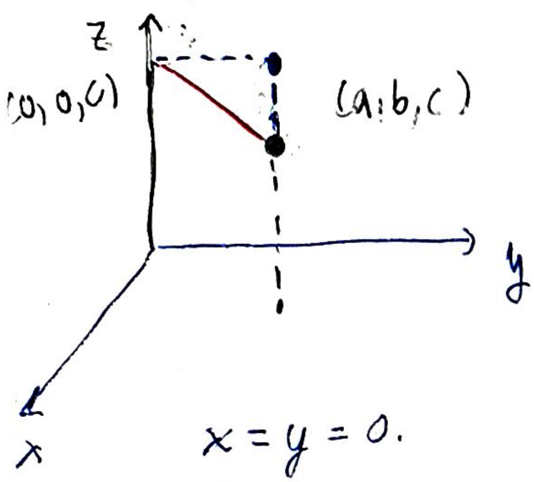
$B(9,0,0)$, $P_B=(0,0,0)$, $d_B=9.$

$C(0,1,\sqrt{15})$ $P_C=(0,1,\sqrt{15})$, $d_C=0$ ✓

mismo punto, ésta sobre el plano yz

Distancia entre un punto y un eje.

d. ¿Cuál de los siguientes puntos está más cercano al eje- z.



$x=y=0.$

En el eje z $x=0$, $y=0$.

La proyección del punto $P(a,b,c)$ al eje z es el punto $P_1(0,0,c)$.

$d_{min}=\sqrt{a^2+b^2+0}$

Encuentre las proyecciones sobre el eje y las distancias.

$A(3,0,-4)$, $P_A(0,0,-4)$, $d_A=\sqrt{9+0+0}=3.$

$B(9,0,0)$ $P_B.(0,0,0)$ $d_B=\sqrt{81+0+0}=9.$

$C(0,1,\sqrt{15})$ $P_C(0,0,\sqrt{15})$ $d_C=\sqrt{0+1+0}=1$

crítico. más cercano

Plano $x=0$ plano yz
$y=0$ plano xz
$z=0$ plano xy

Ejes
$x=0, y=0$ Eje-z
$x=0, z=0$ Eje-y
$y=0, z=0$ Eje-x.

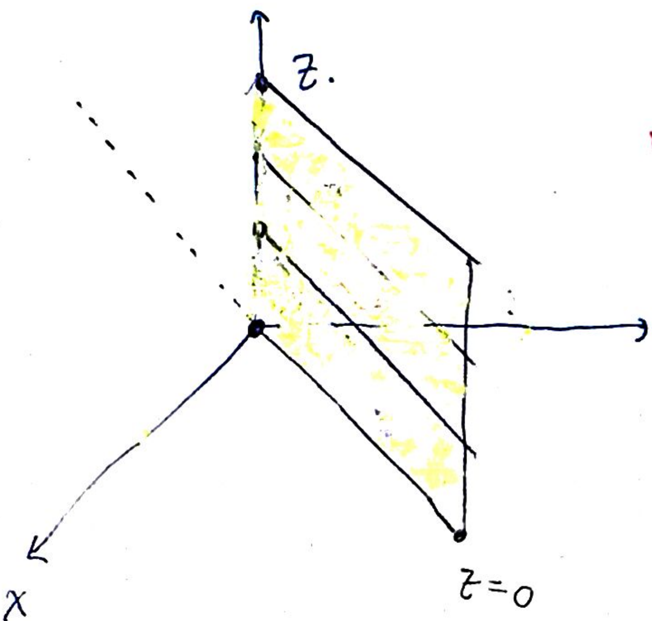
Superficies. Básicas: Planos, Cilindros y Esfera.

En 12.6 superficies cuádricas cilindro parabólico
cilindro (función).

Ejercicio 7: Bosqueje el plano $y = x$. en el 1er octante.

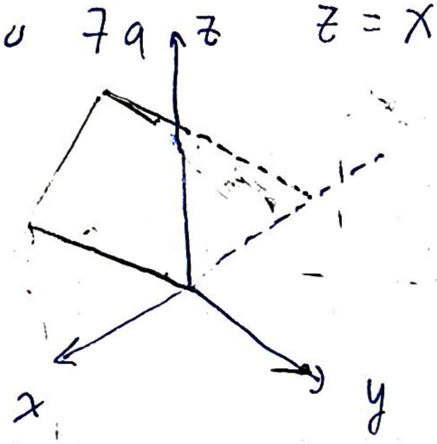
$z = 0$: $y = x$
$z = 1$ $y = x$
$z = a$ $y = x$

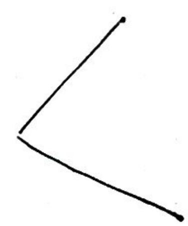
sólo tiene intersectos con el eje-z.



traslade verticalmente $y = x$.

Ejercicio 7a $z = x$.

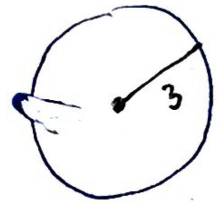




Dificil de graficar por la perspectiva.

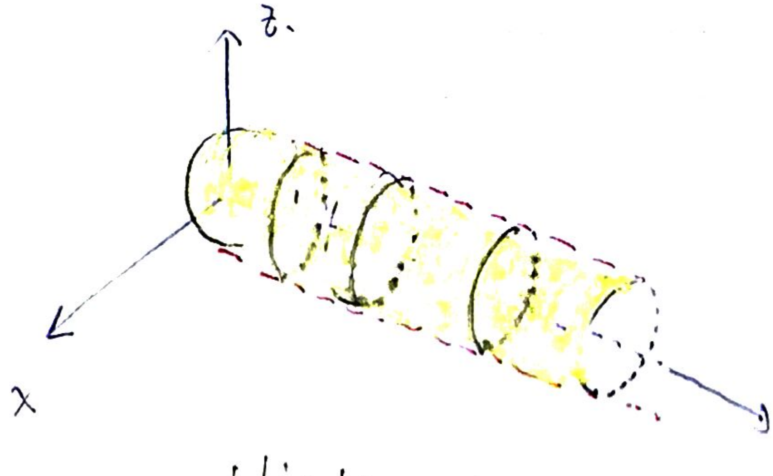
Ejercicio 8: Grafique las siguientes superficies

a. $x^2 + z^2 = 9$.



En 2-D
circunferencia
de radio 3.

Variable y.

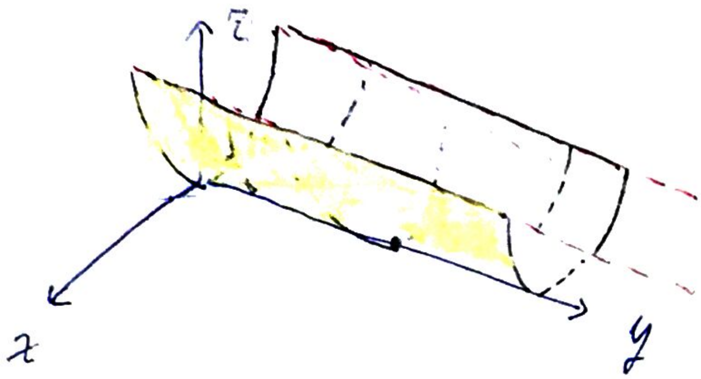


$y = 0 \quad x^2 + z^2 = 9$

$y = 2 \quad x^2 + z^2 = 9$

cilindro circular de radio centrado en el eje-y.

b. $z = x^2$.



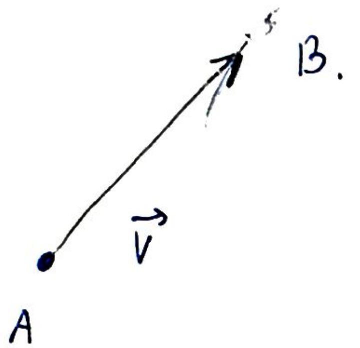
hoja doblada

cilindro parabólico.

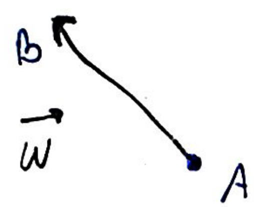
Capítulo3

RB_2020-01-14_11_51_58

12.1 Vectores p. 21.



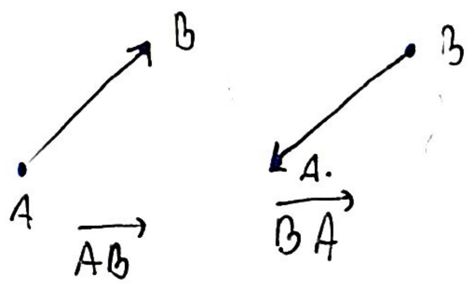
Un vector: tiene magnitud y dirección



se denota en negrilla **V**
o una flecha sobre la letra
$\vec{V}$

la longitud de cada segmento es la magnitud del vector.
la flecha indica su dirección.

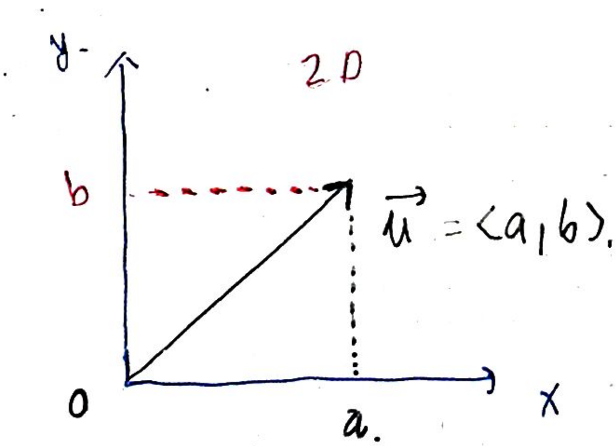
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ segmento de recta dirigido
empieza en el punto A y termina en el B.

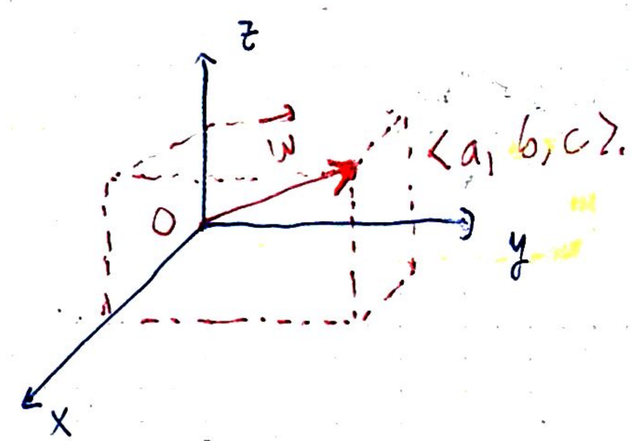


$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

vector cero $\vec{0}$ no tiene ni magnitud ni dirección.

Sistema de coordenadas y las componentes de un vector.



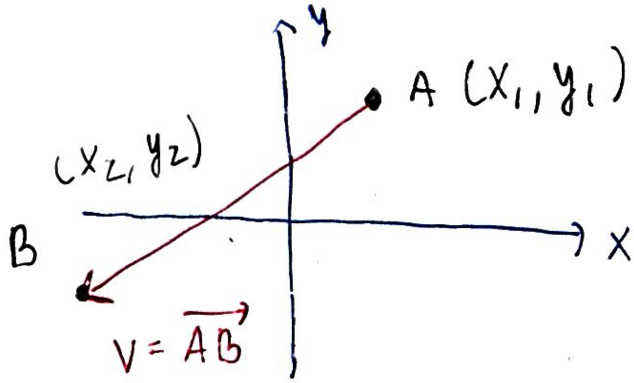


$\vec{w} = \langle a, b, c \rangle$.

$\vec{u} = \langle a, b \rangle$ ó $[a, b]$

las llaves $\langle\ \rangle$ denotan a un vector.

Vector Posición:



En 2-D.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1,\ y_2 - y_1 \rangle.$$

En 3-D.

$A(x_1, y_1, z_1)$ & $B(x_2, y_2, z_2)$

$$\overrightarrow{BA} = \langle x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2 \rangle.$$

Magnitud de un vector: la distancia entre el punto B y el punto A.

$$\boxed{|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}$$

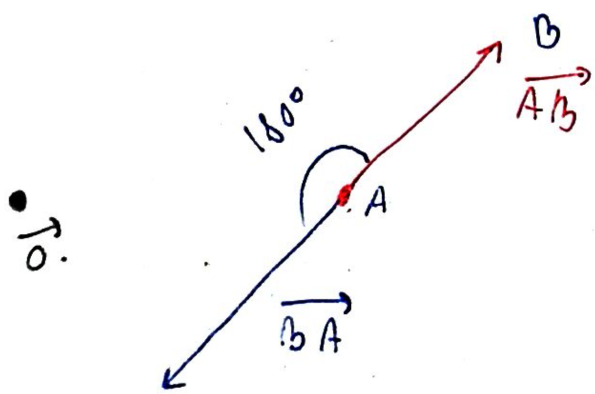
Jenota con $|\ |$ ó $\|\ \|$.

si $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ $\quad |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Observaciones: $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

pero $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|.$$



no tiene dirección.

