Algoritmia y complejidad - notas

David Corzo

2020 julio 27, 09:00 AM

Capítulo 1

Recursión

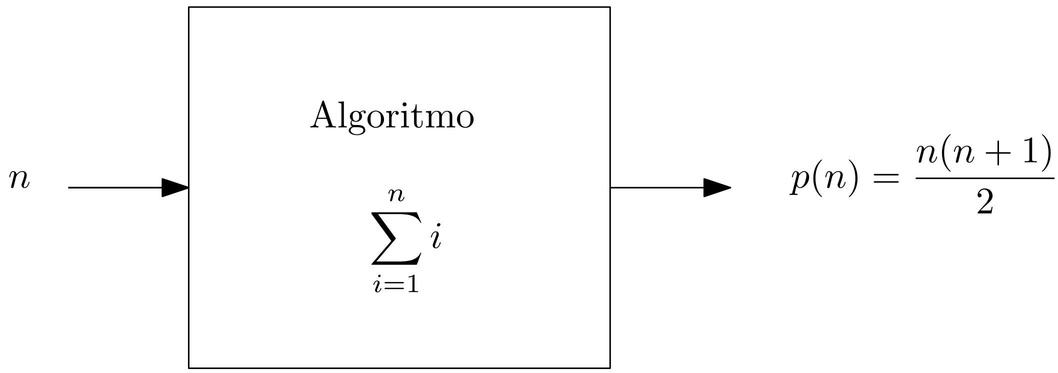
1.1. Inducción matemática

- El *principio de inducción matemática* es una regla de inferencia utilizada para probar la verdad de proposiciones abiertas de una variable entera (se puede generalizar a no necesariamente enteros).
- La proposición abierta es una expresión que contiene una variable y que al ser sustituida dicha variable por un valor determinado, hace que la expresión se convierta en una proposición.
- Sea $p(n)$ una proposición abierta definida sobre algún conjunto infinito de números enteros S.
  - Es un conjunto infinito, nunca termina, se usa la inducción para conjuntos infinitos.

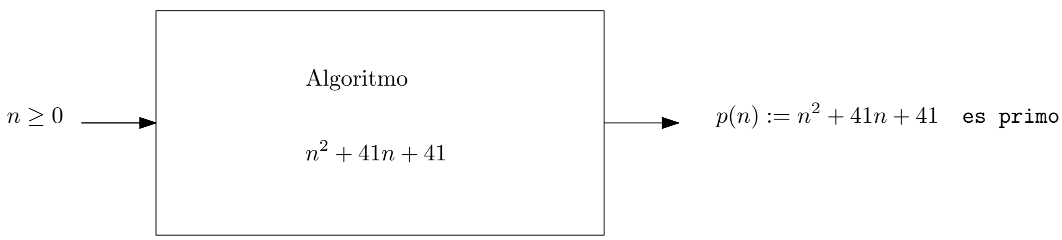
$$S = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$$

- Utilizaremos la analogía del efecto *dominó*, para representar cada parte del principio de inducción matemática.
- La proposición abierta es representada por una fila infinita de *dominós*, cada uno de ellos asociados con exactamente elemento del conjunto S.
- Si se cumplen las dos siguientes premisas/condición (premisas son proposiciones que se aceptan como verdaderas):
  1. $p(n_0)$ es verdadera.
     - Esto significa que el primer dominó caiga, el dominó puede caer.
     - Falso significa que no puede caer.
  2. Siempre que $p(k)$ es verdadera, entonces $p(k + 1)$ también es verdadera, en donde $k \geq n_0$.
     - En esta analogía, esto equivale a decir siempre que se cae el dominó asociado con k, entonces se cae el siguiente dominó asociado con $k + 1$.
  3. Entonces, la proposición $p(n)$ es verdadera para todo $n \in S$.
     - En la analogía esto equivale a decir que se caen todos los dominós.
- En resumen el principio de inducción matemática establece que:
  - Dada una proposición abierta $p(n)$ definida $\forall n \in S = \{n_0, n_0 + 1, n_+ 2, \dots\}$. Si se cumple que:
    1. $p(n_0)$ es verdadera, y
    2. $p(k) \implies p(k + 1)$.
  - Entonces la proposición $p(n)$ es verdadera $\forall n \in S$.

