Material de apoyo - Cálculo Multivariable

David Gabriel Corzo Mcmath

2020-01-06

Índice general

Parte I

Laboratorios

Capítulo1

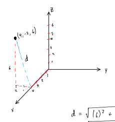
Laboratorio #01

LABORATORIO #01

Wednesday, January 15, 2020 13:03

DAVID CORZO 20190432

1) Punto $(4,-2,6)$ al eje x:

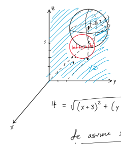


$d = \sqrt{(6)^2 + (2)^2}$

$d = \sqrt{36 + 4}$

$d = \sqrt{40}$

2) Ecuación de la esfera con centro $(-3, 2, 5)$ & radio 4. Intersección de la esfera con el plano yz.



$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2$

$= \sqrt{(x-(-3))^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}$

$= \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}$

...

$4 = \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}$

Se asume $x = 0$

$(4)^2 = \left(\sqrt{(0+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2}\right)^2$

$16 = 9 + (y-2)^2 + (z-5)^2$

$16 - 9 = (y-2)^2 + (z-5)^2$

$7 = (y-2)^2 + (z-5)^2$

Queda la ecuación de un círculo correspondiente a el círculo que deja la esfera en el plano yz.

3) Encuentre el radio y centro de la esfera cuya ec. es $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15$.

$x: \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$

$y: \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4$

$z: \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$

$[x^2 - 2x + 1] + [y^2 - 4y + 4] + [z^2 + 8z + 16] = 21 + 15$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 36$

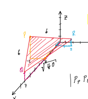
$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2} = 6$

radio: 6

centro: $(1, 2, -4)$

4) Longitud de los lados del triángulo $P(3,-2,-3)$, $Q(7,0,1)$, $R(1,2,1)$. ¿Isósceles, triángulo rectángulo?

$|P_A \& P_B| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$



Isósceles

$P = x_1 \quad Q = x_1$

$|P_P P_Q| = \sqrt{(3-7)^2 + (-2-0)^2 + (-3-1)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 4 + 16}$

$= \sqrt{36} = 6$

$Q = x_2 \quad R = x_1$

$|P_Q P_R| = \sqrt{(7-1)^2 + (0-2)^2 + (1-1)^2}$

$= \sqrt{(6)^2 + (-2)^2 + (0)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$

$R = x^2 \quad P = x_1$

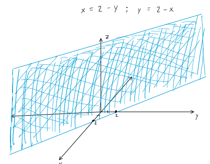
$|P_R P_P| = \sqrt{(1-3)^2 + (2+2)^2 + (1+3)^2}$

$= \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (4)^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$

5) Describa & bosqueje la superficie en $\mathbb{R}^3$ representada por la ecuación $x + y = 2$

$x = 2 - y \; ; \; y = 2 - x$

$x + y + 0z = 2$



6) Describa y bosqueje la superficie $\mathbb{R}^3$ representada por la ecuación $2z = 8 - 4x$

I; $x = 0$

$2z - 8 = 0$

$z = \frac{+8}{2}$

$z = +4$

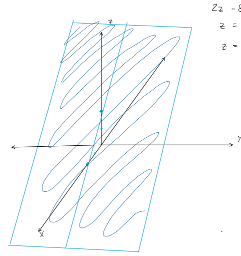
I; $z = 0$

$0 = 8 - 4x$

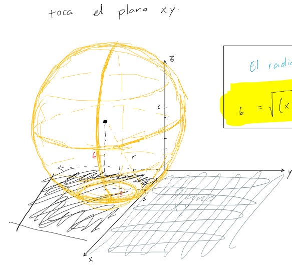
$-8 = -4x$

$\frac{-8}{-4} = x$

$x = 2$



7) Bono: La ecuación de la esfera con centro $(2, -3, 6)$ que toca el plano xy.



El radio es 6.

$6 = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2}$

Parte II

Tareas

Capítulo2

Tarea #3.

1) a. $(a \cdot b) \cdot c$

#asumiendo que a, b, c son vectores.

