...o e independencia lineal.

Tarea 8

5. ¿Cuándo $\vec{v}$ es C.L. de $\vec{u}_1, \vec{u}_2$?

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 = \vec{v}$. Resuelva $[u_1 \ u_2 \mid \vec{v}]$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} c_2 = -1 \\ c_2 = -2. \quad R_3 - R_2 \quad 0\,0 \mid - \end{array}$$

Inconsistente, $\vec{v}$ NO Es C.L de u_1 y u_2.

1. $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$[u_1 \ u_2 \ u_3 \mid \vec{v}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right] R_2 - R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] R_1 - R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} c_1 = -1 - t \\ c_2 = 2 - t \\ c_3 = t. \end{array}$$

Hay solución, $\vec{v}$ es C.L de u_1, u_2, u_3.

$t = 0$ $\vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $t = 1$ $\vec{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $t = -1$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

gen$(u_1, u_2, \ldots, u_K)$ es el conjunto de todas las CLs de $u_1, u_2, \ldots, u_K$.

¿ gen$(u_1, u_2, \ldots, u_K) = \mathbb{R}^n$?

Hayan por lo menos n vectores en $u_1, u_2, \ldots, u_K$.

gen$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\} \neq \mathbb{R}^2$. gen$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$

gen$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$ pero hay uno de lo más necesario.

La independencia lineal analiza cuáles vectores no son CLs de otros vectores.

Dependencia Lineal. (LD)

un conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \ldots, u_K\}$ es L.D. si por lo menos uno de los vectores se puede escribir como una CL de los otros vectores.

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots c_K u_K = u_i.$$

$$u_1 + u_2 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = u_3.$$

$\{u_1, u_2, u_3\}$ es Linealmente Dependientes.

ó $u_1 + u_2 - u_3 = \vec{0}$.

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots u_i + \cdots c_K u_K = \vec{0}.$$

Dependencia Lineal: Hay vectores "repetidos" entre sí.

Independencia Lineal: ninguno de los vectores está "repetido"

No son paralelos entre sí, no es C.L de los otros.

IL/DL. Un conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \dots, u_K\}$ es LD si existen escalares $c_1, c_2, \dots, c_K$ diferentes de cero $c_i \neq 0$ tal que $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots c_K v_K = \vec{0}$

es LI si no es L.D, es decir la única forma de obtener $\vec{0}$ es que todas las constantes sean 0.

combinación Lineal Trivial

$0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots 0\vec{v}_K = \vec{0}$

Hay DL. cuando se expresar una CL no trivial para $\vec{0}$

Hay IL. cuando sólo se puede encontrar la CL trivial para expresar el vector cero.

Criterio de Independencia Lineal.

Resuelva el sistema $[v_1 \ v_2 \cdots v_K \mid \vec{0}]$

- Independencia Lineal: cuando la soln es única. "Trivial"
- Dependencia Lineal: cuando hay infinitas soluciones.

Ejercicio 3: Analice si los sigs. conjuntos son L.I.

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \qquad gen(S_1) = \mathbb{R}^3?$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 4R_1]{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 5R_2]{-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right]$$

$-12c_3 = 0$

$c_2 = 2c_3 = 0$

$c_1 = -c_2 - c_3 = 0$

solución única, la "trivial"

S_1 es linealmente independiente

v_3 no es C.L de v_1 y v_2.

$$S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \qquad 3 \neq 1$$

Resuelva el sistema homogéneo. $c_3 = t$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 4R_1]{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 5R_2]{R_1 + R_2,\ -R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$c_1 = -t$

$c_2 = -2t$

$c_3 = t.$

CL "no trivial"

infinitas solns.

S_2 es linealmente dependiente.

v_3 si es C.L de v_1 y v_2.

$t = 1$

$-v_1 - 2v_2 + v_3 = \vec{0}$

$v_1 + 2v_2 = v_3$

$t = 2.$

$2v_1 + 4v_2 = 2v_3$

$gen(S_2) \neq \mathbb{R}^3.$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & 2 & b \\ 4 & -1 & 4 & c \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & d \\ 0 & 1 & 2 & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{array}\right] \quad 0 \neq f.$$

sin necesidad de trabajar con $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

Vectores Estándar e Independencia Lineal.

$$S = \left\{ \underset{e_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{e_3}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{e_4}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}.$$ siempre es L.I.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \end{array}$$

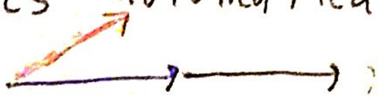
solución

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es L.I.