1.1.1. ¿Para qué nos sirve la inducción?



- No tenemos pruebas, pero tampoco dudas. (Elmo).



1.2. Inducción matemática, parte II

Podemos usar inducción matemática para demostrar propiedades numéricas.

1.2.1. Ejemplo 1

- Demuestre que $1 + 2 + 3 + ... + n = n(n + 1)/2$
- *Prueba*: Por inducción matemática.
- Sea $p(n) := 1 + 2 + 3 + ... + n = n(n + 1)/2, \forall n \geq 1$.

<u>Paso base:</u> Porbar $p(1)$ es verdad.

$$\begin{aligned} 1 &= 1(1 + 1)/2 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

<u>Paso unductivo:</u> Asumimos $p(k) := 1+2+3+...+k = k(k+1)/2$, para algun $k \geq 1$. (Si se cae el numero k se cae el que sigue).

$$
\begin{aligned}
\text{Demostramos}\quad & p(k+1) := \overbrace{1+2+3+...+k}^{\text{Hipótesis inductiva}} + (k+1) \\
& p(k+1) := k(k+1)/2 + k + 1 \quad \# \text{ En este punto hacemos uso de la hipótesis inductiva.} \\
& p(k+1) := (k+1)(k/2+1) = (k+1) \quad \overbrace{(k+2)/2}^{k/2+1=(k+2)/2} \\
& p(k+1) := (k+1)((k+1)+1)/2 \quad \# \text{ La proposición es verdadera para } k+1 \text{ también}
\end{aligned}
$$

En conclusión, la proposición $p(n)$ es verdadera $\forall n \geq 1$ $\square$

1.2.2. Ejemplo 2

- Demuestre que para todo $n \geq 0$ vale $6^n - 1$ es múltiplo de 5.
- Prueba: por inducción matemática.
- Sea $p(n) := 6^n - 1 = 5m$, $\forall n \geq 0$ y $m \in Z$.

Paso base: Probamos $p(0)$. Siempre probamos el primer número.

$$6^0 - 1 = 0 = 5 \times 0$$

Paso inductivo: Asumimos $p(k), k \geq 0$, asumir $p(k)$ implica que $p(k) := 6^k - 1 = 5m$, donde veamos $p(k)$ podemos usar $5m$.

$$
\begin{aligned}
\text{Demostramos:}\quad & p(k+1) := 6^{k+1} - 1 = 5m \\
& p(k+1) := (6 \cdot 6^k - 6) + 5 \\
& p(k+1) := 6\,\overbrace{(6^k - 1)}^{5m} + 5 \quad \# \text{ Hipótesis inductiva} \\
& p(k+1) := 6 \cdot 5m + 5 \\
& p(k+1) := 5(6m+1) = 5m_1, \quad \text{en donde } m_1 = 6m+1
\end{aligned}
$$

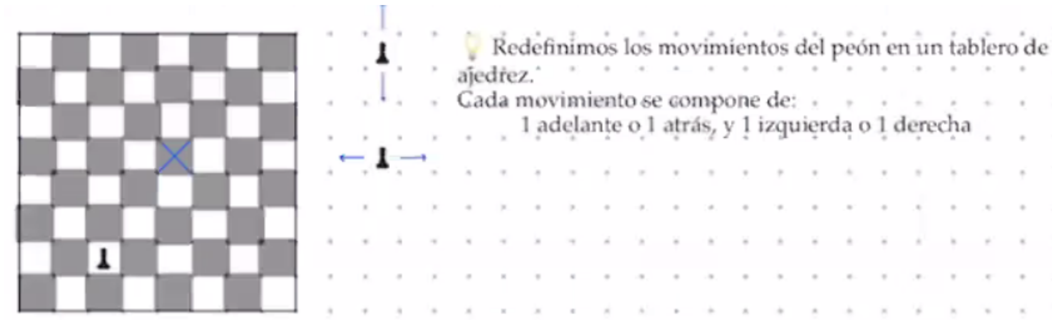
En conclusión, $p(n)$ es verdadera para todo $n \geq 0$ $\square$

