

# Cálculo Multivariable - Clases y apuntes de clase

David Gabriel Corzo Mcmath

2020-01-06

---

# Índice general

<b>1. Clase - 2020-01-07</b>	<b>5</b>
1.1. 12.1 Sistema tridimensional de coordenadas . . . . .	6
<b>2. Clase - 2020-01-23</b>	<b>9</b>
2.1. 12.4 Producto Cruz . . . . .	10
2.2. Producto Cruz . . . . .	10
<b>3. Clase - 2020-01-28</b>	<b>13</b>
3.1. 12.5 Rectas y planos . . . . .	14
3.1.1. Ejercicio 3: Encuentre las ecs. simétricas de la recta que pasa por los puntos dados. Encuentre en qué punto la recta interseca al plano xz. pg.41 . . . . .	14
3.2. Rectas paralelas . . . . .	15
3.2.1. Ejercicio 4: Determine si los siguientes pares de rectas son paralelas, oblicuas o se intersecan. . . . .	15
3.3. La ecuación de un plano . . . . .	16
3.3.1. Derivación de la e. plano . . . . .	16
3.3.2. Ejercicio 1: pg45 Encuentre la ec. del plano que pasa por los 3 puntos dados. . . . .	17
3.4. Rectas paralelas $v_1$ y $v_2$ son paralelos . . . . .	18
<b>4. Clase - 2020-01-30</b>	<b>19</b>
4.1. Resolución de corto . . . . .	20
4.2. Rectas y planos . . . . .	20
4.2.1. Ejercicios . . . . .	20
<b>5. Clase - 2020-02-04</b>	<b>25</b>
5.1. 13.1 Funciones vectoriales y curvas en el espacio . . . . .	26
5.1.1. Ejercicios . . . . .	26
5.2. Límites y continuidad . . . . .	27
5.2.1. Ejercicios . . . . .	27
5.3. Curvas en el espacio . . . . .	28
5.3.1. Espirales . . . . .	28
<b>6. Clase - 2020-02-06</b>	<b>29</b>
6.1. 13.2 Cálculo con funciones vectoriales, pg.55 . . . . .	30
6.1.1. Derivadas . . . . .	30
6.1.2. Integrales . . . . .	30
6.2. Ejercicios . . . . .	30
6.3. Recordatorios & rectas tangentes de funciones vectoriales . . . . .	31
6.4. Ejercicios . . . . .	32



# Capítulo 1

Clase - 2020-01-07

## 1.1. 12.1 Sistema tridimensional de coordenadas

- Para localizar un punto en un plano, se necesitan dos números.
- Los ejes de coordenadas son perpendiculares entre sí.
- En el sistema tridimensional de coordenadas rectangulares, cada punto en el espacio es una terna ordenada.

Espacio:  $\mathbb{R}^3 \{ (x, y, z) \mid \text{Talque } x, y, z \in \mathbb{R}. \}$

&

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

- Sistema 2-D vs. 3-D:

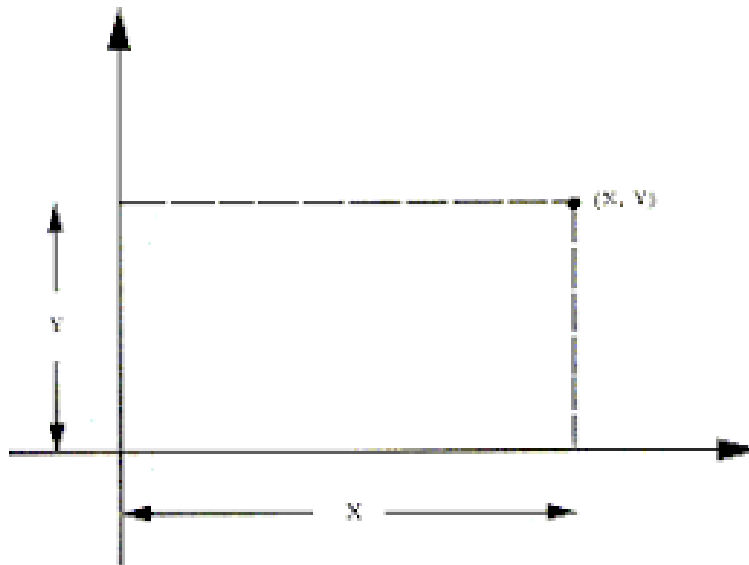


Figura 1.1:

- Las líneas punteadas se usan para simbolizar las partes debajo, izquierda y detrás.