Resulta en un escalar. productos punto resultan en escalares siempre

b. $(a \cdot b) \times c$

El producto cruz es entre vectores no se puede hacer entre escalares, $a \cdot b$ resulta en un escalar por ende no tiene sentido.

c. $(a \times b) \times c$

Resulta en un vector

d. $(a \times c) \cdot b$

Resulta en un escalar. producto cruz de a, c resulta en vector, ese vector con producto punto b resulta en escalar

2) Encuentre vectores unitarios ortogonales a $\langle 3,2,1 \rangle$ & $\langle -1,1,0 \rangle$.

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(2 \cdot 0) - (1 \cdot 1)\right] - \hat{j}\left[(3 \cdot 0) - (1 \cdot -1)\right] + \ldots$$

$$+ \hat{k}\left[(3 \cdot 1) - (2 \cdot -1)\right]$$

$$= \hat{i}\left[0 - 1\right] - \hat{j}\left[0 - (-1)\right] + \hat{k}\left[3 - (-2)\right]$$

$$= -\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\therefore \langle -1, -1, 5 \rangle$$

Este es el vector ortogonal a
$\langle 3,2,1\rangle$ & $\langle -1,1,0\rangle$ Ahora sólo
falta la división por la magnitud
para que sea ortogonal unitario.

$$|O_\perp| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (5)^2} = \sqrt{1+1+25}$$
$$= \sqrt{27}$$

unit $\Rightarrow$ $O_\perp \cdot \frac{1}{\sqrt{27}} \Rightarrow \langle -1, -1, 5\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{27}} =$

$$R_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{1}{\sqrt{27}}, -\frac{5}{\sqrt{27}} \right\rangle$$

invierto signos para encontrar segundo vector

$$R_2 = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{27}}, -\frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{5}{\sqrt{27}} \right\rangle$$

Comprobación de ser unitario.

$$1 = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^2 + \left(-\frac{5}{\sqrt{27}}\right)^2}$$

$$1 = \sqrt{\left(\frac{1}{27}\right) + \left(\frac{1}{27}\right) + \left(\frac{25}{27}\right)}$$

$$1 = \sqrt{\frac{1+1+25}{27}}$$

$$1 = \sqrt{\frac{27}{27}}$$

$$1 = 1$$

$\therefore$ es unitario & ortogonal.

3) Calcule el triple producto escalar entre $a = \langle 1,2,3\rangle$ & $b = \langle 3,2,5\rangle$ & $c = \langle 0,4,3\rangle$ ¿ $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$

$b \times c = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \end{vmatrix}$

$$b \times c = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(2\cdot3)-(5\cdot4)\right] - \hat{j}\left[(3\cdot3)-(5\cdot0)\right] + \hat{k}\left[(3\cdot4)-(2\cdot0)\right]$$

$$= \hat{i}\left[6-20\right] - \hat{j}\left[9-0\right] + \hat{k}\left[12-0\right]$$

$$= \hat{i}\left[-14\right] - \hat{j}\left[9\right] + \hat{k}\left[12\right]$$

$$= -14\hat{i} - 9\hat{j} + 12\hat{k}$$

$$= \langle -14, -9, 12 \rangle$$

$$a \cdot (b \times c) = \langle 1,2,3 \rangle \cdot \langle -14,-9,12 \rangle$$

$$= \langle (1\cdot -14), (2\cdot -9), (3\cdot 12) \rangle$$

$$= -14 - 18 + 36 = \boxed{4}$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(2\cdot5)-(3\cdot2)\right] - \hat{j}\left[(1\cdot5)-(3\cdot3)\right] + \hat{k}\left[(1\cdot2)-(3\cdot2)\right]$$

$$= \hat{i}\left[10-6\right] - \hat{j}\left[5-9\right] + \hat{k}\left[2-6\right]$$

$$= \hat{i}\left[4\right] - \hat{j}\left[-4\right] + \hat{k}\left[-4\right]$$

$$= 4\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$= \langle 4, 4, -4 \rangle$$

