Cálculo Multivariable - Rocket Book Compiliation

Christiaan Ketelaar
Organizado por : David Corzo

2020-01-06

Índice general

Capítulo 1

RB_2020-01-07_18_49_53

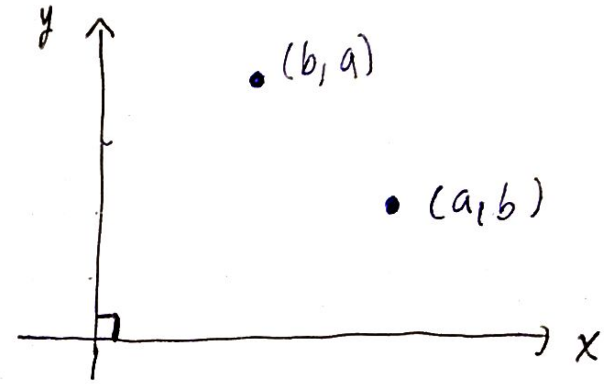
12.1 Sistemas Tridimensionales de Coordenadas.

Para localizar un punto en un plano, se necesitan 2 números.

a la coordenada x

b la coordenada y.

Plano $\mathbb{R}^2$



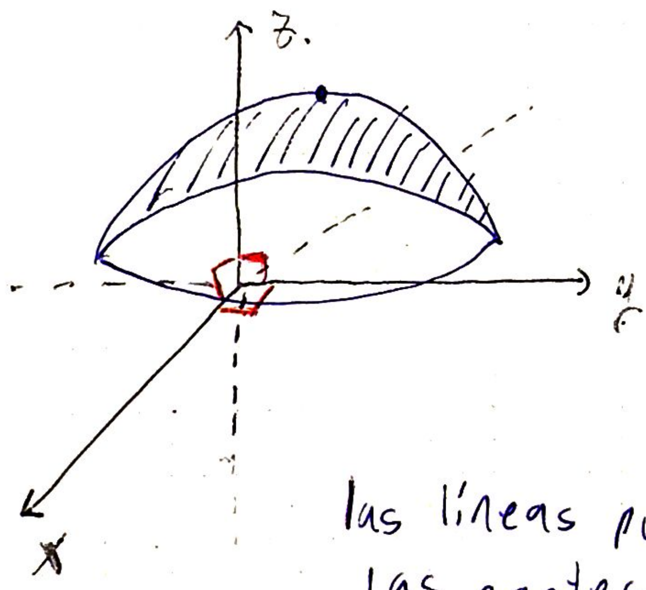
Los ejes de coordenadas son perpendiculares entre sí.

El sistema tridimensional de coordenadas rectangulares

cada punto en el espacio es una terna ordenada (x, y, z)

Espacio $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)$ talque $x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.



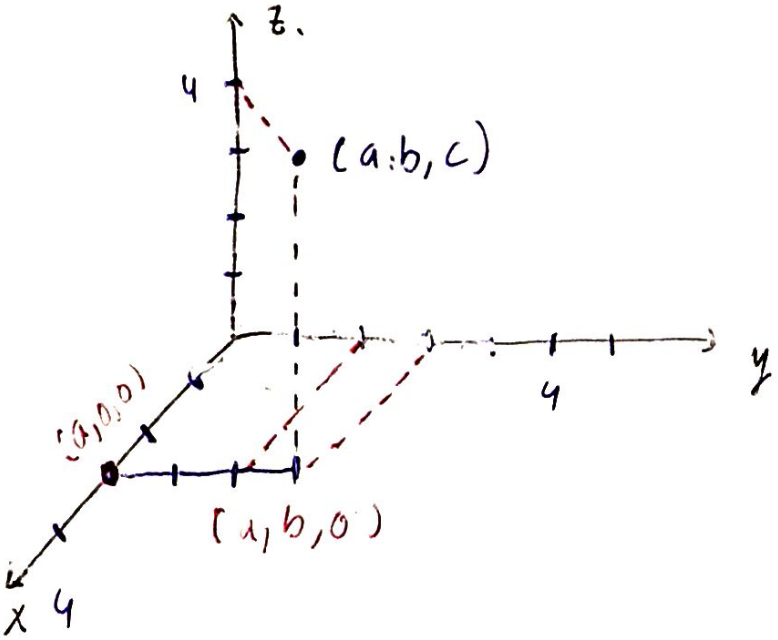
x transversal

y horizontal

z vertical.

$z = f(x, y)$

las líneas punteadas se para simbolizar las partes de abajo, izquierda y detrás.

