

# CAPÍTULO 6



## Distribuciones de probabilidad continua

---

### CONTENIDO

LA ESTADÍSTICA EN

LA PRÁCTICA:

PROCTER & GAMBLE

#### 6.1 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD UNIFORME

Áreas como medida de probabilidad

#### 6.2 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL

Curva normal

Distribución de probabilidad normal estándar

Cálculo de probabilidades en cualquier distribución de probabilidad normal

El problema de la empresa Gear Tire

#### 6.3 APROXIMACIÓN NORMAL DE LAS PROBABILIDADES BINOMIALES

#### 6.4 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD EXPONENCIAL

Cálculo de probabilidades para la distribución exponencial

Relación entre la distribución de Poisson y la exponencial



## LA ESTADÍSTICA *en* LA PRÁCTICA

### PROCTER & GAMBLE\* CINCINNATI, OHIO

Procter & Gamble (P&G) produce y comercializa productos como detergentes, pañales desechables, productos farmacéuticos que no requieren receta, dentífricos, jabones de tocador y toallas de papel. En todo el mundo P&G tiene la marca líder en más categorías que cualquiera otra empresa de productos de consumo. Desde su fusión con Gillette, P&G también comercializa rasuradoras, navajas para afeitar y muchos otros productos para el cuidado personal.

Al ser uno de los líderes en aplicación de los métodos estadísticos para la toma de decisiones, P&G emplea personas con diversas formaciones académicas: ingenieros, especialistas en estadística, en investigación de operaciones y en negocios. Las principales tecnologías cuantitativas en las que estos profesionistas aplican sus conocimientos son decisiones probabilísticas y análisis de riesgos, simulación avanzada, mejoramiento de la calidad y métodos cuantitativos (por ejemplo, programación lineal, análisis de regresión, análisis de probabilidad).

La División de Productos Químicos para la Industria de P&G es una de las principales proveedoras de alcoholes grasos obtenidos de sustancias naturales, como el aceite de coco, y de derivados del petróleo. La división deseaba saber qué riesgos económicos y cuáles oportunidades existen para la expansión de sus instalaciones dedicadas a la producción de alcoholes grasos; por tanto, solicitó la ayuda de los expertos de P&G en decisiones probabilísticas y en análisis de riesgos. Después de estructurar y modelar el problema, los expertos determinaron que la clave para la rentabilidad era la diferencia entre los costos de las materias primas provenientes del petróleo y del coco. Los costos futuros no se podrían saber, pero los analistas los calcularon mediante las siguientes variables aleatorias continuas.

$x$  = precio del aceite de coco por libra  
de alcoholes grasos

y

$y$  = precio de la materia prima proveniente  
del petróleo por libra de alcoholes grasos



Algunos de los muchos productos de Procter & Gamble son bien conocidos. © AFP/Getty Images.

Como la clave de la rentabilidad era la diferencia entre estas dos variables aleatorias, se empleó una tercera variable aleatoria para el análisis  $d = x - y$ . Para determinar las distribuciones de probabilidad de  $x$  y  $y$  entrevistaron a varios expertos. Después, esta información se empleó para elaborar una distribución de probabilidad de la diferencia entre los precios  $d$ . En esta distribución de probabilidad continua se encontró que la probabilidad de que la diferencia entre los precios fuera \$0.0655 o menos, era 0.90 y que la probabilidad de que la diferencia entre los precios fuera \$0.035 o menos era 0.50. Además, la probabilidad de que la diferencia fuera \$0.0045 o menos era sólo 0.10.<sup>†</sup>

La dirección de esta división pensó que la clave para alcanzar un consenso estaba en poder cuantificar el impacto de las diferencias entre los precios de las materias primas. Las probabilidades obtenidas se usaron en un análisis sensible a la diferencia entre los precios de las materias primas. Este análisis arrojó suficiente información como para sustentar una recomendación para los directivos.

Usar variables aleatorias continuas y sus distribuciones de probabilidad ayudó a P&G a analizar los riesgos económicos relacionados con su producción de alcoholes grasos. En este capítulo el lector conocerá las variables aleatorias continuas y sus distribuciones de probabilidad, entre ellas una de las distribuciones de probabilidad más importantes en la estadística, la distribución normal.

\*Los autores agradecen a Joel Kahn de P&G por proporcionar este artículo para *La estadística en la práctica*.

<sup>†</sup>Las diferencias de precios dadas aquí están modificadas para proteger los datos.

En el capítulo anterior se estudiaron las variables aleatorias discretas y sus distribuciones de probabilidad. En este capítulo se tratan las variables aleatorias continuas. En específico verá tres distribuciones de probabilidad continua: la uniforme, la normal y la exponencial.

Una diferencia fundamental entre las variables aleatorias discretas y las variables aleatorias continuas es cómo se calculan las probabilidades. En las variables aleatorias discretas la función de probabilidad  $f(x)$  da la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor determinado. En las variables aleatorias continuas, la contraparte de la función de probabilidad es la **función de densidad de probabilidad**, que también se denota  $f(x)$ . La diferencia está en que la función de densidad de probabilidad no da probabilidades directamente. Si no que el área bajo la curva de  $f(x)$  que corresponde a un intervalo determinado proporciona la probabilidad de que la variable aleatoria tome uno de los valores de ese intervalo. De manera que cuando se calculan probabilidades de variables aleatorias continuas se calcula la probabilidad de que la variable aleatoria tome alguno de los valores dentro de un intervalo.

Como en cualquier punto determinado el área bajo la gráfica de  $f(x)$  es cero, una de las consecuencias de la definición de la probabilidad de una variable aleatoria continua es que la probabilidad de cualquier valor determinado de la variable aleatoria es cero. Estos conceptos se demuestran en la sección 6.1 con una variable que tiene una distribución uniforme.

Gran parte del capítulo se dedica a describir y mostrar aplicaciones de la distribución normal. La distribución normal es muy importante por tener muchas aplicaciones y un amplio uso en la inferencia estadística. El capítulo concluye con el estudio de la distribución exponencial. La distribución exponencial es útil en aplicaciones en las que intervienen factores como tiempos de espera y tiempos de servicios.

## 6.1

## Distribución de probabilidad uniforme

*Siempre que una probabilidad sea proporcional a la longitud del intervalo, la variable aleatoria estará distribuida uniformemente.*

Considere una variable aleatoria  $x$  que representa el tiempo de vuelo de un avión que viaja de Chicago a Nueva York. Suponga que el tiempo de vuelo es cualquier valor en el intervalo de 120 minutos a 140 minutos. Dado que la variable aleatoria  $x$  toma cualquier valor en este intervalo,  $x$  es una variable aleatoria continua y no una variable aleatoria discreta. Admita que cuenta con datos suficientes como para concluir que la probabilidad de que el tiempo de vuelo esté en cualquier intervalo de 1 minuto es el mismo que la probabilidad de que el tiempo de vuelo esté en cualquier otro intervalo de 1 minuto dentro del intervalo que va de 120 a 140 minutos. Como cualquier intervalo de 1 minuto es igual de probable, se dice que la variable aleatoria  $x$  tiene una **distribución de probabilidad uniforme**. La función de densidad de probabilidad que define la distribución uniforme de la variable aleatoria tiempo de vuelo, es

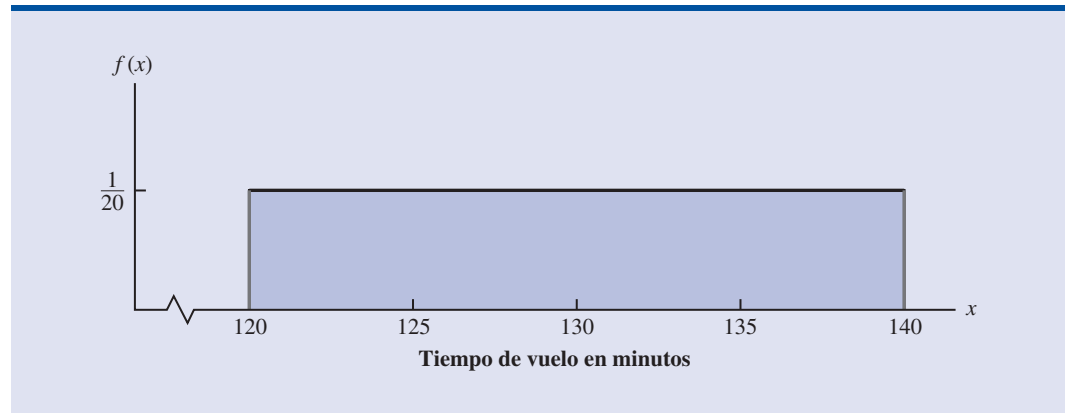
$$f(x) = \begin{cases} 1/20 & \text{para } 120 \leq x \leq 140 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

La figura 6.1 es una gráfica de esta función de densidad de probabilidad. En general, la función de densidad de probabilidad uniforme de una variable aleatoria  $x$  se define mediante la fórmula siguiente.

### FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD UNIFORME

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{para } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (6.1)$$

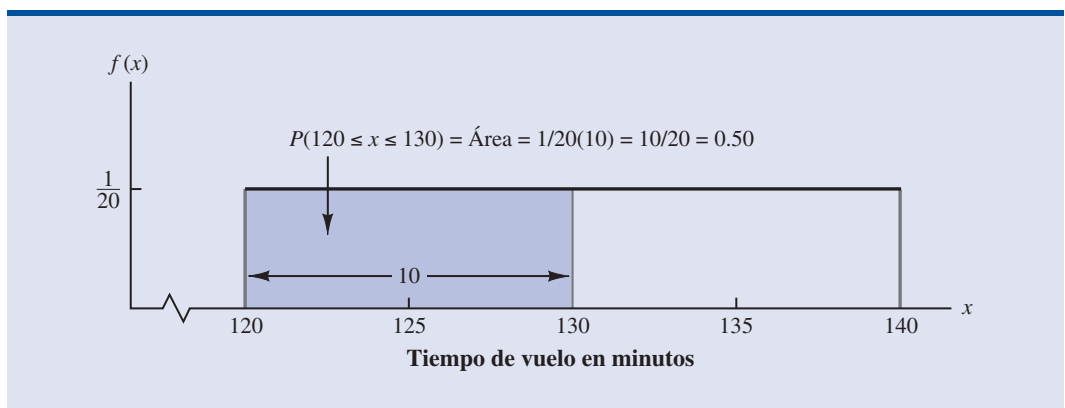
En el caso de la variable aleatoria tiempo de vuelo,  $a = 120$  y  $b = 140$ .

**FIGURA 6.1** DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD UNIFORME PARA EL TIEMPO DE VUELO

Como se hizo notar en la introducción, en el caso de una variable aleatoria continua, sólo se considera la probabilidad en términos de la posibilidad de que la variable aleatoria tome un valor dentro de un determinado intervalo. En el ejemplo del tiempo de vuelo, una pregunta aceptable acerca de una probabilidad es: ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de vuelo se encuentre entre 120 y 130 minutos? Es decir, ¿cuál es  $P(120 \leq x \leq 130)$ ? Como el tiempo de vuelo debe estar entre 120 y 140 minutos y como se ha dicho que la probabilidad es uniforme en este intervalo, es factible decir que  $P(120 \leq x \leq 130) = 0.50$ . En la sección siguiente se muestra que esta probabilidad se calcula como el área bajo la gráfica de  $f(x)$  desde 120 hasta 130 (véase figura 6.2)

### Áreas como medida de probabilidad

Ahora una observación acerca de la gráfica de la figura 6.2. Considere el área bajo la gráfica de  $f(x)$  en el intervalo que va de 120 a 130. Esta área es rectangular y el área de un rectángulo es simplemente el ancho multiplicado por la altura. Si el ancho del intervalo es igual a  $130 - 120 = 10$  y la altura es igual al valor de la función de densidad de probabilidad  $f(x) = 1/20$ , se tiene,  $\text{área} = \text{ancho} \times \text{alto} = 10(1/20) = 10(1/20) = 10/20 = 0.50$ .