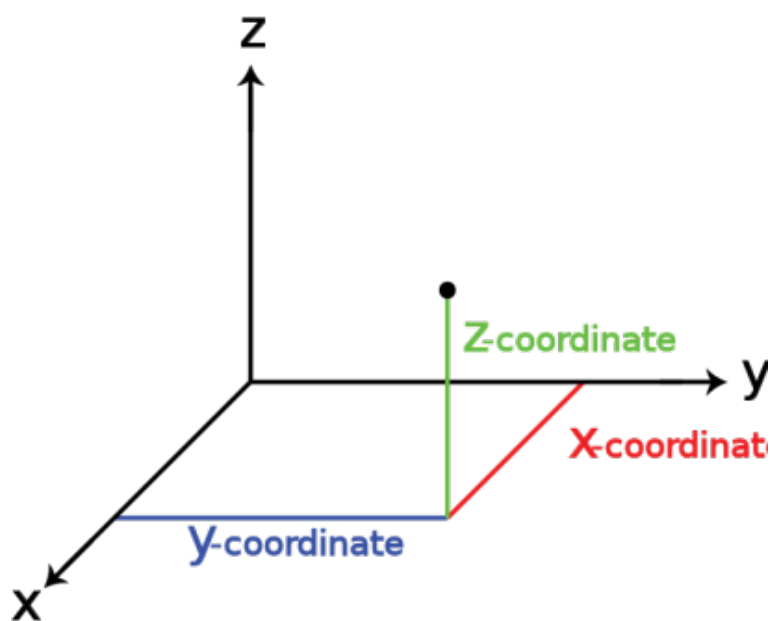


Figura 1.2:





# Capítulo 2

Clase - 2020-01-23

## 2.1. 12.4 Producto Cruz

- **Definición de “Determinantes”:** Matriz (arreglo rectangular de números).
- **Definición de “Cuadrada”:** Mismo número de filas y columnas.

■

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

# Determinante de orden 2. Matriz de 2x2

- pie:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-1)(4) = 6 + 4 = 10$$

- Determinante de orden 3: Matriz 3x3 suma de tres determinantes de orden 2:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

3 matrices de 2x2.

- p.e.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$2(6 - 0) - 0 + 2(-1 - 3) = 12 - 8 = 4$$

## 2.2. Producto Cruz

- Dados dos vectores :

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

$$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cómo se encuentra un vector  $\vec{c}$  que es perpendicular a  $\vec{a}$  y a  $\vec{b}$ ?

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

- Resuelva para  $c_1, c_2, c_3$  :

$$c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0$$

$$c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 = 0$$

- El producto cruz  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = 0$  es un vector perpendicular a ambos vectores  $\vec{a}$  &  $\vec{b}$ .

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \hat{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \hat{k}(a_1b_2 - a_2b_1)$$

■ Observaciones:

- El producto cruz es un vector, mientras que el producto es un número o escalar.
- El producto cruz **no** es conmutativo  $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$ .

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(b_2a_3 - a_2b_3) + \hat{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \hat{k}(a_2b_1 - a_1b_2)$$

■ Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{a} \times \vec{b} = 15\hat{i} - 10\hat{j} - 3\hat{k}$$

■ Verifique  $\vec{a} \times \vec{b}$  es ortogonal a  $\vec{a}$  & a  $\vec{b}$ .

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 2, 3, 0 \rangle = 30 - 30 + 0 = 0 \therefore \text{son ortogonales}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 1, 0, 5 \rangle = 15 + 0 - 15 = 0 \therefore \text{son ortogonales}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp a_1b$$

■ Aclaración: en dos dimensiones  $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$  No es posible evaluarlo.

■ Existen en tres dimensiones pero si se intenta evaluar en cuatro dimensiones la siguiente matriz no es posible:

$$\begin{array}{c} \text{En 3-D: } \exists \text{ En 4-D: } \nexists \\ \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{l} \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} \end{array}$$

No es posible evaluarlo.

■ Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ = 15\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}$$

Entonces... en general:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$



# Capítulo 3

Clase - 2020-01-28

### 3.1. 12.5 Rectas y planos

- Ecuación de una recta
- Vector posición  $\vec{r}_0 = \langle x_0, y, z_0 \rangle$
- Vector dirección  $\vec{v}_0 = \langle a, b, c \rangle$
- Ecuación vectorial:  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$  donde  $t$  es el parámetro.
- Ecuaciones paramétricas:

$$x = x_0 + at$$

$$y = y_0 + bt$$

$$z = z_0 + ct$$

- Resuelva para  $t$  en las tres ecuaciones:

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Estas son las ecuaciones simétricas de la recta donde  $a, b, c \neq 0$ .

