



# CAPÍTULO 20

## Métodos estadísticos para el control de calidad

---

### CONTENIDO

LA ESTADÍSTICA  
EN LA PRÁCTICA:  
DOW CHEMICAL COMPANY

#### 20.1 FILOSOFÍAS Y MARCO DE REFERENCIA

Malcolm Baldrige  
National Quality Award  
ISO 9000  
Seis sigma

#### 20.2 CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESOS

Cartas de control  
Cartas  $\bar{x}$ : media y desviaciones  
estándar del proceso conocidas

Cartas  $\bar{x}$ : media y desviaciones  
estándar del proceso  
desconocidas

Cartas  $R$   
Cartas  $p$   
Cartas  $np$   
Interpretación de las cartas  
de control

#### 20.3 MUESTREO DE ACEPTACIÓN

KALI, Inc., un ejemplo  
de muestreo de aceptación  
Cálculo de la probabilidad  
de aceptar un lote  
Selección de un plan  
de muestreo de aceptación  
Planes de muestreo múltiple

## LA ESTADÍSTICA *en* LA PRÁCTICA

### DOW CHEMICAL COMPANY\* FREEPORT, TEXAS

En 1940, la empresa Dow Chemical adquirió un terreno de 800 acres en Texas, en la costa del Golfo, para construir una planta de producción de magnesio. La planta original se ha extendido hasta cubrir más de 5 000 acres y engloba uno de los complejos petroquímicos más grandes del mundo. Entre los productos de Dow Texas Operations se encuentran magnesio, estireno, plásticos, adhesivos, solventes, glicol y cloro. Algunos de los productos se obtienen únicamente para usarlos en otros procesos, pero muchos terminan como ingredientes esenciales de productos farmacéuticos, pastas dentales, alimentos para perros, mangueras, refrigeradores, envases de cartón para leche, bolsas para basura, champús y muebles.

Dow's Texas Operations produce más del 30% del magnesio del mundo; el magnesio es un metal extremadamente ligero que se emplea en productos tan diversos como raquetas de tenis y rines de magnesio. El Departamento del Magnesio fue el primer grupo de Texas Operations que capacitó a su personal técnico y a sus administrativos para usar el control estadístico de calidad. Algunos de los primeros acertados empleos del control estadístico de calidad fueron en los procesos químicos.

En una aplicación en la que intervenía la operación de un secador, se tomaban muestras del producto a intervalos regulares, se calculaba el promedio de cada muestra y se registraba en una carta  $\bar{x}$ . Estas cartas permitían a los analistas de Dow vigilar tendencias en los productos que pudieran indicar que el proceso no se estaba desarrollando correctamente. En una ocasión los analistas empezaron a observar que las medias muestrales presentaban valores que no correspondían a un proceso que se desarrollara den-



El control estadístico de calidad ha permitido a la empresa Dow Chemical mejorar sus métodos de producción y sus productos. © PR Newswire Dow Chemical USA.

tro de los límites previstos. Mediante un examen más cuidadoso de las cartas de control y de la operación misma, los analistas encontraron que las variaciones podían deberse a algún problema relacionado con el operador. Después de capacitar nuevamente al operador, las cartas  $\bar{x}$  indicaron una mejoría significativa en la calidad del proceso.

En cualquier parte que Dow aplica el control estadístico de calidad, se logra una mejora de la calidad. Se han logrado ahorros documentados de cientos de miles de dólares por año y continuamente se han descubierto nuevas aplicaciones.

En este capítulo se mostrará cómo elaborar una carta  $\bar{x}$  como las empleadas por Dow. Estas cartas son parte del control estadístico de calidad conocido como control estadístico de procesos. También se verán métodos de control de calidad que se usan en situaciones en que la decisión de aceptar o rechazar un conjunto de artículos se basa únicamente en una muestra.

\* Los autores agradecen a Clifford B. Wilson, administrador de Magnesium Technical, The Dow Chemical Company, por proporcionar este artículo para *La estadística en la práctica*.

La American Society for Quality (ASQ) define la calidad como “la totalidad de rasgos y características de un producto o servicio relacionados con su capacidad para satisfacer determinadas necesidades”. Las organizaciones reconocen que en la actual economía global, para ser competitivas tienen que esforzarse por lograr un alto nivel de calidad. De ahí que cada vez se le dé más importancia a los métodos para el monitoreo y el mantenimiento de la calidad.

En la actualidad el enfoque orientado al cliente, fundamental para las organizaciones de alto desempeño, ha transformado el ámbito de las cuestiones de calidad, de la simple eliminación de defectos en la línea de producción a la elaboración de estrategias corporativas de calidad con base amplia. La ampliación del ámbito de la calidad conduce, de manera natural, al concepto de **calidad total (CT)**.

La calidad total (CT) es un sistema de gestión enfocado a la persona que busca mejorar cada vez más la satisfacción del cliente con costos reales cada vez más bajos. La CT es un sistema (no un

área aparte o un programa de trabajo) y parte integral de una estrategia de alto nivel; la CT funciona a través de todas las funciones y departamentos, involucra a todos los empleados, desde el de más alto nivel hasta el de más bajo y se extiende hacia adelante y hacia atrás incluyendo a la cadena de proveedores y a la cadena de clientes. La CT hace hincapié en el aprendizaje y en la adaptación al cambio continuo como claves para el éxito de una organización.\*

Sin importar la manera en que se implemente en las distintas organizaciones, la calidad total se basa en tres principios fundamentales: centrar la atención en el cliente y todos los implicados; participación y trabajo de equipo de toda la organización, y dar especial atención a la mejora continua y al aprendizaje. En la primera sección de este capítulo se presenta una breve introducción acerca de las tres referencias principales en la gestión de calidad: el Malcolm Baldrige Award, los estándares ISO 9000 y la filosofía Seis sigma. En las dos últimas secciones se estudian dos herramientas estadísticas que se usan para monitorear la calidad: el control estadístico de procesos y el muestreo de aceptación.

## 20.1

## Filosofías y marco de referencia

*Después de la Segunda Guerra Mundial el doctor W. Edwards Deming fue consultor de la industria japonesa; a él se le atribuye haber convencido a los altos directivos japoneses de usar el método del control estadístico de calidad.*

Dos personas que han tenido una gran influencia en las cuestiones sobre la calidad son el doctor W. Edwards Deming y Joseph Juran. Estos dos personajes colaboraron, poco después de la Segunda Guerra Mundial, en la educación de los japoneses en gestión de calidad. Aunque la calidad es un asunto del trabajo de todo mundo, Deming hizo hincapié en que el poner especial atención a la calidad debía ser asunto de los gerentes y directivos; elaboró una lista de 14 puntos que él consideraba que representaban las responsabilidades clave de los gerentes y directivos. Por ejemplo, Deming decía que los gerentes y directivos debían abandonar la inspección en masa; acabar con la práctica de hacer negocios con base únicamente en el precio; que debía buscarse la mejora continua de todos los procesos de producción y servicios; fomentar un ambiente orientado al trabajo en equipo, y que debían eliminarse los objetivos, eslóganes y metas de trabajo basados en cuotas numéricas de trabajo. Lo más importante era que los directivos debían crear un ambiente de trabajo en el que, en todos los niveles, se mantuviera un compromiso continuo con la calidad y la productividad.

Juran propuso una definición simple de calidad: *adecuación al uso*. El método de calidad de Juran se concentraba en tres procesos: planeación de la calidad, control de la calidad y mejoramiento de la calidad. A diferencia de la filosofía de Deming, que requería un cambio cultural importante en la organización, los programas de Juran tenían como fin mejorar la calidad al trabajar con el sistema organizacional existente. No obstante, las dos filosofías se parecen en que se centran en la necesidad de que los directivos se involucren y hagan hincapié en la necesidad de un mejoramiento continuo, en la importancia de la capacitación y en el uso de técnicas de control de calidad.

Hubo otras muchas personas que tuvieron un papel importante en el movimiento de la calidad. Entre ellos se encuentran Philip B. Crosby, A. V. Feigenbaum, Karou Ishikawa y Genichi Taguchi. En textos especializados, dedicados únicamente al tema de la calidad, se encuentran detalles sobre las contribuciones de cada uno de ellos. Las contribuciones de todos los involucrados en el movimiento de calidad ayudaron a definir el conjunto de las mejores prácticas y llevaron a la creación de numerosos programas de premios y de certificación. Los dos programas más importantes son el Malcolm Baldrige National Quality Award, de Estados Unidos, y el proceso internacional de certificación ISO 9000. En los últimos años ha aumentado también el uso de Seis Sigma, una metodología para el mejoramiento del desempeño organizacional que se basa en la recolección de datos y en el análisis estadístico.

## Malcolm Baldrige National Quality Award

El Malcolm Baldrige National Quality Award es entregado por el presidente de Estados Unidos a las organizaciones que apliquen y que se les considere destacadas en siete áreas: liderazgo; planeación estratégica; enfoque al cliente y al mercado; gestión de medición, análisis y conocimiento; especial atención al recurso humano; gestión de procesos y resultados económicos. El congreso

\*J. R. Evans y W. M. Lindsay, *The Management and Control of Quality*, 6a. ed. (Cincinnati, OH: South-Western, 2005), pp. 18-19.

*El National Institute of Standards and Technology (NIST) dependiente del Departamento de Comercio de Estados Unidos es el que se ocupa del Baldrige National Quality Program. Más información se puede obtener en [www.quality.nist.gov](http://www.quality.nist.gov).*

estableció el programa de este premio en 1987 para reconocer a las organizaciones estadounidenses por sus logros en calidad y desempeño, y para llamar la atención acerca de la importancia de la calidad como ventaja competitiva. Malcolm Baldrige trabajó como secretario de comercio de Estados Unidos, desde 1981 hasta su muerte en 1987; el premio lleva su nombre en su honor.

Desde la ceremonia de entrega de los primeros premios en 1988, el Baldrige National Quality Program ha crecido en estatura y en impacto. Desde 1988 se han distribuido aproximadamente 2 millones de copias de los criterios, a lo que se suman las reproducciones en gran escala hechas por las organizaciones y el acceso electrónico. Por octavo año consecutivo, un índice accionario hipotético, formado por empresas estadounidenses que cotizan en la bolsa y que han recibido el Baldrige Award, supera el Standar & Poor's 500. En el 2003, el "Índice Baldrige" superó al S&P 500 por 4.4 a 1. En la ceremonia de premiación de 2003, Bob Barnett, vicepresidente ejecutivo de Motorola, Inc., dijo, "Ingresamos a este programa de calidad, no con la idea de ganar, sino con el objetivo de obtener la evaluación de los examinadores de Baldrige. Esta evaluación fue cabal, profesional y *clara*... haciendo de ella la consultoría más rentable y con mayor valor agregado que se puede obtener, actualmente, en todo el mundo."

## ISO 9000

ISO 9000 es una serie de cinco estándares internacionales publicados en 1987 por la Organización Internacional para la Estandarización (ISO), Génova, Suiza. Las empresas pueden usar estos estándares como ayuda, para determinar lo que se necesita para mantener un sistema de conformidad de calidad eficiente, para garantizar que los instrumentos de medición y de prueba sean calibrados regularmente y, para mantener, y adecuar, un sistema apropiado de documentación. El registro ISO 9000 determina si una empresa cumple con su propio sistema de calidad. En general, el registro ISO 9000 cubre menos del 10% de los criterios del Baldrige Award.

## Seis Sigma

Al final de los años ochenta, Motorola advirtió la necesidad de mejorar la calidad de sus productos y servicios; su objetivo fue lograr un nivel de calidad tan bueno que en cada millón de operaciones no se presentaran más de 3.4 errores. A este nivel de calidad se le conoce como el nivel de calidad seis sigma y a la metodología creada para lograr este objetivo de calidad se le conoce como **Seis Sigma**.

Una organización puede emprender dos tipos de proyectos Seis Sigma:

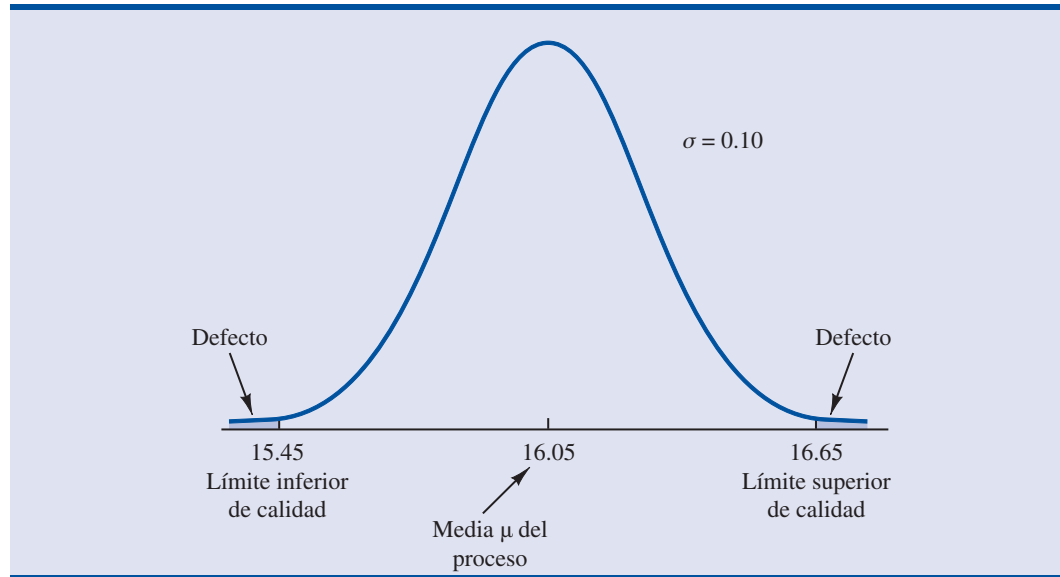
- DMAIC (Definir, Evaluar, Analizar, Mejorar y Controlar) como ayuda para rediseñar procesos ya existentes.
- DFSS (Diseño para Seis sigma) para diseñar nuevos productos, procesos o servicios.

Para ayudar en el rediseño de procesos ya existentes y en el diseño de nuevos procesos, Seis Sigma hace hincapié en el análisis estadístico y en la evaluación cuidadosa. Actualmente, Seis Sigma es una herramienta importante para ayudar a las organizaciones a alcanzar niveles Baldrige de desempeño en negocios y muchos de los examinadores del Baldrige consideran a Seis Sigma como un método ideal para poner en marcha programas de mejoramiento de Baldrige.

**Límites de Seis Sigma y defectos por millón de operaciones** En la terminología de Seis Sigma, un *defecto* es un error que llega al cliente. El proceso Seis Sigma define desempeño de calidad en términos de defectos por millones de operaciones (dpmo). Como ya se indicó, Seis sigma representa un nivel de calidad de por lo menos 3.4 dpmo. Para ilustrar cómo se evalúa este nivel de calidad se tomará como ejemplo un caso de la empresa empacadora KJW.

