Ejemplo 3. Encuentre la solución general de la EDFH de orden 2:

$$a(n) = 5a(n\text{-}1) - 6a(n\text{-}2),\ n \geq 2$$

💡 De los (pocos) ejemplos anteriores pudimos observar que la solución de una EDF fue una función exponencial de la forma: $a(n) = a_0 \cdot r^n$

⚠️ Así que vamos a suponer que la solución de la EDF tiene la forma: $a(n) = r^n$.

Entonces, la EDF $a(n) = 5a(n-1) - 6a(n-2)$ puede reescribirse como:

$$r^n = 5r^{n-1} - 6r^{n-2}$$

Reescribimos:

$$r^n - \frac{5r^n}{r} + \frac{6r^n}{r^2} = 0$$

$$\underset{r\neq 0}{r^n}\left(1 - \frac{5}{r} + \frac{6}{r^2}\right) = 0$$

Un producto de dos cantidades que está igualado a cero, será cero cuando alguna de las cantidades sea cero.

⚠️ Pero $r \neq 0$ ya que esto nos daría la solución trivial (la secuencia $\{0, 0, 0, 0, \ldots\}$)

$$1 - \frac{5}{r} + \frac{6}{r^2} = 0 \ \Big/ \cdot r^2 \longrightarrow r^2 - 5r + 6 = 0 \longrightarrow r_1 = 2 \text{ y } r_2 = 3$$

este polinomio recibe el nombre de polinomio característico de la EDF

raíces características de la EDF

⚠️ Sabemos ahora que las funciones 2^n y 3^n son soluciones de la EDF. Pero, ¿cuál es la solución general?

Lema 1. Si $f(n)$ es una solución de una EDF, entonces $cf(n)$ es también una solución de la EDF, $c \in \mathbb{R}$.

$$a(n) = 5a(n-1) - 6a(n-2), \quad f_1(n) = 2^n$$

$$\begin{aligned} \rightarrow f_1(n) &= 5f_1(n-1) - 6f_1(n-2) \\ &= 5 \cdot 2^{n-1} - 6 \cdot 2^{n-2} \\ &= \frac{5}{2} \cdot 2^n - \frac{6}{4} \cdot 2^n = \frac{5}{2} \cdot 2^n - \frac{3}{2} \cdot 2^n = 2^n \ ✓ \end{aligned}$$

Verificamos $cf_1(n)$ es solución también:

$$\begin{aligned} cf_1(n) &= 5 \cdot cf_1(n-1) - 6 \cdot cf_1(n-2) \\ &= c\,(5f_1(n-1) - 6f_1(n-2)) = c \cdot 2^n \ ✓ \end{aligned}$$

Lema 2. Si $f_1(n)$ y $f_2(n)$ son dos soluciones de una EDF, tales que $f_1 \neq cf_2$, entonces la suma $f_1(n) + f_2(n)$ es también una solución de la EDF. Esto se llama principio de superposición.

$$a(n) = 5a(n-1) - 6a(n-2), \quad f_1(n) = 2^n, \; f_2(n) = 3^n$$

$$\to f_1(n) + f_2(n) = 5\left(f_1(n-1) + f_2(n-1)\right) - 6\left(f_1(n-2) + f_2(n-2)\right)$$

$$= 5f_1(n-1) - 6f_1(n-2) + 5f_2(n-1) - 6f_2(n-2)$$

$$= 2^n + 3^n$$

Teorema. Si $f_1(n)$ y $f_2(n)$ son dos soluciones de una EDF, tales que $f_1 \neq cf_2$, entonces la solución general es:

$$c_1f_1(n) + c_2f_2(n)$$

Prueba:

Como $f_1(n)$ y $f_2(n)$ son ambas soluciones, por el *Lema 1* tenemos que $c_1f_1(n)$ y $c_2f_2(n)$. Luego, por el *Lema 2* tenemos que $c_1f_1(n) + c_2f_2(n)$ es también una solución. □

En conclusión, la solución general de la EDF $a(n) = 5a(n\text{-}1) - 6a(n\text{-}2)$, $n \geq 2$ es $a(n) = c_1\, 2^n + c_2\, 3^n$.

Ejemplo 4.1. Encuentre la solución general de la EDFH $a(n) = 3a(n\text{-}1) + 4a(n\text{-}2)$, $n \geq 2$.

Reescribimos la EDF: $a(n) - 3a(n\text{-}1) - 4a(n\text{-}2) = 0$

Escribimos el polinomio característico de la EDF: $r^2 - 3r - 4 = 0 \longrightarrow (r+1)(r\text{-}4) = 0$

Anotamos las raíces características de la EDF: $r_1 = -1$ & $r_2 = 4$

Entonces, la solución general es: $a(n) = c_1\cdot(-1)^n + c_2\cdot 4^n$.

Ejemplo 4.2. Encuentre una solución particular a la EDFH en la que $a(0) = 3$ & $a(1) = 7$.

Evaluamos en a las condiciones, lo cual da lugar a un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} a(0) &= c_1 + c_2 = 3 && \to c_1 = 3 - c_2 = 3 - 2 = 1 \\ a(1) &= -c_1 + 4c_2 = 7 && \to -3 + c_2 + 4c_2 = 7 \to c_2 = 2 \end{aligned}$$

Entonces, la solución particular es: $a(n) = 1\cdot(-1)^n + 2\cdot 4^n = (-1)^n + 2\cdot 4^n$

Ejercicio 5. Encuentre una solución particular al problema de Fibonacci:

$$a(n) = a(n\text{-}1) + a(n\text{-}2) \text{ sujeto a las condiciones } a(0) = 0,\ a(1) = 1,\ n \geq 2$$

Reescribimos: $a(n) - a(n-1) - a(n-2) = 0$

Ec. característica: $r^2 - r - 1 = 0$

Raíces características: $r = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

La soln. general: $a(n) = c_1 \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Condiciones:

$$a(0) = c_1 + c_2 = 0 \longrightarrow c_1 = -c_2$$

$$a(1) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - c_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$c_1 \left(\frac{\cancel{1}+\sqrt{5} - \cancel{1}+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \longrightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

🧐 La *fórmula cerrada* que acabamos de encontrar es conocida como fórmula de Binet para la secuencia de Fibonacci.

La soln. particular es:

$$a(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]$$

😱 Esta *fórmula* consiste de números irracionales y, sin embargo, al ser evaluada en números enteros, produce números enteros. Un *fact* que vale la pena resaltar.