- Vector dirección  $\vec{v} = \langle a, 0, c \rangle$  las ecuaciones en la recta cambian:

$$\underbrace{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}}_{\text{Vectorial}}$$

$$x = x_0 + at$$

$$y = y_0$$

$$z = z_0 + ct$$

Entonces queda así:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\underbrace{y = y_0}_{\text{Simétrica}}$$

#### 3.1.1. Ejercicio 3: Encuentre las ecs. simétricas de la recta que pasa por los puntos dados. Encuentre en qué punto la recta interseca al plano xz. pg.41

- P(2,8,-2) & Q(2,6,4)

$$\text{Vector posición} = \overrightarrow{OP} = R_0 = \langle 2, 6, 7 \rangle$$

$$\text{Vector dirección } \overrightarrow{PQ} = \vec{v} = \langle 0, -2, 6 \rangle$$

$$\text{Ec. vectorial} = \vec{r} = \langle 2, 8, -2 \rangle + t\langle 0, -2, 6 \rangle$$

$$\text{Ecs. simétricas} = x = 2, \frac{y - 8}{-2} = \frac{z + 2}{6}$$

- Nos preguntamos: ¿Cual es la intersección con el plano xz?

$$\begin{aligned} \text{Use, } y=0 \Rightarrow x = 2, \frac{-8}{-2} &= \frac{z + 2}{6} \\ &= 6 \cdot 4 = z + 2 \Rightarrow z = 22 \end{aligned}$$

- La intersección con el plano xz es el punto  $(1, 0, 22)$ :

$$\vec{r}_0 = \langle 4, 6, 10 \rangle$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2, 0, 0 \rangle$$

$$\text{Vectorial: } \vec{r} = \langle 4, 6, 10 \rangle + t\langle 2, 0, 0 \rangle$$

$$\text{Paramétricas: } x = 4 + 2t, y = 6, z = 10$$

$$\text{Simétricas: } t = \frac{x-4}{2}, y = 6, z = 10$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cual es el punto de intersección con el plano xz?

Use:  $y=0$

Explicación: por la recta  $y = 6$  siempre será 6, nunca podrá ser 0, no puede intersecar con el plano xz, **No hay.**

## 3.2. Rectas paralelas

Dos rectas  $\vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + t\vec{v}$  &  $\vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + t\vec{v}_2$  son paralelas si y solo si sus vectores de dirección  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  son paralelas.

Figura 3.1:

Entonces en el espacio tenemos 3 tipos de rectas:

1. Rectas paralelas
2. Rectas intersecan en un punto
3. Rectas Ublicuas (no paralelas & no intersecan)

### 3.2.1. Ejercicio 4: Determine si los siguientes pares de rectas son paralelas, oblicuas o se intersecan.

■

$$\frac{x-2}{8} = \frac{y-3}{24} = \frac{z-2}{16}, \frac{x-10}{-2} = \frac{y+15}{-6} = \frac{z+24}{-4}$$

$$\vec{v}_1 = \langle 8, 24, 16 \rangle, \vec{v}_2 = \langle -2, -6, -4 \rangle$$

$$\text{Entonces...} , \left\langle \frac{8}{-2}, \frac{24}{-6}, \frac{16}{-4} \right\rangle$$

$$\langle -4, -4, -4 \rangle, \therefore \text{ Son paralelas}$$

El vector dirección está en el denominador.

■

$$L_1 : x = 3 - 4t, y = 6 - 2t, z = 2 + 0t, t \in IR$$

$$L_2 : x = 3 + 8s, y = -2s, z = 8 + 2s, s \in IR$$

Utilice una variable parámetro para cada recta

$$v_1 = \langle -4, -2, 0 \rangle, v_2 = \langle 8, -2, 2 \rangle \text{ No son paralelas}$$

Analice si las rectas se intersecan

$$x = x \rightarrow 5 - 4t = 3 + 8s$$

$$y = y \rightarrow 6 - 2t = -2s$$

$$z = z \rightarrow 2 = 8 + 2s \rightarrow s = -3$$

$$5 - 4 = -22 \rightarrow 4t = -27 \rightarrow -4t = -27 \rightarrow \frac{27}{4}$$

$$6 - 2t = 6 \rightarrow 2t = 0 \rightarrow t = 0$$

$\therefore$  Como no hay una  $t$  única (no es posible  $0 \neq \frac{27}{4}$ ), las dos rectas no se intersecan.