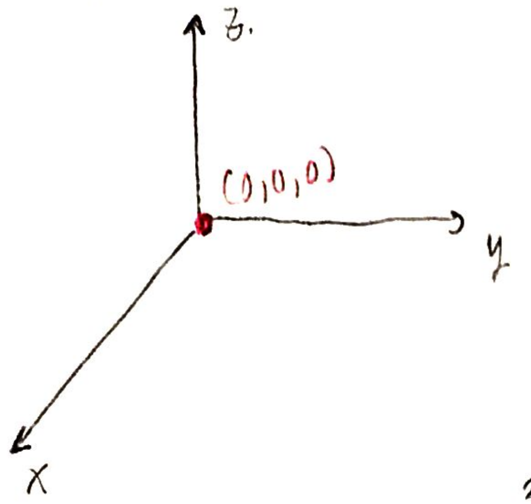


(a,b,c)

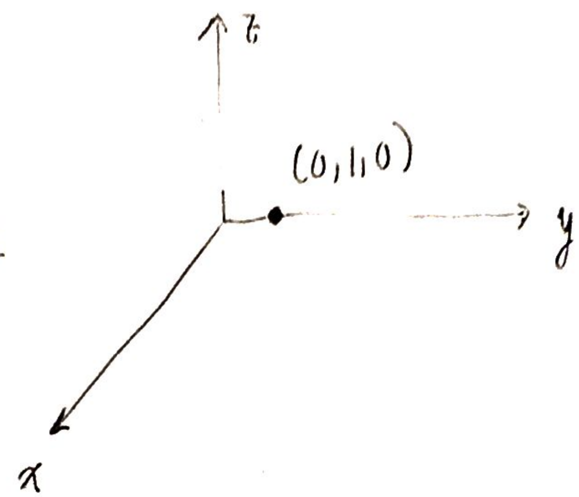
(3,3,4)

Ejercicio 1: Identifique los sigs. puntos.

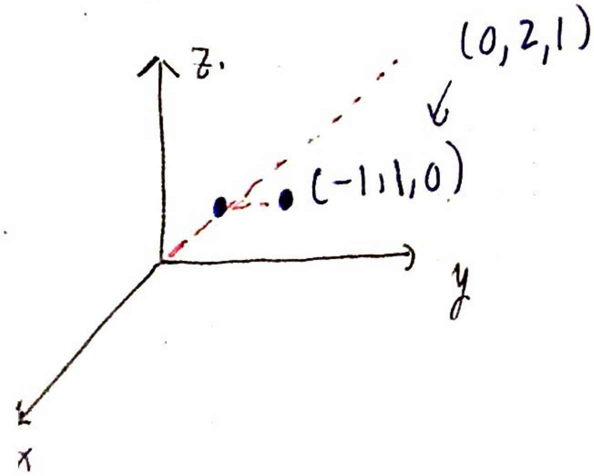
a. (0,0,0)



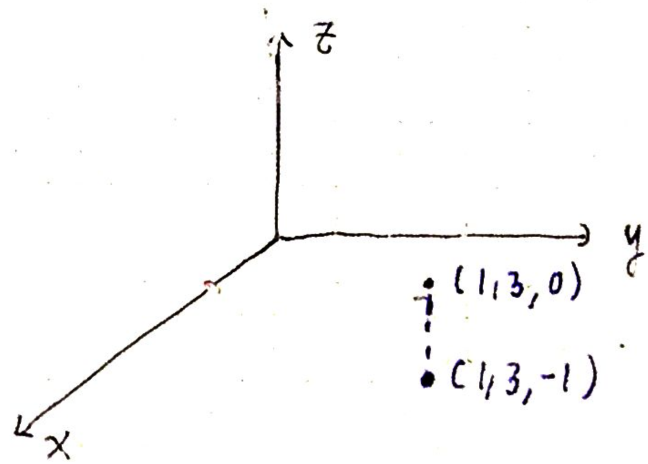
b. (0,1,0)



b. (-1,1,0)

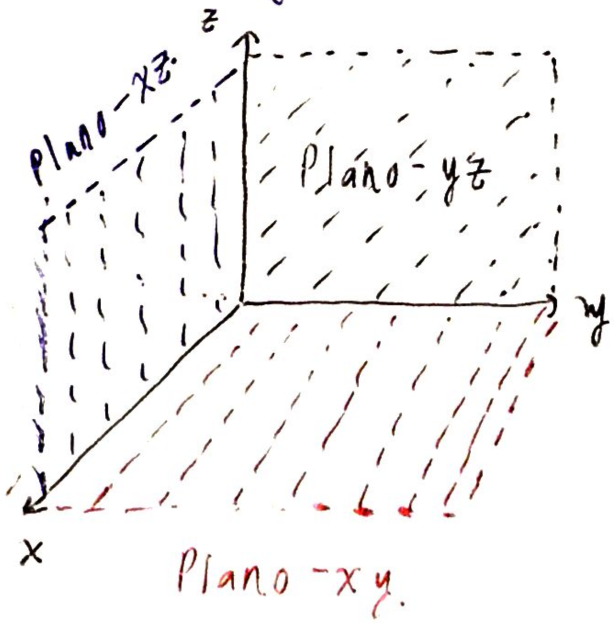


c. (1,3,-1)



Planos coordenados.

