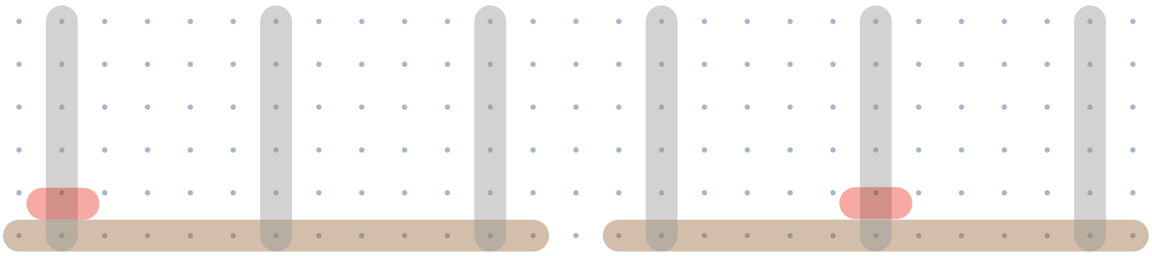
Torres de Hanoi

El juego, en su forma más tradicional, consiste de tres postes verticales. En uno de los postes se apila un número de discos perforados por su centro (todos de diferente tamaño), ordenados en tamaño decreciente de abajo a arriba.

El juego consiste en pasar todos los discos desde el poste ocupado (es decir, el que posee la torre) a uno de los otros postes vacíos. Para ganar el juego, es necesario seguir dos simples reglas:

1) Solo se puede mover un disco cada vez
2) Un disco de mayor tamaño no puede estar sobre uno más pequeño que él mismo

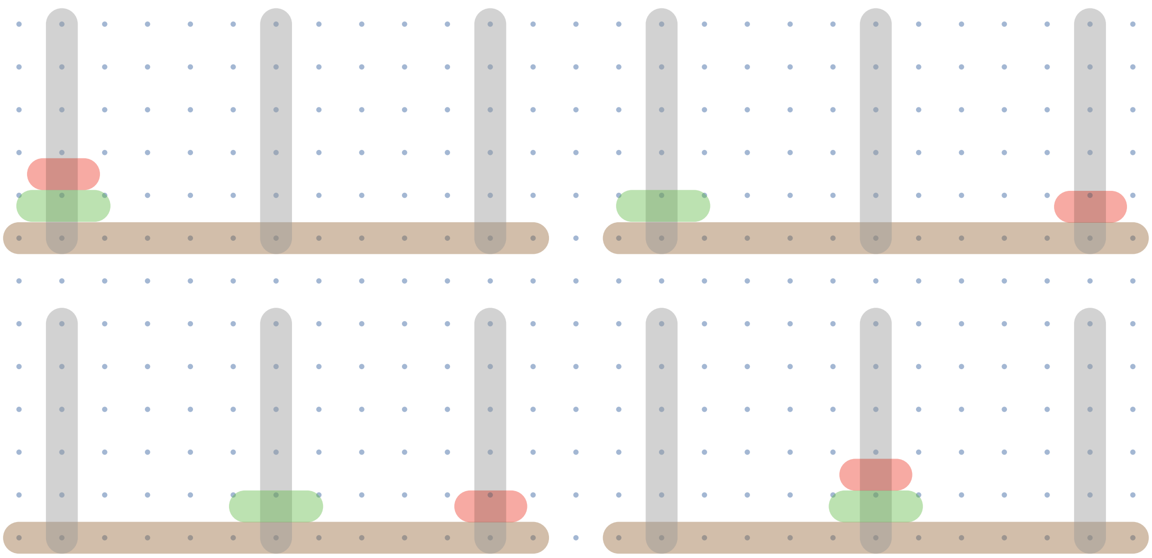
Veamos el caso más sencillo: 1 disco



¡Trivial!

Proposición 1. Podemos mover 1 disco a *cualquier* poste en exactamente 1 movimiento.

