<u>Solución de relaciones de recurrencia, parte III</u>

En esta sesión vamos a considerar los casos de *raíces reales y repetidas* & *raíces complejas* del polinomio característico.

Raíces reales y repetidas

Ejemplo 1. Encuentre la solución general de la EDFH $a(n) = 6a(n\text{-}1)$ - $9a(n\text{-}2)$.

Escribimos el polinomio característico: $r^2 - 6r + 9 = 0 \rightarrow (r - 3)^2 = 0$

Las raíces características: $r_1 = r_2 = 3$ ⚠️ Tenemos raíces reales y repetidas.

Si seguimos ciegamente el teorema de la solución general de una EDF:

$$f_1(n) = 3^n,\ f_2(n) = 3^n \rightarrow a(n) = c_1 3^n + c_2 3^n = c3^n, \text{ en donde } c = c_1 + c_2$$

Vemos que «*se pierde*» una solución a causa de que las raíces del polinomio tienen multiplicidad 2.

Este «*problema*» tiene solución: la segunda solución de la EDF, como es repetida, deberá ser un «*múltiplo variable*» de la primera solución, es decir:

$$f_2(n) = c(n)\, f_1(n) = c(n)3^n$$

⚠️ Este factor es la función $c(n) = n$.

Verificamos que la «*verdadera*» segunda solución es $f_2(n) = n3^n$, al evaluar dicha función en la EDF.

$$\begin{aligned} a(n) &= 6a(n-1) - 9a(n-2) \\ &= 6(n-1)3^{n-1} - 9(n-2)3^{n-2} \\ &= 3^n\left(\frac{\overset{2}{\cancel{6}}(n-1)}{\cancel{3}} - \frac{\cancel{9}(n-2)}{\cancel{9}}\right) \\ &= 3^n(2n - \cancel{2} - n + \cancel{2}) = n3^n \ \checkmark \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general de la EDF es: $a(n) = c_1 3^n + c_2 n 3^n$.

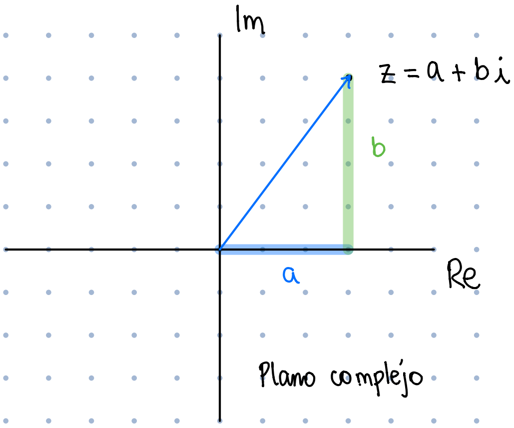
Números complejos

Se define un número complejo como un par ordenado, es decir, $z = (a, b)$, en donde a es la ***parte real de z*** y b es la ***parte imaginaria de z***. La notación usual para representar a z es:

$$z = a + bi, \text{ en donde } i \text{ es la unidad imaginaria y está definida como } i = \text{sqrt}(-1)$$

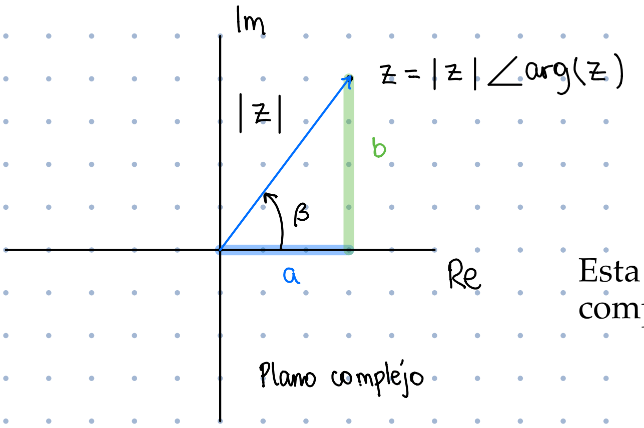
Representación de un número complejo

Los números complejos se representan como puntos en un plano coordenado. Este plano es llamado ***plano complejo***.



La forma $z = a + bi$ se conoce como ***forma rectangular***. Esta forma no es la única en la que podemos representar a un número complejo, en particular nos interesa una en la que cada número complejo se representa por:

- la distancia desde el origen, ***el módulo de z***
- el ángulo medido desde el eje real, ***el argumento de z***



$$|z| = (a^2+b^2)^{1/2}$$

$$\beta = \arg(z) = \arctan \frac{b}{a}$$

Esta forma de representar a un número complejo se llama ***forma polar***.

⚠️ Usar la forma polar de z simplifica el cálculo de una potencia de z, es decir, z^n de la siguiente manera:

$$z = |z| \angle \beta \longrightarrow z^n = |z|^n \angle n\beta$$

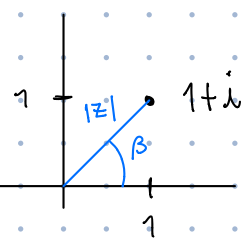
Ejemplo 2. Potencias de un número complejo.

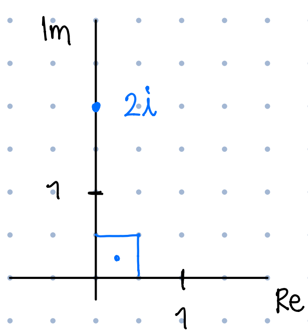
Calcule z^2, en donde $z = 1 + i$.

Forma Clásica: $z^2 = z \cdot z = (1+i)\cdot(1+i) = 1+i+i+i^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i+(\overset{-1}{\sqrt{-1}})^2 = 2i$

Forma Polar: $z = 1+i$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow |z| = (1+1)^{1/2} = \sqrt{2} \\ \rightarrow \beta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \quad z^2 = |z|^2 \angle 2\beta = 2\angle \pi/2 \longrightarrow 2\left[\cancel{\cos \pi/2} + i \sin \pi/2\right]$$





$$z^{50} = |z|^{50} \angle 50 \cdot \frac{\pi}{4} = |z|^{50}\left(\cos\left(50 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(50\, \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Polar Rectangular

⚠️ Dado un número complejo $z = |z| \angle ß$, $z^n = |z|^n \angle nß = |z|^n [\cos(nß) + i\sin(nß)]$

Ejemplo 3. Encuentre una solución particular de la EDFH $a(n) = 4a(n-1) - 5a(n-2)$, $a(0)=2$, $a(1)=6$.

Polinomio carac.: $r^2 - 4r + 5 = 0$

Raíces carac.: $r = \dfrac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = \dfrac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$

Solución general: $a(n) = c_1 (2+i)^n + c_2 (2-i)^n$

Soluciones particulares: $f_1(n) = (2+i)^n$ y $f_2(n) = (2-i)^n$

$\rightarrow (2+i)^n = (\sqrt{5})^n \left[\cos(n\beta) + i\sin(n\beta) \right]$

$\rightarrow (2-i)^n = (\sqrt{5})^n \left[\cos(n\beta) - i\sin(n\beta) \right]$