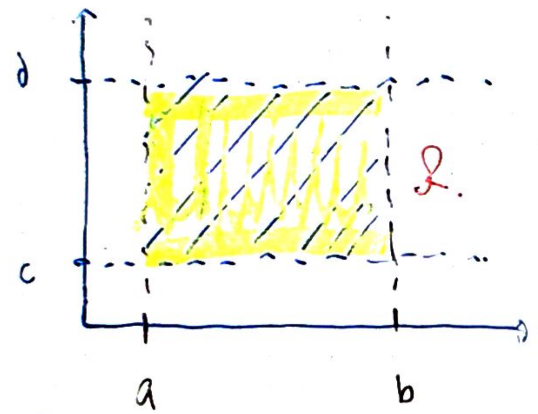
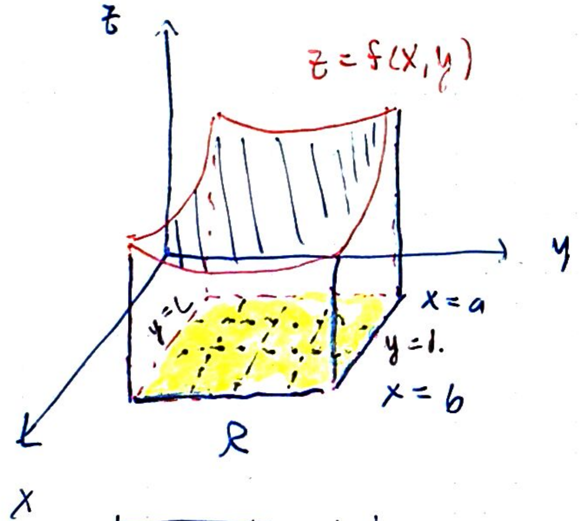
15.1 Integrales Dobles.

Dominio de una función $z = f(x,y)$ es una región R.

Rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$
$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d \}$.
tal que



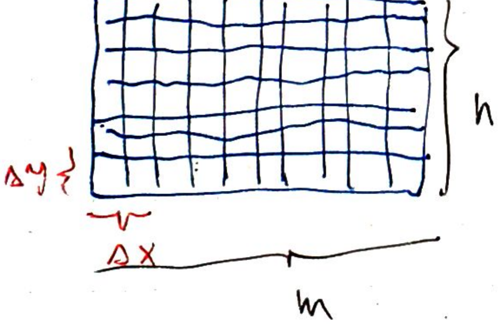
La gráfica de una función de dos variables es una superficie.



Sólido S:
$a \leq x \leq b.,\ c \leq y \leq d,\ 0 \leq z \leq f(x,y)$

¿Como se encuentra el volumen del sólido S?

Dividа el rectángulo R en mn subrectángulos.



Ancho. $\Delta x = \dfrac{b-a}{m}$

Largo. $\Delta y = \dfrac{d-c}{n}$.

Dentro de cada subrectángulo se selecciona un punto muestra como la altura de cada "pequeño" cubo. $f(x_i, x_j)$

Volumen Caja (cada) $V_{ij} = f(x_i, x_j)\,\Delta x\,\Delta y.$

Volumen aproximada: sume el volumen de las mn cajas.

$$V \approx \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(x_i, x_j)\,\underbrace{\Delta x\,\Delta y}. \qquad \Delta A = \Delta x \Delta y.$$

Se obtiene el volumen exacto en el límite cuando $m, n \to \infty$.

Integral Doble: de f sobre el rectángulo R es.

$$\iint_R f(x,y)\,dA. = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(x_i, x_j)\,\Delta x\,\Delta y.$$

Las integrales son las antiderivadas de $f(x,y)$ respecto a x y respecto a y.

15.2 Integrales Iteradas.

integre $A(x) = \int_c^d f(x, \underline{\underline{y}})\,d\underline{\underline{y}}.$ se fija x y se integra sólo respecto a y.

Ahora integre $A(x)$ en $a \leq x \leq b$.

$$\int_a^{b} \underbrace{A(x)}\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

se fija y & se integra respecto a x.

Teorema de Fubini: Integrales Dobles como Integrales Iteradas.

Si $f(x,y)$ es continua en un rectángulo $R=[a,b]\times[c,d]$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy.$$

Pueden integrar intercambiando los órdenes y se obtiene la misma respuesta si R es un rectángulo.

Ejercicio 1: Evalúe las sigs. integrales dobles.

0. $$\int_0^4 \int_0^6 x\,y\,dx\,dy. = \int_0^4 \frac{x^2}{2}y\Big]_{x=0}^{x=6} dy.$$

y "constante.

$$I_0 = \int_0^4 (18y - 0)\,dy = 9y^2\Big]_{y=0}^{y=4} = 9\cdot 16 = 144.$$

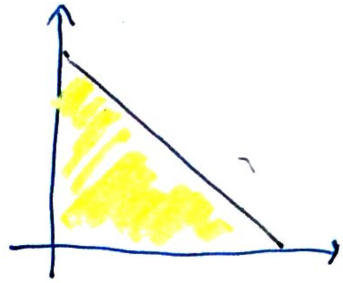
Intercambia el orden de integración.

$$\int_0^6 \left(\int_0^4 x\,y\,dy\right) dx = \int_0^6 \left(\frac{xy^2}{2}\Big]_{y=0}^{y=4}\right) dx = \int_0^6 8x\,dx.$$

afuera, el último en integrarse

$$I_0 = 4x^2\Big]_{x=0}^{x=6} = 4\cdot 36 = 144.$$ misma respuesta.

a. $I_a = \int_0^1 \int_1^2 (4x^3 - 9x^2 y^2)\, dy\, dx$



$$I_a = \int_0^1 \left(4x^3 y - 3x^2 y^3 \Big]_{y=1}^{y=2} \right) dx.$$

$$I_a = \int_0^1 \left(8x^3 - 24x^2 - 4x^3 + 3x^2 \right) dx.$$

$$I_a = \int_0^1 (4x^3 - 21x^2)\, dx = x^4 - 7x^3 \Big]_{x=0}^{x=1} = 1 - 7 = -6.$$

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dx\, dy$$

No hay integrales dobles indefinidas.

b. $I_b = \iint_R \sin(x-y)\, dA.$ $\quad R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$

conjunto ; rectángulo

$$I_b = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \sin(x-y)\, dy \right) dx$$

$\sin(x-y) \Rightarrow + \cos(x-y)$

Antiderivada respecto a y

$$I_b = \int_0^{\pi/2} \cos(x-y) \Big]_{y=0}^{y=\pi/2} dx$$

$$I_b = \int_0^{\pi/2} \cos(x-\pi/2) - \cos(x)\, dx.$$

$$I_b = \sin(x-\pi/2) + \sin(x) \Big]_{x=0}^{x=\pi/2}$$

$$I_b = \underbrace{\sin(0)}_{0} + \underbrace{\sin(\pi/2)}_{1} - (\underbrace{\sin(-\pi/2)}_{-1} + \sin 0)$$

$$I_b = 0 - 1 + 1 - 0 = 0.$$

$(B \ln x)$