1. Derivadas parciales, rectas tangentes y planos tangentes

1.1. Interpretación de la derivada parcial

- $\mathbb{C}$ curva de intersección entre $z = f(x, y)$ y $y = b$.
- Recta tantente a eta curva en el punto $(a, b, f(a, b))$:

$$\text{Derivada : } f_x(x, b) \qquad \text{Pendiente: } f_x(a, b)$$

- Derivadas parciales: $f_x(a, b)$ resulta ser la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x, b)$ en la dirección de x.

$$L = \langle a, b, f(a, b)\rangle + t\,\langle 1, 0, f(a, b)\rangle \qquad \text{donde: } x = t, y = b, z = f(t, b)$$

- Para encontrar L_2 $x = a$:

$$\begin{aligned}
&x = a, y = t, x = f(z, y) \implies z_y = f_y(a, y) \implies z_y = f_y(a, b)\\
&z_y = f(a, b) \text{ es la pendiente de la tangente a la curva } f(a, y) \text{ en la dirección de } y\\
&L_2 = \langle a, b, f(a, y)\rangle + t\,\langle 0, 1, f_y(a, b)\rangle
\end{aligned}$$

- Estas dos rectas se utilizan para construir un plano tangente a la superficie.
- La ecuación del plano es un plano que es paralelo a L_1 & L_2.

$$\begin{aligned}
L_1 &= \langle a, b, f(a, b)\rangle + t\,\overbrace{\langle 1, 0, f(a, b)\rangle}^{v_1}\\
L_2 &= \langle a, b, f(a, b)\rangle + t\,\underbrace{\langle 0, 1, f(a, b)\rangle}_{v_2}
\end{aligned}$$

La ec. vectorial:

$$\hat{n} \cdot (-r_0) = 0 \quad \vec{r}_0 = \langle a, b, f(a, b)\rangle$$

terminar excursión.

1.2. Ejercicios

- Encuentre el plano tangenge a la superficie $z = \ln(x - 2y)$ en el punto $(3, 1, 0)$:

$$\begin{aligned}
f(a, b) \quad f_x(a, b) \quad f_y(a, b) \quad a = 3,\ b = 1\\
f(3, 1) = \ln(3 - 2) = \ln(1) = 0\\
\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x - 2y} \quad \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|^{(3,1)} = \frac{1}{3 - 2} = 1\\
\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2}{x - 2y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|^{(3,1)} = \frac{-2}{3 - 2} = -2\\
z = f(3, 1) + f_x(x - 3) + f_y(y - 1)
\end{aligned}$$

La ecuación del plano tangente:

$$z = 0 + x - 3 - 2y + 2$$
$$\therefore \quad z = x - 2y - 1$$

2. Aproximaciones lineales

- La aproximación lienal de $z = f(x, y)$, linearización.
- La aproximación lineal de z en (a, b) es el plano tangente a la superficie.

$$L(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial}{}$$

2.1. Ejercicios

Considere la función $f(x, y) =\sqrt{2x + 2e^y}$:

- Encuentre la aproximación lineal de f en el punto $(7, 0)$:
  Encuentre $f(7, 0) \quad f_y(7, 0)$

$$f(7, 0) = \sqrt{14 + 2} = 4$$
$$f_x(x, y) = (2x + 2e^y)^{-\frac{1}{2}} \qquad f_x(0, 7) = \frac{1}{\sqrt{14 + 2}} ? \frac{1}{4}$$
$$f_y(x, y) = \frac{e^y}{\sqrt{2x + 2e^y}} \qquad f_y(7, 0) = \frac{1}{\sqrt{14 + 2}} ? \frac{1}{4}$$
$$\therefore \text{ La aproximación lineal o plano tangente: } L = 4 + \frac{1}{4}(x - 7) + \frac{1}{4}y$$
$$\text{Cerca de (7,0): } \sqrt{2x + 2e^y} \approx \frac{9}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y$$

- Utilice la aproximación lineal para aproximar el valor de $\sqrt{8 + 2e}$:

$$f(4, 1) = \sqrt{8 + 2e} \approx 3{,}5 \approx L(4, 1)$$
$$L(4, 1) = \frac{9}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$
$$\text{En realidad : } \sqrt{8 + 2e} \approx 3{,}665592$$

- Ejercicio 3: Encuentre la aproximación lineal de $g(x, y) = 1 + \ln(xy - 5)$ en el punto $(2, 3)$:

$$g(2, 3) = 1 + 2\ln(6 - 5) = 1 + 0 = 1$$
$$g_x(x, y) = 0 + 1 \cdot \ln(xy - 5) + \frac{xy}{xy - 5}$$
$$g_x(2, 3) = \ln(1) + \frac{6}{6 - 5} = 0 + \frac{6}{1} = 6$$
$$g_y(x, y) = 0 + \frac{x \cdot x}{xy - 5}$$
$$g_y(2, 3) = \frac{4}{6 - 5} = 4$$

La aproximación lineal entonces es:

$$\begin{aligned}
&\therefore \\
&L(x,y) = 1 + 6(x-2) + 4(y-3) \\
&L(x,y) = -23 + 6x + 4y
\end{aligned}$$

3. 12.4 Derivadas implicitas y 12.5 Regla de la cadena

- Funciones 2 variables $z = f(x,y)$
- Explícita: z no está sólo en función de x & y.
- Ejemplos: $x^2 + y^2 + z^2 = 16, \sqrt{z^2 - x^2} = y + z$
- ¿Cómo se encuetnran $\frac{\partial z}{\partial x}$ & $\frac{\partial z}{\partial y}$ **?**:
  - Implicita $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ es una esfera de 4 (rango [-4,4]) en dos hemisferios:

$$z = +\sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{2}(16 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{z} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{y}{z}
\end{aligned}$$

- Derivación implicita, se pueden encontrar z_x & z_y sin necesidad de resolver para z.

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 = 16 \quad &\text{z \& y son independientes} \\
\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2(x,y)) &= \frac{\partial}{\partial x}(16) \\
2x + 0 + 2z\frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\
2z\frac{\partial z}{\partial x} = -2x \quad \implies \quad \frac{\partial z}{\partial x} &? \frac{-x}{z} \\
\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2) &= \frac{\partial}{\partial y}(0) \\
0 + 2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-y}{z}
\end{aligned}$$

3.1. Derivación parcial implícita abreviada

- $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ como $x\ln(y) + x^2\sqrt{1 + x + z} = k$
- Forma implícita: $F(x, y, z(x,y)) =$ constante. $\frac{\partial z}{\partial x}$ use la regla de la cadena.

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad \Longrightarrow \quad z_x=-\frac{f_x}{f_z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \quad \Longrightarrow \quad z_y=-\frac{f_y}{f_z}$$

3.2. Ejercicios

Encuentre las primeras derivadas parciales de z.

1. $\ln(zy)+9z-xyz=1$:

$$\begin{array}{cc} F_x=-yz & \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{yz}{z^{-1}+9-xy} \\ F_y=y^{-1}+0-xy & \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-y^{-1}}{z^{-1}+9-xy} \\ F_z=z^{-1}+9-xy & \end{array}$$

\# Sin derivación parcial implícita

\# $z(x,y)$ agregue z_x cada vez que aparece z.

$$\frac{yz_x}{z_y}+9z_x-y_x$$