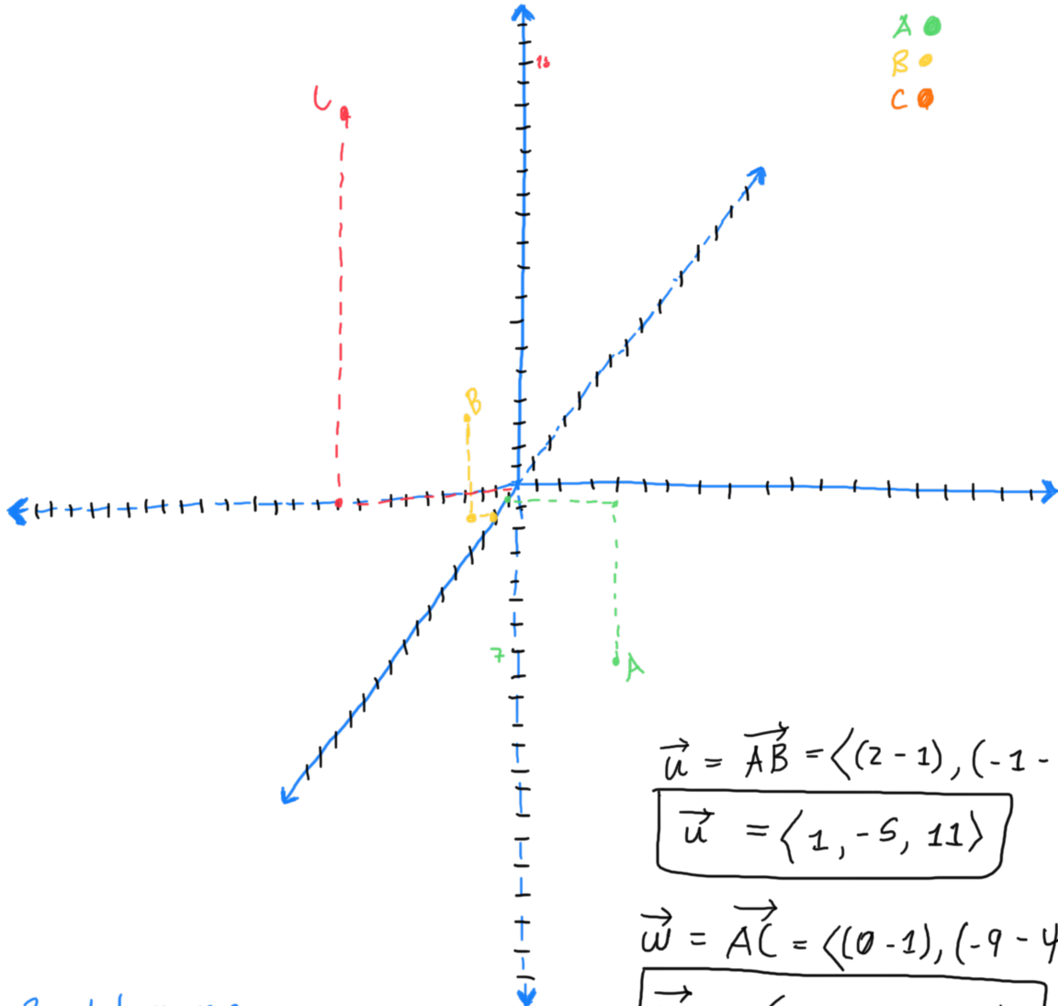
$$(a \times b) \cdot c = \langle 4,4,-4 \rangle \cdot \langle 0,4,3 \rangle$$

$$= 0 + 16 - 12 = \boxed{4}$$

$\therefore \quad a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$ Sí es igual ya que las dos dan 4, el mismo resultado.

4) Calcule el área del paralelogramo entre los puntos ...

$A(1,4,-7)$, $B(2,-1,4)$ & $C(0,-9,18)$.



$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \langle (2-1), (-1-4), (4+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{u} = \langle 1, -5, 11 \rangle}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = \langle (0-1), (-9-4), (18+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{w} = \langle -1, -13, 25 \rangle}$$

Paralelogramo

$P = b \cdot a$

$\text{base} = |\vec{a}|$

$\text{altura} = |b| \sin\theta$

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -5 & 11 \\ -1 & -13 & 25 \end{vmatrix} = \ldots$$

$$\ldots = \hat{i}\left[(-5 \cdot 25) - (11 \cdot -13)\right] - \hat{j}\left[(1 \cdot 25) - (11 \cdot -1)\right] + \hat{k}\left[(1 \cdot -13) - (-5 \cdot -1)\right]$$

$$= \hat{i}\left[-125 + 143\right] - \hat{j}\left[25 + 11\right] + \hat{k}\left[-13 - 5\right] =$$

$$= 18\hat{i} - 36\hat{j} - 18\hat{k}$$

$$= \langle 18, -36, -18 \rangle$$

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = \sqrt{18^2 + (-36^2) + (-18^2)} = 18\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} = 9\sqrt{6}$$