KJW tiene una línea de producción en la que llena paquetes de cereal. En este proceso, la media es  $\mu = 16.05$  onzas y la desviación estándar es  $\sigma = 0.10$  onzas. Suponga que los pesos de llenado siguen una distribución normal. En la figura 20.1 se muestra la distribución de los pesos de llenado. Suponga que los directivos consideran como límites de calidad aceptables para este proceso de 15.45 a 16.65 onzas. Por tanto, todo paquete de cereal que contenga menos que 15.45

**FIGURA 20.1** DISTRIBUCIÓN NORMAL DE LOS PESOS DE LLENADO DE LOS PAQUETES DE CEREALES, LA MEDIA ES  $\mu = 16.05$

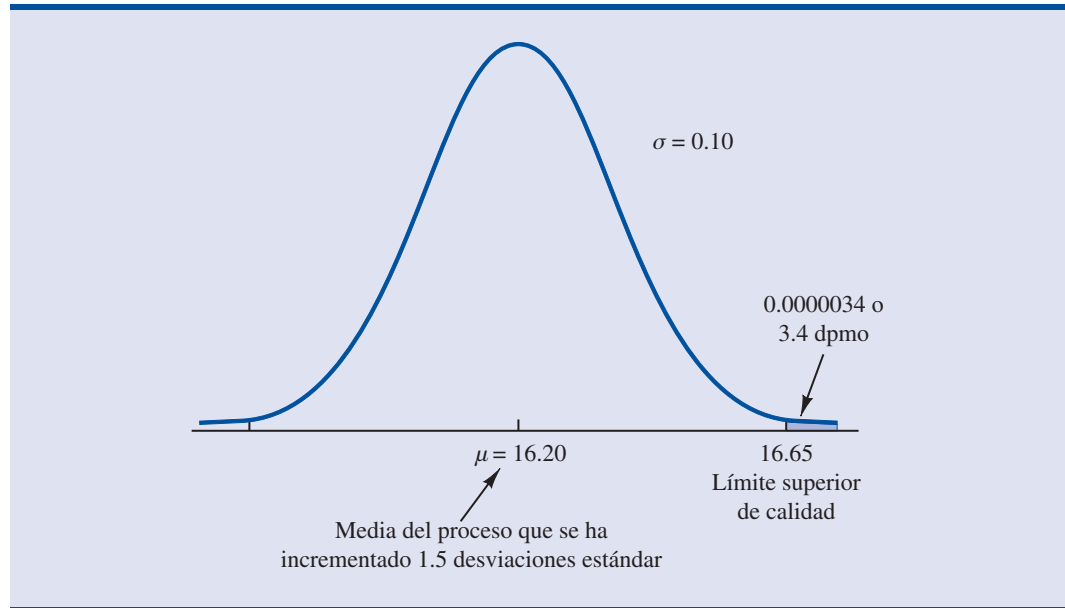


o más que 16.65 onzas será considerado como defecto. Mediante Excel o Minitab se puede mostrar que 99.999998% de los paquetes llenados pesará entre  $16.05 - 6(0.10) = 15.45$  onzas y  $16.05 + 6(0.10) = 16.65$  onzas. En otras palabras, sólo 0.0000002% de los paquetes llenados contendrán menos de 15.45 onzas o más de 16.65 onzas. Por tanto, la posibilidad de que en este proceso de llenado, un paquete de cereal sea defectuoso parece ser extremadamente pequeña, ya que en promedio sólo 2 paquetes de cada 10 millones serán defectuosos.

Motorola se cercioró, en sus primeros trabajos con Seis Sigma, de que la media de un proceso se puede desplazar en promedio hasta 1.5 desviaciones estándar. Por ejemplo, suponga que la media en el proceso de KJW aumente en 1.5 desviaciones estándar, es decir  $1.5(0.10) = 0.15$  onzas. Con este desplazamiento, la distribución normal de los pesos de llenado tendrá como centro  $\mu = 16.05 + 0.15 = 16.20$  onzas. Cuando la media del proceso es  $\mu = 16.05$  onzas, la probabilidad de obtener un paquete de cereal que pese más de 16.65 onzas es extremadamente pequeña. Pero, ¿cuál es esta probabilidad si la media se desplaza a 16.20 onzas? En la figura 20.2 se muestra que en este caso, el límite superior de calidad, 16.65 se encuentra a 4.5 desviaciones estándar a la derecha de la nueva media 16.20 onzas. En Excel o Minitab se ve que con esta media, la probabilidad de que un paquete pese más de 16.65 onzas es 0.0000034. Por tanto, si la media del proceso se desplaza hacia arriba 1.5 desviaciones estándar, aproximadamente  $1\,000\,000(0.0000034) = 3.4$  paquetes de cereal sobrepasarán el límite superior de 16.65 onzas. En la terminología de Seis Sigma, se dice que el nivel de calidad del proceso es de 3.4 defectos por millón de operaciones. Si los directivos de KJW consideran que 15.45 a 16.65 onzas son límites de calidad aceptables, este proceso de llenado de KJW será considerado un proceso Seis Sigma. Por tanto, si la media del proceso permanece a no más de 1.5 desviaciones estándar de la media deseada  $\mu = 16.05$  onzas, se pueden esperar como máximo 3.4 paquetes defectuosos por millón de paquetes llenados.

Las organizaciones que desean alcanzar y mantener un nivel de calidad Seis Sigma deben poner especial cuidado en emplear métodos para la vigilancia y conservación de la calidad. El *aseguramiento de la calidad* se refiere a todo el conjunto de políticas, procedimientos y lineamientos establecidos por la organización para alcanzar y mantener la calidad. El aseguramiento de la calidad consiste en dos funciones principales: ingeniería de calidad y control de calidad. El objeto de la *ingeniería de calidad* es incluir la calidad en el diseño de los productos y procesos e identificar los problemas de calidad antes de la producción. El **control de calidad** consiste en una se-

**FIGURA 20.2** DISTRIBUCIÓN NORMAL DE LOS PESOS DE LLENADO DE PAQUETES DE CEREAL, LA MEDIA DEL PROCESO ES  $\mu = 16.20$



rie de inspecciones y mediciones usadas para determinar si se están satisfaciendo los estándares de calidad. Si no es el caso, se pueden tomar medidas correctivas o preventivas para alcanzar y mantener la conformidad. En las dos secciones siguientes se presentan dos métodos estadísticos que se usan en el control de calidad. En el primero, el *control estadístico de procesos*, se emplean representaciones gráficas conocidas como cartas de control para monitorear un proceso; el objetivo es determinar si puede continuar el proceso o si se deben tomar medidas correctivas para lograr el nivel de calidad deseado. El segundo método, el *muestreo de aceptación*, se emplea cuando la decisión de aceptar o rechazar un conjunto de artículos tiene que basarse en la calidad encontrada en una muestra.

## 20.2

## Control estadístico de procesos

En esta sección se estudiarán procesos de control de calidad que se emplean en los procesos de producción en que los bienes se producen de manera continua. Con base en una muestra y en la inspección del producto del proceso se decide si se puede continuar con el proceso de producción o si es necesario ajustarlo para que los artículos o los bienes producidos estén dentro de los estándares de calidad aceptables.

Aunque se cuente con estándares altos en las operaciones de fabricación y de producción, invariablemente habrá herramientas y maquinaria que se desgastan, vibraciones que hagan que se desajuste la maquinaria, materiales empleados que puedan presentar anomalías y operadores que cometan errores. Todos estos factores suelen dar como resultado un producto de mala calidad. Por fortuna, existen procedimientos para vigilar la calidad de los productos, mediante los cuales se puede detectar oportunamente una mala calidad y ajustar o corregir el proceso de fabricación.

Si las variaciones en la calidad del producto se deben a **causas asignables** como desgaste de las herramientas, ajuste incorrecto de la maquinaria, materia prima de mala calidad o errores del operador, es necesario ajustar o corregir el proceso lo antes posible. Por otro lado, si las variaciones en la calidad del producto se deben a lo que se conoce como **causas comunes** —es decir, variaciones que se presentan de manera aleatoria, como variaciones en la temperatura, la humedad, etc., causas que no puede controlar el fabricante—, no es necesario ajustar el proceso. El objetivo

*Uno de los conceptos más importantes en el movimiento de administración de la calidad total es la mejora continua. El principal objetivo de una carta de control es mejorar la calidad.*



**TABLA 20.1** RESULTADOS DEL CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESOS

		Situación del proceso de producción	
		$H_0$ es verdadera	$H_0$ es falsa
Decisión	Que continúe el proceso	El proceso está bajo control Decisión correcta	El proceso está fuera de control Error tipo II (dejar continuar un proceso que está fuera de control)
	Ajustar el proceso	Error tipo I (ajustar un proceso que se encuentra bajo control)	Decisión correcta

principal del control estadístico de procesos es determinar si las variaciones en el producto se deben a causas asignables o a causas comunes.

Cuando se detectan causas asignables se dice que el proceso está *fuera de control*. En tales casos se toman medidas correctivas para hacer que el proceso regrese a los niveles de calidad aceptables. Si las variaciones que se observan en el producto de un proceso de fabricación se deben únicamente a causas comunes, se concluye que el producto se encuentra *bajo control estadístico* o simplemente *bajo control*; en esos casos no es necesario hacer modificación o ajuste alguno.

Los métodos estadísticos para el control de procesos se basan en la metodología de las pruebas de hipótesis, presentada en el capítulo 9. La hipótesis nula  $H_0$  se formula considerando que el proceso de producción está bajo control. La hipótesis alternativa  $H_a$  se formula considerando que el proceso de producción está fuera de control. En la tabla 20.1 se muestra cómo se toman las decisiones correctas de dejar que continúe un proceso que está bajo control o de ajustar un proceso que está fuera de control. Como ocurre con las demás pruebas de hipótesis, aquí también es posible cometer un error tipo I (ajustar un proceso que está bajo control) o un error tipo II (permitir que continúe un proceso que está fuera de control).

**Cartas de control**

Las **cartas de control** constituyen la base para decidir si las variaciones en el producto se deben a causas comunes (en control) o causas asignables (fuera de control). Siempre que se detecte que un proceso está fuera de control es necesario realizar ajustes o tomar medidas correctivas que hagan que el proceso regrese a la situación bajo control.

Las cartas de control se clasifican de acuerdo con el tipo de datos que contienen. Se usa una **carta  $\bar{x}$**  cuando la calidad del producto de un proceso se mide en términos de una variable, como longitud, peso, temperatura, etc. En tal caso, la decisión de dejar continuar el proceso de producción o de ajustarlo se basa en el valor de la media hallada en una muestra del producto. Para introducir algunos de los conceptos que son comunes a todas las cartas de control, se considerarán algunos de los rasgos característicos de una carta  $\bar{x}$ .

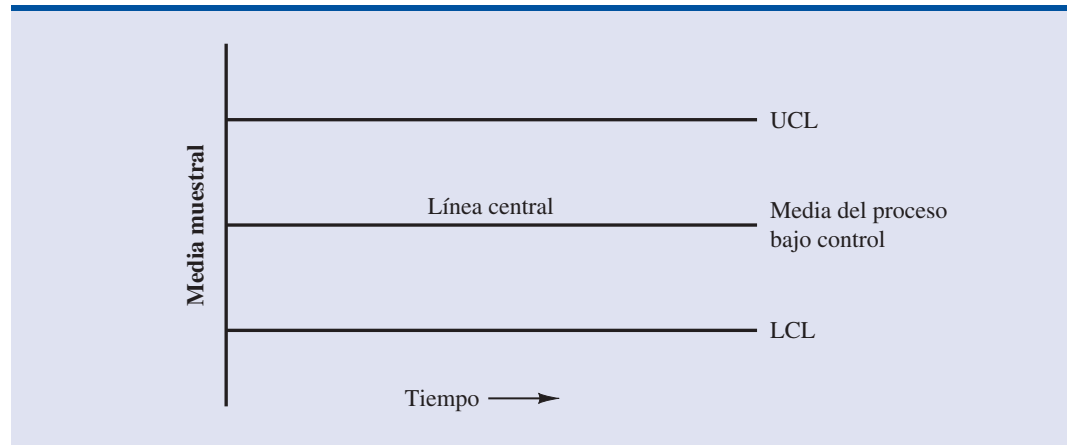
En la figura 20.3 se presenta la estructura general de una carta  $\bar{x}$ . La línea central que se observa en esta carta corresponde a la media del proceso, cuando el proceso está *bajo control*. La línea vertical identifica la escala de medición para la variable de interés. Cada vez que se toma una muestra del proceso de producción, se obtiene el valor de su media muestral  $\bar{x}$  y se grafica el punto correspondiente al valor de  $\bar{x}$  en la carta de control.

Las dos líneas rotuladas como UCL y LCL sirven para determinar si el proceso está bajo control o fuera de control. A estas líneas se les llama *límite de control superior* y *límite de control inferior*, respectivamente. Estos límites se eligen de manera que cuando el proceso esté bajo control exista una gran probabilidad de que los valores de  $\bar{x}$  estén entre estos dos límites. Si hay valores que estén fuera de los límites de control, éstos serán evidencias estadísticas claras de que el proceso se encuentra fuera de control y que es necesario tomar medidas correctivas.

A medida que pasa el tiempo, se van graficando más y más puntos en la carta de control. El orden en el que se van agregando estos puntos es de izquierda a derecha, a medida que se van toman-

Los procedimientos de control de procesos están estrechamente relacionados con los procedimientos de prueba de hipótesis, ya antes vistos en este libro. Las cartas de control permiten realizar sobre la marcha pruebas de la hipótesis de que el proceso está bajo control.

A las cartas de control que se basan en datos que se pueden medir en una escala continua se les llama cartas de control de variables. Las cartas  $\bar{x}$  son cartas de control de variables.

FIGURA 20.3 ESTRUCTURA DE UNA CARTA  $\bar{x}$ 

do las muestras del proceso. En esencia, cada vez que se grafica un nuevo punto en una carta de control, se está realizando una prueba de hipótesis para determinar si el proceso está bajo control.

Además de las cartas  $\bar{x}$  se pueden usar otras cartas, como cartas para monitorear el rango de las mediciones en la muestra (**cartas  $R$** ) o para monitorear la proporción de defectos en la muestra (**cartas  $p$** ) o para monitorear la cantidad de defectos en la muestra (**cartas  $np$** ). En todos estos casos, las cartas de control tienen una línea inferior de control (LCL, por sus siglas en inglés), una línea central y una línea superior de control (UCL por sus siglas en inglés) como la carta  $\bar{x}$  de la figura 20.3. La principal diferencia entre estas cartas es la que se mide en el eje vertical; por ejemplo, en una carta  $p$  la escala de medición, en lugar de denotar la media muestral, denota la proporción de artículos defectuosos existentes en una muestra. A continuación se ilustrará la construcción y el uso de las cartas  $\bar{x}$ , de las cartas  $R$ , de las cartas  $p$  y de las cartas  $np$ .

### Cartas $\bar{x}$ : media y desviaciones estándar del proceso conocidas

Para ilustrar la construcción de una carta  $\bar{x}$  se empleará el ejemplo de la empacadora KJW. Recuerde que la empresa KJW, cuenta con una de sus líneas de producción en la que llena paquetes de cereal. Cuando el proceso se desarrolla correctamente —y por tanto se encuentra bajo control— el peso medio de llenado es  $\mu = 16.05$  onzas y la desviación estándar del proceso es  $\sigma = 0.10$  onzas. Se supone, también, que los pesos de llenado siguen una distribución normal. En la figura 20.4 se muestra esta distribución.