$L_1$  &  $L_2$  Son oblicuas

Eliminación Gaussiana

$$\begin{array}{l} 4t + 8s = 2 \\ 2t + 25 = 6 \\ 0t + 2s = -6 \end{array} = \left| \begin{array}{ccc} 4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -6 \end{array} \right| \begin{array}{l} 0, 0, \text{ número} \\ 0, 0, \text{ número} \\ 0, 0, \text{ número} \end{array} \implies \text{No hay solución}$$

### 3.3. La ecuación de un plano

Previamente en 12.1  $ax + by + cz = 0$ . Para encontrar la ec. de un plano se necesita:

Figura 3.2:

1. Un punto sobre el plano  $P$ :  $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP}$
2. Un vector normal u ortogonal al plano:  $\hat{n}_0 \langle a, b, c \rangle$

#### 3.3.1. Derivación de la e. plano

$P(x_0, y_0, z_0), Q(x_1, y_1, z_1)$  Son dos puntos sobre el plano

$$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OQ} = \langle x, y, z \rangle$$



El vector  $\vec{RP} = \vec{r} - \vec{r}_0$  está sobre el plano, por lo que tiene que ser ortogonal a  $\hat{n}$ .

$$\hat{n} \perp \vec{r} - \vec{r}_0 \rightarrow \underbrace{\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}_{\text{Ec. vectorial de un plano}}$$

Se puede reescribir como:

$$\underbrace{\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x + x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle + c(z - z_0)}_{\text{Ecuación escalar de un plano}} = 0$$

$$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_0$$

Para encontrar la ec. de un plano se necesita 3 puntos P,Q,R: **hay infinitas respuestas equivalentes**  
 $\hat{n} = \vec{r} \times \vec{r}$

$$\vec{r}_0 = \vec{OP}, \vec{OQ}, \vec{OR}$$

$$\hat{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR}$$

Tienen que empezar en el mismo punto

Hat infinitas respuestas:

$$\hat{n} = \vec{PR} \times \vec{PQ}$$

### 3.3.2. Ejercicio 1: pg45 Encuentre la ec. del plano que pasa por los 3 puntos dados.

1.  $P(3, -1, 3), Q(8, 2, 4), R(1, 2, 5)$

$$\text{Ecuación del plano : } \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\text{Ecuación de la recta : } \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

$$\vec{r}_0 = \langle 8, 2, 4 \rangle$$

Encuentre dos vectores que están sobre el plano y que comiencen en el mismo punto.

$$\vec{u} = \vec{PQ} = \langle 5, 3, 1 \rangle, \vec{v} = \vec{PR} = \langle -2, 3, 2 \rangle$$

ii  $\hat{n}$  es ortogonal a ambos vectores !!

$$\hat{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 12\hat{j} + 21\hat{k}$$

$$\text{Ec. Plano } \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\text{Ec. Vectorial } \langle 3, -12, 21 \rangle \cdot \langle x - 8, y - 2, z - 4 \rangle = 0$$

$$\text{Escalar } 3(x - 8) -$$

2.  $P(0,0,0), Q(1,0,2), \text{ y } R(0,2,3)$

$$\text{Vector posición: } \vec{r}_0 = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

$$\text{dos vectores sobre el plano: } \vec{PQ} = \langle 1, 0, 2 \rangle$$

$$\vec{PR} = \langle 0, 2, 3 \rangle$$

$$\text{Vector normal: } \hat{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \text{terminar} & & \end{vmatrix}$$

3. Ecuación del plano:

$$-4x - 3y + 2z = 0$$

### 3.4. Rectas paralelas $v_1$ y $v_2$ son paralelos

Dos planos  $\hat{n}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$  y  $\hat{n}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = 0$  son paralelos sí y sólo si  $\hat{n}_1$  y  $\hat{n}_2$  son paralelos. En caso que no sean paralelos, se puede encontrar el ángulos de intersección entre dos planos.

# Capítulo 4

Clase - 2020-01-30

## 4.1. Resolución de corto

- Determine el área del triángulo entre los puntos P(), Q(), R():

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \langle 4, 3, -2 \rangle$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{PR} = \langle 5, 5, 1 \rangle$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 13\hat{i} - 14\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\sqrt{}$$

## 4.2. Rectas y planos

- Ecs. Rectas:  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

$$\text{si } a \neq b \neq c \neq 0 \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

- Paramétricas:

$$x = x_0 + at$$

$$y = y_0 + bt$$

$$z = z_0 + ct$$

- Ecuación de plano:

$$\hat{n} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\hat{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

