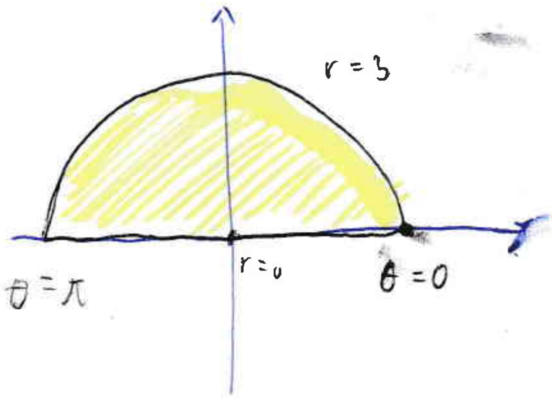
Corto #14 Cálculo Multivariable

Nombre: _______________________________________ **Carnet:** ____________

1. (50 pts.) Evalué $I_1 = \int_{-3}^{3} \left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)dy \right) dx.$

$-3 \leq x \leq 3 \qquad 0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2}$ (semicircunferencia superior $r=3$)



$0 \leq r \leq 3 \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$

$y = 0 \Rightarrow \quad r\sin\theta = 0, \quad \theta = 0, \pi.$

use $x^2+y^2 = r^2.$

$$I_1 = \iint_D (x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)\,dA. = \int_0^{\pi}\int_0^3 r^2\sin(r^2)\,r\,dr\,d\theta.$$

$$I_1 = \underbrace{\left(\int_0^{\pi} d\theta\right)}_{\pi.} \left(\int_0^3 r^2\sin(r^2)\,r\,dr. \right)$$

$u = r^2 \qquad u(3) = 9$

$du = 2r\,dr \qquad u(0) = 0$

$$I_1 = \pi \, \frac{1}{2}\int_0^9 u\sin(u)\,du. = \frac{\pi}{2}\left(-u\cos u \Big]_0^9 + \int_0^9 \cos u\,du \right)$$

IPP.

$$I_1 = \frac{\pi}{2}\left(-9\cos 9 + 0\cos 0 + \sin u \Big]_0^9 \right) = \frac{\pi}{2}\left(\sin 9 - 9\cos 9 \right)$$

$y = 2$ $\boxed{r\sin\theta = 2}$

$\sin\theta = \frac{2}{4}$

2. (50 pts.) Considere $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}\, dA$,

D está entre $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}\,x$ & el semianillo superior $\ln(2) \leqslant x^2+y^2 \leqslant \ln(26)$

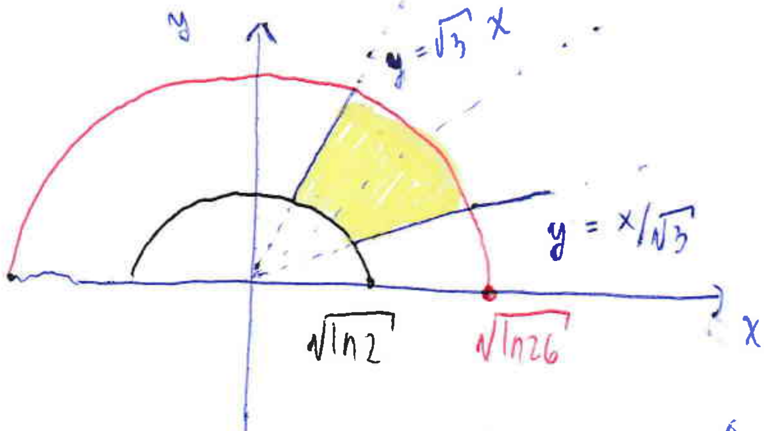
20 (a) Escriba y dibuje la región de integración.

10 (b) Plantee la integral doble en coordenadas polares.

20 (c) Evalúe la integral doble.

dos circunferencias de radio $\sqrt{\ln 2}$ y $\sqrt{\ln 26}$

dos rectas en el primer cuadrante.



Rectángulo Polar.

$y = bx$

$\dfrac{y}{x} = \dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = b. \Rightarrow \tan\theta = b.$

encuentre los ángulos.