**FIGURA 6.2** EL ÁREA PROPORCIONA LA PROBABILIDAD DE QUE EL TIEMPO DE VUELO ESTÉ ENTRE 120 Y 130 MINUTOS.

¿Qué observación se puede hacer acerca de la área bajo la curva de  $f(x)$  y la probabilidad? ¡Son idénticas! En efecto, esta observación es correcta y válida para todas las variables aleatorias continuas. Una vez que se ha dado la función de densidad de probabilidad  $f(x)$ , la probabilidad de que  $x$  tome un valor entre algún valor menor  $x_1$  y otro valor mayor  $x_2$  se encuentra calculando el área bajo la gráfica de  $f(x)$  y sobre el intervalo de  $x_1$  a  $x_2$ .

Dada la distribución uniforme del tiempo de vuelo y usando la interpretación de área como probabilidad es posible contestar cualquier pregunta acerca de la probabilidad de los tiempos de vuelo. Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de un tiempo de vuelo entre 128 y 136 minutos? El ancho del intervalo es  $136 - 128 = 8$ . Como la altura uniforme de  $f(x) = 1/120$ , se ve que  $P(128 \leq x \leq 136) = 8(1/120) = 0.40$ .

Observe que  $P(120 \leq x \leq 140) = 20(1/120) = 1$ ; es decir, el área total bajo la gráfica de  $f(x)$  es igual a 1. Esta propiedad es válida para todas las distribuciones de probabilidad continua y es el análogo de la condición de que la suma de las probabilidades debe ser igual a 1 en el caso de una función de probabilidad discreta.

Dos diferencias importantes sobresalen entre el tratamiento de una variable aleatoria continua y el tratamiento de una variable aleatoria discreta.

1. Ya no se habla de la probabilidad de que una variable aleatoria tome un determinado valor. Se habla de la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor dentro de un intervalo dado.
2. La probabilidad de que una variable aleatoria continua tome un valor dentro de un determinado intervalo que va de  $x_1$  a  $x_2$  se define como el área bajo la gráfica de la función de densidad de probabilidad entre  $x_1$  y  $x_2$ . Como un solo punto es un intervalo cuyo ancho es cero, esto implica que la probabilidad de que una variable aleatoria continua tome un valor exacto, cualquiera, es cero. Esto también significa que en cualquier intervalo la probabilidad de que una variable aleatoria continua tome un valor es la misma, ya sea que se incluyan o no los extremos del intervalo.

*Para ver que la probabilidad de un solo punto es 0, consulte la figura 6.2 y calcule la probabilidad de un solo punto, por ejemplo,  $x = 125$ .  $P(x = 125) = P(125 \leq x \leq 125) = 0(1/120) = 0$ .*

El cálculo del valor esperado y de la varianza de una variable aleatoria continua es análogo al de una variable aleatoria discreta. Sin embargo, como en este caso interviene el cálculo integral la deducción de estas fórmulas queda para cursos más avanzados.

En el caso de la distribución de probabilidad continua uniforme presentada en esta sección, las fórmulas para el valor esperado y para la varianza son

$$E(x) = \frac{a + b}{2}$$

$$\text{Var}(x) = \frac{(b - a)^2}{12}$$

En estas fórmulas  $a$  es el menor valor y  $b$  es el mayor valor que toma la variable aleatoria.

Al aplicar estas fórmulas a la distribución uniforme de los tiempos de vuelo de Chicago a Nueva York, se obtiene,

$$E(x) = \frac{(120 + 140)}{2} = 130$$

$$\text{Var}(x) = \frac{(140 - 120)^2}{12} = 33.33$$

La desviación estándar de los tiempos de vuelo se encuentra sacando la raíz cuadrada de la varianza. Por tanto,  $\sigma = 5.77$  minutos.

## NOTAS Y COMENTARIOS

Para ver más claramente por qué la altura de una función de densidad de probabilidad no es una probabilidad, considere la variable aleatoria cuya distribución de probabilidad uniforme es la siguiente.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{para } 0 \leq x \leq 0.5 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

La altura de la función de densidad de probabilidad,  $f(x)$  es 2 para todos los valores de  $x$  entre 0 y 0.5. Pero se sabe que las probabilidades nunca pueden ser mayores a 1. Por tanto,  $f(x)$  no se interpreta como la probabilidad de  $x$ .

## Ejercicios

### Métodos

#### Autoexamen

- La variable aleatoria  $x$  está distribuida uniformemente entre 1.0 y 1.5.
  - Dé la gráfica de la función de densidad de probabilidad.
  - Calcule  $P(x = 1.25)$ .
  - Calcule  $P(1.0 \leq x \leq 1.25)$ .
  - Calcule  $P(1.20 < x < 1.5)$ .
- La variable aleatoria  $x$  está distribuida uniformemente entre 10 y 20.
  - Dé la gráfica de la función de densidad de probabilidad.
  - Calcule  $P(x < 15)$ .
  - Calcule  $P(12 \leq x \leq 18)$ .
  - Calcule  $E(x)$ .
  - Calcule  $\text{Var}(x)$ .

### Aplicaciones

#### Autoexamen

- En su vuelo de Cincinnati a Tampa, Delta Airlines da como tiempo de vuelo 2 horas, 5 minutos. En realidad los tiempos de vuelo están distribuidos uniformemente entre 2 horas y 2 horas, 20 minutos.
  - Dé la gráfica de la función de densidad de probabilidad del tiempo de vuelo.
  - ¿Cuál es la probabilidad de que un vuelo no se retrase más de 5 minutos?
  - ¿De que un vuelo no se retrase más de 10 minutos?
  - ¿Cuál es el tiempo de vuelo esperado?
- La mayoría de los lenguajes de computadora tienen una función para generar números aleatorios. En Excel, la función ALEATORIO se usa para generar números aleatorios entre 0 y 1. Si  $x$  denota un número aleatorio generado mediante ALEATORIO, entonces  $x$  es una variable aleatoria continua, cuya función de densidad de probabilidad es la siguiente.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

- Haga la gráfica de la función de densidad de probabilidad.
- ¿Cuál es la probabilidad de generar un número aleatorio entre 0.25 y 0.75?
- ¿De generar un número aleatorio menor o igual que 0.30?
- ¿De generar un número aleatorio mayor o igual que 0.60?
- Genere 50 números aleatorios ingresando = ALEATORIO() en 50 celdas de una hoja de cálculo de Excel.
- Calcule la media y la desviación estándar de los números del inciso e.

5. La *driving distance* de los 100 mejores golfistas del Tour PGA está entre 284.7 y 310.6 yardas (*Golfweek*, 29 de marzo de 2003). Suponga que las *driving distance* de estos golfistas se encuentran uniformemente distribuidas en este intervalo.
  - a. Dé una expresión matemática de la función de densidad de probabilidad correspondiente a estas *driving distance*
  - b. ¿Cuál es la probabilidad de que la *driving distance* de uno de estos golfistas sea menor que 290 yardas?
  - c. ¿De que la *driving distance* de uno de estos golfistas sea por lo menos de 300 yardas?
  - d. ¿De que la *driving distance* de uno de estos golfistas esté entre 290 y 305 yardas?
  - e. ¿Cuántos de estos jugadores lanzan la pelota por lo menos a 290 yardas?
6. En las botellas de un detergente líquido se indica que el contenido es de 12 onzas por botella. En la operación de producción se llenan las botellas uniformemente de acuerdo con la siguiente función de densidad de probabilidad.

$$f(x) = \begin{cases} 8 & \text{para } 11.975 \leq x \leq 12.100 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que el contenido de una botella esté entre 12 y 12.05 onzas?
  - b. ¿De que el contenido de una botella sea 12.02 onzas o más?
  - c. En el control de calidad se acepta que una botella sea llenada con más o menos 0.02 onzas de lo indicado en la etiqueta. ¿Cuál es la probabilidad de que una de las botellas de detergente no satisfaga estos estándares?
7. Suponga que quiere comprar un terreno y sabe que también hay otros compradores interesados.\* El vendedor revela que aceptará la oferta mayor que sea superior a \$10 000. Si la oferta del competidor  $x$  es una variable aleatoria que está uniformemente distribuida entre \$10 000 y \$15 000.
  - a. Asuma que usted ofrece \$12 000. ¿Cuál es la probabilidad de que su oferta sea aceptada?
  - b. Si usted ofrece \$14 000. ¿Cuál es la probabilidad de que su oferta sea aceptada?
  - c. ¿Cuál es la cantidad que deberá ofrecer para maximizar la probabilidad de obtener la propiedad?
  - d. Suponga que conoce a quien está dispuesto a pagar \$16 000 por la propiedad. ¿Consideraría la posibilidad de ofrecer una cantidad menor que la del inciso c?

## 6.2

## Distribución de probabilidad normal

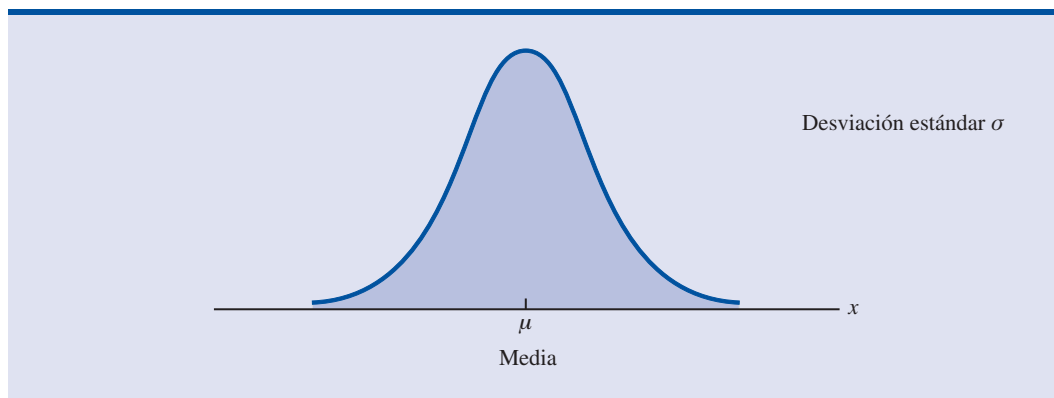
Abraham de Moivre, un matemático francés, publicó en 1733 Doctrina de las posibilidades. De Moivre dedujo la distribución normal.

La distribución de probabilidad más usada para describir variables aleatorias continuas es la **distribución de probabilidad normal**. La distribución normal tiene gran cantidad de aplicaciones prácticas, en las cuales la variable aleatoria puede ser el peso o la estatura de las personas, puntuaciones de exámenes, resultados de mediciones científicas, precipitación pluvial u otras cantidades similares. La distribución normal también tiene una importante aplicación en inferencia estadística, tema principal del resto de este libro. En estas aplicaciones, la distribución normal describe qué tan probables son los resultados obtenidos de un muestreo

### Curva normal

En la figura 6.3 aparece la forma de la distribución normal, una curva normal en forma de campana. A continuación se presenta la función de densidad de probabilidad que define la curva en forma de campana de la distribución normal.

\* Este ejercicio está basado en un problema sugerido por el profesor Roger Myerson de la Universidad de Northwestern.

