

Material de apoyo - Cálculo Multivariable

David Gabriel Corzo Mcmath

2020-01-06

Índice general

I	Laboratorios	5
1.	Laboratorio #01	7
II	Tareas	9
2.	Tarea #3.	11
III	Examenes Cortos	23
3.	Examen corto #01	25
4.	Examen corto #03	27

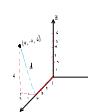
Índice general

Parte I

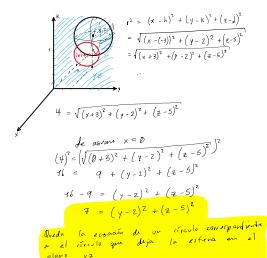
Laboratorios

Capítulo 1

Laboratorio #01

① Punto (y_1, z_1, t) al \mathbb{R}^3 

$$d = \sqrt{(y_1 - x)^2 + (z_1 - y)^2 + (t - z)^2}$$

② Encuentre la ecuación con centro $(-3, 2, 5)$ & radio 4. Intersección de la esfera con el plano xy 

③ Encuentre el radio q' centro de la esfera org

$$\text{ec: } x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 8z + 16 = 15$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 15$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 8z + 16 = 15$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 15$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2} = \sqrt{15}$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2} = 4$$

$$\text{radio: } 4$$

$$\text{centro: } (1, 2, -4)$$

④ Desglosar de los lados del triángulo $P(0,3,2)$, $Q(3,0,1)$, $R(1,2,1)$. Llamarlos, triángulo rectángulo

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Desglosar

$$|PQ| = \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2 + (1-2)^2}$$

$$= \sqrt{9+9+1} = \sqrt{19} = \sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$|PR| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(1-0)^2 + (2-3)^2 + (1-2)^2}$$

$$= \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

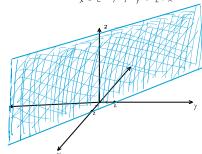
$$|QR| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(1-3)^2 + (2-0)^2 + (1-1)^2}$$

$$= \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

⑤ Dibuje & proporcione la superficie en \mathbb{R}^3 representada por la ecuación $x + y = 2$

$$x + z - y = 0 \quad ; \quad y = 2 - x$$

⑥ Dibuje & bosqueje la superficie \mathbb{R}^2 representada por la ecuación $2z = 8 - 4x$

$$2z = 8 - 4x$$

$$z = 4 - 2x$$

$$z = 4$$

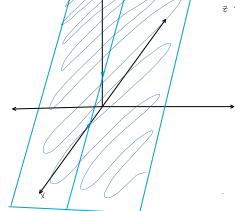
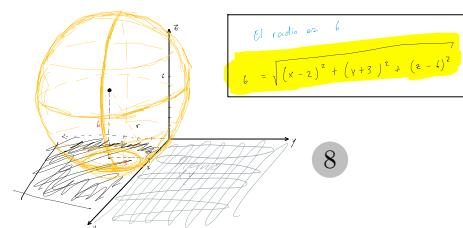
$$z = 0$$

$$y = 0$$

$$y = 4 - 2x$$

$$y = 4$$

$$y = 0$$

⑦ Bosqueje la ecuación de la esfera con centro $(2, -3, 6)$ que toca el plano xy 

Parte II

Tareas

Capítulo2

Tarea #3.

1) a. $(a \cdot b) \cdot c$ # asumiendo que a, b, c son vectores.

Resulta en un escalar.
productos punto resultan en escalares siempre

b. $(a \cdot b) \times c$

El producto cruz es entre vectores no se puede hacer entre escalares,
 $a \cdot b$ resulta en un escalar por ende no tiene sentido.

c. $(a \times b) \times c$

Resulta en un vector

d. $(a \times c) \cdot b$

Resulta en un escalar. producto cruz de a, c resulta en vector, ese vector con producto punto b resulta en escalar

2) Encuentre vectores unitarios ortogonales

a $\langle 3, 2, 1 \rangle$ & $\langle -1, 1, 0 \rangle$.