### 4.2.1. Ejercicios

1. Considere los planos  $x + y = 0$  &  $x + 2y + z = 1$ .

- a) Determine si los planos son paralelos o no lo son encuentre el ángulo entre ellos:

$$\hat{n}_1 = \langle 1, 1, 0 \rangle$$

$$\hat{n}_2 = \langle 1, 2, 1 \rangle$$

∴ Los dos planos no son paralelos

- El  $\hat{n}_1$  &  $\hat{n}_2$  no son necesariamente ortogonales.

$$\cos \theta = \frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{|\hat{n}_1| |\hat{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

2. Encuentre la ec. de la recta que interseca a ambos planos  $x + y = 0$  &  $x + 2y + z = 1$ :

$$r = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

Dos puntos sobre la recta

Como la recta esta en ambos planos, se debe resolver el sig. sistema de ecuaciones

$$x + y = 0 \implies x = -y$$

$$x + 2y + z = 1 \implies y = z - 1$$

z tiene cualquier valor, ahora encontrar escogiendo cualquier punto sobre la recta, en este caso 0

$$\text{Primer punto} \quad z = 0$$

$$y = 1$$

$$x = -1$$

$$\therefore \langle -1, 1, 0 \rangle$$

$$\text{Segundo punto} \quad z = 1$$

$$y = 0$$

$$x = 0$$

$$\therefore \langle 0, 0, 1 \rangle$$

3. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por P(-1,1,0) y  $\underbrace{Q(0,0,1)}_{r_0}$ :

$$\vec{r}_0 = \langle 0, 0, 1 \rangle \langle -1, 1, 0 \rangle$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{QP} \langle -1, 1, -1 \rangle$$

Ecuaciones paramétricas de la recta:

$$x = 0 - t \quad y = 0 + t \quad z = 1 - t$$

4. Solución alterna:

$$x = -y \quad y = 1 - z \quad \text{Más incógnitas que ecuaciones.}$$

$$x, y \text{ ó } z \text{ pueden tener cualquier valor} \quad z = t$$

$$x = -1 + t$$

$$y = 1 - t \quad \therefore v_2 = \langle 1, -1, 1 \rangle \quad \vec{r}_0 = \langle -1, 1, 0 \rangle$$

$$t = t$$

5. Solución geométrica:

- Encuentre un punto en ambos planos (0,0,1).
- La recta está en el plano I, entonces la recta es perpendicular al vector normal del plano I.
- Está en el plano z, entonces también es perpendicular al segundo vector normal.

- $\therefore$  la recta es perpendicular a ambos  $\hat{n}_1$  &  $\hat{n}_2$

$$\vec{v} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\text{Ecuación de la recta: } r = \langle 0, 0, 1 \rangle + t \langle 1, -1, 0 \rangle$$

6. Ejercicio 3: Encuentre el punto en el que la línea recta  $x = 1 + 2t$ ,  $y = 4t$ ,  $z = 5t$  interseca al plano.  $x - y + 2z = 17$ .

$$x = 1 + 2t$$

$$y = 4t$$

$$z = 5t$$

Plano

$$x - y + 2z = 17 \quad 1 + 2t - 4t + 10t = 17$$

$$8t = 16 \implies \therefore t = 2$$

El punto de intersección es (5,8,10).

7. Ejercicio 4: Encuentre una ec. del plano que contiene la recta  $x = 1 + t$ ,  $y = 2 - t$ ,  $z = 4 - 3t$  y es paralela a plano  $5x + 2y + z = 1$ .

- Cualquier punto sobre la recta que también esté sobre el plano,  $t = 0$ .

$$\text{Evaluemos en } t=0 \quad x = 1, y = 2, z = 4$$

$$\vec{r}_0 = \langle 1, 2, 4 \rangle$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cómo se encuentra  $\hat{n}$ ?
- El vector de dirección de la recta  $v = \langle 1, -1, -2 \rangle$  es paralelo al plano.
- Como es paralelo al segundo plano, entonces tiene que ser perpendicular  $\hat{n}_2 = \langle 5, 2, 1 \rangle$
- Lo que ocurre entonces es:

$$\vec{r}_0 = \langle 1, 2, 4 \rangle \quad \hat{n} = \langle 5, 2, 1 \rangle$$

$$\text{Ec. Plano: } \implies 5(x - 1) + 2(y - 2) + 1(z - 4) = 0$$

8. Ejercicio 5: Encuentre los números directores para la recta de intersección entre los planos  $x + y + z = 1$  &  $x + 2y + 3z = 1$ .