**FIGURA 6.3** CURVA EN FORMA DE CAMPANA DE UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL**FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD NORMAL**

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad (6.2)$$

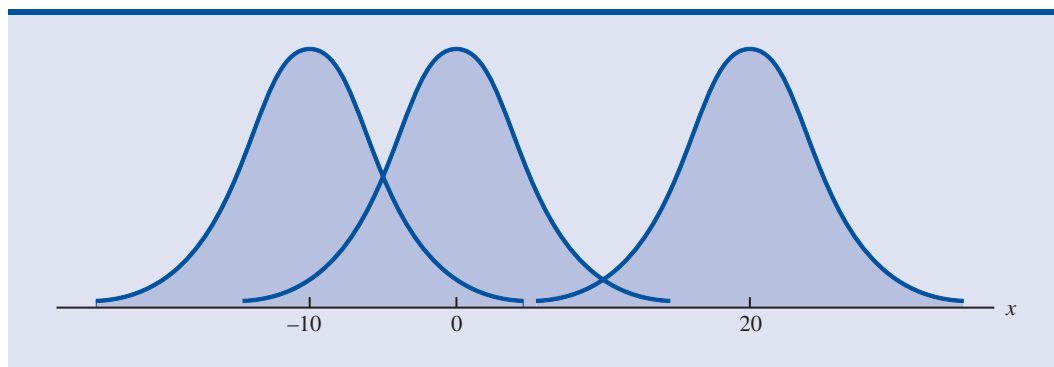
donde

 $\mu$  = media $\sigma$  = desviación estándar $\pi$  = 3.14159 $e$  = 2.71828

Las siguientes son observaciones importantes acerca de las características de las distribuciones normales.

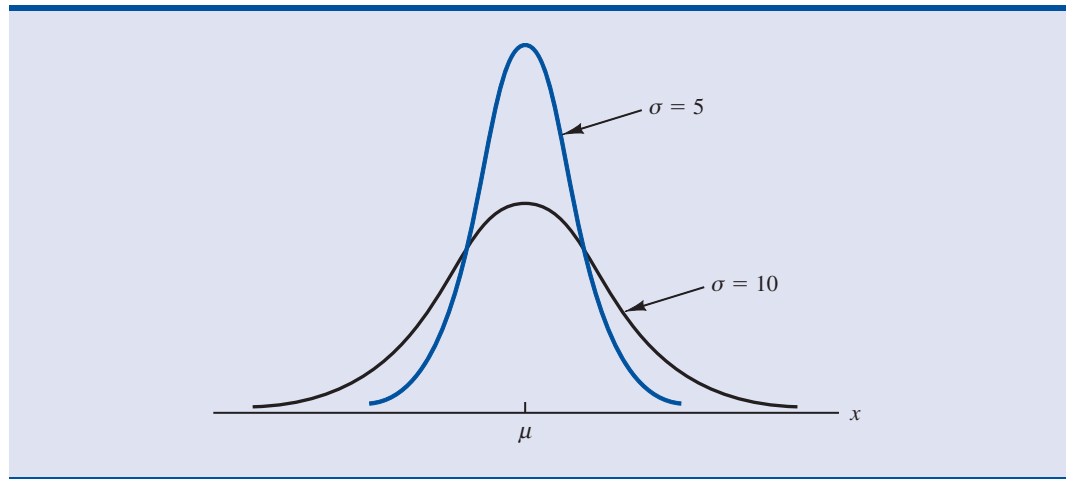
*La curva normal tiene dos parámetros,  $\mu$  y  $\sigma$ . Estos parámetros determinan la localización y la forma de la distribución normal.*

1. Toda la familia de distribuciones normales se diferencia por medio de dos parámetros: la media  $\mu$  y la desviación estándar  $\sigma$ .
2. El punto más alto de una curva normal se encuentra sobre la media, la cual coincide con la mediana y la moda.
3. La media de una distribución normal puede tener cualquier valor: negativo, positivo o cero. A continuación se muestran tres distribuciones normales que tienen la misma desviación estándar, pero diferentes medias. ( $-10$ ,  $0$  y  $20$ ).





4. La distribución normal es simétrica, siendo la forma de la curva normal al lado izquierdo de la media, la imagen especular de la forma al lado derecho de la media. Las colas de la curva normal se extienden al infinito en ambas direcciones y en teoría jamás tocan el eje horizontal. Dado que es simétrica, la distribución normal no es sesgada; su sesgo es cero.
5. La desviación estándar determina qué tan plana y ancha es la curva normal. Desviaciones estándar grandes corresponden a curvas más planas y más anchas, lo cual indica mayor variabilidad en los datos. A continuación se muestran dos curvas normales que tienen la misma media pero distintas desviaciones estándar.



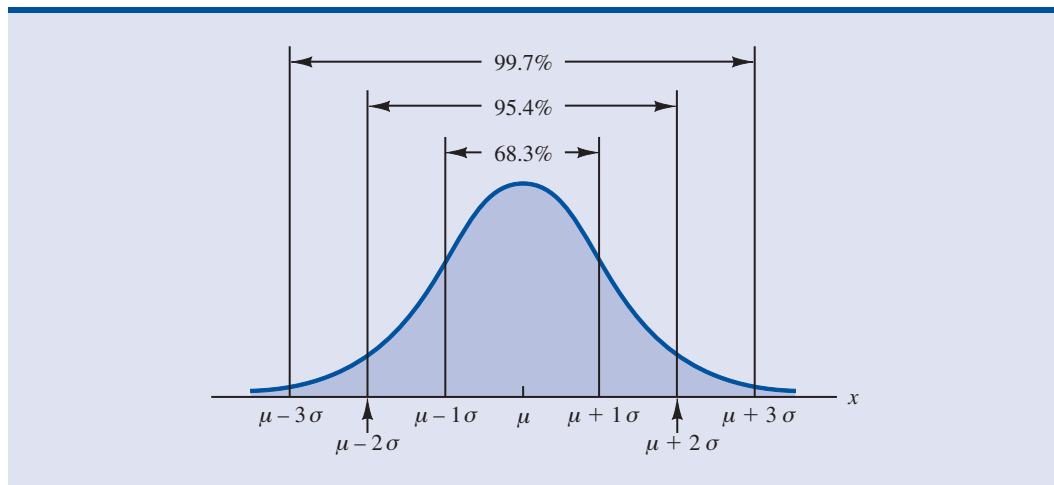
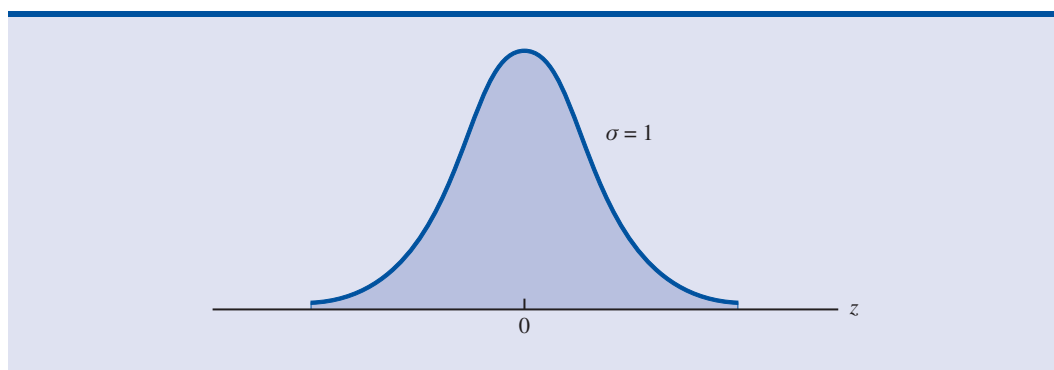
6. Las probabilidades correspondientes a la variable aleatoria normal se dan mediante áreas bajo la curva normal. Toda el área bajo la curva de una distribución normal es 1. Como esta distribución es simétrica, el área bajo la curva y a la izquierda de la media es 0.50 y el área bajo la curva y a la derecha de la media es 0.50.
7. Los porcentajes de los valores que se encuentran en algunos intervalos comúnmente usados son:
  - a. 68.3% de los valores de una variable aleatoria normal se encuentran más o menos una desviación estándar de la media.
  - b. 95.4% de los valores de una variable aleatoria normal se encuentran más o menos dos desviaciones estándar de la media.
  - c. 99.7% de los valores de una variable aleatoria normal se encuentran más o menos tres desviaciones estándar de la media.

*Estos porcentajes son la base de la regla empírica que se presentó en la sección 3.3.*

En la figura 6.4 aparece una gráfica de las propiedades a, b y c.

## Distribución de probabilidad normal estándar

Una variable aleatoria que tiene una distribución normal con una media cero y desviación estándar de uno tiene una **distribución normal estándar**. Para designar esta variable aleatoria normal se suele usar la letra  $z$ . La figura 6.5 es la gráfica de la distribución normal estándar. Esta distribución tiene el mismo aspecto general que cualquier otra distribución normal, pero tiene las propiedades especiales,  $\mu = 0$  y  $\sigma = 1$ .

**FIGURA 6.4** ÁREAS BAJO LA CURVA DE CUALQUIER DISTRIBUCIÓN NORMAL**FIGURA 6.5** DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

Dado que  $\mu = 0$  y  $\sigma = 1$ , la fórmula de la función de densidad de probabilidad normal estándar es una versión más simple de la ecuación (6.2).

#### FUNCIÓN DE DENSIDAD NORMAL ESTÁNDAR

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

Como ocurre con otras variables aleatorias continuas, los cálculos de la probabilidad en cualquier distribución normal se hacen calculando el área bajo la gráfica de la función de densidad de probabilidad. Por tanto, para hallar la probabilidad de que una variable aleatoria normal esté dentro de un determinado intervalo, se tiene que calcular el área que se encuentra bajo la curva normal y sobre ese intervalo.

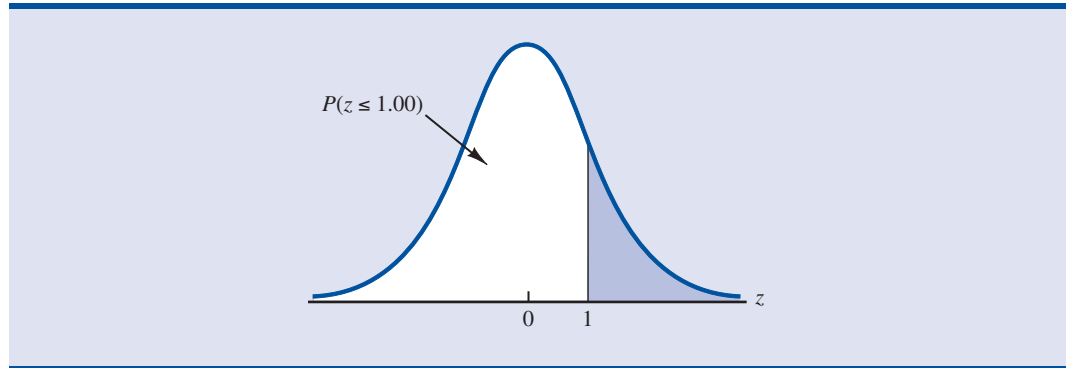
Para la distribución normal estándar ya se encuentran calculadas las áreas bajo la curva normal y se cuenta con tablas que dan estas áreas y que se usan para calcular las probabilidades. Estas tablas se encuentran en los forros interiores al inicio del libro. La tabla del forro izquierdo contiene áreas, o probabilidades acumuladas, correspondientes a valores de  $z$  menores o iguales a la media, cero. La tabla siguiente contiene áreas, o probabilidades acumuladas, correspondientes a valores de  $z$  mayores o iguales a la media de cero.