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} [(2 \cdot 0) - (1 \cdot 1)] - \hat{j} [(3 \cdot 0) - (1 \cdot -1)] + \hat{k} [(3 \cdot 1) - (2 \cdot -1)] \\
 = \hat{i} [0 - 1] - \hat{j} [0 - (-1)] + \hat{k} [3 - (-2)] \\
 = -\hat{i} - \hat{j} + 5 \hat{k} \\
 \therefore \langle -1, -1, 5 \rangle$$

Este es el vector ortogonal a
 # $\langle 3, 2, 1 \rangle$ & $\langle -1, 1, 0 \rangle$ Ahora sólo
 # falta la división por la magnitud
 # para que sea ortogonal unitario.

$$|O_{\perp}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (5)^2} = \sqrt{1 + 1 + 25} = \sqrt{27}$$

unit $\Rightarrow O_{\perp} \cdot \frac{1}{\sqrt{27}}$ $\Rightarrow \langle -1, -1, 5 \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{27}} =$

$$R_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{5}{\sqrt{27}} \right\rangle$$

invierte signos
 para encontrar
 segundo vector

$$R_2 = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{27}}, -\frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{5}{\sqrt{27}} \right\rangle$$

Comprobación de ser unitarios.

$$1 = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{27}}\right)^2}$$

$$1 = \sqrt{\left(\frac{1}{27}\right) + \left(\frac{1}{27}\right) + \left(\frac{25}{27}\right)}$$

$$1 = \sqrt{\frac{1 + 1 + 25}{27}}$$

$$1 = \sqrt{\frac{27}{27}}$$

$$1 = 1$$

\therefore es unitario & ortogonal.

- 3) Calcula el triple producto escalar entre $a = \langle 1, 2, 3 \rangle$ & $b = \langle 3, 2, 5 \rangle$ & $c = \langle 0, 4, 3 \rangle$ i $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$

$$\begin{aligned}
 a \times c &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}[(2 \cdot 3) - (5 \cdot 4)] - \hat{j}[(3 \cdot 3) - (5 \cdot 0)] + \hat{k}[(3 \cdot 4) - (2 \cdot 0)] \\
 &= \hat{i}[6 - 20] - \hat{j}[9 - 0] + \hat{k}[12 - 0] \\
 &= \hat{i}[-14] - \hat{j}[9] + \hat{k}[12] \\
 &= -14\hat{i} - 9\hat{j} + 12\hat{k} \\
 &= \langle -14, -9, 12 \rangle
 \end{aligned}$$

