Cálculo Multivariable - Clases y apuntes de clase

David Gabriel Corzo Mcmath

2020-01-06

Índice general

Capítulo 1

Sistema tridimensional de coordenadas

1.1. 12.1 Sistema tridimensional de coordenadas

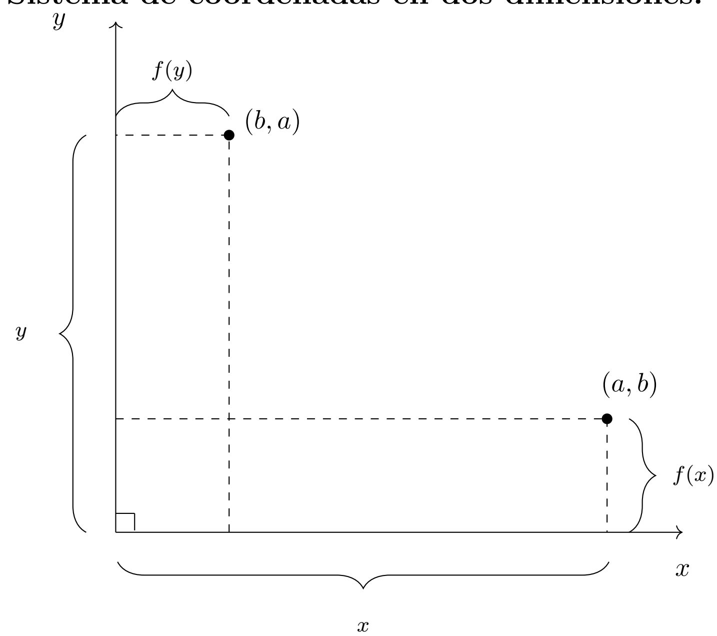
Para localizar un punto en un plano, se necesitan dos números.

- a la coordenada x
- b la coordenada y

En el plano $\mathbb{R}^2$

- Los ejes de coordenadas son perpendiculares entre sí.

Sistema de coordenadas en dos dimensiones:

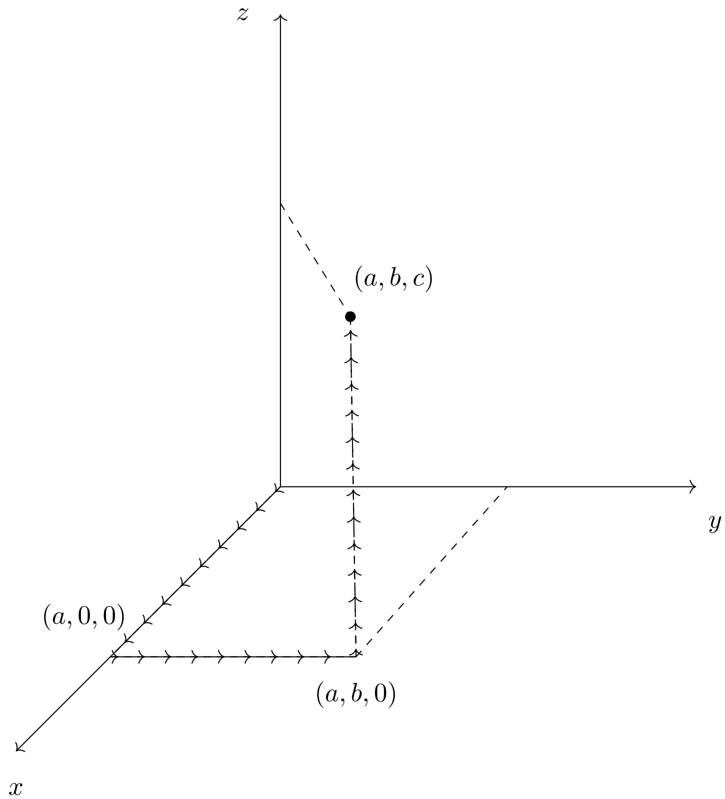


- En el sistema tridimensional de coordenadas rectangulares, cada punto en el espacio es una terna ordenada (x, y, z).

$$\begin{aligned} \text{Espacio:} \quad & \mathbb{R}^3 = \{\} \\ & \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

- x transversal
- y horizontal
- z vertical
- $z = f(x, y)$

Sistema tridimensional de coordenadas:



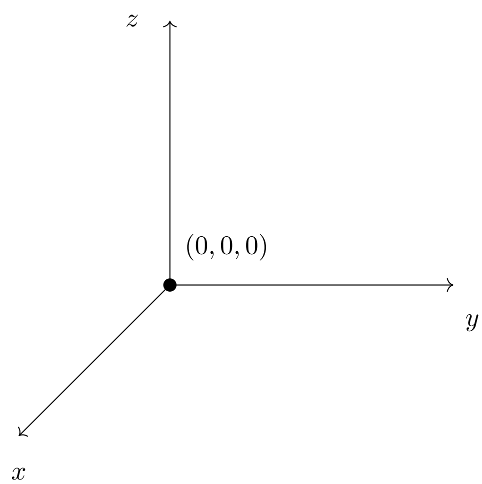
- Las líneas punteadas se utilizan para simbolizar las partes de abajo, izquierda y detrás.

▪ Las líneas punteadas se usan para simbolizar las partes debajo, izquierda y detrás.

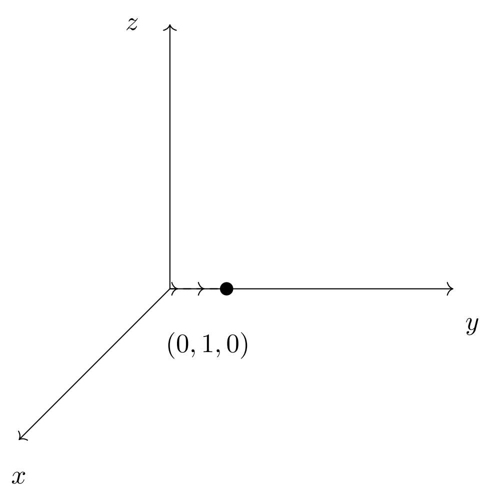
1.1.1. Ejercicios

Identifique las siguientes puntos:

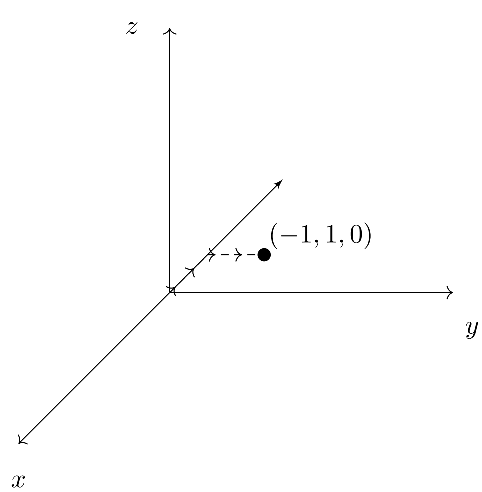
1. $(0, 0, 0)$

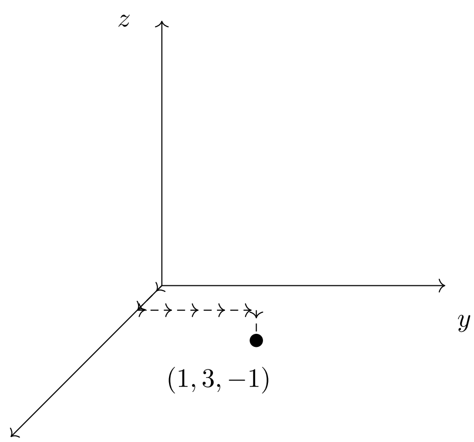


2. $(0, 1, 0)$



3. $(-1, 1, 0)$

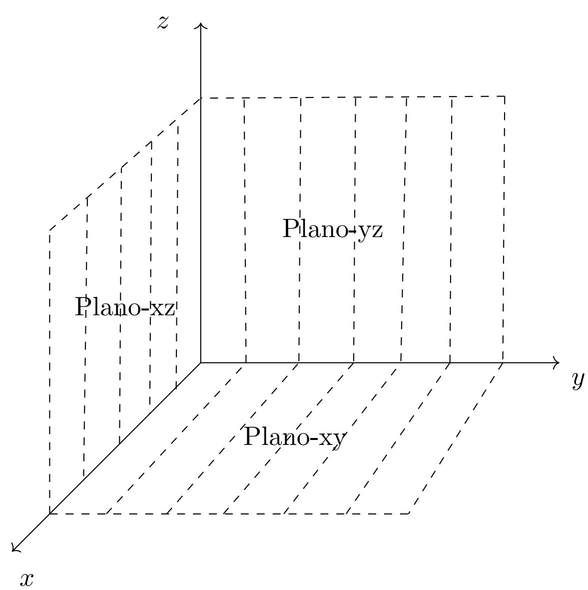




4. $(1,3,-1)$ x

1.2. Planos coordenados

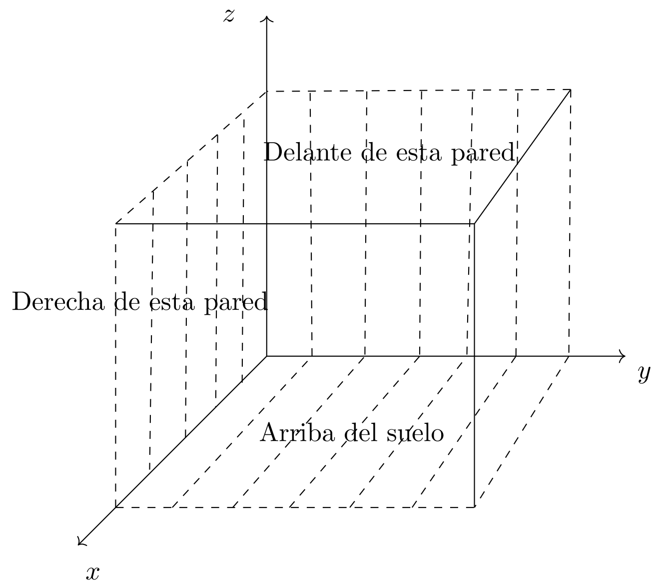
- Planos-xy:



- Los planos:

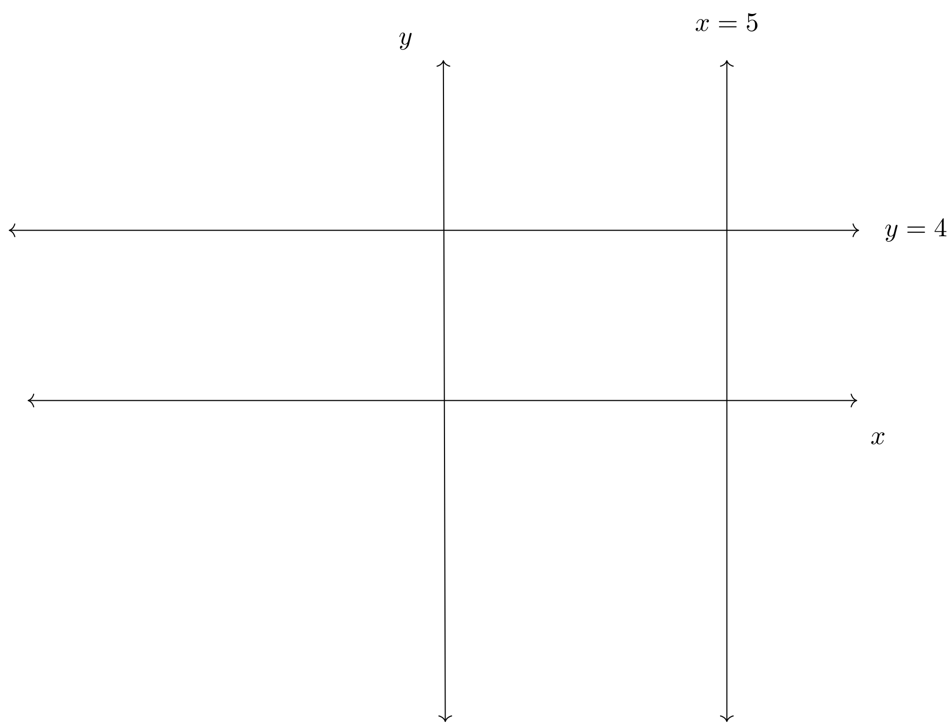
    - Plano-yz: $x = 0$
    - Plano-xz: $y = 0$
    - Plano-yx: $z = 0$

- El primer octante:

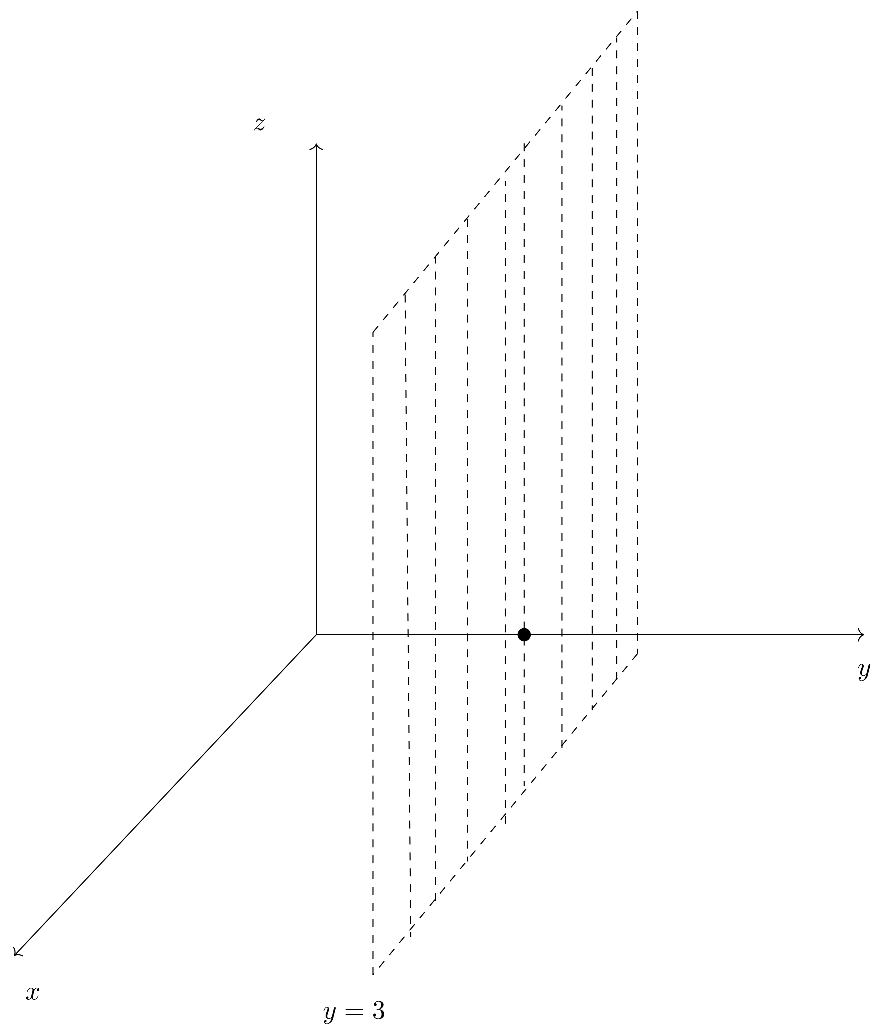


- Planos en el espacio:

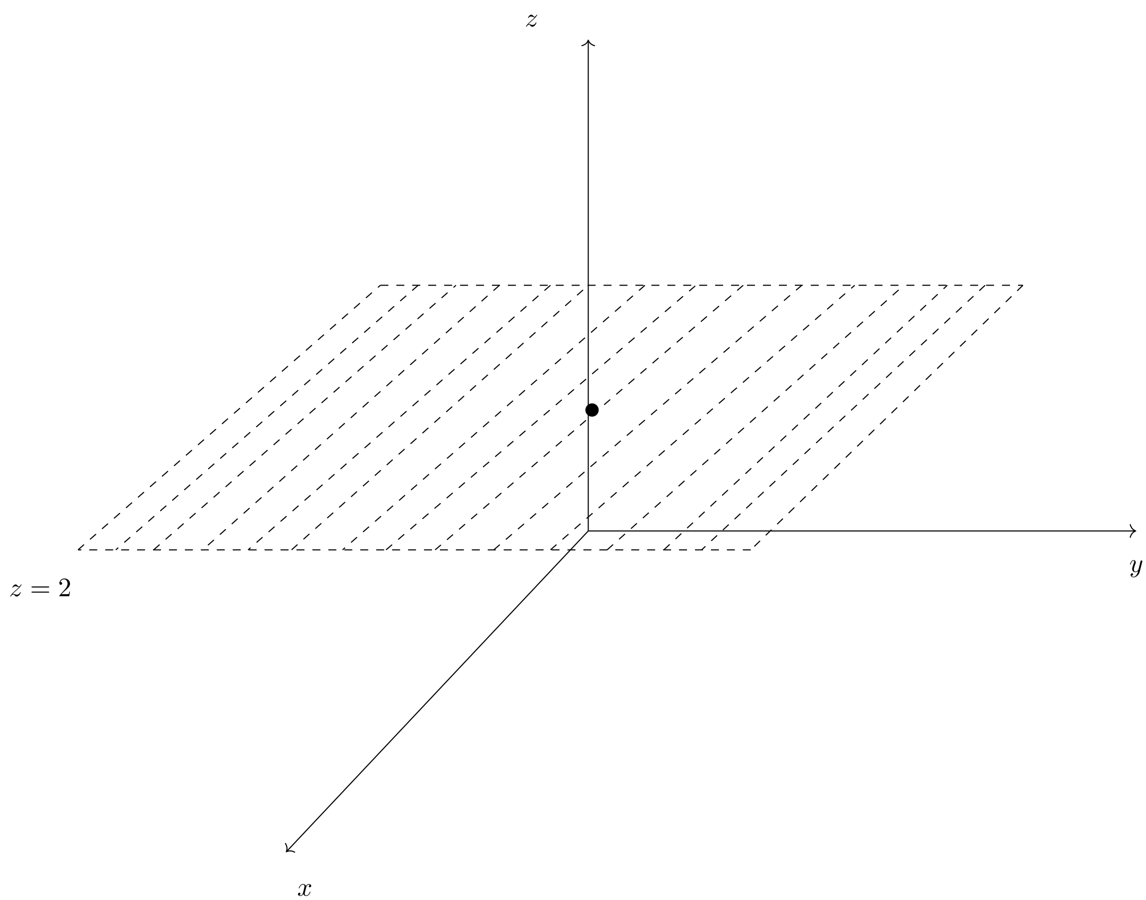
  - En dos dimensiones cuando se proponía $x = a$ ó $y = b$ se sabía que se hablaba de una recta horizontal o vertical.



- En tres dimensiones $x = a, y = b, z = c$ son gráficas de planos.



- Ejemplo: $z = 2$ el “techo” en $z = 2$



- Ecuación lineal en 3-D va a graficar un plano:

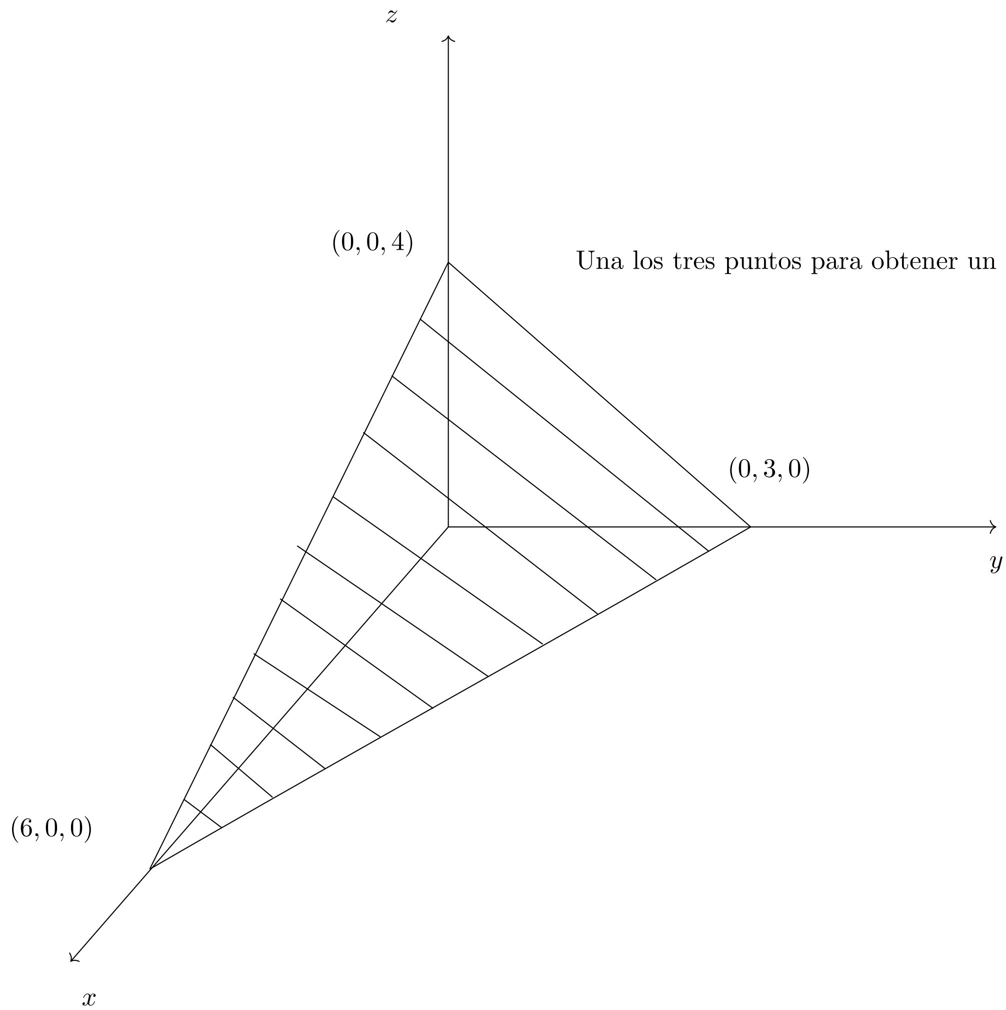
$$ax + by + cz = d$$

  - Generalmente se grafican sólo en el primer octante se cada a, b, c y d es positiva.

1.2.1. Ejercicios

1. Bosqueje el plano $2x + 4y + 3z = 12$ sólo en el primer octante:

$$\begin{aligned}
\text{Intersección-}x &: & 2x = 12 &\implies& (6,0,0)\\
\text{Intersección-}x &: & 4y = 12 &\implies& (0,3,0)\\
\text{Intersección-}x &: & 3z = 12 &\implies& (0,0,4)
\end{aligned}$$



Una los tres puntos para obtener un segmento del plano

Capítulo 2

Clase - 2020-01-23

2.1. 12.4 Producto Cruz

- ***Definición de "Determinantes":*** *Matriz (arreglo rectangular de números).*
- ***Definición de "Cuadrada":*** *Mismo número de filas y columnas.*
-
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

  # Determinante de orden 2. Matriz de 2x2
- pie:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-1)(4) = 6 + 4 = 10$$

- Determinante de orden 3: Matriz 3x3 suma de tres determinantes de orden 2:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

  3 matrices de 2x2.
- p.e.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$2(6 - 0) - 0 + 2(-1 - 3) = 12 - 8 = 4$$

2.2. Producto Cruz

- Dados dos vectores :

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$
$$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cómo se encuentra un vector $\vec{c}$ que es perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$?

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

- Resuelva para c_1, c_2, c_3 :

$$c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0$$
$$c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 = 0$$

- El producto cruz $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = 0$ es un vector perpendicular a ambos vectores $\vec{a}$ & $\vec{b}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \hat{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \hat{k}(a_1b_2 - a_2b_1)$$

- Observaciones:
  - El producto cruz es un vector, mientras que el producto es un número o escalar.
  - El producto cruz **no** es conmutativo $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$.

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(b_2a_3 - a_2b_3) + \hat{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \hat{k}(a_2b_1 - a_1b_2)$$

- Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{a} \times \vec{b} = 15\hat{i} - 10\hat{j} - 3\hat{k}$$

- Verifique $\vec{a} \times \vec{b}$ es ortogonal a $\vec{a}$ & a $\vec{b}$.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 2, 3, 0 \rangle = 30 - 30 + 0 = 0 \therefore \text{ son ortogonales}$$
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \langle 15, -10, -3 \rangle \cdot \langle 1, 0, 5 \rangle = 15 + 0 - 15 = 0 \therefore \text{ son ortogonales}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp a_1 b$$

- Aclaración: en dos dimensiones $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ No es posible evaluarlo.

- Existen en tres dimensiones pero si se intenta evaluar en cuatro dimensiones la siguiente matriz no es posible:

  En 3-D: $\exists$ En 4-D: $\nexists$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{l} \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

  No es posible evaluarlo.

- Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 15\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}$$

Entonces... en general:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

Capítulo 3

Clase - 2020-01-28

3.1. 12.5 Rectas y planos

- Ecuación de una recta
- Vector posición $\vec{r}_0 = \langle x_0, y, z_0 \rangle$
- Vector dirección $\vec{v}_0 = \langle a, b, c \rangle$
- Ecuación vectorial: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$ donde t es el parámetro.
- Ecuaciónes paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + at \\ z &= z_0 + at \end{aligned}$$

- Resuelva para t en las tres ecuaciones:

$$t = \frac{x - x_0}{a} t = \frac{y - y_0}{b} t = \frac{z - z_0}{c}$$

  Estas son las ecuaciónes simétricas de la recta donde $a, b, c \neq 0$.

- Vector dirección $\vec{v} = \langle a, 0, c \rangle$ las ecuaciones en la recta cambian:

$$\begin{aligned} \underbrace{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}}_{\text{Vectorial}} \\ x = x_0 + at \\ y = y_0 \\ z = z_0 + ct \\ \text{Entonces queda así:} \\ \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c} \\ \underbrace{y = y_0}_{\text{Simétrica}} \end{aligned}$$

3.1.1. Ejercicio 3: Encuentre las ecs. simétricas de la recta que pasa por los puntos dados. Encuentre en qué punto la recta interseca al plano xz. pg.41

- P(2,8,-2) & Q(2,6,4)

$$\begin{aligned}
\text{Vector posición } &= \overrightarrow{OP} = R_0 = \langle 2,6,7\rangle \\
\text{Vector dirección } \overrightarrow{PQ} &= \vec{V} = \langle 0,-2,6\rangle \\
\text{Ec. vectorial } &= \vec{r} = \langle 2,8,-2\rangle + t\langle 0,-2,6\rangle \\
\text{Ecs. simétricas } &= x = a, \frac{y-8}{-2} = \frac{z+2}{6}
\end{aligned}$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cual es la intersección con el plano xz?

$$\begin{aligned}
\text{Use, y=0} x = 2, \frac{-8}{-2} =& \frac{z+2}{6} \\
&= 6 \cdot 4 = z + 2 \implies z = 22
\end{aligned}$$

- La intersección con el plano xz es el punto $(1, 0, 22)$:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_0 &= \langle 4,6,10\rangle \\
\vec{v} = \overrightarrow{PQ} &= \langle 2,0,0\rangle \\
\text{Vectorial: } \vec{r} &= \langle 4,6,10\rangle + t\langle 2,0,0\rangle \\
\text{Paramétricas: } x &= 4 + 2t, y = 6, z = 10 \\
\text{Simétricas: } t &= \frac{x-4}{2}, y = 6, z = 10
\end{aligned}$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cual es el punto de instersección con el plano xz?

$$\text{Use: y=0}$$

Explicación: por la recta $y = 6$ siempre será 6, nunca podrá ser 0, no puede intersecar con el plano xz, **No hay**.

3.2. Rectas paralelas

Dos rectas $\vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + t\vec{v}$ & $\vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + t\vec{v}_2$ son paralelas si y solo si sus vectores de dirección $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son paralelas.

Entones en el espacio tenemos 3 tipos de rectas:

1. Rectas paralelas
2. Rectas intersecan en un punto
3. Rectas Ublicuas (no paralelas & no intersecan)

Figura 3.1:

3.2.1. Ejercicio 4: Determine si los siguientes pares de rectas son paralelas, oblicuas o se intersecan.

- $$\frac{x-2}{8}=\frac{y-3}{24}=\frac{z-2}{16},\frac{x-10}{-2}=\frac{y+15}{-6}=\frac{z+24}{-4}$$
$$\vec{v}_1=\langle 8,24,16\rangle,\vec{v}_2=\langle -2,-6,-4\rangle$$
$$\text{Entoces... },\left\langle \frac{8}{-2},\frac{24}{-6},\frac{16}{-4}\right\rangle$$
$$\langle -4,-4,-4\rangle\,,\therefore\ \text{Son paralelas}$$

El vector dirección está en el denominador.

- $$L_1: x=3-4t, y=6-2t, z=2+0t, t\in IR$$
$$L_2: x=3+8s, y=-2s, z=8+2s, s\in IR$$
$$\text{Utilize una variable parámetro para cada recta}$$
$$v_1=\langle -4,-2,0\rangle\,,v_2=\langle 8,-2,2\rangle\ \text{No son paralelas}$$
$$\text{Analice si las rectas se intersecan}$$
$$x=x\to 5-4t=3+8s$$
$$y=y\to 6-2t=-2s$$
$$z=z\to 2=8+2s\to s=-3$$
$$5-4=-22\to 4t=-27\to -4t=-27\to=\frac{27}{4}$$
$$6-2t=6\to 2t=0\to t=0$$
$$\therefore\ \text{Como no hay una } t \text{ única (no es posible } 0\neq\frac{27}{4}\text{), las dos rctas no se intersecan.}$$
$$L_1\ \&\ L_2\ \text{Son oblicuas}$$
$$\text{Eliminación Gausiana}$$
$$\begin{array}{r}4t+8s=2\\ 2t+25=6\\ 0t+2s=-6\end{array}=\begin{vmatrix}4&8&2\\2&2&6\\0&2&-6\end{vmatrix}0,0,\ \text{número}\implies\ \text{No hay solución}$$

3.3. La ecuación de un plano

Previamente en 12.1 $ax+by+cz=0$. Para encontrar la ec. de un plano se necesita:

Figura 3.2:

1. Un punuto sobre el plano P: $\vec{r_0}=\overrightarrow{OP}$
2. Un vector normal u ortognoal al plano: $\hat{n}_0\ \langle a,b,c\rangle$

3.3.1. Derivación de la e. plano

$$
\begin{aligned}
P(x_0, y_0, z_0), Q(x_1, y_1, z_1) &\text{ Son dos puntos sobre el plano} \\
\vec{r_0} == \overrightarrow{0P} &= \langle x_0, y_0, z_0 \rangle \\
\vec{r} = \overrightarrow{0Q} &= \langle x, y, z \rangle
\end{aligned}
$$

El vector $R\vec{P} = \vec{r} + r \vec{-} 0$ está sobre el plano, por lo que tiene que ser ortogonal a $\hat{n}$.

$$
\begin{gathered}
\hat{n} \perp \vec{r} - \vec{r_0} \rightarrow \qquad \underbrace{\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0})}_{\text{Ec. vectorial de un plano}} \\
\text{Se puede reescribir como:} \\
\underbrace{\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x + x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle + c(z - z_0) = 0}_{\text{Ecuación escalar de un plano}} \\
ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_{0}
\end{gathered}
$$

Para encontrar la ec. de un plano se necesita 3 puntos P,Q,R: **hay infinitas respuestas equivalentes** $\hat{n} = \vec{} \times \vec{}.$

$$
\begin{gathered}
\vec{r_0} = \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{0Q}, \overrightarrow{0R} \\
\underbrace{\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}}_{\text{Tienen que empezar en el mismo punto}} \\
\text{Hat infinitas respuestas:} \\
\hat{n} = \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ}
\end{gathered}
$$

3.3.2. Ejercicio 1: pg45 Encuentre la ec. del plano que pasa por los 3 puntos dados.

1. $P(3, -1, 3), Q(8, 2, 4), R(1, 2, 5)$

$$
\begin{aligned}
\text{Ecuación del plano : }, &\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0 \\
\text{Ecuaciónn de la recta : }, &\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v} \\
&\vec{r_0} = \langle 8, 2, 4 \rangle
\end{aligned}
$$

Encuentre dos vectores que están sobre el plano y que comiencen en el mismo punto.

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle 5,3,1 \rangle \,, \vec{v} = \overrightarrow{PR} = \langle -2,3,2 \rangle$$
$$\text{¡¡ } \hat{n} \text{ es ortogonal a ambos vectores !!}$$
$$\hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 12\hat{j} - +21\hat{k}$$
$$\text{Ec. Plano } , \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$
$$\text{Ec. Vectorial } , \langle 3, -12, 21 \rangle \cdot \langle x-8, y-2, z-4 \rangle = 0$$
$$\text{Escalar } , 3(x-8)-$$

2. P(0,0,0), Q(1,0,2), y R(0,2,3)

$$\text{Vector posición: } \vec{r_0} = \langle 0,0,0 \rangle$$
$$\text{dos vectoes sobre el plano: } \begin{array}{l} \vec{PQ} = \langle 1,0,2 \rangle \\ \vec{PR} = \langle 0,2,3 \rangle \end{array}$$
$$\text{Vector normal: } \hat{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$$
$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \text{terminar} & & \end{vmatrix}$$

3. Ecuación del plano:

$$-4x - 3y + 2z = 0$$

3.4. Rectas paralelas v_1 y v_2 son paralelos

Dos planos $\hat{n_1} \cdot (\vec{r} - \vec{r_1}) = 0$ y $\hat{n_2} \cdot (\vec{r} - \vec{r_2}) = 0$ son paralelas sí y sólo si $\hat{n_1}$ y $\hat{n_2}$ son paralelas. En caso que no sean paralelas, se puede encontrar el ángulos de intersección entre dos planos.

Capítulo 4

Clase - 2020-01-30

4.1. Resolución de corto

- Determine el área del triángulo entre los puntos P(), Q(), R():

$$\begin{aligned}
\vec{a} = \overrightarrow{PQ} &= \langle 4, 3, -2\rangle \\
\vec{b} = \overrightarrow{PR} &= \langle 5, 5, 1\rangle \\
\text{Área } &= \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \\
\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} &= 13\hat{i} - 14\hat{j} + 5\hat{k} \\
\text{Área } &= \frac{1}{2}\surd
\end{aligned}$$

4.2. Rectas y planos

- Ecs. Rectas: $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$

$$\text{si } a \neq b \neq c \neq 0 \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

- Paramétricas:

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + at \\
y &= y_0 + bt \\
z &= z_0 + ct
\end{aligned}$$

- Ecuación de plano:

$$\hat{n} = \cdot\vec{r} - \vec{r_0}$$
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$\hat{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

4.2.1. Ejercicios

1. Considere los planos $x + y = 0$ & $x + 2y + z = 1$.

   a) Determine si los planos son paralelos so no lo son encuentre el ángulo entr ellos:

$$\hat{n_1} = \langle 1, 1, 0\rangle$$
$$\hat{n_2} = \langle 1, 2, 1\rangle$$
$$\therefore \text{ Los dos planos no son paralelos}$$

- El $\hat{n_1}$ & $\hat{n_2}$ no son necesariamente ortogonales.

$$\cos\theta = \frac{\hat{n_1} \cdot \hat{n_2}}{|\hat{n_1}|\,|\hat{n_2}|} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$
$$\cos\theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

2. Encuentre la ec. de la recta que interseca a ambos planos $x + y = 0$ & $x + 2y + z = 1$:

$$r = \vec{r_0} + t\vec{v}$$
$$\text{Dos puntos sobre la recta}$$
$$\text{Como la recta esta en ambos planos, se debe resolver el sig. sistema de ecuaciones}$$
$$x + y = 0 \implies x = -y$$
$$x + 2y + z = 1 \implies y = z - 1$$
$$\text{z tiene cualquier valor, ahora encontrar escogiendo cualquier punto sobre la recta, en este caso 0}$$
$$\text{Primer punto} \quad z = 0$$
$$y = 1$$
$$x = -1$$
$$\therefore \langle -1, 1, 0\rangle$$
$$\text{Segundo punto} \quad z = 1$$
$$y = 0$$
$$x = 0$$
$$\therefore \langle 0, 0, 1\rangle$$

3. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por P(-1,1,0) y Q$\underbrace{(0, 0, 1)}_{r_0}$:

$$\vec{r_0} = \langle 0,0,1\rangle\langle -1,1,0\rangle$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{QP}0\,\langle -1,1,-1\rangle$$
Ecuaciones paramétricas de la recta:
$$x = 0 - t \quad y = 0 + t \quad z = 1 - t$$

4. Solución alterna:

$$x = -y \quad y = 1 - z \qquad \text{Más incognitas que ecuaciones.}$$
$$x, y \;\text{ ó }\; z \quad \text{pueden tener cualquier valor} \qquad z = t$$
$$\begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 1 - t \;\therefore v_2 = \langle 1,-1,1\rangle \quad \vec{r_0} = \langle -1, 1-0\rangle \\ t &= t \end{aligned}$$

5. Solución geométrica:
   - Encuentre un punto en ambos planos (0,0,1).
   - L arecta está en el plano I, entonces la recta es perpendicular al vector normal del plano I.
   - Está en el plano z, entonces también es perpendicular al segundo vector normal.
   - $\therefore$ la recta es perpendicular a ambos $\hat{n_1}$ & $\hat{n_2}$

$$\vec{v} = \hat{n_1} \times \hat{n_2} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$$
$$\text{Ecuación de la recta:} \quad r = \langle 0,0,1\rangle + t\,\langle 1,-1,0\rangle$$

6. Ejercicio 3: Encuentre el punto en el que la línea recta $x = 1 + 2t$, $y = 4t$, $z = 5t$ interseca al plano. $x - y + 2z = 17$.

