Cálculo Multivariable

Parcial 1

5to Semestre 2020 **(2 horas)**

Nombre:____ **Carnet:** __________________

Tema:	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos:	18	16	16	16	18	16	100
Nota:							

1. Considere la función en dos variables $f(x, y) = \ln(10 - x^2 - y)$.

   (a) (06 **pts.**) Encuentre y bosqueje el dominio de la función.

Solución:

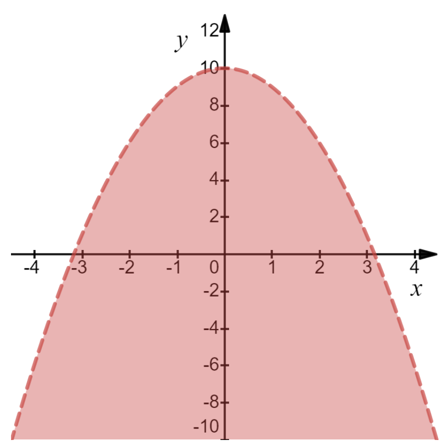
La función está definida cuando $10 - x^2 - y > 0$ ó $y < 10 - x^2$ **(2 pts.)**

El dominio consiste de todos los puntos debajo de la parábola $y = 10 - x^2$.

(2 pts.) Región sombreada.

(1 pt.) Parábola graficada con sus interceptos.

(1 pt.) Indicar que la parábola no es parte del dominio.

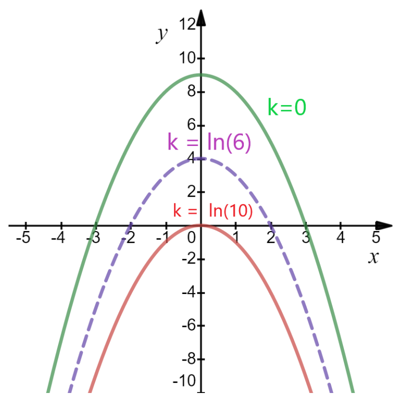


(b) (12 **pts.**) Encuentre y bosqueje las curvas de nivel de f para $k = 0,\ \ln(6),\ \ln(10)$.

Solución:

Curvas de Nivel	$\ln(10 - x^2 - y) = k$	**(1 pt.)**
Simplifique:	$10 - x^2 - y = e^k$	**(1 pt.)**
	$10 - e^k + x^2 = y$	
$k = 0$:	$9 - x^2 = y$	**(1 pt.)**
$k = \ln(6)$:	$4 - x^2 = y$	**(1 pt.)**
$k = \ln(10)$:	$-x^2 = y$	**(1 pt.)**

(2 pts.) por graficar cada curva de nivel.
(1 pt.) por indicar las curvas de nivel.



2. (16 **pts.**) Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta tangente a $\mathbf{r(t)} = \langle\, 2\sqrt{t+2},\ \sin(\pi t),\ t\ln(t-1) - 2t\,\rangle$ en el punto donde $t = 2$.

Solución:

Pto. sobre la curva:	$\mathbf{r}(t) = \langle 4, 0, -4\rangle$	**(3 pts.)**
Derivada:	$\mathbf{r}'(t) = \left\langle \dfrac{1}{\sqrt{t+2}}, \pi\cos(\pi t), \ln(t-1) + \dfrac{t}{t-1} - 2 \right\rangle$	**(6 pts.)**
Vector Tangente:	$\mathbf{r}'(2) = \left\langle \dfrac{1}{2},\ \pi,\ 2-2 \right\rangle$	**(3 pts.)**
Ec. Recta Tangente:	$\mathbf{r}(t) = \left\langle 4 + \dfrac{t}{2},\ 2t,\ -4 \right\rangle$	**(1 pt.)**
Ecs. Simétricas:	$\dfrac{x-4}{1/2} = \dfrac{y}{2}, \quad z = -4$	**(3 pts.)**

3. (16 **pts.**) Encuentre la longitud de la curva descrita por la función vectorial: $\mathbf{r(t)} \;=\; \frac{4}{9}(1+t^2)^{3/2}\mathbf{i} \;+\; \frac{4}{9}(1-t^2)^{3/2}\mathbf{j} \;+\; \frac{1}{6}t^2\mathbf{k}$ en $2 \leqslant t \leqslant 8$.

Solución:

Vector Tangente: $$\mathbf{r}'(t) = \frac{4t}{3}(1+t^2)^{1/2}\mathbf{i} - \frac{4t}{3}(1-t^2)^{1/2}\mathbf{j} + \tfrac{1}{3}t\mathbf{k} \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

Magnitud Vector: $$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\frac{16t^2}{9}(1+t^2) + \frac{{}^{1}6t^2}{9}(1-t^2) + \frac{t^2}{9}} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Simplifique: $$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\frac{16t^2}{9} + \frac{16t^4}{9} + \frac{16t^2}{9} - \frac{16t^4}{9} + \frac{t^2}{9}} \qquad \textbf{(1 pt.)}$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\frac{33t^2}{9}} = t \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Longitud de Arco: $$L = \frac{\sqrt{33}}{3}\int_2^8 |\mathbf{r}'(t)|\; dt \;=\; \int_2^8 tdt \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Integre: $$L = \frac{\sqrt{33}}{3}\; \frac{t^2}{2}\Bigg]_2^8 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

Evalúe y Simplifique: $$L = \frac{64-4}{6}\sqrt{33} = 10\sqrt{33} \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

4. Considere la función vectorial: $\mathbf{r}(t) = \left\langle \ln(t^2 - 1),\ \dfrac{5t - 15}{t^2 - 9},\ \dfrac{\sinh(2t - 4)}{t - 2} \right\rangle$.

