*Ejemplo 3*. (Continuación) Encuentre una solución particular de la EDFH

$$a(n) = 4a(n\text{-}1) - 5a(n\text{-}2),\ a(0)=2,\ a(1)=6.$$

Polinomio característico: $r^2 - 4r + 5 = 0$

😱 Las raíces son números complejos

Raíces características: $r = \dfrac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = \dfrac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$

La solución general es: $a(n) = c_1(2+i)^n + c_2(2-i)^n$

⚠️ Buscamos reescribir la solución para «*eliminar*» los términos complejos de la expresión

Tomemos las soluciones particulares: $f_1(n) = (2+i)^n$ y $f_2(n) = (2-i)^n$

💡 La idea es sacar ventaja de las propiedades de números complejos que estudiamos previamente.

$$\rightarrow (2+i)^n = (\sqrt{5})^n \left[\cos(n\beta) + i\sin(n\beta)\right]$$

$$\rightarrow (2-i)^n = (\sqrt{5})^n \left[\cos(n\beta) - i\sin(n\beta)\right]$$

⚠️ Escribimos las soluciones particulares en la forma polar, en donde $\beta = \arctan(1/2)$

Luego, sumamos y restamos estas soluciones:

$$(2+i)^n + (2-i)^n = (\sqrt{5})^n \cdot 2\cos(n\beta) \qquad (2+i)^n - (2-i)^n = (\sqrt{5})^n \cdot 2i\sin(n\beta)$$

$$\frac{(2+i)^n + (2-i)^n}{2} = (\sqrt{5})^n \cdot \cos(n\beta) \qquad \frac{(2+i)^n - (2-i)^n}{2i} = (\sqrt{5})^n \sin(n\beta)$$

⚠️ Ambas funciones son una combinación lineal (suma de múltiplos) de las soluciones particulares $(2+i)^n$ y $(2-i)^n$, así que son también soluciones de la EDFH.

¡Lo más importante es que estas soluciones están libres de números complejos!

Entonces, la solución general de la EDFH puede escribirse como:

$$a(n) = (\mathrm{sqrt}(5))^n[c_1\cos(n\beta) + c_2\sin(n\beta)], \text{ en donde } \beta = \arctan(1/2)$$

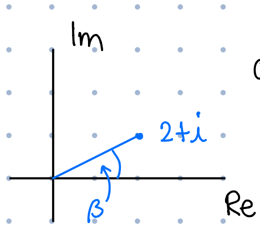
Finalmente, evaluamos las condiciones $a(0) = 2$ y $a(1) = 6$ para encontrar $c_1$ y $c_2$.

$$a(0) = c_1 = 2$$

$$a(1) = \sqrt{5}\left[2\cos\beta + c_2\sin\beta\right] = 6$$

$$= \cancel{\sqrt{5}}\left[2\cdot\frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}} + c_2\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}\right] = 6$$

$$= 4 + c_2 = 6 \longrightarrow c_2 = 2$$




$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Finalmente, la solución particular a la EDFH es:

$$a(n) = (\text{sqrt}(5))^n[2\cos(n\beta) + 2\sin(n\beta)], \text{ en donde } \beta = \arctan(1/2)$$

⚠️ Siempre será posible combinar las soluciones para «*eliminar*» los números complejos de la respuesta, ya que las soluciones son complejos conjugados*.

**Definición**. Dado un número complejo $z = a + bi$, el número $z^* = a - bi$ es el complejo conjugado de $z$.

---

*Ejemplo 4*. Encuentre una solución general de la EDFH:

$$a(n) = 2a(n\text{-}1) - 2a(n\text{-}2)$$

Polinomio característico: $r^2 - 2r + 2 = 0$

Raíces características: $r = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = r = 1 \pm i \longrightarrow |r| = (1^2+1^2)^{1/2}, \ \beta = \arctan\left(\dfrac{1}{1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

La solución general es: $a(n) = (\text{sqrt}(2))^n[c_1\cos(n\pi/4) + c_2\sin(n\pi/4)$