- **Definición de “números directores”:**  $a, b, c$  del vector de dirección  $\langle a, b, c \rangle$
- La recta es ortogonal a ambos vectores normales:

$$\hat{n}_1 = \langle 1, 1, 1 \rangle \quad \text{y} \quad \hat{n}_2 = \langle 1, 2, 3 \rangle \quad \text{de ambos planos}$$

$$\vec{v} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\text{Los números directores: } a = 1, b = 2, c = 1$$

9. Ejercicio 6: Encuentre las ecs. aparamétricas de la recta que pasa por el punto  $(0,1,2)$ , que es paralelo al plano  $x + y + z = 2$  y es perpendicular a la recta  $r = \langle -2t, 0, 3t \rangle$ .

$$L_1 r = \vec{r}_0 + t\vec{v} \quad r_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle$$

- Aclaraciones:  $L_1$  es la incógnita que tenemos que encontrar.
- **Nos preguntamos:** ¿Cómo se encuentra  $r$ ?
- Plano I:  $\hat{n} = \langle 1, 1, 1 \rangle$  es perpendicular al plano, es paralelo a  $L_1$ .
- Recta II:  $\hat{v}_2 = \langle -2, 0, 3 \rangle$  es perpendicular a  $L_1$
- La recta es perpendicular a  $\hat{n}$  y a  $\vec{v}_2$

$$v = \hat{n} \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$r_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle$$

$$v = \hat{v}_2 \times \hat{n} \quad \text{Ecuaciones paramétricas:}$$

$$x = 0 - 3t$$

$$y = 1 - 5t$$

$$z = 2 + 2t$$





# Capítulo 5

Clase - 2020-02-04

## 5.1. 13.1 Funciones vectoriales y curvas en el espacio

- Una función vectorial  $\vec{r}: R \Rightarrow V_3$ :

$$\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), z(t) \rangle$$

La variable  $t$  es un parámetro.

- Dominio: Números reales, Rango: vector 3D:

$$\begin{aligned} \vec{r}: \mathbb{R} &\Rightarrow V_3 \quad \vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle \\ t \text{ es un parámetro} \quad \vec{r} &= f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k} \end{aligned}$$

- Ejemplo de una función vectorial:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \langle a, b, c \rangle + t \langle d, e, f \rangle \\ \vec{r} &= \langle a + td, b + et, c + tf \rangle \\ x &= f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \end{aligned}$$

- Ecs. Paramétricas de una función vectorial:

- Dominio de una función vectorial: encuentre el dominio de cada función componente. El dominio de  $\vec{r}$  es la intersección de los dominios de cada función componente.

### 5.1.1. Ejercicios

1. Encuentre el dominio:

$$\begin{aligned} r(t) &= \left\langle \sqrt{t^2 - 9}, e^{5 \ln(t)}, \ln(t + 5) \right\rangle \\ &\text{Evadir raíces negativas, y } \ln(0) \\ \sqrt{t^2 - 9} &\implies \text{Definida } t^2 \geq 9 \\ e^{\sin(t)} &\text{siempre definida} \\ \ln(t + 5) &\text{Definida cuando } t + 5 > 0 \quad (-5, \infty) \\ \therefore \text{El dominio es de } &(-5, \infty) \cup (-5, -3) \cup (-3, 3) \cup [3, \infty) \end{aligned}$$

Recordar:  $[a, b]$  el número si es parte del dominio  $a, b$  son partes del dominio.  $(a, b)$  los puntos  $a, b$  no son parte del dominio.

- 2.

$$\begin{aligned} \vec{s}(t) &= \left\langle \sin^3(t^2), \cosh\left(\frac{t}{t^2 + 1}\right), \frac{1}{e^t + 4} \right\rangle \\ \sin^3(t^2), ID_{f(t)} &= IR \\ \cosh\left(\frac{t}{t^2 + 1}\right), ID_{g(t)} &= IR \\ \frac{1}{e^t + 4}, ID_{h(t)} &= IR \\ \therefore \text{Dominio de } \vec{s}(t) &= (-\infty, \infty) \\ e^t + 4 \neq 0 &\implies e^t = -4 \implies t = \underbrace{\ln(-4)}_{\text{indefinido}} \end{aligned}$$

## 5.2. Límites y continuidad

■

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \left\langle \lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \right\rangle$$

- Evalúe el límite de cada función componente.
- Si no existe por lo menos un límite de una función componente, entonces  $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t)$  no existe.
- $f(t)$  está definida en  $t=a$

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$$

- Si se indefine y tiene forma de  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$  usar L'Hôpital.