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}.$$

$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ vector cero

$$\langle x_1 - x_1,\ y_1 - y_1,\ z_1 - z_1 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle.$$

Ejercicio 1: Considere el vector $\overrightarrow{AB}$ con un punto inicial $A(1, 2, -4)$ y punto final $B(4, 8, 2)$.

a. Encuentre el vector posición $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

$\vec{u} = \langle 3, 6, 6 \rangle$ $2-(-4)$

b. Encuentre la longitud del vector $\vec{u}$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{9+36+36} = \sqrt{81} = 9.$$

Operaciones de vectores.

1. Suma de vectores ✓
11. Multiplicación por un escalar. ✓

} Álgebra Lineal.

12.3 Producto Punto

12.4 Producto Cruz.

Suma de vectores.

$\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ $\vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$.

Sume cada componente.

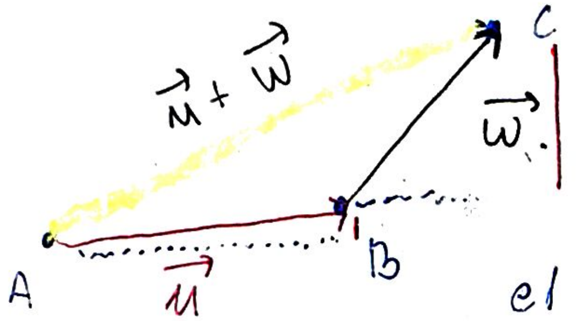
$$\boxed{\vec{u} + \vec{w} = \langle u_1 + w_1, u_2 + w_2, u_3 + w_3 \rangle.}$$

Multiplicación por un escalar. K es una constante. denotada como un escalar

Multiplique cada componente.

$$\boxed{K\vec{w} = \langle Kw_1, Kw_2, Kw_3 \rangle.}$$

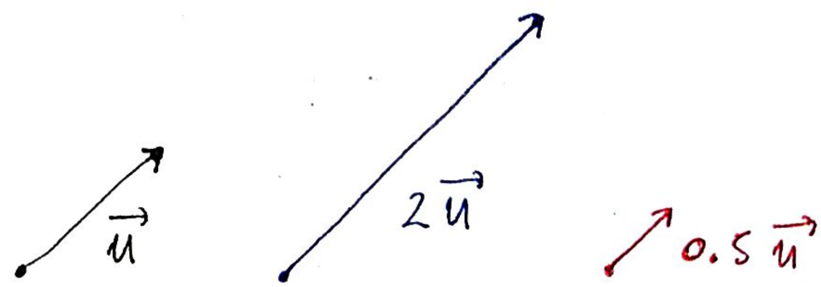
¿Cómo se pueden visualizar geométricamente estas operaciones? $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ $\quad \vec{w} = \overrightarrow{BC}$



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
$$\vec{u} + \vec{w} = \overrightarrow{AC}$$

Suma de vectores: el segundo vector w empieza en el punto donde termina el 1ero

Multiplicación por un escalar

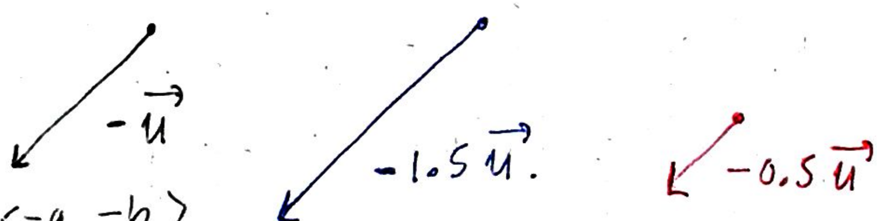


$\langle a, b \rangle$ $\quad \langle 2a, 2b \rangle$
$2\langle a, b \rangle$

- Se preserva la dirección si $K \geq 0$.

si $K > 1$, el vector se estira.

si $0 < K < 1$, el vector se comprime.



$\langle -a, -b \rangle$.

Si $K < 0$, el vector cambia de dirección. (cambia en $180°$).

$\vec{u} + (-\vec{u}) = \langle 0, 0 \rangle$.

Negativo de un vector: cuando $K = -1$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ $\qquad -\vec{u} = \overrightarrow{BA}$.

Resta o diferencia de vectores: Caso especial de la suma

$$\vec{u} + (-\vec{w}) = \vec{u} - \vec{w}$$
$$= \langle u_1 - w_1, u_2 - w_2, u_3 - w_3 \rangle.$$

Reste cada componente entre sí.
Se puede pensar como la suma entre $\vec{u}$ y el negativo de $\vec{w}$.

Ejercicio 2: Sean $\vec{a} = \langle 1, -2, 5 \rangle$, $\vec{b} = \langle -2, 1, -3 \rangle$.

combinación lineal de vectores. $\vec{u}, \vec{w}$ en 2-D.

$$k_1 \vec{u} + k_2 \vec{w} = \langle k_1 u_1 + k_2 w_1, k_1 u_2 + k_2 w_2 \rangle$$

a. $\vec{a} + \vec{b} = \langle -1, -1, 2 \rangle$.

b. $2\vec{a} - 4\vec{b} = \underbrace{\langle 2, -4, 10 \rangle}_{2\vec{a}} + \underbrace{\langle 8, -4, +12 \rangle}_{-4\vec{b}} = \underline{\langle 10, -8, 22 \rangle}$.

c. $|2\vec{a} - 4\vec{b}| = \sqrt{100 + 64 + 484} = \sqrt{648} \approx 25.45$

$|a| = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30} \approx 5.47$.

$|b| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14} \approx 3.74$.

$|a+b| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6} \approx 2.45$.

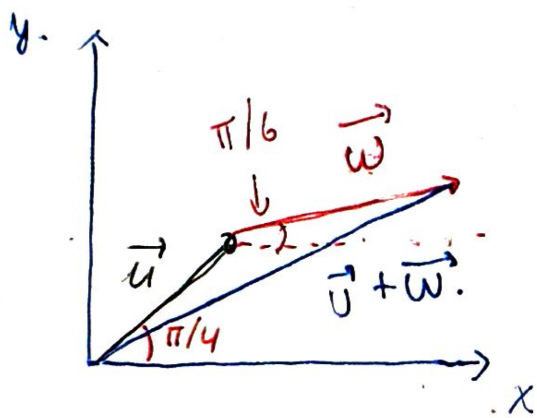
$$|a+b| \neq |a| + |b|$$
$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Problema Bono: Considere el vector $\vec{u} = \langle 1, 1 \rangle$

y $\vec{w} = \langle 1, \sqrt{3} \rangle$.

Encuentre la magnitud y el ángulo respecto al eje-x del vector $\vec{w} + \vec{u}$.

$\vec{w} + \vec{u} = \langle 2, 1+\sqrt{3} \rangle$.



$|\vec{u}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\tan\theta = y/x$.

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \pi/4$.

$|v| = \sqrt{1+3} = 2$.

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi/6$.

$|\vec{w} + \vec{u}| = \sqrt{4 + (1+\sqrt{3})^2}$

≈ 3.3858

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 0.93 \text{ rad.} \approx 53.79°$

Vectores Bases o Estándar.

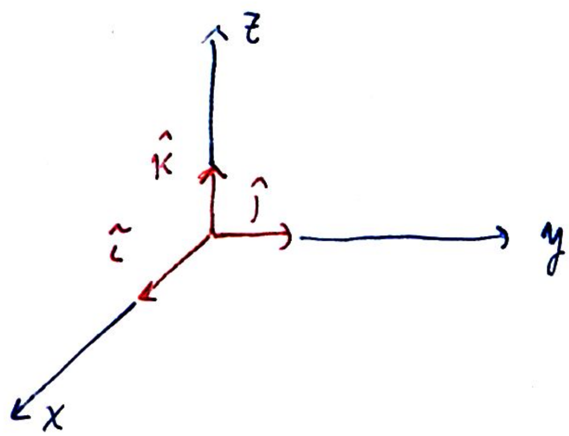
$\vec{u} = \langle 3, 6, 7 \rangle = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}$

se denotan como $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ y apuntan en la dirección de cada eje coordenado.

$\hat{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$

$\hat{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$

$\hat{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$



Permiten expresar cada vector $\vec{u}$ como una combinación de los vectores estándar.

$\vec{u} = \langle a, b, c \rangle = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

Magnitud de $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

JNO.

$|\hat{i}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1 \qquad |\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$

Vectores Unitarios: tienen longitud igual a 1,

$|u| = 1$

¿Qué sucede si $|a| \neq 1$? se encuentra el vector unitario $\vec{u}$ asociado $\vec{a}$ dividiendo por $|\vec{a}|$.

El vector $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{|a|}$ es siempre unitario.

Ejercicio 3: Sean $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = 5\hat{j} + 4\hat{k}$.

Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector $2\vec{a} + 3\vec{b}$.

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = 4\hat{i} - 6\hat{k} + 15\hat{j} + 12\hat{k} = 4\hat{i} + 15\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{16 + 225 + 36} = \sqrt{277}$$

unitario $\vec{u} = \dfrac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{|2\vec{a} + 3\vec{b}|} = \dfrac{1}{\sqrt{277}} \langle 4, 15, 6 \rangle$.

Capítulo4

RB_2020-01-16_13_01_32

12.3 Producto Punto

Operaciones entre vectores $\vec{a} + \vec{b}$ (suma)

suma $\vec{a} + \vec{b}$

Mult. por un escalar $K\vec{a}$

Producto punto $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Producto cruz $\vec{a} \times \vec{b}$

Producto punto entre $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

es el número $a \cdot b$. dado por:

$$\boxed{a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.}$$

Para un vector en n dimensiones.

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Para que sea posible $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen que tener la misma dimensión

$\vec{a} = \langle 1, 2, 0, 4 \rangle$ $\quad \vec{b} = \langle 2, 1 \rangle$ faltan 2 componentes.

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ indefinido

Propiedades: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ Conmutativa.

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ Distributiva.

$(K\vec{a}) \cdot \vec{b} = K(\vec{a} \cdot \vec{b})$

Ejercicio 1: Calcule el producto punto.

a. $\vec{a} = \langle 6,-2,3\rangle$, $\vec{b} = \langle 2,5,1\rangle$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 6(2) - 2(5) + 3(1) = 12 - 10 + 3 = 5$$
$$\vec{b}\cdot\vec{a} = 12 - 10 + 3 = 5$$

Gracias AA.

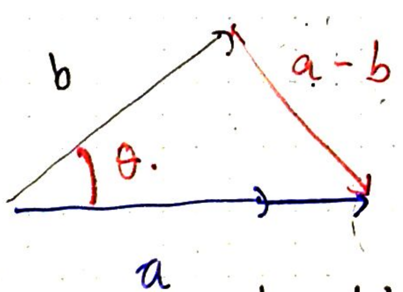
b. $\vec{u} = \hat{j} + 2\hat{i} + 3\hat{k}$ $\quad \vec{v} = 2\hat{k} + 4\hat{i} + 0\hat{j}$ vectores base

$$\underset{\vec{u}}{\langle 2,1,3\rangle}\cdot\underset{\vec{v}}{\langle 4,0,2\rangle} = 8 + 0 + 6 = 14$$

c. $\vec{w} = \langle 1,0,-2\rangle$ $\quad \vec{v} = \langle 2,0,1\rangle$.

$$\vec{w}\cdot\vec{v} = 2 + 0 - 2 = 0 \qquad \boxed{\vec{w}\cdot\vec{v} = 0}$$

Definición Alternativa del Producto.



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.$$

Ley de cosenos.

$$|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta.$$

a^2 no existe

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = |\vec{a}|^2$$

$$|a| = \sqrt{a\cdot a}$$

3.

$$(a-b)\cdot(a-b) = |a|^2 + |b|^2 - 2|\vec{a}||b|\cos\theta.$$

$$a\cdot a \underbrace{- a\cdot b - b\cdot a} + b\cdot b$$

$$\cancel{|a|^2} - 2a\cdot b + \cancel{|b|^2} = \cancel{|a|^2} + \cancel{|b|^2} - 2|a||b|\cos\theta.$$

$$\boxed{a\cdot b = |a||b|\cos\theta.} \qquad |a\times b| = |a||b|\sin\theta.$$

Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, el ángulo θ entre los vectores es

$$\cos\theta = \frac{a\cdot b}{|a|\,|b|} \qquad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{a\cdot b}{|a|\,|b|}\right)$$

Ejercicio 2: Determine el ángulo entre los dos vectores.

a. $\vec{a} = \langle 4,3\rangle \quad \vec{b} = \langle -3,4\rangle.$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -12+12 = 0 \qquad |a| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$|b| = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{0}{25}\right) = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}.$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ y el ángulo es $90°$ $\quad \vec{a}\perp\vec{b}$ ortogonales

ortogonalidad $\Leftrightarrow$ perpendicularidad.

b. $\vec{a} = \langle 1, -2 \rangle$, $\vec{b} = \langle 3, -1 \rangle$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \qquad |a| = \sqrt{5} \qquad |b| = \sqrt{10}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|a||b|} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ó } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi/4.$$

c. $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$ $\qquad \overset{\vec{a}}{\langle 1,0,1 \rangle} \quad \overset{\vec{b}}{\langle 1,1,0 \rangle}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 0 + 0 = 1$

$|\vec{a}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \qquad |\vec{b}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $\qquad \pi/6, \pi/4, \pi/3$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Vectores perpendiculares ó ortogonales., denotado como $a \perp b$.