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 4t \\ z &= 5t \\ &\text{Plano} \\ x - y + 2z = 17 \quad 1 + 2t - 4t + 10t &= 17 \\ 8t = 16 &\implies \therefore t = 2 \end{aligned}$$

   El punto de intersección es (5,8,10).

7. Ejercicio 4: Encuentre una ec. del plano que contiene la recta $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 4 - 3t$ y es paralela a plano $5x + 2y + z = 1$.

- Cualquier punto sobre la recta que también esté sobre el plano, t= 0.

$$\text{Evaluemos en t=0} \quad x = 1,\, y = 2,\, z = 4$$
$$\vec{r_0} = \langle 1, 2, 4 \rangle$$

- **Nos preguntamos:** ¿Cómo se encuentra $\hat{n}$?
- El vectos de dirección de la recta $v = \langle 1, -1, -2 \rangle$ es paralelo al plano.
- Como es paralelo al seguno plano, entonces tiene que ser perpendicular $\hat{n_2} = \langle 5, 2, 1 \rangle$
- Lo que ocurre entonces es:

$$\vec{r_0} = \langle 1, 2, 4 \rangle \quad \hat{n} = \langle 5, 2, 1 \rangle$$
$$\text{Ec. Plano:} \quad \implies 5(x-1) + 2(y-2) + 1(z-4) = 0$$

8. Ejercicio 5: Encuentre los números directores para la recta de intersección entre los planos $x+y+z = 1$ & $x + 2y + 3z = 1$.
   - ***Definición de "numeros directores":*** *a,b,c del vector de dirección* $\langle a, b, c \rangle$
   - La recta es ortogonal a ambos vectores normales:

$$\hat{n_1} = \langle 1, 1, 1 \rangle \quad text\&\hat{n_2} = \langle 1, 2, 3 \rangle \quad \text{de ambos planos}$$
$$\vec{v} = \hat{n_1} \times \hat{n_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$
$$\text{Los números directores:} \quad a = 1, b = 2, c = 1$$

9. Ejercicio 6: Encuentre las ecs. aparamétricas de la recta que pasa por el punto (0,1,2), que es paralelo al plano $x + y + z = 2$ y es perpendicular a la recta $r = \langle -2t, 0, 3t \rangle$.

$$L_1 r = \vec{r_0} + t\vec{v} \quad r_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle$$

   - Aclaraciones: L_1 es la incógnita que tenemos que encontrar.
   - **Nos preguntamos:** ¿Cómo se encuentra r?
   - Plano I: $\hat{n} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ es perpendicular al plano, es paralelo a L_1.
   - Recta II: $\hat{v_2} = \langle -2, 0, 3 \rangle$ es perpendicular a L_1
   - La recta es perpendiculae a $\hat{n}$ y a $\vec{v_2}$

$$v = \hat{n} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$r_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle$$

$v = \hat{v_2} \times \hat{n}$ Ecuaciones paramétricas:

$$x = 0 - 3t$$
$$y = 1 - 5t$$
$$z = 2 + 2t$$

Capítulo 5

Clase - 2020-02-04

5.1. 13.1 Funciones vectoriales y curvas en el espacio

- Una función vectorial $\vec{r} : R \implies V_3$:

  $$\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), z(t) \rangle$$

  La variable t es un parámetro.

- Dominio: Números reales, Rango: vector 3D:

  $$\begin{aligned} \vec{r}\mathbb{R} \implies V_3 \quad & \vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle \\ \text{t es un parámetro} \quad & \vec{r} = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath} + h(t)\hat{k} \end{aligned}$$

- Ejemplo de una función vectorial:

  $$\begin{aligned} \vec{r} = \langle a, b, c \rangle + t \langle d, e, f \rangle \\ \vec{r} = \langle a + td, b + et, c + tf \rangle \\ x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \end{aligned}$$

- Ecs. Paramétricas de una función vectorial:
- Dominio de ina función vectorial: encuentre el dominio de cada función componente. El dominio de $\vec{r}$ es la intersección de los dominios de cada función componente.

5.1.1. Ejercicios

1. Encuentre el dominio:

$$\begin{aligned} r(t) = \left\langle \sqrt{r^2 - 9}, e^{5ln(t)}, ln(t+5) \right\rangle \\ \text{Evadir raíces negativas, y ln(0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{t^2 - 9} \quad \implies \quad \text{Definida} \quad t^2 \geq 9 \\ e^{\sin(t)} \quad \text{siempore definida} \\ ln(t+5) \quad \text{Definida cuando} \quad t + 5 > 0 \qquad (-5, \infty) \\ \therefore \text{ El dominio es de} \quad (-5, \infty) \cup (-5, -3) \cup (-3, 3) \cup [3, \infty) \end{aligned}$$

- Recordar: [a,b] el numero si es parte del dominio a,b son partes del dominio. (a,b) los puntos a,b no son parte del dominio.

2.

$$\vec{s}(t) = \left\langle \sin^3(t^2), \cosh(\frac{t}{t^2+1}), \frac{1}{e^t+4} \right\rangle$$
$$sin^3(t^2), ID_{f(t)} = IR$$
$$\cosh(\tfrac{t}{t^2+1}), ID_{g(t)} = IR$$
$$\tfrac{1}{e^t+4}, ID_{h(t)} = IR$$
$$\therefore \text{ Dominio de } \vec{s}(t) = (-\infty, \infty)$$
$$e^{+}4 \neq 0 \implies e^t = -4 \implies t = \underbrace{ln(-4)}_{\text{indefinido}}$$

5.2. Limites y continuidad

- $$\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t) \right\rangle$$
- Evalúe el límite de cada función componente.
- Si no existe por lo menos un límite de una función componente, entonces $\lim_{t\to a} \vec{r}(t)$ no existe.
- f(t) está definida en t=a
$$\lim_{t\to a} f(t) = f(a)$$
- Si se indefine y tiene forma de $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ usar L'Hôpital.

$$\lim_{t\to a} \frac{f(t)}{g(t)} \underbrace{=}_{\frac{0}{0}} \lim_{t\to a} \frac{f'(t)}{g'(t)} \qquad \text{L'Hopital}$$

- Contínua en $t = a$ si $\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$
- Evite asíntotas verticales, saltos y agujeros. Ejemplo:

$$\lim_{t\to a} \frac{\sin(x)}{x} \underbrace{=}_{\text{LH}} \lim_{t\to a} \frac{cos(x)}{1} = 1$$

5.2.1. Ejercicios

- Sea $\vec{r}(t) = \left\langle \frac{\tan(\pi t)}{t}, e^{t-2}, \frac{ln(t-1)}{t^2-1} \right\rangle$.
- Analice si la función $\vec{r}(t)$ es contínua en $t = 2$.

$$\vec{r}(t) = \left\langle \frac{\tan 2\pi}{2}, e^0, \frac{ln(1)}{3} \right\rangle$$
$$\lim_{t\to 2} \underbrace{\frac{\tan \pi t}{t}}_{\frac{0}{2}} = 0$$
$$\lim_{t\to 2} e^{t-2} = 1$$
$$\lim_{t\to 2} \frac{ln(t-1)}{t^2-1} = 0$$
$$\therefore \vec{r} \text{ si es contínua en t=2 } \lim_{t\to 1} \vec{r}(t) = \vec{r}(2)$$

- Encuentre $\lim_{t\to 1} \vec{r}(t)$ analice el límite de cada función componente por separado.

$$f: \lim_{t\to 1} \frac{\tan 2\pi}{2} = \frac{0}{1}$$
$$g: \lim_{t\to 1} e^{t-2} = e^{-1}$$
$$h: \lim_{t\to 1} \frac{ln(t-1)}{t^2-1} = \text{ No existe, por ln(0) estar indefinido.}$$

- Analice si $\vec{r}(t)$ es contínua e t=1.

$$\underbrace{\lim_{t\to 1} \vec{r}(t) = \vec{r}(1)}_{\text{No es contínua en t=1, r(1) está indefinida.}}$$

- Agujero $\vec{s}(t) = \left\langle \frac{\tan \pi t}{t-1}, e^{t-2}, \frac{ln(2t-1)}{t^2-1} \right\rangle$
No es contínua en t=1, pero su límite existe.

$$\lim_{t\to 1} \frac{\tan \pi t}{t-1} \underbrace{=}_{LH} \lim_{t\to 1} \frac{\pi \sec^2 \pi t}{1} = \frac{\pi}{(\cos \pi)^2} = \pi$$
$$\lim_{t\to 1} e^{t-2} = e^-1 = \frac{1}{e}$$
$$\lim_{t\to 1} \frac{\ln(2t-1)}{t^2-1} \underbrace{=}_{\frac{0}{0}} = \lim_{t\to 1} \frac{\frac{2}{2t-1}}{2t} = \lim_{t\to 1} \frac{2}{2t(2t-1)} = \frac{1}{1(2-1)} = 1$$
$$\therefore \lim_{t\to 1} \left\langle \pi, \frac{1}{e}, 1 \right\rangle \quad \text{ es un agujero } \vec{s}(1) \text{ está indefinido}$$

5.3. Curvas en el espacio

$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$
$$z = h(t)$$

Figura 5.1: Curvas paramétricas en el espacio

5.3.1. Espirales

- Grafique la curva $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = \underbrace{2\hat{\imath}\sin(t)}_{x} + \underbrace{2\hat{\jmath}\cos(t)}_{y} + \underbrace{\hat{k}\frac{t}{\pi}}_{z}$$

t	x	y	z
0	0	2	0,5
$\frac{\pi}{2}$	2	0	0,5
π	0	-2	1
$\frac{3\pi}{2}$	2	0	1,5
2π	0	2	2

Figura 5.2: Curva paramétrica

- Grafique:

$$\vec{r}(t) = \langle \sin \pi t, t, \cos \pi t \rangle$$

Graficar la circumferencia $x^2 + z^2 = 1\,, y = 0$

$\vec{r}(0) = \langle 0, 0, 1 \rangle$ El vector que nos servirá para delimitar la gráfica del espiral

Por ejemplo: $\vec{s}(t) = \left\langle \sin t, t^2, \cos t \right\rangle$

Capítulo 6

Clase - 2020-02-06

6.1. 13.2 Cálculo con funciones vectoriales, pg.55

- Derivadas:

$$\vec{r}\,'(t) \quad \text{Respecto a t}$$

- Integrales:

$$\int \vec{r}\,'(t)dt \quad \text{Respecto a t}$$

6.1.1. Derivadas

- $$\vec{r}\,'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$$

- Como la función $\vec{r}(t)$ está definida por tres funciones componentes se puede hacer:

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{h \to 0} \left\langle \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}_{f'(t)}, \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}}_{g'(t)}, \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{h(t+h) - h(t)}{h}}_{h('t)} \right\rangle$$

- Derivada entonces es :

$$\vec{r}\,'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

6.1.2. Integrales

- Integral:

$$\int \vec{r}(t)dt == \int (f\hat{\imath} + g\hat{\jmath} + h\hat{k})dt$$

$$\hat{\imath} \int f dt + \hat{\jmath} \int g dt + \hat{k} \int h dt$$

Integrar la función componente.

6.2. Ejercicios

1. Encuentre la 1era y segunda derivada de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \left\langle \sin(4t), t^2, ln(\sin(t)) \right\rangle \\ \vec{r}\,'(t) &= \left\langle 4\cos(4t), 2t, \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \right\rangle \\ \vec{r}\,'(t) &= \langle 4\cos(4t), 2t, \cot(t) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vec{r}\,''(t) = \langle f''(t), g''(t), h''(t) \rangle \\ \therefore \quad & \vec{r}\,''(t) = \left\langle -16\sin(4t), 2, -\csc^2(t) \right\rangle \end{aligned}$$

2. Derive: $\vec{s}(t) = \hat{\imath}\tan(4t) + hatjln(4t+1) + \hat{k}(5-2t)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \vec{s}\,'(t) &= 4\hat{i}(\sec(4t))^2 + \hat{j}4(4t+1)^{-1} - \hat{k}(5-2t)^{-\frac{1}{2}} \\ \vec{s}\,''(t) &= 8\hat{i} \times \sec(4t) \times \sec(4t) \times \tan(4t) \times 4 - 16\hat{j}(4t-1)^{-2} - \frac{\hat{k}}{2}(5-2t)^{-\frac{3}{2}} \times (-2) \\ \vec{s}\,''(t) &= 32\hat{i} \times \sec^2(4t) \times \tan(4t) - 16\hat{j}(4t-1)^{-2} - \frac{\hat{k}}{2}(5-2t)^{-\frac{3}{2}} \times (-2) \end{aligned}$$

6.3. Recordatorios & rectas tangentes de funciones vectoriales

- ***Recordar lo siguiente:*** *$f'(a)$ es igual a la pendiente de la drecta tangeente a $f(x)$ en $x = a$.*
- ***Recordar lo siguiente:*** *La recta tangente.*

$$L_1: \quad y = f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \text{Ec. Recta Tangente}$$

- Con una función vectorial:

$$\begin{aligned} \vec{r} = \langle f, g, h \rangle, \qquad x = f(t),\, y = g(t),\, z = h(t) \\ \text{Hay ecuaciones paramétricas para cada variable:} \\ \vec{r}\,'(a) = \langle f'(a), g'(a), h'(a) \rangle \\ \text{Vector de pendientes de rectas tangentes a la curva } \vec{r}(t). \end{aligned}$$

- La derivada de una función vectorial se le da elnombre de **"vector tangente"** $\vec{r}(t) : \vec{r}\,'(a)$.
- Recta tangente: es ahora una función vectorial.