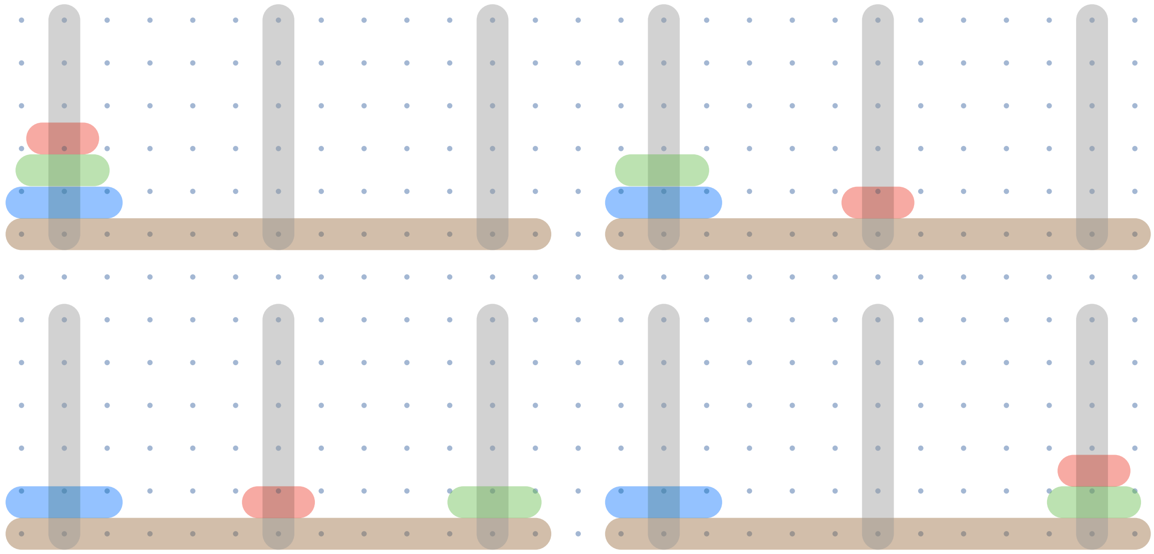
Veamos el siguiente caso: 2 discos



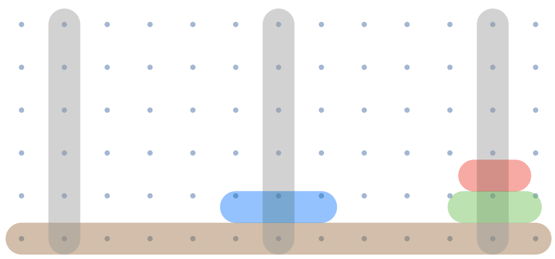
👀 Observación: Al resolver el problema para 2 discos, tuvimos que exponer el disco verde para poder moverlo al poste 2. Para poder exponerlo, tuvimos que mover el disco rojo del poste 1 al poste 3, y ese problema ya lo habíamos resuelto antes.

Proposición 2. Podemos mover 2 discos a *cualquier* poste en exactamente 3 movimiento.

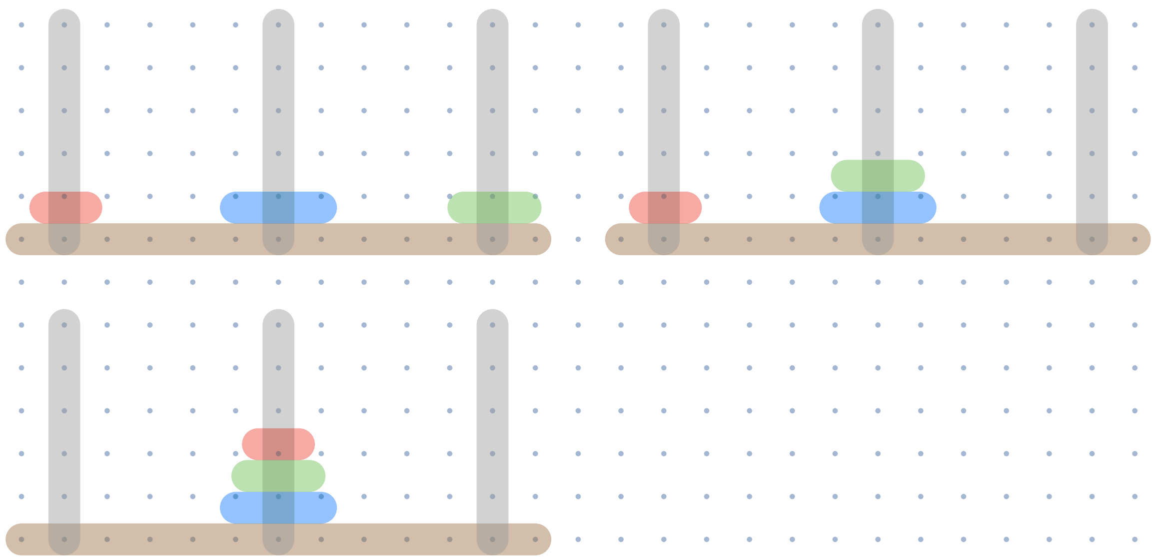
Veamos el siguiente caso: 3 discos



👀 Observación: Hasta este punto resolvimos el problema para 2 discos para poder exponer el disco azul y poder moverlo al poste 2. Nuevamente, ese problema ya lo habíamos resuelto antes.