1.2.3. Ejercicio de prueba

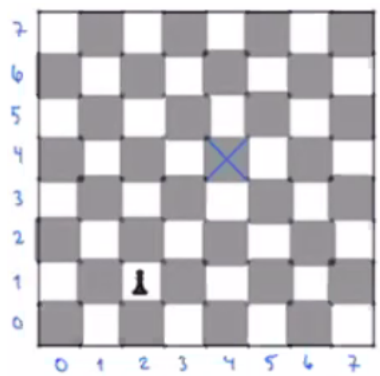
- Demuestre que para todo $n \geq 7$ vale la siguiente propiedad $n! > 3^n$

1.3. Invariantes e inducción matemática

Ejemplo 4: Supongamos que tenemos un peón que puede moverse en un tablero estándar de ajedrez. El peón comienza en la posición mostrada y en cada paso se mueve hacia arriba o abajo 1 unidad e izquierda o derecha 1 unidad. El peón debe moverse exactamente una unidad en cada dirección (vertical y horizontal). Proponga una estrategia para llevar el peón al punto mostrado en la figura.



Aparentemente, no es posible llevar al peón hasta la casilla indicada usando los movimientos permitidos, ya que este juego tiene una *propiedad invariante*.
Una propiedad invariante o simplemente invariantes es una propiedad que permanece inalterada a lo largo de una secuencia de pasos.



Aseguramos que so le llamamos (x, y) a la posición del peón en el tablero, entonces luego de n movimiento permitido se cumplirá que: $x + y$ es impar.
Esta es la propiedad *invariante del juego*.

Proposición: Sea $p(n) :=$ Luego de n moviemintos, la suma de las coordenadas de la posición del peón es un número impar, i.e, (x, y) la posición, entonces $x + y$ es impar con $n \geq 0$.
Paso base: Probamos $p(0)$
Luego de 0 movimientos, suposición es $(2, 1)$. Luego, $2 + 1 = 3$, un número impar.

Paso unductivo: Asumimos $p(k)$, i.e., luego de k movimientos $x * +y* = 2m + 1$ es impar, en donde $(x*, y*)$ es la posición del peón luego de los $k \geq 0$ movimientos.

Demostramos $p(k+1)$, i.e., luego de $k+1$ movimientos. Esto lo hacemos por casos. COMPONER CASOS.

- Caso 1: Derecha y arriba, $(x*, y*) \implies (x * +1, y * +1) \implies x * +1 + y * +1 = (2m + 1) + 2 = 2(m + 1) + 1 = 2m_1 + 1$.
- Caso 2: Derecha y abajo, $(x*, y*) \implies (x * +1, y * +1) \implies x * +1 + y * +1 = (2m + 1) + 2 = 2(m + 1) + 1 = 2m_1 + 1$.
- Caso 3: Izquierda y arriba, $(x*, y*) \implies (x * -1, y * +1) \implies x * -1 + y * +1 = (2m + 1) + 2 = 2(m + 1) + 1 = 2m_1 + 1$.
- Caso 4: Izquierda y arriba, $(x*, y*) \implies (x * -1, y * -1) \implies x * -1 + y * -1 = (2m + 1) - 2 = 2(m - 1) + 1 = 2m_1 + 1$.

Corolario: Como la casilla a la que se pide llegar es $(4, 4) \implies 4 + 4 = 8$, es un número par, entonces es imposible mover el peón hasta dicha casilla usando los movimientos permitidos. $\square$