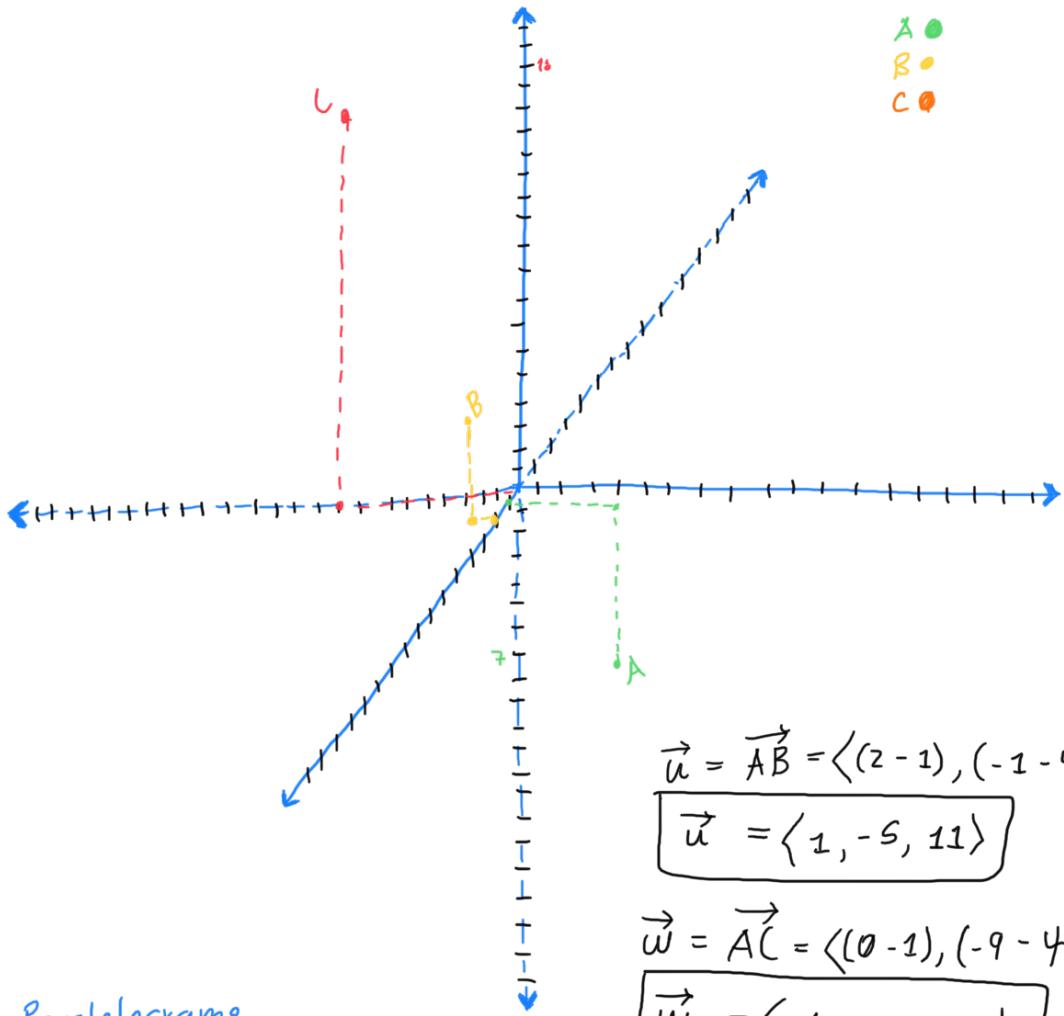
$$\begin{aligned}
 a \cdot (b \times c) &= \langle 1, 2, 3 \rangle \cdot \langle -14, -9, 12 \rangle \\
 &= \langle (1 \cdot -14), (2 \cdot -9), (3 \cdot 12) \rangle \\
 &= -14 - 18 + 36 = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a \times b &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}[(2 \cdot 5) - (3 \cdot 2)] - \hat{j}[(1 \cdot 5) - (3 \cdot 2)] + \hat{k}[(1 \cdot 2) - (3 \cdot 2)] \\
 &= \hat{i}[10 - 6] - \hat{j}[5 - 9] + \hat{k}[2 - 6] \\
 &= \hat{i}[4] - \hat{j}[-4] + \hat{k}[-4] \\
 &= 4\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k} \\
 &= \langle 4, 4, -4 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a \times b) \cdot c &= \langle 4, 4, -4 \rangle \cdot \langle 0, 4, 3 \rangle \\
 &= 0 + 16 - 12 = 4
 \end{aligned}$$

$\therefore a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$ Sí es igual ya que los dos dan 4, el mismo resultado.

- 4) Calcule el área del paralelogramo entre los puntos $A(1, 4, -2)$, $B(2, -1, 1)$, $C(0, 1, 0)$ y $D(-1, 1, 1)$



Paralelogramo

$$P = b \cdot a$$

$$\text{base} = |\vec{u}|$$

$$\text{altura} = |b| \sin \theta$$

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -5 & 11 \\ -1 & -13 & 25 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\begin{aligned} \dots &= \hat{i} [(-5 \cdot 25) - (11 \cdot -13)] - \hat{j} [(1 \cdot 25) - (11 \cdot -1)] + \hat{k} [(1 \cdot -13) - (-5 \cdot -1)] \\ &= \hat{i} [-125 + 143] - \hat{j} [25 + 11] + \hat{k} [-13 - 5] = \\ &= 18\hat{i} - 36\hat{j} - 18\hat{k} \\ &= \langle 18, -36, -18 \rangle \end{aligned}$$