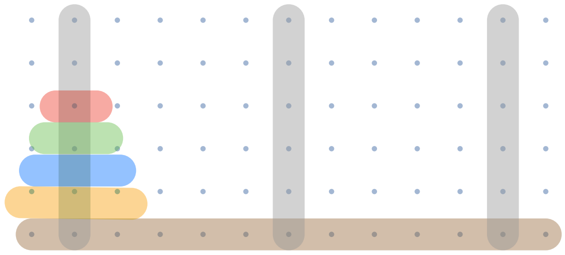


Ahora, para terminar, necesitamos resolver el subproblema de mover los discos rojo y verde del poste 3 al poste 2.



Proposición 3. Podemos mover 3 discos a *cualquier* poste en exactamente $3 + 1 + 3 = 7$ movimientos.

Veamos el siguiente caso: 4 discos e intentemos generalizar una conclusión.



Para resolver el problema de n = 4 discos, primero necesitamos resolver el problema de n - 1 = 3 discos para exponer el disco amarillo, i.e., mover los 3 discos al poste 3.
Sabemos que esto puede hacerse en 7 movimientos.
Luego, movemos el disco amarillo al poste 2 (1 movimiento más).
Finalmente, movemos los 3 discos del poste 3 al poste 2, otros 7 movimientos.

Proposición 4. Podemos mover 4 discos a *cualquier* poste en exactamente 7 + 1 + 7 = 15 movimientos.

👀 Observación: Podemos resolver el problema de las torres para n discos de manera recursiva:
- si $n = 1$, mover el disco
- si $n \geq 2$, resolvemos de la siguiente manera:
  - Resolver recursivamente el problema de mover los primeros n - 1 discos del poste 1 al poste 3.
  - Mover el disco n del poste 1 al poste 2.
  - Resolver recursivamente el problema de mover los primeros n - 1 discos del poste 3 al poste 2.

❓ ¿Cuántos movimientos se necesitan para mover n discos del poste 1 al poste 2?

🧐 Se cuenta una historia sobre un templo en la India en Kashi Vishwanath, que contiene una gran sala con tres postes gastados por el tiempo, rodeada de 64 discos dorados. Los sacerdotes de Brahma, actuando bajo el mandato de una antigua profecía, han estado moviendo estos discos de acuerdo con las reglas inmutables de Brahma desde ese momento. Según la leyenda, cuando se complete el último movimiento del rompecabezas, el mundo se terminará.

Definición. Una secuencia numérica es una *función* que va de los números naturales hacia los números reales. En símbolos:

$$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ a = f(n)$$

Definición. Una relación de recurrencia de orden k es una función en la que el término n-ésimo de una secuencia numérica puede calcularse a partir de los k términos precedentes, mediante alguna regla/relación. Las relaciones de recurrencia son también conocidas como ecuaciones en diferencias finitas — EDF.

Ejemplo 1.1. El método exhaustivo y la secuencia aritmética: $a(n) = a(n\text{-}1) + d$, $n \geq 1$.

Escribimos los *primeros* términos de la secuencia para encontrar algún patrón.

<u>Nota</u>: Vamos a usar indistintamente las notaciones $a(0) \equiv a_0$, $a(1) \equiv a_1$, ..., etc.

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= a_0 + d \\ a_2 &= a_1 + d = (a_0 + d) + d = a_0 + 2d \\ a_3 &= a_2 + d = (a_0 + 2d) + d = a_0 + 3d \end{aligned}\right\} \quad a_n = a_0 + nd$$

- La secuencia aritmética es una secuencia de orden 1
- La solución que encontramos se llama solución general de la EDF, ya que cualquier solución tiene esa forma.

Ejemplo 1.2. El método exhaustivo y la secuencia geométrica: $a(n) = r{\cdot}a(n\text{-}1),\ n \geq 1$.

