Álgebra Lineal - Rocket Book Compiliation

Christiaan Ketelaar
Organizado por : David Corzo

2020-08-03

Índice general

1. RB 2020-07-27 16.05.56 **3**

2. RB 2020-07-29 14.30.00 **10**

3. RB 2020-07-30 11.23.21 **18**

4. RB 2020-08-03 16.03.43 **26**

5. RB 2020-08-05 14.35.54 **33**

6. RB 2020-08-10 20.31.19 **38**

Capítulo 1

RB 2020-07-27 16.05.56

Proyectos.

2 Encriptación.
2. Crecimiento Exponencial COVID.
1. Regresión Lineal Múltiple.

1. Programación Lineal.

1. Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Objetivo AL: Resolver sistemas de ecs. lineales.

Ec. Recta en $\mathbb{R}^2$: $ax + by = c$.
Ec. plano en $\mathbb{R}^3$: $ax + by + cz = d$.

Ec. lineal en n variables: $\boxed{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b}$

Coeficientes $a_1, a_2, \dots a_n$. $a_i \in \mathbb{R}$.
Término Constante: b

Ejemplos: $3x_1 - 9x_2 + 12 = 0$.
$\sqrt{2}\, w + \ln(8)\, x + e^{10} y + \frac{1}{\pi} z = 5!$

Son ecuaciones lineales.

ECUACIONES QUE NO SON LINEALES.

Producto entre variables $xy + yz = 8$. NO

Potencia diferente de uno. $x^2 + \sqrt{y} + z^{-1} = 8$ NO

Funciones no lineales: $\sqrt{2w} + \ln(8x) + e^{10y} = \sin 3$.

NO.

Solución de Ec. Lineal: es un vector $[s_1\ s_2 \cdots s_n]$ cuyos componentes s_i satisfacen la ec.
$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$. cuando se sustituyen las s_i.

Ejemplo: Considere la ec. lineal. $3x_1 - 9x_2 + 12 = 0$

Resuelva para x_1:
$$3x_1 = 9x_2 - 12.$$
$$x_1 = 3x_2 - 4.$$

La solución de esta ec. es la recta $x_1 = 3x_2 - 4$

Vector solución:
$$x_1 = 3t - 4. \qquad \vec{s} = \begin{bmatrix} 3t-4 \\ t \end{bmatrix}$$
$$x_2 = t.$$

t, parámetro.
es cualquier número real

Verifique: $9t - 12 - 9t + 12 = 0$ ✓

Sistema de Ecuaciones Lineales: es un conjunto finito de ecuaciones lineales. m ecuaciones de n variables.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 8 \\ x + 2y + z &= 4 \\ 2x + z &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 8 \\ x + 2y &= 10 \\ x + 3y &= 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ x + 2y + z &= 2. \end{aligned}$$

m y n pueden ser diferentes.

5.

Solución de un sistema de ecuaciones: es un vector $\vec{s}$ que satisface todas las ecs. del sistema.

Ejercicio 1: Resuelva los sigs. sistemas (p 12)

a. $\boxed{x + y = 2}$ 2 ecs x 2 variables.

$\underline{\underline{3x}} + 3y = 6.$

Métodos: Algebraico (Eliminación, Sustitución, Igualación)

Gráfico: la soln es la intersección entre las rectas.

$R_2 - 3R_1$: $0 + 0 = 0 \rightarrow \boxed{0 = 0}$ Tautología.

$\frac{1}{3}R_2$: $x + y = 2.$, la recta está repetida

la solución es $y = 2 - x$ Infinitas soluciones

$x = t.$ $\vec{s} = \begin{bmatrix} t \\ 2-t \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots$

$y = 2 - t.$

Sustitución: $y = 2 - x$

$3x + 6 - 3x = 6. \rightarrow \boxed{6 = 6}$

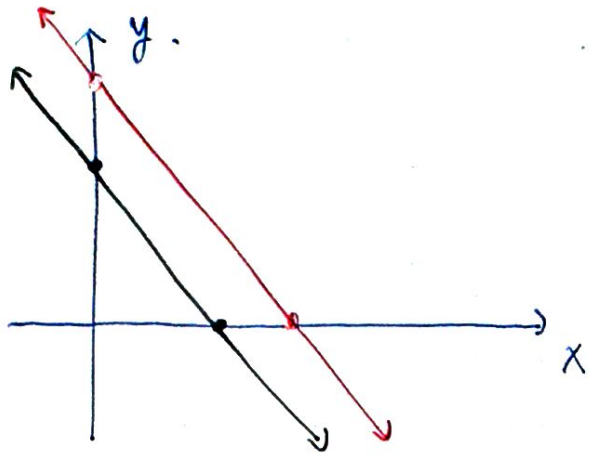
b. $x + y = 2.$

$3x + 3y = 9$ $R_2 - 3R_1$: $0 + 0 = 3.$

$0 \neq 3$ Contradicción.

R_1: $x + y = 2$

$x + y = 3$ NO TIENE SOLUCIÓN.



Como las dos rectas son paralelas, no se pueden cortar. (No hay soln).