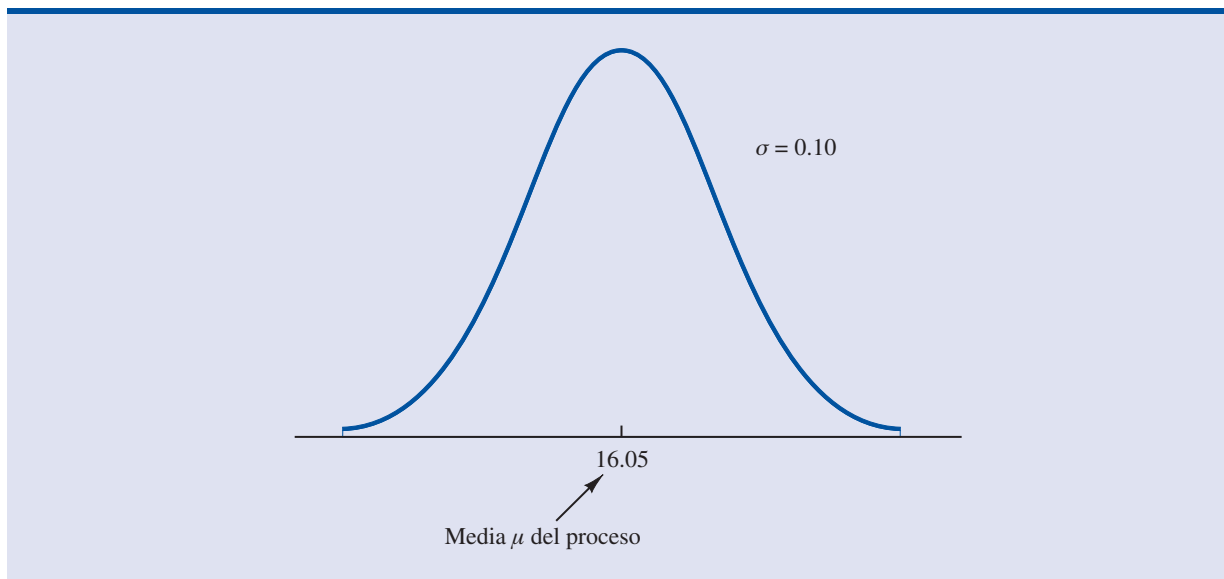
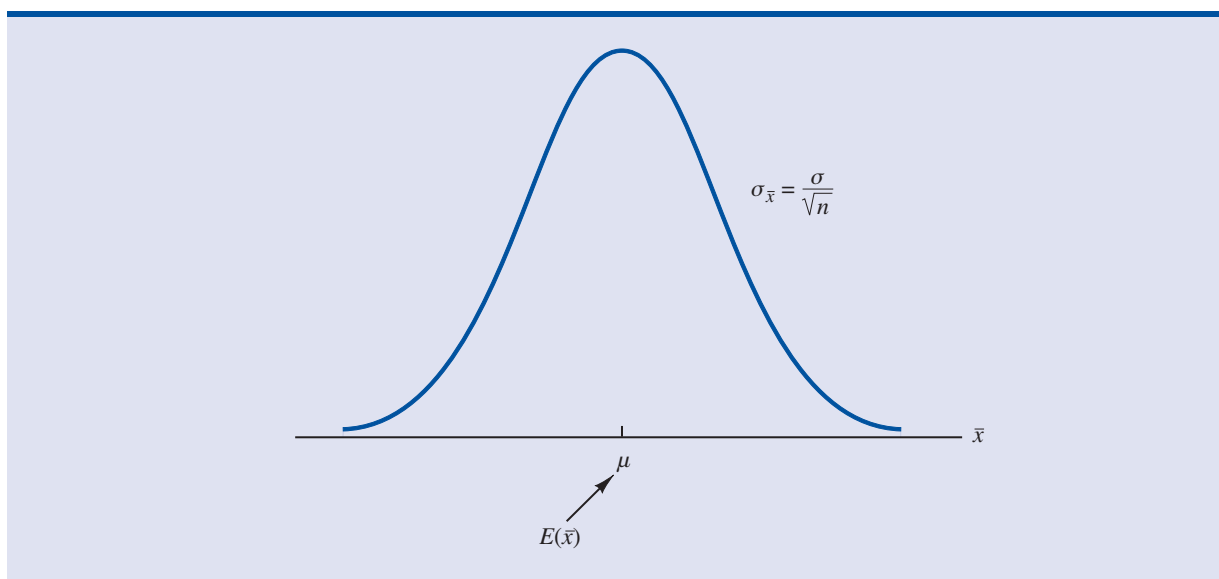
Para determinar la variación que puede esperarse en los valores de  $\bar{x}$  cuando el proceso está bajo control se usa la distribución muestral de  $\bar{x}$ , vista en el capítulo 7. Se recuerdan brevemente, las propiedades de la distribución muestral de  $\bar{x}$ . recuerde que el valor esperado o la media de los valores de  $\bar{x}$  es igual a  $\mu$ , el peso medio de llenado si la línea de producción está bajo control. Si las muestras son de tamaño  $n$ , la ecuación para obtener la desviación estándar de  $\bar{x}$ , que se conoce como error estándar de la media, es

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (20.1)$$

Además, como los pesos de llenado están distribuidos normalmente, para cualquier tamaño de muestra, la distribución muestral de  $\bar{x}$  es una distribución normal. De manera que la distribución muestral de  $\bar{x}$  es una distribución normal con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma_{\bar{x}}$ . En la figura 20.5 se presenta esta distribución.

La distribución muestral de  $\bar{x}$  se usa para determinar cuáles son valores razonables de  $\bar{x}$  cuando el proceso se halla bajo control. En el control de calidad se suele considerar como razonable todo valor de  $\bar{x}$  que no se aleje de la media, hacia arriba o hacia abajo, más de 3 desviaciones estándar o errores estándar. Recuerde que al estudiar la distribución de probabilidad normal se vio



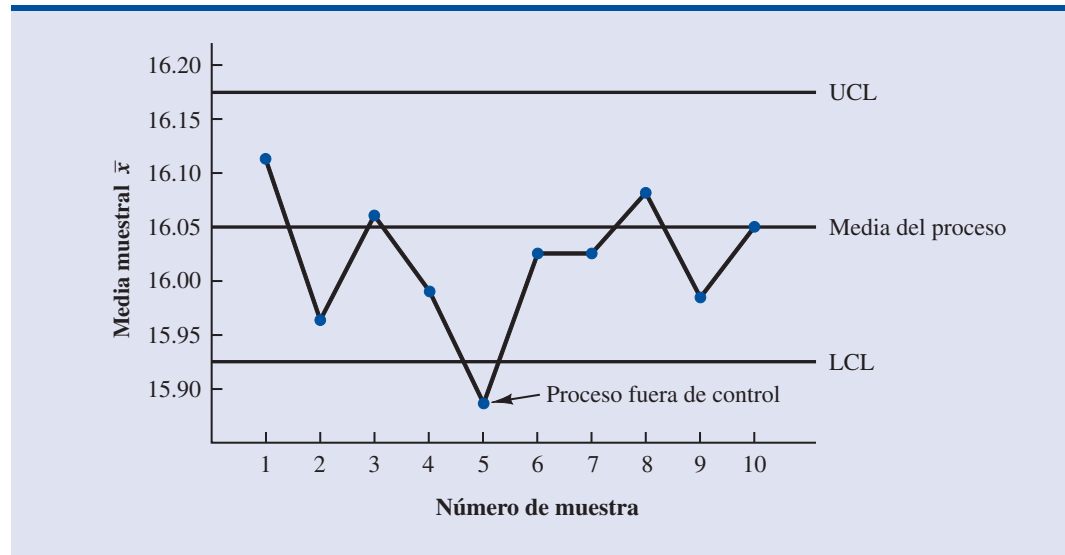
**FIGURA 20.4** DISTRIBUCIÓN NORMAL DE LOS PESOS DE LLENADO DE LOS PAQUETES DE CEREAL**FIGURA 20.5** DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE  $\bar{x}$  PARA UNA MUESTRA DE  $n$  PESOS DE LLENADO

que aproximadamente 99.7% de los valores de una variable aleatoria que tengan una distribución normal se encuentran a no más de  $\pm 3$  desviaciones estándar de su media. Por tanto, si un valor de  $\bar{x}$  se encuentra dentro del intervalo de  $\mu - 3\sigma_{\bar{x}}$  a  $\mu + 3\sigma_{\bar{x}}$  se admitirá que el proceso está bajo control. En resumen, los límites de control en una carta  $\bar{x}$  son los siguientes:

LÍMITES DE CONTROL EN UNA CARTA  $\bar{x}$  : MEDIA Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR DEL PROCESO CONOCIDAS

$$UCL = \mu + 3\sigma_{\bar{x}} \quad (20.2)$$

$$LCL = \mu - 3\sigma_{\bar{x}} \quad (20.3)$$

**FIGURA 20.6** CARTA  $\bar{x}$  DEL PROCESO DE LLENADO DE LOS PAQUETES DE CEREAL

De regreso al ejemplo de la empresa KJW, la distribución de los pesos de llenado se muestra en la figura 20.4 y la distribución muestral de  $\bar{x}$  se muestra en la figura 20.5. Suponga que periódicamente se toman seis paquetes del proceso de llenado y se calcula su media muestral para determinar si el proceso está bajo control o fuera de control. Mediante la ecuación (20.1), se encuentra que el error estándar de la media es  $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n} = 0.10/\sqrt{6} = 0.04$ . Por tanto, como la media del proceso es 16.05, los límites de control son  $UCL = 16.05 + 3(0.04) = 16.17$  y  $LCL = 16.05 - 3(0.04) = 15.93$ . En la figura 20.6 se muestra la carta de control con los resultados de 10 muestras tomadas a lo largo de un periodo de 10 horas. Para facilitar la lectura, los números correspondientes a las muestras se han colocado en la parte inferior de la carta.

Observe que la media de la quinta muestra indica que el proceso está fuera de control. La quinta media muestral se encuentra abajo del LCL (límite de control inferior), lo cual indica que existen causas asignables que ocasionan variación de la calidad del producto y que el llenado se está realizando con una cantidad menor a la estipulada. En este momento, se toman medidas correctivas para hacer que el proceso vuelva a estar bajo control. El hecho de que los demás puntos de la carta  $\bar{x}$  se encuentren dentro de los límites de control inferior y superior, indican que la acción correctiva fue adecuada.

### Cartas $\bar{x}$ : media y desviaciones estándar del proceso desconocidas

Con el ejemplo de la empresa KJW se mostró cómo elaborar una carta  $\bar{x}$  cuando se conocen la media y la desviación estándar del proceso. Sin embargo, en la mayoría de los casos es necesario estimar la media y la desviación estándar del proceso a partir de muestras tomadas del proceso cuando éste se encuentre bajo control. Por ejemplo, durante 10 días en los que el proceso está bajo control, KJW puede tomar muestras aleatorias de 5 paquetes por las mañanas y 5 por las tardes, calcular la media y la desviación estándar de cada muestra, sacar después los promedios de las medias y de las desviaciones estándar y usarlos para elaborar cartas de control, tanto para la media como para la desviación estándar del proceso.

En la práctica, para monitorear la variabilidad del proceso suele emplearse el rango en lugar de la desviación estándar, ya que el rango es más fácil de calcular. El rango puede servir para obtener una buena estimación de la desviación estándar del proceso; de manera que, mediante algunos cálculos, puede emplearse para trazar los límites inferior y superior de las cartas  $\bar{x}$ . Para ilustrar esto, se tomará un ejemplo de la empresa Jensen Computer Supplies, Inc.

Jensen Computer Supplies (JCS) fabrica discos para computadora de 3.5 pulgadas de diámetro. Su proceso de producción acaba de ser ajustado, de manera que funciona bajo control. Su-

*Es importante controlar tanto la media como la desviación estándar del proceso.*

TABLA 20.2 DATOS DEL PROBLEMA DE JENSEN COMPUTER SUPPLIES

Número de la muestra	Observaciones					Media muestral $\bar{x}_j$	Rango muestral $R_j$
1	3.5056	3.5086	3.5144	3.5009	3.5030	3.5065	0.0135
2	3.4882	3.5085	3.4884	3.5250	3.5031	3.5026	0.0368
3	3.4897	3.4898	3.4995	3.5130	3.4969	3.4978	0.0233
4	3.5153	3.5120	3.4989	3.4900	3.4837	3.5000	0.0316
5	3.5059	3.5113	3.5011	3.4773	3.4801	3.4951	0.0340
6	3.4977	3.4961	3.5050	3.5014	3.5060	3.5012	0.0099
7	3.4910	3.4913	3.4976	3.4831	3.5044	3.4935	0.0213
8	3.4991	3.4853	3.4830	3.5083	3.5094	3.4970	0.0264
9	3.5099	3.5162	3.5228	3.4958	3.5004	3.5090	0.0270
10	3.4880	3.5015	3.5094	3.5102	3.5146	3.5047	0.0266
11	3.4881	3.4887	3.5141	3.5175	3.4863	3.4989	0.0312
12	3.5043	3.4867	3.4946	3.5018	3.4784	3.4932	0.0259
13	3.5043	3.4769	3.4944	3.5014	3.4904	3.4935	0.0274
14	3.5004	3.5030	3.5082	3.5045	3.5234	3.5079	0.0230
15	3.4846	3.4938	3.5065	3.5089	3.5011	3.4990	0.0243
16	3.5145	3.4832	3.5188	3.4935	3.4989	3.5018	0.0356
17	3.5004	3.5042	3.4954	3.5020	3.4889	3.4982	0.0153
18	3.4959	3.4823	3.4964	3.5082	3.4871	3.4940	0.0259
19	3.4878	3.4864	3.4960	3.5070	3.4984	3.4951	0.0206
20	3.4969	3.5144	3.5053	3.4985	3.4885	3.5007	0.0259



ponga que durante la primera hora de operación se toma una muestra aleatoria de cinco discos, durante la segunda hora de operación se toma otra muestra aleatoria de cinco discos y así sucesivamente, hasta que se tienen 20 muestras. En la tabla 20.2 se presentan los diámetros de las muestras así como la media  $\bar{x}_j$  y el rango  $R_j$  de cada muestra.

La estimación de la media del proceso  $\mu$  esta dada por la media muestral general.

#### MEDIA MUESTRAL GENERAL

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \cdots + \bar{x}_k}{k} \quad (20.4)$$

donde

$\bar{x}_j$  = media de la muestra  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$

$k$  = número de muestras

La media muestral general de los datos de JCS, que se presentan en la tabla 20.2, es  $\bar{\bar{x}} = 3.4995$ . Este valor será la línea central de la carta  $\bar{x}$ . El rango de cada muestra es simplemente la diferencia entre el valor mayor y el valor menor de cada muestra. El rango promedio de las  $k$  muestras se calcula como se indica a continuación.

#### RANGO PROMEDIO

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \cdots + R_k}{k} \quad (20.5)$$

donde

$R_j$  = rango de la muestra  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$   
 $k$  = número de muestras

El rango promedio de los datos de JCS, que se presentan en la tabla 20.2, es  $\bar{R} = 0.0253$ .

En la sección anterior se mostró que los límites de control superior e inferior de la carta  $\bar{x}$  son

$$\bar{x} \pm 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (20.6)$$

*La media muestral general  $\bar{\bar{x}}$  se usa para estimar  $\mu$  y los rangos muestrales se usan para obtener una estimación de  $\sigma$ .*

Por tanto, para obtener los límites de control para la carta  $\bar{x}$  es necesario estimar  $\mu$  y  $\sigma$ , la media y la desviación estándar del proceso. Una estimación de  $\mu$  es dada por  $\bar{\bar{x}}$ , y una estimación de  $\sigma$  se obtiene mediante los datos de los rangos.