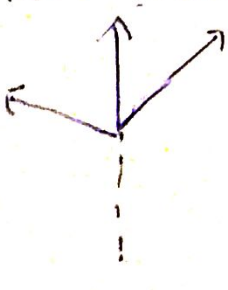
Además $gen(S) = \mathbb{R}^4.$

Cualquier conjunto de vectores estándar $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es L.I. y genera a todos los vectores en $\mathbb{R}^n$.

Cuando un conjunto de vectores es "automáticamente" linealmente dependiente.



1. Hay dos o más vectores que son paralelos entre sí.



IL y los ejes de un sistema de coordenadas.

$\left\{ \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}10\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}10\\20\end{bmatrix} \right\}$ es L.D. $10u_1 = u_3$.

2. El vector cero está en el conjunto, una variable libre

$\left\{ \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \right\}$ es L.D.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \\ c_1 \;\; c_2 \;\; c_3 \end{array} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{array}{c} x=t \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$x = t$.
$y = 0$
$z = 0$.
soluciones inf.

$1000\,\vec{0} = \vec{0}$. $c_1 = 1000$ una C.L no trivial.

3. Hay muchos vectores en el conjunto para que éste pueda ser L.I.

$\left\{ \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \right\}$ es L.I.

$\left\{ \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \right\}$ es L.D.

$\left\{ \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix} \right\}$ es L.D.

Cuando hay más columnas que filas, va a haber por lo menos una variable libre $x_i = t$.

$\left\{ \begin{bmatrix}1\\2\\4\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$ son L.I. más filas que columnas, no hay variables libres. la mayoría de veces.

- Cuando el conjunto sólo tiene 2 vectores, éste es L.I. si los dos vectores no son paralelos.

3. Teorema 2.8: cualquier conjunto de k vectores en $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente si $k > n$.

En $\mathbb{R}^2$, pueden haber hasta 2 vectores L.I.
En $\mathbb{R}^3$, " " hasta 3 vectores L.I.

Ejercicio 4: Determine si los conjuntos dados de vectores son L.D.

a. $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}. = S_1$ hay infinitas sol'ns

Es L.D porque i. hay más de 2 vectores en $\mathbb{R}^2$.
ii: v_1, v_2 y v_4 son paralelos entre sí.

b. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. = S_2.$ infinitas soluciones

Es LD porque el $\vec{0}$ es parte del conjunto

c. $S_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ $\vec{V_2} = K\vec{U_1}$ no son paralelos

Es L.I. porque S_3 sólo tiene 2 vectores y los 2 vectores no son paralelos.

d. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ es L.D. porque los 2 son paralelos

IL $[v_1\ v_2 \cdots v_n | \vec{0}]$ tiene soln única.
DL tiene soluciones infinitas.

Luis, Tema 4, Tarea 2 Problema de Palabras.

$$x + 3y + z = 40.$$
$$x + y + 2z = 60$$
$$2x + 4y + 3z = 100.$$

1. Todas las solns.
2. son enteras y positivas.

a. Resuelva

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 40 \\ 1 & 1 & 2 & 60 \\ 2 & 4 & 3 & 100 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 40 \\ 0 & -2 & 1 & 20 \\ 0 & -2 & 1 & 20 \end{array}\right] \begin{array}{l} -0.5R_2 \\ R_3-R_2. \end{array}$$

estas columnas son L.D.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 40 \\ 0 & 1 & -0.5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] R_1-3R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.5 & 70 \\ 0 & 1 & -0.5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x = 70 + 0.5t.$$
$$y = \boxed{-10 + 0.5t}$$
$$z = t.$$

o. Combinaciones enteras posibles. $t = 1, 2, 3, 4, \ldots$

$t = 1$
$$x = 70.5$$
$$y = -9.5$$
$$z = 1$$

X

$$-10 + 0.5t = 0$$
$$t = \frac{10}{0.5} = 20,$$

$$t = 20, 22, 24, \ldots$$

	20	22	24	
x	80	81	82.	83
y	0	1	2.	3
z	20	22	24	26.

$x = 30 - 3t$

inf combinaciones enteras.

GAUSS
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ & 1 & 4 & 6 \\ & & 1 & 4 \end{array}\right]$$

GAUSS JORDAN
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 2 \\ & 1 & & 4 \\ & & 1 & 9 \end{array}\right]$$