(a) (10 **pts.**) Encuentre el dominio de $\mathbf{r}$. Utilice notación de intervalo.

Solución:

Encuentre el dominio de cada función componente.

Dominio de f:	$t^2 > 1$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	**(2 pts.)**
Dominio de g:	$t^2 \neq 9$	$(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$	**(2 pts.)**
Dominio de h:	$t \neq 2$	$(-\infty,\ 2) \cup (2, \infty)$	**(1 pt.)**

El dominio de $\mathbf{r}(t)$ es la intersección entre los tres dominios. **(5 pts.)**

$$(-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$$

(b) (06 **pts.**) Evalúe $\lim\limits_{t \to 2} \mathbf{r}(t)$.

Solución:

Evalúe el límite en cada función componente.

$$\lim_{t \to 2} \ln(t^2 - 1) = \ln(3) \qquad \textbf{(1 pt.)}$$

$$\lim_{t \to 2} \frac{5t - 15}{t^2 - 9} = \frac{-5}{-5} = 1 \qquad \textbf{(1 pt.)}$$

$$\lim_{t \to 2} \frac{\sinh(2t - 4)}{t - 2} \underbrace{=}_{LH} \frac{2\cosh(2t - 4)}{1} = 2 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

$$\lim_{t \to 2} \mathbf{r}(t) = \langle \ln(3),\ 1,\ 2 \rangle \qquad \textbf{(1 pt.)}$$

5. Encuentre las operaciones indicadas para las funciones dadas.

(a) (08 **pts.**) $T(x,y,z) = \dfrac{-200}{x^2+y^2+z^2}$, Simplifique $\dfrac{x}{2}\dfrac{\partial T}{\partial x} + \dfrac{y}{2}\dfrac{\partial T}{\partial y} + \dfrac{z}{2}\dfrac{\partial T}{\partial z}$.

Solución:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{400x}{(x^2+y^2+z^2)^2} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$
$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{400y}{(x^2+y^2+z^2)^2} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$
$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{400z}{(x^2+y^2+z^2)^2} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

Encuentre $0.5xT_x + 0.5yT_y + 0.5zTz$ **(2 pts.)**

$$\frac{x}{2}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{z}{2}\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{200x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{200y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{200z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$
$$\frac{x}{2}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{z}{2}\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{200x^2+200y^2+200z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{200}{x^2+y^2+z^2} = -T$$

(4 pts.) extra por simplificar y **(1 pt.)** por escribirla como $-T$.

(b) (10 **pts.**) $u(w,x,y,z) = \sinh(w^2+x^3)\ln(\sec(y)+\tan(z))$, u_{ww}, u_{zx} .

Solución:

$$u_w = 2w\cosh(w^2+x^3)\ln(\sec(y)+\tan(z)) \qquad \textbf{(2 pts.)}$$
$$u_z = \sinh(w^2+x^3)\frac{\sec^2 z}{\sec(y)+\tan(z)} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$
$$\begin{aligned} u_{ww} &= 2\cosh(w^2+x^3)\ln(\sec(y)+\tan(z)) \\ &\quad + 4w^2\sinh(w^2+x^3)\ln(\sec(y)+\tan(z)) \qquad \textbf{(4 pts.)} \end{aligned}$$
$$u_{zx} = 3x^2\cosh(w^2+x^3)\frac{\sec^2 z}{\sec(y)+\tan(z)} \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

6. Un proyectil se lanza con una velocidad inicial v_o y con un ángulo θ respecto a la horizontal. Si se toma en cuenta su velocidad terminal mg/k, su función de velocidad es:

$$v(t) = \left\langle\ v_o \cos\theta,\ \ \frac{mg}{k} + \left(v_o \sin\theta - \frac{mg}{k}\right) e^{-kt/m}\ \right\rangle$$

Los términos $v_o,\ m,\ g,\ \theta$ y k son constantes.

(a) (05 **pts.**) Encuentre la función de aceleración del objeto.

Solución:
Derive la función de velocidad para encontrar la aceleración.
Note que la velocidad es constante en x.

$$a(t) = v'(t) = \left\langle\ 0,\ \ -\frac{k}{m}\left(v_o \sin\theta - \frac{mg}{k}\right) e^{-kt/m}\ \right\rangle$$

(2 pts.) por la derivada en x.
(3 pts.) por la derivada en y.

(b) (11 **pts.**) Encuentre la función de posición del objeto si $\mathbf{r}(0) = 10\mathbf{i}$.

Solución:
Integre la función de velocidad para encontrar la posición.

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle\ tv_o \cos\theta + C_1,\ \ \frac{mg}{k}t - \frac{m}{k}\left(v_o \sin\theta - \frac{mg}{k}\right) e^{-kt/m} + C_2\ \right\rangle \quad \textbf{(5 pts.)}$$

Evalúe en $\mathbf{r}(0) = 10\mathbf{i}$ para encontrar C_1 y C_2.

$$\mathbf{r}(0) = \left\langle\ 0 + C_1,\ -\frac{m}{k}\left(v_o \sin\theta - \frac{mg}{k}\right) + C_2\ \right\rangle = \langle 10,\ 0\rangle \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

Se encuentra que $C_1 = 10$ y $C_2 = \frac{m}{k}\left(v_o \sin\theta - \frac{mg}{k}\right)$. **(2 pts.)**

La función de posición es: **(1 pt.)**

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle\ tv_o \cos\theta + 10,\ \ \frac{mg}{k}t + \frac{m}{k}\left(v_o \sin\theta - \frac{mg}{k}\right)\left(1 - e^{-kt/m}\right)\ \right\rangle$$