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(a) + \vec{r}\,'(a)t$$

- Ecs. Paramétricas:

$$x = f(a) + f'(a)t$$
$$y = g(a) + g'(a)t$$
$$z = h(a) + h'(t)t$$

- Vector tangente: $r'(a)$ en $t = a$
- Vector tangente unitario: $\frac{r'(a)}{|r'(a)|} = \vec{T}(a)$

6.4. Ejercicios

- Encuentre las ecs. paramétricas de la recta tangente a la curva : $s(t) = \langle 2\cos(t), 2\sin(t), 4\cos(2t)\rangle$ en el punto $(\sqrt{3}, 1, 2)$:

$$\text{Recta tangente:} \quad \vec{r}_T(t) = \vec{r}(a) + t\vec{r}\,'(a)$$
$$\vec{r}_T(a) = \left\langle \sqrt{3}, 1, 2 \right\rangle$$
$$\text{Derivada:} \quad \vec{r}\,'(t) = \langle -2\sin(t), 2\cos(t), -8\sin(2t)\rangle$$
$$\textbf{Nos preguntamos: } \text{¿Cómo encuentro “a” ? igualamos} \quad r(t) = \left\langle \sqrt{3}, 1, 2 \right\rangle$$
$$2\cos(t) = \sqrt{3} \implies \cos(t) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \implies t = \tfrac{\pi}{6}$$
$$2\sin(t) = 1 \implies 2\sin(\tfrac{\pi}{6}) = 2 \times \tfrac{1}{2} = 1$$
$$4\cos(2t) = 2 \implies 4\cos(\tfrac{\pi}{3}) = 4 \times \tfrac{1}{2} = 2$$
$$\text{Vector tangente:} \quad \vec{r}\,'(\frac{\pi}{6}) = \left\langle -2\sin(\frac{\pi}{6}), 2cos(\frac{\pi}{6}), -8\sin(\frac{\pi}{3}) \right\rangle$$
$$\vec{r}_T(t) = \left\langle \sqrt{3}, 1, 2 \right\rangle + t\left\langle -1, \sqrt{3}, -4\sqrt{3} \right\rangle$$
$$\therefore$$
$$x = \sqrt{3} - 1t$$
$$y = 1 + \sqrt{3}t$$
$$z = 2 - 4\sqrt{3}t$$

Capítulo 7

Clase - 2020-02-11

7.1. 13.2 Cálculo de funciones vectoriales

- Derivadas:

$$\vec{r}\,'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

- Vector Tangente:

$$\vec{r}\,'(t)$$

- Tangente unitario:

$$\vec{T}(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

- Integrales indefinidas:

$$\int \langle f, g, h \rangle \, dt = \langle F + C_1, G + C_2, H + C_3 \rangle$$

$$\int \vec{r}(t)dt = \vec{R}(t) + \vec{C}$$

$$\vec{R} \quad \text{vector de Antiderivadas}$$
$$\vec{C} \quad \text{Vector de constantes}$$

- Integrales definidas:

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \hat{i}\int_a^b f(t)dt + \hat{j}\int_a^b g(t)dt + \hat{k}\int_a^b h(t)dt$$

7.2. Ejercicios de integración

1. $\int_0^1 \left[\frac{4}{1+t^2}\hat{i} + sec^2(\frac{\pi t}{4})\right] dt$:

$$4\hat{i} \times \tan^{-1}(t)\Big|_0^1 + \hat{k} \times \tan(\frac{\pi t}{4})\Big|_0^1$$
$$I_i = 4\hat{i}\frac{\pi}{4} + \hat{k}\frac{4}{\pi} = pi\hat{i} + \hat{k}\frac{4}{\pi} = \left\langle \pi, 0, \frac{4}{\pi} \right\rangle$$

2. $\int \left\langle te^{t^2}, te^t, \frac{q}{\sqrt{1-t^2}} \right\rangle dt$:

$$x: \quad \int e^{t^2} t \, dt = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^{t^2} + C_1$$
$$u = t^2$$
$$du = 2tdt$$

$$y: \quad \int te^t dt = te^t - \int te^t - e^t + C_2$$

$$\begin{matrix} u = t & dv = e^t dt \\ du = dt & v = e^t \end{matrix} t: \quad \int \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta = \int d\theta = \underbrace{\theta + C_3}_{\sin^{-1}(t)+C_3} = \sin^{-1}(t) + C_3$$

$$\therefore \quad \int \left\langle te^{t^2}, te^t, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right\rangle dt = \frac{1}{2}et^{t^2} + C_1, te^t - e^t + C_2, \sin^1(t) + C_3$$

7.3. Movimiento en el espacio

Dado el vector posición $\vec{r}(t)$ de un objeto:

- Vector velocidad:

$$\vec{c}(t) = \vec{r}\,'(t)$$

- Vector aceleración:

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,(t) = \vec{r}\,''(t)$$

- Rapidez:

$$|\vec{v}(t)|$$

- Distancia:

$$|\vec{r}(t)|$$

Dado el vector de aceleración $\vec{a}(t)$:

- Velocidad:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt + \vec{C}_1$$

- Desplazamiento o posición:

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt + C_2$$

7.3.1. Ejercicios

1. Encuentre la velocidad, aceleración y rapidez dada la posición del objeto:

$$
\begin{aligned}
& \vec{r}(t) = \hat{\imath}t + 2\hat{\jmath}\cosh(4t) + 3\hat{k}\sinh(3t) \\
\text{Encontramos velocidad:} \quad & \vec{r}\,'(t) = \vec{v}(t) = \hat{\imath} + 8\hat{\jmath}\sinh(4t) + 9\hat{k}\cosh(3t) \\
\text{Encontramos la aceleración:} \quad & \vec{r}\,''(a) = \vec{a}(t) + 32\hat{\jmath}\cosh(4t) + 27\hat{k}\sinh(3t) \\
\text{Encontramos la rapidez:} \quad & |\vec{v}(t)| = \sqrt{1 + 64\sinh(4t) + 81\sinh^2(3t)} \\
\text{Encontramos la distancia:} \quad & |\vec{r}(t)| = \sqrt{t^2 + 4\cosh^2(4t) + 9\sinh^2(3t)}
\end{aligned}
$$

\# Tarea # 6: Integrales func. vectoriales 14.1 Funciones en varias variables.

\# Tarea opcional consolidado: 12,13,14.1

2. Encuentre la velocidad y posición del objeto dada $\vec{a}(t)$ y las condiciones iniciales:

$$
\vec{a}(t) = 6t\hat{\imath} + \hat{\jmath}\cos(t) - \hat{k}\sin(2t), \quad \vec{v}(0) = \begin{matrix} \hat{\imath} + \hat{k} \\ \vec{r}(0) = 2\hat{\jmath} - \hat{k} \end{matrix}
$$

$$
\text{Velocidad:} \quad \int \vec{a}(t)dt
$$

$$
\vec{v}(t) = \left\langle 3t^2 + C_1, \sin(t) + C_2, \frac{1}{2}\cos(2t) + C_3 \right\rangle
$$

$$
\text{Encuentro } \vec{v}(0) = \left\langle C_1, C_2, \frac{1}{2} + C_3 \right\rangle = \langle 1, 0, 1 \rangle
$$

$$
\text{Resolver para las constantes:} \quad \begin{matrix} C_1 = 1, \\ C_2 = 0, \\ \frac{1}{2} + C_3 = 1 \quad \Longrightarrow \quad C_3 = \frac{1}{2} \end{matrix}
$$

$$
\text{Posición:} \quad \int \vec{v}(t)dt
$$

$$
\vec{r}(t) \left\langle t^3 + t + d_1, -\cos(t) + d_2, \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2} + d_3 \right\rangle
$$

$$
\vec{r}(0) = \left\langle \quad \underbrace{d_1, -1 + d_2, d_3}_{\begin{matrix} d_1 = 0 \\ -1 + d_2 = 2 \implies d_2 = 3 \\ d_3 = -1 \end{matrix}} \quad \right\rangle
$$

$$
\text{Posición:} \quad \vec{r}(t) = \left\langle t^3 + t, 3 - \cos(t), \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2} - 1 \right\rangle
$$

3. $\vec{a}(t) = 8t\hat{\imath} + \sinh(t)\hat{\jmath} - \hat{k}e^{\frac{t}{2}}$:

$$\underbrace{\vec{v}(0)=\vec{0}}_{\text{Está en reposo}} \qquad \vec{s}(0)=2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$$

$$\text{Velocidad:} \quad \vec{v}(t)=\left\langle 4t^2+C_1, \cosh(t)+C_2, -2e^{\frac{t}{2}}+C_3 \right\rangle$$

$$\vec{v}(0)=\left\langle \underbrace{C_1, 1+C_2, -2+C_3}_{\substack{C_1=0,\\ C_2=-1\\ C_3=2}} \right\rangle = \langle 0,0,0\rangle$$

$$\vec{v}(t)=\left\langle 4t^2, \cosh(t)-1, -2e^{\frac{t}{2}+2} \right\rangle$$

$$\text{Posición:} \quad \vec{r}(t)=\left\langle \frac{4}{3}t^3+C_1, \sinh(t)-t+C_2, -4e^{\frac{t}{2}}+2t+C_3 \right\rangle$$

$$\vec{r}(0)=\langle C_1, C_2, -4+C_3\rangle = \underbrace{\langle 2,1,-3\rangle}_{C_2=1}$$

$$C_3=-3+4=1$$

$$\vec{r}(t)=\left\langle \frac{4}{3}t^3+2, \sinh(t)-t+1, -4e^{\frac{t}{2}}+2t+1 \right\rangle$$

\# Se evalúa el vector en 0 por que se quiere saber el valor de las constantes cuando están en reposo.

\# Por defecto siempre evaluar en 0 para encontrar $C_1, C_2 \& C_3$.

7.4. 13.3 Longitud de arco

10.4 Ecs. Paramétricas de una curva en el plano de dos dimensiones era:

$$x=f(t)$$
$$y=g(t)$$

- La longitud de arco:

$$L=\int_a^b \sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}dt$$

- Función vectorial:

$$\vec{r}=\langle f,g,h\rangle=\langle x,y,z\rangle$$

- Derivada de función vectorial:

$$\vec{r}\,'=\langle x',y',z'\rangle$$

- Magnitud:

$$|\vec{r}\,'|=\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}$$

- En general:

$$L=\int_a^b = |\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

7.5. Ejercicios

Encuentre la longitud de las siguientes curvas:

1. $\vec{r}(t) = \langle \cos(t), \sin(t), \ln(\cos) \rangle$ en $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\vec{r}\,'(t)|\, dt$$

$$\vec{r}\,'(t) = \left\langle -\sin(t), \cos(t), \tan^2(t) \right\rangle$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + \tan^2(t)} = \sqrt{1 + \tan^2(t)} = \sec^2(t) = \sec^2(t)$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(t)dt = \ln|\sec(t) + \tan(t)|\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left|\sec(\frac{\pi}{4}) + \tan(\frac{\pi}{4})\right| - \ln|\sec(0) + \tan(0)|$$

$$L = \ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right| - \ln|1| = \ln\left|\sqrt{2} + 1\right|$$

2. $\vec{r}(t) = \left\langle 12t, 8t^{\frac{3}{2}}, 3t^2 \right\rangle$ en $0 \leq t \leq 1$:

$$\vec{r}\,'(t) = \left\langle 12, 12t^{\frac{1}{2}}, 6t \right\rangle = 6\left\langle 2, 2t^{\frac{1}{2}}, t \right\rangle$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = 6\sqrt{4 + 4t + t^2} = 6\sqrt{(t+2)^2} = 6(t+2)$$

$$L = \int_0^1 (6t + 12)dt = 3t^2 + 12t\Big|_0^1 = 3 + 12 = 15$$

Capítulo 8

Clase - 2020-02-11

8.1. Resolución de corto

1. Analice la función $r = \left\langle 3e^{-t}, ln(2t^2 - 1), \tan(2\pi) \right\rangle$ en $t = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 1} \vec{r}(t) &= \left\langle \lim_{t \to 1} 3e^{-t}, \lim_{t \to 1} ln(2t^2 - 1), \lim_{t \to 1} \tan(2\pi) \right\rangle \\ \vec{r} &= \left\langle 3e^{-1}, ln(1), \tan(2\pi) \right\rangle = \left\langle 3e^{-1}, 0, 0 \right\rangle \\ \therefore &\quad \text{r es contínua en t=1} \end{aligned}$$

Si la pregunta hubiese sido en cuándo se indefine, se saca el dominio de cada función.

