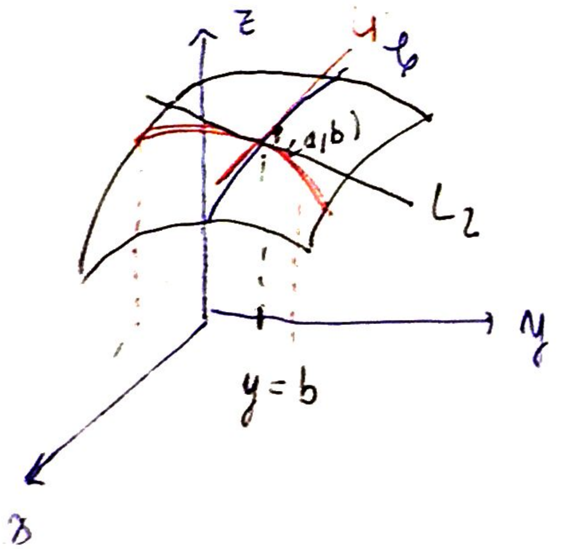
Derivadas Parciales, Rectas Tangentes y planos tangentes.

P. 101

Interpretación de la Derivada Parcial



$\mathcal{C}$ curva de intersección entre $z = f(x, y)$ y $y = b$.

Curva 1 variable $z = f(x, b)$

Recta tangente a esta curva.

punto $(a, b, f(a, b))$

derivada $f_x(x, b)$

pendiente $\boxed{f_x(a, b)}$

Derivadas Parciales. $f_x(a,b)$ pendiente de la recta tangente. a la curva $f(x, b)$ en la dirección de x.

L_1 – $L_1 = \langle a, b, f(a,b)\rangle + t\langle 1, 0, f(a,b)\rangle$.

Función vectorial $x = t \ , \ y = b \ , \ z = f(t, b)$.

Para encontrar L_2 $x = a$.

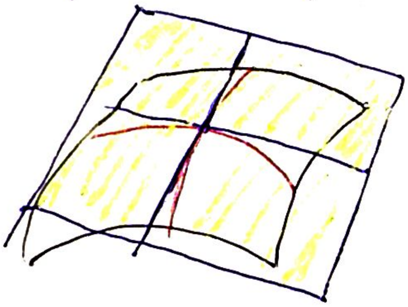
$x = a, \quad y = t \ , \quad z = f(a, y)$

$z_y = f_y(a, y) \Rightarrow \underline{z_y = f_y(a, b)}$

$z_y = f_y(a,b)$ es la pendiente de la tangente a la curva $f(a, y)$ en la dirección de y.

$$L_2 = \langle a, b, f(a,b) \rangle + t \langle 0, 1, f_y(a,b) \rangle.$$

Estas dos rectas se utilizan para construir el plano tangente a la superficie p. 103.



→ Ec. plano tangente.

plano paralelo a L_1 y a L_2.

$$L_1 = \langle a, b, f(a,b) \rangle + t \overbrace{\langle 1, 0, f_x(a,b) \rangle}^{v_1}.$$

$$L_2 = \langle a, b, f(a,b) \rangle + t \langle \underbrace{0, 1, f_y(a,b)}_{v_2} \rangle.$$

✓

Ec. vectorial $\hat{n} \cdot (r - r_0) = 0 \qquad \vec{r}_0 = \langle a, b, f(a,b) \rangle$

$$\hat{n} = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & f_x(a,b) \\ 0 & 1 & f_y(a,b) \end{vmatrix} = -f_x(a,b)\hat{i} - f_y(a,b)\hat{j} + \hat{k}$$

Ec. vectorial plano: $\langle -f_x(a,b), -f_y(a,b), 1 \rangle$

$$\langle -f_x(a,b) - f_y(a,b), 1 \rangle \cdot \langle x-a, y-b, z-f(a,b) \rangle =$$

$$-f_x(a,b)(x-a) - f_y(a,b)(y-b) + z - f(a,b) = 0.$$

$$\boxed{z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)}$$

Plano tangente a z en el punto $(a, b, f(a,b))$.

Ejercicio 1: Encuentre el plano tangente a la superficie $z = \ln(x-2y)$ en el punto $(3,1,0)$.

$f(a,b) \quad f_x(a,b) \quad f_y(a,b) \qquad a=3,\ b=1$

$f(3,1) = \ln(3-2) = \ln 1 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x-2y} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(3,1)} = \frac{1}{3-2} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2}{x-2y} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(3,1)} = \frac{-2}{3-2} = -2$$

Plano Tangente $\quad z = f(3,1) + f_x(x-3) + f_y(y-1)$

$$z = 0 + x - 3 - 2y + 2$$

$$\boxed{z = x - 2y - 1}$$

Aproximación Lineal de $z = f(x,y)$, Linearización

La aproximación lineal de z en (a,b) es el plano tangente a la superficie.

$$L(x,y) = f(a,b) + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}}_{f_x(a,b)}(x-a) + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}}_{f_y(a,b)}(y-a)$$

Ejercicio 2: Considere la función $f(x,y)=\sqrt{2x+2e^y}$

a. Encuentre la aproximación lineal de f en el punto $(7,0)$.