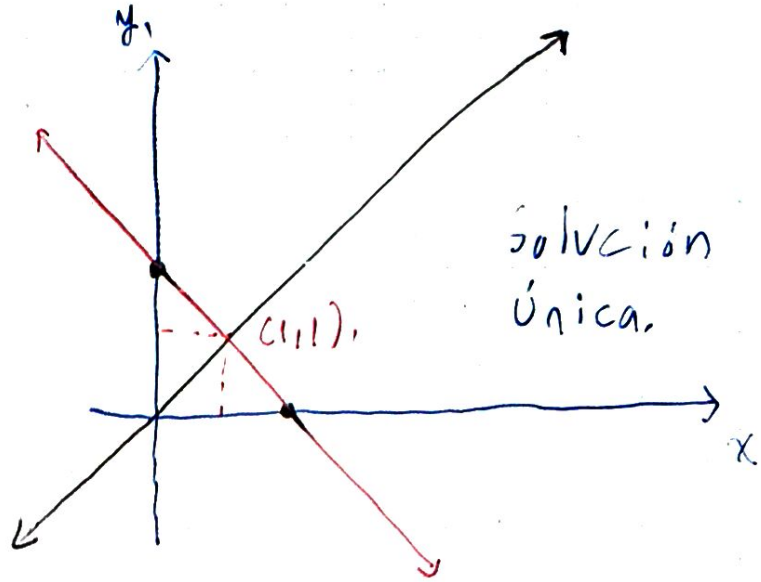
c. $x - y = 0$

$x + y = 2.$

$R_1 + R_2$: $2x = 2. \Rightarrow x = 1$

$y = x \Rightarrow y = 1$

soln única: $\vec{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



Solución Única.

Tipos de Solución de un sistema de Ecs. Lineales

i. Solución Única.

ii. Soluciones Infinitas. ↑ única, agregue más ecs.

iii. No hay solución. ↓ única, elimine algunas ecs.

Sistema Consistente: es un sistema que tiene una o más soluciones.

Sistemas Equivalentes: dos sistemas de ecs. lineales son equivalentes si y sólo si tienen la misma solución.

La idea del AL es reescribir un sistema de ecuaciones utilizando eliminación a un sistema de ecs. más "sencillo", uno dónde se pueda observar la soln.

1ro
$$\begin{aligned} w + x + y + z &= 6. \\ 2w + x + y + z &= 7 \\ 2w + 2x + y + 2z &= 7 \\ -w - x + 2y + z &= 5 \end{aligned}$$

2do
$$\begin{aligned} -w &= 1 \\ w + x &= 3 \\ w + x + y &= 8 \\ w + x + y + z &= 6. \end{aligned}$$

sustitución hacia adelante.

es más fácil de resolver.

3ro.
$$\begin{aligned} w &= 1 \\ x &= 3 - w = 2. \\ y &= 8 - w - x = 5 \\ z &= 6 - w - x - y = 6 - 8 = -2. \end{aligned}$$

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} w \\ x \\ y \\ z. \end{matrix}$$

solución

Los tres sistemas de ecs. son equivalentes, porque tienen la misma solución.

$$\begin{aligned} w &= 1 \\ x &= 2 \\ y &= 5 \\ z &= -2. \end{aligned}$$

Resolución de los sistemas de ecuaciones.

Reescriba el sistema sólo con sus coeficientes.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} w & x & y & z \end{array} \end{array} \xrightarrow{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-2R_1 \\ R_4+R_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 11 \end{array}\right]$$

una fila igual

forma compacta

$[A|b]$

$R_1: \quad x + y = 3$

$R_2: \quad 2x + y = 5$

$R_2 - 2R_1:$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ -R_2 \\ -R_3 \\ R_4+3R_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right]$$

$w = 6 - x - y - z.$

$x = 5 - y - z.$

$y = 5$

$2z = -4$

Capítulo 2

RB 2020-07-29 14.30.00

2.2 Métodos Directos para resolver sistemas ecs.

Una matriz es un arreglo rectangular con m filas y n columnas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 & 14 \end{bmatrix}$$

tamaño: $m \times n$. Filas x columnas.

$A : 3 \times 3 \qquad B : 3 \times 2 \qquad C : 1 \times 4.$

Dado el sistema de ecs. lineales.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= b_1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= b_2 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= b_3. \end{aligned}$$

Si los coeficientes se guardan en una matriz A. y los términos constantes en un vector columna b, entonces el sistema se puede representar con una matriz aumentada $[A \mid b]$.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & b_2 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & b_3 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \end{array}$$

Ejercicio 1: Escriba la matriz aumentada del sistema dado.

a. $$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 2x + y + 4z &= 8 \\ x + y + z &= 4 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{operaciones}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & c_1 \\ & 1 & & c_2 \\ & & 1 & c_3 \end{array}\right]$$

b. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 8 \\ 4x_1 - x_2 &= 6 \\ 6x_1 - x_2 &= 2. \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 4 & -1 & 6 \\ 6 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Matrices en forma escalonada por renglones

Abrevia como FER.

1. Cualquier fila que tenga sólo ceros se ubica en la parte inferior de la matriz.
2. La entrada principal de cada fila es la entrada que está más a la izquierda en la fila.
3. En cada renglón diferente de cero, todas las entradas debajo y a la izquierda de la entrada principal son ceros.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

FER escalón o gradas.

Ejercicio 2: Determine si la matriz está en FER.

no es entrada principal.

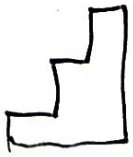
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

NO, hay 1 debajo de la entrada principal a_{11}

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

B SI está en FER

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



C no está en FER

PERO si se intercambian sus 1ra y 3ra filas si lo es.