Escribimos los *primeros* términos de la secuencia para encontrar algún patrón.

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= r \cdot a_0 \\ a_2 &= r \cdot a_1 = r \cdot (r \cdot a_0) = r^2 \cdot a_0 \\ a_3 &= r \cdot a_2 = r \cdot (r^2 \cdot a_0) = r^3 \cdot a_0 \end{aligned}\right\} \ a_n = r^n \cdot a_0$$

👀 Observación:

La secuencia aritmética debe su nombre a la propiedad de que el término $a(n)$ es el promedio aritmético de los términos $a(n\text{-}1)$ y $a(n+1)$, $n \geq 1$.

$$a_n = \{a_0, a_0+d, a_0+2d, a_0+3d, \ldots\}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_0 + (n-1)d + a_0 + (n+1)d}{2} = \frac{2a_0 + 2nd}{2} = a_0 + nd$$

La secuencia geométrica debe su nombre a la propiedad de que el término $a(n)$ es el promedio geométrico de los términos $a(n\text{-}1)$ y $a(n+1)$, $n \geq 1$.

$$a_n = (a_{n-1} \cdot a_{n+1})^{1/2} = (a_0 \cdot r^{n-1} \cdot a_0 \cdot r^{n+1})^{1/2} = (a_0^2 \cdot r^{2n})^{1/2} = a_0 \cdot r^n$$

💡 En esta sesión aprenderemos a resolver una EDF. El objetivo es obtener una «*fórmula explícita*» que permita determinar cualquier término de una secuencia numérica que está definida de forma recursiva, sin necesidad de calcular todos los términos anteriores a este.

Relaciones de recurrencia lineales homogéneas

Ejemplo 2.1. Encuentre la solución general de una ecuación en diferencias finitas homogénea — EDFH — de orden 1.

$a(n) = 6a(n\text{-}1) \rightarrow a(n) - 6a(n\text{-}1) = 0$ *homogénea* porque está igualada a cero

⚠️ Este es un caso específico de una secuencia geométrica, en la cual buscamos una *fórmula explícita* para calcular cualquier término de una secuencia numérica en la que el término n-ésimo es 6 veces el término $(n\text{-}1)$-ésimo.

Sabemos que la solución general es: $a_n = a_0 \cdot 6^n,\ n \geq 1$

Ejemplo 2.2. Encuentre la solución particular de una EDFH de orden 1 con condiciones iniciales.

$$a(n) = 6a(n\text{-}1),\ n \geq 1 \text{ y } a_0 = 5$$

Sabemos que la solución general es: $a_n = a_0 \cdot 6^n,\ n \geq 1$

Luego de evaluar la condición inicial $a_0 = 5$, obtenemos la solución particular: $a_n = 5 \cdot 6^n,\ n \geq 0$

Ejemplo 3. Encuentre la solución general de la EDFH de orden 2:

$$a(n) = 5a(n\text{-}1) - 6a(n\text{-}2),\ n \geq 2$$

💡 De los (pocos) ejemplos anteriores pudimos observar que la solución de una EDF fue una función exponencial de la forma: $a(n) = a_0 \cdot r^n$

⚠️ Así que vamos a suponer que la solución de la EDF tiene la forma: $a(n) = r^n$.

Entonces, la EDF $a(n) = 5a(n-1) - 6a(n-2)$ puede reescribirse como:

$$r^n = 5r^{n-1} - 6r^{n-2}$$

Reescribimos: $$r^n - \frac{5r^n}{r} + \frac{6r^n}{r^2} = 0$$

$$\underset{r \neq 0}{r^n}\left(1 - \frac{5}{r} + \frac{6}{r^2}\right) = 0$$

Un producto de dos cantidades que está igualado a cero, será cero cuando alguna de las cantidades sea cero.

⚠️ Pero $r \neq 0$ ya que esto nos daría la solución trivial (la secuencia $\{0, 0, 0, 0, \ldots\}$)

$$1 - \frac{5}{r} + \frac{6}{r^2} = 0 \quad \Big/ \cdot r^2 \longrightarrow r^2 - 5r + 6 = 0 \longrightarrow r_1 = 2 \text{ y } r_2 = 3$$

este polinomio recibe el nombre de polinomio característico de la EDF

raíces características de la EDF

⚠️ Sabemos ahora que las funciones 2^n y 3^n son soluciones de la EDF. Pero, ¿cuál es la solución general?