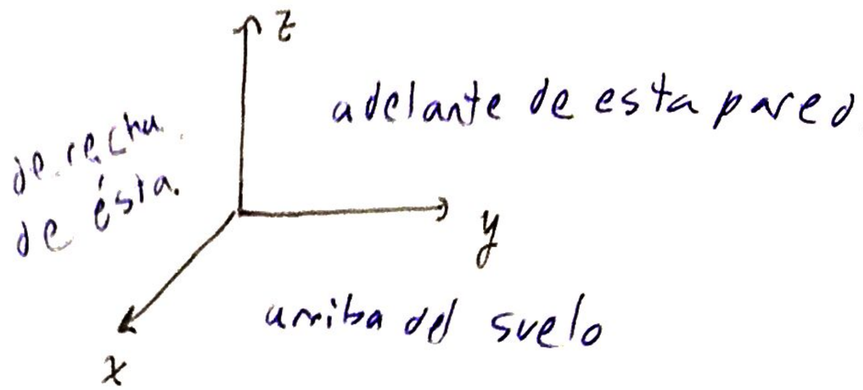
Plano-xy: $z = 0$. (el suelo) Plano-yz $x = 0$ (pared de atrás)



Plano-xz $y = 0$. (pared izquierda)

1er octante.

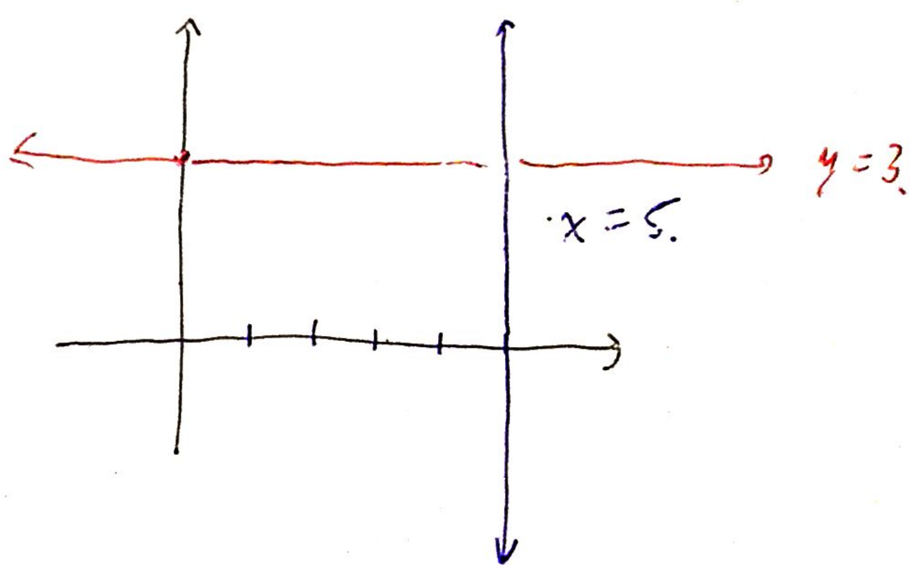
$x > 0,\ y > 0,\ z > 0$



Planos en el espacio.

En 2-D.

$x = 5$ ó $y = 3$.

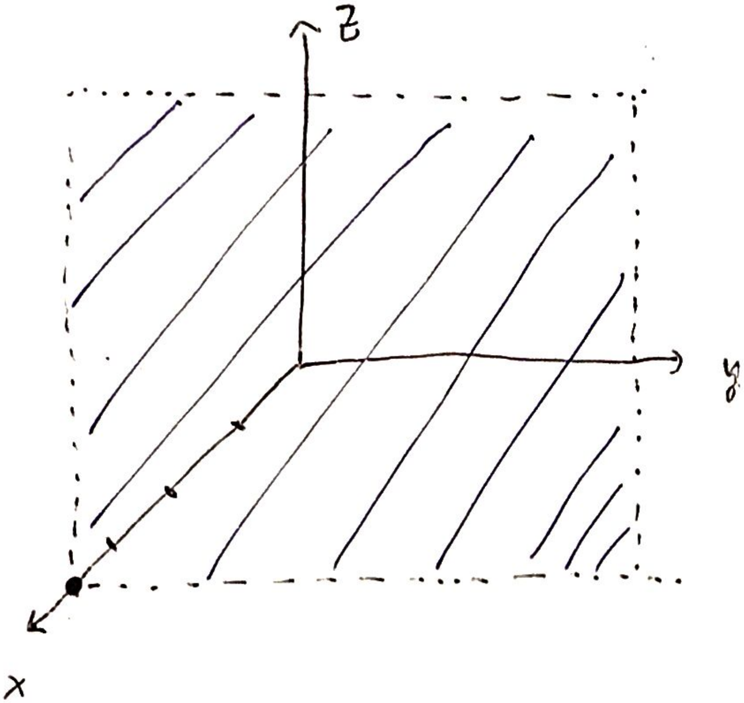


$x = a$
Rectas Verticales.

