12.4 Producto Cruz.

Determinantes Matriz (Arreglo rectangular de números)
Cuadrada (mismo # de filas y columnas)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

det orden 2. matriz 2×2

p.e. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-1)(4) = 6+4 = 10$

Determinante de orden 3: Matriz 3×3
suma de tres determinantes de orden 2.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

3×3 3 matrices 2×2.

p.e $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= 2(6-0) - 0 + 2(-1-3)$

$= 12 - 8 = 4.$

El Producto Cruz.

Dados dos vectores $\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$ &

$\vec{b} = b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}$

¿Cómo se encuentra un vector $\vec{c}$ que es perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$.?

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \qquad \vec{c} \cdot \vec{b} = 0.$$

Resuelva para c_1, c_2, c_3

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0$$
$$c_1 \underline{b_1} + c_2 \underline{b_2} + c_3 \underline{b_3} = 0$$

El producto cruz $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ es un vector perpendicular a ambos vectores $\vec{a}$ & $\vec{b}$.

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}} = \hat{i}\overbrace{(a_2 b_3 - a_3 b_2)}^{c_1} - \hat{j}\underbrace{(a_1 b_3 - a_3 b_1)}_{c_2} + \hat{k}\underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}_{c_3}$$

Observaciones:

- El producto cruz es un vector, mientras que el producto es un número o escalar.
- El producto cruz no es conmutativo $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(b_2 a_3 - a_2 b_3) + \hat{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \hat{k}(a_2 b_1 - a_1 b_2)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 15\hat{i} - 10\hat{j} - 3\hat{k}$$

II. verifique $\vec{a} \times \vec{b}$ es ortogonal a $\vec{a}$ & a $\vec{b}$.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \langle 15, -10, -3\rangle \cdot \langle 2, 3, 0\rangle = 30 - 30 + 0 = 0.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \langle 15, -10, -3\rangle \cdot \langle 1, 0, 5\rangle = 15 + 0 - 15 = 0.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp a, b.$$

Aclaración: 2-D $\quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ $\quad 3 \times 2.$ no es posible evaluarlo, porque la matriz no es cuadrada

Existe en 3-D.

4-D $\quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \vec{\ell} \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ ¡NO ES POSIBLE evaluarlo.

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -15\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}$$

En general $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}).$

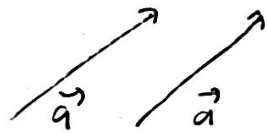
Ejercicio 1: Encuentre el producto cruz entre

$\vec a = \langle 1,1,-1\rangle$ & $\vec b = \langle 2,-2,3\rangle$.

$$\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \hat i & \hat j & \hat k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \hat i(3-2) - \hat j \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \hat k(-2-2)$$

$$= \boxed{\hat i - 5\hat j - 4\hat k}$$

$$\boxed{\vec b \times \vec a = -\hat i + 5\hat j + 4\hat k}$$



Ejercicio 2: Encuentre $\vec a \times \vec a$.

$\vec a$ es paralelo a sí mismo $\quad \vec a \times k\vec a$.

$$\vec a \times \vec a = \begin{vmatrix} \hat i & \hat j & \hat k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat i(\overbrace{a_1a_2 - a_1a_2}^{0}) - \hat j(0) + \hat k(0).$$

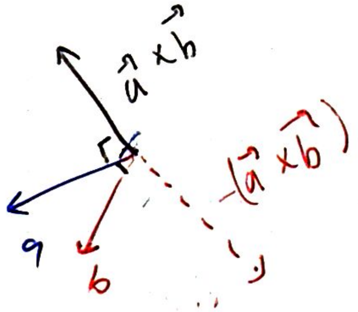
$$\boxed{\vec a \times \vec a = \vec 0} \qquad \vec a \cdot \vec a = |\vec a|^2$$