2. Encuentre la ec. de la recta tatente a $r(t) = \left\langle te^{t-1}, \frac{8}{\pi} \arctan(t), 2\ln(t) \right\rangle$ en $t = 1$.

$$\begin{aligned} \vec{r}(0) = \left\langle 1 \times e^0, \frac{8}{\pi} \arctan(1), 2ln(0) \right\rangle &= \langle 1, 2, 0 \rangle \\ &\text{Terminar de copiar} \end{aligned}$$

8.2. 14.1 Funciones de varias variables

- Cuando teníamos sólo una función de una variable no había tanta complicación, las gráficas eran curvas en el plano. Cuando empezaba y terminaba la curva en x nos daba el dominio. Había una variable independiente x y la variable dependiente y, los dominios eran intervalos, y cada x sólo podía tener **un** sólo valor de y.
- En funciones de 2 variables se va a describir como:

$$\begin{aligned} z = f(x, y) \quad & \text{Dos variables independientes x,y} \\ & \text{Variable dependiente z} \end{aligned}$$

  - Entonces f es una regla que asigna a cada punto (x, y) a lo sumo un valor de z.

$$f: \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{Dominio}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Rango}}$$

- Estamos pasando de una región por medio de una función z llego a tener $f(x, y)$ en la dimensión correspondiente.
- Los dominios en estas funciones se vuelven superficies.

- El dominio de una función de dos variables: un conjunto que consiste de todos los puntos o pares ordenados (x, y) para los cuales $f(x, y)$ para los cuales $f(x, y)$ está definida.

$$\mathbb{D}: \quad \text{En una dimensión: Todos los números x para los cuales f(x) está definida}$$

- Evite la división por cero.
- Raíces pares de números negativos.
- Logaritmos de números negativos o cero.

- El dominio de f en una función de dos variables es una región:
  - Las regiones que estén sombreadas son partes del dominio.

  # Para graficar funciones de dos variables son más fáciles de graficar que de una sola variable.

8.3. Ejercicios

Encuentre y bosqueje el dominio de las sigs. funciones.
Sombree la región dque es parte del $\mathbb{D}$ y utilice líneas discontínuas para denotar a curvas que no son parte del $\mathbb{D}$

1. $c(x, y) = 10x + 20y$:

$$\text{Nunca se indefine.}$$

$$\mathbb{D}: \underbrace{(-\infty, \infty)}_{x} \underbrace{\times}_{\text{Producto cartesiano}} \underbrace{(-\infty, \infty)}_{y} = \mathbb{R}^2$$

   # Producto cartesiano denota **todas las combinaciones posibles en un conjunto de n elementos**.

   # Explicaciones de productos cartesianos:

$$\mathbb{R} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

   # Definición de producto cartesiano:

$$x \times y = \{(x, y) \ \text{ tal que } \ x \in X,\, y \in Y\}$$

   # Producto cartesiano vs. unión:

$$x \times y = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$
$$x \cup y = \{(1),(2),(3)\}$$

2. $z = \frac{8}{x^2 - y^2}$:

$$\begin{aligned} \text{Definida si } \ x^2 &\neq y^2 \\ \mathbb{R}^2 - \{x^2 &\neq y^2\} \\ y &\neq \sqrt{x^2} \\ y &\neq \pm x \end{aligned}$$

3. $R(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$:

$$\begin{aligned} 9 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ \text{Definida} \quad 9 \geq x^2 + y^2 \\ \mathbb{D} : x^2 + y^2 \neq 9 \end{aligned}$$

$$\text{Círculo de radio 3 centrado en el orígen}$$

$$\mathbb{D} = \{(x,y) \ \text{ tal que } \ x^2 + y^2 \leq 9\}$$

4. $Q(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$:

$$\mathbb{D} : \begin{array}{l} x^2 + y^2 > 0 \\ x^2 + y^2 > 9 \end{array}$$

$$\therefore \text{ Afuera del círculo o disco de radio 3}$$

5. $z = \frac{(x+4)}{(y-2)(x-4)(y+2)}$:

$$\begin{aligned} \text{Definida si } : &\quad y \neq \pm 2, \ x \neq 4 \\ \mathbb{D} : &\quad \mathbb{R}^2 - \{y \neq \pm 2, x \neq 4\} \end{aligned}$$

6. $h(x,y) = \ln(2 - yx)$:

$$\text{Definida si } : \quad \begin{array}{ll} 2 - yx & > 0 \\ 2 & > yx \\ y & < \frac{2}{x} \end{array}$$

$$\therefore \mathbb{D} : \ y < \frac{2}{x}$$

8.3.1. Gráfica de $z = f(x,y)$

- Gráfica de $z = f(x,y)$: Son superficies y consisten de todas las *triplas* ordenadas (x,y,z) donde z.

8.4. Curva de nivel o traza horizontal

- En $f(x,y) = k$ k es una constante, rebane la superficie con los planos horizontales $z = k$ y grafique cada curva en el plano.

Capítulo 9

Clase - 2020-02-20

9.1. 14.3 Derivadas parciales

- Derivada en una dimensión:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

- En una función con dos variables independientes:

$$f(x,y) = \left.\begin{matrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{matrix}\right\} \text{ Derivadas parciales}$$

- Al derivarse parcialmente respecto a una variable, la otra se mantiene constante:

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \qquad \text{\# y se mantiene constante}$$
$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} \qquad \text{\# x se mantiene constante}$$

- Se pueden utilizar todas las reglas de derivación para funciones de 1 variable:
  - Suma
  - Producto
  - Cociente
  - Cadena
- 1 $^{\text{eras}}$ derivadas parciales de $f(x,y)$: encuentre todas las derivadas parciales posibles de f_x & f_y
  - Notación:

$$f_x = \frac{\delta f}{\delta x} = \frac{\delta z}{\delta x}$$

$$f_x = \frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\delta z}{\delta y}$$

  - Evite $f'(x,y)$ para evitar ambigüedad.

9.1.1. Ejercicios

Encuentre las derivadas parciales de las siguientes funciones.

1. $f(x,y) = 2x^2 + 3xy$: ***Recordar lo siguiente:*** $f_x(x,y)$ *&* $f_y(x,y)$

$$f_x = 4x + 3y \qquad f_y = 0 + 3x$$

2. $g(x,y) = y(x^2+1)^3 + x^2(y^4-4)^4 + 5x^2y^3$:

$$g_x = 3y(x^2+1)^2 2x + 2x(y^4-4)^4 + 10xy^3$$
$$g_y = 1 \cdot (x^2+1)^3 + 16y^3x^2(y^4-4)^3 + 15x^2y^2$$

3. $h(s,t) = (s^2+10t)^2 \cdot (t^4+s^3)^3$: # Regla del producto y de la cadena.

$$h_s = 4s(s^2+10t)^1 \cdot (t^4+s^3)^3 + 3 \cdot 3s^2(s^2+10t)^2 \cdot (t^4+s^3)^2$$
$$h_t = 20(s^2+10t)^1 \cdot (t^4+s^3)^3 + 12t^3(s^2+10t)^2, .(t^4+s^3)^2$$

Evalúe la derivada en punto (a,b):

$$f_x(a,b) = \frac{\delta f}{\delta x}\Big|_{(a,b)}$$

1. $w(r,\theta) = r^2\sin(2\theta) + e^{\pi r - \theta}$, encuentre $\frac{\delta w}{\delta \theta}\Big|_{(2,\pi)}$

$$\frac{\delta w}{\delta \theta} = 2r^2\cos(2\theta) - e^{\pi r - \theta}$$
$$\frac{\delta w}{\delta \theta}\Big|_{(2,\pi)} = w_\theta(2,\pi) = 2 \cdot 4\cos(2\pi) - e^{2\pi - \pi}$$
$$= 8 - e^{\pi}$$

9.2. Derivadas parciales par funciones de 2 o más variables

- Se deriva respecto a una variable y el resto se mantienen constantes.

$$w = f(x,y,z)$$

3 1 $^{\text{eras}}$ derivadas parciales: f_x, f_y, f_z.

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

n derivadas parciales:

$$\frac{\delta u}{\delta x}, \cdots \frac{\delta u}{\delta x_n}$$

9.2.1. Ejercicio

Encuentre todas las primeras derivadas pariales de las sigentes funciones:

- $f(x, y, z) = \sqrt[4]{x^4 + 8xz + 2y^2}$

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{4}(x^4 + 8xz + 2y^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot (4x^3 + 8z + 0) \\ f_y &= \frac{1}{4}(x^4 + 8xz + 2y^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot (4y) \\ f_z &= \frac{1}{4}(x^4 + 8xz + 2y^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot (8x) \end{aligned}$$

- $p(r, \theta, \phi) = r \cdot \tan(\phi^2 - 4\theta)$:

$$\begin{aligned} p_r &= \tan(\phi^2 - 4^\theta) \\ p_\theta &= -4r \sec^2(\phi^2 - 4\theta) \\ p_\phi &= 2\phi r \sec^2(\phi^2 - 4\theta) \end{aligned}$$

Funciones vectoriales 1 variable: $\vec{r}\,'(t), \ldots$

9.3. Derivadas parciales de orden superior (pág. 100)

- Orden superior: Segundas, terceras, cuartas, etc. derivadas.
- Como $f_x(x, y)$ & $f_y(x, y)$ son también funciones en dos variables, pueden tener derivadas parciales.

$$\begin{tikzcd} f_x \arrow[r] \arrow[dr] & f_{xx} & f_y \arrow[r] \arrow[dr] & f_{yy} \\ & f_{xy} & & f_{yx} \end{tikzcd}$$

- Las segundas derivadas parciales, éstas también tienen sus derivadas parciales, terceras derivadas parciales.

$$\begin{matrix} f_{xxx} & f_{xxy} & f_{yyy} & f_{yxy} \\ f_{xxy} & f_{xyx} & f_{yyx} & f_{yxx} \end{matrix}$$

- Las derivadas parciales cruzadas f_{xy} & f_{yx} son iguales si la función es diferenciable.

$$f_{xy} = f_{yx} \qquad f_{xyy} = f_{yyx} = f_{yxy}$$

- Notación delta:

$$f_{xx} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \qquad f_{yy} = \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$$
$$f_{xy} = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} \qquad f_{yx} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta y}$$

9.3.1. Ejercicios

Encuentre todas las 2das derivadas parciales:

1. $f(x, y) = \sin(mx + ny) \quad m, n \in \mathbb{R}$:

$$\text{Primeras derivadas parciales :}$$
$$f_x = m\cos(mx + ny)$$
$$f_y = n\cos(mx + ny)$$
$$\text{Segundas derivadas parciales:}$$
$$f_{xx} = -m^2 \sin(mx + ny)$$
$$f_{yy} = -n^2 \sin(mx + ny)$$
$$\left.\begin{aligned} f_{xy} &= -mn\sin(mx + ny) \\ f_{yx} &= -mn\sin(mx + ny) \end{aligned}\right\} \text{Iguales}$$

2. $z = \cos(2xy)$:

$$1^{\text{ eras}} : \quad \frac{\delta z}{\delta x} = -2\sin(2xy), \quad \frac{\delta z}{\delta y} = -2x\sin(2xy)$$
$$2^{\text{ das}} : \quad \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = -4y^2\cos(2xy), \quad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = -4x^2\cos(2xy)$$

Capítulo 10

Clase - 2020-02-27

10.1. Derivadas parciales, rectas tangentes y planos tangentes

10.1.1. Interpretación de la derivada parcial

- $\mathbb{C}$ curva de intersección entre $z = f(x,y)$ y $y = b$.
- Recta tantente a eta curva en el punto $(a, b, f(a,b))$:

$$\text{Derivada : } \; f_x(x,b) \qquad \text{Pendiente: } \; f_x(a,b)$$

- Derivadas parciales: $f_x(a,b)$ resulta ser la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x,b)$ en la dirección de x.

$$L = \langle a, b, f(a,b)\rangle + t\,\langle 1, 0, f(a,b)\rangle \qquad \text{donde: } \; x = t, y = b, z = f(t,b)$$

- Para encontrar L_2 $x = a$:

$$\begin{aligned} &x = a, y = t, x = f(z,y) \implies z_y = f_y(a,y) \implies z_y = f_y(a,b) \\ &z_y = f(a,b) \;\text{ es la pendiente de la tangente a la curva }\; f(a,y) \;\text{ en la dirección de }\; y \\ &L_2 = \langle a, b, f(a,y)\rangle + t\,\langle 0, 1, f_y(a,b)\rangle \end{aligned}$$

- Estas dos rectas se utilizan para construir un plano tangente a la superficie.
- La ecuación del plano es un plano que es paralelo a L_1 & L_2.

$$\begin{aligned} L_1 &= \langle a, b, f(a,b)\rangle + t\,\overbrace{\langle 1, 0, f(a,b)\rangle}^{v_1} \\ L_2 &= \langle a, b, f(a,b)\rangle + t\,\underbrace{\langle 0, 1, f(a,b)\rangle}_{v_2} \end{aligned}$$

La ec. vectorial:

$$\hat{n} \cdot (-r_0) = 0 \quad \vec{r}_0 = \langle a, b, f(a,b)\rangle$$

terminar excursión.