$y = 6$.
Rectas Horizontales.

En 3-D $x=a$, $y=b$, $z=c$ son gráficas de planos.

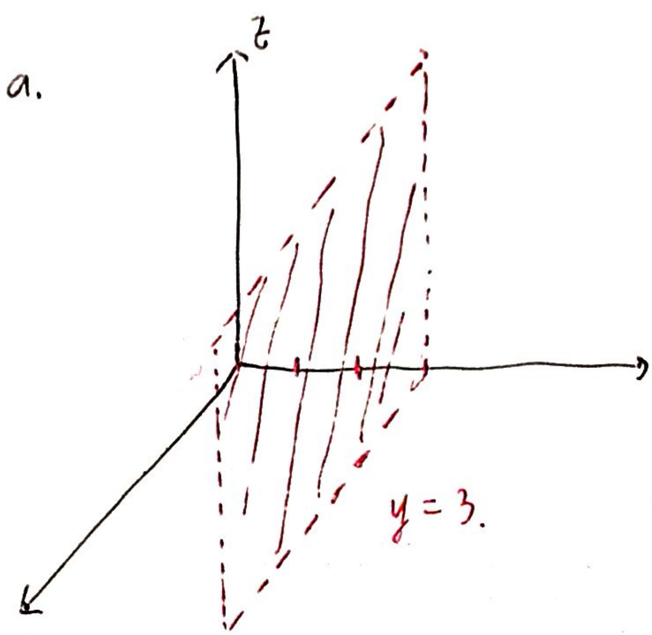
$x = 4$



$x = -2.$

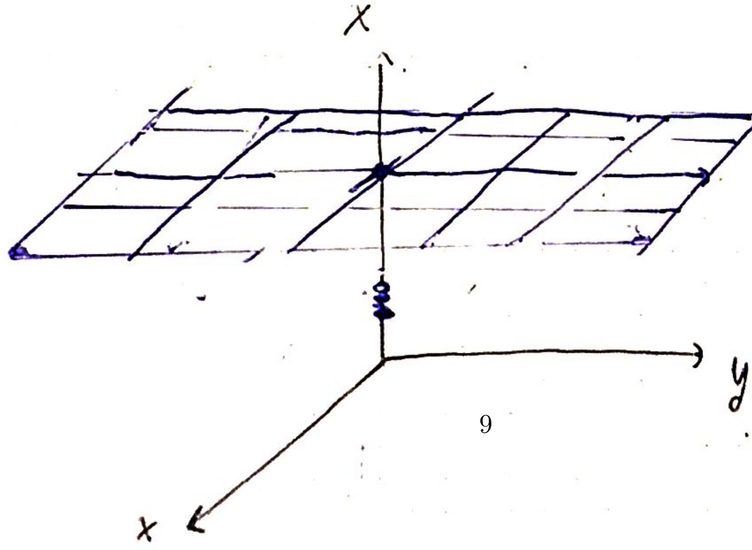
pared frontal.

$y = 3.$ pared derecha.



$z = 2.$

(techo)



Ec. lineal en 3-D va a graficar un plano.

Ec. Plano. $ax + by + cz = d.$

Generalmente se grafican sólo en el primer octante si cada a, b, c y d es positiva.