$R_1 \leftrightarrow R_3$.

$$C_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

C_1 SI está en FER.

Si se realizan operaciones elementales de renglón sobre una matriz se puede una nueva matriz que sigue mantiendo la misma solución. "Sistemas Equiv"

Operaciones Elementales de Renglón.

1. Intercambio de Renglones $R_i \leftrightarrow R_j$
2. Multiplicación por una constante. $K R_i$ $K \neq 0$.
3. Adición de Renglones $R_i + K R_j$.

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

lo mismo que

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ x + y &= 5. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ -x - 2y &= -4 \end{aligned}\right\}$$

lo mismo que

$$\boxed{\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 0 + y &= -1 \end{aligned}}$$

Eliminación Gaussiana. resuelve sistemas de ecs. lineales,

1. Escriba la matriz aumentada del sistema $[A|b]$.
2. Realice operaciones elementales para reducir la matriz $[A|b]$ a su FER.
3. Resuelva el sistema usando sustitución hacia atrás.

Ejercicio 3: Resuelva los sigs. sistemas

a.
$$\begin{aligned} 2x_1 + \overset{0x_2}{} + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$4 - 4 = 0$ ✓

$4 + 6 - 2 = 8$ ✓

$2 - 3 - 2 = -3$ ✓

$R_2 : R_2 - R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 0.5R_1}]{0.5R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 \leftrightarrow R_3 \\ -R_3 \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 2R_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

solución única.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$x_1 = -2x_3 = 2.$

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Operaciones entre columnas $C_1 \leftrightarrow C_3$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} X_1 & X_3 & X_2 \end{array} \end{array}$$

$X_1 - 2X_3 = 0.$
$X_3 - X_2 = 8$
$X_2 = 3.$

b. $2X_1 + X_2 = 8$
$4X_1 - X_2 = 6$
$4X_1 - X_2 = 2.$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 4 & -1 & 6 \\ 4 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -10 \\ 0 & -3 & -14 \end{array}\right]$$

$X_2 = 10/3$
$X_2 = 14/3.$

$$R_3 - R_2 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

$3X_2 = 10$
$0 \neq -4$ NO HAY SOLUCIÓN.
contradicción.

Más variables que ecs.

c. $X_1 + X_2 + 2X_4 = 0$
$X_1 + X_2 + 3X_4 = 6$
$X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4 = 3$

10
01

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 - 2R_2. \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \end{array}$$

$X_1 = -12. - X_2$
$X_3 = 3$
$X_4 = 6.$

X_2 no tiene entrada principal.

no hay una ec. para X_2.

$X_2 = -2, -1, 0, 1, 2.$

X_2 cualquier valor, $X_2 = t \quad t \in \mathbb{R}$
parámetro.

$$\begin{aligned} x_1 &= -12 - t \\ x_2 &= \quad\quad\; t \\ x_3 &= \quad 3 \\ x_4 &= \quad 6. \end{aligned}$$

más columnas que filas resultan en variables con parámetros.

Para encontrar todas las soluciones en un sistema es necesario identificar los tipos de variables.

Variables principales: variables cuyas columnas tienen entradas principales.

Variables libres: variables cuyas columnas <u>no</u> tienen entradas principales

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \end{array}$$

x_1, x_3, x_4 son variables principales.

x_2 es variable libre.

A cada variable libre se le asigna un parámetro

$x_2 = t$

Ejercicio 4: Resuelva.

$$\begin{aligned} w + x + y + z &= 4 \\ 2w + 2x + 4z &= 6. \end{aligned}$$

4 columnas 2 filas x_1 2 variables libres.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

princ w, y..
libres x, z.

$$\begin{array}{l} R_1 + 0.5R_2 \\ -0.5R_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

FEReducida R.

$x = t_1$ $\quad$ $w + t_1 + 2t_2 = 3.$ $\quad$ w

$z = t_2$ $\quad$ $y - t_2 = 1$ $\quad$ x

y

$z.$

$w = 3 - t_1 - 2t_2.$

$x = t_1$

$y = 1 + t_2$

$z = t_2.$

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

suma 3 vectores.

$t_1 = t_2 = 0$ $\quad$ $\vec{s}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ $t_1 = t_2 = 1$ $\quad$ $\vec{s}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$t_1 = 1$

$t_2 = -1$ $\quad$ $\vec{s}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, ...,

Eliminación Gauss-Jordan.

La matriz se reduce todavía más, se reduce a una forma escalonada reducida por renglones (FERR)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

variables libres

entradas pueden ser diferentes de cero

4 4 4 $\quad$ 7 sin grupo.

4 5 5 5

Capítulo 3

RB 2020-07-30 11.23.21

2.1 Suma de Matrices

Una matriz es un arreglo rectangular $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = A$

La transpuesta intercambia filas y columnas $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Operaciones Matriciales

1. Suma: $A + B$.
2. Multiplicación por un escalar: $K A$. K es un número

Producto AB.

1 y 2. se realizan entrada por entrada.

Suma de Matrices: A y B tienen que tener el mismo tamaño, se suman cada entrada correspondiente

$$[A_{ij}] + [B_{ij}] = [A_{ij} + B_{ij}]$$

La suma no está definida si A y B tienen diferente tamaño.