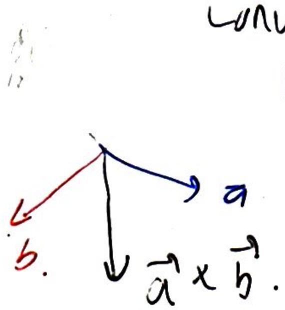
Dos vectores en V_3 (conjunto de vectores 3-D) son paralelos si y sólo si $\vec a \times k\vec a = \vec 0$

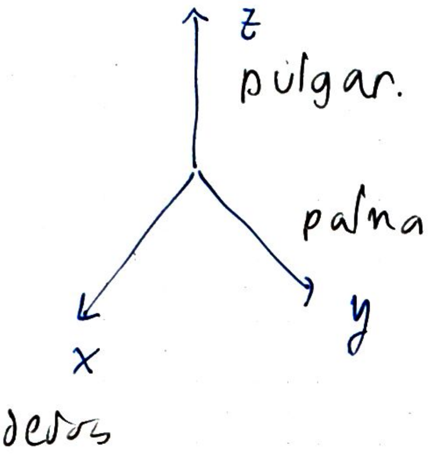
vector cero.

Interpretación Geométrica.

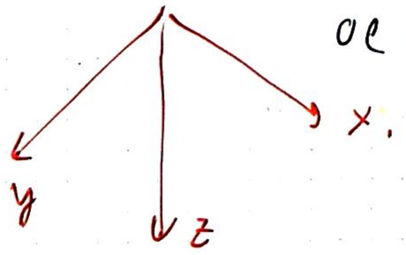
Convención Mano Derecha.







vector ortogonal a ambos que apunta siguiendo la convención de la mano derecha



Propiedad: Dadas $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ y el ángulo entre estos dos vectores θ.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta. \checkmark$$

En el producto punto $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.$

Para encontrar el ángulo entre dos vectores, es recomendable utilizar el producto punto.

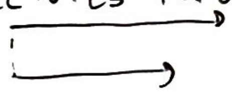
si $\sin\theta = 0$ $\quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0.$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$

$\sin\theta = 0$

$\theta = 0.$

vectores paralelos.



$\theta = 0.$

Dos vectores 3-D son paralelos, $a \parallel b$, si y sólo si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ vector cero.

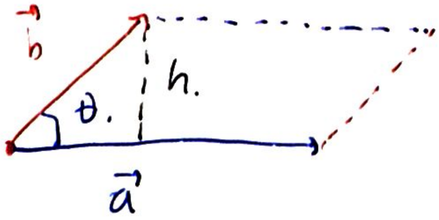
Recomendable. inspeccione si $\vec{b} = K\vec{a}$ no importa la dimensión del vector.

Propiedades $\vec{a} \times \vec{b} = - \vec{b} \times \vec{a}$

$$|a \times b| = |a|\,|b| \sin\theta.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \iff a \parallel b$$

Se puede utilizar para áreas de "rectángulos inclinados" y cubos "inclinados."



Paralelogramo.

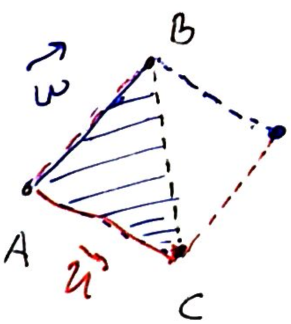
$$\text{A'rea} = b\,h.$$

$$\text{base} = |\vec{a}|.$$

$$\text{altura } h = |\vec{b}| \sin\theta$$

A'rea del Paralelogramo: $A = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta. = \boxed{|\vec{a} \times \vec{b}|}$

Ejercicio 3: ¿Cuál es el área del triángulo con vértices en $A(1,0,1)$ $B(-2,1,3)$ y $C(1,2,1)$?