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} \underbrace{=}_{\frac{0}{0}} \lim_{t \rightarrow a} \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad \text{L'Hopital}$$

- Continúa en  $t = a$  si  $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$
- Evite asíntotas verticales, saltos y agujeros. Ejemplo:

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{\sin(x)}{x} \underbrace{=}_{\text{LH}} \lim_{t \rightarrow a} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

### 5.2.1. Ejercicios

- Sea  $\vec{r}(t) = \left\langle \frac{\tan(\pi t)}{t}, e^{t-2}, \frac{\ln(t-1)}{t^2-1} \right\rangle$ .
- Analice si la función  $\vec{r}(t)$  es continua en  $t = 2$ .

$$\vec{r}(t) = \left\langle \frac{\tan 2\pi}{2}, e^0, \frac{\ln(1)}{3} \right\rangle$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} \underbrace{\frac{\tan \pi t}{t}}_{\frac{0}{2}} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} e^{t-2} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{\ln(t-1)}{t^2-1} = 0$$

$$\therefore \vec{r} \text{ si es continua en } t=2 \quad \lim_{t \rightarrow 1} \vec{r}(t) = \vec{r}(2)$$

- Encuentre  $\lim_{t \rightarrow 1} \vec{r}(t)$  analice el límite de cada función componente por separado.

$$f : \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\tan 2\pi}{2} = \frac{0}{1}$$

$$g : \lim_{t \rightarrow 1} e^{t-2} = e^{-1}$$

$$h : \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(t-1)}{t^2-1} = \text{No existe, por } \ln(0) \text{ estar indefinido.}$$

- Analice si  $\vec{r}(t)$  es continua e  $t=1$ .

$$\lim_{t \rightarrow 1} \vec{r}(t) = \vec{r}(1)$$

No es continua en  $t=1$ ,  $r(1)$  está indefinida.

- Agujero  $\vec{s}(t) = \left\langle \frac{\tan \pi t}{t-1}, e^{t-2}, \frac{\ln(2t-1)}{t^2-1} \right\rangle$   
No es continua en  $t=1$ , pero su límite existe.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\tan \pi t}{t-1} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\pi \sec^2 \pi t}{1} = \frac{\pi}{(\cos \pi)^2} = \pi \\ \lim_{t \rightarrow 1} e^{t-2} &= e^{-1} = \frac{1}{e} \\ \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(2t-1)}{t^2-1} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{2t-1}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2}{2t(2t-1)} = \frac{1}{1(2-1)} = 1 \\ \therefore \lim_{t \rightarrow 1} \left\langle \pi, \frac{1}{e}, 1 \right\rangle &\text{ es un agujero } \vec{s}(1) \text{ está indefinido} \end{aligned}$$

### 5.3. Curvas en el espacio

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \\ z &= h(t) \end{aligned}$$

Figura 5.1: Curvas paramétricas en el espacio

#### 5.3.1. Espirales

- Grafique la curva  $\vec{r}(t)$ :

$$\vec{r}(t) = \underbrace{2\hat{i} \sin(t)}_x + \underbrace{2\hat{j} \cos(t)}_y + \underbrace{\hat{k} \frac{t}{\pi}}_z$$

$t$	$x$	$y$	$z$
0	0	2	0,5
$\frac{\pi}{2}$	2	0	0,5
$\pi$	0	-2	1
$\frac{3\pi}{2}$	2	0	1,5
$2\pi$	0	2	2

Figura 5.2: Curva paramétrica

- Grafique:

$$\vec{r}(t) = \langle \sin \pi t, t, \cos \pi t \rangle$$

Graficar la circunferencia  $x^2 + z^2 = 1, y = 0$

$\vec{r}(0) = \langle 0, 0, 1 \rangle$  El vector que nos servirá para delimitar la gráfica del espiral

Por ejemplo:  $\vec{s}(t) = \langle \sin t, t^2, \cos t \rangle$

# Capítulo 6

Clase - 2020-02-06

## 6.1. 13.2 Cálculo con funciones vectoriales, pg.55

- Derivadas:

$$\vec{r}'(t) \quad \text{Respecto a } t$$

- Integrales:

$$\int \vec{r}'(t) dt \quad \text{Respecto a } t$$

### 6.1.1. Derivadas

■

$$\vec{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$$

- Como la función  $\vec{r}(t)$  está definida por tres funciones componentes se puede hacer:

$$\vec{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\langle \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}_{f'(t)}, \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}}_{g'(t)}, \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(t+h) - h(t)}{h}}_{h'(t)} \right\rangle$$

- Derivada entonces es :

$$\vec{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

### 6.1.2. Integrales

- Integral:

$$\int \vec{r}(t) dt = \int (f\hat{i} + g\hat{j} + h\hat{k}) dt$$

$$\hat{i} \int f dt + \hat{j} \int g dt + \hat{k} \int h dt$$

Integrar la función componente.