Se puede demostrar que el promedio de los rangos dividido entre  $d_2$ , una constante que depende del tamaño  $n$  de la muestra, es una estimación de la desviación estándar  $\sigma$  del proceso. Es decir,

$$\text{Estimador de } \sigma = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (20.7)$$

En el *Manual on Presentation of Data and Control Chart Analysis* de la *American Society for Testing and Materials* se publican los valores de  $d_2$  que se muestran en la tabla 20.3. Por ejemplo, para  $n = 5$ ,  $d_2 = 2.326$  y la estimación de  $s$  es el rango promedio dividido entre 2.326. Si en la expresión (20.6) se sustituye  $s$  por  $\bar{R}/d_2$ , los límites de control de la carta  $\bar{x}$  se pueden expresar como

$$\bar{\bar{x}} \pm 3 \frac{\bar{R}/d_2}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} \pm \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} \bar{R} = \bar{\bar{x}} \pm A_2 \bar{R} \quad (20.8)$$

Observe que  $A_2 = 3/(d_2 \sqrt{n})$  es una constante que depende únicamente del tamaño de la muestra; los valores de  $A_2$  también se encuentran en la tabla 20.3. Para  $n = 5$ ,  $A_2 = 0.577$ ; por tanto, los límites de control en la carta  $\bar{x}$  serán

$$3.4995 \pm (0.577)(0.0253) = 3.4995 \pm 0.0146$$

Por tanto, UCL = 3.514 y LCL = 3.485.

En la figura 20.7 se muestra la carta  $\bar{x}$  obtenida para el problema de Jensen Computer Supplies. Esta carta se obtuvo con los datos de la tabla 20.2 y la rutina para cartas de control de Minitab. La línea central se encuentra en el valor de la media muestral general  $\bar{\bar{x}} = 3.4995$ . El límite de control superior (UCL) es 3.514 y el límite de control inferior (LCL) es 3.485. En la carta  $\bar{x}$  aparecen las 20 medias muestrales que se fueron graficando. Como todas las medias muestrales se encuentran dentro de los límites de control, se confirma que el proceso ha estado bajo control durante el periodo de muestreo.

## Cartas $R$

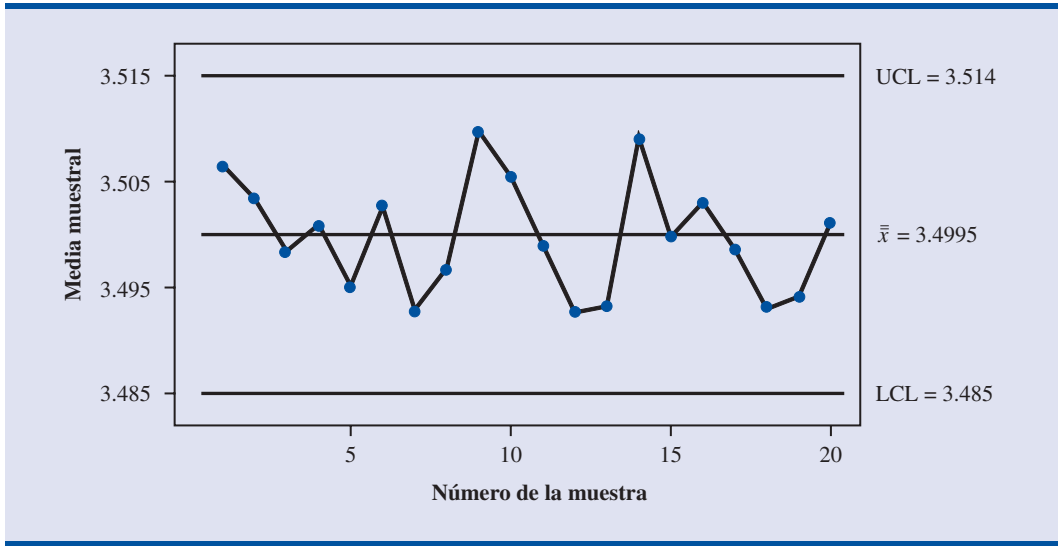
Ahora se estudiarán las cartas de rango (cartas  $R$ ) que se emplean para controlar la variabilidad del proceso. Para elaborar una carta  $R$  es necesario considerar el rango de una muestra como una variable aleatoria con su media y desviación estándar propias. El rango promedio  $\bar{R}$  proporciona

**TABLA 20.3** FACTORES PARA LAS CARTAS  $\bar{x}$  Y  $R$

Observaciones en la muestra, $n$	$d_2$	$A_2$	$d_3$	$D_3$	$D_4$
2	1.128	1.880	0.853	0	3.267
3	1.693	1.023	0.888	0	2.574
4	2.059	0.729	0.880	0	2.282
5	2.326	0.577	0.864	0	2.114
6	2.534	0.483	0.848	0	2.004
7	2.704	0.419	0.833	0.076	1.924
8	2.847	0.373	0.820	0.136	1.864
9	2.970	0.337	0.808	0.184	1.816
10	3.078	0.308	0.797	0.223	1.777
11	3.173	0.285	0.787	0.256	1.744
12	3.258	0.266	0.778	0.283	1.717
13	3.336	0.249	0.770	0.307	1.693
14	3.407	0.235	0.763	0.328	1.672
15	3.472	0.223	0.756	0.347	1.653
16	3.532	0.212	0.750	0.363	1.637
17	3.588	0.203	0.744	0.378	1.622
18	3.640	0.194	0.739	0.391	1.608
19	3.689	0.187	0.734	0.403	1.597
20	3.735	0.180	0.729	0.415	1.585
21	3.778	0.173	0.724	0.425	1.575
22	3.819	0.167	0.720	0.434	1.566
23	3.858	0.162	0.716	0.443	1.557
24	3.895	0.157	0.712	0.451	1.548
25	3.931	0.153	0.708	0.459	1.541

*Fuente:* Adaptada de la tabla 27 de ASTM STP 15D, *ASTM Manual on Presentation of Data and Control Chart Analysis*. Copyright 1976 American Society for Testing and Materials, Filadelfia, PA. Impreso con autorización.

**FIGURA 20.7** CARTA  $\bar{x}$  PARA EL PROBLEMA DE JENSEN COMPUTER SUPPLIES



una estimación de la media de esta variable aleatoria. Además, se puede demostrar que una estimación de la desviación estándar del rango es

$$\hat{\sigma}_R = d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (20.9)$$

donde  $d_2$  y  $d_3$  son constantes que dependen del tamaño de la muestra, y cuyos valores se encuentran también en la tabla 20.3. Por tanto, el UCL de la carta  $R$  está dado por

$$\bar{R} + 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} \left( 1 + 3 \frac{d_3}{d_2} \right) \quad (20.10)$$

y el LCL es

$$\bar{R} - 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} \left( 1 - 3 \frac{d_3}{d_2} \right) \quad (20.11)$$

Si se hace

$$D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_2} \quad (20.12)$$

$$D_3 = 1 - 3 \frac{d_3}{d_2} \quad (20.13)$$

Los límites de control de la carta  $R$  se expresan como

$$\text{UCL} = \bar{R} D_4 \quad (20.14)$$

$$\text{LCL} = \bar{R} D_3 \quad (20.15)$$

Los valores de  $D_3$  y  $D_4$  se dan también en la tabla 20.3. Observe que para  $n = 5$ ,  $D_3 = 0$  y  $D_4 = 2.114$ . Por tanto, como  $\bar{R} = 0.0253$ , los límites de control son

$$\text{UCL} = 0.0253(2.114) = 0.053$$

$$\text{LCL} = 0.0253(0) = 0$$

*Si la carta  $R$  indica que el proceso está fuera de control, la carta  $\bar{x}$  no deberá interpretarse hasta que la carta  $R$  indique que la variabilidad del proceso está bajo control.*

En la figura 20.8 se muestra la carta  $R$  del problema de Jensen Computer Supplies. Esta carta se obtuvo con los datos de la tabla 20.2 y la rutina para cartas de control de Minitab. La línea central aparece en el valor de la media general de los 20 rangos muestrales,  $\bar{R} = 0.253$ . El UCL es 0.053 y el LCL es 0.000. En la carta  $R$  se observan los 20 rangos muestrales que se fueron graficando. Como los 20 rangos muestrales se encuentran dentro de los límites de control, se confirma que durante el periodo de muestreo el proceso estuvo bajo control.

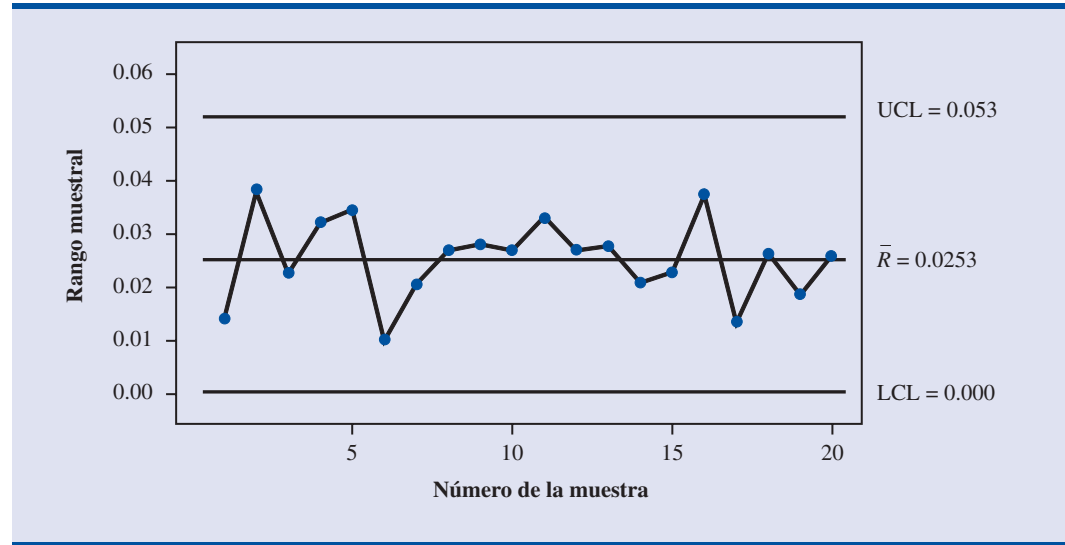
## Cartas $p$

*A las cartas de control que se basan en datos que indican la presencia de un defecto o un número de defectos se les llama cartas de control de atributos. Una carta  $p$  es una carta de control por atributos.*

A continuación se considera el caso en que la calidad del producto se mide a partir de los artículos no defectuosos o los artículos defectuosos. La decisión de dejar que continúe el proceso de producción o que se ajuste se basa en  $\bar{p}$ , la proporción de artículos defectuosos encontrados en la muestra. A la carta de control que se usa para conocer la proporción de defectos se le llama carta  $p$ .

Para ilustrar la elaboración de una carta  $p$ , considere el uso de las máquinas automáticas para la clasificación de las cartas que se emplean en las oficinas de correo. Estas máquinas automáticas leen el código postal que aparece en el sobre y asignan la carta a la ruta de entrega correspondiente. Aun cuando la máquina esté funcionando en forma óptima, algunas de las cartas



**FIGURA 20.8** CARTA  $R$  PARA EL PROBLEMA DE JENSEN COMPUTER SUPPLIES

no son asignadas correctamente. Suponga que cuando la máquina está en operación óptima o bajo control, 3% de las cartas no son asignadas correctamente. Entonces,  $p$ , la proporción de cartas no asignadas correctamente, con el proceso bajo control, es 0.03.

Para determinar la variación que puede esperarse en los valores de  $\bar{p}$ , cuando el proceso está bajo control, se usa la distribución muestral de  $\bar{p}$ , vista en el capítulo 7. Recuerde que el valor esperado, o la media, de  $\bar{p}$ , es  $p$ , la proporción de defectos cuando el proceso está bajo control. Si las muestras son de tamaño  $n$ , la fórmula para calcular la desviación estándar de  $\bar{p}$ , a la cual se le llama error estándar de la proporción, es

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad (20.16)$$

En el capítulo 7 se vio también que la distribución muestral de  $\bar{p}$ , siempre que el tamaño de las muestras sea grande, es aproximable por medio de una distribución normal. El tamaño de la muestra puede considerarse grande siempre que se satisfagan las dos condiciones siguientes.

$$\begin{aligned} np &\geq 5 \\ n(1-p) &\geq 5 \end{aligned}$$

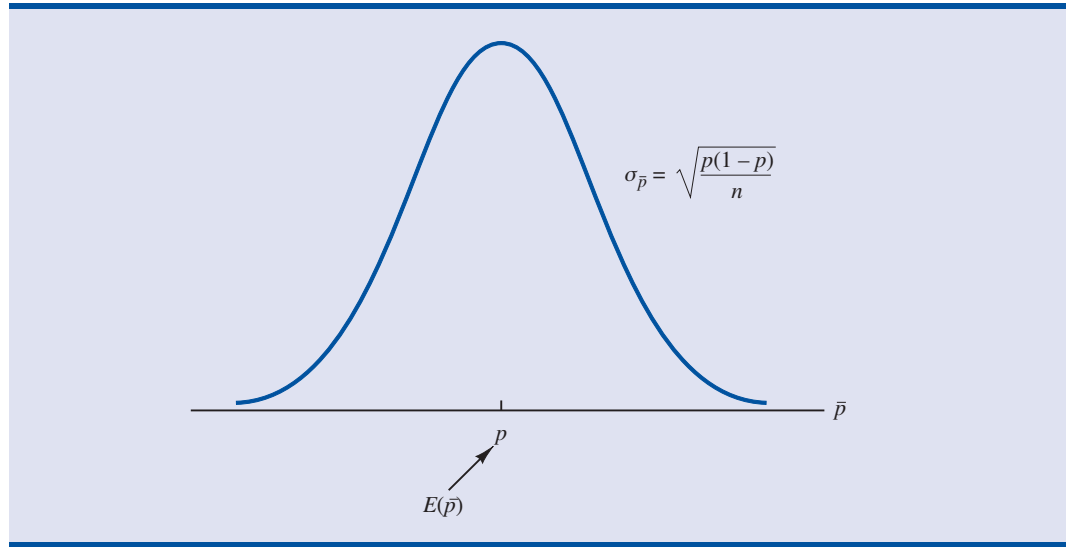
En resumen, siempre que el tamaño de la muestra sea grande, la distribución muestral de  $\bar{p}$  puede aproximarse mediante una distribución normal en que la media es  $p$  y la desviación estándar es  $\sigma_{\bar{p}}$ . Esta distribución se presenta en la figura 20.9.

Para establecer los límites de control en una carta  $p$ , se sigue el mismo procedimiento que se usó para establecer los límites de control en una carta  $\bar{x}$ . Es decir, los límites de control se establecen a 3 desviaciones estándar, o errores estándar, arriba y abajo de la proporción de defectos, cuando el proceso está bajo control. Por tanto, se tienen los siguientes límites de control.