Ejercicio 1: Considere las sigs. matrices.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $E = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

2×2 2×3.

a. $A + C$. no está definida., diferente tamaño.

b. $B + C$ no está definida

c. $B^T + C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 11 \end{bmatrix}$

d. $D^T + E^T = [1 \quad 2 \quad 4] + [-2 \quad 0 \quad -2] = [-1 \quad 2 \quad 2]$.

Propiedades de la Suma: A y B tienen el mismo tamaño.

1. $A + B = B + A$. Conmutativa
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$. Asociativa.
3. $A + O_{m \times n} = A$. Elemento Neutro.

2.2 Multiplicación por un Escalar (Constante).

Un escalar K es cualquier número real.

Multiplique cada entrada de A por K.

$KA = [K A_{ij}]$ tiene el mismo tamaño que A.

Casos especiales de la suma y mult. por un escalar

Negativo de una matriz $(-1)A = -A$.

Resta entre Matrices: $A - B = A + (-B)$

$K_1 A + K_2 B$. Pero multipliquen por las K's y luego sumen.

Ejercicio 2: Dadas.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$$

a. $\underset{2\times 3}{1000A} - \underset{3\times 2}{e^5 B}$ no está definida., diferentes tamaños.

b. $10A - 3B^T = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 20 \\ 10 & 30 & 50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & -6 & 11 \\ 10 & 27 & 50 \end{bmatrix}$

c. $10C - 5D^T = 10\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

d. $5A + 4005\, O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 10 \\ 5 & 15 & 25 \end{bmatrix} + 4005\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$5A. = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 10 \\ 5 & 15 & 25 \end{bmatrix}$

e. $5A + O_{3\times 3}$ no está definida. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Propiedades de la multiplicación por un escalar.

Distributivas: $K(A+B) = KA + KB.$

$(K+m)A = KA + mA.$

$(Km)A = K(mA) = (mK)A.$

Matriz cero ó escalar cero. $0A = O_{m\times n}$ $\quad K O_{m\times n} = O_{m\times n}$

cero

Ejercicio 3: Resuelva la sig ec. matricial.

a. $5\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 5y_1 \\ 5y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{bmatrix} 5y_1 \\ 5y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}$

$y_1 = 10/5 = 2.$

$y_2 = 15/5 = 3.$

b. $3\begin{bmatrix} x & y \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 14 & 16 \\ u & w \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 6 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 30 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 32 \\ 2u & 2w \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3x+5 & 3y-5 \\ 36 & 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 32 \\ 2u & 2w \end{bmatrix}$

Igualando cada entrada

$3x + 5 = 28 \Rightarrow x = 23/3 \approx 7.6666$

$3y - 5 = 32 \Rightarrow y = 37/3 \approx 12.3333$

$36 = 2u \qquad u = 18$

$2w = 34 \qquad w = 17$

Algunas de estas puede que no tengan sol.

$\begin{bmatrix} x & y \\ z & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$0 \neq 1$

Ejercicio 4: Demanda de Hidrocarburos.

País	Gasolina	Petróleo	Gas Licuado.
Guatemala	34	74	8.8
El Salvador	14	45	7.7
Honduras.	14	53	3.3
Nicaragua	8	30	2.7
Costa Rica.	18	53	4.0.
	G	P	L.

a. Encuentre la demanda total de hidrocarburos en cada país.

Sume los tres vectores columna.

$$G + P + L = \begin{bmatrix} 34 \\ 14 \\ 14 \\ 8 \\ 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 74 \\ 45 \\ 53 \\ 30 \\ 53 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8.8 \\ 7.7 \\ 3.3 \\ 2.7 \\ 4.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 116.8 \\ 66.7 \\ 70.3 \\ 40.7 \\ 75.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Guatemala} \\ \text{ES} \\ \text{Honduras} \\ \text{Nicaragua} \\ \text{CR.} \end{matrix}$$

b. Encuentre la demanda total en los 5 países para cada tipo de Hidrocarburo.

vector Fila 1×3.

$$GT + ES + H + N + CR = [34 \quad 74 \quad 8.8] + [14 \quad 45 \quad 7.7] + \dots [18 \quad 53 \quad 4.0]$$

$$= \begin{matrix} [88 & 255 & 26.5] \\ \text{Gasol.} & \text{Petróleo.} & \text{Licuado.} \end{matrix}$$

c. Encuentre la demanda total de hidrocarburos para todos los países

Sume todas las entradas del vector 5x1 de a.
del vector 1x3 de b.

$D = 369.5$; $D = 369.5$

¿Qué significa multiplicar matrices?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB \neq \begin{bmatrix} 1\cdot 1 & 2\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 4\cdot 3 \end{bmatrix}$$

no se van a multiplicar las entradas correspondientes.

Se puede realizar incluso cuando las dos matrices tienen diferentes tamaños

CA si van a existir $\qquad AC$ no va a existir.

Multiplicación entre un vector fila y un vector columna.

$$u = [1 \ 0 \ 2 \ 4] \qquad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$u \ w = [1 \ 0 \ 2 \ 4] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 1(1) + 0(1) + 2(0) + 4(2) = 1 + 8 = 9$$

es un número.

$u_{1\times n} \ w_{n\times 1}$ se conoce como el producto punto. ó suma producto.

y nos permite realizar el producto entre matrices, es una combinación de varios productos puntos entre cada fila de A y cada columna de B.