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = \sqrt{18^2 + (-36)^2 + (-18)^2} = 18\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} = 9\sqrt{6}$$

5) Considera los puntos $P(1,0,1)$ & $Q(-2,1,3)$ & $R(4,2,5)$.

a) Encuentre el vector no cero ortogonal al plano

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (-2-1), (1-0), (3-1) \rangle$$

$$\boxed{\vec{u} = \langle -3, 1, 2 \rangle}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{PR} = \langle (4-1), (2-0), (5-1) \rangle$$

$$\boxed{\vec{w} = \langle 3, 2, 4 \rangle}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i} [(1 \cdot 4) - (2 \cdot 2)] - \hat{j} [(-3 \cdot 4) - (3 \cdot 2)] + \hat{k} [(-3 \cdot 2) - (3 \cdot 1)] \\ &= \hat{i} [4 - 4] - \hat{j} [-12 - 6] + \hat{k} [-6 - 3] \\ &= 0\hat{i} + 18\hat{j} - 9\hat{k}\end{aligned}$$

∴ $\langle 0, 18, -9 \rangle$ es el vector ortogonal no cero al plano.

b) Determine el área del triángulo PQR

$$\begin{aligned}A_{\Delta} &= \frac{1}{2} |\vec{v} \times \vec{w}| = \frac{1}{2} \underbrace{|\langle 0, 18, -9 \rangle|}_{\sqrt{0^2 + 18^2 + (-9)^2}} \\ &\quad \sqrt{324 + 81} \\ &\quad \sqrt{405}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{405} = \frac{1}{2} 9 \cdot \sqrt{5} = \frac{9 \cdot \sqrt{5}}{2} \leftarrow \text{es el .}$$

≈ 10.06

- b) Volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $a = \langle 1, 2, 3 \rangle$; $b = \langle -1, 1, 2 \rangle$; $c = \langle 2, 1, 4 \rangle$.

$$V_p = |a \cdot (b \times c)| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{i}[(1 \cdot 4) - (1 \cdot 2)] - \hat{j}[(-1 \cdot 4) - (2 \cdot 2)] + \hat{k}[(-1 \cdot 1) - (2 \cdot 1)]$$

$$\dots = \hat{i}[4 - 2] - \hat{j}[-4 - 4] + \hat{k}[-1 - 2] = 2\hat{i} + 8\hat{j} - 3\hat{k}$$

Ahora $\hat{i} = 1$; $\hat{j} = 2$; $\hat{k} = 3$; (por vector a)

$$= 2(1) + 8(2) - 3(3)$$

$$= 2 + 16 - 9 = 18 - 9 = 9$$

es el volumen del paralelepípedo a, b, c.

- 7) ¿Están los pts. A(1, 4, -7); B(2, -1, 4); C(0, -9, 18); D(0, 0, 0) sobre el mismo plano?

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \langle (2 - 1), (-1 - 4), (4 + 7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{u} = \langle 1, -5, 11 \rangle}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = \langle (0 - 1), (-9 - 4), (18 + 7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{w} = \langle -1, -13, 25 \rangle}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AD} = \langle (0 - 1), (0 - 4), (0 + 7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{v} = \langle -1, -4, 7 \rangle}$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v})}$$

$$\vec{u}(\vec{\omega} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -13 & 25 \\ -1 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{i} [(-13 \cdot 7) - (-4 \cdot 25)] - \hat{j} [(-1 \cdot 7) - (25 \cdot -1)] + \hat{k} [(-1 \cdot -4) - (-1 \cdot -13)] \\ = 9\hat{i} - 18\hat{j} - 9\hat{k}$$

reemplazar $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ con \vec{u} .

$$= 9(1) - 18(-5) - 9(11)$$

$$= 9 + 90 - 99$$

$$= 9 - 99 + 90$$

$$= -90 + 90 = 0 \quad \therefore \text{sí son parte del mismo plano.}$$

8) $(a \cdot b) = \sqrt{3}$ & $(a \times b) = \langle 1, 2, 2 \rangle$

encuentra ángulo entre a & b .