*En la función de densidad de probabilidad normal, la altura de la curva varía y para calcular las áreas que representan las probabilidades se requiere de matemáticas más avanzadas.*

Los tres tipos de probabilidades que se necesitan calcular son: (1) la probabilidad de que la variable aleatoria normal estándar  $z$  sea menor o igual que un valor dado; (2) la probabilidad de que  $z$  esté entre dos valores dados, y (3) la probabilidad de que  $z$  sea mayor o igual que un valor dado. Para mostrar el uso de las tablas de probabilidad acumulada de la distribución normal estándar en el cálculo de estos tres tipos de probabilidades, se consideran algunos ejemplos.

*Debido a que la variable aleatoria normal estándar es continua,  $P(z \leq 1.00) = P(z < 1.00)$ .*

Se empieza por mostrar cómo se calcula la probabilidad de que  $z$  sea menor o igual a 1.00; es decir  $P(z \leq 1.00)$ . Esta probabilidad acumulada es el área bajo la curva normal a la izquierda de  $z = 1.00$  como se muestra en la gráfica siguiente.

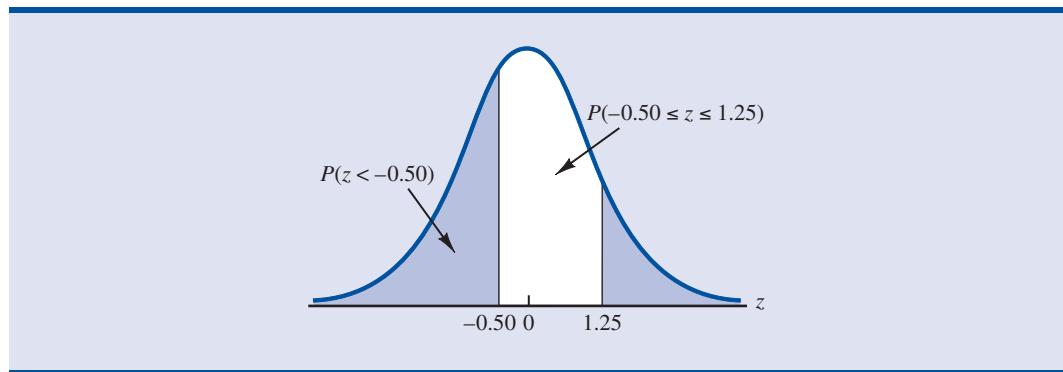


Consulte la página del lado derecho de la tabla de la distribución de probabilidad normal estándar que se encuentra dentro de la cubierta frontal del libro. Esta probabilidad acumulada correspondiente a  $z = 1.00$  es el valor que en la tabla se localiza en la intersección del renglón cuyo encabezado es 1.0 y la columna cuyo encabezado es 0.00. Primero localice 1.0 en la columna del extremo izquierdo de la tabla y después localice 0.00 en el renglón en la parte superior de la tabla. Observe que en el interior de la tabla, el renglón 1.0 y la columna 0.00 se cruzan en el valor 0.8413; por tanto,  $P(z \leq 1.00) = 0.8413$ . Estos pasos se muestran en el extracto siguiente de las tablas de probabilidad.

$z$	0.00	0.01	0.02
.			
.			
.			
0.9	0.8159	0.8186	0.8212
1.0	<b>0.8413</b>	0.8438	0.8461
1.1	0.8643	0.8665	0.8686
1.2	0.8849	0.8869	0.8888
.			
.			
.			

$P(z \leq 1.00)$

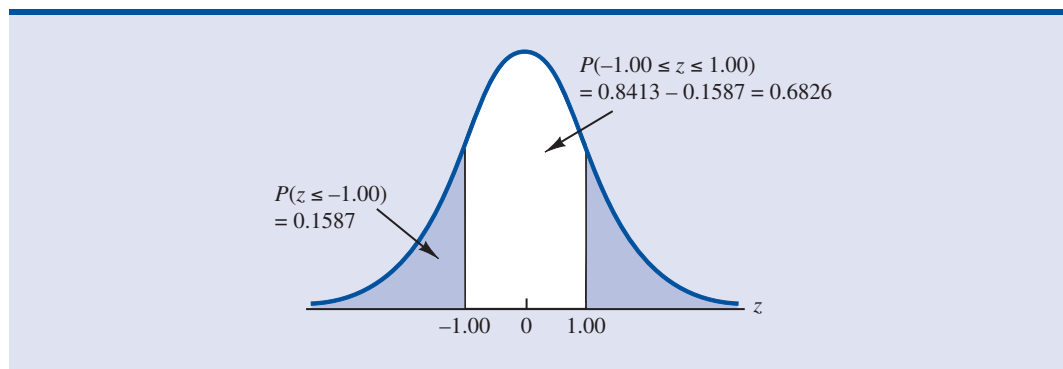
Para ilustrar el segundo tipo de cálculo de una probabilidad se muestra cómo calcular la probabilidad de que  $z$  esté en el intervalo entre  $-0.50$  y  $1.25$ ; esto es,  $P(-.50 \leq z \leq 1.25)$ . En la gráfica siguiente se muestra esta área o probabilidad.



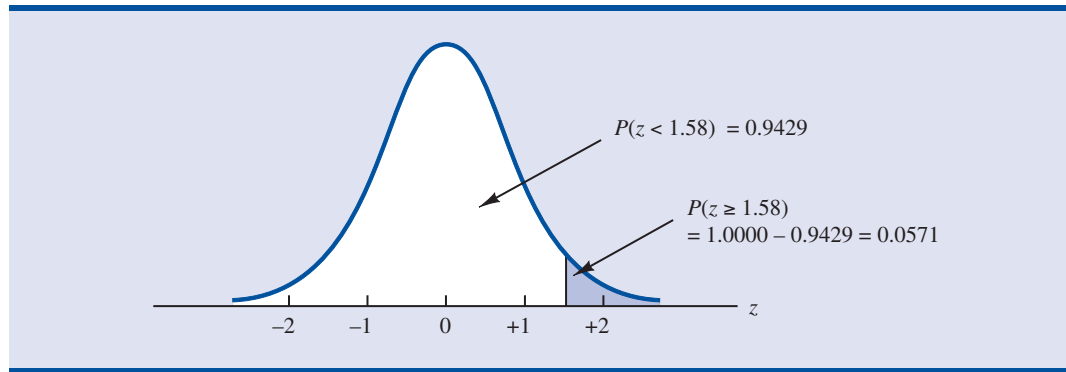
Para calcular esta probabilidad son necesarios tres pasos. Primero, se encuentra el área bajo la curva normal a la izquierda de  $z = 1.25$ . Segundo, se encuentra el área bajo la curva normal a la izquierda de  $z = -0.50$ . Por último, se resta el área a la izquierda de  $z = -0.50$  del área a la izquierda de  $z = 1.25$  y se encuentra,  $P(-0.50 \leq z \leq 1.25)$ .

Para encontrar el área bajo la curva normal a la izquierda de  $z = 1.25$ , primero se localiza en la tabla de probabilidad normal estándar el renglón 1.2 y después se avanza por ese renglón hasta la columna 0.05. Como el valor que aparece en el renglón 1.2 columna 0.05 es 0.8944,  $P(z \leq 1.25) = 0.8944$ . De manera similar, para encontrar el área bajo la curva a la izquierda de  $z = -0.50$  se usa el forro izquierdo de la tabla para localizar el valor en el renglón  $-0.5$  columna 0.00; como el valor que se encuentra es 0.3085,  $P(z \leq -0.50) = 0.3085$ . Por tanto,  $P(-0.50 \leq z \leq 1.25) = P(z \leq 1.25) - P(z \leq -0.50) = 0.8944 - 0.3085 = 0.5859$ .

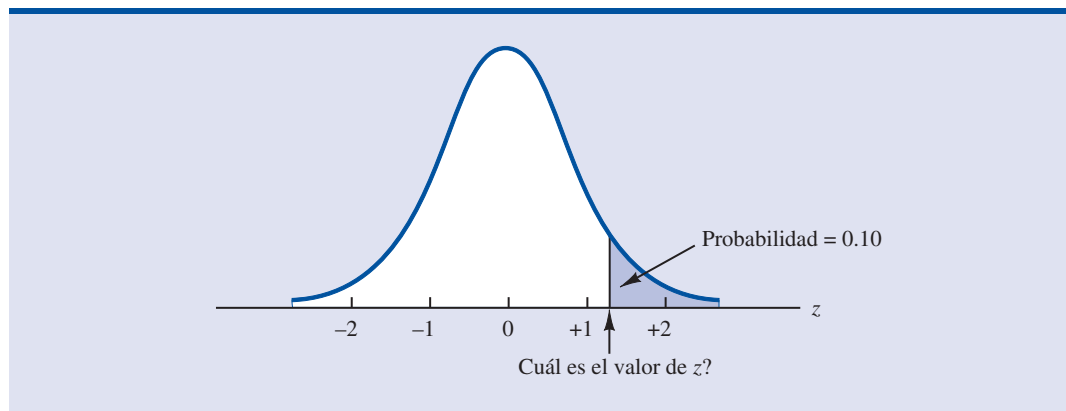
A continuación se presenta otro ejemplo para calcular la probabilidad de que  $z$  esté en el intervalo entre dos valores dados. Con frecuencia se desea calcular la probabilidad de que una variable aleatoria normal tome un valor dentro de cierto número de desviaciones estándar respecto a la media. Suponga que desea calcular la probabilidad de que la variable aleatoria normal estándar se encuentre a no más de una desviación estándar de la media; es decir,  $P(-1.00 \leq z \leq 1.00)$ . Para calcular esta probabilidad tiene que hallar el área bajo la curva entre  $-1.00$  y  $1.00$ . Antes encontró que  $P(z \leq 1.00) = 0.8413$ . Si va al forro izquierdo, encontrará que el área bajo la curva a la izquierda de  $z = -1.00$  es 0.1587, de manera que  $P(z \leq -1.00) = 0.1587$ . Por tanto,  $P(-1.00 \leq z \leq 1.00) = P(z \leq 1.00) - P(z \leq -1.00) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$ . Esta probabilidad se muestra en forma gráfica en la figura siguiente.



Para ilustrar cómo se calcula el tercer tipo de probabilidad, suponga que desea calcular la probabilidad de tener un valor  $z$  por lo menos igual a 1.58; es decir,  $P(z \geq 1.58)$ . El valor en el renglón  $z = 1.5$ , columna 0.08 de la tabla normal acumulada es 0.9429; por tanto,  $P(z < 1.58) = 0.9429$ . Pero, como toda el área bajo la curva normal es 1,  $P(z \geq 1.58) = 1 - 0.9429 = 0.0571$ . En la figura siguiente se muestra esta probabilidad.



En los ejemplos anteriores se muestra cómo calcular probabilidades dados determinados valores de  $z$ . En algunas situaciones se da una probabilidad y se trata de hacer lo contrario, encontrar el correspondiente valor de  $z$ . Suponga que desea hallar un valor  $z$  tal que la probabilidad de obtener un valor  $z$  mayor sea 0.10. En la figura siguiente se muestra en forma gráfica esta situación.



*Dada una probabilidad, se puede usar la tabla normal estándar para encontrar el correspondiente valor de  $z$ .*

Este problema es la situación contraria a la presentada en los ejemplos anteriores, en ellos se dio el valor  $z$  y se halló la probabilidad o área correspondiente. En este ejemplo se da la probabilidad, o el área, y se pide hallar el valor correspondiente de  $z$ . Para esto se usa la tabla de probabilidad normal estándar de una manera un poco diferente.