5) Considere los puntos $P(1,0,1)$ & $Q(-2,1,3)$ & $R(4,2,5)$.

a) Encontrar el vector no cero ortogonal al plano

$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (-2-1), (1-0), (3-1) \rangle$

$\boxed{\vec{u} = \langle -3, 1, 2 \rangle}$

$\vec{w} = \overrightarrow{PR} = \langle (4-1), (2-0), (5-1) \rangle$

$\boxed{\vec{w} = \langle 3, 2, 4 \rangle}$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left[(1\cdot4)-(2\cdot2)\right] - \hat{\jmath}\left[(-3\cdot4)-(3\cdot2)\right] + \hat{k}\left[(-3\cdot2)-(3\cdot1)\right]$$

$$= \hat{\imath}\left[4-4\right] - \hat{\jmath}\left[-12-6\right] + \hat{k}\left[-6-3\right]$$

$$= 0\hat{\imath} + 18\hat{\jmath} - 9\hat{k}$$

$\therefore \langle 0, 18, -9 \rangle$ es el vector ortogonal no cero al plano.

b) Determine el área del triángulo PQR

$$A_\triangle = \frac{1}{2}\left|\vec{u} \times \vec{w}\right| = \frac{1}{2}\left|\underbrace{\langle 0, 18, -9 \rangle}\right|$$

$\sqrt{0^2 + 18^2 + (-9)^2}$

$\sqrt{324 + 81}$

$\sqrt{405}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{405} = \frac{1}{2}\, 9 \cdot \sqrt{5} = \frac{9 \cdot \sqrt{5}}{2}$$ es el

≈ 10.06 área del triángulo PQR

6) Volúmen del paralelelipípedo determinado por los vectores $a = \langle 1,2,3 \rangle$; $b = \langle -1,1,2 \rangle$; $c = \langle 2,1,4 \rangle$.

$$V_p = |a \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{\imath}\left[(1\cdot 4)-(1\cdot 2)\right] - \hat{\jmath}\left[(-1\cdot 4)-(2\cdot 2)\right] + \hat{k}\left[(-1\cdot 1)-(2\cdot 1)\right]$$

$$\dots = \hat{\imath}\left[4-2\right] - \hat{\jmath}\left[-4-4\right] + \hat{k}\left[-1-2\right] = 2\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

Ahora $\hat{\imath} = 1$; $\hat{\jmath} = 2$; $\hat{k} = 3$; (por vector a)

$$= 2(1) + 8(2) - 3(3)$$

$$= 2 + 16 - 9 = 18 - 9 = 9$$ es el volúmen del paralelelipipedo a, b, c.

7) ¿Están los pts. $A(1,4,-7)$; $B(2,-1,4)$; $C(0,-9,18)$; $D(0,0,0)$ sobre el mismo plano?

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \langle (2-1), (-1-4), (4+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{u} = \langle 1, -5, 11 \rangle}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = \langle (0-1), (-9-4), (18+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{w} = \langle -1, -13, 25 \rangle}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AD} = \langle (0-1), (0-4), (0+7) \rangle$$

$$\boxed{\vec{v} = \langle -1, -4, 7 \rangle}$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v})}$$

$$\vec{u}(\vec{w} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -13 & 25 \\ -1 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \hat{i}\left[(-13 \cdot 7) - (-4 \cdot 25)\right] - \hat{j}\left[(-1 \cdot 7) - (25 \cdot -1)\right] + \hat{k}\left[(-1 \cdot -4) - (-1 \cdot -13)\right]$$

$$= 9\hat{i} - 18\hat{j} - 9\hat{k}$$

remplazar $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ con $\vec{u}$.

$$= 9(1) - 18(-5) - 9(11)$$

$$= 9 + 90 - 99$$

$$= 9 - 99 + 90$$

$$= -90 + 90 = 0$$ $\therefore$ sí son parte del mismo plano.