## 6.2. Ejercicios

- Encuentre la 1era y segunda derivada de las siguientes funciones:

$$\vec{r}(t) = \langle \sin(4t), t^2, \ln(\sin(t)) \rangle$$

$$\vec{r}'(t) = \left\langle 4 \cos(4t), 2t, \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \right\rangle$$

$$\vec{r}'(t) = \langle 4 \cos(4t), 2t, \cot(t) \rangle$$

$$\vec{r}''(t) = \langle f''(t), g''(t), h''(t) \rangle$$

$$\therefore \vec{r}''(t) = \langle -16 \sin(4t), 2, -\csc^2(t) \rangle$$

2. Derive:  $\vec{s}(t) = \hat{i} \tan(4t) + \hat{j} \ln(4t + 1) + \hat{k}(5 - 2t)^{\frac{1}{2}}$

$$\vec{s}'(t) = 4\hat{i}(\sec(4t))^2 + \hat{j}4(4t + 1)^{-1} - \hat{k}(5 - 2t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\vec{s}''(t) = 8\hat{i} \times \sec(4t) \times \sec(4t) \times \tan(4t) \times 4 - 16\hat{j}(4t - 1)^{-2} - \frac{\hat{k}}{2}(5 - 2t)^{-\frac{3}{2}} \times (-2)$$

$$\vec{s}''(t) = 32\hat{i} \times \sec^2(4t) \times \tan(4t) - 16\hat{j}(4t - 1)^{-2} - \frac{\hat{k}}{2}(5 - 2t)^{-\frac{3}{2}} \times (-2)$$

## 6.3. Recordatorios & rectas tangentes de funciones vectoriales

■ **Recordar lo siguiente:**  $f'(a)$  es igual a la pendiente de la recta tangente a  $f(x)$  en  $x = a$ .

■ **Recordar lo siguiente:** La recta tangente.

$$L_1 : y = f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{Ec. Recta Tangente}$$

■ Con una función vectorial:

$$\vec{r} = \langle f, g, h \rangle, \quad x = f(t), y = g(t), z = h(t)$$

Hay ecuaciones paramétricas para cada variable:

$$\vec{r}'(a) = \langle f'(a), g'(a), h'(a) \rangle$$

Vector de pendientes de rectas tangentes a la curva  $\vec{r}(t)$ .

■ La derivada de una función vectorial se le da el nombre de “**vector tangente**”  $\vec{r}'(t) : \vec{r}'(a)$ .

■ Recta tangente: es ahora una función vectorial.

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(a) + \vec{r}'(a)t$$

■ Ecs. Paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= f(a) + f'(a)t \\ y &= g(a) + g'(a)t \\ z &= h(a) + h'(a)t \end{aligned}$$

■ Vector tangente:  $\vec{r}'(a)$  en  $t = a$

■ Vector tangente unitario:  $\frac{\vec{r}'(a)}{|\vec{r}'(a)|} = \vec{T}(a)$

## 6.4. Ejercicios

- Encuentre las ecs. paramétricas de la recta tangente a la curva :  $s(t) = \langle 2 \cos(t), 2 \sin(t), 4 \cos(2t) \rangle$  en el punto  $(\sqrt{3}, 1, 2)$ :

$$\text{Recta tangente: } \vec{r}_T(t) = \vec{r}(a) + t\vec{r}'(a)$$

$$\vec{r}_T(a) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle$$

$$\text{Derivada: } \vec{r}'(t) = \langle -2 \sin(t), 2 \cos(t), -8 \sin(2t) \rangle$$

$$\text{Nos preguntamos: ¿Cómo encuentro "a" ? igualamos } r(t) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle$$

$$2 \cos(t) = \sqrt{3} \implies \cos(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies t = \frac{\pi}{6}$$

$$2 \sin(t) = 1 \implies 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$4 \cos(2t) = 2 \implies 4 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\text{Vector tangente: } \vec{r}'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left\langle -2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right), 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right), -8 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right\rangle$$

$$\vec{r}_T(t) = \langle \sqrt{3}, 1, 2 \rangle + t \langle -1, \sqrt{3}, -4\sqrt{3} \rangle$$

∴

$$x = \sqrt{3} - t$$

$$y = 1 + \sqrt{3}t$$

$$z = 2 - 4\sqrt{3}t$$