Intersección x : $y=0,\ z=0$ $(a,0,0)$

Intersección y : $x=0,\ z=0$ $(0,b,0)$

Intersección z : $x=0,\ y=0$ $(0,0,c)$

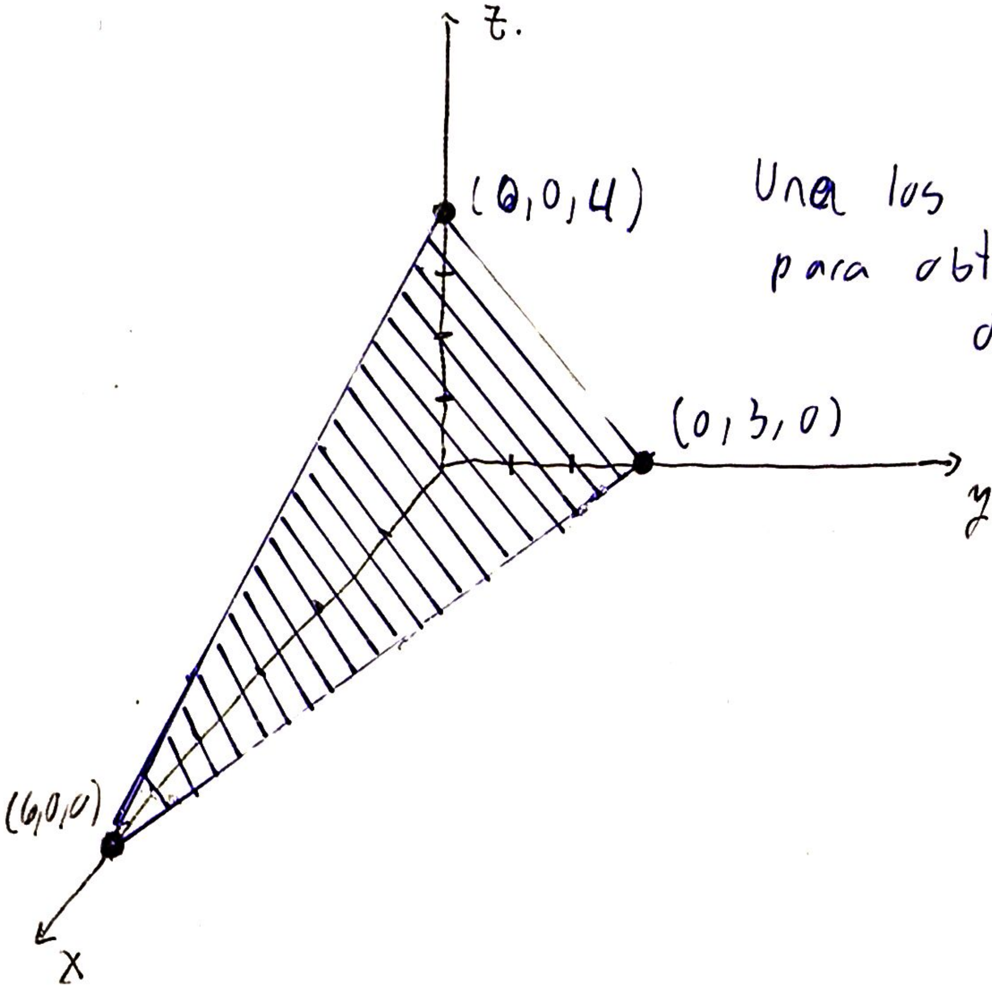
Ejercicio 3: Bosqueje el plano $2x+4y+3z=12$ sólo en el primer octante.

Intersecto-x: $2x=12 \Rightarrow (6,0,0)$

Intersecto-y: $4y=12 \Rightarrow (0,3,0)$

Intersecto-z: $3z=12 \Rightarrow (0,0,4)$

6.



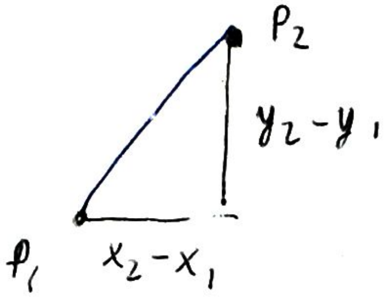
Una los tres puntos para obtener un segmento del plano

Capítulo 2

RB_2020-01-09_09_42_27

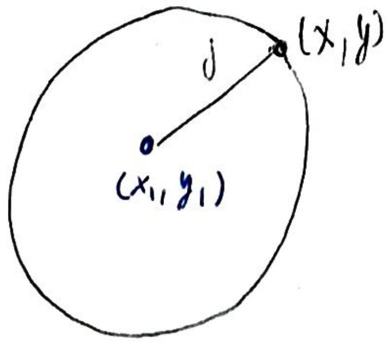
12.1.2 Distancias y Superficies Básicas.

En 2-D, la distancia entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = d^2.$$



Ec. Circunferencia de radio d centrada en (x_1, y_1).

En 3-D, la distancia entre $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$

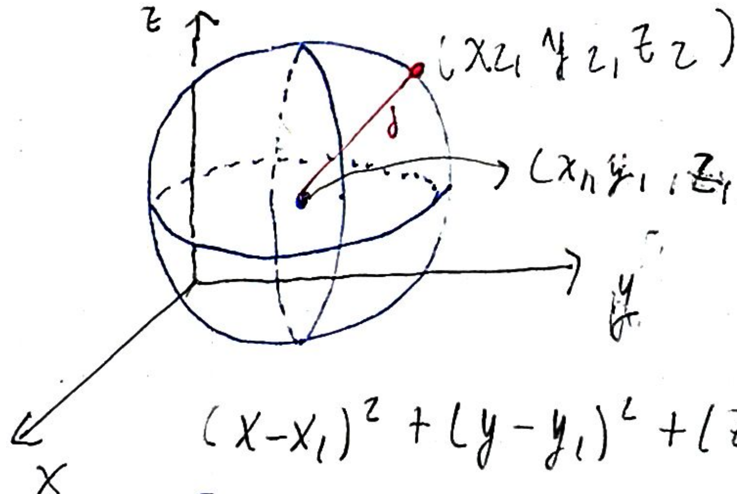
Calcule la diferencia entre z_2 & z_1.

$$\boxed{d = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

no puede ser negativa.

