2.2 Métodos Directos para resolver sistemas ecs.

Una matriz es un arreglo rectangular con m filas y n columnas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 & 14 \end{bmatrix}$$

tamaño: $m \times n$. filas x columnas.

$A : 3 \times 3$ $\qquad$ $B : 3 \times 2$ $\qquad$ $C : 1 \times 4$.

Dado el sistema de ecs. lineales.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= b_1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= b_2 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= b_3. \end{aligned}$$

Si los coeficientes se guardan en una matriz A, y los términos constantes en un vector columna b, entonces el sistema se puede representar con una matriz aumentada $[A \mid b]$.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & b_2 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & b_3 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \quad = \end{array}$$

Ejercicio 1: Escriba la matriz aumentada del sistema dado.

a. $x + 2y + 3z = 6$
$2x + y + 4z = 8$
$x + y + z = 4$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{operaciones}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & c_1 \\ & 1 & & c_2 \\ & & 1 & c_3 \end{array}\right]$$

b. $2x_1 + x_2 = 8$
$4x_1 - x_2 = 6$
$6x_1 - x_2 = 2.$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 4 & -1 & 6 \\ 6 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Matrices en forma escalonada por renglones

Abrevia como FER.

1. Cualquier fila que tenga sólo ceros se ubica en la parte inferior de la matriz.
2. La entrada principal de cada fila es la entrada que está más a la izquierda en la fila.
3. En cada renglón diferente de cero, todas las entradas debajo y a la izquierda de la entrada principal son ceros.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

FER escalón o gradas.

Ejercicio 2: Determine si la matriz está en FER.

no es entrada principal.

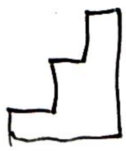
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

NO, hay 1 debajo de la entrada principal a_{11}

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

B SI está en FER

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



C no está en FER

PERO si se intercambian sus 1ra y 3ra filas si lo es. $R_1 \leftrightarrow R_3$.

$$C_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

C_1 SI está en FER.

Si se realizan operaciones elementales de renglón sobre una matriz se puede una nueva matriz que sigue mantiendo la misma solución. "Sistemas Equiv"

Operaciones Elementales de Renglón.

1. Intercambio de Renglones $R_i \leftrightarrow R_j$
2. Multiplicación por una constante. $K R_i$ $K \neq 0$.
3. Adición de Renglones $R_i + K R_j$.

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$ lo mismo que $$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ x + y &= 5. \end{aligned}\right\}$$

lo mismo que $$\boxed{\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 0 + y &= -1 \end{aligned}}$$ $$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ -x - 2y &= -4 \end{aligned}\right\}$$

Eliminación Gaussiana. resuelve sistemas de ecs. lineales.

1. Escriba la matriz aumentada del sistema $[A|b]$.
2. Realice operaciones elementales para reducir la matriz $[A|b]$ a su FER.
3. Resuelva el sistema usando sustitución hacia atrás.

Ejercicio 3: Resuelva los sigs. sistemas

a. $$\begin{aligned} 2x_1 \overset{0x_2}{+} 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$4 - 4 = 0$ ✓

$4 + 6 - 2 = 8$ ✓

$2 - 3 - 2 = -3$ ✓

$R_2 : R_2 - R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{0.5R_1} \begin{array}{l} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - 0.5R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \\ -R_3 \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{} \begin{array}{l} \\ \\ R_3 - 2R_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

solución única.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$x_1 = -2x_3 = 2.$

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Operaciones entre columnas $C_1 \leftrightarrow C_3$

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} X_1 & X_3 & X_2 \end{array} \end{array}$$

$X_1 - 2X_3 = 0.$
$X_3 - X_2 = 8$
$X_2 = 3.$

b. $2X_1 + X_2 = 8$
$4X_1 - X_2 = 6$
$4X_1 - X_2 = 2.$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 4 & -1 & 6 \\ 4 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\begin{array}{c} R_2-2R_1 \\ R_3-2R_1 \end{array}} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -10 \\ 0 & -3 & -14 \end{array}\right]$$

$X_2 = 10/3$
$X_2 = 14/3.$

$$R_3 - R_2 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

$3X_2 = 10$
$0 \neq -4$ NO HAY SOLUCIÓN.
contradicción.

Más variables que ecs.

c. $X_1 + X_2 + 2X_4 = 0$
$X_1 + X_2 + 3X_4 = 6$
$X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4 = 3$

10
01

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 - 2R_2. \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \end{array}$$

$X_1 = -12. - X_2$
$X_3 = 3$
$X_4 = 6.$

X_2 no tiene entrada principal.
no hay una ec. para X_2.

$X_2 = -2, -1, 0, 1, 2.$

X_2 cualquier valor, $X_2 = t$ $t \in \mathbb{R}$
parámetro.

$x_1 = -12 - t$
$x_2 = t$
$x_3 = 3$
$x_4 = 6.$

más columnas que filas resultan en variables con parámetros.

Para encontrar todas las soluciones en un sistema es necesario identificar los tipos de variables.

Variables principales: variables cuyas columnas tienen entradas principales.

Variables libres: variables cuyas columnas <u>no</u> tienen entradas principales

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & x_3 & x_4 & & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

x_1, x_3, x_4 son variables principales.
x_2 es variable libre.

A cada variable libre se le asigna un parámetro

$x_2 = t$

Ejercicio 4: Resuelva.

$$w + x + y + z = 4$$
$$2w + 2x + 4z = 6.$$

4 columnas 2 filas 2 variables libres.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{array}{c} x_1 \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right] \end{array}$$

princ w, y..
libres x, z.

$$\begin{array}{c} R_1 + 0.5R_2 \\ -0.5R_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

FEReducida R.

$x = t_1$ $\qquad w + t_1 + 2t_2 = 3.$ $\qquad w$

$z = t_2$ $\qquad y - t_2 = 1$ $\qquad x$

y

$z.$

$$\begin{aligned} w &= 3 - t_1 - 2t_2. \\ x &= \quad t_1 \\ y &= 1 + \quad t_2 \\ z &= \quad t_2. \end{aligned} \qquad \vec{s} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

suma 3 vectores.

$t_1 = t_2 = 0$ $\quad \vec{s}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad t_1 = t_2 = 1$ $\quad \vec{s}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$t_1 = 1$

$t_2 = -1$ $\quad \vec{s}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $, \ldots ,$

Eliminación Gauss-Jordan.

La matriz se reduce todavía más, se reduce a una forma escalonada reducida por renglones (FERR)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

variables libres

entradas pueden ser diferentes de cero

4 4 4 $\quad$ 7 sin grupo.

4 5 5 5