Fila1 columna 2.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1)+2(2) & 1(1)+2(3) \\ 3(1)+4(2) & 3(1)+4(3) \end{bmatrix}$$

columna1

$$2 \times 2 \quad 2 \times 2. \qquad = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 11 & 15 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Producto entre matrices es una multiplicación "cruzada" entre la fila i de la matriz y la columna de la matriz j.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 2+8 \\ 1+9 & 2+12 \\ 1+3 & 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 10 & 14 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$3 \times 2 \qquad 2 \times 2. \qquad 3 \times 2.$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$2 \times 2 \neq 3 \times 2.$

la operación $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ no es posible.

no existe

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 1+3 & 2+1 \\ 2+4 & 2+3 & 4+1 \end{bmatrix}$$

Capítulo 4

RB 2020-08-03 16.03.43

Tarea 1 Miércoles 5 de agosto ...
Sube a MiU.

Conto 1 Miércoles 5 de agosto...

Pxthon 1 Lunes 10 de agosto.

Solución Sistema de Ecuaciones.

Eliminación Gaussiana

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 8 & a \\ 2 & 1 & 2 & b \\ 3 & 4 & 3 & c \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & d \\ 0 & 1 & 4 & e \\ 0 & 0 & 2 & f \end{array}\right]$$

Pueden haber solns. infinitas $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & d \\ 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{array}\right]$ $x_2 = t$.

Forma Escalonada "Reducida" por renglones (FERR)

1. Todas las filas de 0's están hasta abajo.
2. La entrada principal tiene que ser 1.
3. Cada columna que tiene un 1 principal, tiene ceros arriba y abajo de esa columna.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & d \\ 0 & 1 & 4 & e \\ 0 & 0 & 2 & f \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & g \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & 1 & i \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \overset{\text{Hb re.}}{2} & 0 & e \\ 0 & 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 0 & f \end{array}\right]$$

sólo en FER. FERR FERR

Eliminación Gauss - Jordan.

- Matriz Aumentada $[A|b]$
- Reducción a su FERR
- Resuelva el sistema.

Ejercicio 6: Resuelva los sigs. sistemas.

a. $2x_1 + x_2 = 3$
$4x_1 + x_2 = 7$
$2x_1 + 5x_2 = -1$

Más ecs. que variables.
Es posible que no haya soln.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + R_2 \\ -R_2 \\ R_3 + 4R_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Fijos.

$$0.5R_1 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = 2$
$x_2 = -1$

Soln única

b. $w + x + y + z = 4$
$2w + 2x + 4z = 6.$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right] R_2 - 2R_1$$

$x = t_1 \quad z = t_2.$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + 0.5R_2 \\ -0.5R_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3. \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

FER $\quad x = t_1$
$z = t_2$

$w = 3 - t_1 - 2t_2.$
$x = t_1$
$y = 1 - t_2$
$z = t_2.$

infinitas solns.

variables libres + variables principales = columnas de la matriz

$$\boxed{l + p = n} \qquad A_{m \times n}$$

Observación: pueden haber infinitas solns aunque el número de variables y ecs. sea el mismo.

c. $x_1 + x_2 + x_3 = 5$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 11$ $\quad R_1 + R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 11 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & +5 \\ 0 & 1 & 2 & +1 \\ 0 & 1 & 2 & +1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 - R_2 \\ \\ R_3 - R_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

inf. solns.

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 + t_1 \\ x_2 &= 1 - 2t_1 \\ x_3 &= t_1 \end{aligned} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sistemas Homogéneos. $[A \mid \vec{0}]$ $\quad A_{m \times n}$

El término constante en cada ec es igual a cero.

Propiedades:

- Tienen como solución al vector cero. $\vec{0}_{n \times 1}$
- Tienen solución única ("trivial") o infinitas solns
- Hay infinitas solns. si hay más variables que ecs.

Ejercicio 7: Resuelva. 4.

I. $a + 2b + c + d = 0$
$2a + 5b + 3c + d = 0$
$4b + c + 2d = 0.$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] R_2 - 2R_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 4R_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + R_3/3. \\ R_2 + R_3/3 \\ R_3/-3 \end{array}$$

FER

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] R_1 - 2R_2. \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

no es col prin.
-3
1
-2

FERR variable libre. $d = t$.

$a = 3t$ $\quad a - 3d = 0$
$b = -3t$ $\quad b + 3d = 0$
$c = +2t$ $\quad c - 2d = 0.$
$d = +t$

Solns. infinitas

no está ni en FER.

II. $w + x = 0$
$2w + 3x = 0$
$2w - x = 0.$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 2R_1]{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} w = 0 \\ x = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R_1 - R_2 \\ R_3 + 3R_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ej 8: Encuentre la ec. de la recta que pasa (intersecta) a los planos $x+y=0$ & $x+2y+z=1$.

Resuelva el sistema $\begin{cases} x+y=0 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$ Posible $z=t$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

libre.

$$\begin{aligned} x+y &= 0 \\ y+z &= 1, \\ z &= t. \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= -y. \\ y &= 1-t. \end{aligned}$$

Consejo: soluc infinitas Gauss-Jordan, lo más simpl.
solución única: sólo Gauss
no hay solución: $0 \neq 3$. para cuando tengan una ec. inconsistente.

$$\begin{aligned} x &= -1+t. \\ y &= 1-t \\ z &= t. \end{aligned}$$

$$\vec{r} = \langle -1, 1, 0 \rangle + t \langle 1, -1, 1 \rangle.$$

Ecs. paramétricas

Ejercicio 9: Determine si las rectas.