$$\underbrace{a \cdot b}_{\sqrt{3}} = |a||b|\cos\theta$$

$$\underbrace{|a \times b|}_{|\langle 1, 2, 2 \rangle|} = |a||b|\sin\theta$$

$$|a||b|\cos\theta = \sqrt{3}$$

$$\underbrace{|a||b|}_{\text{Sustituir en }} = \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$$

$$|\langle 1, 2, 2 \rangle| = \frac{\sqrt{3} \sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \left. \right\} \tan\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{1 + 4 + 4}}{\sqrt{3}}$$

$$19 \quad \tan\theta = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$$

$$, \quad - = 3 \cdot 3^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tan \theta = -\frac{1}{3}$$

$$= \sqrt{3}$$

$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3})$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

∴ El ángulo es $\theta = \frac{\pi}{3}$

BONO:

9) a) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

Partimos desde la siguiente propiedad.

$$\hookrightarrow |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta \quad \# \text{ Elevamos al cuadrado}$$

$$\Rightarrow |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \theta$$

Propiedad pitagórica

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

Sustituir

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta) \quad \# \text{ Distribuyo}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - \underbrace{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \theta}_{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$$

∴ $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

□

b) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad \# \text{ Quiero llegar a esto}$

$$= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

Propiedad distributiva

$$= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

$$= (\cancel{\mathbf{a} \times \mathbf{a}}^{\oplus} + (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - \cancel{(\mathbf{b} \times \mathbf{b})^{\oplus}}$$

$$= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

$$\begin{aligned}\# (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ \therefore 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &\quad \square\end{aligned}$$

Parte III

Examenes Cortos

Capítulo3

Examen corto #01

Corto #1 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: David Corzo Carnet: 20190432

Resuelva las siguientes problemas:

1. (50 pts.) Halle la ecuación de la esfera con centro $(3, -6, 4)$ y radio 5.
¿Cuál es la intersección de esta esfera con el plano xz ?

Ecuación :

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 6)^2 + (z - 4)^2} = 10$$

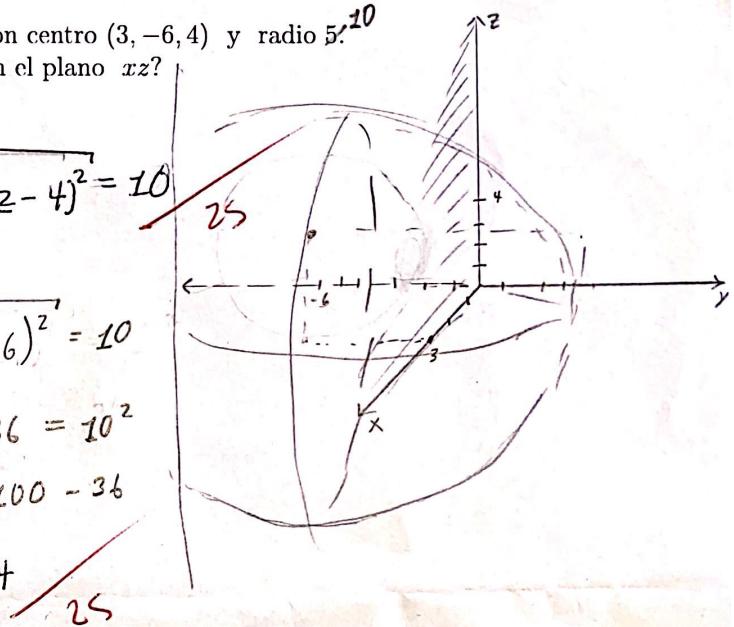
Se asume $y = 0$;

