Teorema Fundamental de las matrices invertibles:

Sea A una matriz $n \times n$, los siguientes enunciados son equivalentes:

a. A es invertible.

b. $Ax = b$ tiene una única solución.

c. $Ax = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.

d. La FERR de A es la matriz Identidad.

e. El determinante de la matriz A no es cero $\det A \neq 0$.

f. A es el producto de matrices elementales.

g. rango$(A) = n$

h. nulidad$(A) = 0$

i. Los vectores columna de A son linealmente independientes.

j. Los vectores columna de A generan $\mathbb{R}^n$.

k. Los vectores columna de A forman una base para $\mathbb{R}^n$.

l. Los vectores renglón de A son linealmente independientes.

m. Los vectores renglón de A generan $\mathbb{R}^n$.

n. Los vectores renglón de A forman una base para $\mathbb{R}^n$.

o. Cero no es un eigenvalor de A

Ejercicio 1: Considere la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & a^2-4 & 2 \\ 2 & 0 & a^2-2a \end{bmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

a. ¿Para cuáles valores de a es $\det A \neq 0$?

b. ¿Tiene el sistema $Ax = b$ una solución única si $a = 1$?

c. Encuentre la forma reducida por renglones de A si $a = 100$.

d. ¿Son las columnas de A linealmente independientes si $a = 20$?

e. ¿Pueden las columnas de A generar a $\mathbb{R}^3$ si $a = -2$?

f. ¿Está el vector $w = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 \end{bmatrix}$ en ren(A) si $a = 3000$?

Ejercicio 2: Considere la siguiente matriz.

$$A = \begin{bmatrix} k & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 2-k \end{bmatrix}$$

a. Encuentre los valores de k para los cuales la matriz A es invertible.

b. Encuentra la forma reducida por renglones de A si $k = 1$.

c. Explique si los vectores renglón de A generan a $\mathbb{R}^3$ si $k = -50$.

d. Encuentre bases para el espacio columna, renglón y nulo de A si $k = 2$.