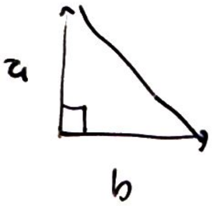
$$a \perp b \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

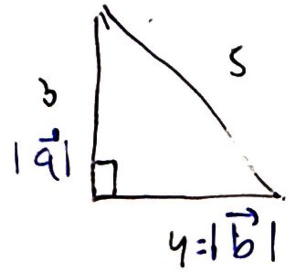
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b| \cos \pi/2 = 0.$$

Ejercicio 3: Determine si los sigs. son ortogonales entre sí.

$\vec{a} = \langle 4, 3, 1 \rangle$, $\vec{b} = \langle 2, -2, -2 \rangle$.,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 - 6 - 2 = 0 \qquad$ Sí son ortogonales.





$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

El triángulo es rectángulo

$|a|^2 + |b|^2 = |c|^2$

b. $\vec{u} = \langle 1, 8, -2, 4 \rangle$ $\vec{w} = \langle 3, 4, 6, -1 \rangle$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = 3 + 32 - 12 - 4 = 19 \neq 0$

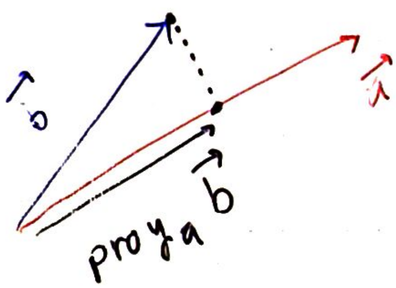
NO SON ORTOGONALES.

c. $\vec{a} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ $\vec{b} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ $\vec{c} = \langle 0, 0, 1 \rangle$

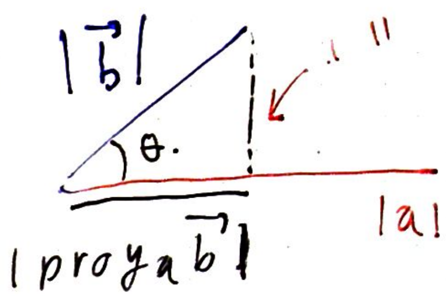
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$. 6 sw.

Mutuamente ortogonales.

Proyecciones: cuál vector se proyecta sobre otro vector



El vector $\mathrm{proy}_a(\vec{b})$ es la proyección vectorial de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

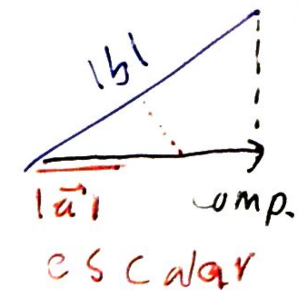


si el ángulo entre a y b es θ.

$$\frac{|\mathrm{proy}_a \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$

proyección escalar: $|\mathrm{proy}_a \vec{b}| = \dfrac{a \cdot b}{|a|}$

proyección escalar: $\text{comp}_a \vec{b} = \dfrac{a \cdot b}{|a|}$.



proyección vectorial

tiene la misma dirección que el vector $\vec{a}$.

Utilice el vector $\dfrac{\vec{a}}{|a|}$ para encontrar la dirección de $\vec{a}$

$$\text{proy}_a \vec{b} = \frac{a \cdot b}{|a|} \frac{\vec{a}}{|a|} = \left(\frac{a \cdot b}{a \cdot a}\right) \vec{a} \quad \text{vector}$$

Observaciones: $\text{comp}_b \vec{a} = \dfrac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|b|} \neq \text{comp}_a \vec{b}$

Ejercicio 5: Halle la proyección escalar y la proyección vectorial de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

a. $a = \langle -6, 8 \rangle \qquad b = \langle 3, 4 \rangle$.

Proy escalar: $\text{comp}_{\vec{a}} \vec{b} = \dfrac{a \cdot b}{|a|} = \dfrac{-18 + 32}{\sqrt{100}} = \dfrac{14}{10} = \dfrac{7}{5}$.

Proy. vectorial: $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \dfrac{a \cdot b}{|a|} \dfrac{\vec{a}}{|a|} = \dfrac{7}{50} \langle -6, 8 \rangle$

b. $\vec{a} = \langle 1, 1, 3 \rangle \qquad \vec{b} = \langle -2, 3, 1 \rangle$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + 3 + 3 = 4 \qquad |a| = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}$

Escalar $\text{comp}_{\vec{a}} \vec{b} = \dfrac{4}{\sqrt{11}}$ Vectorial $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \dfrac{4}{11} \langle 1, 1, 3 \rangle$

Capítulo5

RB_2020-01-21_13_21_32

12.4 Producto Cruz.

Determinantes Matriz (Arreglo rectangular de números)
Cuadrada (mismo # de filas y columnas)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$ det orden 2. Matriz 2×2

p.e. $$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6-(-1)(4) = 6+4 = 10$$

Determinante de orden 3: Matriz 3×3
suma de tres determinantes de orden 2.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

3×3 3 matrices 2×2.

p.e $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(6-0) - 0 + 2(-1-3)$$

$$= 12 - 8 = 4.$$

El Producto Cruz.

Dados dos vectores $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ &
$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

¿Cómo se encuentra un vector $\vec{c}$ que es perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$.?

$$\vec{c}\cdot\vec{a} = 0 \qquad\qquad \vec{c}\cdot\vec{b} = 0.$$

Resuelva para c_1, c_2, c_3

$$c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0$$
$$c_1\underline{b_1} + c_2\underline{b_2} + c_3\underline{b_3} = 0$$

El producto cruz $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ es un vector perpendicular a ambos vectores $\vec{a}$ & $\vec{b}$.

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}} = \hat{i}\overbrace{(a_2b_3 - a_3b_2)}^{c_1} - \hat{j}\underbrace{(a_1b_3 - a_3b_1)}_{c_2} + \hat{k}\underbrace{(a_1b_2 - a_2b_1)}_{c_3}$$

Observaciones:

- El producto cruz es un vector, mientras que el producto es un número o escalar.
- El producto cruz no es conmutativo $\vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{b}\times\vec{a}$

$$\vec{b}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(b_2a_3 - a_2b_3) + j(a_1b_3 - a_3b_1) + \hat{k}(a_2b_1 - a_1b_2)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 15\hat{i} - 10\hat{j} - 3\hat{k}$$

II. verifique $\vec{a} \times \vec{b}$ es ortogonal a $\vec{a}$ & a $\vec{b}$.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 2, 3, 0 \rangle = 30 - 30 + 0 = 0.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 1, 0, 5 \rangle = 15 + 0 - 15 = 0.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp a, b.$$

Aclaración: 2-D $\quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 3×2. no es posible evaluarlo, porque la matriz no es cuadrada

Existe en 3-D.

4-D $\quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \vec{\ell} \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ ¡NO ES POSIBLE evaluarlo.

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -15\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}$$

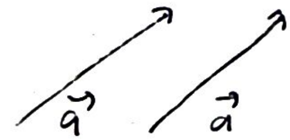
En general $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}).$

Ejercicio 1: Encuentre el producto cruz entre $\vec{a} = \langle 1,1,-1\rangle$ & $\vec{b} = \langle 2,-2,3\rangle$.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}(3-2) - \hat{j}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \hat{k}(-2-2)$$

$$= \boxed{\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}}$$

$$\boxed{\vec{b}\times\vec{a} = -\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}}$$



Ejercicio 2: Encuentre $\vec{a}\times\vec{a}$.

$\vec{a}$ es paralelo a sí mismo $\quad \vec{a}\times k\vec{a}$.

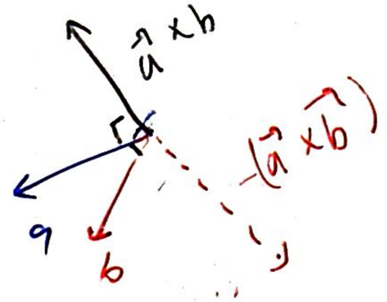
$$\vec{a}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}\,(\overbrace{a_1a_2 - a_1a_2}^{0}) - \hat{j}(0) + \hat{k}(0).$$

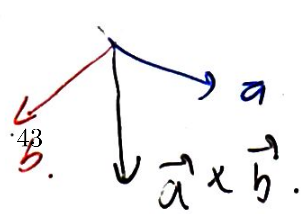
$$\boxed{\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}} \qquad \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$$

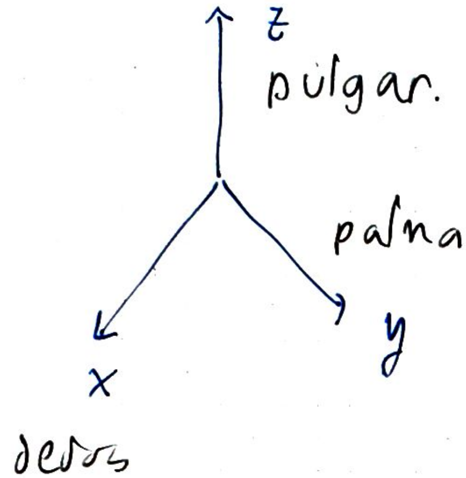
Dos vectores en V_3 (conjunto de vectores 3-D) son paralelos si y sólo si $\vec{a}\times k\vec{a} = \vec{0}$
vector cero.

Interpretación Geométrica.

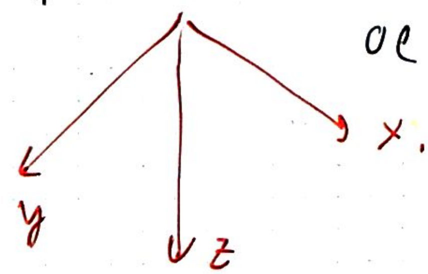
Convención Mano Derecha.







vector ortogonal a ambos que apunta siguiendo la convención de la mano derecha



Propiedad: Dadas $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ y el ángulo entre estos dos vectores θ.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta. \checkmark$$

En el producto punto $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$.

Para encontrar el ángulo entre dos vectores, es recomendable utilizar el producto punto.

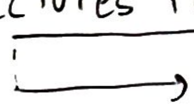
si $\sin\theta = 0$ $\quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0$.

$|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$

$\sin\theta = 0$

$\theta = 0$.

vectores paralelos.



$\theta = 0$.

Dos vectores 3-D son paralelos, $a \parallel b$, si y sólo si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ vector cero.

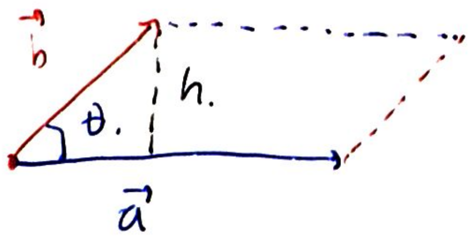
Recomendable. inspeccione si $\vec{b} = k\vec{a}$
no importa la dimensión del vector.

Propiedades $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$$|a \times b| = |a|\,|b| \sin\theta.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \iff a \parallel b$$

Se puede utilizar para áreas de "rectángulos inclinados" y cubos "inclinados."



Paralelogramo.

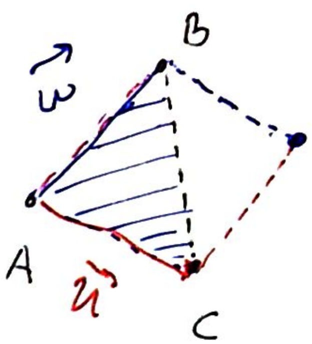
Área $= b\,h.$

base $= |\vec{a}|.$

altura $h = |\vec{b}| \sin\theta$

Área del Paralelogramo: $A = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta. = \boxed{|\vec{a} \times \vec{b}|}$

Ejercicio 3: ¿Cuál es el área del triángulo con vértices en $A(1,0,1)$ $B(-2,1,3)$ y $C(1,2,1)$?



Área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo

$$A_T = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{w}|$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} = \langle 0, 2, 0 \rangle.$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \langle -3, 1, 2 \rangle.$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(4) - \hat{j}\,0 + \hat{k}(6) = 4\hat{i} + 6\hat{k}$$

Producto Triple Escalar.