LÍMITES DE CONTROL PARA UNA CARTA  $p$

$$UCL = p + 3\sigma_{\bar{p}} \quad (20.17)$$

$$LCL = p - 3\sigma_{\bar{p}} \quad (20.18)$$

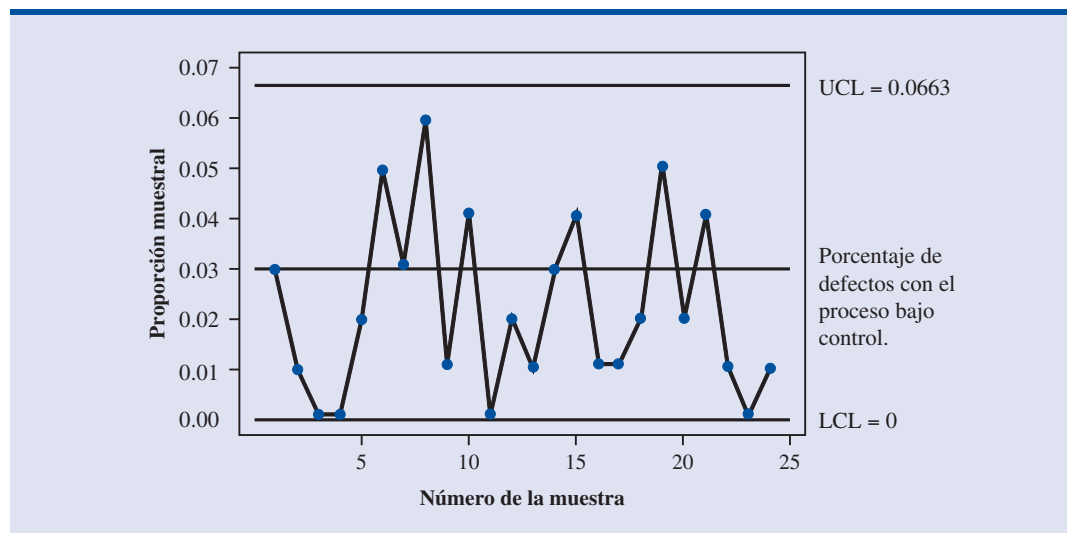
**FIGURA 20.9** DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE  $\bar{p}$ 

Como  $p = 0.03$  y las muestras son de tamaño  $n = 200$ , al emplear la ecuación (20.16) se obtiene el error estándar, que es

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{0.03(1-0.03)}{200}} = 0.0121$$

Por tanto, los límites de control son,  $UCL = 0.03 + 3(0.0121) = 0.0663$  y  $LCL = 0.03 - 3(0.0121) = -0.0063$ . Cuando con la ecuación (20.18) se obtiene un valor negativo para el LCL, se toma al cero como LCL para la carta de control.

La figura 20.10 es la carta de control del proceso de clasificación de las cartas. Los puntos muestreados son las proporciones muestrales de defectos halladas en las muestras de cartas tomadas del proceso. Todos los puntos se encuentran dentro de los límites de control, lo que indica que no hay evidencias para concluir que el proceso de clasificación de las cartas se encuentre fuera de control.

**FIGURA 20.10** CARTA  $p$  PARA LA PROPORCIÓN DE DEFECTOS EN EL PROCESO DE CLASIFICACIÓN DE LAS CARTAS

Cuando no se conoce la proporción de defectos en un proceso que se encuentra bajo control, este valor se puede estimar a partir de datos muestrales. Suponga, por ejemplo, que de un proceso que se encuentra bajo control, se toman  $k$  muestras de tamaño  $n$ . Después se determina la proporción de defectos en cada muestra. Al considerar todos los datos obtenidos como una sola muestra grande, se calcula la proporción de artículos defectuosos en todos estos datos, y este valor se usa para estimar  $p$ , la proporción de artículos defectuosos observada con el proceso bajo control. Observe que dicha estimación de  $p$  también permite calcular el error estándar de la proporción, con lo que ya se pueden determinar los límites de control inferior y superior.

### Cartas $np$

Una carta  $np$  es una carta de control que se usa para determinar el número de artículos defectuosos en una muestra. Aquí,  $n$  es el tamaño de la muestra y  $p$  es la probabilidad de observar un artículo defectuoso con el proceso bajo control. Siempre que el tamaño de la muestra sea grande, es decir, siempre que  $np \geq 5$  y  $n(1 - p) \geq 5$ , la distribución del número de artículos defectuosos en una muestra de tamaño  $n$  puede aproximarse mediante una distribución normal con media  $np$  y desviación estándar  $\sqrt{np(1 - p)}$ . Entonces, en el ejemplo de la clasificación de las cartas, como  $n = 200$  y  $p = 0.03$ , el número de artículos defectuosos observados en una muestra de 200 cartas se aproxima mediante una distribución normal con media de  $200(0.03) = 6$  y la desviación estándar  $\sqrt{200(0.03)(0.97)} = 2.4125$ .

Los límites de control de una carta  $np$  se fijan a 3 desviaciones estándar arriba y abajo del número de artículos defectuosos esperado con el proceso bajo control. Por tanto, se tienen los límites de control siguientes

#### LÍMITES DE CONTROL EN UNA CARTA $np$

$$UCL = np + 3\sqrt{np(1 - p)} \quad (20.19)$$

$$LCL = np - 3\sqrt{np(1 - p)} \quad (20.20)$$

En el ejemplo de la clasificación de las cartas, como  $p = 0.03$  y  $n = 200$ , los límites de control son  $UCL = 6 + 3(2.4125) = 13.2375$  y  $LCL = 6 - 3(2.4125) = -1.2375$ . Cuando el LCL es negativo, como LCL de la carta de control se toma igual a cero. Por tanto, si el número de cartas que no se asigna a la ruta correcta es mayor que 13, se concluye que el proceso está fuera de control.

La información que proporciona una carta  $np$  es similar a la información que proporciona una carta  $p$ ; la única diferencia es que la carta  $np$  es la gráfica del número de artículos defectuosos observados, mientras que una carta  $p$  es la gráfica de la proporción de artículos defectuosos observados. De manera que si se concluye que un proceso está fuera de control, con base en una carta  $p$ , también se concluirá apoyándose en una carta  $np$  que el proceso está fuera de control.

### Interpretación de las cartas de control

La ubicación y el patrón que siguen los puntos en una carta de control permiten determinar, con una pequeña probabilidad de error, si un proceso se encuentra estadísticamente bajo control. Una primera indicación de que un proceso pueda estar fuera de control es que uno de los puntos de los datos se encuentre fuera de los límites de control, como ocurre con el punto 5 de la figura 20.6. Hallar uno de estos puntos es evidencia estadística de que el proceso se encuentra fuera de control. En tales casos deberán tomarse medidas correctivas tan pronto como sea posible.

Además de la presencia de puntos fuera de los límites de control, hay ciertos patrones de los puntos, dentro de los límites de control, que pueden ser señales que adviertan de problemas de control de calidad. Por ejemplo, suponga que todos los puntos están dentro de los límites de con-

*Aun cuando todos los puntos se encuentren entre los límites de control inferior y superior, el proceso puede encontrarse fuera de control. Tendencias en los puntos muestrales o secuencias inusualmente largas de puntos que se encuentren sobre o bajo la línea central, también pueden indicar una situación fuera de control.*

trol, pero que muchos de ellos se encuentran de un mismo lado de la línea central. Este patrón puede indicar que existe algún problema en el equipo, que ha habido una variación en los materiales o que alguna otra causa asignable ha ocasionado una variación de la calidad. Será necesario hacer una cuidadosa investigación del proceso para determinar si la calidad ha variado.

Otro patrón a observar en una carta de control es si existe un desplazamiento gradual o una tendencia, a lo largo del tiempo. Por ejemplo, debido al desgaste de las herramientas, las dimensiones en la fabricación de una pieza pueden desviarse gradualmente de las medidas establecidas. Variaciones graduales de la temperatura o de la humedad, el deterioro gradual del equipo, la acumulación de suciedad o el cansancio de un operador pueden ocasionar la aparición de tendencias en las cartas de control. Seis o siete puntos consecutivos que muestren una tendencia deberán ser causa de preocupación, aun cuando todos estos puntos se encuentren dentro de los límites de control. Siempre que se observen tales patrones, deberá revisarse el proceso para determinar si hay algún cambio o desplazamiento en la calidad. Puede que sea necesario tomar medidas correctivas para que el proceso vuelva a estar bajo control.

## NOTAS Y COMENTARIOS

1. Como en las cartas  $\bar{x}$  los límites de control dependen del valor del rango promedio, estos límites no tienen mucho significado a menos que la variabilidad del proceso se encuentre bajo control. En la práctica, la carta  $R$  se elabora antes que la carta  $\bar{x}$ ; si la carta  $R$  indica que la variabilidad del proceso está bajo control, entonces se elabora la carta  $\bar{x}$ . Con la opción de Minitab Xbar-R se obtienen, simultáneamente, la carta  $\bar{x}$  y la carta  $R$ . En el apéndice 20.1 se describen los pasos a seguir con Minitab para obtener estas cartas.
2. Las cartas  $np$  se usan para monitorear un proceso en términos del número de defectos. El nivel de calidad Seis sigma de Motorola tiene como objetivo producir no más de 3.4 defectos por millón de operaciones; este objetivo implica  $p = 0.0000034$ .

## Ejercicios

### Métodos

1. En un proceso que está bajo control, la media es  $\mu = 12.5$  y la desviación estándar es  $\sigma = 0.8$ .
  - a. Elabore la carta de control  $\bar{x}$  para este proceso; el tamaño de las muestras es 4.
  - b. Repita el inciso a con muestras de tamaño 8 y 16.
  - c. ¿Qué pasa con los límites de la carta de control a medida que aumenta el tamaño de la muestra? Analice por qué esto es razonable.
2. En un proceso que está bajo control se toman 25 muestras de tamaño 5. La suma de todos los datos recolectados fue 677.5 libras.
  - a. Dé una estimación de la media del proceso (en términos de libras por unidad) cuando el proceso está bajo control.
  - b. Elabore la carta de control  $\bar{x}$  para este proceso, considere que las muestras son de tamaño 5. Suponga que cuando el proceso está bajo control la desviación estándar del proceso es 0.5 y la media del proceso es la estimación que se obtuvo en el inciso a.
3. Mientras un proceso funcionaba satisfactoriamente se tomaron 25 muestras de 100 artículos cada una. En estas 25 muestras se encontraron 135 artículos defectuosos.
  - a. Dé una estimación de la proporción de defectos que hay cuando el proceso está bajo control.
  - b. ¿Cuál es el error estándar de la proporción si para el control estadístico del proceso se usan muestras de tamaño 100?
  - c. Calcule los límites de control inferior y superior para la carta de control.
4. En un proceso del que se toman 20 muestras de tamaño 8 cada una,  $\bar{\bar{x}} = 28.5$  y  $\bar{R} = 1.6$ . Calcule los límites de control inferior y superior de las cartas  $\bar{x}$  y  $R$  del proceso.

## Aplicaciones

5. Para medir los resultados de un proceso de producción se emplea la temperatura. Cuando el proceso está bajo control, la media del proceso es  $\mu = 128.5$  y la desviación estándar es  $\sigma = 0.4$ .
- Construya la carta  $\bar{x}$  de este proceso con muestras empleadas de tamaño 6.
  - Si los datos que se obtienen de una muestra son los siguientes, ¿el proceso está bajo control?

128.8      128.2      129.1      128.7      128.4      129.2

- Si los datos que se obtienen de una muestra son los siguientes, ¿está bajo control el proceso?

129.3      128.7      128.6      129.2      129.5      129.0

6. En un proceso de control de calidad se vigila el peso por paquete de detergente envasado. Los límites de control estipulados son  $UCL = 20.12$  onzas y  $LCL = 19.90$  onzas. En este proceso de muestreo e inspección se emplean muestras de tamaño 5. Dé la media y la desviación estándar del proceso.
7. La empresa Goodman Tire and Rubber hace pruebas periódicas a sus neumáticos para determinar su desgaste. Para estudiar y controlar el proceso de fabricación, durante varios días y de los diferentes turnos se tomaron 20 muestras, cada una de tres neumáticos radiales. Estos datos se presentan a continuación. Si estos datos se obtuvieron cuando se creía que el proceso estaba bajo control, elabore las cartas  $R$  y  $\bar{x}$ .



Muestra	Desgaste*		
1	31	42	28
2	26	18	35
3	25	30	34
4	17	25	21
5	38	29	35
6	41	42	36
7	21	17	29
8	32	26	28
9	41	34	33
10	29	17	30
11	26	31	40
12	23	19	25
13	17	24	32
14	43	35	17
15	18	25	29
16	30	42	31
17	28	36	32
18	40	29	31
19	18	29	28
20	22	34	26

\*Centésimas de pulgada

8. A lo largo varias semanas de funcionamiento normal, o bajo control, se tomaron 20 muestras, cada una de 150 paquetes de cuerdas sintéticas para raquetas de tenis, y se probó su resistencia a la rotura. De los 3 000 paquetes probados, 141 no satisficieron las especificaciones del fabricante.
- Dé una estimación de la proporción de defectos en el proceso cuando el proceso se encuentra bajo control.
  - Calcule los límites superior e inferior de la carta  $p$ .
  - De acuerdo con los resultados del inciso b, qué conclusiones puede obtener acerca del proceso si al probar una nueva muestra de 150 paquetes se encuentran 12 defectuosos. ¿Existen algunas causas asignables en esta situación?
  - Calcule los límites inferior y superior de la carta  $np$ .

- e. Responda el inciso c, use los resultados del inciso d.  
 f. ¿Qué carta de control convendrá para esta situación? Explique.
9. Un proveedor de la industria automotriz produce pistones para varios modelos de automóviles. Cuando el proceso se encuentra bajo control se toman 20 muestras, cada una de 200 pistones. A continuación se presenta el número de pistones defectuosos hallados en cada muestra.
- |    |    |    |   |   |   |   |    |   |    |
|----|----|----|---|---|---|---|----|---|----|
| 8  | 10 | 6  | 4 | 5 | 7 | 8 | 12 | 8 | 15 |
| 14 | 10 | 10 | 7 | 5 | 8 | 6 | 10 | 4 | 8  |
- a. Dé una estimación de la proporción de defectos en el proceso de fabricación cuando el proceso está bajo control.  
 b. Elabore la carta  $p$  de este proceso, si cada muestra tiene 200 pistones.  
 c. De acuerdo con los resultados del inciso b, ¿cuál es la conclusión si en una muestra de 200 pistones se encuentran 20 defectuosos?  
 d. Calcule los límites superior e inferior de la carta  $np$ .  
 e. Responda el inciso c, use los resultados del inciso d.

## 20.3

## Muestreo de aceptación

En el muestreo de aceptación los objetos de interés pueden ser entregas de materias primas o de partes o de bienes terminados. Suponga que desea aceptar o rechazar un conjunto de artículos a partir de determinadas características de calidad. En la terminología del control de calidad, al conjunto de artículos se le conoce como **lote**, y el **muestreo de aceptación** es un método estadístico que permite basar la decisión de aceptar o rechazar el lote en la inspección de una muestra de los artículos del lote.

En la figura 20.11 se muestran los pasos que, en general, se siguen en el muestreo de aceptación. Después de recibir un lote se toma una muestra de artículos para su inspección. Los resultados de la inspección se comparan con las características de calidad especificadas. Si se satisfacen las características de calidad, el lote se acepta y se envía a producción o al cliente. Si el lote se rechaza, los directivos tendrán que decidir cómo se dispone del lote. En algunos casos la decisión puede ser quedarse con el lote y eliminar los artículos que no son aceptables. En otros casos se devuelve el lote al proveedor, a su cargo; el trabajo extra y los costos que se le cargan al proveedor puede que hagan que el proveedor mejore la calidad de sus productos. Por último, si el lote rechazado consta de bienes terminados, estos bienes tendrán que desecharse o adaptarse a los estándares de calidad aceptables.

El procedimiento estadístico del muestreo de aceptación se basa en la metodología de la prueba de hipótesis presentada en el capítulo 9. Las hipótesis nula y alternativa son las siguientes.

$$H_0: \text{La calidad del lote es buena}$$

$$H_a: \text{La calidad del lote es mala}$$

En la tabla 20.4 se muestran los resultados de la prueba de hipótesis. Observe que las decisiones correctas son aceptar un lote de buena calidad y rechazar un lote de mala calidad. Sin embargo, como en las demás pruebas de hipótesis, hay que tener cuidado de no cometer un error tipo I (rechazar un lote de buena calidad) o un error tipo II (aceptar un lote de mala calidad).