Recuerde que la tabla de probabilidad normal estándar da el área bajo la curva a la izquierda de un determinado valor  $z$ . Se ha recibido la información de que el área en la cola superior (derecha) de la curva es 0.10. Por tanto, el área bajo la curva a la izquierda del valor desconocido de  $z$  debe ser 0.9000. Al recorrer el cuerpo de la tabla, se encuentra que 0.8997 es la probabilidad acumulada más cercana a 0.9000. A continuación se reproduce la sección de la tabla en la que se encuentra este resultado.

$z$	0.06	0.07	0.08	0.09
.				
.				
.				
1.0	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
.				
.				
.				

Probabilidad acumulada más cercana a 0.9000

Al leer el valor de  $z$  en la columna del extremo izquierdo y en el renglón superior de la tabla, se encuentra que el valor de  $z$  es 1.28. De manera que un área de aproximadamente 0.9000 (en realidad de 0.8997) es la que se encuentra a la izquierda de  $z = 1.28$ .\* En términos de la pregunta originalmente planteada, 0.10 es la probabilidad aproximada de que  $z$  sea mayor que 1.28.

Estos ejemplos ilustran que la tabla de probabilidades acumuladas para la distribución de probabilidad normal estándar se puede usar para hallar probabilidades correspondientes a valores de la variable aleatoria normal estándar  $z$ . Es posible hacer dos tipos de preguntas. En el primer tipo de pregunta se dan valores, o un valor de  $z$ , y se pide usar la tabla para determinar el área o probabilidad correspondiente. En el segundo tipo de pregunta se da un área, o probabilidad, y se pide usar la tabla para encontrar el correspondiente valor de  $z$ . Por tanto, se necesita tener flexibilidad para usar la tabla de probabilidad normal estándar para responder la pregunta deseada. En la mayoría de los casos, hacer un bosquejo de la gráfica de la distribución de probabilidad normal estándar y sombrear el área deseada será una ayuda para visualizar la situación y encontrar la respuesta correcta.

## Cálculo de probabilidades en cualquier distribución de probabilidad normal

La razón por la cual la distribución normal estándar se ha visto de manera tan amplia es que todas las distribuciones normales son calculadas mediante la distribución normal estándar. Esto es, cuando distribución normal con una media  $\mu$  cualquiera y una desviación estándar  $\sigma$  cualquiera, las preguntas sobre las probabilidades en esta distribución se responden pasando primero a la distribución normal estándar. Use las tablas de probabilidad normal estándar y los valores apropiados de  $z$  para hallar las probabilidades deseadas. A continuación se da la fórmula que se emplea para convertir cualquier variable aleatoria  $x$  con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$  en la variable aleatoria normal estándar  $z$ .

*La fórmula para la variable aleatoria normal estándar es semejante a la fórmula que se dio en el capítulo 3 para los puntos  $z$  de un conjunto de datos.*

### CONVERSIÓN A LA VARIABLE ALEATORIA NORMAL ESTÁNDAR

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (6.3)$$

\* Se podía haber hecho una interpolación en el cuerpo de la tabla para obtener una aproximación más exacta al valor  $z$  que corresponde al área 0.9000. Al hacerlo en busca de un lugar decimal más preciso se obtiene 1.282. Sin embargo, en la mayor parte de las situaciones prácticas, es suficiente con la precisión obtenida usando el valor más cercano al valor deseado que da la tabla.

Un valor  $x$  igual a su media  $\mu$  da como resultado  $z = (\mu - \mu)/\sigma = 0$ . De manera que un valor  $x$  igual a su media corresponde a  $z = 0$ . Ahora suponga que  $x$  se encuentra una desviación estándar arriba de su media. Es decir,  $x = \mu + \sigma$ . Aplicando la ecuación (6.3) el valor correspondiente es  $z = [(\mu + \sigma) - \mu]/\sigma = \sigma/\sigma = 1$ . Así que un valor de  $x$  que es una desviación estándar mayor que su media corresponde a  $z = 1$ . En otras palabras,  $z$  se interpreta como el número de desviaciones estándar a las que está una variable aleatoria  $x$  de su media  $\mu$ .

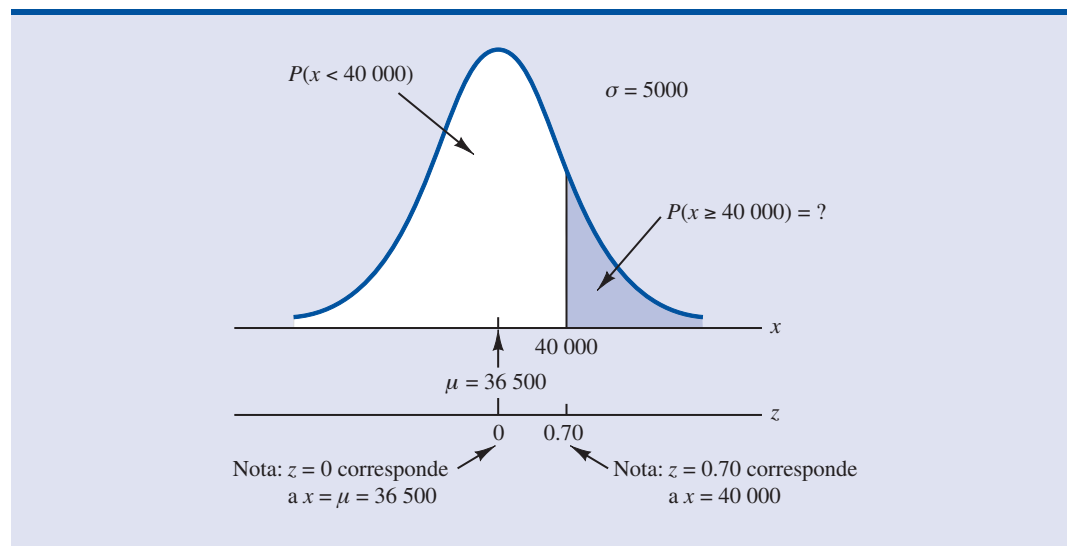
Para ver cómo esta distribución permite calcular probabilidades en cualquier distribución normal, admita que tiene una distribución en la que  $\mu = 10$  y  $\sigma = 2$ . ¿Cuál es la probabilidad de que la variable aleatoria  $x$  esté entre 10 y 14? Empleando la ecuación (6.3) se ve que para  $z = (x - \mu)/\sigma = (10 - 10)/2 = 0$  y que para  $x = 14$ ,  $z = (14 - 10)/2 = 4/2 = 2$ . Así, la respuesta a la pregunta acerca de la probabilidad de que  $x$  esté entre 10 y 14 está dada por la probabilidad equivalente de que  $z$  esté entre 0 y 2 en la distribución normal estándar. En otras palabras, la probabilidad que se está buscando es que la variable aleatoria  $x$  esté entre su media y dos desviaciones estándar arriba de la media. Usando  $z = 2$  y la tabla de probabilidad normal estándar del forro interior, se ve que  $P(z \leq 2) = 0.9772$ . Como  $P(z \leq 0) = 0.5000$ , se tiene que  $P(0.00 \leq z \leq 2.00) = P(z \leq 2) - P(z \leq 0) = 0.9772 - 0.5000 = 0.4772$ . Por tanto, la probabilidad de que  $x$  esté entre 10 y 14 es 0.4772.

## El problema de la empresa Grear Tire

Para una aplicación de la distribución de probabilidad normal, suponga que Grear Tire Company ha fabricado un nuevo neumático que será vendido por una cadena nacional de tiendas de descuento. Como este neumático es un producto nuevo, los directivos de Grear piensan que la garantía de duración será un factor importante en la aceptación del neumático. Antes de finalizar la póliza de garantía, los directivos necesitan información probabilística acerca de  $x$  = duración del neumático en número de millas.

De acuerdo con las pruebas realizadas al neumático, los ingenieros de Grear estiman que la duración media en millas es  $\mu = 36\,500$  millas y que la desviación estándar es  $\sigma = 5\,000$ . Además, los datos recogidos indican que es razonable suponer una distribución normal. ¿Qué porcentaje de los neumáticos se espera que duren más de 40 000 millas? En otras palabras, ¿cuál es la probabilidad de que la duración de los neumáticos sea superior a 40 000? Esta pregunta se responde hallando el área de la región sombreada que se observa en la gráfica de la figura 6.6.

**FIGURA 6.6** DISTRIBUCIÓN DE DURACIÓN EN MILLAS PARA GREAR TIRE COMPANY



Para  $x = 40\,000$ , se tiene

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{40\,000 - 36\,500}{5\,000} = \frac{3\,500}{5\,000} = 0.70$$

Observe que en la parte inferior de la figura 6.6 el valor  $x = 40\,000$  en la distribución normal de Grear Tire corresponde a  $z = 0.70$  en la distribución normal estándar. Mediante la tabla de probabilidad normal estándar se encuentra que el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de  $z = 0.70$  es 0.7580. De manera que  $1.000 - 0.7580 = 0.2420$  es la probabilidad de que  $z$  sea mayor a 0.70 y por tanto de que  $x$  sea mayor a 40 000. Entonces 24.2% de los neumáticos durará más de 40 000 millas.

Ahora suponga que Grear está considerando una garantía que dé un descuento en la sustitución del neumático original si éste no dura lo que asegura la garantía. ¿Cuál deberá ser la duración en millas especificada en la garantía si Grear desea que no más de 10% de los neumáticos alcancen la garantía? En la figura 6.7 se plantea esta pregunta en forma gráfica.

De acuerdo con la figura 6.7, el área bajo la curva a la izquierda de la cantidad desconocida de millas para la garantía debe ser 0.10. De manera que primero se debe encontrar el valor de  $z$  que deja un área de 0.10 en el extremo de la cola izquierda de la distribución normal estándar. Según la tabla de probabilidad normal estándar  $z = -1.28$  deja un área de 0.10 en el extremo de la cola izquierda. Por tanto,  $z = -1.28$  es el valor de la variable aleatoria normal estándar que corresponde a las millas de duración deseadas para la garantía en la distribución normal de Grear Tire. Para hallar el valor de  $x$  que corresponde a  $z = -1.28$ , se tiene

Las millas de garantía que se desean encontrar están a 1.28 desviaciones estándar abajo de la media. Por tanto,  $x = \mu - 1.28\sigma$ .

$$\begin{aligned} z &= \frac{x - \mu}{\sigma} = -1.28 \\ x - \mu &= -1.28\sigma \\ x &= \mu - 1.28\sigma \end{aligned}$$

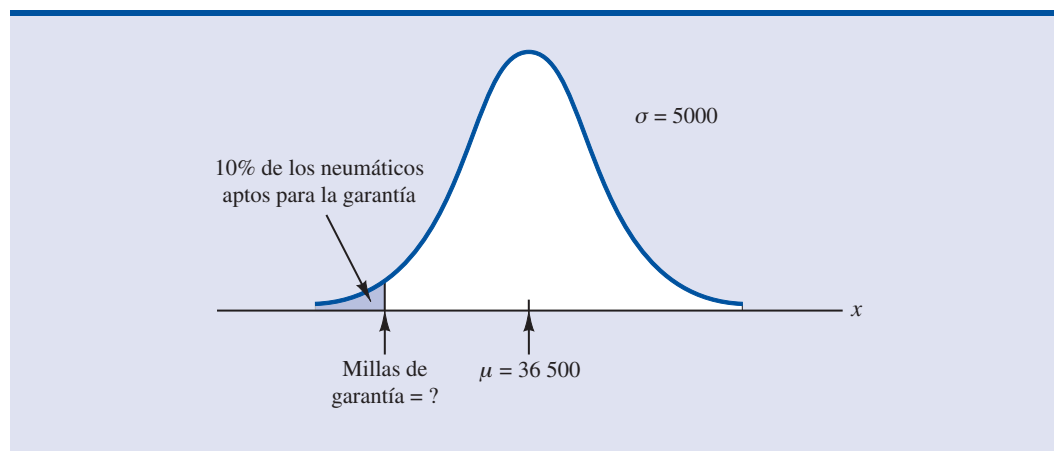
Como  $\mu = 36\,500$  y  $\sigma = 5\,000$ ,

$$x = 36\,500 - 1.28(5\,000) = 30\,100$$

Al establecer una garantía a partir de 30 000 millas, el porcentaje real apto para la garantía será 9.68%.