Notación $d = |P_2 P_1|$

Pág. 15.



$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = d^2.$$

Ec. de una esfera de radio r centrada en (x_1, y_1, z_1).

Esfera más utilizada centrada en el origen $(0,0,0)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad \text{radio } r.$$

Ejercicio 4: Encuentre el centro y radio de la esfera cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 4z + 4 = 0. \qquad (P\,16).$$

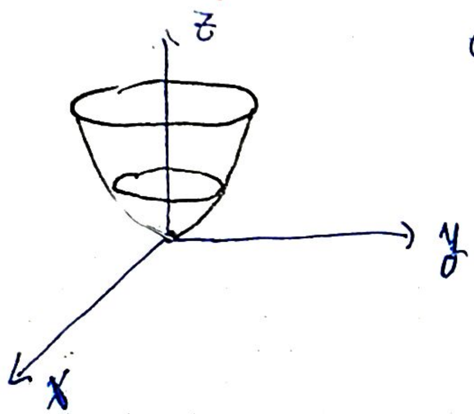
$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 \; z^2 + 4z + 4 = -4 + 16 + 9 + 4$$

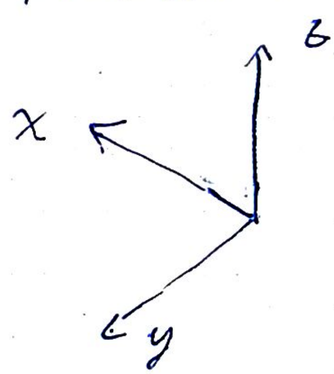
$$(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 25 = r^2$$

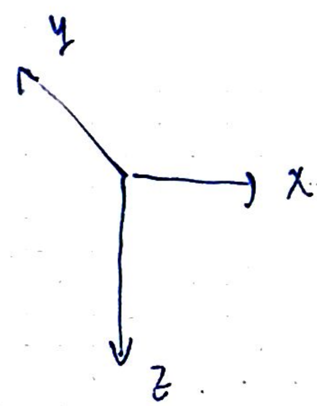
Centro de esfera $(-4, 3, -2)$ Radio $\sqrt{25} = 5.$

$z = x^2 + y^2$. no es una esfera.

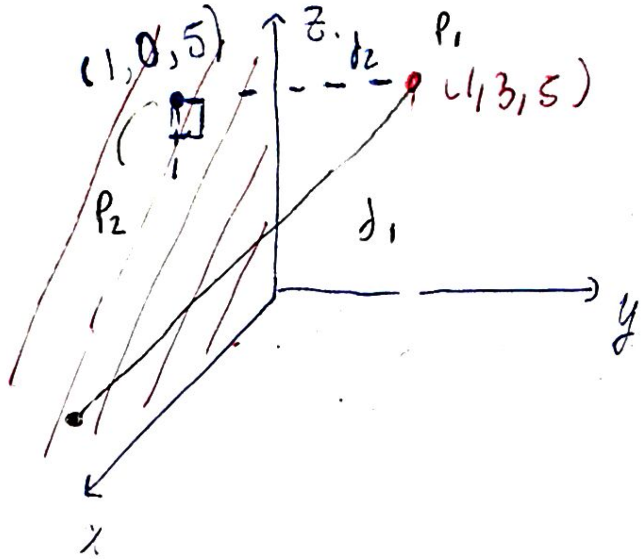
es un paraboloide.







Distancia entre un punto y un plano-coordenado.



Encuentre la distancia entre el punto (1,3,5) y el plano xz. (tiene infinitos puntos)

En el plano xz $y=0$

si se estrella el punto (1,3,5) contra el plano xz se obtiene el punto (1,0,5).

"Estrellar": Encuentre la proyección del punto P sobre el plano.

distancia entre P_1 y P_2

$$d=\sqrt{(1-1)^2+(3-0)^2+(5-5)^2}$$
$$d=\sqrt{0+9+0}=3$$

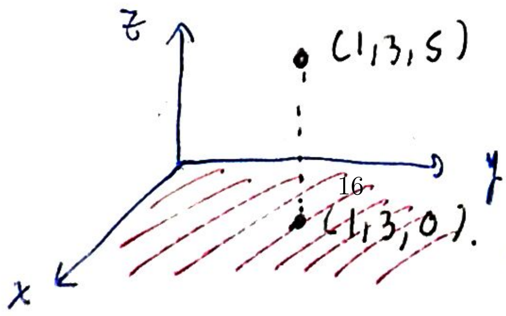
Gabriel la proyección del punto (a,b,c) sobre el plano xz es el punto (a,0,c).

distancia mínima entre P y el plano es

$$d=\sqrt{0+b^2+0}=|b|.$$ de la componente -y.