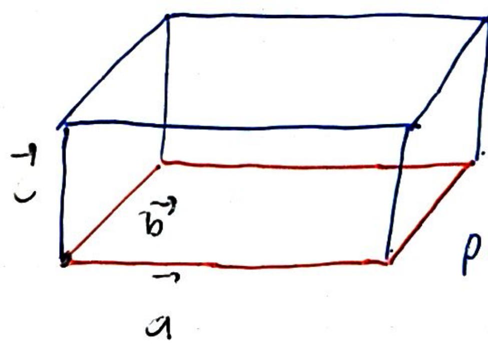
Combina el producto punto y el producto cruz.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\langle a_1 \; a_2 \; a_3 \rangle$.

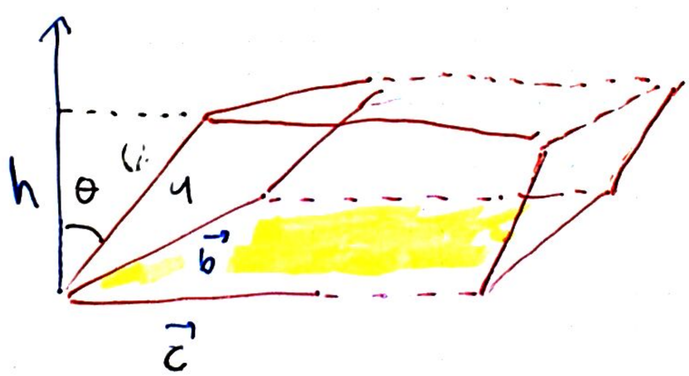
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Volumen de un cubo inclinado Paralelelípedo.



paralelepípedo.

$$V = |a \cdot (b \times c)|$$



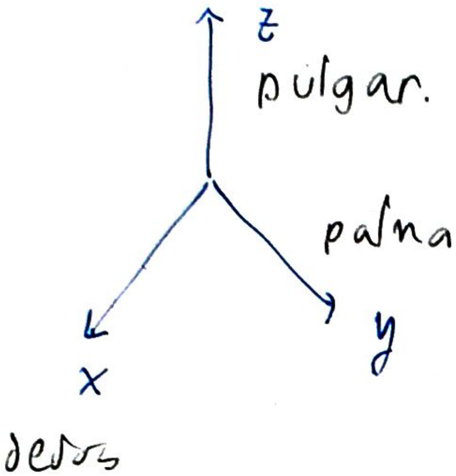
Volumen = Área de la Base × altura.

Área base $= |\vec{b} \times \vec{c}|$

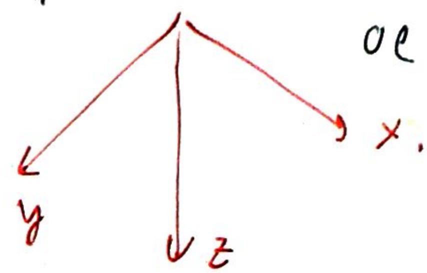
Altura. $h = |a| \cos\theta$.

Volumen $V = Ah. = |a| \, |\vec{b} \times \vec{c}| \cos\theta$.

$$U = a \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$



vector ortogonal a ambos que apunta siguiendo la convención de la mano derecha



Propiedad: Dadas $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ y el ángulo entre estos dos vectores θ.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta. \checkmark$$

En el producto punto $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.$

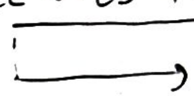
Para encontrar el ángulo entre dos vectores, es recomendable utilizar el producto punto.

si $\sin\theta = 0$ $\quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0.$ $\qquad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0$

$\sin\theta = 0$

$\theta = 0.$

vectores paralelos.



$\theta = 0.$

Dos vectores 3-D son paralelos, $a \parallel b$, si y sólo si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ vector cero.

Recomendable. inspeccione si $\vec{b} = K\vec{a}$
no importa la dimensión del vector.

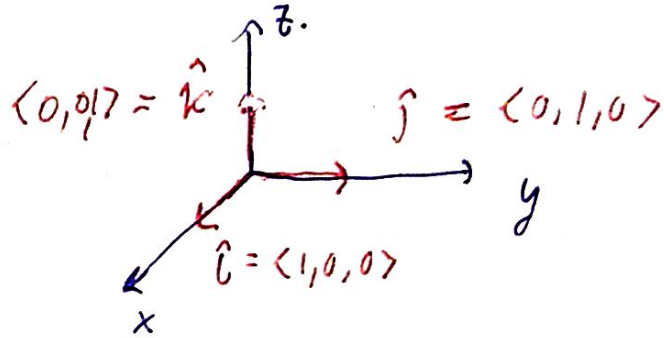
Capítulo6

RB_2020-01-23_19_42_58

Ángulo entre un vector $\vec{a}$ y un eje

se utiliza la fórmula del producto punto.

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$



Ángulo entre $\vec{a}$ y el eje y.

$$\cos\theta = \frac{a \cdot \hat{j}}{|a||\hat{j}|} = \frac{\langle a_1, a_2, a_3\rangle \cdot \langle 0,1,0\rangle}{|a|} = \frac{a_2}{|a|}.$$

Ángulos entre el vector y cada eje.

Eje - x: $\theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{a_1}{|a|}\right)$ Eje - y. $\cos\theta_y = \frac{a_2}{|a|}$

Eje - z: $\cos\theta_z = \frac{a_3}{|a|}.$

Éstos ángulos se conocen como coseno directores.

$a = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ $\boxed{a = |a|\langle \cos\theta_x, \cos\theta_y, \cos\theta_z\rangle}$

Vectores paralelos o perpendiculares en n-dimensiones.

Dos vectores $\vec{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$

$\vec{b} = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$.

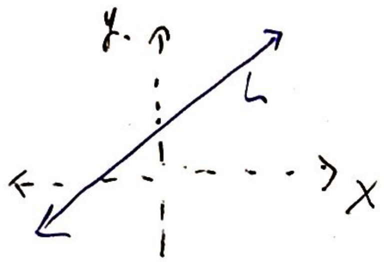
Son paralelos: si $\vec{a} = K\vec{b}$ K escalar -1, 0.2, 1

perpendiculares: si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

ángulo $$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|}$$

12.5 Rectas (p. 39)

En 2-D.

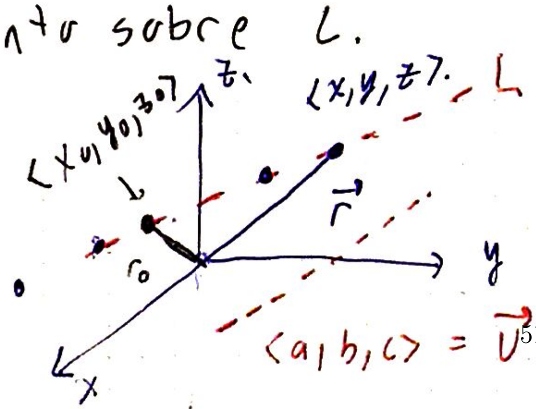


1. m pendiente
2. (x_0, y_0) punto sobre L

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

En 3-D, para encontrar una recta en el espacio se necesita conocer

1. m "pendiente", dirección de la recta   vector $\langle a, b, c \rangle$.
2. punto sobre L. (x_0, y_0, z_0).

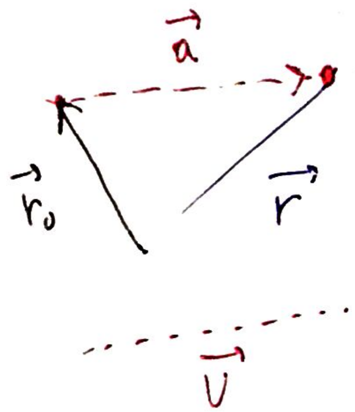


dos puntos sobre L.

Vector punto sobre L $\quad \langle x_0, y_0, z_0 \rangle = \vec{r}_0$

Vector cualquier punto sobre L $\quad \langle x, y, z \rangle = \vec{r}$

Vector dirección $\quad \langle a, b, c \rangle = \vec{v}$



$\vec{a}$ y $\vec{v}$ son paralelos.

$$\vec{a} = k\vec{v} = \underline{t}\,\vec{v}$$

Variable parámetro t.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} = \boxed{\vec{r}_0 + t\vec{v}.} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ec. Vectorial Recta: punto $\vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$

y dirección $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$.

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}}$$

parámetro t.

Ec. componente por componente.

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t\langle a, b, c \rangle.$$

Ec. Paramétrica de la Recta.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + at. \\ y &= y_0 + bt. \\ z &= z_0 + ct. \end{aligned}}$$

$t \in \mathbb{R}$.

Pablo V.

Posición inicial $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$.

Velocidad constante $\langle a, b, c \rangle$.

$$x = x_0 + V_{0x}\, t$$
$$y = y_0 + V_{0y}\, t$$
$$z = z_0 + V_{0z}\, t.$$

Ejercicio 1: Encuentre la ec. vectorial y las paramétricas para la recta que pasa por el punto dado y es paralelo al vector dado. (p 30.)

a. $P(3,4,-2)$ $\vec{v} = \langle -8, 2, 5 \rangle$. $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{v}$.

Vector Posición: $r_0 = \overrightarrow{OP} = \langle 3, 4, -2 \rangle$.

Vector Dirección: $\vec{v} = \langle -8, 2, 5 \rangle$.

Ec. Vectorial: $\boxed{\vec{r} = \langle 3, 4, -2 \rangle + t \langle -8, 2, 5 \rangle}$.

Ecs. Paramétricas:

$$x = 3 - 8t$$
$$y = 4 + 2t \qquad t \in \mathbb{R}.$$
$$z = -2 + 5t.$$

Observaciones: $\vec{r}(1) = \langle -5, 6, 3 \rangle$

$\vec{r}(10) = \langle -77, 24, -48 \rangle$.

Ec. vectorial para L: $\boxed{\vec{r} = \langle -5, 6, 3 \rangle + t \langle -8, 2, 5 \rangle}$

vector de dirección v es paralelo a varios vectores

$\vec{w} = k\,\vec{v}$. puede ser también vector dirección.

$\vec{v}_1 = \langle 8, -2, -5 \rangle$ $\vec{V}_2 = \langle -8\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 5\sqrt{3} \rangle$.

$\boxed{\vec{r} = \langle -77, 24, -48 \rangle + t\,V_2.}$ La misma recta.

La ec. vectorial de una recta no es única.

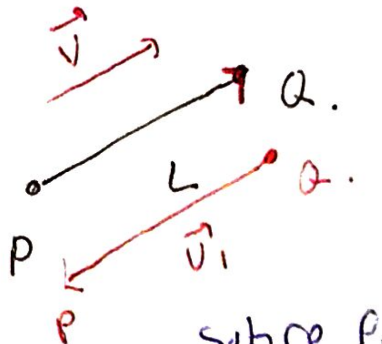
Ejercicio 2: Encuentre la ec. vectorial de la recta que pasa por los puntos dados.

a. $P(3,-2,4)$ y $Q(5,2,-1)$.

$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{V}$ $\qquad \boxed{\vec{r}_0 = \langle 3,-2,4\rangle}$ ó $\langle 5,2,-1\rangle$

vector de dirección $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ ó $\overrightarrow{QP}$

$$\boxed{\vec{V} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2,4,-5\rangle.}$$



sobre P.

Ec. Vectorial $\vec{r}$ P.

$$\boxed{\vec{r} = \langle 3,-2,4\rangle + t\langle 2,4,-5\rangle.}$$

Q $\quad \vec{r}_0 = \langle 5,2,-1\rangle \qquad \vec{v} = \overrightarrow{QP} = \langle -2,-4,5\rangle.$

$$\boxed{\vec{r} = \langle 5,-2,-1\rangle + t\langle -2,-4,5\rangle.}$$ sobre Q

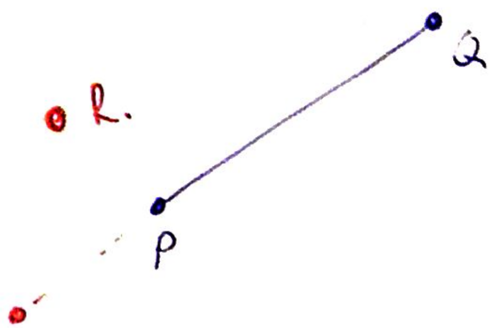
b. $P(3,0,4)$ y $Q(3,4,2)$.

$r_0 = \langle 3,0,4\rangle. = \overrightarrow{OP}$

$\vec{v} = \langle 0,4,-2\rangle. = \overrightarrow{PQ}$ $\qquad \vec{v} \neq P \times Q$

$$\boxed{\vec{r} = r_0 + tV = \langle 3,0,4\rangle + t\langle 0,4,-2\rangle.}$$

c. ¿Qué pasa si hay 3 puntos?



P(3,0,4), Q(3,4,2) R(5,3,4)
no estén sobre L.

$\vec{v}_1 = \overrightarrow{PQ} = \langle 0,4,-2\rangle$. no son

$\vec{v}_2 = \overrightarrow{PR} = \langle 2,3,0\rangle$ paralelos.