Encuentre $f(7,0)$ $f_x(7,0)$ $f_y(7,0)$

$f(7,0) = \sqrt{14+2} = 4.$

$f_x(x,y) = (2x+2e^y)^{-1/2}.$ $f_x(7,0) = \dfrac{1}{\sqrt{14+2}} = \dfrac{1}{4}.$

$f_y(x,y) = \dfrac{e^y}{\sqrt{2x+2e^y}}$ $f_y(7,0) = \dfrac{1}{\sqrt{14+2}} = \dfrac{1}{4}.$

Aproximación Lineal o Plano Tangente $\boxed{L = 4 + \frac{1}{4}(x-7) + \frac{1}{4}y.}$

Cerca de $(7,0)$ $\sqrt{2x+2e^y} \approx \frac{9}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y.$

b. Utilice la aproximación lineal para aproximar el valor de $\sqrt{8+2e}$. $2x=8$ $2e^y = 2e^1$

$f(4,1) = \sqrt{8+2e} \approx L(4,1)$

$L(4,1) = \frac{9}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3.5$

$\sqrt{8+2e} \approx 3.5$ En realidad $\sqrt{8+2e} \approx 3.665592.$

Ejercicio 3: Encuentre la aproximación lineal de $g(x,y) = 1 + x\ln(xy-5)$ en el punto $(2,3)$.

$$\boxed{g(2,3)} = 1 + 2\ln(6-5) = 1 + 0 = \boxed{1}$$

$$g_x(x,y) = 0 + 1\cdot\ln(xy-5) + \frac{xy}{xy-5}$$

$$\boxed{g_x(2,3)} = \ln(1) + \frac{6}{6-5} = 0 + \frac{6}{1} = \underline{6}.$$

$$\boxed{g_y(x,y)} = 0 + \frac{x\cdot x}{xy-5} \qquad g_y(2,3) = \frac{4}{6-5} = \boxed{4}$$

Aproximación Lineal:
$$L(x,y) = 1 + 6(x-2) + 4(y-3)$$
$$L(x,y) = -23 + 6x + 4y.$$

12.4 Derivación Implícita y 12.5 Regla de la Cadena

Funciones 2 variables $z = f(x,y)$

Explícita $z = x^2 + y^2$, $z = x\ln(xy-5)$, ...

Implícita: z no está sólo en función de x & y.

Ejemplos: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $\sqrt{z^2 - x^2} = y + z$.

¿Cómo se encuentran $\frac{\partial z}{\partial x}$ & $\frac{\partial z}{\partial y}$?

Implicita. $x^2+y^2+z^2=16.$ Esfera radio 4
Rango $[-4,4]$

$$z = +\sqrt{16-x^2-y^2}$$ Dos hemisferios

Rango $[0,4]$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(16-x^2-y^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{16-x^2-y^2}} = -\frac{x}{z}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Derivación Implícita se pueden encontrar z_x & z_y

SIN necesidad de resolver para z.

$$x^2+y^2+z^2 = 16.$$ x & y son independientes

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(16)$$

$$2x + 0 + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial x} = -2x \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2\right) = \frac{\partial}{\partial y}(0).$$

$$0 + 2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{z}.}$$

Derivación Parcial Implícita Abreviada.

$x^2+y^2+z^2=16$ como $x\ln y + z^2\sqrt{1+x+z} = \underline{\underline{K}}$

Forma implícita: $F(x, y, z(y,x)) = $ constante.

$\frac{\partial z}{\partial x}$, use la regla de la Cadena.

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} z_x &= -\frac{F_x}{F_z}. \\ z_y &= -\frac{F_y}{F_z}. \end{aligned}}$$

Ejemplo $x^2+y^2+z^2=16.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{2z} = \frac{-x}{z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{2z}.$$

Ejercicios: p. 108 Encuentre las primeras derivadas parciales de z.

a. $\underbrace{\ln(zy) + 9z - xyz}_{F} = 1$ $\qquad \frac{z}{zy} = \frac{1}{y}.$

$F_x = -yz.$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z.} = \frac{yz}{z^{-1}+9-xy}$

$F_y = y^{-1}+0-xz$

$F_z = z^{-1}+9-xy$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz-y^{-1}}{z^{-1}+9-xy}$

sin derivación parcial implícita derivada.

$z(x, y)$ agregue z_x cada vez que aparece z.

$$\frac{y\, z_x}{z\, y} + 9\, z_x - y z - x y\, z_x = 0.$$

$$z^{-1} z_x + 9\, z_x - x y\, z_x = y z.$$

$$z_x = \frac{y z}{z^{-1} + 9 - x y}$$

más laborioso
más cuidadoso.