1. 13.2 Cálculo de funciones vectoriales

- Derivadas:
$$\vec{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$
- Vector Tangente:
$$\vec{r}'(t)$$
- Tangente unitario:
$$\vec{T}(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$
- Integrales indefinidas:
$$\int \langle f, g, h \rangle \, dt = \langle F + C_1, G + C_2, H + C_3 \rangle$$
$$\int \vec{r}(t)dt = \vec{R}(t) + \vec{C}$$
$$\vec{R} \quad \text{vector de Antiderivadas}$$
$$\vec{C} \quad \text{Vector de constantes}$$
- Integrales definidas:
$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \hat{i} \int_a^b f(t)dt + \hat{j} \int_a^b g(t)dt + \hat{k} \int_a^b h(t)dt$$

2. Ejercicios de integración

1. $\int_0^1 \left[\frac{4}{1+t^2} \hat{i} + sec^2(\frac{\pi t}{4}) \right] dt$:
$$4\hat{i} \times \tan^{-1}(t)\Big|_0^1 + \hat{k} \times \tan(\frac{\pi t}{4})\Big|_0^1$$
$$I_i = 4\hat{i}\frac{\pi}{4} + \hat{k}\frac{4}{\pi} = pi\hat{i} + \hat{k}\frac{4}{\pi} = \left\langle \pi, 0, \frac{4}{\pi} \right\rangle$$

2. $\int \left\langle te^{t^2}, te^t, \frac{q}{\sqrt{1-t^2}} \right\rangle dt$:
$$x : \quad \int e^{t^2} t \, dt = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^{t^2} + C_1$$
$$u = t^2$$
$$du = 2tdt$$
$$y : \quad \int te^t dt = te^t - \int te^t - e^t + C_2$$
$$\begin{matrix} u = t & dv = e^t dt \\ du = dt & v = e^t \end{matrix} \quad t : \quad \int \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta = \int d\theta = \underbrace{\theta + C_3}_{\sin^{-1}(t) + C_3} = \sin^{-1}(t) + C_3$$
$$\therefore \quad \int \left\langle te^{t^2}, te^t, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right\rangle dt = \frac{1}{2} e t^{t^2} + C_1, te^t - e^t + C_2, \sin^1(t) + C_3$$

3. Movimiento en el espacio

Dado el vector posición $\vec{r}(t)$ de un objeto:

- Vector velocidad:
$$\vec{c}(t) = \vec{r}\,'(t)$$
- Vector aceleración:
$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,(t) = \vec{r}\,''(t)$$
- Rapidez:
$$|\vec{v}(t)|$$
- Distancia:
$$|\vec{r}(t)|$$

Dado el vector de aceleración $\vec{a}(t)$:

- Velocidad:
$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt + \vec{C}_1$$
- Desplazamiento o posición:
$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt + C_2$$

3.1. Ejercicios

1. Encuentre la velocidad, aceleración y rapidez dada la posición del objeto:
$$\begin{aligned} & \vec{r}(t) = \hat{\imath}t + 2\hat{\jmath}\cosh(4t) + 3\hat{k}\sinh(3t) \\ \text{Encontramos velocidad:}\quad & \vec{r}\,'(t) = \vec{v}(t) = \hat{\imath} + 8\hat{\jmath}\sinh(4t) + 9\hat{k}\cosh(3t) \\ \text{Encontramos la aceleración:}\quad & \vec{r}\,''(a) = \vec{a}(t) + 32\hat{\jmath}\cosh(4t) + 27\hat{k}\sinh(3t) \\ \text{Encontramos la rapidez:}\quad & |\vec{v}(t)| = \sqrt{1 + 64\sinh(4t) + 81\sinh^2(3t)} \\ \text{Encontramos la distancia:}\quad & |\vec{r}(t)| = \sqrt{t^2 + 4\cosh^2(4t) + 9\sinh^2(3t)} \end{aligned}$$

   # Tarea # 6: Integrales func. vectoriales 14.1 Funciones en varias variables.
   # Tarea opcional consolidado: 12,13,14.1