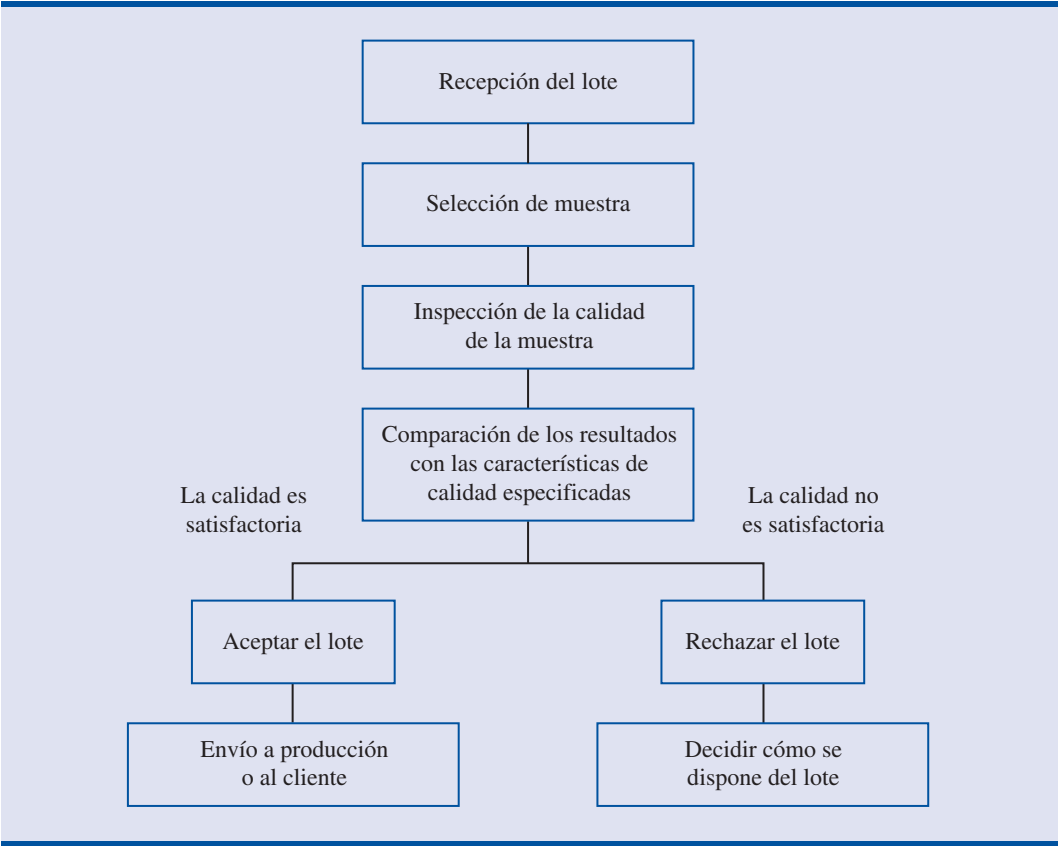
La probabilidad de cometer un error tipo I representa un riesgo para el productor del lote y se conoce como el **riesgo del productor**. Por ejemplo, un riesgo del productor de 0.05 significa que existe 5% de posibilidad de que un lote de buena calidad sea rechazado erróneamente. Por otro lado, la probabilidad de cometer un error tipo II, representa un riesgo para el consumidor del lote y se conoce como **riesgo del consumidor**. Por ejemplo, un riesgo del consumidor de 0.10 significa que existe 10% de posibilidad de que un lote de mala calidad sea erróneamente aceptado y usado para la producción o para surtir un pedido al cliente. La persona que elabora el procedimiento de aceptación de muestras puede controlar los valores que determinan el riesgo del productor y el riesgo del consumidor. Para ilustrar cómo se determinan estos valores de riesgo se tomará un problema que se le presentó a la empresa KALI, Inc.

*Las ventajas del muestreo de aceptación sobre la inspección 100% son:*

1. Mucho menos costoso
2. Menos daño al producto debido a menor manipulación y menos pruebas
3. Se requieren menos inspectores
4. Es la única posibilidad cuando hay que emplear una prueba destructiva



FIGURA 20.11 PROCEDIMIENTO DE MUESTREO DE ACEPTACIÓN



KALI, Inc., un ejemplo de muestreo de aceptación

KALI, Inc., fabrica aparatos para el hogar que se venden bajo diferentes marcas. KALI no fabrica todos los componentes que usa en sus productos, varios de ellos los compra. Por ejemplo, uno de los componentes que compra KALI es uno que emplea en sus equipos para aire acondicionado, se trata de un protector de sobrecarga, un dispositivo que desconecta la compresora cuando ésta se sobrecalienta. Si el protector de sobrecarga no funciona adecuadamente, la compresora puede sufrir un grave daño, por lo que KALI pone mucha atención a la calidad de estos protectores de sobrecarga. Una manera de asegurarse de la calidad adecuada de estos dispositivos es probar cada uno de ellos con un método que se conoce como inspección 100%. Sin embargo,

TABLA 20.4 RESULTADOS DEL MUESTREO DE ACEPTACIÓN

		Estado de lote	
		$H_0$ verdadera La calidad de lote es buena	$H_0$ falsa La calidad de lote es mala
Decisión	Aceptar el lote	Decisión correcta	Error tipo II (aceptar un lote de mala calidad)
	Rechazar el lote	Error tipo I (rechazar un lote de buena calidad)	Decisión correcta

para esto, el protector de sobrecarga debería someterse a pruebas que cuestan tiempo y dinero, y KALI encuentra justificable probar cada protector de carga que compra.

Lo que hace KALI es emplear un plan de muestreo de aceptación para monitorear la calidad de los protectores de sobrecarga. Para el plan de muestreo de aceptación se requiere que los inspectores de control de calidad de KALI elijan y prueben una muestra de protectores de sobrecarga de cada pedido que reciben. Si en la muestra sólo se encuentran unas cuantas unidades defectuosas, es probable que la calidad del lote sea buena y entonces se aceptará. Pero, si en la muestra se encuentra un gran número de unidades defectuosas, es probable que la calidad del lote sea mala y deberá rechazarse.

Un plan para un muestreo de aceptación consta de un tamaño  $n$  de muestra y un criterio de aceptación  $c$ . El **criterio de aceptación** es el número máximo de artículos defectuosos que se puede encontrar en una muestra para que el lote se considere aceptable. Por ejemplo, en el caso de KALI, suponga que de cada lote o pedido que se reciba se tomará una muestra de 15 artículos. Además, el gerente de control de calidad decide que los lotes sólo se pueden aceptar si no se encuentra ningún artículo defectuoso. En tal caso el plan de muestreo de aceptación establecido por el gerente de control es  $n = 15$  y  $c = 0$ .

Este plan de muestreo de aceptación será fácil de realizar para los inspectores de control de calidad: simplemente tienen que tomar una muestra de 15 artículos, realizar la prueba y llegar a una conclusión con base en la siguiente regla de decisión.

- *Aceptar el lote* si encuentran cero artículos defectuosos
- *Rechazar el lote* si encuentran uno o más artículos defectuosos.

Antes de poner en marcha este plan de muestreo de aceptación, el gerente de control de calidad quiere evaluar los riesgos o posibles errores que se pueden tener en este plan. Para poner el plan en marcha es necesario que tanto el riesgo del productor (error tipo I) como el riesgo del consumidor (error tipo II) estén controlados en niveles razonables.

## Cálculo de la probabilidad de aceptar un lote

La clave para analizar tanto el riesgo del productor como el riesgo del consumidor es un análisis del tipo “y qué pasa si”. Es decir, se supone que el lote tiene un determinado número de artículos defectuosos y se calcula la probabilidad de aceptar el lote con un determinado plan de muestreo. Al variar el porcentaje de artículos defectuosos que se está dispuesto a aceptar, es posible examinar el efecto del plan de muestreo sobre los dos tipos de riesgos.

Para empezar, si se ha recibido un pedido grande de protectores de sobrecarga y 5% de los protectores de sobrecarga de este pedido están defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que con el plan de aceptación  $n = 15$ ,  $c = 0$  se acepte un lote en que 5% de los artículos está defectuoso? Como cada protector de sobrecarga que se prueba estará defectuoso o no estará defectuoso y como el lote es grande, el número de artículos defectuosos en una muestra de tamaño 15 tendrá una *distribución binomial*. A continuación se presenta la función de distribución binomial que se presentó en el capítulo 5.

### FUNCIÓN DE ACEPTACIÓN BINOMIAL PARA EL MUESTREO DE ACEPTACIÓN

$$f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{(n-x)} \quad (20.21)$$

donde

$n$  = tamaño de la muestra

$p$  = proporción de artículos defectuosos en el lote

$x$  = número de artículos defectuosos en la muestra

$f(x)$  = probabilidad de que haya  $x$  artículos defectuosos en la muestra

$$f(x) = \frac{15!}{x!(15-x)!} (0.05)^x (1-0.05)^{(15-x)} \quad (20.22)$$
$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{15!}{0!(15-0)!} (0.05)^0 (1-0.05)^{(15-0)} \\ &= \frac{15!}{0!(15)!} (0.05)^0 (0.95)^{15} = (0.95)^{15} = 0.4633 \end{aligned}$$

*Las probabilidades binomiales también se calculan usando Excel o Minitab.*

El uso de las tablas de probabilidad binomial (véase tabla 5 del apéndice B) facilita los cálculos para determinar la probabilidad de aceptar un lote. En la tabla 20.5 se presentan algunas probabilidades binomiales para  $n = 15$  y  $n = 20$ . Con esta tabla se puede determinar que si el lote

**TABLA 20.5** ALGUNAS PROBABILIDADES BINOMIALES PARA MUESTRAS DE TAMAÑO 15 Y 20

[illegible]

**TABLA 20.6** PROBABILIDADES DE ACEPTAR EL LOTE DEL PROBLEMA DE KALI  
CON  $n = 15$  Y  $c = 0$

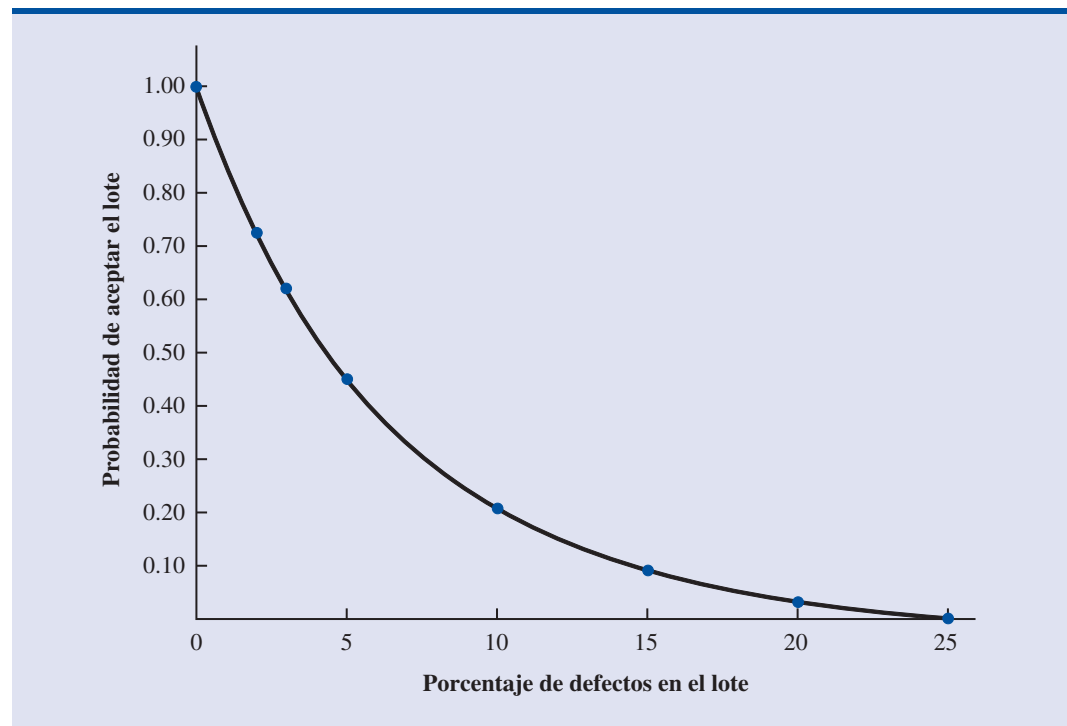
Porcentaje de defectos en un lote	Probabilidad de aceptar el lote
1	0.8601
2	0.7386
3	0.6333
4	0.5421
5	0.4633
10	0.2059
15	0.0874
20	0.0352
25	0.0134

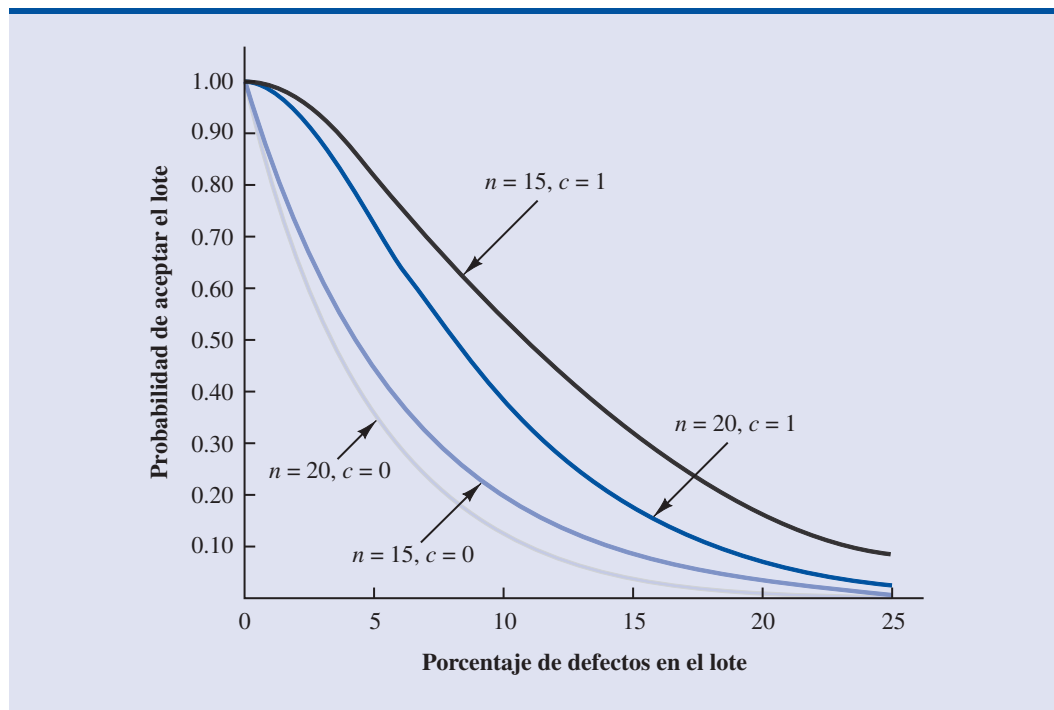
contiene 10% de artículos defectuosos la probabilidad de aceptarlo con el plan de muestreo  $n = 15$  y  $c = 0$  es 0.2059. En la tabla 20.6 se presentan las probabilidades de que el plan de muestreo  $n = 15$  y  $c = 0$  lleve a la aceptación de un lote con 1%, 2%, 3%, ... artículos defectuosos.

Con las probabilidades de la tabla 20.6, se puede trazar la gráfica de la probabilidad de aceptar un lote frente al porcentaje de defectos en el lote como se muestra en la figura 20.12. A esta gráfica o a esta curva se le conoce como **curva característica de operación (curva CO)** del plan de muestreo de aceptación  $n = 15$  y  $c = 0$ .

