TAREA #3 - DAVID CORZO - 20190432 - 2020-01-28

1) a. $(a \cdot b) \cdot c$

asumiendo que a, b, c son vectores.

Resulta en un escalar. productos punto resultan en escalares siempre

b. $(a \cdot b) \times c$

El producto cruz es entre vectores no se puede hacer entre escalares, $a \cdot b$ resulta en un escalar por ende no tiene sentido.

c. $(a \times b) \times c$

Resulta en un vector

d. $(a \times c) \cdot b$

Resulta en un escalar. producto cruz de a, c resulta en vector, ese vector con producto punto b resulta en escalar

2) Encuentre vectores unitarios ortogonales a $\langle 3, 2, 1 \rangle$ & $\langle -1, 1, 0 \rangle$.

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(2 \cdot 0) - (1 \cdot 1)\right] - \hat{j}\left[(3 \cdot 0) - (1 \cdot -1)\right] + \dots$$

$$+ \hat{k}\left[(3 \cdot 1) - (2 \cdot -1)\right]$$

$$= \hat{i}\left[0 - 1\right] - \hat{j}\left[0 - (-1)\right] + \hat{k}\left[3 - (-2)\right]$$

$$= -\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\therefore \langle -1, -1, 5 \rangle$$

Este es el vector ortogonal a
⟨3, 2, 1⟩ & ⟨-1, 1, 0⟩ Ahora sólo
falta la división por la magnitud
para que sea ortogonal unitario.

$$|O_\perp| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (5)^2} = \sqrt{1 + 1 + 25}$$
$$= \sqrt{27}$$

unit $\Rightarrow \quad O_\perp \cdot \frac{1}{\sqrt{27}} \Rightarrow \langle -1, -1, 5 \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{27}} =$

$$R_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{1}{\sqrt{27}}, -\frac{5}{\sqrt{27}} \right\rangle$$

invierto signos para encontrar segundo vector

$$R_2 = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{27}}, -\frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{5}{\sqrt{27}} \right\rangle$$

Comprobación de ser unitario.

$$1 = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^2 + \left(-\frac{5}{\sqrt{27}}\right)^2}$$

$$1 = \sqrt{\left(\frac{1}{27}\right) + \left(\frac{1}{27}\right) + \left(\frac{25}{27}\right)}$$

$$1 = \sqrt{\frac{1 + 1 + 25}{27}}$$

$$1 = \sqrt{\frac{27}{27}}$$

$$1 = 1$$

$\therefore$ es unitario & ortogonal.

3) Calcule el triple producto escalar entre $a = \langle 1, 2, 3 \rangle$ & $b = \langle 3, 2, 5 \rangle$ & $c = \langle 0, 4, 3 \rangle$ ¿ $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$

$b \times c = | \hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k} |$

$$b \times c = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left[(2\cdot 3)-(5\cdot 4)\right] - \hat{\jmath}\left[(3\cdot 3)-(5\cdot 0)\right] + \hat{k}\left[(3\cdot 4)-(2\cdot 0)\right]$$

$$= \hat{\imath}\left[6 - 20\right] - \hat{\jmath}\left[9 - 0\right] + \hat{k}\left[12 - 0\right]$$

$$= \hat{\imath}\left[-14\right] - \hat{\jmath}\left[9\right] + \hat{k}\left[12\right]$$

$$= -14\hat{\imath} - 9\hat{\jmath} + 12\hat{k}$$

$$= \langle -14, -9, 12 \rangle$$

$$a \cdot (b \times c) = \langle 1, 2, 3 \rangle \cdot \langle -14, -9, 12 \rangle$$

$$= \langle (1 \cdot -14), (2 \cdot -9), (3 \cdot 12) \rangle$$

$$= -14 - 18 + 36 = 4$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left[(2\cdot 5)-(3\cdot 2)\right] - \hat{\jmath}\left[(1\cdot 5)-(3\cdot 3)\right] + \hat{k}\left[(1\cdot 2)-(3\cdot 2)\right]$$