2. Encuentre la velocidad y posición del objeto dada $\vec{a}(t)$ y las condiciones iniciales:

$$\vec{a}(t) = 6t\hat{\imath} + \hat{\jmath}\cos(t) - \hat{k}\sin(2t), \quad \vec{v}(0) = \begin{matrix} \hat{\imath} + \hat{k} \\ \vec{r}(0) = 2\hat{\jmath} - \hat{k} \end{matrix}$$

$$\text{Velocidad:} \quad \int \vec{a}(t)dt$$

$$\vec{v}(t) = \left\langle 3t^2 + C_1, \sin(t) + C_2, \frac{1}{2}\cos(2t) + C_3 \right\rangle$$

$$\text{Encuentro } \vec{v}(0) = \left\langle C_1, C_2, \frac{1}{2} + C_3 \right\rangle = \langle 1, 0, 1 \rangle$$

$$\text{Resolver para las constantes:} \quad \begin{matrix} C_1 = 1, \\ C_2 = 0, \\ \frac{1}{2} + C_3 = 1 \quad \implies \quad C_3 = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\text{Posición:} \quad \int \vec{v}(t)dt$$

$$\vec{r}(t) \left\langle t^3 + t + d_1, -\cos(t) + d_2, \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2} + d_3 \right\rangle$$

$$\vec{r}(0) = \left\langle \underbrace{d_1, -1 + d_2, d_3}_{\begin{matrix} d_1 = 0 \\ -1 + d_2 = 2 \implies d_2 = 3 \\ d_3 = -1 \end{matrix}} \right\rangle$$

$$\text{Posición:} \quad \vec{r}(t) = \left\langle t^3 + t, 3 - \cos(t), \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2} - 1 \right\rangle$$

3. $\vec{a}(t) = 8t\hat{\imath} + \sinh(t)\hat{\jmath} - \hat{k}e^{\frac{t}{2}}$:

$$\underbrace{\vec{v}(0) = \vec{0}}_{\text{Está en reposo}} \qquad \vec{s}(0) = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

$$\text{Velocidad:} \quad \vec{v}(t) = \left\langle 4t^2 + C_1, \cosh(t) + C_2, -2e^{\frac{t}{2}} + C_3 \right\rangle$$

$$\vec{v}(0) = \left\langle \underbrace{C_1, 1 + C_2, -2 + C_3}_{\begin{matrix} C_1 = 0, \\ C_2 = -1 \\ C_3 = 2 \end{matrix}} \right\rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

$$\vec{v}(t) = \left\langle 4t^2, \cosh(t) - 1, -2e^{\frac{t}{2}+2} \right\rangle$$

$$\text{Posición:} \quad \vec{r}(t) = \left\langle \frac{4}{3}t^3 + C_1, \sinh(t) - t + C_2, -4e^{\frac{t}{2}} + 2t + C_3 \right\rangle$$

$$\vec{r}(0) = \langle C_1, C_2, -4 + C_3 \rangle = \underbrace{\langle 2, 1, -3 \rangle}_{C_2 = 1}$$

$$C_3 = -3 + 4 = 1$$

$$\vec{r}(t) = \left\langle \frac{4}{3}t^3 + 2, \sinh(t) - t + 1, -4e^{\frac{t}{2}} + 2t + 1 \right\rangle$$

Se evalúa el vector en 0 por que se quiere saber el valor de las constantes cuando están en reposo.
Por defecto siempre evaluar en 0 para encontrar $C_1, C_2 \& C_3$.

4. 13.3 lOGN

10.4 Ecs. Paramétricas de una curva en el plano de dos dimensiones era:

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{aligned}$$

- La longitud de arco:

$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt$$

- Función vectorial:

$$\vec{r} = \langle f, g, h \rangle = \langle x, y, z \rangle$$

- Derivada de función vectorial:

$$\vec{r}\,' = \langle x', y', z' \rangle$$

- Magnitud:

$$|\vec{r}\,'| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$$

- En general:

$$L = \int_a^b = |\vec{r}\,'(t)|\, dt$$

5. Ejercicios

Encuentre la longitud de las siguientes curvas:

1. $\vec{r}(t) = \langle \cos(t), \sin(t), \ln(\cos) \rangle$ en $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\vec{r}\,'(t)|\, dt$$

$$\vec{r}\,'(t) = \langle -\sin(t), \cos(t), \tan^2(t) \rangle$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + \tan^2(t)} = \sqrt{1 + \tan^2(t)} = \sec^2(t) = \sec^2(t)$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(t) dt = \ln|\sec(t) + \tan(t)|\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left|\sec(\frac{\pi}{4}) + \tan(\frac{\pi}{4})\right| - \ln|\sec(0) + \tan(0)|$$

$$L = \ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right| - \ln|1| = \ln\left|\sqrt{2} + 1\right|$$

2. $\vec{r}(t) = \left\langle 12t, 8t^{\frac{3}{2}}, 3t^2 \right\rangle$ en $0 \leq t \leq 1$:

$$\vec{r}\,'(t) = \left\langle 12, 12t^{\frac{1}{2}}, 6t \right\rangle = 6\left\langle 2, 2t^{\frac{1}{2}}, t \right\rangle$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = 6\sqrt{4 + 4t + t^2} = 6\sqrt{(t+2)^2} = 6(t+2)$$

$$L = \int_0^1 (6t + 12)dt = 3t^2 + 12t\Big|_0^1 = 3 + 12 = 15$$