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (z - 4)^2 + (6)^2} = 10$$

$$(x - 3)^2 + (z - 4)^2 + 36 = 10^2$$

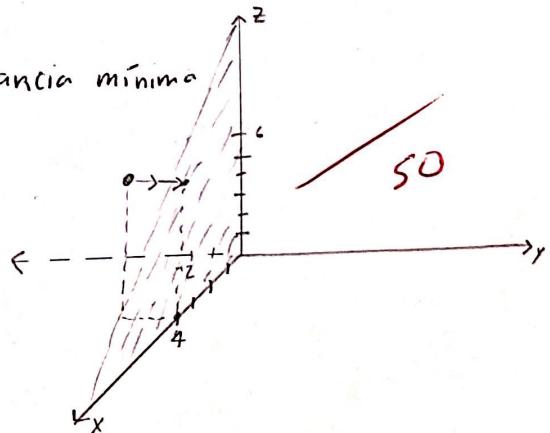
$$(x - 3)^2 + (z - 4)^2 = 100 - 36$$

Intersección : $(x - 3)^2 + (z - 4)^2 = 64$



2. (50 pts.) Determine la distancia mínima del punto $(4, -2, 6)$ al plano xz .

La distancia mínima
es 2.



100/100

Capítulo 4

Examen corto #03

Corto #3 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: David Corzo

Carnet: 20190430

~~90~~ / 100

Resuelva los siguientes problemas:

$$\begin{array}{r} 12 \\ 769 \\ + 496 \\ \hline 665 \\ 25 \\ \hline 690 \\ \\ \begin{array}{r} 14 \\ \cdot 14 \\ \hline 56 \\ 44 \\ \hline 496 \end{array} \end{array}$$

1. (50 pts.) Determine el área del triángulo entre los puntos $P = (0, -2, 0)$, $Q = (4, 1, -2)$ y $R = (5, 3, 1)$.

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{PQ} = \langle (4-0), (1-(-2)), (-2-0) \rangle = \langle 4, 3, -2 \rangle \\ \vec{w} &= \overrightarrow{PR} = \langle (5-0), (3-(-2)), (1-0) \rangle = \langle 5, 5, 1 \rangle \\ |\vec{u} \times \vec{w}| &= \left| \begin{array}{ccc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & 1 \end{array} \right| = \hat{i}[(3 \cdot 1) - (-2 \cdot 5)] - \hat{j}[(4 \cdot 1) - (-2 \cdot 5)] + \hat{k}[(4 \cdot 5) - (3 \cdot 5)] \\ &= \hat{i}[3 + 10] - \hat{j}[4 + 10] + \hat{k}[20 - 15] \\ &= 13\hat{i} - 14\hat{j} + 5\hat{k} \\ &= \langle 13, -14, 5 \rangle \\ \therefore \frac{1}{2} \sqrt{690} &\quad \text{XO} \end{aligned}$$

2. (50 pts.) Encuentre el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $a = \langle 1, 5, -2 \rangle$, $b = \langle 3, -1, 0 \rangle$, y $c = \langle 5, 9, -4 \rangle$.

$$P_{\square} = |c \cdot (a \times b)|$$

$$\begin{aligned} (a \times b) &= \left| \begin{array}{ccc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{array} \right| = \hat{i}[(5 \cdot 0) - (-2 \cdot -1)] - \hat{j}[(1 \cdot 0) - (-2 \cdot 3)] + \hat{k}[(1 \cdot -1) - (5 \cdot 3)] \\ &= \hat{i}[0 - 2] - \hat{j}[0 + 6] + \hat{k}[-1 - 15] \\ &= -2\hat{i} - 6\hat{j} - 16\hat{k} \\ c \cdot (a \times b) &= \langle 5, 9, -4 \rangle \cdot \langle -2, -6, -16 \rangle \\ &= (5 \cdot -2) + (9 \cdot -6) + (-4 \cdot -16) \\ &= (-10) + (-54) + 64 \\ &= -64 + 64 = 0 \end{aligned}$$

H²⁸ un plano no, un paralelepípedo

$$\begin{aligned} |c \cdot (a \times b)| &= \sqrt{(-10)^2 + (-54)^2 + (-64)^2} \\ &= \sqrt{100 + 2916 + 4096} \\ &= \sqrt{7102} \end{aligned}$$