Éstos tres puntos No están sobre la misma recta.

$$\overbrace{\underbrace{(0,1)\quad(1,2)}_{m=1}\quad(2,5)}^{m=2.}$$

Capítulo7

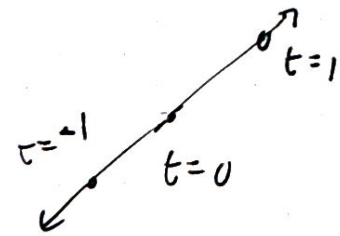
RB_2020-01-28_13_10_15

12.5 Rectas y Planos

Ecuación de una Recta.

Vector Posición $\vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$.

Vector dirección $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$.



Ec. vectorial $\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}}$

t es el parámetro

Ecs. Paramétricas:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct. \end{aligned}}$$

Resuelva para t en las tres ecs.

$$\boxed{t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

Ecs. simétricas $a, b, c \neq 0$.

vector dirección $\vec{v} = \langle a, 0, c \rangle$, las ecs. de la recta cambian,

$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

vectorial

$x = x_0 + at$

$y = y_0$

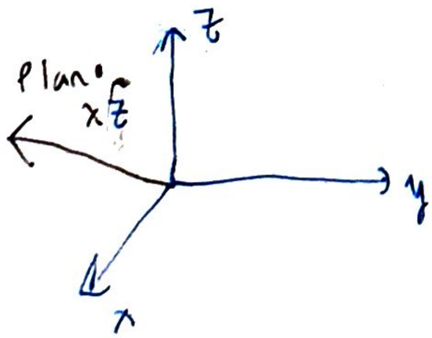
$z = z_0 + ct.$

Ecs. Paramétricas

$\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{z - z_0}{c}$

$y = y_0$

Simétricas



Ejercicio 3: Encuentre las ecs. simétricas de la recta que pasa por los puntos dados.
Encuentre en qué punto la recta intersecta al plano xz.

Pag. 41.

a. $P(2,8,-2)$ y $Q(2,6,4)$.

Vector Posición: $\overrightarrow{OP} = \vec{r}_0 = \langle 2,8,-2\rangle$. $\vec{r} = \langle x,y,z\rangle$.

Vector Dirección. $\overrightarrow{PQ} = \vec{v} = \langle 0,-2,6\rangle$.

Ec. vectorial: $\vec{r} = \langle 2,8,-2\rangle + t\langle 0,-2,6\rangle$.

Ecs. simétricas: $x = 2, \quad \dfrac{y-8}{-2} = \dfrac{z+2}{6}$.

¿Cuál es la intersección con el plano xz?

Use $y=0$. $x = 2, \quad \dfrac{-8}{-2} = \dfrac{z+2}{6}$.

$$6\cdot 4 = z+2 \Rightarrow z = 22.$$

La intersección con el plano xz es el punto $(2,0,22)$.

b. $P(4,6,10)$ y $Q(6,6,10)$

$\vec{r}_0 = \langle 4,6,10\rangle$. $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2,0,0\rangle$.

vectorial: $\vec{r} = \langle 4,6,10\rangle + t\langle 2,0,0\rangle$.

paramétricas: $x = 4+2t$, $y = 6$, $z = 10$.

simétricas. $t = \dfrac{x-4}{2}, \; y=6, \; z=10.$

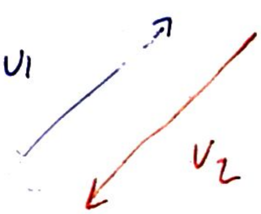
3.

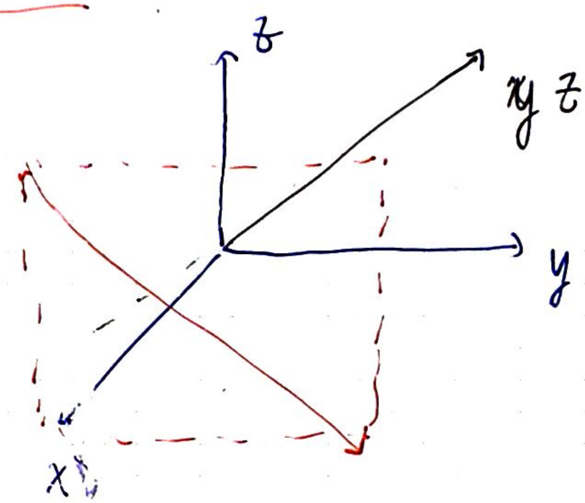
¿Cuál es el punto intersección con el plano xz?

Use $y=0$; como cualquier punto sobre esta recta pasa sólo por $y=6$, esta recta no puede intersectar al plano xz. NO HAY.

Rectas Paralelas.

Dos rectas $\vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + t_1\vec{v}_1$ y $\vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + t_2\vec{v}_2$ son paralelas si y sólo si sus vectores de dirección $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son paralelos.





En el espacio hay 3 tipos de rectas.

a. Paralelas.
b. Intersecan en 1 punto
c. Oblicuas (ni son paralelas ni se intersecan).

Ejercicio 4: Determine si los sigs. pares de rectas son paralelas, oblicuas o se intersecan.

a. $\frac{x-2}{8} = \frac{y-3}{24} = \frac{z-2}{16}$, $\frac{x-10}{-2} = \frac{y+15}{-6} = \frac{z+24}{-4}$.

$v_1 = \langle 8, 24, 16 \rangle$ $\qquad$ $v_2 = \langle -2, -6, -4 \rangle$.

$x = 2+8t, \; y = 3+24t, \; z = 2+16t.$

$v_1 = -4v_2$. v_1 y v_2 son paralelos.

Las dos rectas son paralelas.

b. $L_1 : \; x = 5-4t, \; y = 6-2t, \; z = 2+0t \qquad t \in \mathbb{R}$
$L_2 : \; x = 3+8\underline{\underline{s}}, \; y = -2\underline{\underline{s}}, \; z = 8+2\underline{\underline{s}}. \qquad s \in \mathbb{R}$

Utilice una variable parámetro para cada recta

$v_1 = \langle -4, -2, 0 \rangle$, $\quad v_2 = \langle 8, -2, 2 \rangle$. no son paralelas.

Analice si las rectas se intersecan.

$x = x \qquad 5-4t = 3+8s. \quad (1) \quad \Rightarrow \quad 2 = 4t+8s$
$y = y \qquad 6-2t = -2s. \quad (2) \qquad\quad 6 = 2t+2s$
$z = z. \qquad \boxed{2 = 8+2s} \quad \Rightarrow \quad s = -3.$

3 ecs. y sólo 2 incógnitas t y s.

Sustituya $s = -3$ en las ecs. (1) y (2)

$$\left.\begin{array}{l} 5-4t = -22 \Rightarrow -4t = -27 \Rightarrow t = 27/4. \\ 6-2t = 6 \Rightarrow -2t = 0 \Rightarrow t = 0 \end{array}\right\}.$$

como no hay una t única (no es posible $0 \neq 27/4$), las dos rectas no se intersecan.

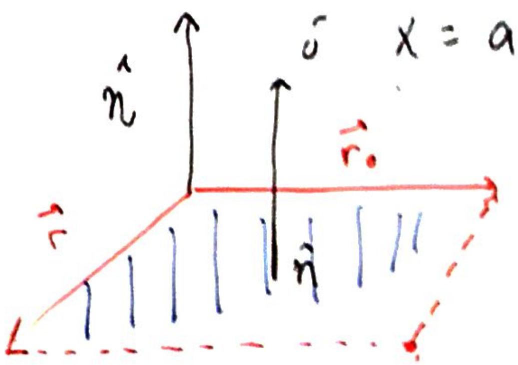
L_1 y L_2 son oblicuas (ni paralelas ni se intersecan).

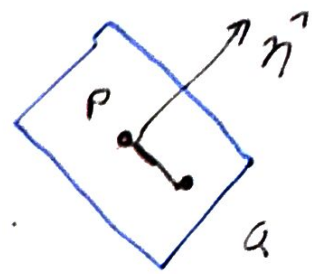
$$\begin{aligned} 4t + 8s &= 2 \\ 2t + 2s &= 6. \\ 0t + 2s &= -6 \end{aligned} \qquad \begin{array}{cc|c} t & s & \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -6 \end{array}\right] \longrightarrow \quad 0 \; 0 \mid \text{número.}$$

Ecuación de un Plano.

Previamente en 12.1 $\quad ax + by + cz = d.$

ó $\quad x = a, \quad y = b, \quad z = c.$ $\Bigg\}$ Ecs de Planos.





Para encontrar la ec. de un plano se necesita.

1. un punto sobre el plano. $\quad P \quad \vec{r}_0 = \overrightarrow{OP}$
2. un vector normal u ortogonal al plano $\quad \hat{n} = \langle a, b, c \rangle.$

$\wedge$ sombrero, hat.

Derivación de la ec. Plano.

$P(x_0, y_0, z_0) \qquad Q(x, y, z)$ son dos puntos sobre el plano.

$$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle \qquad \vec{r} = \overrightarrow{OQ} = \langle x, y, z \rangle.$$

El vector $\overrightarrow{\lambda P} = \vec{r} - \vec{r}_0$ está sobre el plano, por lo que tiene que ser ortogonal a $\hat{n}$.

$\hat{n} \perp \vec{r} - \vec{r}_0 \Rightarrow \boxed{\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0.}$

Ec. Vectorial de un Plano.

Se puede rescribir como.

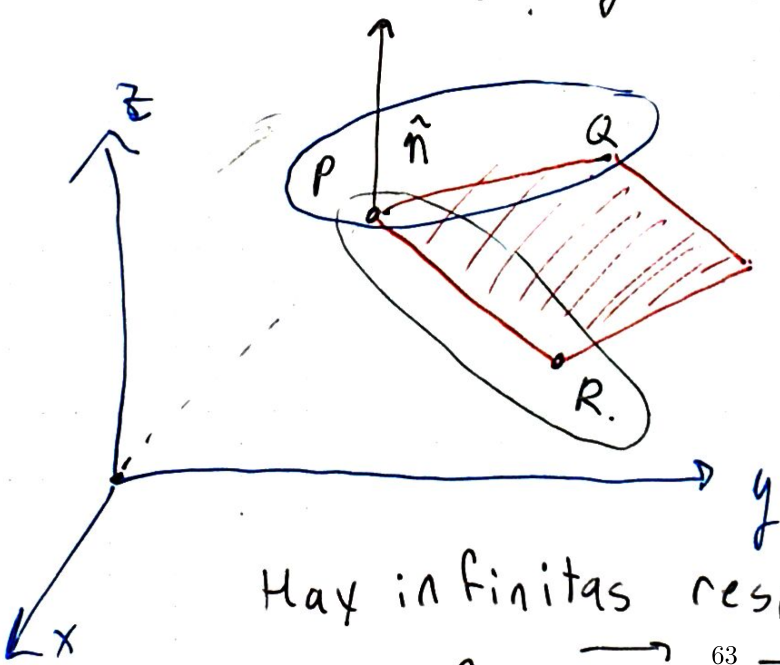
$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_0,\ y - y_0 + z - z_0 \rangle = 0.$

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.}$$

Ec. escalar de un plano.

$$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_{d.}$$

Para encontrar la ec. de un plano, se necesitan 3 puntos P, Q y R.



$r_0 = \overrightarrow{OP}$ ✓

$\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ ✓

tienen que comenzar en el mismo punto

Hay infinitas respuestas equivalentes

$\hat{n} = \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ}$

Ejercicio 1: p 45. Encuentre la ec. del plano que pasa por los 3 puntos dados.

a. $P(3,-1,3)$, $Q(8,2,4)$ y $R(1,2,5)$

Ec. plano $\underline{\hat{n}} \cdot (\vec{r} - \underline{\vec{r}_0}) = 0$

Ec. Recta $\vec{r} = \underline{\vec{r}_0} + t\underline{\vec{v}}$

$r_0 = \langle 8,2,4 \rangle.$

Encuentre dos vectores que estén sobre el plano y que comiencen en el mismo punto.

$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle 5,3,1 \rangle \qquad \vec{v} = \overrightarrow{PR} = \langle -2,3,2 \rangle.$

¡¡ $\hat{n}$ es ortogonal a ambos vectores !!

$$\boxed{\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{\imath} - 12\hat{\jmath} + 21\hat{k}$$

Ec. Plano: $\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

vectorial: $\langle 3,-12,21 \rangle \cdot \langle x-8, y-2, z-4 \rangle = 0.$

Escalar. $3(x-8) - 12(y-2) + 21(z-4) = 0.$

Capítulo8

RB_2020-01-28_13_17_10

b. $P(0,0,0)$, $Q(1,0,2)$ y $R(0,2,3)$

Vector Posición: $\vec{r}_0 = \langle 0,0,0 \rangle$.

2 vectores sobre el plano. $\overrightarrow{PQ} = \langle 1,0,2 \rangle$.
$\overrightarrow{PR} = \langle 0,2,3 \rangle$.