$r_1(t) = [5, 2, 1] + t[-4, 2, 0]$ &

$r_2(s) = [3, 0, -7] + s[8, -7, 2]$ se intersectan.

$r_1(t) = r_2(s)$

$$\begin{aligned} x&: \quad 5-4t = 3+8s \\ y&: \quad 2+2t = 0-7s \\ z&: \quad 1+0 = -7+2s. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2 &= 4t+8s. \\ 2 &= -2t-7s. \\ 8 &= 2s. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &0.5R_1 \\ & \\ &0.5R_3. \end{aligned}$$

Incógnitas t & s.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 1 \\ -2 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2+R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} s &= -1 \\ s &= 4 \end{aligned}$$

El sistema es inconsistente, las dos rectas no se intersectan.

$R_2 + 3R_3$
$R_2 \leftrightarrow R_3$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 15 \end{array}\right]$$

inconsistente
$0 \neq 15.$

Problema 4

Productos.

		A	B	C
máquinas	α	3	1	2
	β	1	2	1
	γ	2	4	1

Máquina α	440
β.	310
γ	560.

Encuentre cuántas unidades A, B, C deben producirse para utilizar todo el tiempo disponible en las máquinas.

α: $3x + y + 2z = 440.$
β: $x + 2y + z = 310$
γ: $2x + 4y + z = 560$

$R_1 \leftrightarrow R_2.$ ✓

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 310 \\ 3 & 1 & 2 & 440 \\ 2 & 4 & 1 & 560 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ R_2 - 3R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 310 \\ 0 & -5 & -1 & -490 \\ 0 & 0 & -1 & -60 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 78 \\ & 1 & & 86 \\ & & 1 & 60 \end{array}\right]$$

ya está en FER
Eliminación Gaussiana.

$z = 60.$
$5y + z = 490 \Rightarrow y = \frac{1}{5}(490 - 60) = 86.$
$x + 2y + z = 310 \qquad x = 310 - 60 - 172. = 78$

R/ se pueden producir 78 uds de A.
86 uds de B.
60 uds de C.

Capítulo 5

RB 2020-08-05 14.35.54

2.3.1 Combinaciones Lineales. (CL)

Un vector $\vec{b}$ es una CL de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tal que.

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = \vec{b}$$

Ejercicio 1: Sean $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

a. Determine si $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es una C.L de v_1 & v_2.

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ 2c_1 \\ -c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 \\ c_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ 2c_1 + c_2 \\ -c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{b}_1$$

Matriz Aumentada.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & \vec{b} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$\vec{b}$ es C.L de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ si $[v_1 \; v_2 \cdots v_n \mid \vec{b}]$ tiene solución.

$$\begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -R_2 \\ R_3 + R_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$0 \neq 2$
no hay solución

$\vec{b}_1$ NO ES CL de v_1 y v_2.

b. Determine si $\vec{b_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ es C.L de v_1 & v_2.

$$[v_1 \; v_2 \mid \vec{b_2}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 + R_1]{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} c_1 = 3 - c_2 = 2. \\ c_2 = 1 \\ c_2 = 1 \end{array}$$

solución única: $\vec{b_2}$ es C.L de v_1 & v_2.

$$2v_1 + v_2 = \vec{b_2}$$

Conjuntos Generadores:

Un conjunto generador contiene todas las CL's posibles entre un conjunto de vectores S

$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

un elemento del conjunto generador, denotado gen(S) sería $\vec{x} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots c_n v_n$ $\quad c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. $\quad$ ¿ gen(S) = $\mathbb{R}^2$? todo el plano.

$\vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

Ejercicio 2: Muestre que $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} \right\}$.

El sistema $c_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ tiene solución.
$a = -1, 0, 1, 2, \pi, \ldots$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & a\\2 & 5 & b\end{array}\right] \xrightarrow[R_2-2R_1]{} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & a\\0 & 1 & b-2a\end{array}\right] \xrightarrow{R_1-2R_2} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 5a-2b\\0 & 1 & b-2a\end{array}\right]$$

siempre tiene solución, por lo que estos vectores generan a cualquier vector en el plano. $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\{v_1, v_2\}$

$\begin{bmatrix}10\\0\end{bmatrix}$ $\quad c_1 = 50$
$\quad c_2 = -20$

No todos los vectores en $\mathbb{R}^2$ generan a todo $\mathbb{R}^2$.

¿$\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} \right\}$?

Vectores forma $b = a$
$\begin{bmatrix}a\\a\end{bmatrix}$
no hay soln para
$b - a \neq 0$
NO están todos los pts.

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & a\\1 & 2 & b\end{array}\right] \xrightarrow[R_2-R_1]{} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & a\\0 & 0 & b-a\end{array}\right]$$

$\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \right\}$.

$$\left[\begin{array}{c|c}2 & a\\1 & b\end{array}\right] \xrightarrow{2R_2-R_1} \left[\begin{array}{c|c}2 & a\\0 & 2b-a\end{array}\right]$$

no hay solución.

Ninguno de estos dos conjuntos generan a $\mathbb{R}^2$.