8) $(a \cdot b) = \sqrt{3}$ & $(a \times b) = \langle 1, 2, 2 \rangle$

encontra ángulo entre a & b.

$$\underbrace{a \cdot b}_{\sqrt{3}} = |a||b|\cos\theta$$

$$\underbrace{|a \times b|}_{|\langle 1,2,2\rangle|} = |a||b|\sin\theta$$

$$|a||b|\cos\theta = \sqrt{3}$$

$$\underbrace{|a||b|}_{} = \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$$

Sustituir en

$$|\langle 1,2,2\rangle| = \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}\sin\theta$$

$$\frac{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}{\sqrt{3}} = \left.\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right\} \tan\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{1+4+4}}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = 3 \cdot 3^{-\frac{1}{2}}$$

$\tan\theta$ ...

$= 3^{1-\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{3}$

$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3})$

$\theta = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ El ángulo es $\theta = \frac{\pi}{3}$

BONO:

9) a) $|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2$

Partimos desde la siguiente propiedad.

$\hookrightarrow |a \times b| = |a||b| \sin\theta$ # Elevamos al cuadrado

$\Rightarrow |a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 \sin^2\theta$

Propiedad pitagórica

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

Sustituir

$|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 (1 - \cos^2\theta)$ # Distribuyo

$|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - \underbrace{|a|^2 |b|^2 \cos^2\theta}_{(a \cdot b)^2}$

$\therefore \quad |a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2 \quad \square$

b) $(a - b) \times (a + b) = 2(a \times b)$ # Quiero llegar a eso

$= (a - b) \times (a + b)$

Propiedad distributiva

$= (a - b) \times (a + b)$

$= \cancel{(a \times a)}^{0} + (a \times b) - (b \times a) - \cancel{(b \times b)}^{0}$

$= (a \times b) - (b \times a)$

$\# \; (a \times b) = -(b \times a)$

$= (a \times b) + (a \times b)$

$\therefore \; 2(a \times b) \quad \square$

Parte III

Examenes Cortos

Capítulo3

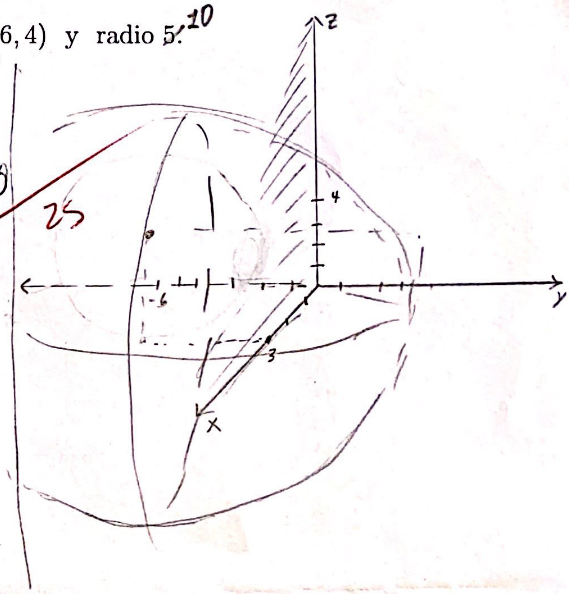
Examen corto #01

Corto #1 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: David Corzo **Carnet:** 20190432

Resuelva las siguientes problemas:

1. (50 pts.) Halle la ecuación de la esfera con centro $(3,-6,4)$ y radio ~~5~~ 10. ¿Cuál es la intersección de esta esfera con el plano xz?



Ecuación:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+6)^2+(z-4)^2}=10$$

25

Se asume $y = 0$;

$$\sqrt{(x-3)^2+(z-4)^2+(6)^2}=10$$

$$(x-3)^2+(z-4)^2+36=10^2$$

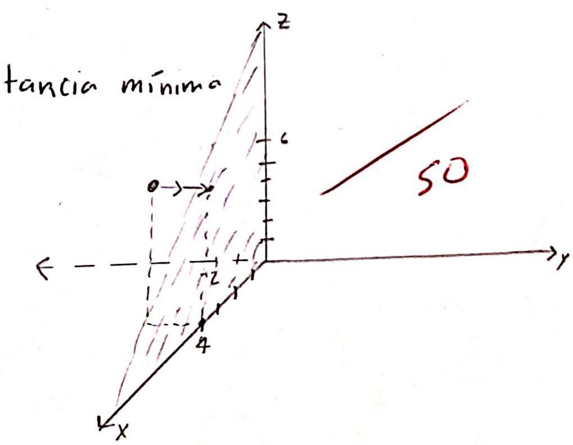
$$(x-3)^2+(z-4)^2=100-36$$

Intersección: $(x-3)^2+(z-4)^2=64$

25

2. (50 pts.) Determine la distancia mínima del punto $(4,-2,6)$ al plano xz.

