Inducción matemática, parte II

Podemos usar inducción matemática para demostrar propiedades numéricas.

Ejemplo 1. Demuestre que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2$

Prueba: Por inducción matemática.

Sea $p(n) := 1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2, \forall n \geq 1$.

Paso base: Probar $p(1)$ es verdad.

$$1 = 1(1+1)/2 = 1$$

Paso inductivo: Asumimos $p(k) := 1 + 2 + 3 + \ldots + k = k(k+1)/2$, para algún $k \geq 1$.

Demostramos
$p(k+1) := 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1)$
$p(k+1) := k(k+1)/2 + (k+1)$ *# En este punto hacemos uso de la hipótesis inductiva*
$p(k+1) := (k+1)(k/2 + 1) = (k+1)(k+2)/2$
$p(k+1) := (k+1)((k+1)+1)/2$ *# La proposición es verdadera para k+1 también*

En conclusión, la proposición $p(n)$ es verdadera $\forall n \geq 1$. □

Ejemplo 2. Demuestre que para todo $n \geq 0$ vale $6^n - 1$ es un múltiplo de 5.

Prueba: Por inducción matemática.

Sea $p(n) := 6^n - 1 = 5m$, para todo $n \geq 0$ y $m \in Z$.

Paso base: Probamos $p(0)$.

$$6^0 - 1 = 0 = 5 \cdot 0$$

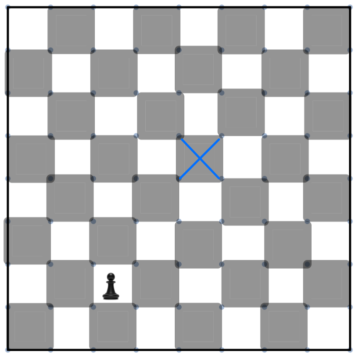
Paso inductivo: Asumimos $p(k) := 6^k - 1 = 5m$, $k \geq 0$ y $m \in \mathbb{Z}$.

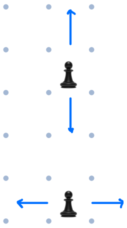
Demostramos
$p(k+1) := 6^{k+1} - 1$
$p(k+1) := 6 \cdot 6^k - 6 + 5$
$p(k+1) := 6(6^k - 1) + 5$ *# Hipotesis inductiva*
$p(k+1) := 6 \cdot 5m + 5$
$p(k+1) := 5(6m+1) = 5m_1$, en donde $m_1 = 6m+1$.

En conclusión, $p(n)$ es verdadera para todo $n \geq 0$. □

📝 *Ejercicio 3*. Demuestre que para todo $n \geq 7$ vale $n! > 3^n$.

Ejemplo 4. Supongamos que tenemos un peón que puede moverse en un tablero estándar de ajedrez. El peón comienza en la posición mostrada y en cada paso se mueve hacia arriba o abajo 1 unidad e izquierda o derecha 1 unidad. El peón debe moverse exactamente una unidad en cada dirección (vertical y horizontal). Proponga una estrategia para llevar el peón al punto mostrado en la figura.

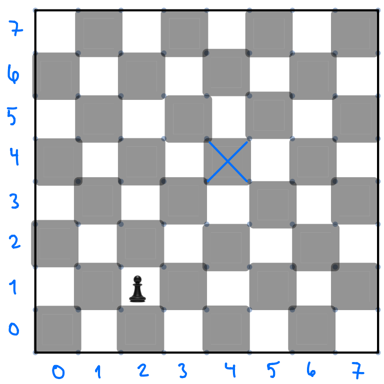




Redefinimos los movimientos del peón en un tablero de ajedrez.
Cada movimiento se compone de:
1 adelante o 1 atrás, y 1 izquierda o 1 derecha

Aparentemente, no es posible llevar al peón hasta la casilla indicada usando los movimientos permitidos, ya que este juego tiene una *propiedad invariante*.

Una *propiedad invariante* o simplemente *invariante* es una propiedad de un objeto que permanece inalterada a lo largo de una secuencia de pasos o transformaciones.



Aseguramos que si le llamamos (x, y) a la posición del peón en el tablero, entonces luego de n movimientos permitidos se cumplirá que:

$$x + y \text{ es impar}$$

Esta propiedad es la *invariante del juego*.

Proposición. Sea $p(n)$:= Luego de n movimientos, la suma de las coordenadas de la posición del peón es un número impar, i.e., (x, y) la posición, entonces $x + y$ es impar con $n \geq 0$.

Prueba: Por inducción matemática.

Paso base: Probamos $p(0)$.

Luego de 0 movimientos, su posición es $(2, 1)$. Luego, $2 + 1 = 3$, un número impar.

Paso inductivo: Asumimos $p(k)$, i.e., luego de k movimientos $x^* + y^* = 2m + 1$, en donde (x^*, y^*) es la posición del peón luego de los $k \geq 0$ movimientos y $m \in Z$.

Demostramos $p(k+1)$, i.e., luego de $k+1$ movimientos. Esto lo hacemos por casos.

Caso 1:
Derecha y arriba, $(x^*, y^*) \rightarrow (x^*+1, y^*+1) \rightarrow x^*+1 + y^*+1 = (2m + 1) + 2 = 2(m+1) + 1 = 2m_1+1$

Caso 2:
Derecha y abajo, $(x^*, y^*) \rightarrow (x^*+1, y^*-1) \rightarrow x^*+1 + y^*-1 = 2m + 1$

Caso 3:
Izq. y arriba, $(x^*, y^*) \to (x^*\text{-}1, y^*\text{+}1) \to x^*\text{-}1 + y^*\text{+}1 = 2m + 1$

Caso 4:
Izq. y abajo, $(x^*, y^*) \to (x^*\text{-}1, y^*\text{-}1) \to x^*\text{-}1 + y^*\text{-}1 = (2m + 1) - 2 = 2(m\text{-}1) + 1 = 2m_1\text{+}1$

En conclusión, luego de $n \geq 0$ movimientos es verdad que $x + y$ es impar. $\square$

Corolario. Como la casilla a la que se pide llegar es $(4, 4) \to 4 + 4 = 8$, es un número par, entonces es imposible mover el peón hasta dicha casilla usando los movimientos permitidos.