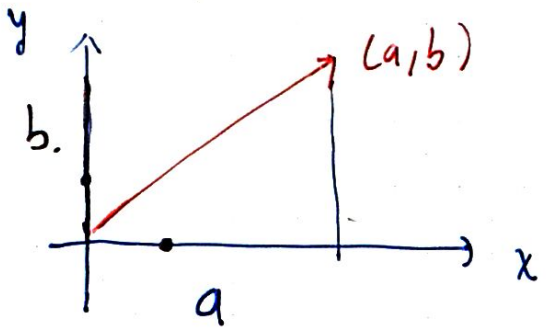
¿Cuáles conjuntos de vectores son los más convenientes para generan a $\mathbb{R}^2$ ó a $\mathbb{R}^n$?

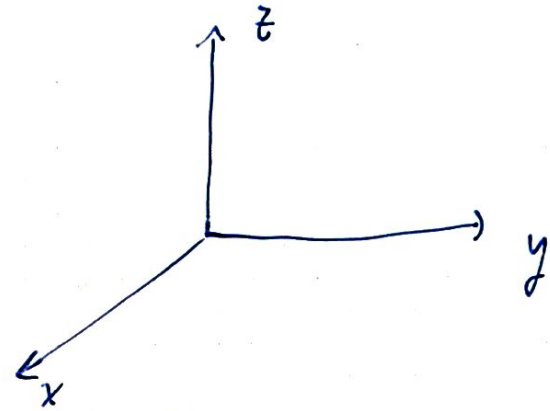
Vectores unitarios Estándar.

Vectores Unitarios Estándar.

Sea $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad a e_1 + b e_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

eje-x $\qquad$ eje-y.





$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$a e_1 + b e_2 + c e_3 = \vec{b}$.

Vectores unitarios Estándar: son n vectores e_i.

tal que $\mathbb{R}^n = \text{gen}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

$e_i = 1$ sólo en la iésima entrada
$\quad\;\; 0$ en el resto de entradas

son n vectores
no están repetidos

Capítulo 6

RB 2020-08-10 20.31.19

Clase 3 independencia lineal.

Tarea 8

5. ¿Cuándo $\vec{v}$ es C.C. de $\vec{u}_1, \vec{u}_2$?

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 = \vec{v}$. Resuelva $[u_1 \; u_2 \mid \vec{v}]$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} c_2 = -1 \\ c_2 = -2. \end{array} \quad R_3 - R_2 \quad 0 \; 0 \mid -$$

Inconsistente, $\vec{v}$ NO Es C.C de u_1 y u_2.

1. $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$[u_1 \; u_2 \; u_3 \mid \vec{v}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right] R_2 - R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] R_1 - R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} c_1 = -1 - t \\ c_2 = 2 - t \\ c_3 = t. \end{array}$$

Hay solución, $\vec{v}$ es C.C de u_1, u_2, u_3.

$t = 0 \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad t = 1 \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad t = -1 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

gen$(u_1, u_2, \dots, u_K)$ es el conjunto de todas las CLs de $u_1, u_2, \dots, u_K$.

¿ gen$(u_1, u_2, \dots, u_K) = \mathbb{R}^n$?

Hayan por lo menos n vectores en $u_1, u_2, \dots, u_K$.

$$\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\} \neq \mathbb{R}^2 \qquad \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$$

$$\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$$

pero hay uno de lo más necesario.

La independencia lineal analiza cuáles vectores no son CLs de otros vectores.

Dependencia Lineal. (LD)

un conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \dots, u_K\}$ es L.D. si por lo menos uno de los vectores se puede escribir como una CL de los otros vectores.

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots c_K u_K = u_i.$$

$$u_1 + u_2 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = u_3.$$

$\{u_1, u_2, u_3\}$ es Linealmente Dependientes.

ó $u_1 + u_2 - u_3 = \vec{0}$.

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 \cdots u_i + \cdots c_K u_K = \vec{0}.$$

Dependencia Lineal: Hay vectores "repetidos" entre sí.

Independencia Lineal: ninguno de los vectores está "repetido"

No son paralelos entre sí, no es C.L de los otros.

I L / D L. Un conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ es L D si existen escalares $c_1, c_2, \dots, c_k$ diferentes de cero $c_i \neq 0$ tal que $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots c_k v_k = \vec{0}$

es L I si no es L.D, es decir la única forma de obtener $\vec{0}$ es que todas las constantes sean 0.

combinación Lineal trivial

$0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots 0\vec{v}_k = \vec{0}$.

Hay D L. cuando se expresar una CL no trivial para $\vec{0}$

Hay I L. cuando sólo se puede encontrar la CL trivial para expresar el vector cero.

Criterio de Independencia Lineal.

Resuelva el sistema $[v_1 \; v_2 \cdots v_k \mid \vec{0}]$

- Independencia Lineal: cuando la soln es única. "Trivial"
- Dependencia Lineal: cuando hay infinitas soluciones.

Ejercicio 3: Analice si los sigs. conjuntos son L.I.