10.1.2. Ejercicios

- Encuentre el plano tangenge a la superficie $z = \ln(x-2y)$ en el punto $(3,1,0)$:

$$f(a,b) \quad f_x(a,b) \quad f_y(a,b) \quad a=3,\ b=1$$
$$f(3,1) = \ln(3-2) = \ln(1) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x-2y} \quad \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|^{(3,1)} = \frac{1}{3-2} = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2}{x-2y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|^{(3,1)} = \frac{-2}{3-2} = -2$$
$$z = f(3,1) + f_x(x-3) + f_y(y-1)$$

La ecuación del plano tangente: $z = 0 + x - 3 - 2y + 2$

$$\therefore \quad z = x - 2y - 1$$

10.2. Aproximaciones lineales

- La aproximación lienal de $z = f(x,y)$, linearización.
- La aproximación lineal de z en (a,b) es el plano tangente a la superficie.

$$L(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial}{}$$

10.2.1. Ejercicios

Considere la función $f(x,y) = \sqrt{2x+2e^y}$:

- Encuentre la aproximación lineal de f en el punto $(7,0)$:
  Encuentre $f(7,0) \quad f_y(7,0)$

$$f(7,0) = \sqrt{14+2} = 4$$
$$f_x(x,y) = (2x+2e^y)^{-\frac{1}{2}} \qquad f_x(0,7) = \frac{1}{\sqrt{14+2}} ? \frac{1}{4}$$
$$f_y(x,y) = \frac{e^y}{\sqrt{2x+2e^y}} \qquad f_y(7,0) = \frac{1}{\sqrt{14+2}} ? \frac{1}{4}$$

$\therefore$ La aproximación lineal o plano tangente: $L = 4 + \frac{1}{4}(x-7) + \frac{1}{4}y$

Cerca de (7,0): $\sqrt{2x+2e^y} \approx \frac{9}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y$

- Utilice la aproximación lineal para aproximar el valor de $\sqrt{8+2e}$:

$$f(4,1) = \sqrt{8+2e} \approx 3{,}5 \approx L(4,1)$$
$$L(4,1) = \frac{9}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

En realidad : $\sqrt{8+2e} \approx 3{,}665592$

- Ejercicio 3: Encuentre la aproximación lineal de $g(x,y) = 1 + \ln(xy - 5)$ en el punto $(2,3)$:

$$\begin{aligned}
g(2,3) &= 1 + 2\ln(6-5) = 1 + 0 = 1 \\
g_x(x,y) &= 0 + 1 \cdot \ln(xy-5) + \frac{xy}{xy-5} \\
g_x(2,3) &= \ln(1) + \frac{6}{6-5} = 0 + \frac{6}{1} = 6 \\
g_y(x,y) &= 0 + \frac{x \cdot x}{xy-5} \\
g_y(2,3) &= \frac{4}{6-5} = 4
\end{aligned}$$

La aproximación lineal entonces es:

$$\begin{aligned}
&\therefore \\
L(x,y) &= 1 + 6(x-2) + 4(y-3) \\
L(x,y) &= -23 + 6x + 4y
\end{aligned}$$

10.3. 12.4 Derivadas implicitas y 12.5 Regla de la cadena

- Funciones 2 variables $z = f(x,y)$
- Explícita: z no está sólo en función de x & y.
- Ejemplos: $x^2 + y^2 + z^2 = 16, \sqrt{z^2 - x^2} = y + z$
- ¿Cómo se encuetnran $\frac{\partial z}{\partial x}$ & $\frac{\partial z}{\partial y}$ **?**:
  - Implicita $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ es una esfera de 4 (rango [-4,4]) en dos hemisferios:

$$z = +\sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{2}(16 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{z} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{y}{z}
\end{aligned}$$

- Derivación implicita, se pueden encontrar z_x & z_y sin necesidad de resolver para z.

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2=16 \quad & \text{z \& y son independientes} \\
\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2(x,y)) &= \frac{\partial}{\partial x}(16) \\
2x+0+2z\frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\
2z\frac{\partial z}{\partial x} = -2x \quad \implies \quad & \frac{\partial z}{\partial x}?\frac{-x}{z} \\
\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2) &= \frac{\partial}{\partial y}(0) \\
0+2y+2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \implies \quad & \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{z}
\end{aligned}
$$

10.3.1. Derivación parcial implícita abreviada

- $x^2+y^2+z^2=16$ como $x\ln(y)+x^2\sqrt{1+x+z}=k$
- Forma implícita: $F(x,y,z(x,y))=$ constante. $\frac{\partial z}{\partial x}$ use la regla de la cadena.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad &\implies \quad z_x = -\frac{f_x}{f_z} \\
\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad &\implies \quad z_y = -\frac{f_y}{f_z}
\end{aligned}
$$

10.3.2. Ejercicios

Encuentre las primeras derivadas parciales de z.

1. $\ln(zy)+9z-xyz=1$:

$$
\begin{aligned}
F_x &= -yz & \tfrac{\partial z}{\partial x} &= -\tfrac{F_x}{F_y} = \tfrac{yz}{z^{-1}+9-xy} \\
F_y &= y^{-1}+0-xy & \tfrac{\partial z}{\partial y} &= \tfrac{xz-y^{-1}}{z^{-1}+9-xy} \\
F_z &= z^{-1}+9-xy
\end{aligned}
$$

\# Sin derivación parcial implícita

\# $z(x,y)$ agregue z_x cada vez que aparece z.

$$
\frac{yz_x}{z_y}+9z_x-y_x
$$

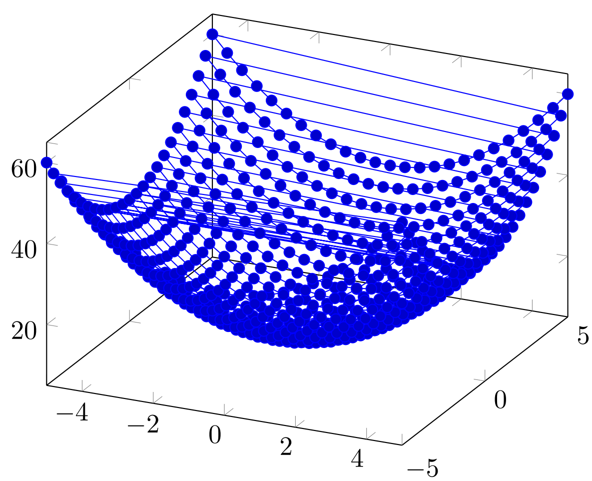
Capítulo 11

Clase - 2020-03-10

11.1. Parcial 2

- Planos tangentes y aproximaciones lineales
- Regla de la cadena
- Derivación implícita
- Derivada direccional o razón de cambio en f en la dirección de $\vec{u}$

11.2. 14.7 Máximos y mínimos



- Máximo relativo:
  - $f(a, b) > f(x, y)$
  - (x, v) cerca de (a, b)
- Mínimo relativo:
  - $f(a, b) < f(x, y)$
  - (x, y) cerca de (a, b)

11.2.1. En funciones de una variable

- Números críticos: $f'(c) = 0$ ó $f'(c) =$ indef.
- 2da derivada:

$$\begin{aligned} f'(c) < 0 &\qquad \text{Máximo relativo} \\ f'(c) > 0 &\qquad \text{Mínimo relativo} \\ f'(c) = 0 &\qquad \text{Inconcluso} \end{aligned}$$

11.2.2. En funciones de dos variables

- Puntos críticos:

$$f_x(a,b) = 0 \qquad \& \qquad f_y(a,b) = 0$$

- No es suficiente:

$$\begin{aligned} f_{xx} < 0 &\qquad \& \; f_{yy} < 0 \quad \text{Máx relativo} \\ f_{xx} > 0 &\qquad \& \; f_{yy} > 0 \quad \text{Mín relativo} \end{aligned}$$

- Prueba de la segunda derivada: (a,b) es un punto crítico y $f(x,y)$ tiene segundas derivadas continuas.

$$D(a,b) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

- Entonces:
  - Máximo relativo: $D(a,b) > 0$ & $f_{xx} < 0$
  - Mínimo relativo: $D(a,b) > 0$ & $f_{xx} > 0$
  - Punto de silla: $D(a,b) < 0$ no hay ni mínimo ni máximo.
  - Inconcluso: $D(a,b) = 0$
- Ejemplo: Considere la función $z = x^2 + y^2$.
  - Puntos críticos:

$$\begin{aligned} z_x = 2x = 0 \\ z_y = -2y = 0 \\ \text{Prueba de la segunda derivada} \\ \begin{vmatrix} 2 & 000 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

11.2.3. Ejercicios máximos y mínimos

1. Encuentre los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones.

   - $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 6x + 16y$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2x - 6 = 0 \implies x = 3 \\ f_y = 8y + 16 = 0 \implies y = -2 \end{array}\right\} \text{Único punto crítico en:} \quad (3,-2)$$

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 16 \quad 16 > 0$$

$$f_{xx} = 2 \quad 2 > 0$$

$$\text{Valor mínimo} : \quad f(3,-2) = -25$$

   - $g(x,y) = 2x^2 + xy + y^2 + 100$

$$g_x = 4x + 4 = 0 \quad \implies \quad y = -4x \quad impliesy = 0$$

$$g_y = x + 2y = 0 \quad implies \quad x - 8x = -9x = 0 \quad implies \quad x = 0$$

#Resolver ecuaciones

Único punto crítico

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7 \quad \implies 7 > 0$$

$$g_{xx} = 4 > 0$$

Valor mínimo relativo:

$$g(0,0) = 100$$

   - $h(x,y) = 30 - x^2 - 2y^2 + 4x - 12y$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Encontrar pts. críticos} : \quad h_x = 2x - 4 = 0 \\ \text{Encontrar pts. críticos} : \quad h_y = -4y - 12 = 0 \end{array}\right\} x = -\frac{4}{2} = 2$$

$$y = \frac{12}{-4} = -3$$

Único número crítico es (2,-3)

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 > 0 \qquad h_{xx} = -2 < 0$$

Máximo relativo en (2,-3) 38

2. Una caja de cartón sin tapa, debe de tener un volúmen de $32,000 cm^3$, calcule las dimensiones x, y, z que minimicen el cartón utilizado.

$$\text{Volúmen:} \quad V = xyz = 32,000$$

$$\text{Área:} \quad A = 2zy + 2zx + xy$$

Tengo que minimizar el área

$$A = 2zy + 2zx + xy \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{32,000}{xy}$$

$$x, y, z > 0$$

$$A(x,y) = 64,000 \cdot \frac{y}{xy} + 64,000\frac{x}{xy} + xy$$

$$A(x,y) = \frac{64,000}{x^2} + \frac{64,000}{y} + xy$$

$$A_x = 0: \quad \frac{-64,000}{x^2} + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 64,000x^{-2}$$

$$A_y = 0: \quad \frac{-64,000}{y^2} + x = 0 \quad \Longrightarrow \quad [64,000]^2 x^{-4}$$

$$\text{Sustituya en Ay} \quad \frac{-64,000}{(64,000)^2 x^{-4}} + x = 0$$

$$-\frac{x^4}{64,000} = -x$$

$$x = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{1,000} = 4 \cdot 10 = 40$$

$$y = \frac{64,000}{x^2} = \frac{64 \cdot 1,000}{16 \cdot 100} = 4 \cdot 10 = 40$$

$$z = \frac{32,000}{40 \cdot 40} = \frac{32,000}{16,000} = 20$$

$\therefore$ Las dimensiones que minimizan el área es: $x = y = 40, \quad z = 20$