Vector Normal: $\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$

$$\hat{n} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$$

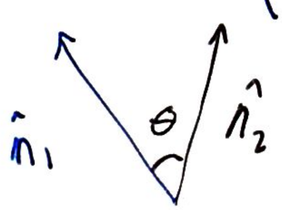
Ec. Plano. $-4x - 3y + 2z = 0.$

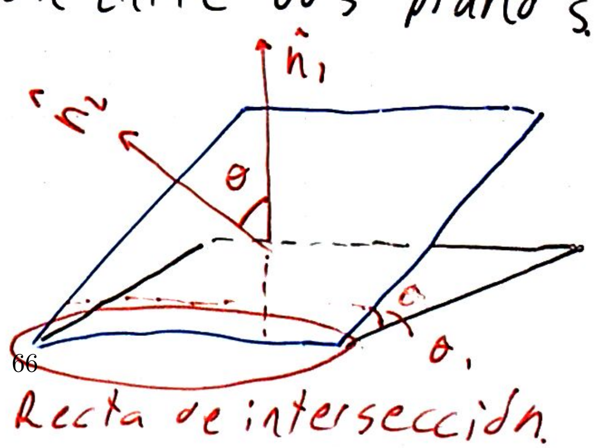
Rectas paralelas v_1 y v_2 son paralelos.

Dos planos $\hat{n}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$ y $\hat{n}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = 0$.
son <u>paralelos</u> si y sólo si $\hat{n}_1$ y $\hat{n}_2$ son paralelos.

En caso que no sean paralelos, se puede encontrar el ángulo de intersección entre dos planos

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1||\hat{n}_2|} \right)$$





Capítulo9

RB_2020-01-30_11_31_17

Rectas y planos. $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}.$

Ecs. Rectas: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

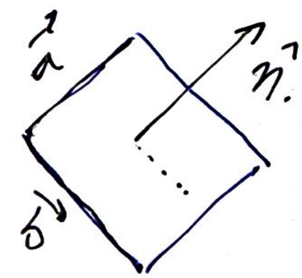
$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}}$$

si $a \neq b \neq c \neq 0$ $\quad \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$

Ec. Plano: $\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\hat{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

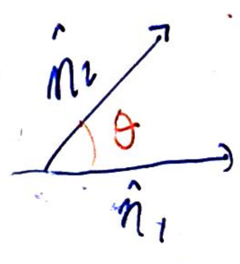


Ejercicio 2: Considere los planos $x + y = 0$ y $x + 2y + z = 1.$

a. Determine si los planos son paralelos. Si no lo son encuentre el ángulo de intersección entre ellos.

$\hat{n}_1 = \langle 1, 1, 0 \rangle.$ no son paralelos $\hat{n}_1$ y $\hat{n}_2$

$\hat{n}_2 = \langle 1, 2, 1 \rangle.$ los dos planos NO SON PARALELOS.

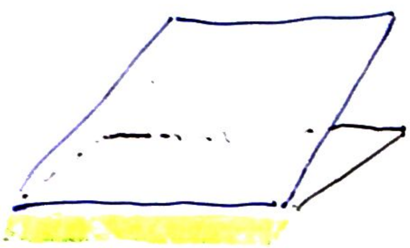


$$\cos\theta = \frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1||\hat{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{12}}$$

$$\boxed{\cos\theta} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2.}} \qquad \theta = \frac{\pi}{6} \text{ ó } 30^\circ.$$

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2.$
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\operatorname{sen}\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

0. Encuentre la ec. de la recta que interseca a ambos planos. $x+y=0$ y $x+2y+z=1$.



$r = \vec{r}_0 + t\vec{v}$.

Dos puntos sobre la recta,

Como la recta está en ambos planos, se debe resolver el sig. sistema.

$$x + y = 0 \Rightarrow x = -y.$$

$$x + 2y + z = 1 \Rightarrow y = 1 - z.$$

z tiene cualquier valor.

1er punto $z=0$: $y=1$, $x=-1$ — $(-1,1,0)$ ✓

2do punto $z=1$: $y=0$, $x=0$ — $(0,0,1)$ ✓

Encuentre la ec. de la recta que pasa por $P(-1,1,0)$ y $\underbrace{Q(0,0,1)}_{r_0}$

$r_0 = \langle 0,0,1\rangle$. ó $r_0 = \langle -1,1,0\rangle$.

$\vec{v} = \overrightarrow{QP} = \langle -1, 1, -1\rangle$.

Ec. Paramétrica de la recta.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 0 - t \\ y &= 0 + t \\ z &= 1 - t. \end{aligned}}$$

II. Solución. $x = -y.$ más incógnitas
$y = 1 - z$ que ecuaciones.

x, y ó z pueden tener cualquier valor. $\boxed{z = t.}$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -1 + t. \\ y &= 1 - t \\ z &= t \end{aligned}}$$

$U_2 = \langle 1, -1, 1 \rangle$ $\vec{r}_0 = \langle -1, 1, 0 \rangle$

III. Solución Geométrica.

1. Encuentre un punto en ambos planos por ejemplo. $(0,0,1)$

La recta está en el plano 1, entonces la recta es perpendicular al vector normal del plano 1.

Está en el plano 2, entonces también es perpendicular al segundo vector normal.

$\therefore$ La recta es perpendicular a ambos $\hat{n}_1$ y $\hat{n}_2$.

$$\vec{U} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$$

Ec. Recta $r = \langle 0,0,1 \rangle + t \langle 1,-1,1 \rangle.$

Ejercicio 3: Encuentre el punto en el que la línea recta $x = 1 + 2t$, $y = 4t$, $z = 5t$ intersecta al plano $x - y + 2z = 17$.

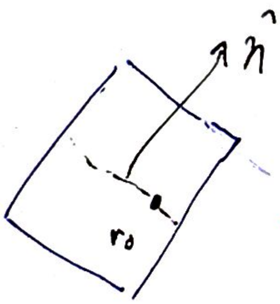
Plano.

$x = 1 + 2t$
$y = 4t$
$z = 5t$
Recta

$$x - y + 2z = 17.$$
$$1 + 2t - 4t + 10t = 17.$$
$$8t = 16 \Rightarrow t = 2$$

El Pto. de Intersección es $(5, 8, 10)$.

Ejercicio 4: Encuentre una ec. del plano que contiene a la recta $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 4 - 3t$ y es paralela al plano $5x + 2y + z = 1$.



cualquier punto sobre la recta también está sobre el plano.

$t = 0$: $x = 1$, $y = 2$, $z = 4$ $\quad \vec{r}_0 = \langle 1, 2, 4 \rangle$.

¿Cómo se encuentra $\hat{n}$?

El vector de dirección de la recta $v = \langle 1, -1, -3 \rangle$ es paralelo al plano.

Como es paralelo al segundo plano, entonces tiene que ser perpendicular $\hat{n}_2 = \langle 5, 2, 1 \rangle$.

$\vec{r}_0 = \langle 1,2,4\rangle$ y $\hat{n} = \langle 5,2,1\rangle$.

Ec. plano. $\boxed{5(x-1)+2(y-2)+1(z-4)=0.}$

Ejercicio 5: Encuentre los números directores para la recta de intersección entre los planos $x+y+z=1$ y $x+2y+3z=1$.

Los números directores a, b y c del vector de dirección $\langle a,b,c\rangle$.

La recta es ortogonal a ambos vectores normales $\hat{n}_1 = \langle 1,1,1\rangle$ y $\hat{n}_2 = \langle 1,2,3\rangle$ de ambos planos.

$$\vec{v} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\underline{\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}}}$$

Números directores: $a=1$, $b=-2$, $c=1$

Ejercicio 6: Encuentre las ecs. paramétricas de la recta que pasa por el punto $(0,1,2)$, que es paralela al plano $x+y+z=2$ y perpendicular a la recta $r = \langle -2t, 0, 3t\rangle$.

L_1: $\underline{r = \vec{r}_0 + t\vec{v}}$ $\qquad$ $\underline{r_0} = \langle 0,1,2\rangle$

6.

¿Cómo se encuentra v?

Plano 1 $\hat{n} = \langle 1,1,1\rangle$ es perpendicular al plano. es paralelo a L_1.

Recta 2: $\hat{v}_2 = \langle -2,0,3\rangle$ es perpendicular a L_1.

La recta es perpendicular a $\hat{n}$ y a $\vec{v}_2$.

$$v = \hat{n} \times \hat{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

$r_0 = \langle 0,1,2\rangle$.

✓ $v = \hat{v}_2 \times \hat{n}$

Ecs. Paramétricas.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 0 + 3t \\ y &= 1 - 5t \\ z &= 2 + 2t. \end{aligned}}$$

Capítulo10

RB_2020-02-04_11_22_59

13.1 Funciones Vectoriales.

Una función vectorial:

Dominio: Números Reales   Rango: vectores 3-D.

$\vec{r}: \mathbb{R} \to V_3 \qquad \vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle.$

t es un parámetro. $\boxed{\vec{r} = f(t)\,\hat{\imath} + g(t)\,\hat{\jmath} + h(t)\,\hat{k}}$

Ejemplo de una función vectorial

$\vec{r} = \langle a, b, c \rangle + t \langle d, e, f \rangle.$ Recta.

$\vec{r} = \langle a + td, b + et, c + tf \rangle$

Ecs. Paramétricas de una función vectorial $x = f(t)$ $y = g(t)$, $z = h(t)$

Dominio de una función vectorial:

Encuentre el dominio de cada función componente.

El dominio de $\vec{r}$ es la intersección de los dominios de cada función componente.

Ejercicio 1: Encuentre el dominio.

Evite.

$\sqrt{-}$

$\ln 0$ ó $\ln -$

a. $\vec{r}(t) = \langle \sqrt{t^2-9}, e^{\sin t}, \ln(t+5) \rangle$

$\sqrt{t^2-9}$ definida. $t^2 \geq 9$ $\quad (-\infty,-3] \cup [3,\infty)$

$e^{\sin t}$. $\sin t$ siempre definida. lo mismo $e^{\sin t}$. $\quad (-\infty,\infty)$.

$\ln(t+5)$ definida cuando $t+5>0$ $\quad (-5,\infty)$
$t > -5$

$(-5,-3] \cup (-3,3) \cup [3,\infty)$

Dominio de $\vec{r}(t)$ $\boxed{(-5,-3] \cup [3,\infty)}$

$[a,b]$ el número si es parte del dominio
a, b son parte del dominio.

(a,b) los números a y b no son parte del dominio.

b. $\vec{s}(t) = \left\langle \sin^3(t^2), \cosh\left(\frac{t}{t^2+1}\right), \frac{1}{e^t+4} \right\rangle$

$\sin^3(t^2)$ $\quad D_f: \mathbb{R}$.

$\cosh\left(\frac{t}{t^2+1}\right)$ $\quad D_g: \mathbb{R}$.

$\frac{1}{e^t+4}$ $\quad D_h: \mathbb{R}$.

Dominio $\vec{s}(t)$
$(-\infty,\infty)$

$e^t + 4 \neq 0 \Rightarrow e^t = -4 \Rightarrow t = \ln(-4)$ indefinido

Limites y Continuidad

$$\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t) \right\rangle$$

- Evalúe el límite de cada función componente
- Si no existe por lo menos un límite de una función componentes, entonces $\lim_{t\to a} \vec{r}(t)$ no existe.

$f(t)$ está definida en $t=a$.

$$\lim_{t\to a} f(t) = f(a)$$

si se indefine y tiene forma $0/0$ ó ∞/∞.

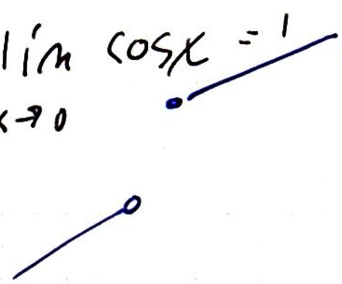
$$\lim_{t\to a} \frac{f(t)}{g(t)} \underset{0/0}{=} \lim_{t\to a} \frac{f'(t)}{g'(t)}$$ L' Hospital.

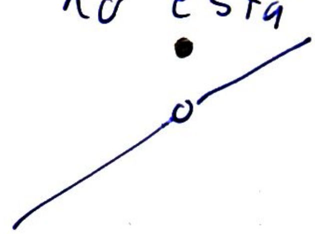
Continua en $t=a$ si $\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$

- Analiza la continuidad en cada función componente.
- Evite AVs, saltos y agujero.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

(límite existe pero $\vec{r}(a)$ no está definido)





4

Ejercicio 2: Sea $\vec{r}(t) = \left\langle \frac{\tan \pi t}{t}, e^{t-2}, \frac{\ln(t-1)}{t^2-1} \right\rangle$

a. Analice si la función $\vec{r}(t)$ es continua en $t=2$.