Por tanto, una garantía de 30 100 millas cumplirá con el requerimiento de que aproximadamente 10% de los neumáticos sean aptos para la garantía. Con esta información, quizá la empresa establezca una garantía de 30 000 millas.

FIGURA 6.7 GARANTÍA DE GREAR





Nuevamente, se observa la importancia de las distribuciones de probabilidad en el suministro de información para la toma de decisiones. A saber, una vez que la distribución de probabilidad es establecida para una aplicación en particular, puede ser usada para obtener información probabilística acerca del problema. La probabilidad no recomienda directamente una decisión, pero suministra información que ayuda a tomarla entendiendo mejor los riesgos y la incertidumbre asociados al problema. Finalmente, esta información ayuda a enriquecer una buena decisión.

## Ejercicios

### Métodos

8. Usando como guía la figura 6.4, dibuje la curva normal de la variable aleatoria  $x$  cuya media es  $\mu = 100$  con desviación estándar de  $\sigma = 10$ . Indique en el eje horizontal los valores 70, 80, 90, 100, 110, 120 y 130.
9. Una variable aleatoria es normalmente distribuida con media  $\mu = 50$  y desviación estándar  $\sigma = 5$ .
  - a. Dibuje la curva normal de la función de densidad de probabilidad. En el eje horizontal dé los valores 35, 40, 45, 50, 55, 60 y 65. En la figura 6.4 se observa que la curva normal casi toca el eje horizontal en los puntos que se encuentran tres desviaciones estándar arriba de la media y tres desviaciones estándar debajo de la media (en este caso en 35 y 65).
  - b. ¿Cuál es la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor entre 45 y 55?
  - c. ¿De qué la variable aleatoria tome un valor entre 40 y 60?
10. Dibuje la gráfica de la distribución normal estándar. Etiquete el eje horizontal con los valores  $-3$ ,  $-2$ ,  $-1$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$  y  $3$ . Después use la tabla de probabilidades de la distribución normal estándar que se encuentra en el forro interior del libro para calcular las probabilidades siguientes.
  - a.  $P(z \leq 1.5)$
  - b.  $P(z \leq 1)$
  - c.  $P(1 \leq z \leq 1.5)$
  - d.  $P(0 < z < 2.5)$
11. Dado que  $z$  es la variable normal estándar, calcule las probabilidades siguientes.
  - a.  $P(z \leq -1.0)$
  - b.  $P(z \geq -1)$
  - c.  $P(z \geq -1.5)$
  - d.  $P(-2.5 \leq z)$
  - e.  $P(-3 < z \leq 0)$
12. Dado que  $z$  es la variable normal estándar, calcule las probabilidades siguientes.
  - a.  $P(0 \leq z \leq 0.83)$
  - b.  $P(-1.57 \leq z \leq 0)$
  - c.  $P(z > 0.44)$
  - d.  $P(z \geq -0.23)$
  - e.  $P(z < 1.20)$
  - f.  $P(z \leq -0.71)$
13. Dado que  $z$  es la variable normal estándar, calcule las probabilidades siguientes.
  - a.  $P(-1.98 \leq z \leq 0.49)$
  - b.  $P(0.52 \leq z \leq 1.22)$
  - c.  $P(-1.75 \leq z \leq -1.04)$
14. Dado que  $z$  es la variable normal estándar, encuentre  $z$  en cada una de las situaciones siguientes.
  - a. El área a la izquierda de  $z$  es 0.9750.
  - b. El área entre 0 y  $z$  es 0.4750.
  - c. El área a la izquierda de  $z$  es 0.7291.
  - d. El área a la derecha de  $z$  es 0.1314.
  - e. El área a la izquierda de  $z$  es 0.6700.
  - f. El área a la derecha de  $z$  es 0.3300.

## Autoexamen

15. Dado que  $z$  es la variable normal estándar, halle  $z$  en cada una de las situaciones siguientes.
  - a. El área a la izquierda de  $z$  es 0.2119
  - b. El área entre  $-z$  y  $z$  es 0.9030.
  - c. El área entre  $-z$  y  $z$  es 0.2052.
  - d. El área a la izquierda de  $z$  es 0.9948.
  - e. El área a la derecha de  $z$  es 0.6915.
16. Dado que  $z$  es la variable normal estándar, encuentre  $z$  en cada una de las situaciones siguientes.
  - a. El área a la derecha de  $z$  es 0.01
  - b. El área a la derecha de  $z$  es 0.025.
  - c. El área a la derecha de  $z$  es 0.05.
  - d. El área a la derecha de  $z$  es 0.10.

## Aplicaciones

## Autoexamen

17. Una persona con una buena historia crediticia tiene una deuda promedio de \$15 015 (*BusinessWeek*, 20 de marzo de 2006). Suponga que la desviación estándar es de \$3 540 y que los montos de las deudas están distribuidos normalmente.
  - a. ¿Cuál es la probabilidad de que la deuda de una persona con buena historia crediticia sea mayor a \$18 000?
  - b. ¿De que la deuda de una persona con buena historia crediticia sea de menos de \$10 000?
  - c. ¿De que la deuda de una persona con buena historia crediticia esté entre \$12 000 y \$18 000?
  - d. ¿De que la deuda de una persona con buena historia crediticia sea mayor a \$14 000?
18. El precio promedio de las acciones que pertenecen a S&P500 es de \$30 y la desviación estándar es \$8.20 (*BusinessWeek*, Special Annual Issue, primavera de 2003). Suponga que los precios de las acciones están distribuidos normalmente.
  - a. ¿Cuál es la probabilidad de que el precio de las acciones de una empresa sea por lo menos de \$40?
  - b. ¿De que el precio de las acciones de una empresa no sea mayor a \$20?
  - c. ¿De cuánto deben ser los precios de las acciones de una empresa para que esté entre las 10% mejores?
19. La cantidad promedio de precipitación pluvial en Dallas, Texas, durante el mes de abril es 3.5 pulgadas (*The World Almanac*, 2000). Suponga que se puede usar una distribución normal y que la desviación estándar es 0.8 pulgadas.
  - a. ¿Qué porcentaje del tiempo la precipitación pluvial en abril es mayor que 5 pulgadas?
  - b. ¿Qué porcentaje del tiempo la precipitación pluvial en abril es menor que 3 pulgadas?
  - c. Un mes se considera como extremadamente húmedo si la precipitación pluvial es 10% superior para ese mes. ¿Cuánta debe ser la precipitación pluvial en abril para que sea considerado un mes extremadamente húmedo?
20. En enero de 2003 un empleado estadounidense pasaba, en promedio, 77 horas conectado a Internet durante las horas de trabajo (CNBC, 15 de marzo de 2003). Suponga que la media poblacional es 77 horas, tiempos que están distribuidos normalmente y que la desviación estándar es 20 horas.
  - a. ¿Cuál es la probabilidad de que en enero de 2003 un empleado seleccionado aleatoriamente haya pasado menos de 50 horas conectado a Internet?
  - b. ¿Qué porcentaje de los empleados pasó en enero de 2003 más de 100 horas conectado a Internet?
  - c. Un usuario es clasificado como intensivo si se encuentra en el 20% superior de uso. ¿Cuántas horas tiene un empleado que haber estado conectado a Internet en enero de 2003 para que se le considerara un usuario intensivo?
21. La puntuación de una persona en una prueba de IQ debe estar en el 2% superior para que sea clasificado como miembro del grupo Mensa, la sociedad internacional de IQ elevado (*U.S. Airways Attaché*, septiembre de 2000). Si las puntuaciones de IQ tienen una distribución normal con una media de 100 y desviación estándar de 15, ¿cuál debe ser la puntuación de una persona para que se le considere miembro del grupo Mensa?

22. La tasa de remuneración media por hora para administrativos financieros en una determinada región es \$32.62 y la desviación estándar es \$2.32 (Bureau of Labor Statistics, septiembre de 2005). Suponga que estas tasas de remuneración están distribuidas normalmente.
- ¿Cuál es la probabilidad de que un directivo financiero tenga una remuneración entre \$30 y \$35 por hora?
  - ¿Qué tan alta debe ser la remuneración por hora para que un directivo financiero tenga un pago 10% superior?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que la remuneración por hora de un directivo financiero sea menos de \$28 por hora?
23. El tiempo necesario para hacer un examen final en un determinado curso de una universidad tiene una distribución normal cuya media es 80 minutos con desviación estándar de 10 minutos. Conteste las preguntas siguientes
- ¿Cuál es la probabilidad de terminar el examen en una hora o menos?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante termine el examen en más de 60 minutos pero en menos de 75 minutos?
  - Suponga que en la clase hay 60 estudiantes y que el tiempo para resolver el examen es de 90 minutos. ¿Cuántos estudiantes piensa usted que no podrán terminar el examen en este tiempo?
24. El volumen de negociaciones en la Bolsa de Nueva York es más intenso en la primera media hora (en la mañana temprano) y la última media hora (al final de la tarde) de un día de trabajo. A continuación se presentan los volúmenes (en millones de acciones) de 13 días de enero y febrero.



214	163	265	194	180
202	198	212	201	
174	171	211	211	

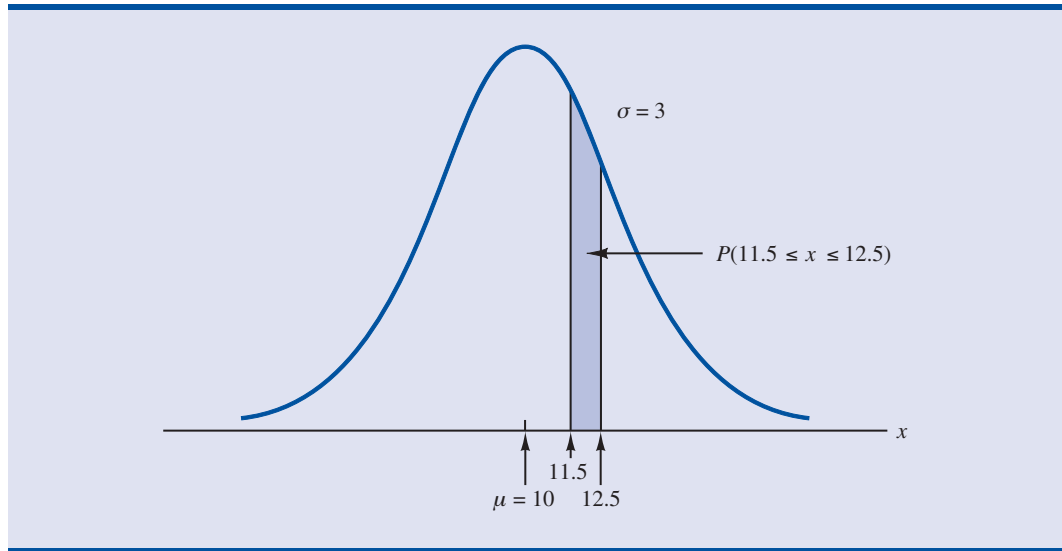
- La distribución de probabilidad de los volúmenes de negociaciones es aproximadamente normal.
- Calcule la media y la desviación estándar a usar como estimaciones de la media y de la desviación estándar de la población.
  - ¿Cuál es la probabilidad de que, en un día elegido al azar, el volumen de negociaciones en la mañana temprano sea superior a 180 millones de acciones?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que, en un día elegido al azar, el volumen de negociaciones en la mañana temprano sea superior a 230 millones de acciones?
  - ¿Cuántas acciones deberán ser negociadas para que el volumen de negociaciones en la mañana temprano de un día determinado pertenezca al 5% de los días de mayor movimiento?
25. De acuerdo con la Sleep Foundation, en promedio se duermen 6.8 horas por noche. Suponga que la desviación estándar es 0.6 horas y que la distribución de probabilidad es normal.
- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar duerma más de ocho horas?
  - ¿De que una persona tomada aleatoriamente duerma seis horas o menos?
  - Los médicos aconsejan dormir entre siete y nueve horas por noche. ¿Qué porcentaje de la población duerme esta cantidad?

