2.3.1 Combinaciones Lineales. (CL)

Un vector $\vec{b}$ es una CL de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tal que.

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = \vec{b}$$

Ejercicio 1: Sean $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

a. Determine si $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es una C.L de v_1 & v_2.

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ 2c_1 \\ -c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 \\ c_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ 2c_1 + c_2 \\ -c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{b}_1$$

Matriz Aumentada.

$$\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & \vec{b} \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\vec{b}$ es C.L de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ si $[v_1 \; v_2 \cdots v_n \mid \vec{b}]$ tiene solución.

$$\begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -R_2 \\ R_3 + R_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$0 \neq 2$

no hay solución

$\vec{b}_1$ NO ES CL de v_1 y v_2.

b. Determine si $\vec{b_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ es C.L de v_1 & v_2.

$$[v_1 \ v_2 \mid \vec{b_2}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 + R_1}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$c_1 = 3 - c_2 = 2.$
$c_2 = 1$
$c_2 = 1$

solución única: $\vec{b_2}$ es C.L de v_1 & v_2.

$$2v_1 + v_2 = \vec{b_2}$$

Conjuntos Generadores:

Un conjunto generador contiene todas las CL's posibles entre un conjunto de vectores S

$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

un elemento del conjunto generador, denotado gen(S) sería $\vec{x} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots c_n v_n$ $\quad c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ¿ gen(S) = $\mathbb{R}^2$? todo el plano.

$\vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

Ejercicio 2: Muestre que $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$.

El sistema $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ tiene solución.

$a = -1, 0, 1, 2, \pi, \ldots$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 2 & 5 & b \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 - 2R_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & b-2a \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5a - 2b \\ 0 & 1 & b - 2a \end{array}\right]$$

siempre tiene solución, por lo que estos vectores generan a cualquier vector en el plano. $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\{v_1, v_2\}$

$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad c_1 = 50$, $c_2 = -20$

No TODOS los vectores en $\mathbb{R}^2$ generan a todo $\mathbb{R}^2$.

¿ $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$?

vectores forma $b = a$ $\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & b \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 - R_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & b-a \end{array}\right]$$

no hay soln para $b - a \neq 0$

NO están todos los pts.

$\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\quad \left[\begin{array}{c|c} 2 & a \\ 1 & b \end{array}\right] \xrightarrow{2R_2 - R_1} \left[\begin{array}{c|c} 2 & a \\ 0 & 2b - a \end{array}\right]$

no hay solución.

Ninguno de estos dos conjuntos generan a $\mathbb{R}^2$.

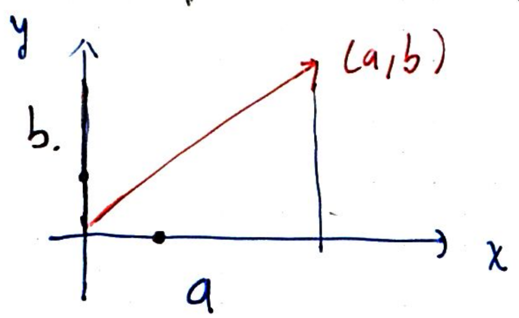
¿Cuáles conjuntos de vectores son los más convenientes para generar a $\mathbb{R}^2$ ó a $\mathbb{R}^n$?

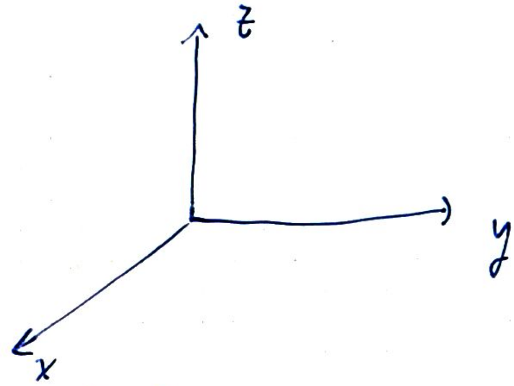
Vectores Unitarios Estándar.

Vectores Unitarios Estándar.

Sea $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $a e_1 + b e_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

eje-x eje-y.





$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$a e_1 + b e_2 + c e_3 = \vec{b}$.

Vectores unitarios Estándar: son n vectores e_i.

tal que $\mathbb{R}^n = \text{gen}(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

e_i = 1 sólo en la iésima entrada
0 en el resto de entradas

son n vectores
no están repetidos