¿Cuál es la distancia entre el punto (1,3,5) y el plano xy?

$z=0$.



$$d_{min}=\sqrt{0+0+5^2}$$
$$=5.$$

Ejercicio 6: Considere los puntos $A(3,0,-4)$, $B(9,0,0)$ y $C(0,1,\sqrt{15})$.

$y=0.$ $\quad y=0 \quad z=0.$

a. ¿Cuál de los sigs. puntos está más cercano al origen?

Calcule la distancia de cada punto respecto al origen. $O(0,0,0)$

$$d_{AO} = |AO| = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|BO| = \sqrt{81+0+0} = \sqrt{81} = 9$$

$$|CO| = \sqrt{0+1+15} = \sqrt{16} = 4.$$

C es el más cercano al origen.

b. ¿Cuáles de los puntos están sobre el plano yz?

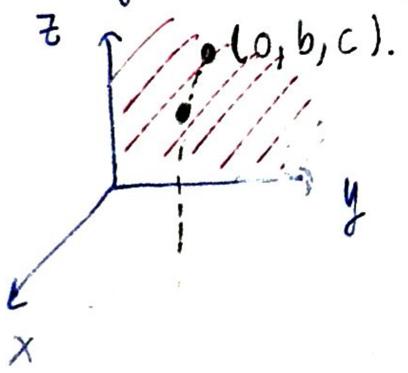
Ec. Plano yz: $x=0.$

A y B no están sobre el plano yz $\quad x \neq 0.$

El punto C $(0,1,\sqrt{15})$ si está sobre este plano.

Comentario. A está sobre el plano xz.
B está sobre el eje x.
está sobre el plano xy & xz

c. ¿Cuáles de los puntos está más cercano al plano yz? $x=0.$



Como C está sobre el plano yz éste es el más cercano a este plano $d=0.$

Encuentre las proyecciones y las distancias

$x=0$

$A(3,0,-4)$, $P_A=(0,0,-4)$, $d_A=3$

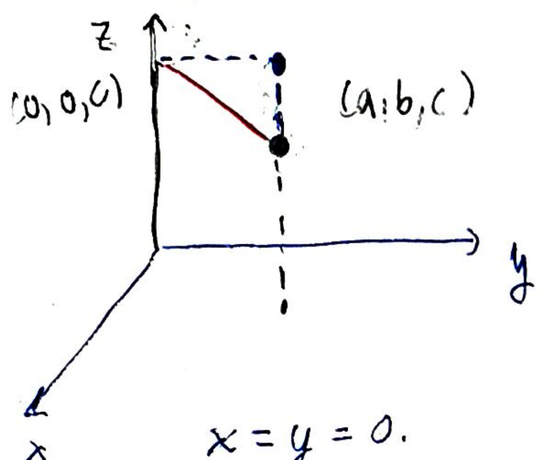
$B(9,0,0)$, $P_B=(0,0,0)$, $d_B=9.$

$C(0,1,\sqrt{15})$ $P_C=(0,1,\sqrt{15})$, $d_C=0$ ✓

mismo punto, ésta sobre el plano yz

Distancia entre un punto y un eje.

d. ¿Cuál de los siguientes puntos está más cercano al eje-z.



En el eje z $x=0$, $y=0$.

La proyección del punto $P(a,b,c)$ al eje z es el punto $P_1(0,0,c)$.

$$d_{min}=\sqrt{a^2+b^2+0}$$

$x=y=0.$

Encuentre las proyecciones sobre el eje y las distancias.

$A(3,0,-4)$, $P_A(0,0,-4)$, $d_A=\sqrt{9+0+0}=3.$

$B(9,0,0)$ $P_B.(0,0,0)$ $d_B=\sqrt{81+0+0}=9.$

$C(0,1,\sqrt{15})$ $P_C(0,0,\sqrt{15})$ $d_C=\sqrt{0+1+0}=1$

crítico. más cercano

plano $x=0$	plano yz	Ejes	
$y=0$	plano xz	$x=0, y=0$	Eje-z
$z=0$	plano xy	$x=0, z=0$	Eje-y
		$y=0, z=0$	Eje-x.

Superficies. Básicas: Planos, Cilindros y Esfera.

En 12.6 superficies cuádricas cilindro parabólico
cilindro (función).