La distancia mínima es 2.



50

100/100

Capítulo4

Examen corto #03

~~100~~ 90/100

Corto #3 Cálculo Multivariable (20 min)

Nombre: David Corzo **Carnet:** 20190432

Resuelva los siguientes problemas:

1. (50 pts.) Determine el área del triángulo entre los puntos $P = (0, -2, 0)$, $Q = (4, 1, -2)$ y $R = (5, 3, 1)$.

$$T_\Delta = \frac{1}{2}\left|\vec{u} \times \vec{w}\right|$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle (4-0), (1-(-2)), (-2-0) \rangle = \langle 4, 3, -2 \rangle$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{PR} = \langle (5-0), (3-(-2)), (1-0) \rangle = \langle 5, 5, 1 \rangle$$

$$\left|\vec{u} \times \vec{w}\right| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(3\cdot 1)-(-2\cdot 5)\right] - \hat{j}\left[(4\cdot 1)-(-2\cdot 5)\right] + \hat{k}\left[(4\cdot 5)-(3\cdot 5)\right]$$

$$= \hat{i}\left[3+10\right] - \hat{j}\left[4+10\right] + \hat{k}\left[20-15\right]$$

$$= 13\hat{i} - 14\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$= \langle 13, -14, 5 \rangle$$

$$= \sqrt{(13)^2 + (-14)^2 + (5)^2}$$

$$= \sqrt{169 + 496 + 25}$$

$$= \sqrt{690}$$

$$\boxed{\therefore \frac{1}{2}\sqrt{690}}$$

40

$$\begin{array}{r} 11 \\ 169 \\ +\ 496 \\ \hline 665 \\ 25 \\ \hline 690 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 14 \\ \cdot\ 14 \\ \hline 56 \\ 44 \\ \hline 496 \end{array}$$

2. (50 pts.) Encuentre el volumen del paralelelípipedo determinado por los vectores $a = \langle 1, 5, -2 \rangle$, $b = \langle 3, -1, 0 \rangle$, y $c = \langle 5, 9, -4 \rangle$.

$$P_\square = \left| c \cdot (a \times b) \right|$$

$$(a \times b) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(5\cdot 0)-(-2\cdot -1)\right] - \hat{j}\left[(1\cdot 0)-(-2\cdot 3)\right] + \hat{k}\left[(1\cdot -1)-(5\cdot 3)\right]$$

$$= \hat{i}\left[0-2\right] - \hat{j}\left[0+6\right] + \hat{k}\left[-1-15\right]$$

$$= -2\hat{i} - 6\hat{j} - 16\hat{k}$$

$$= \langle -2, -6, -16 \rangle$$

$$c\cdot(a\times b) = \langle 5, 9, -4 \rangle \cdot \langle -2, -6, -16 \rangle$$

$$= (5\cdot -2) + (9\cdot -6) + (-4\cdot -16)$$

$$= (-10) + (-54) + 64$$

$$= -64 + 64 = 0 \quad \text{Hay un plano no un paralelelípipedo}$$

$$\cancel{|c\cdot(a\times b)| = \sqrt{(-10)^2 + (-54)^2 + (-64)^2}}$$

$$\cancel{= \sqrt{100 + 2916 + 4086}}$$

$$= \sqrt{7102}$$

50

$$\begin{array}{r} 2 \\ 1 \\ 54 \\ \cdot\ 54 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 1 \\ 64 \\ \cdot\ 64 \\ \hline 1246 \\ 384 \\ \hline 4086 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ 2916 \\ +\ 4086 \\ \hline 7002 \\ +\ 100 \\ \hline 7{,}102 \end{array}$$