## 6.3

## Aproximación normal de las probabilidades binomiales

En la sección 5.4 se presentó la distribución binomial discreta. Recuerde que un experimento binomial consiste en una serie de  $n$  ensayos idénticos e independientes, habiendo para cada ensayo dos resultados posibles, éxito o fracaso. La probabilidad de éxito en un ensayo es la misma que en cualquier otro de los ensayos y se denota  $p$ . La variable aleatoria binomial es el número de éxitos en  $n$  ensayos y lo que se quiere saber es la probabilidad de  $x$  éxitos en  $n$  ensayos.

**FIGURA 6.8** APROXIMACIÓN NORMAL A UNA PROBABILIDAD BINOMIAL  
DISTRIBUCIÓN EN LA QUE  $n = 100$  Y  $p = 0.10$  MOSTRANDO LA  
PROBABILIDAD DE 12 ERRORES



La evaluación de una función de probabilidad binomial, a mano o con una calculadora, se dificulta cuando el número de ensayos es muy grande. En los casos en que  $np \geq 5$  y  $n(1 - p) \geq 5$ , la distribución normal proporciona una aproximación a las probabilidades binomiales que es fácil de usar. Cuando se usa la aproximación normal a la binomial, en la definición de la curva normal  $\mu = np$  y  $\sigma = \sqrt{np(1 - p)}$ .

Para ilustrar la aproximación normal a la binomial, suponga que una empresa sabe por experiencia que 10% de sus facturas tienen algún error. Toma una muestra de 100 facturas y desea calcular la probabilidad de que 12 de estas facturas contengan algún error. Es decir, quiere hallar la probabilidad binomial de 12 éxitos en 100 ensayos. Aplicando la aproximación normal a este caso se tiene,  $\mu = np = (100)(0.1) = 10$  y  $\sigma = \sqrt{np(1 - p)} = \sqrt{(100)(0.1)(0.9)} = 3$ . En la figura 6.8 se muestra la distribución normal con  $\mu = 10$  y  $\sigma = 3$ .

Recuerde que en una distribución de probabilidad continua las probabilidades se calculan como áreas bajo la curva de la función de densidad de probabilidad. En consecuencia, la probabilidad que tiene un solo valor de la variable aleatoria es cero. Por tanto, para aproximar la probabilidad binomial de 12 éxitos se calcula el área correspondiente bajo la curva normal entre 11.5 y 12.5. Al 0.5 que se suma y se resta al 12 se le conoce como **factor de corrección por continuidad**. Este factor se introduce debido a que se está usando una distribución continua para aproximar una distribución discreta. Así,  $P(x = 12)$  de una distribución binomial *discreta* se aproxima mediante  $P(11.5 \leq x \leq 12.5)$  en la distribución normal *continua*.

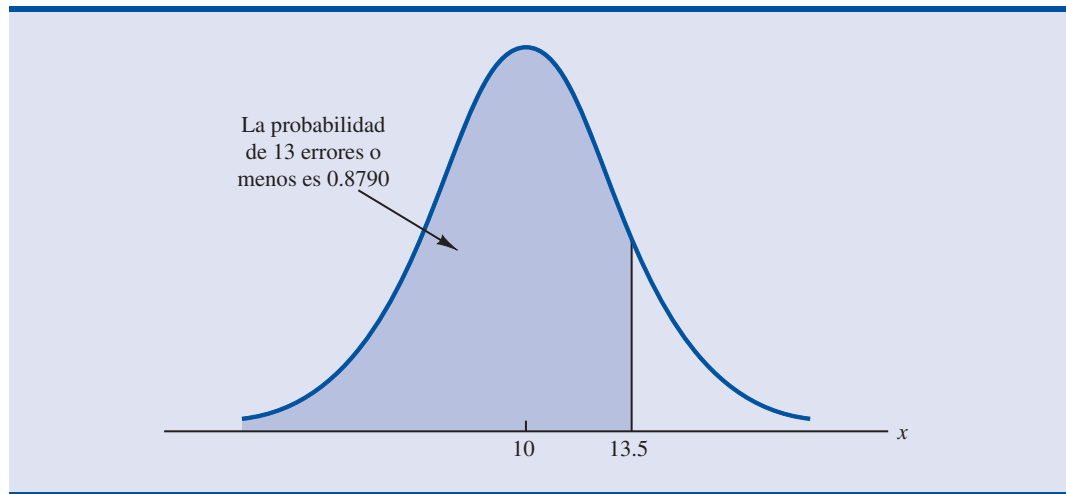
Convirtiendo la distribución normal estándar para calcular  $P(11.5 \leq x \leq 12.5)$ , se tiene

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{12.5 - 10.0}{3} = 0.83 \quad \text{para } x = 12.5$$

y

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{11.5 - 10.0}{3} = 0.50 \quad \text{para } x = 11.5$$

**FIGURA 6.9** APROXIMACIÓN NORMAL A UNA PROBABILIDAD BINOMIAL: DISTRIBUCIÓN EN LA QUE  $n = 100$  Y  $p = 0.10$  MUESTRAN LA PROBABILIDAD DE 13 ERRORES O MENOS



En la tabla de la probabilidad normal estándar aparece que el área bajo la curva (figura 6.8) a la izquierda de 12.5 es 0.7967. De manera similar, el área bajo la curva a la izquierda de 11.5 es 0.6915. Por tanto, el área entre 11.5 y 12.5 es  $0.7967 - 0.6915 = 0.1052$ . El cálculo normal de la probabilidad de 12 éxitos en 100 ensayos es 0.1052.

Para tener un ejemplo más, suponga que se quiere calcular la probabilidad de 13 o menos facturas con errores en una muestra de 100 facturas. En la figura 6.9 se muestra el área bajo la curva que aproxima esta probabilidad. Observe que debido al uso del factor de continuidad el valor que se usa para calcular esta probabilidad es 13.5. El valor  $z$  que corresponde a 13.5 es

$$z = \frac{13.5 - 10.0}{3.0} = 1.17$$

En la tabla de probabilidad normal estándar se observa que el área bajo la curva normal estándar y a la izquierda de  $z = 1.17$  es 0.8790. El área bajo la curva normal que aproxima la probabilidad de 13 o menos facturas con errores es la porción sombreada que se observa en la gráfica de la figura 6.9.

## Ejercicios

### Métodos

## Autoexamen

26. En una distribución de probabilidad binomial con  $p = 0.20$  y  $n = 100$ .
  - a. ¿Cuál es la media y la desviación estándar?
  - b. ¿En esta situación las probabilidades binomiales pueden ser aproximadas por la distribución de probabilidad normal? Explique.
  - c. ¿Cuál es la probabilidad de exactamente 24 éxitos?
  - d. ¿Cuál es la probabilidad de 18 a 22 éxitos?
  - e. ¿Cuál es la probabilidad de 15 o menos éxitos?
27. Suponga que se tiene una distribución de probabilidad binomial en la que  $p = 0.60$  y  $n = 200$ .
  - a. ¿Cuál es la media y la desviación estándar?
  - b. ¿En esta situación las probabilidades binomiales puedan ser aproximadas por la distribución de probabilidad normal? Explique.
  - c. ¿Cuál es la probabilidad de 100 a 110 éxitos?

- d. ¿Cuál es la probabilidad de 130 o más éxitos?
- e. ¿Cuál es la ventaja de usar la distribución de probabilidad normal para aproximar las probabilidades binomiales? Use el inciso d para explicar las ventajas.

### Aplicaciones

## Autoexamen

28. El presidente Bush propuso eliminar los impuestos sobre los dividendos que pagan los accionistas debido a que esto resulta en un doble pago de impuestos. Las ganancias que se usan para pagar los dividendos ya han sido grabadas. En un sondeo sobre este tema se encontró que 47% de los estadounidenses estaban a favor de esta propuesta. La posición de los partidos políticos era 64% de los republicanos y 29% de los demócratas a favor de la propuesta (*Investor's Business Daily*, 13 de enero de 2003). Suponga que 250 estadounidenses se reúnen para una conferencia acerca de la propuesta.
  - a. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos la mitad del grupo esté a favor de la propuesta?
  - b. Más tarde se enteró de que en el grupo hay 150 republicanos y 100 demócratas. Ahora, ¿cuál es su estimación del número esperado a favor de la propuesta?
  - c. Ahora que conoce la composición del grupo, ¿cree que un conferencista a favor de la propuesta sea mejor recibido que uno que esté en contra de la propuesta?
29. La tasa de desempleo es de 5.8% (Bureau of Labor Statistics, www.bls.gov, 3 de abril de 2003). Suponga que se seleccionan aleatoriamente 100 personas que se pueden emplear.
  - a. ¿Cuál es el número esperado de quienes están desempleados?
  - b. ¿Cuál es la varianza y la desviación estándar del número de los que están desempleados?
  - c. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente seis estén desempleados?
  - d. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos cuatro estén desempleados?
30. Cuando usted firma un contrato para una tarjeta de crédito, ¿lee cuidadosamente el contrato? En un sondeo FindLaw.com le preguntó a las personas “¿Qué tan cuidadosamente lee usted un contrato para una tarjeta de crédito?” Los hallazgos fueron que 44% leen cada palabra, 33% leen lo suficiente para entender el contrato, 11% sólo le echa una mirada y 4% no lo leen en absoluto.
  - a. En una muestra de 500 personas ¿cuántas esperaría usted que respondan que leen cada palabra de un contrato para una tarjeta de crédito?
  - b. En una muestra de 500 personas ¿cuál es la probabilidad de que 200 o menos digan que leen cada palabra de un contrato para una tarjeta de crédito?
  - c. En una muestra de 500 personas ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 15 digan que no leen en absoluto un contrato para una tarjeta de crédito?
31. El Myrtle Beach hotel tiene 120 habitaciones. En los meses de primavera su ocupación es de 75%.
  - a. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos la mitad de las habitaciones estén ocupadas en un día dado?
  - b. ¿De que 100 o más de las habitaciones estén ocupadas en un día dado?
  - c. ¿De que 80 o menos de las habitaciones estén ocupadas en un día dado?