$\vec{r}(2) = \left\langle \frac{\tan 2\pi}{2}, e^0, \frac{\ln 1}{3} \right\rangle = \langle 0, 1, 0 \rangle$

$\lim_{t\to 2} \frac{\tan \pi t}{t} = 0$ $0/2$ $\quad \lim_{t\to 2} e^{t-2} = 1, \quad \lim_{t\to 2} \frac{\ln(t-1)}{t^2-1} = 0.$

$\vec{r}$ si es continua en $t=2$ $\lim_{t\to 2} \vec{r}(t) = \vec{r}(2)$.

b. Encuentre $\lim_{t\to 1} \vec{r}(t)$ analice el límite de cada función componente por separado.

f: $\lim_{t\to 1} \frac{\tan \pi t}{t} = \frac{0}{1}$

g: $\lim_{t\to 1} e^{t-2} = e^{-1}$

h: $\lim_{t\to 1} \frac{\ln(t-1)}{t^2-1}$ no existe.

$\ln(0)$ no existe.

$\lim_{t\to 1} \vec{r}(t)$ no existe.

c. Analice si $\vec{r}(t)$ es continua en $t=1$

$\lim_{t\to 1} \vec{r}(t) = \vec{r}(1)$ r(1) está indefinido. límite no existe en $t=1$

NO ES CONTINUA en $t=1$.

5\.

d. Agujero $\vec{s}(t) = \left\langle \frac{\tan \pi t}{t-1}, e^{t-2}, \frac{\ln(2t-1)}{t^2-1} \right\rangle$

no es continua en $t=1$ pero su límite existe en $t=1$

$$\lim_{t\to 1} \frac{\tan \pi t}{t-1} \underset{0/0}{\overset{LH}{=}} \lim_{t\to 1} \frac{\pi \sec^2 \pi t}{1} = \frac{\pi}{(\cos \pi)^2} = \pi.$$

$$\lim_{t\to 1} e^{t-2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{t\to 1} \frac{\overbrace{\ln(2t-1)}^{\ln 1 = 0}}{t^2-1} \underset{0/0}{=} \lim_{t\to 1} \frac{2/2t-1}{2t}.$$

$$\lim_{t\to 1} \frac{2}{2t(2t-1)} = \frac{1}{1(2-1)} = 1.$$

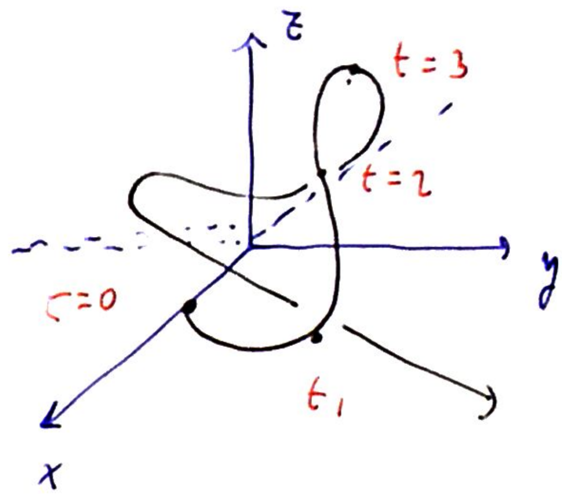
$$\lim_{t\to 1} \vec{s}(t) = \langle \pi, 1/e, 1 \rangle$$ es un agujero. $\vec{s}(1)$ está indefinida.

Curvas en el espacio.

$x = f(t)$

$y = g(t)$

$z = h(t)$

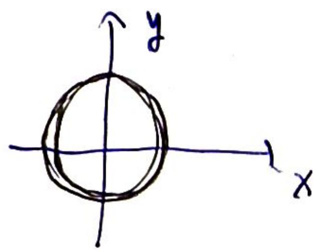


Espirales:

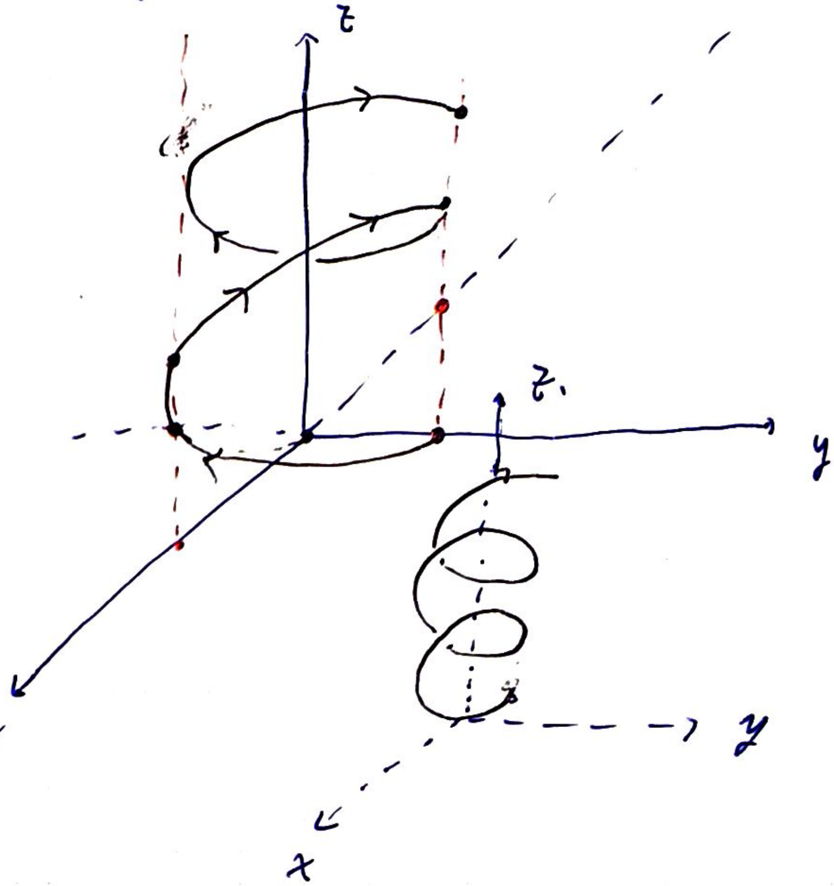
Ejercicio 3: Grafique la curva $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = \underbrace{2\hat{i}\sin t}_{x} + \underbrace{2\hat{j}\cos t}_{y} + \underbrace{\hat{k}\,\frac{t}{\pi}}_{z}$$

t	x	y	z
0	0	2	0
$\pi/2$	2	0	0.5
π	0	-2	1
$3\pi/2$	-2	0	1.5
2π	0	2	$2.$



$$x^2 + y^2 = 4$$



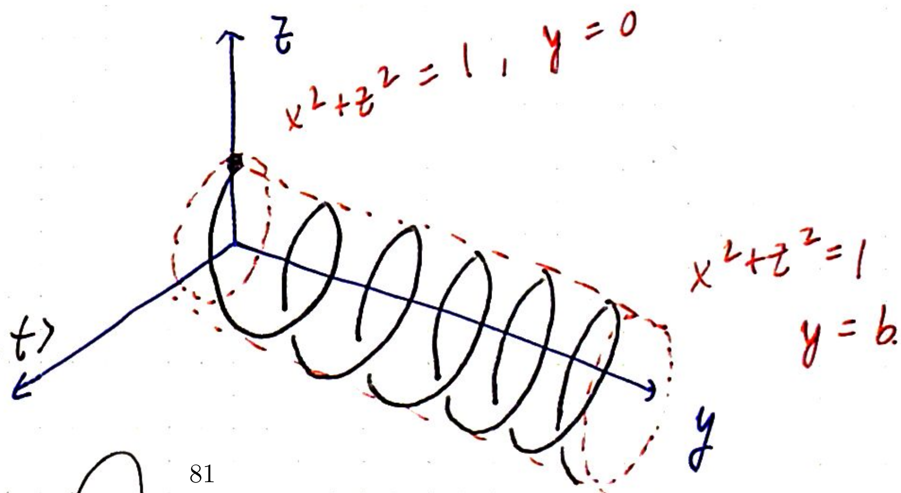
Ejercicio 4: Grafique

$$\vec{r}(t) = \langle \sin \pi t,\ t,\ \cos \pi t \rangle.$$

$$x^2 + z^2 = 1$$

$$\vec{r}(0) = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

$$\vec{s}(t) = \langle \sin t, t^2, \cos t \rangle$$



Capítulo11

RB_2020-02-06_10_19_48

13.2 Cálculo con funciones Vectoriales. p. 55.

Derivadas $\vec{r}\,'(t)$ respecto a t

Integrales: $\int r'(t)\,dt$. respecto a t.

$$r'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h} \qquad r = \langle f, g, h \rangle$$

$$r'(t) = \left\langle \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}_{f'(t).}, \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}}_{g'(t)}, h'(t) \right\rangle$$

Derivada: $\boxed{r'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle.}$

derive cada función componente.

Integral: $\int \vec{r}(t)\,dt = \int (f\hat{i} + g\hat{j} + h\hat{k})\,dt.$

$$\hat{i}\int f\,dt + \hat{j}\int g\,dt + \hat{k}\int h\,dt.$$

integre cada función componente.

Ejercicio 1: Encuentre la 1ra y 2da derivada de las siguientes funciones.

a. $\vec{r}(t) = \langle \sin(4t), t^2, \ln(\sin t) \rangle.$

$\vec{r}\,'(t) = \langle 4\cos(4t), 2t, \cos t/\sin t \rangle$

$\vec{r}\,''(t) = \langle 4\cos(4t), 2t, \cot(t) \rangle.$

$$r''(t) = \langle f''(t), g''(t), h''(t) \rangle$$

$$r''(t) = \langle -16\sin(4t), 2, -\csc^2 t \rangle.$$

$\sin' \to \cos$	$\csc' \to -\csc\cot$	$\int \sec = \ln(\sec + \tan)$
$\cos' \to -\sin$	$\sec' \to \sec\tan$	
$\tan' \to \sec^2$	$\cot' \to -\csc^2.$	

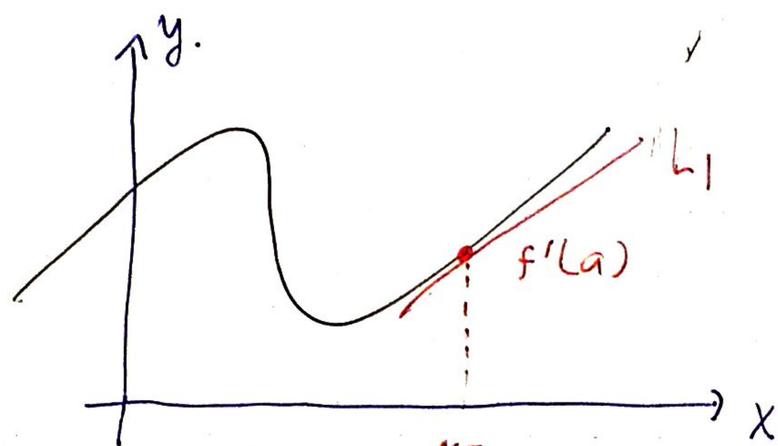
t.

b. $\vec{s}(t) = \hat{i}\tan(4t) + \hat{j}\ln(4t+1) + \hat{k}(5-2t)^{1/2}.$

$$\vec{s}'(t) = 4\hat{i}[\sec(4t)]^2 + \hat{j}\,4(4t+1)^{-1} - \hat{k}(5-2t)^{-1/2}.$$

$$s'' = 32\hat{i}\sec(4t)\sec(4t)\tan(4t) - 16\hat{j}(4t+1)^{-2} + \frac{\hat{k}}{2.}(5-2t)^{-3/2.}(-2)$$

para $y = f(x)$



$f'(a)$ es igual a la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x=a$.

$L_1: \; y = f(a) + f'(a)(X-a)$ Ec. Recta Tangente.

Con una función vectorial

$\vec{r} = \langle f, g, h \rangle \qquad x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$

hay ecuaciones paramétricas para cada variable.

$\vec{r}\,'(a) = \langle f'(a), g'(a), h'(a) \rangle.$

vector de pendientes de rectas tangentes a la curva $\vec{r}(t)$.

Vector Tangente a $\vec{r}(t)$: $\boxed{r'(a)}$

Recta Tangente: es ahora una función vectorial.

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(a) + \vec{r}\,'(a)\,t}$$

Ecs. Paramétricas:
$$x = f(a) + f'(a)\,t$$
$$y = y(a) + t\,g'(a)$$
$$z = h(a) + t\,h'(a)$$

Vector Tangente: $r'(a)$
en $t = a$.

