1a) $a(n) = 4a(n-1) - 4a(n-2)$, $a(0) = 6$ y $a(1) = 8$

Ecuación característica: $r^2 - 4r + 4 = 0 \longrightarrow (r-2)^2 = 0 \longrightarrow r_1 = r_2 = 2$

$a(n) = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n 2^n$

Condiciones iniciales:

$a(0) = c_1 = 6$

$a(1) = 6 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 2^1 = 8 \longrightarrow c_2 = -2$

$\therefore a(n) = 6 \cdot 2^n - 2n \cdot 2^n, \ n \geq 0$

también puede escribirse como: $2 \cdot 3 \cdot 2^n - n \cdot 2 \cdot 2^n$

$= 3 \cdot 2^{n+1} - n \cdot 2^{n+1}$

1b) $a(n) = \frac{1}{4} a(n-2)$, $a(0) = 1$, $a(1) = 0$

Ecuación característica: $r^2 - \frac{1}{4} = 0 \longrightarrow r_1 = 1/2$ y $r_2 = -1/2$

$a(n) = c_1 (1/2)^n + c_2 (-1/2)^n$

Condiciones iniciales:

$a(0) = c_1 + c_2 = 1$

$a(1) = \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2} = 0 \longrightarrow c_1 = c_2$

Entonces: $2c_1 = 1 \longrightarrow c_1 = c_2 = 1/2$

$\therefore a(n) = \frac{1}{2} (1/2)^n + \frac{1}{2} (-1/2)^n$

1c) $a(n) = a(n-1) + n^2$, $a(0) = 1$

Ecuación característica: $r - 1 = 0 \longrightarrow r = 1$

$a_c(n) = c_1 \cdot 1^n = c_1$

Propuesta de solución particular: $a_p(n) = (An^2 + Bn + C) \cdot n$ ← eliminar duplicidad

$a(n) = a(n-1) + n^2$

$\cancel{An^3} + \cancel{Bn^2} + \cancel{Cn} = A(n-1)^3 + B(n-1)^2 + C(n-1) + n^2$

$= \cancel{An^3} - 3An^2 + 3An - A + \cancel{Bn^2} - 2Bn + B + \cancel{Cn} - C + n^2$

$\longrightarrow 3An^2 + (2B - 3A)n + (C - B + A) = n^2$

$3A = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{3}$

$2B - 3A = 0 \longrightarrow B = 1/2$

$C - B + A = 0 \longrightarrow C = 1/6$

$a_p(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

Solución general: $a(n) = c_1 + \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$

Condiciones iniciales:

$a(0) = c_1 = 1$

$\therefore a(n) = 1 + \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$

1d) $a(n) = 2a(n-1) + n + 5$, $a(0) = 4$

Ecuación característica: $r - 2 = 0 \longrightarrow r = 2$

$a_c(n) = c_1 \cdot 2^n$

Propuesta de solución particular: $a_p(n) = An + B$

$a(n) = 2a(n-1) + n + 5$

$An + B = 2(A(n-1) + B) + n + 5$

$An + B = 2An - 2A + 2B + n + 5$

$-An + 2A - B = n + 5$

$\longrightarrow -A = 1 \longrightarrow A = -1$

$2A - B = 5 \longrightarrow -2 - B = 5 \longrightarrow B = -7$

Solución general:

$$a(n) = c_1 \cdot 2^n - (n+7)$$

Condiciones iniciales:

$a(0) = c_1 - 7 = 4 \longrightarrow c_1 = 11$

$\therefore a(n) = 11 \cdot 2^n - (n+7)$

1e) $a(n) = 2a(n-1) + 2^n$, $a(0) = 2$

Ecuación característica: $r - 2 = 0 \longrightarrow r = 2$

$a_c(n) = c_1 \cdot 2^n$

eliminar duplicidad

Propuesta de solución particular: $a_p(n) = A \cdot n \cdot 2^n$

$a(n) = 2a(n-1) + 2^n$

$A \cdot \cancel{n} \cdot 2^n = 2 \cdot A \cdot (n-1) \cdot 2^{n-1} + 2^n$

$= \cancel{A \cdot n \cdot 2^n} - A \cdot 2^n + 2^n$

$\longrightarrow A \cdot 2^n = 2^n \longrightarrow A = 1$

Solución general: $a(n) = c_1 \cdot 2^n + n \cdot 2^n$

Condiciones iniciales:

$a(0) = c_1 = 2$

$\therefore a(n) = 2 \cdot 2^n + n \cdot 2^n$

2a) $L(n) = \dfrac{L(n-1) + L(n-2)}{2}$

2b) $L(n) = \dfrac{L(n-1) + L(n-2)}{2}$, $L(0) = 100$ y $L(1) = 300$

Ecuación característica: $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0 \longrightarrow r_1 = -\frac{1}{2}$ y $r_2 = 1$

$$L(n) = c_1(-1/2)^n + c_2$$

Condiciones iniciales:

$$L(0) = c_1 + c_2 = 100$$

$$L(1) = -\frac{c_1}{2} + c_2 = 300$$

Restamos las ecuaciones:

$$\frac{3}{2}c_1 = -200 \longrightarrow c_1 = -\frac{400}{3}$$

$$c_2 = 100 - c_1 = 100 + \frac{400}{3} = \frac{700}{3}$$

$$\therefore L(n) = \frac{1}{3}\left(700 - 400\cdot(-1/2)^n\right) \quad (L(n) \text{ medido en miles})$$

3a) $P(n) = P(n-1) + 0{,}2\,P(n-1) + 0{,}45\,P(n-2) = 1{,}2\,P(n-1) + 0{,}45\,P(n-2)$, $P(0) = 100$ y $P(1) = 120$

al inicio del año 1 solo se paga 20% de dividendo

3b) Ecuación característica: $r^2 - 1{,}2r + 0{,}45 = 0 \longrightarrow r_1 = 1{,}5$ y $r_2 = -0{,}3$

$$P(n) = c_1(1{,}5)^n + c_2\cdot(-0{,}3)^n$$

Condiciones iniciales:

$$P(0) = c_1 + c_2 = 100$$

$$P(1) = 1{,}5c_1 - 0{,}3c_2 = 120 \longrightarrow c_1 = \frac{250}{3} \text{ y } c_2 = \frac{50}{3}$$

$\therefore\; P(n) = \frac{1}{3}\left(250 \cdot (1{,}5)^n + 50 \cdot (-0{,}3)^n\right)$ ($P(n)$ medido en miles)

4a) $S(n) = S(n-1) + 0{,}25\, S(n-1) + 10(n-1)$ ($S(n)$ medido en miles)

$S(n) = 1{,}25\, S(n-1) + 10(n-1)\;,\; n \geq 1$

aumento de 10 mil por cada año

4b)

Ecuación característica: $r - 1{,}25 = 0 \longrightarrow r = 1{,}25$

$S_c(n) = c_1 \cdot (1{,}25)^n$

Propuesta de solución particular: $S_p(n) = An + B$

$S(n) = 1{,}25\, S(n-1) + 10(n-1)$

$An + B = 1{,}25\,An - 1{,}25A + 1{,}25B + 10n - 10$

$-0{,}25\,An + 1{,}25A - 0{,}25B = 10n - 10$

$A = -40$ y $B = -160$

Solución general:

$S(n) = c_1 \cdot (1{,}25)^n - 40n - 160$

Condiciones iniciales:

$S(0) = c_1 - 160 = 50 \longrightarrow 210$

$\therefore\; S(n) = 210 \cdot (1{,}25)^n - 40(n+4)$