$$= \hat{\imath}\left[10 - 6\right] - \hat{\jmath}\left[5 - 9\right] + \hat{k}\left[2 - 6\right]$$

$$= \hat{\imath}\left[4\right] - \hat{\jmath}\left[-4\right] + \hat{k}\left[-4\right]$$

$$= 4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 4\hat{k}$$

$$= \langle 4, 4, -4 \rangle$$

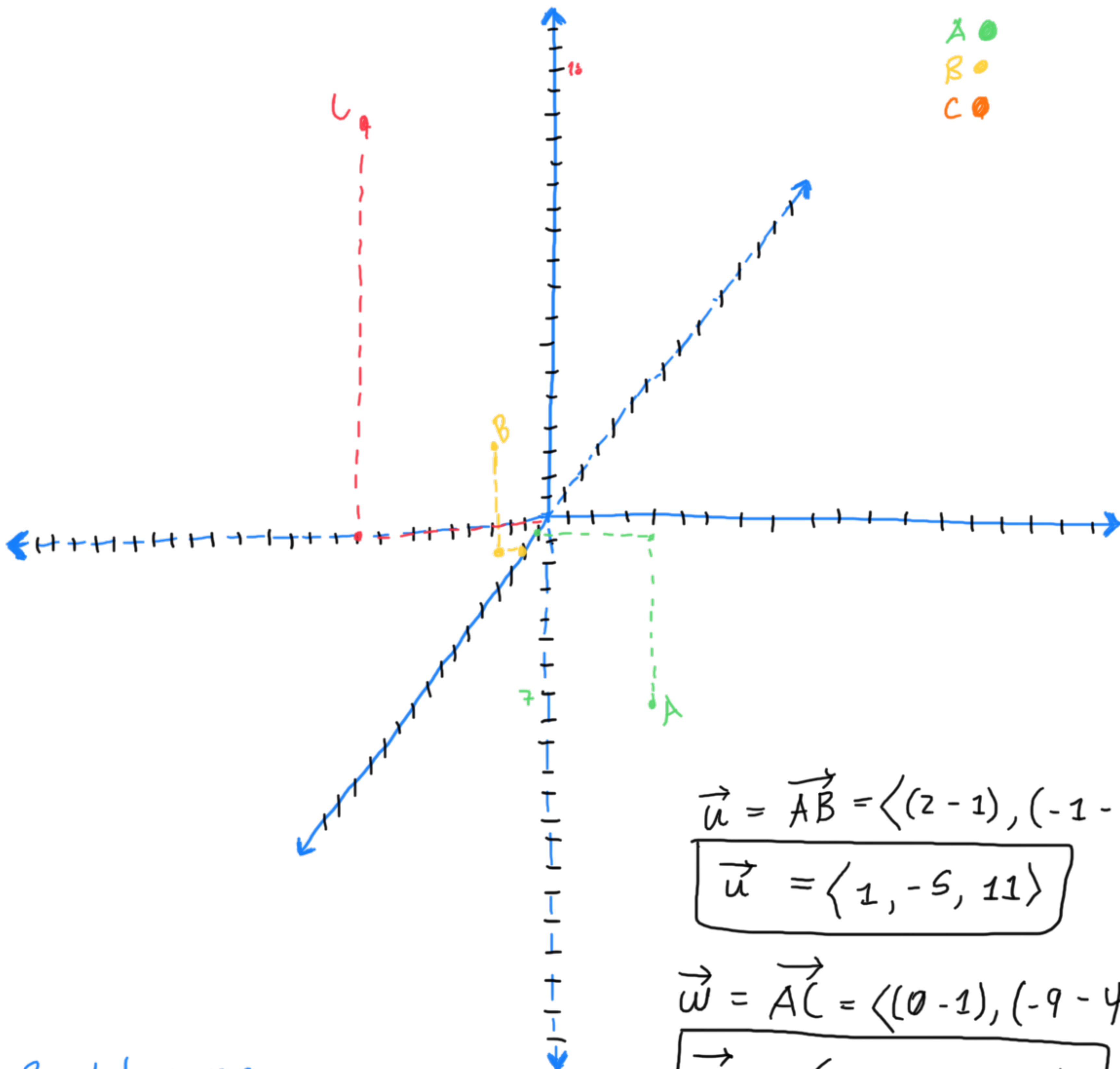
$$(a \times b) \cdot c = \langle 4, 4, -4 \rangle \cdot \langle 0, 4, 3 \rangle$$