Quizá se deban considerar otros planes de muestreo, planes con otros tamaños de muestra  $n$  o con otros criterios de aceptación  $c$ . Considere primero el caso en que el tamaño de la muestra aún es  $n = 15$ , pero el criterio de aceptación aumenta de  $c = 0$  a  $c = 1$ . Es decir, ahora se aceptará el lote si en la muestra se encuentran cero o un componente defectuoso. En un lote con 5% de artículos defectuosos ( $p = 0.05$ ), en la tabla 20.5 se encuentra que para  $n = 15$  y  $p = 0.05$ ,

**FIGURA 20.12** CURVA CARACTERÍSTICA DE OPERACIÓN PARA EL PLAN  
DE MUESTREO DE ACEPTACIÓN  $N = 15$ ,  $C = 0$



**FIGURA 20.13** CURVAS CARACTERÍSTICAS DE OPERACIÓN DE CUATRO PLANES DE MUESTREO DE ACEPTACIÓN

$f(0) = 0.4633$  y  $f(1) = 0.3658$ . Por tanto, la probabilidad de que el plan  $n = 15, c = 1$ , lleve a la aceptación de un lote con 5% de defectos es  $0.4633 + 0.3658 = 0.8291$ .

Al continuar con estos cálculos se obtiene la figura 20.13, en la que se presentan las curvas características de operación de cuatro planes de muestreo de aceptación para el caso de KALI. Se consideraron muestras de tamaños 15 y 20. Observe que sea cual sea la proporción de defectos en un lote, con el plan de muestreo  $n = 15, c = 1$  se tiene la mayor probabilidad de aceptar el lote. Con el plan  $n = 20, c = 0$  se tienen la menor probabilidad de aceptar el lote. Pero con este plan se tiene también la mayor probabilidad de rechazar el lote.

### Selección de un plan de muestreo de aceptación

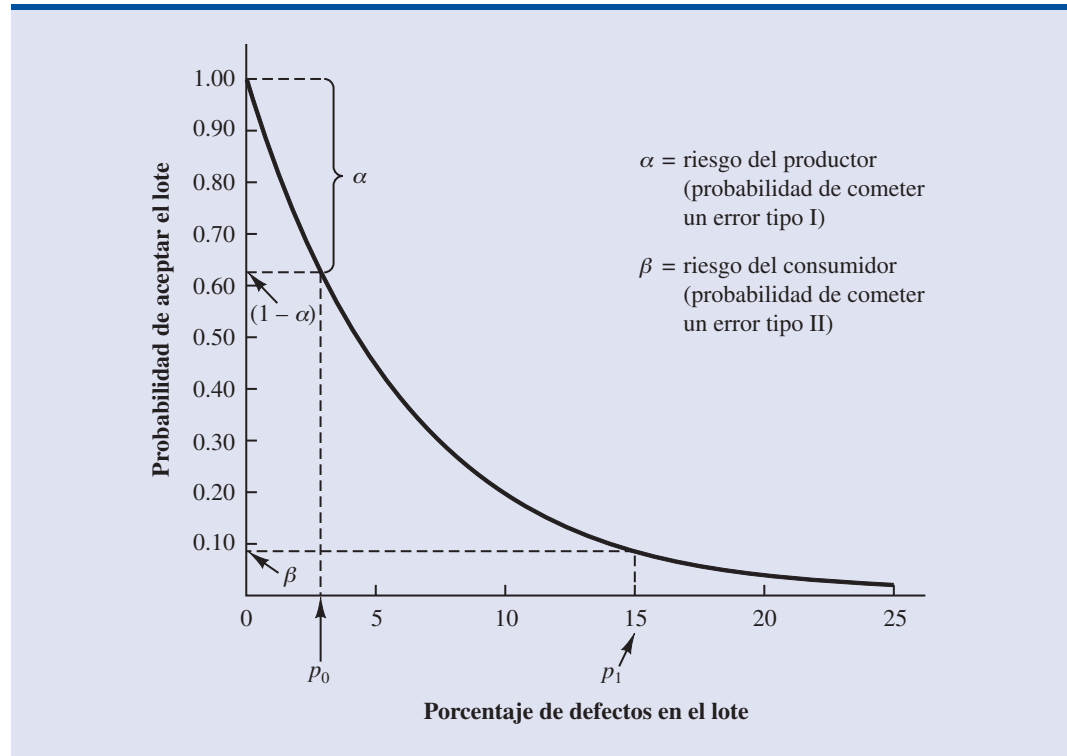
Ahora que ya se sabe usar la distribución binomial para calcular la probabilidad de aceptar un lote con una determinada proporción de defectos, ya es posible elegir los valores de  $n$  y  $c$  que determinen el plan de muestreo de aceptación deseado para el caso en estudio. Para obtener el plan, los directivos tendrán que especificar dos valores para la proporción de defectos en el lote. Un valor, denotado  $p_0$ , que se usa para determinar el riesgo del productor y otro valor, denotado  $p_1$ , que se usa para determinar el riesgo del consumidor.

Se usará la notación siguiente:

$\alpha$  = riesgo del productor; probabilidad de rechazar el lote con una proporción  $p_0$  artículos defectuosos  
 $\beta$  = riesgo del consumidor; probabilidad de aceptar el lote con una proporción  $p_1$  artículos defectuosos

Suponga que en el caso de KALI, los directivos especifican  $p_0 = 0.03$  y  $p_1 = 0.15$ . En la figura 20.14, en la curva CO para  $n = 15, c = 0$ , se observa que con  $p_0 = 0.03$  el riesgo del productor es, aproximadamente,  $1 - 0.63 = 0.37$  y con  $p_1 = 0.15$  el riesgo del consumidor es, aproximadamente, 0.09. Por tanto, si los directivos están dispuestos a tolerar, tanto una probabilidad de

**FIGURA 20.14** CURVA CARACTERÍSTICA DE OPERACIÓN PARA  $n = 15$ ,  $c = 0$   
CON  $p_0 = 0.03$  Y  $p_1 = 0.15$



0.37 de rechazar un lote con 3% de artículos defectuosos (riesgo del productor) como una probabilidad de 0.09 de aceptar un lote con 15% de artículos defectuosos (riesgo del consumidor), entonces el plan de muestreo de aceptación  $n = 15$ ,  $c = 0$  será aceptable.

Pero, si los directivos desean que el riesgo del productor sea  $\alpha = 0.10$  y que el riesgo del consumidor sea  $\beta = 0.20$ . Como se ve, con el plan de muestreo  $n = 15$ ,  $c = 0$ , el riesgo del consumidor es mejor de lo deseado, pero el riesgo del productor es demasiado grande y no se puede aceptar. El que  $\alpha = 0.37$  significa que 37% de los lotes se rechazarán erróneamente cuando tengan sólo 3% de artículos defectuosos. El riesgo del productor es demasiado alto y se tendrá que considerar otro plan de muestreo de aceptación.

En la figura 20.13 se ve que para  $p_0 = 0.3$ ,  $\alpha = 0.10$ ,  $p_1 = 0.15$  y  $\beta = 0.20$ , el plan de aceptación  $n = 20$  y  $c = 1$  está más cerca de los requerimientos para los riesgos del productor y del consumidor.

Como se muestra en esta sección, se necesitarán varios cálculos y diversas curvas de operación para determinar el plan de muestreo con los riesgos deseados para el productor y para el consumidor. Por fortuna existen tablas de planes de muestreo. Por ejemplo, en la American Military Standard Table, MIL-STD-105D, se encuentra útil información para el diseño de planes de muestreo de aceptación. El uso de estas tablas se describe en textos más avanzados sobre el control de calidad, como los citados en la bibliografía. En los textos más avanzados se estudia también la importancia del costo del muestreo al determinar el plan de muestreo óptimo.

## Planes de muestreo múltiple

El procedimiento de muestreo de aceptación presentado para el caso de KALI es un plan *sencillo de muestreo*. Se le llama plan sencillo de muestreo porque sólo se usa una muestra o un escenario. Una vez determinado el número de defectos en la muestra, hay que tomar la decisión de

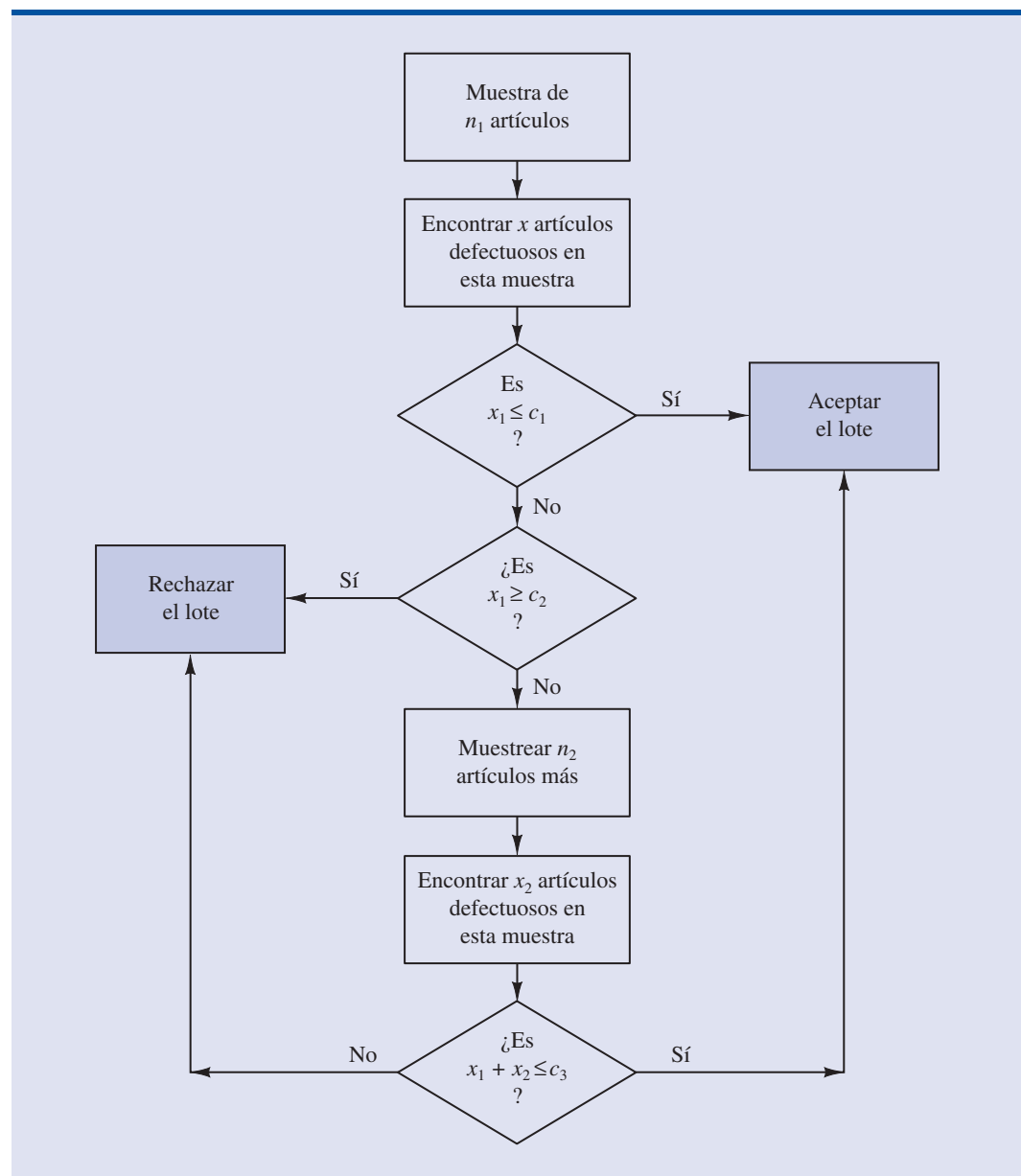
*En el ejercicio 13, que se encuentra al final de esta sección, se pedirá calcular el riesgo del productor y el riesgo del consumidor para el plan de muestreo  $n = 20$ ,  $c = 1$ .*



aceptar o rechazar el lote. Una alternativa al plan sencillo de muestreo es el plan de **muestreo múltiple**, en el que se usan dos o más etapas de muestreo. En cada etapa hay que decidirse entre tres posibilidades: dejar de muestrear y aceptar el lote, dejar de muestrear y rechazar el lote o continuar muestreando. Aun cuando son más complejos, los planes de muestreo múltiples suelen dar como resultado tamaños de muestra más pequeños que los planes de muestreo sencillos con las mismas probabilidades  $a$  y  $b$ .

En la figura 20.15 se muestra la lógica del plan de las dos etapas, o de la doble muestra. Al inicio se toma una muestra de  $n_1$  artículos. Si el número de elementos defectuosos  $x_1$  es menor o igual a  $c_1$ , se acepta el lote. Si  $x_1$  es mayor o igual a  $c_2$ , se rechaza el lote. Si  $x_1$  se encuentra entre  $c_1$  y  $c_2$  ( $c_1 < x_1 < c_2$ ), se toma una segunda muestra de  $n_2$  artículos. Se determina la suma de los artículos defectuosos en la primera ( $x_1$ ) y segunda ( $x_2$ ) muestras. Si  $x_1 + x_2 \leq c_3$  se acepta el lote, si no es así se rechaza el lote. El plan de doble muestra es más complicado, ya que los ta-

**FIGURA 20.15** PLAN DE MUESTREO DE ACEPTACIÓN DE DOS ETAPAS



maños muestrales  $n_1$  y  $n_2$  y los números de aceptación  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$  deben satisfacer los riesgos deseados del consumidor y del productor.

## NOTAS Y COMENTARIOS

1. El uso de la distribución binomial en el muestreo de aceptación se basa en la suposición de que los lotes sean grandes. Si los lotes son pequeños, la distribución adecuada es la distribución hipergeométrica. Los expertos en el campo del control de calidad indican que la distribución de Poisson proporciona una buena aproximación en el muestreo de aceptación, cuando el tamaño de la muestra es por lo menos 16, el tamaño del lote es por lo menos 10 veces el tamaño de la muestra y  $p$  es menor a 0.10. Cuando se tienen muestras grandes se puede usar la aproximación normal a la distribución binomial.
2. En las tablas para muestreo MIL-ST-105D, a  $p_0$  se le llama el nivel de calidad aceptable (AQL, por sus siglas en inglés). En algunas tablas de muestreo, a  $p_1$  se le llama tolerancia de porcentaje de defectos en el lote (LTPD, por sus siglas en inglés) o el nivel de calidad rechazable (RQL, por sus siglas en inglés). En muchos de los planes de muestreo publicados también se usan índices de calidad como el nivel de calidad de indiferencia (IQL, por sus siglas en inglés) y el límite de calidad del promedio saliente (AOQL, por sus siglas en inglés). Textos más avanzados, listados en la bibliografía, proporcionan un análisis completo de estos índices.
3. En esta sección se presentó una introducción a los *planes de muestreo por atributos*. En estos planes cada artículo se clasifica como no defectuoso o defectuoso. En los *planes de muestreo de variables* se toma una muestra y se miden sus características de calidad. Por ejemplo, en el caso de joyería de oro, una medida de su calidad podría ser la cantidad de oro que contiene. Para decidir si aceptar o rechazar un lote podría emplearse un estadístico sencillo, como la cantidad promedio de oro en una muestra de joyas, el cual se compararía con la cantidad admitida de oro.

## Ejercicios

### Métodos

10. Determine la probabilidad de aceptar un lote que tiene 2% de defectos, si el plan de muestreo que se emplea es  $n = 25$ ,  $c = 0$ . ¿Cuál será la probabilidad de aceptar el lote si el porcentaje de defectos es 6%?
11. Dado el plan de muestreo  $n = 20$ ,  $c = 0$ , calcule el riesgo del productor en cada una de las situaciones siguientes.
  - a. El porcentaje de defectos en el lote es 2%.
  - b. El porcentaje de defectos en el lote es 6%.
12. Repita el ejercicio 11 con el plan de aceptación  $n = 20$ ,  $c = 1$ . ¿Qué pasa con el riesgo del productor cuando aumenta el criterio de aceptación  $c$ ? Explique.