A'rea del triángulo es la mitad del área del paralelogramo

$$A_T = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{w}|$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} = \langle 0, 2, 0 \rangle.$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \langle -3, 1, 2 \rangle.$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(4) - \hat{\jmath}\,0 + \hat{k}(6) = 4\hat{\imath} + 6\hat{k}$$

Producto Triple Escalar.

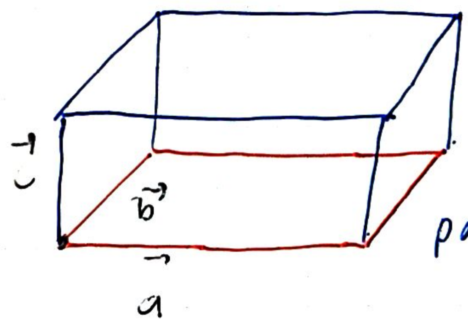
Combina el producto punto y el producto cruz.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\langle a_1 \; a_2 \; a_3 \rangle$.

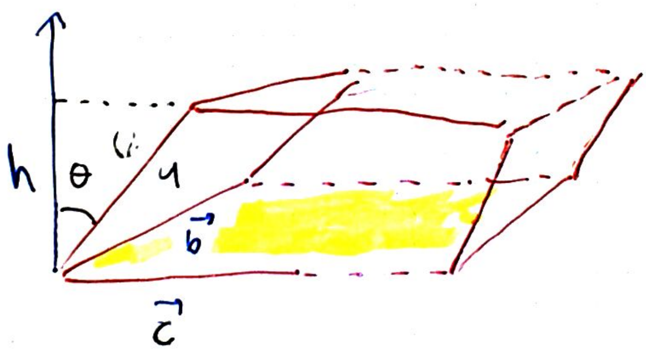
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Volumen de un cubo inclinado Paralelelípedo.



paralelepípedo.

$$V = |a \cdot (b \times c)|$$



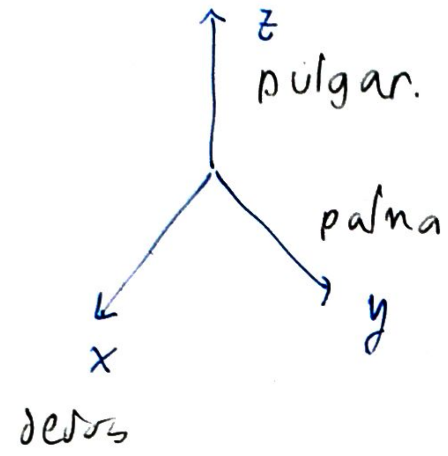
Volumen = Área de la Base × altura.

Área base $= |\vec{b} \times \vec{c}|$

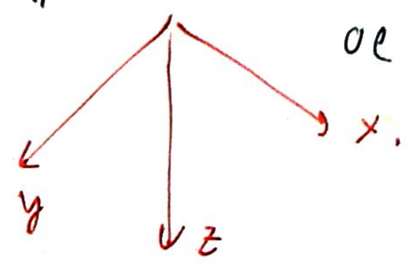
Altura. $h = |a| \cos\theta$.

Volumen $V = Ah. = |a| \, |\vec{b} \times \vec{c}| \cos\theta$.

$V = a \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$



: vector ortogonal a ambos que apunta siguiendo la convención de la mano derecha



Propiedad: Dadas $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ y el ángulo entre estos dos vectores θ.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta. \checkmark$$

En el producto punto $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$.

Para encontrar el ángulo entre dos vectores, es recomendable utilizar el producto punto.

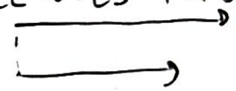
si $\sin\theta = 0$ $\quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0$.

$|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$

$\sin\theta = 0$

$\theta = 0$.

vectores paralelos.



$\theta = 0$.

Dos vectores 3-D son paralelos, $a \parallel b$, si y sólo si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ vector cero.

Recomendable. inspeccione si $\vec{b} = k\vec{a}$ no importa la dimensión del vector.