$$= 0 + 16 - 12 = 4$$

$\therefore \quad a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$ Sí es igual ya que los dos dan 4, el mismo resultado.

4) Calcule el área del paralelogramo entre los puntos

$A(1,4,-7)$, $B(2,-1,4)$ & $C(0,-9,18)$.



$$\vec{u} = \vec{AB} = \langle (2-1), (-1-4), (4+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{u} = \langle 1, -5, 11 \rangle}$$

$$\vec{w} = \vec{AC} = \langle (0-1), (-9-4), (18+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{w} = \langle -1, -13, 25 \rangle}$$

Paralelogramo

$P = b \cdot a$

base $= |\vec{a}|$

altura $= |b| \sin\theta$

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -5 & 11 \\ -1 & -13 & 25 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{i}\left[(-5 \cdot 25) - (11 \cdot -13)\right] - \hat{j}\left[(1 \cdot 25) - (11 \cdot -1)\right] + \hat{k}\left[(1 \cdot -13) - (-5 \cdot -1)\right]$$

$$= \hat{i}\left[-125 + 143\right] - \hat{j}\left[25 + 11\right] + \hat{k}\left[-13 - 5\right] =$$

$$= 18\hat{i} - 36\hat{j} - 18\hat{k}$$

$$= \langle 18, -36, -18 \rangle$$

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = \sqrt{18^2 + (-36^2) + (-18^2)} = 18\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} = 9\sqrt{6}$$

5) Considere los puntos $P(1,0,1)$ & $Q(-2,1,3)$ & $R(4,2,5)$.

a) Encontrar el vector no cero ortogonal al plano

$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (-2-1), (1-0), (3-1) \rangle$

$\boxed{\vec{u} = \langle -3, 1, 2 \rangle}$

$\vec{w} = \overrightarrow{PR} = \langle (4-1), (2-0), (5-1) \rangle$

$\boxed{\vec{w} = \langle 3, 2, 4 \rangle}$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(1\cdot 4)-(2\cdot 2)\right] - \hat{j}\left[(-3\cdot 4)-(3\cdot 2)\right] + \hat{k}\left[(-3\cdot 2)-(3\cdot 1)\right]$$

$$= \hat{i}\left[4-4\right] - \hat{j}\left[-12-6\right] + \hat{k}\left[-6-3\right]$$

$$= 0\hat{i} + 18\hat{j} - 9\hat{k}$$

$\therefore \langle 0, 18, -9 \rangle$ es el vector ortogonal no cero al plano.

b) Determine el área del triángulo PQR

$$A_\triangle = \frac{1}{2}\left|\vec{v} \times \vec{w}\right| = \frac{1}{2}\left|\underbrace{\langle 0, 18, -9 \rangle}_{\sqrt{0^2 + 18^2 + (-9)^2}}\right|$$

$\sqrt{324 + 81}$

$\sqrt{405}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{405} = \frac{1}{2}\, 9 \cdot \sqrt{5} = \frac{9 \cdot \sqrt{5}}{2}$$

es el

≈ 10.06

área del triángulo PQR

6) Volúmen del paralelelipípedo determinado por los vectores $a = \langle 1,2,3 \rangle$; $b = \langle -1,1,2 \rangle$; $c = \langle 2,1,4 \rangle$.

