Solución de EDF no homogéneas

El método de solución de EDF no homogéneas consiste en dos etapas:

1. resolver la EDFH *asociada* a la EDF no homogénea; esta solución se llama solución característica y la representamos como $a_c(n)$
2. *proponer* una solución particular a la EDF según la *forma* del término no homogéneo; esta solución la representamos como $a_p(n)$

La solución es la suma de ambas soluciones: $a(n) = a_c(n) + a_p(n)$

Ejemplo 1. Resuelva la EDF $a(n) = 8a(n\text{-}2) - 2a(n\text{-}1) + 5$

Reescribimos la EDF: $a(n) - 8a(n\text{-}2) + 2a(n\text{-}1) = 5$. Como podemos ver, la EDF no es homogénea.

Primero, resolvemos la EDFH asociada:

Polinomio característico: $r^2 + 2r - 8 = 0 \longrightarrow (r+4)(r-2) = 0$

Raíces características: $r_1 = -4$ y $r_2 = 2$

La solución característica de la EDF: $a_c(n) = c_1(-4)^n + c_2 \cdot 2^n$

⚠️ Notemos que el término no homogéneo de la EDF es *una constante*, un posible candidato a ser solución particular es también una constante, es decir, nuestra *propuesta* es $a_p(n) = A$. A continuación, vamos a determinar, si existe dicha constante.

Sustituimos la solución propuesta en la EDF e intentamos averiguar A:

$$a_p(n) = A \longrightarrow a_p(n) - 8a_p(n-2) + 2a_p(n-1) = 5$$

$$A - 8A + 2A = 5$$

$$-5A = 5$$

$$A = -1 \longrightarrow a_p(n) = -1$$

Finalmente, la solución general de la EDF es: $a(n) = \underbrace{c_1 \cdot (-4)^n + c_2 \cdot 2^n}_{a_c} \underbrace{-1}_{a_p}$

Supongamos que nos dan las condiciones $a_0 = -1$ & $a_1 = 11$.

$$a(0) = c_1 + c_2 \cancel{-1} = \cancel{-1} \longrightarrow c_1 = -c_2$$

$$a(1) = -4c_1 - 2c_1 - 1 = 11$$

$$-6c_1 = 12$$

$$c_1 = -2 \text{ y } c_2 = 2$$

Ejercicio 2. Es posible resolver el problema del número de movimientos (mínimo) para ganar el juego de las torres de Hanoi como una EDF:

$$a(n) = a(n\text{-}1) + 1 + a(n\text{-}1) \longrightarrow a(n) = 2a(n\text{-}1) + 1$$

Polinomio característico: $r - 2 = 0 \longrightarrow r = 2$

Solución característica: $a_c(n) = c_1 2^n$

Propuesta soln. particular: $a_p(n) = A$

Sustituimos $a_p(n)$ en $a(n) = 2a(n-1) + 1$

$$A = 2A + 1$$
$$A = -1$$

Solución general:

$$a(n) = c_1 \cdot 2^n - 1$$

Condición inicial: $a(1) = 1$

Evaluamos:

$$a(1) = c_1 \cdot 2 - 1 = 1 \longrightarrow c_1 = 1$$

La solución particular: $a(n) = 2^n - 1$

Ejemplo 3. Encuentre una solución particular a la EDF:

$$a(n) = a(n\text{-}1) + 3n^2 \text{ sujeta a la condición inicial } a(0) = 10$$

término cuadrático para la variable n

Polinomio carac.: $r = 1$

Soln. carac.: $a_c(n) = c_1 \cdot 1^n = c_1$

⚠️ Debemos considerar la *forma más general* del término no homogéneo

Propuesta soln. particular: $a_p(n) = (An^2 + Bn + C) \cdot n$

⚠️ Agregamos n en la solución particular, para *quitar* la duplicidad de las constantes que habría en las soluciones característica y particular

Sustituimos $a_p(n)$ en $a(n) = a(n-1) + 3n^2$

$$An^3 + Bn^2 + Cn = A(n-1)^3 + B(n-1)^2 + C(n-1) + 3n^2$$

⏩ Finalizaremos este ejemplo en la próxima sesión.