$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ $\quad \theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}.$

Limites $\dfrac{\pi}{6} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3}.$

$\sqrt{\ln 2} \leq r \leq \sqrt{\ln 26}$

b. $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}\, dA. = \int_{\pi/6}^{\pi/3}\left(\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 26}} e^{r^2}\, r\, dr\right) d\theta.$ $\quad \frac{1}{2}e^{r^2}\Big]_{\sqrt{\ }}^{\sqrt{\ }}$

c. $\displaystyle\underbrace{\left(\int_{\pi/6}^{\pi/3} d\theta\right)}_{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}.}\left(\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 26}} e^{r^2}\, r\, dr\right) = \frac{\pi}{6}\int_{\ln 2}^{\ln 26} \frac{1}{2} e^{u}\, du.$

$u = r^2$ $\quad u(\sqrt{\ln 26}) = \ln 26$

$du = 2r\,dr$ $\quad u(\sqrt{\ln 2}) = \ln 2.$

$I_2 = \dfrac{\pi}{12}\, e^{u}\Big]_{\ln 2}^{\ln 26.} = \dfrac{\pi}{12}\left(e^{\ln 26} - e^{\ln 2}\right) = \dfrac{\pi}{12}(26-2) = 2\pi.$

3. (50 pts.) Considere la integral doble:

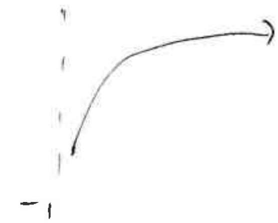
$$I_3 = \int_0^{e-1} \left(\int_{\ln(y+1)}^{1} 3\sqrt{e^x - x}\, dx \right) dy$$

10 (a) Dibuje la región de integración.

10. (b) Escriba la región como una tipo I y uno tipo II.

(c) Evalúe la integral.

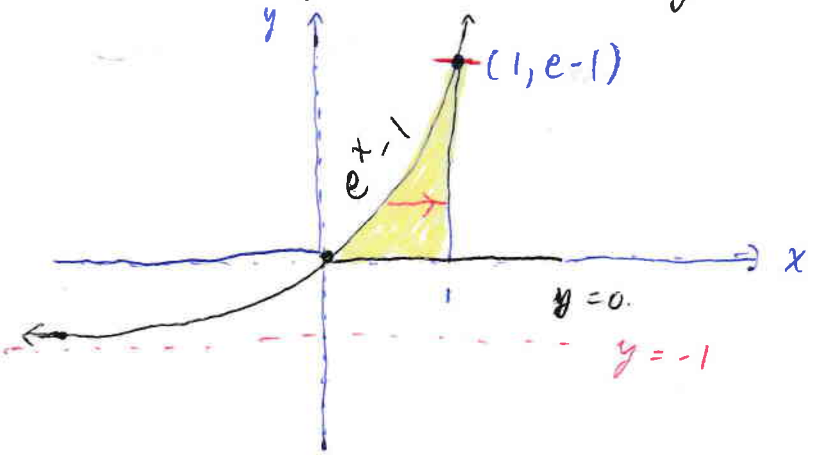
(d) Encuentre el área de la región de integración.



a. $0 \leq y \leq e-1$ $\quad$ $\ln(y+1) \leq x \leq 1$

abajo $\quad$ izquierda $\quad$ derecha.

$x = \ln(y+1)$ $\quad$ $e^x = y+1$ $\quad$ $y = e^x - 1$ (misma $\ln(y+1)$)



b. Tipo I: $0 \leq y \leq e^x - 1$, $0 \leq x \leq 1$ de último $\quad dy\,dx$

Tipo II: $0 \leq y \leq e-1$, $\ln(y+1) \leq x \leq 1$ $\quad dx\,dy.$

último.

c. $\iint_D 3(e^x - x)^{1/2}\, dA. = \int_0^1 \left(\int_0^{e^x-1} 3(e^x - x)^{1/2}\, dy \right) dx$

$I_3 = \int_0^1 3(e^x - x)^{1/2}\, y \Big]_{y=0}^{y=e^x-1} dx = \int_0^1 3(e^x - x)^{1/2} \underbrace{(e^x - 1)\, dx}_{du}$

$u = e^x - x$ $\quad$ $u(1) = e-1$

$du = (e^x - 1)\,dx$ $\quad$ $u(0) = 1$

$I_3 = 3\int_1^{e-1} u^{1/2}\, du = \frac{3 \cdot 2}{3} u^{3/2} \Big]_1^{e-1} = 2\left[(e-1)^{3/2} - 1\right]$

d. Área. $A = \iint_D dA$.

$0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq e^x - 1$.

$$A = \int_0^1 \int_0^{e^x - 1} dy\, dx = \int_0^1 (e^x - 1)\, dx$$

$$A = e^x - x \Big]_0^1 = e - 1 - 1 + 0 = e - 2$$

≈ 0.70