$$V_p = |a \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{\imath}[(1\cdot 4)-(1\cdot 2)] - \hat{\jmath}[(-1\cdot 4)-(2\cdot 2)] + \hat{k}[(-1\cdot 1)-(2\cdot 1)]$$

$$\dots = \hat{\imath}[4-2] - \hat{\jmath}[-4-4] + \hat{k}[-1-2] = 2\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

Ahora $\hat{\imath} = 1$; $\hat{\jmath} = 2$; $\hat{k} = 3$; (por vector a)

$$= 2(1) + 8(2) - 3(3)$$

$$= 2 + 16 - 9 = 18 - 9 = 9$$ es el volúmen del paralelelipípedo a, b, c.

7) ¿Están los pts. $A(1,4,-7)$; $B(2,-1,4)$; $C(0,-9,18)$; $D(0,0,0)$ sobre el mismo plano?

$$\vec{u} = \vec{AB} = \langle (2-1), (-1-4), (4+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{u} = \langle 1, -5, 11 \rangle}$$

$$\vec{w} = \vec{AC} = \langle (0-1), (-9-4), (18+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{w} = \langle -1, -13, 25 \rangle}$$

$$\vec{v} = \vec{AD} = \langle (0-1), (0-4), (0+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{v} = \langle -1, -4, 7 \rangle}$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v})}$$

$$\vec{u}\,(\vec{w} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -13 & 25 \\ -1 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{i}\left[(-13 \cdot 7) - (-4 \cdot 25)\right] - \hat{j}\left[(-1 \cdot 7) - (25 \cdot -1)\right] + \hat{k}\left[(-1 \cdot -4) - (-1 \cdot -13)\right]$$

$$= 9\hat{i} - 18\hat{j} - 9\hat{k}$$

remplazar $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ con $\vec{u}$.

$$= 9(1) - 18(-5) - 9(11)$$

$$= 9 + 90 - 99$$

$$= 9 - 99 + 90$$

$$= -90 + 90 = 0$$ $\therefore$ sí son parte del mismo plano.

8) $(a \cdot b) = \sqrt{3}$ & $(a \times b) = \langle 1, 2, 2 \rangle$

encontra ángulo entre a & b.

$$\underbrace{a \cdot b}_{\sqrt{3}} = |a||b|\cos\theta \qquad \underbrace{|a \times b|}_{|\langle 1,2,2\rangle|} = |a||b|\sin\theta$$

$$|a||b|\cos\theta = \sqrt{3}$$

$$\underbrace{|a||b|} = \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$$

Sustituir en

$$|\langle 1,2,2\rangle| = \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}{\sqrt{3}} = \left.\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right\}\tan\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{1+4+4}}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = 3 \cdot 3^{-\frac{1}{2}}$$

$\tan\theta$

$= 3^{1-\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{3}$

$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3})$

$\theta = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ El ángulo es $\theta = \frac{\pi}{3}$

BONO:

9) a) $|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2$

Partimos desde la siguiente propiedad.

↳ $|a \times b| = |a||b| \sin\theta$ # Elevamos al cuadrado

$\Rightarrow |a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 \sin^2\theta$

Propiedad pitagórica

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

Sustituir

$|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2(1 - \cos^2\theta)$ # Distribuyo

$|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - \underbrace{|a|^2|b|^2\cos^2\theta}_{(a \cdot b)^2}$

$\therefore \quad |a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2 \quad \square$

b) $(a - b) \times (a + b) = 2(a \times b)$ # Quiero llegar a eso

$= (a - b) \times (a + b)$

Propiedad distributiva

$= (a - b) \times (a + b)$

$= \cancel{(a \times a)}^{0} + (a \times b) - (b \times a) - \cancel{(b \times b)}^{0}$

$= (a \times b) - (b \times a)$

$\# \ (a \times b) = -(b \times a)$

$= (a \times b) + (a \times b)$

$\therefore \ 2(a \times b) \quad \square$