3. Discriminación de precios:

- Demanda:

$$\left.\begin{array}{r} p_1 = 104 - q_1 \\ p_2 = 84 - q_2 \end{array} \text{Producción:} \ q_1, q_2 \right\}$$

- Costos:

$$C = 600 + 4q_1 + 4q_2$$

- Encuentre los precios y las cantidades q_1 & q_2 a la que deben venderse los productos para maximizar la utilidad.

$$
\begin{aligned}
\text{Utilidad} \ = \ \text{Ingresos} \ - \ \text{Costos} \\
\text{Utilidad} \ : \quad u(q_1, q_2) = p_1 q_1 + p_2 q_2 - 600 - 4_q 1 - 4q_2 \\
u(q_1, q_2) = 104q_1 - q_1^2 + 84q_2 - q_2^2 - 600 - 4q_1 - 4q_2 \\
u(q_1, q_2) = -q_1^2 - q_2^2 + 100q_1 + 80q_2 - 600 \\
\frac{\partial u}{\partial q_1} = -2q_1 + 100 = 0 \quad \Longrightarrow \quad q_1 = 50 \\
\frac{\partial u}{\partial q_2} = -2q_2 + 80 = 0 \quad \Longrightarrow \quad q_2 = 40 \\
\text{Único punto crítico:} \quad (q_1 = 50, q_2 = 40) \\
\left.\begin{array}{l} q_1 = 50 \Longrightarrow p_1 = 40 \\ q_2 = 40 \Longrightarrow p_2 = 44 \end{array}\right\} \text{discriminación} \\
\text{Utilidad máxima:} \quad u(50, 40) = 54 \cdot 50 + 44 \cdot 40 - 600 - 360 \\
2,700 + 1,760 - 960 = 35,00 \quad \text{utilidad máxima} \\
\text{Prueba de la segunda derivada} \ : \\
D(x, y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \\
v_{q_1 q_1} = -2 < 0
\end{aligned}
$$

Capítulo 12

Clase - 2020-03-12

12.1. 14.8 Multiplicadores de Lagrange

Una función de dos variables puede estar sujeta a una restricción:

$$\text{Máximo} \quad z = f(x,y) \quad \text{Sujeto A} \quad g(x,y) = c$$

Si no es posible resolver para y ó x en la restricción, el problema no se puede reducir a una sola variable. Se introduce una nueva variable, el **multiplicador de Lagrange** λ para incorporar la restricción en la función objetivo.

$$c - g(x,y) = 0$$

$$\underbrace{F(x,y,\lambda)}_{\text{Función objetivo y restricción}} = \underbrace{f(x,y)}_{\text{Objetivo}} + \lambda(\underbrace{c - g(x,y)}_{\text{Restricción}})$$

Extremos relativos: $F_x = F_y = F_\lambda = 0$

$$\begin{aligned} F_x &= f_x + \lambda g_x = 0 \\ F_y &= f_y \lambda g_y = 0 \\ F_\lambda &= c - g(x,y) = 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla f &= \lambda \nabla g \\ g(x,y) &= c \end{aligned}\right\} \text{Condiciones necesarias para un extremo relativo}$$

Problema $w = f(x,y,z)$ sujeta a $g(x,y,z) = c$

$$\begin{aligned} F(x,y,z,x) = f(x,y,z) - \underbrace{\lambda}_{\text{Variable artificial}} (c - g(x,y,z)) \\ F_x = F_y = F_z = F_x = 0 \\ \text{Condiciones: } \nabla f = \lambda \nabla g \end{aligned}$$

12.1.1. Ejercicios

1. Encuentre los extremos relativos de $w = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a $2x + y - z = 18\}$restricción.

Método 1: Resolver para z

$$z = 2x + y - 18$$

Sustituya en w para obtener una función de 2 variables.

¿ Cómo se encuentra z ?

$$z = 2(6) + 3 - 18 = -3$$

Punto crítico: $(6, 3, -3)$

Prueba de la segunda derivada $\quad D(x, y) = \begin{vmatrix} W_{xx} & w_{xy} \\ W & \end{vmatrix}$

Método 2: multiplicadores de Lagrange

- La grangiano $F = w + \lambda(c - g)$

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda) &= x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(18 - 2x - y + z) \\ F_x = 2x + 2\lambda = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x = \lambda = 6 \\ F_y = 2y - \lambda = 0 \quad &\Longrightarrow \quad y = \lambda/2 = 3 \\ F_z = 2z + \lambda = 0 \quad &\Longrightarrow \quad z = -\lambda/2 = -3 \\ F_\lambda = 18 - 2x - y + z = 0 \quad &\Longrightarrow \quad 2x + y - z = 18 \end{aligned}$$

Sustituya x, y & z en la restricción.

$$2\lambda + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = 3\lambda = 18 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 6$$

2. Una caja sin tapa tiene un volúmen de 32,000 cm^3 . Encuentre las dimensiones de la caja que minimizan

   el costo.

$$\begin{aligned} \text{Volúmen} \quad V &= xyz = 32,000 \\ \text{Área Sup.} \quad A &= 2zy + 2zx + yx \\ F = A + \lambda(c - v) &= 2zy + 2zx + yx + \lambda(32,000 - xyz) \\ F_x = 2z + y - \lambda yz = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \lambda yz = y + 2z \quad (1) \\ F_y = 2z + x - \lambda xz = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \lambda xz = x + 2z \quad (2) \\ F_z = 2y + 2x - \lambda xy = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \lambda\lambda xy = 2x + 2y \quad (3) \\ F_\lambda = 32,000 - xyz = 0 \quad &\Longrightarrow \quad xyz = 32,000 \quad (4) \end{aligned}$$

Dividimos entonces $\frac{(1)}{(2)}$:

$$\frac{(1)}{(2)}: \qquad \frac{y}{x} = \frac{y+2z}{x+2z}$$

$$\cancel{yx} + 2zy = \cancel{xy} + 2zx \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{2zx}{2z} = \frac{x}{2}$$

$$\therefore \quad x = y$$

Dividimos también $\frac{(1)}{(3)}$:

$$\frac{(x)}{(3)}: \qquad \frac{z}{x} = \frac{y+2z}{2x+2y}$$

$$\cancel{2xz} + 2yz = xy + \cancel{2zx}$$

$$z = \frac{xy}{2y} = \frac{x}{2} \therefore \quad y = x, \quad z = x/2$$

Se sustituye en la restricción:

$$x \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 32,000$$

$$x^3 = 64 \cdot 1000$$

$$x = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{1,000} = 4 \cdot 10 = 19$$

Punto crítico: $x = 40$, $y = 40$, $z = 20$
Área mínima:

$$A = 2yz + 2xz + xy$$

$$A = 2(800) + 2(800) + 1,600$$

$$A = 3(1,600) = 4,800cm^2$$

12.1.2. Aplicaciónes a la economía y negocios

1. Para sustituir una orden de 100 unidades de un producto, la empresa desea distribuir la producción entre sus dos plantas. La función de costo total es:

$$C(x,y) = 0{,}1x^2 + 7x + 15y + 1,000$$

Donde x es la planta 1 y y es la planta 2.
¿ Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos ? C(0,0)=1,000.

$$\text{Objetivo mínimizar C(x,y)} \quad \text{Sujeta a} \quad x + y = 100$$

$$\text{Lagrange:} \quad F = C + \lambda(100 - x - y)$$

$$F = 0{,}1x^2 + 7x + 15y + 1,000 + 100\lambda - \lambda x - \lambda y$$

$$F_x = 0{,}2x + 7 - \lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0{,}2x = \lambda - 7 = 8 \quad \Longrightarrow \quad x = 40$$

$$F_y = 15 - \lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 15$$

$$F_\lambda = 100 - x - y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 100 - x = 60$$

$$\text{Punto crítico en } (40,60)\ x = 15$$

$$\begin{aligned} \text{Costo mínimo} \quad C(x,y) &= 0{,}1(1600) + 280 + 900 + 1,000 \\ C(x,y) &= 2,340 \end{aligned}$$

2. Una empresa tiene la función de producción

$$Q(C,K) = 12L + 20K - L^2 - 2K^2$$

La empresa tiene un presupuesto de \$88 mil para contratar trabajadores y maquinaria. Cada trabajadory cada máquina tienen un costo de \$5 y \$8 mil, resp.
Encuentre la producción máxima.

La restricción presupuestaria es la tangente a la curva de nivel en ese punto.

$$\begin{aligned} \text{Restricción:} \quad 4L + 8K &= 88 \\ \text{Maximizar Q} \quad F(L,K,\lambda) \\ F(L,K,\lambda) &= 12L + 20K - L^2 - 2K^2 + \lambda(22 - L - 2K) \\ F_L = 12 - 2L - \lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2L = 12 - \lambda \quad \Longrightarrow \quad L &= 6 - \lambda/2 \\ F_K = 20 - 4K - 2\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4K = 20 - 2\lambda \quad \Longrightarrow \quad K &= 5 - \lambda/2 \\ F_\lambda = 22 - L - 2\lambda &= 0 \\ L + 2K = 22 \qquad 6 - \frac{\lambda}{2} + 10 - \lambda &= 22 \\ -\frac{3\lambda}{2} &= 22 - 16 = 6 \\ \lambda = -4 \qquad & L \end{aligned}$$

Capítulo 13

Clases - 2020-03-19

13.1. 15.1 Integrales dobles

- Dominio de una función $z = f(x, y)$ es una región R.
- Rectángulo:

$$\begin{aligned} R &= [a, b] \times [c, d] \\ &= \{(x, y)\} \in \mathbb{R}^2 \quad a \le x \le b, \quad c \le y \le d \end{aligned}$$

  - Una gráfica de una función de dos variables es una superficie.

- Integral doble:

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dA = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} f(x_i, x_j)\, \Delta x \Delta y$$

- Las integrales son las antiderivadas de $f(x, y)$ respecto a x y respecto a y.

13.2. 15.2 Integrales iteradas

Integre:

$$A(x) = \int\limits_c^d f(x, y)\, dy$$

- Se fija x y se integra sólo respecto a y.
- Ahora integre $A(x)$ en $a \le x \le b$:

$$\int\limits_a^b A(x)\, dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x, y)\, dy dx$$

13.3. Teorema de Fubini: Integrales dobles como integrales iteradas.

- Si $f(x,y)$ es contínua en un rectángulo $R=[a,b]\times[c,d]$:

$$\iint\limits_R f((x,y))dA=\int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x,y)\,dydx=\int\limits_c^d\int\limits_a^b f(x,y)\,dxdy$$

- Pueden integrar intercambiando los órdenes y se obtiene la misma respuesta si R es un rectángulo.

13.3.1. Ejercicios

1. Evalúe las sigs. integrales dobles:

$$\int\limits_0^4\int\limits_0^6 xydxdy$$

$$=\int\limits_0^4 \frac{x^2}{2}y\Big|_{x=0}^{x=6}dy$$

y es constante

$$I_0=\int\limits_0^4(18y-0)\,dy=9y^2\Big|_{y=0}^{y=4}=9\cdot 16=144$$

Si se intercambia el orden de integración:

$$\int\limits_0^6\left(\int\limits_0^4 xydy\right)dx=\int\limits_0^6\left(\frac{xy^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=4}\right)dx$$

$$=\int\limits_0^6 8xdx$$

$$i_0=4x^2\Big|_{x=0}^{x=6}=4\cdot 36144 \qquad \text{Misma respuesta}$$

2. $I_a=\int\limits_0^1\int\limits_1^2\left(4x^3-9x^2y^2\right)dydx$

$$I_a = \int_0^1 \left(4x^3 - 3x^2y^3 \Big|_{y=1}^{y=2} \right) dx$$

$$I_a = \int_0^1 \left(8x^3 - 24x^2 - 4x^3 + 3x^2 \right) dx$$

$$I_a = \int_0^1 \left(4x^3 - 21x^2 \right) dx$$

$$\therefore \quad = x^4 - 7x^3 \Big|_{x=0}^{x=1} = 1 - 7 = 6$$

- Tomar en cuenta que no hay integrales dobles indefinidas.

$$\nexists \quad \int \int f(x, y)\, dxdy$$

3. $I_b = \int\limits_R \int \sin(x - y)\, dA \qquad R = \{(x, y)\ |0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$

$$I_b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x - y)\, dy \right) dx$$

$$I_b = \int_0^{\frac{\pi}{2}0} \cos(x - y) \Big|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} dx$$

#