Vector Tangente Unitario: $\dfrac{r'(a)}{|r'(a)|} = \vec{T}(a)$
en $t = a$

Ejercicio 3: Encuentre las ecs. paramétricas de la recta tangente a la curva

$r(t) = \langle 2\cos t, 2\sin t, 4\cos 2t \rangle$ en el punto $(\sqrt{3}, 1, 2)$

Recta Tangente: $\boxed{\vec{r}_T(t) = \vec{r}(a) + t\,\vec{r}\,'(a)}$

$\vec{r}(a) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle.$

Derivada: $\vec{r}\,'(t) = \langle -2\sin t, 2\cos t, -8\sin(2t) \rangle$

¿Cómo se encuentra a? $r(t) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle.$

$\rightarrow 2\cos t = \sqrt{3} \qquad \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{t = \pi/6.}$

$2\sin t = 1 \Rightarrow 2\sin \pi/6 = 2\,\frac{1}{2} = 1$ ✓

$4\cos 2t = 2. \Rightarrow 4\cos \pi/3 = 4\,\frac{1}{2} = 2$ ✓

Vector Tangente: $r'(\pi/6) = \langle -2\sin \pi/6, 2\cos \pi/6, -8\sin \pi/3 \rangle$

$$r'(\pi/6) = \left\langle -\frac{2}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{2}, -8\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = \langle -1, \sqrt{3}, -4\sqrt{3} \rangle$$

$$\vec{r}_T(t) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle + t\,\langle -1, \sqrt{3}, -4\sqrt{3} \rangle$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \sqrt{3} - t \\ y &= 1 + \sqrt{3}\,t \\ z &= 2 - 4\sqrt{3}\,t \end{aligned}}$$

Capítulo12

RB_2020-02-11_13_33_43

13.2 Cálculo.

Derivadas: $\vec{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$.

Vector Tangente $\vec{r}'(t)$ Tangente Unitario $\vec{T}(t) = \dfrac{r'(t)}{|r'(t)|}$.

Recta Tangente a la curva. $\vec{L}(t) = \vec{r}(a) + \vec{r}'(a)t$.

$$x = f(a) + t f'(a)$$
$$y = g(a) + t g'(a)$$
$$z = h(a) + t h'(a).$$

Integrales: $\int \langle f, g, h \rangle dt = \langle F + C_1, G + C_2, H + C_3 \rangle$

$$\int \vec{r}(t) dt = \vec{R}(t) + \vec{C}$$

$\vec{R}$ vector de antiderivadas

$\vec{C}$ vector de constantes

Definida: $\int_a^b \vec{r}(t) dt = \hat{i} \int_a^b f(t) dt + \hat{j} \int_a^b g(t) dt + \hat{k} \int_a^b h(t) dt$

Ejercicio 4: Evalúe los sigs. integrales.

a. $\int_0^1 \left[\frac{4}{1+t^2} \hat{i} + \sec^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) \hat{k} \right] dt. = I,$

$\tan(\pi/4) = 1$
$\tan(0) = 0$
$\tan^{-1} 1 = \pi/4$
$\tan^{-1} 0 = 0.$

$$I_1 = 4\hat{i} \tan^{-1} t \Big]_0^1 + \hat{k} \frac{4}{\pi} \tan\left(\frac{\pi t}{4}\right) \Big]_0^1$$

$$I_1 = 4\hat{i} \frac{\pi}{4} + \hat{k} \frac{4}{\pi} = \pi \hat{i} + \hat{k} \frac{4}{\pi} = \langle \pi, 0, \frac{4}{\pi} \rangle$$

b. $\int \langle te^{t^2}, te^{t}, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \rangle dt.$

Integre cada función.

$x: \int e^{t^2}(t\,dt) = \frac{1}{2}\int e^{u}du = \frac{1}{2}e^{t^2} + C_1$

$u = t^2 \quad du = 2t\,dt.$

$y: \int t e^{t} dt. = te^{t} - \int e^{t} dt = te^{t} - e^{t} + C_2.$

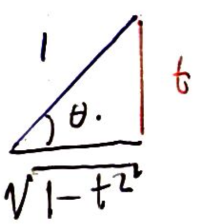
$u \; dv = uv - \int v\,du.$

$u = t \quad dv = e^{t}dt.$

$du = dt \quad v = e^{t}$

$z: \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\cos\theta} = \int d\theta = \theta + C_3.$

$= \sin^{-1}(t) + C_3.$



$t = \sin\theta.$

$dt = \cos\theta\, d\theta.$

$\sqrt{1-t^2} = \cos\theta.$

$$\int \langle te^{t^2}, te^{t}, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \rangle dt = \left\langle \frac{1}{2}e^{t^2} + C_1,\ te^{t} - e^{t} + C_2,\ \sin^{-1}t + C_3 \right\rangle$$

Movimiento en el espacio.

Dado el vector de posición $\vec{r}(t)$. de un objeto.

Vector Velocidad: $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$

Vector Aceleración $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t)$

Rapidez: $|\vec{v}(t)|$ Distancia $|\vec{r}(t)|$

3.

Dado el vector de aceleración $\vec{a}(t)$

velocidad: $\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)\,dt + \vec{C_1}$

desplazamiento o posición: $\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)\,dt + \vec{C_2}$.

Las CI's $\vec{v}(0)$ y $\vec{r}(0)$ nos permiten encontrar el valor de $\vec{C_1}$ y $\vec{C_2}$ resp.

Ejercicio 1: Encuentre la velocidad, aceleración y rapidez dada la posición del objeto. y la distacia

$$\vec{r}(t) = \hat{\imath}\, t + 2\hat{\jmath}\cosh(4t) + 3\hat{k}\sinh(3t).$$

Velocidad: $\vec{r}'(t) = \vec{v}(t) = \hat{\imath} + 8\hat{\jmath}\sinh(4t) + 9\hat{k}\cosh(3t)$.

Aceleración: $\vec{r}''(t) = \vec{a}(t) + 32\hat{\jmath}\cosh(4t) + 27\hat{k}\sinh(3t)$

Rapidez: $|\vec{v}(t)| = \sqrt{1 + 64\sinh^2(4t) + 81\cosh^2(3t)}$

Distancia: $|\vec{r}(t)| = \sqrt{t^2 + 4\cosh^2(4t) + 9\sinh^2(3t)}$

Tarea 6 Integrales Func. Vectoriales

14.1 Funciones en Varias Variables.

Tarea Opcional Consolidado 12, 13, 14.1.

Ejercicio 2: Encuentre la velocidad y posición del objeto dada $\vec{a}(t)$ y las condiciones iniciales.

$$\vec{a}(t) = \underline{6t}\,\hat{\imath} + \hat{\jmath}\,\underline{\cos t} - \hat{k}\,\underline{\sin(2t)}, \qquad \vec{v}(0) = \hat{\imath} + \hat{k}$$
$$\vec{r}(0) = 2\hat{\jmath} - \hat{k}$$

velocidad: $\int \vec{a}(t)\,dt$

$$\vec{v}(t) = \left\langle 3t^2 + \underset{1}{\cancel{c_1}},\ \sin t + \overset{0}{\cancel{c_2}},\ \tfrac{1}{2}\cos(2t) + \overset{1/2.}{\cancel{c_3}} \right\rangle$$

$$\vec{v}(0) = \langle \underline{\underline{c_1}}, c_2, \tfrac{1}{2} + c_3 \rangle = \langle \underline{\underline{1}}, 0, 1 \rangle$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad \tfrac{1}{2} + c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = \tfrac{1}{2}.$$

Posición: $\int \vec{v}(t)\,dt.$

$$\vec{r}(t) = \left\langle t^3 + t + d_1,\ -\cos t + d_2,\ \tfrac{1}{4}\sin(2t) + \tfrac{t}{2} + d_3 \right\rangle$$

$$\vec{r}(0) = \langle d_1, -1 + d_2, d_3 \rangle = \langle 0, 2, -1 \rangle$$

$$d_1 = 0, \quad -1 + d_2 = 2., \quad d_3 = -1$$
$$d_2 = 3.$$

Posición: $\vec{r}(t) = \langle t^3 + t,\ 3 - \cos t,\ \tfrac{1}{4}\sin(2t) + \tfrac{t}{2} - 1 \rangle.$

b. $\vec{a}(t) = 8t\,\hat{i} + \sinh t\,\hat{j} - \hat{k}\,e^{t/2}$, $\quad \frac{1}{2}e^{t/2}$

$\vec{v}(0) = \vec{0} \qquad \vec{s}(0) = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$

"En reposo"

Velocidad: $\vec{v}(t) = \langle 4t^2 + C_1, \cosh t + C_2, -2e^{t/2} + C_3 \rangle$

$\vec{v}(0) = \langle C_1, 1 + C_2, -2 + C_3 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle.$

$C_1 = 0, \quad C_2 = -1 \quad C_3 = 2$

$\vec{v}(t) = \langle 4t^2, \cosh t - 1, -2e^{t/2} + 2 \rangle$

Posición: $\vec{r}(t) = \langle \frac{4}{3}t^3 + C_1, \sinh t - t + C_2, -4e^{t/2} + 2t + C_3 \rangle$

$\vec{r}(0) = \langle C_1, C_2, -4 + C_3 \rangle = \langle 2, 1, -3 \rangle$

$C_2 = 1 \qquad C_3 = -3 + 4 = 1$

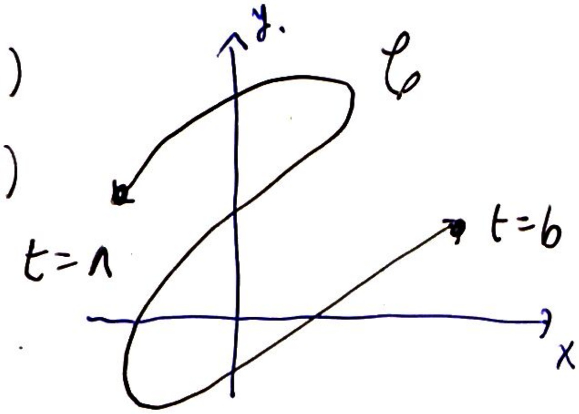
$\vec{r}(t) = \langle \frac{4}{3}t^3 + 2, \sinh t - t + 1, -4e^{t/2} + 2t + 1 \rangle$

13.3 Longitud de Arco.

10.4. Ecs. paramétricas de una curva en el plano.

$x = f(t)$

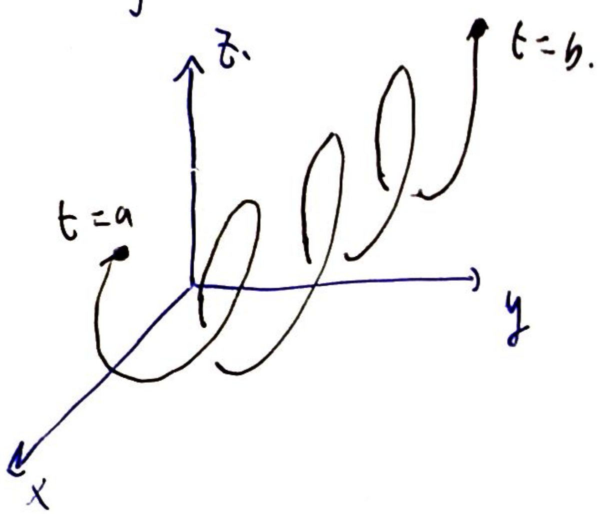
$y = g(t)$



Longitud de arco.

$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt.$$

Longitud de una curva en el espacio



$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)$

$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, dt.$$

Función vectorial: $\vec{r} = \langle f, g, h \rangle = \langle x, y, z \rangle.$

Derivada: $\vec{r}\,' = \langle x', y', z' \rangle.$

Magnitud: $|\vec{r}\,'| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$

$$\boxed{L = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\, dt.}$$

integre la magnitud del vector tangente.

7.

Ejercicio 1: p 63 Encuentre la longitud de las sigs. curvas.

a. $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, \ln(\cos t) \rangle \quad 0 \leq t \leq \pi/4.$

$$L = \int_0^{\pi/4} |r'(t)|\, dt.$$

$$r'(t) = \left\langle -\sin t, \cos t, \overbrace{\frac{-\sin t}{\cos t}}^{-\tan t.} \right\rangle$$

$$|r'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \tan^2 t}$$

$$= \sqrt{1 + \tan^2 t} = \sqrt{\sec^2 t} = \sec t.$$

$$L = \int_0^{\pi/4} \sec t \, dt = \ln(\sec t + \tan t)\Big]_0^{\pi/4.}$$

$$= \ln(\sec \pi/4 + \tan \pi/4)$$

$$- \ln(\sec 0 + \tan 0)$$

$$L = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right) - \overset{0}{\cancel{\ln(1)}} = \ln|\sqrt{2} + 1|$$

b. $\vec{r}(t) = \langle 12t, 8t^{3/2}, 3t^2 \rangle \quad$ en $\quad 0 \leq t \leq 1$

$$r'(t) = \langle 12, 12t^{1/2}, 6t \rangle = 6 \langle 2, 2t^{1/2}, t \rangle.$$

$$|r'(t)| = 6\sqrt{4 + 4t + t^2} = 6\sqrt{(t+2)^2} = 6(t+2)$$

$$L = \int_0^1 (6t + 12)\, dt = 3t^2 + 12t\Big]_0^1 = 3 + 12 = 15$$