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \qquad \text{gen}(S_1) = \mathbb{R}^3.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 4R_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-R_2 \\ R_3 - 5R_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right]$$

$-12c_3 = 0$ solución única, la "trivial"

$c_2 = 2c_3 = 0$

$c_1 = -c_2 - c_3 = 0$ S_1 es linealmente independiente

V_3 no es C.L de v_1 y v_2.

$$S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \qquad 3 \neq 1$$

Resuelva el sistema homogéneo. $c_3 = t$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 4R_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_1 + R_2 \\ -R_2 \\ R_3 - 5R_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$c_1 = -t$ CL "no trivial"

$c_2 = -2t$ infinitas soln s. S_2 es linealmente dependiente.

$c_3 = t.$

V_3 si es C.L de v_1 y v_2.

$t = 1$ $\quad -v_1 - 2v_2 + v_3 = \vec{0}$ $\qquad t = 2.$

$v_1 + 2v_2 = v_3$ $\qquad 2v_1 + 4v_2 = 2v_3$

$gen(S_2) \neq \mathbb{R}^3$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & 2 & b \\ 4 & -1 & 4 & c \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & d \\ 0 & 1 & 2 & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{array}\right] \qquad 0 \neq f.$$

sin necesidad de trabajar con $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

Vectores Estándar e Independencia Lineal.

$$S = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{e_4} \right\}$$ siempre es L.I.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \end{array}$$

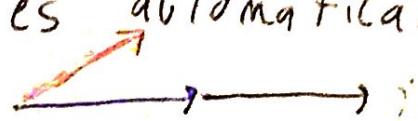
solución

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es L.I.

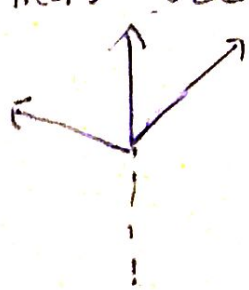
Además $gen(S) = \mathbb{R}^4$.

Cualquier conjunto de vectores estándar $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es L.I. y genera a todos los vectores en $\mathbb{R}^n$.

Cuando un conjunto de vectores es "automáticamente" linealmente dependiente.



1. Hay dos o más vectores que son paralelos entre sí.



IL y los ejes de un sistema de coordenadas.

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} \right\}$ es L.D. $10u_1 = u_3$.

2. El vector cero está en el conjunto, una variable libre

$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ es L.D.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] R_2 - 2R_1 \\ c_1 \quad c_2 \quad c_3 \end{array} \quad \begin{array}{c} x = t \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{l} x = t. \\ y = 0 \\ z = 0. \end{array}$$

soluciones inf.

$1000\,\vec{0} = \vec{0}$. $\quad -1 = 1000 \quad$ una C.L no trivial.

3. Hay muchos vectores en el conjunto para que éste pueda ser L.I.

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ es L.I.

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ es L.D.

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ es L.D.

Cuando hay más columnas que filas, va a haber por lo menos una variable libre $x_i = t$.

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ son L.I.

más filas que columnas, no hay variables libres la mayoría de veces.

- Cuando el conjunto sólo tiene 2 vectores, éste es L.I. si los dos vectores no son paralelos.

3. Teorema 2.8: cualquier conjunto de k vectores en $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente si $k > n$.

En $\mathbb{R}^2$, pueden haber hasta 2 vectores L.I.
En $\mathbb{R}^3$, " " hasta 3 vectores L.I.

Ejercicio 4: Determine si los conjuntos dados de vectores son L.D.

a. $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} \right\} = S_1$ hay infinitas sol'ns

Es L.D porque i. hay más de 2 vectores en $\mathbb{R}^2$.
ii. V_1, V_2 y V_4 son paralelos entre sí.

b. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = S_2.$ infinitas soluciones

Es L.D porque el $\vec{0}$ es parte del conjunto

c. $S_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ $\vec{V_2} = K\vec{V_1}$ no son paralelos

Es L.I. porque S_3 sólo tiene 2 vectores y los 2 vectores no son paralelos.

d. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ es L.D. porque los L son paralelos

IL $[v_1\ v_2 \cdots v_n | \vec{0}]$ tiene sola única.

NL tiene soluciones infinitas.

Luis, Tema 4, Tarea 2 Problema de Palabras.

$$x + 3y + z = 40.$$
$$x + y + 2z = 60$$
$$2x + 4y + 3z = 100.$$

1. Todas las solns.
2. son enteras y positivas.

a. Resuelva

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 40 \\ 1 & 1 & 2 & 60 \\ 2 & 4 & 3 & 100 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 40 \\ 0 & -2 & 1 & 20 \\ 0 & -2 & 1 & 20 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -0.5R_2 \\ R_3 - R_2. \end{array}$$

estas columnas son L.D.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 40 \\ 0 & 1 & -0.5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] R_1 - 3R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.5 & 70 \\ 0 & 1 & -0.5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x = 70 + 0.5t.$

$y = \boxed{-10 + 0.5t}$

$z = t.$

$-10 + 0.5t = 0$

$t = \frac{10}{0.5} = 20,$

$t = 20, 22, 24, \ldots$

o. Combinaciones enteras posibles. $t = 1, 2, 3, 4, \ldots$

$t = 1$ $\quad x = 70.5$
$y = -9.5$
$z = 1$

	20	22	24	
x	80	81	82.	83
y	0	1	2.	3
z	20	22	24	26.

$x = 30 - 3t$

inf combinaciones enteras.

GAUSS

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ & 1 & 4 & 6 \\ & & 1 & 4 \end{array}\right]$$

GAUSS JORDAN

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 2 \\ & 1 & & 4 \\ & & 1 & 4 \end{array}\right]$$