Inducción matemática, parte I

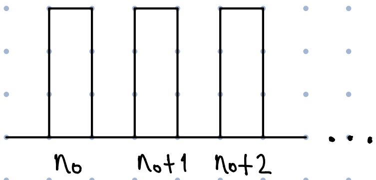
El principio de inducción matemática es una *regla de inferencia* utilizada para probar la verdad de *proposiciones abiertas* de una variable entera.

Sea $p(n)$ una proposición abierta definida sobre algún conjunto infinito de números enteros:

$$S = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$$

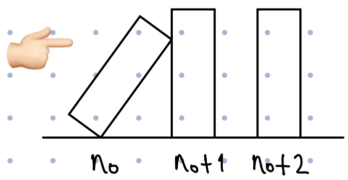
Utilizaremos la analogía del *efecto dominó*, para representar cada parte del principio de inducción matemática.

La proposición abierta es representada por una fila infinita de dominós, cada uno de ellos asociados con exactamente un elemento del conjunto S.



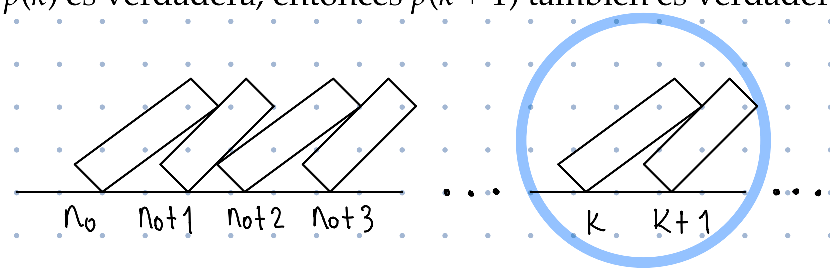
Si se cumplen las dos siguientes premisas / condiciones:

1) $p(n_0)$ es verdadera



En la analogía, esto equivale a decir «*el primer dominó se cae*».

2) Siempre que $p(k)$ es verdadera, entonces $p(k + 1)$ también es verdadera, en donde $k \geq n_0$:



En la analogía, esto equivale a decir «*siempre que sea cae el dominó asociado con k, entonces se cae el siguiente dominó (asociado con k + 1)*».

Entonces, la proposición $p(n)$ es verdadera para todo $n \in S$.

En la analogía, esto equivale a decir «*se caen todos los dominós*».

En resumen, el principio de inducción matemática establece que:

Dada una proposición abierta $p(n)$ definida $\forall n \in S = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\}$. Si se cumple que:

1) $p(n_0)$ es verdadera, y
2) $p(k) \longrightarrow p(k + 1)$,

entonces la proposición $p(n)$ es verdadera $\forall n \in S$.

⚠️ La idea de usar inducción matemática es demostrar que el *output* de un algoritmo es lo que aseguramos que es, ya que no es suficiente con mostrar que es verdad para algunos valores.