### Aplicaciones

13. Remítase al problema de KALI que se presentó en esta sección. El gerente de control de calidad requiere que el riesgo del productor sea 0.10 y  $p_0 = 0.3$  y que el riesgo del consumidor sea 0.20 y  $p_1 = 0.15$ . En el plan de aceptación el tamaño de la muestra es 20 y el criterio de aceptación es 1. Resuelva las preguntas siguientes.
  - a. ¿Cuál es el riesgo del productor, si el plan de aceptación es  $n = 20$  y  $c = 1$ ?
  - b. ¿Cuál es el riesgo del consumidor, si el plan de aceptación es  $n = 20$  y  $c = 1$ ?
  - c. ¿El plan de muestreo  $n = 20$ ,  $c = 1$  satisface los requisitos establecidos por el gerente de control de calidad? Analice.
14. Para inspeccionar un pedido de materia prima, recibido por una empresa, se piensa en usar muestras de tamaño 10, 15 y 20. Use las probabilidades binomiales de la tabla 5 del apéndice B para elegir un plan de muestreo con el riesgo del productor  $\alpha = 0.03$  y  $p_0 = 0.05$  y el riesgo del consumidor  $\beta = 0.12$  y  $p_1 = 0.30$ .

## Autoexamen

15. Un fabricante de relojes le compra cristales de cuarzo a una empresa suiza. Estos cristales se surten en lotes de 1 000 piezas. Para el proceso de muestreo de aceptación se toman 20 cristales elegidos aleatoriamente.
  - a. Trace las curvas características para los criterios de aceptación 0, 1 y 2.
  - b. Si  $p_0 = 0.01$  y  $p_1 = 0.08$ , ¿cuáles son los riesgos del consumidor y del productor con cada uno de los planes de muestreo del inciso a?

## Resumen

En este capítulo se vio cómo usar los métodos estadísticos como ayuda en el control de calidad. Primero se presentaron las cartas de control  $\bar{x}$ ,  $R$ ,  $p$  y  $np$  que ayudan en el monitoreo de la calidad de los procesos. En cada una de estas cartas se establecen límites de control, se toman muestras de manera periódica y se grafican los puntos correspondientes en las cartas de control. Si hay puntos que caigan fuera de los límites de control, eso indica que el proceso está fuera de control y que se deben tomar las medidas correctivas correspondientes. También, algunos patrones que suelen seguir los datos, dentro de los límites de control, pueden indicar posibles problemas de control de calidad y sugerir que se tomen medidas correctivas.

Además se vio la técnica conocida como muestreo de aceptación. Esta técnica consiste en tomar una muestra e inspeccionarla. Un lote se acepta o rechaza, de acuerdo con el número de defectos encontrados en la muestra. El tamaño de la muestra y el criterio de aceptación pueden ajustarse para controlar tanto el riesgo del productor (error tipo I) como el riesgo del consumidor (error tipo II).

## Glosario

**Calidad total (CT)** Sistema para mejorar la satisfacción del cliente y bajar los costos reales mediante una estrategia de mejoramiento y aprendizaje continuos.

**Seis Sigma** Metodología que emplea mediciones y análisis estadísticos para alcanzar un nivel de calidad tan bueno que en cada millón de operaciones no haya más de 3.4 defectos.

**Control de calidad** Una serie de inspecciones y mediciones que determinan si se han alcanzado los estándares de calidad establecidos.

**Causas asignables** Variaciones en los resultados de un proceso debidas a desgaste de la maquinaria, mala calidad de los materiales, errores de los operadores, etc. Cuando se detecta que la variación se debe a causas asignables, es necesario tomar medidas correctivas.

**Causas comunes** Variaciones naturales o normales en los resultados de un proceso, que son debidas, únicamente, a la casualidad. Cuando las variaciones en los resultados de un proceso se deben a causas comunes, no es necesario tomar ninguna medida.

**Carta de control** Herramienta gráfica que se usa como ayuda para determinar si un proceso está bajo control o fuera de control.

**Carta  $\bar{x}$**  Carta de control que se usa cuando se mide la calidad de los resultados de un proceso en términos de longitud, peso, temperatura, etcétera.

**Carta  $R$**  Carta de control que se usa cuando se mide la calidad de los resultados de un proceso en términos del rango de una variable.

**Carta  $p$**  Carta de control que se usa cuando se mide la calidad de los resultados de un proceso en términos de la proporción de defectos.

**Carta  $np$**  Carta de control que se usa para monitorear la calidad de los resultados de un proceso mediante el número de artículos defectuosos.

**Lote** Conjunto de artículos, como pedidos recibidos de materias primas, de piezas o de bienes terminados para obtener un producto final.

**Muestreo de aceptación** Método estadístico en el que el número de elementos defectuosos que se encuentran en una muestra se usa para determinar si se acepta o se rechaza un lote.

**Riesgo del productor** Es el riesgo de rechazar un lote de buena calidad; error tipo I.

**Riesgo del consumidor** Es el riesgo de aceptar un lote de mala calidad; error tipo II.

**Criterio de aceptación** El número máximo de artículos defectuosos que se pueden encontrar en una muestra, para que a pesar de ello se acepte un lote.

**Curva característica de operación (CO)** Gráfica en la que se muestra la probabilidad de aceptar un lote, en función del porcentaje de artículos defectuosos encontrados en el lote. Esta curva se emplea para determinar si un plan de muestreo de aceptación satisface las exigencias tanto del consumidor como del productor.

**Plan de muestreo múltiple** Una forma de muestreo de aceptación en la que se usa más de una muestra o etapas. De acuerdo con el número de artículos defectuosos que se encuentran en una muestra, se decide si aceptar el lote, rechazar el lote o seguir con el muestreo.

## Fórmulas clave

### Error estándar de la media

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (20.1)$$

### Límites de control en una carta $\bar{x}$ : media del proceso y desviación estándar conocidas

$$UCL = \mu + 3\sigma_{\bar{x}} \quad (20.2)$$

$$LCL = \mu - 3\sigma_{\bar{x}} \quad (20.3)$$

### Media muestral general

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \cdots + \bar{x}_k}{k} \quad (20.4)$$

### Rango promedio

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \cdots + R_k}{k} \quad (20.5)$$

### Límites de control en una carta $\bar{x}$ : media del proceso y desviación estándar desconocidas

$$\bar{\bar{x}} \pm A_2\bar{R} \quad (20.8)$$

### Límites de control en una carta $R$

$$UCL = \bar{R}D_4 \quad (20.14)$$

$$LCL = \bar{R}D_3 \quad (20.15)$$

### Error estándar de la proporción

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad (20.16)$$

### Límites de control en una carta $p$

$$UCL = p + 3\sigma_{\bar{p}} \quad (20.17)$$

$$LCL = p - 3\sigma_{\bar{p}} \quad (20.18)$$

### Límites de control en una carta $np$

$$UCL = np + 3\sqrt{np(1-p)} \quad (20.19)$$

$$LCL = np - 3\sqrt{np(1-p)} \quad (20.20)$$

**Distribución de probabilidad binomial para un muestreo de aceptación**

$$f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{(n-x)} \quad (20.21)$$

**Ejercicios complementarios**

16. En un proceso de producción que se considera bajo control, las muestras de 5 elementos arrojaron las medias muestrales siguientes.

95.72	95.24	95.18
95.44	95.46	95.32
95.40	95.44	95.08
95.50	95.80	95.22
95.56	95.22	95.04
95.72	94.82	95.46
95.60	95.78	

- Con base en estos datos dé la estimación de la media cuando el proceso está bajo control.
  - Si la desviación estándar del proceso es  $\sigma = 0.50$ , elabore la carta de control  $\bar{x}$  de este proceso de producción. Como media del proceso considere la estimación obtenida en el inciso a.
  - ¿Alguna de las 20 medias muestrales indica que el proceso está fuera de control?
17. En un proceso los pesos de llenado tienen una distribución normal, la media es de 350 gramos y la desviación estándar de 15 gramos.
- Obtenga los límites de control de la carta  $\bar{x}$  para muestras de tamaño 10, 20 y 30.
  - ¿Qué pasa con los límites de control a medida que aumenta el tamaño de la muestra?
  - ¿Qué pasa cuando se comete un error tipo I?
  - ¿Qué pasa cuando se comete un error tipo II?
  - Calcule la probabilidad de cometer un error tipo I con muestras de los tamaños: 10, 20 y 30.
  - En las cartas de control, ¿qué ventaja tiene incrementar los tamaños de la muestra? ¿Qué probabilidad de error se reduce a medida que se incrementa el tamaño de la muestra?
18. A partir de muestras de tamaño 5 se obtuvo  $\bar{\bar{x}} = 5.42$  y  $\bar{R} = 2.0$ . Calcule los límites de control de las cartas  $\bar{x}$  y  $R$ , y estime la desviación estándar del proceso.
19. Los siguientes datos de control de calidad se obtuvieron en un proceso de fabricación de la empresa Kensport Chemical. Estos datos son temperaturas en grados centígrados medidas en cinco momentos del ciclo de producción. La empresa está interesada en emplear cartas de control para monitorear la temperatura durante su proceso de fabricación. Construya las cartas  $\bar{x}$  y  $R$ . ¿Qué se puede concluir acerca de la calidad del proceso?

Muestra	$\bar{x}$	$R$	Muestra	$\bar{x}$	$R$
1	95.72	1.0	11	95.80	0.6
2	95.24	0.9	12	95.22	0.2
3	95.18	0.8	13	95.56	1.3
4	95.44	0.4	14	95.22	0.5
5	95.46	0.5	15	95.04	0.8
6	95.32	1.1	16	95.72	1.1
7	95.40	0.9	17	94.82	0.6
8	95.44	0.3	18	95.46	0.5
9	95.08	0.2	19	95.60	0.4
10	95.50	0.6	20	95.74	0.6

20. Los siguientes datos se obtuvieron del proceso de producción de Master Blend Coffee y son los pesos de llenado de latas de café de 3 libras. Con estos datos construya las tablas  $\bar{x}$  y  $R$ . ¿Qué se puede concluir acerca de la calidad de este proceso de producción?



Muestra	Observaciones				
	1	2	3	4	5
1	3.05	3.08	3.07	3.11	3.11
2	3.13	3.07	3.05	3.10	3.10
3	3.06	3.04	3.12	3.11	3.10
4	3.09	3.08	3.09	3.09	3.07
5	3.10	3.06	3.06	3.07	3.08
6	3.08	3.10	3.13	3.03	3.06
7	3.06	3.06	3.08	3.10	3.08
8	3.11	3.08	3.07	3.07	3.07
9	3.09	3.09	3.08	3.07	3.09
10	3.06	3.11	3.07	3.09	3.07

21. Considere la situación siguiente y diga si hay razones para preocuparse por la calidad del proceso.
- En una carta  $p$ , se tiene  $LCL = 0$  y  $UCL = 0.068$ . Cuando el proceso está bajo control, la proporción de defectos es 0.033. En esta carta de control grafique los siguientes siete resultados muestrales: 0.035, 0.062, 0.055, 0.049, 0.058, 0.066 y 0.055. Analice.
  - En una carta  $\bar{x}$ , se tiene  $LCL = 22.2$  y  $UCL = 24.5$ . Cuando el proceso está bajo control, la media es  $\mu = 23.35$ . En esta carta grafique los siguientes siete resultados muestrales: 22.4, 22.6, 22.65, 23.2, 23.4, 23.85 y 24.1. Analice.
22. A veces al mes, los gerentes de 1 200 comercios minoristas hacen pedidos de reabastecimiento a la casa matriz. De acuerdo con la experiencia se sabe que cerca de 4% de los pedidos que se surten presentan algún error, como envío de una mercancía distinta a la solicitada, envío de una cantidad distinta a la solicitada o, simplemente, no se surte la mercancía solicitada. Cada mes se toman muestras de 200 hojas de pedido y se verifica si fueron surtidas con precisión.
- Construya la carta de control correspondiente a esta situación.
  - En los datos de los últimos seis meses las cantidades de pedidos con uno o más errores son: 10, 15, 6, 13, 8 y 17. Grafique estos datos en la carta de control. ¿Qué dice esta carta acerca de este proceso?
23. Se tiene el plan de muestreo de aceptación  $n = 10$ ,  $c = 2$ . Suponga que  $p_0 = 0.05$  y  $p_1 = 0.20$ .
- Para este plan de muestreo de aceptación calcule el riesgo del consumidor.
  - ¿Estará inconforme el productor, el consumidor o ambos con el plan de muestreo propuesto?
  - ¿Recomendaría usted alguna modificación al plan de muestreo? ¿Cuál?
24. Se elaboró el plan de muestreo de aceptación  $n = 15$ ,  $c = 1$  con un riesgo para el productor de 0.075.
- ¿Cuál es el valor de  $p_0$ , 0.01, 0.02, 0.03, 0.04 o 0.05? ¿Qué significa este valor?
  - ¿Cuál es el riesgo del consumidor con este plan si  $p_1 = 0.25$ ?
25. Una empresa produce carne enlatada. Sea  $p$  la proporción de lotes que no satisfacen las especificaciones de calidad del producto. Como plan de muestreo de aceptación se va a usar  $n = 25$ ,  $c = 0$ .
- Calcule los puntos que en la curva característica de operación corresponden a  $p = 0.01$ , 0.03, 0.10 y 0.20.
  - Grafique la curva característica de operación.
  - ¿Cuál es la probabilidad de que con este plan de muestreo de aceptación se rechace un lote que contenga 0.01 defectos?



## Apéndice 20.1 Cartas de control con Minitab



En este apéndice se describen los pasos necesarios para generar cartas de control con Minitab, a partir de los datos muestrales de la empresa Jensen, presentados en la tabla 20.1. Los números de las muestras se encuentran en la columna C1, la primera observación se encuentra en la columna C2, la segunda, en la columna C3 y así sucesivamente. Mediante los pasos siguientes, Minitab genera simultáneamente las cartas  $\bar{x}$  y  $R$ .

**Paso 1.** Seleccionar el menú **Stat**

**Paso 2.** Elegir **Control Charts**

**Paso 3.** Elegir **Variables Charts for Subgroups**

**Paso 4.** Elegir **Xbar-R**

**Paso 5.** Cuando aparezca el cuadro de diálogo Xbar-R Chart:

Seleccionar **Observations for a subgroup are in one row of columns**

En el cuadro que se encuentra debajo ingresar C2-C6

Seleccionar **Xbar-R Options**

**Paso 6.** Cuando aparezca el cuadro de diálogo Xbar-R Options:

Seleccionar la pestaña **Tests**

Elegir **One point > 3.0 standard deviations from center line\***

Clic en **OK**

**Paso 7.** Cuando aparezca el cuadro de diálogo Xbar-R Chart:

Clic en **OK**

En los resultados de Minitab aparecerán, juntas, la carta  $R$  y la carta  $\bar{x}$ . En el paso 3 de este procedimiento aparecen diversas opciones que permiten el acceso a diferentes tipos de cartas de control. Por ejemplo, se puede seleccionar que las cartas  $\bar{x}$  y  $R$  aparezcan por separado. Otras de las opciones son obtener una carta  $p$ , una carta  $np$ , etcétera.

---

\* Minitab proporciona otras pruebas para detectar causas especiales de variación y situaciones fuera de control. El usuario puede elegir simultáneamente varias de estas pruebas