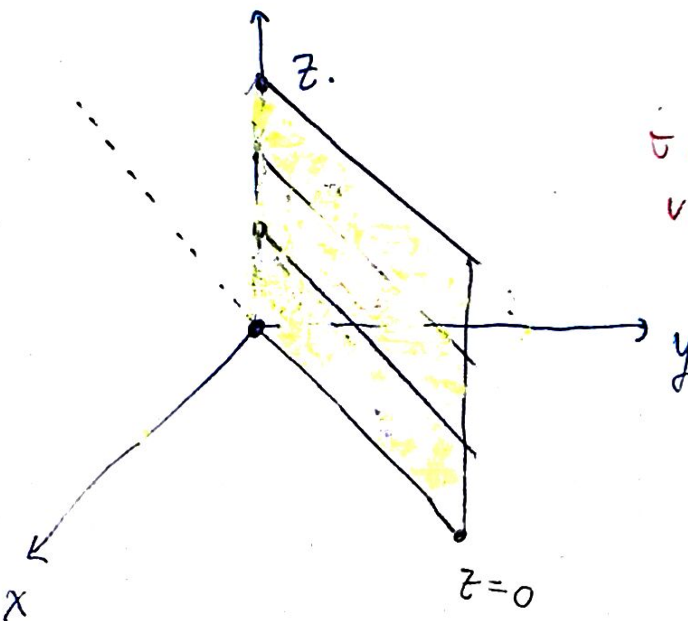
Ejercicio 7: Bosqueje el plano $y = x$. en el 1er octante.

$z = 0: \quad y = x$

$z = 1 \quad y = x$

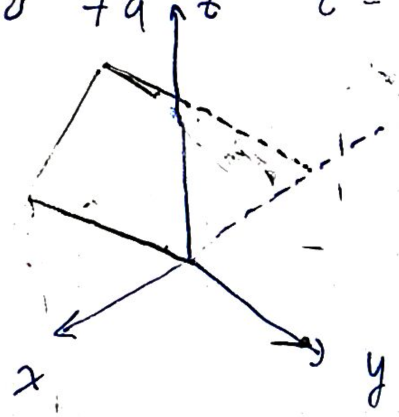
$z = a \quad y = x$

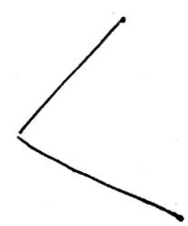
sólo tiene intersectos con el eje-z.



traslade verticalmente $y = x$.

Ejercicio 7a $z = x$.

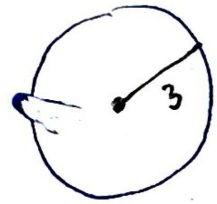




Difícil de graficar por la perspectiva.

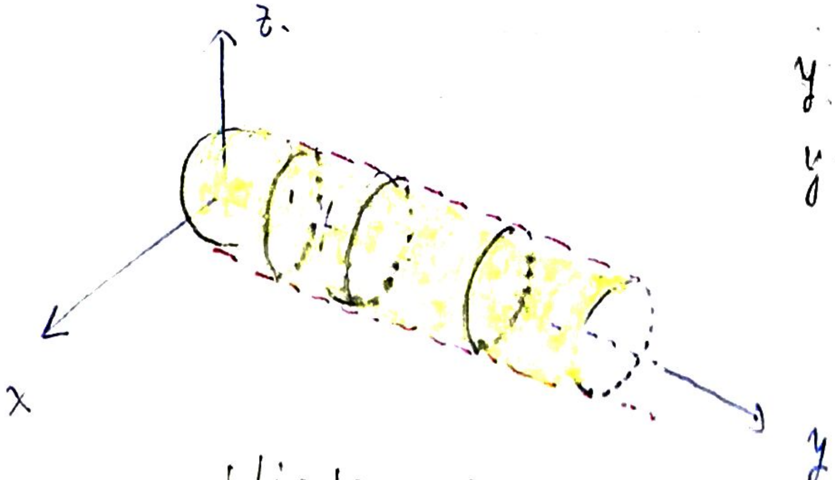
Ejercicio 8: Grafique las siguientes superficies

a. $x^2 + z^2 = 9.$



En 2-D circunferencia de radio 3.

Variable y.

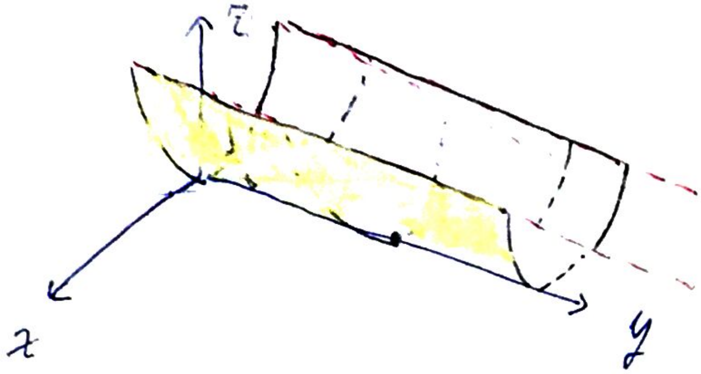


$y = 0 \quad x^2 + z^2 = 9$

$y = 2 \quad x^2 + z^2 = 9$

cilindro circular de radio centrado en el eje-y.

b. $z = x^2.$



hoja doblada

cilindro parabólico.