## 6.4

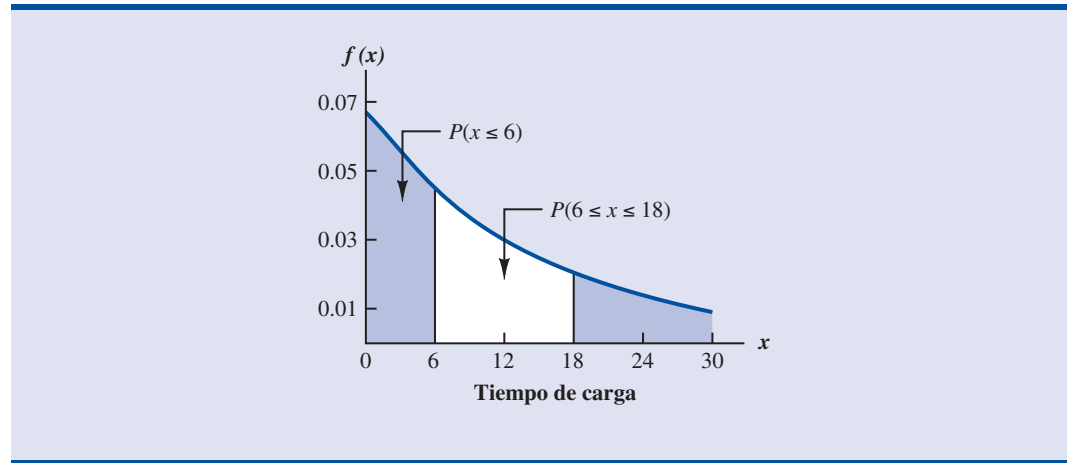
## Distribución de probabilidad exponencial

La **distribución de probabilidad exponencial** se aplica a variables como las llegadas de automóviles a un lavado de coches, los tiempos requeridos para cargar un camión, las distancias entre dos averías en una carretera, etc. A continuación se da la función de densidad de probabilidad exponencial.

### FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD EXPONENCIAL

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \quad \text{para } x \geq 0, \mu > 0 \quad (6.4)$$

donde  $\mu$  = valor esperado o media

**FIGURA 6.10** DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL PARA EL EJEMPLO DEL ÁREA DE CARGA

Como ejemplo de la distribución exponencial, suponga que  $x$  representa el tiempo que se necesita para cargar un camión en un área de carga, y que este tiempo de carga sigue una distribución exponencial. Si el tiempo de carga medio o promedio es 15 minutos ( $\mu = 15$ ), la función de densidad de probabilidad apropiada para  $x$  es

$$f(x) = \frac{1}{15} e^{-x/15}$$

La figura 6.10 es la gráfica de esta función de densidad de probabilidad.

### Cálculo de probabilidades en la distribución exponencial

Como ocurre con cualquier distribución de probabilidad continua, el área bajo la curva correspondiendo a un intervalo da la probabilidad de que la variable aleatoria tome algún valor en ese intervalo. En el ejemplo del área de carga, la probabilidad de que cargar un camión necesite 6 minutos o menos  $P(x \leq 6)$  está definida como el área bajo la curva de la figura 10.6 que va desde  $x = 0$  hasta  $x = 6$ . De manera similar, la probabilidad de que el tiempo de carga sean 18 minutos o menos  $P(x \leq 18)$  es el área bajo la curva desde  $x = 0$  hasta  $x = 18$ . Observe también que la probabilidad de que el tiempo de carga esté entre 6 y 18 minutos  $P(6 \leq x \leq 18)$  corresponde al área bajo la curva desde  $x = 6$  hasta  $x = 18$ .

Para calcular probabilidades exponenciales como las que se acaban de describir, se usa la fórmula siguiente. Esta fórmula aporta la probabilidad acumulada de obtener un valor de la variable aleatoria exponencial que sea menor o igual que algún valor específico denotado por  $x_0$ .

#### DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL: PROBABILIDADES ACUMULADAS

$$P(x \leq x_0) = 1 - e^{-x_0/\mu} \quad (6.5)$$

En el ejemplo del área de carga,  $x$  = tiempo de carga en minutos y  $\mu = 15$  minutos. A partir de la ecuación (6.5)

$$P(x \leq x_0) = 1 - e^{-x_0/15}$$

Por tanto, la probabilidad de que cargar un camión requiera 6 minutos o menos es

$$P(x \leq 6) = 1 - e^{-6/15} = 0.3297$$

*En aplicaciones de colas de espera, la distribución exponencial suele emplearse para tiempos de servicio.*

Con la ecuación (6.5) se calcula la probabilidad de que cargar un camión requiera 18 minutos o menos.

$$P(x \leq 18) = 1 - e^{-18/15} = 0.6988$$

De manera que la probabilidad de que para cargar un camión se necesiten entre 6 y 18 minutos es igual a  $0.6988 - 0.3297 = 0.3691$ . Probabilidades para cualquier otro intervalo se calculan de manera semejante.

*La distribución exponencial tiene la propiedad de que la media y la desviación estándar son iguales.*

En el ejemplo anterior el tiempo medio para cargar un camión fue  $\mu = 15$  minutos. La distribución exponencial tiene la propiedad de que la media de la distribución y la desviación estándar de la distribución son iguales. Por tanto, la desviación estándar del tiempo que se necesita para cargar un camión es  $\sigma = 15$  minutos y la varianza es  $\sigma^2 = (15)^2 = 225$ .

## Relación entre la distribución de Poisson y la exponencial

En la sección 5.5 se presentó la distribución de probabilidad de Poisson como una distribución de probabilidad discreta que se usa para examinar el número de ocurrencias de un evento en un determinado intervalo de tiempo o de espacio. Recuerde que la función de probabilidad de Poisson es

$$f(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

donde

$\mu$  = valor esperado o número medio de ocurrencias  
en un determinado intervalo

*Si las llegadas siguen una distribución de Poisson, el tiempo entre las llegadas debe seguir una distribución exponencial.*

La distribución de probabilidad exponencial continua está relacionada con la distribución discreta de Poisson. Si la distribución de Poisson da una descripción del número de ocurrencias por intervalo, la distribución exponencial aporta una descripción de la longitud de los intervalos entre las ocurrencias.

Para ilustrar esta relación, suponga que el número de automóviles que llegan a un lavado de coches durante una hora se describe mediante la distribución de probabilidad de Poisson, con una media de 10 automóviles por hora. La función de probabilidad de Poisson que da la probabilidad de  $x$  llegadas por hora es

$$f(x) = \frac{10^x e^{-10}}{x!}$$

Dado que el número promedio de llegadas es 10 automóviles por hora, el tiempo promedio entre las llegadas de los automóviles es

$$\frac{1 \text{ hora}}{10 \text{ automóviles}} = 0.1 \text{ hora/automóvil}$$

Entonces, la distribución exponencial que describe el tiempo entre las llegadas tiene una media de  $\mu = 0.1$  por automóvil; la función de densidad de probabilidad exponencial es

$$f(x) = \frac{1}{0.1} e^{-x/0.1} = 10e^{-10x}$$



## NOTAS Y COMENTARIOS

Como se observa en la figura 6.10, la distribución exponencial es sesgada a la derecha. En efecto, la medida del sesgo en la distribución exponencial es

2. La distribución exponencial da una idea clara de cómo es una distribución sesgada.

## Ejercicios

### Métodos

32. Considere la siguiente función de densidad de probabilidad exponencial.

$$f(x) = \frac{1}{8} e^{-x/8} \quad \text{para } x \geq 0$$

- Halle  $P(x \leq 6)$ .
- Encuentre  $P(x \leq 4)$ .
- Halle  $P(x \geq 6)$ .
- Encuentre  $P(4 \leq x \leq 6)$ .

33. Considere la siguiente función de densidad de probabilidad exponencial.

$$f(x) = \frac{1}{3} e^{-x/3} \quad \text{para } x \geq 0$$

- Dé la fórmula para hallar  $P(x \leq x_0)$ .
- Halle  $P(x \leq 2)$ .
- Encuentre  $P(x \geq 3)$ .
- Halle  $P(x \leq 5)$ .
- Halle  $P(2 \leq x \leq 5)$ .

### Aplicaciones

34. El tiempo requerido para pasar por la inspección en los aeropuertos puede ser molesto para los pasajeros. El tiempo medio de espera en los periodos pico en el Cincinnati/Northern Kentucky Internacional Airport es de 12.1 minutos (*The Cincinnati Enquirer*, 2 de febrero de 2006). Suponga que los tiempos para pasar por la inspección de seguridad tienen una distribución exponencial.

- ¿Cuál es la probabilidad de que durante los periodos pico se requieran 10 minutos para pasar la inspección de seguridad?
- ¿De qué durante los periodos pico se requieran más de 20 minutos para pasar la inspección de seguridad?
- ¿De qué durante los periodos pico se requieran entre 10 y 20 minutos para pasar la inspección de seguridad?
- Son las 8 de la mañana (periodo pico) y usted se acaba de formar en la fila para la inspección de seguridad. Para alcanzar su avión, tiene que estar en la puerta de arribo en no más de 30 minutos. Si necesitara 12 minutos una vez pasada la inspección de seguridad para llegar a la puerta de arribo, ¿cuál es la probabilidad de que pierda el avión?

35. Los tiempos entre las llegadas de vehículos a un determinado entronque siguen una distribución de probabilidad exponencial cuya media es 12 segundos.

- Dibuje esta distribución de probabilidad exponencial.
- ¿Cuál es la probabilidad de que los tiempos de llegada entre vehículos sean 12 segundos o menos?

- c. ¿Cuál es la probabilidad de que los tiempos de llegada entre vehículos sean 6 segundos o menos?
  - d. ¿Cuál es la probabilidad de 30 o más segundos entre los tiempos de llegada?
36. El tiempo de vida (en hora) de un dispositivo electrónico es una variable aleatoria que tiene la siguiente función de densidad de probabilidad exponencial.

$$f(x) = \frac{1}{50} e^{-x/50} \quad \text{para } x \geq 0$$

- a. ¿Cuál es la media del tiempo de vida de este dispositivo?
  - b. ¿Cuál es la probabilidad de que el dispositivo tenga una falla en las primeras 25 horas de funcionamiento?
  - c. ¿Cuál es la probabilidad de que el dispositivo funcione 100 o más horas sin fallar?
37. Sparagowsky & Associates hace un estudio sobre los tiempos necesarios para atender a un cliente en la ventanilla de su automóvil en los restaurantes de comida rápida. En McDonald's el tiempo medio para atender a un cliente fue 2.78 minutos (*The Cincinnati Enquirer*, 9 de julio de 2000). Tiempos de servicio como los de estos restaurantes suelen seguir una distribución exponencial.
- a. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo para atender a un cliente sea menor que 2 minutos?
  - b. ¿De que el tiempo para atender a un cliente sean más de 5 minutos?
  - c. ¿De que el tiempo para atender a un cliente sean más de 2.78 minutos?
38. ¿Las interrupciones durante su trabajo reducen su productividad? De acuerdo con un estudio realizado por la University of California–Irvine, las personas de negocios son interrumpidas aproximadamente 51/2 veces por hora (*Fortune*, 20 de marzo de 2006). Suponga que el número de interrupciones sigue una distribución de probabilidad de Poisson.
- a. Dé la distribución de probabilidad para el tiempo entre las interrupciones.
  - b. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de negocios no tenga ninguna interrupción en 15 minutos?
  - c. ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente interrupción a una determinada persona de negocios ocurra en no más de 10 minutos?

## Resumen

En este capítulo se amplía el estudio de las distribuciones de probabilidad al caso de las variables aleatorias continuas. La principal diferencia conceptual entre distribuciones de probabilidades discretas y continuas está en el método para calcular las probabilidades. En el caso de distribuciones discretas la función de probabilidad  $f(x)$  da la probabilidad de que la variable aleatoria  $x$  tome diversos valores. En el caso de las distribuciones continuas, la función de densidad de probabilidad  $f(x)$  no da directamente valores de probabilidad. Aquí, las probabilidades están dadas por áreas bajo la curva o gráfica de la función de densidad de probabilidad  $f(x)$ . Como el área bajo la curva sobre un solo punto es 0, se observa que en una variable aleatoria continua la probabilidad de cualquier valor particular es 0.

Se vieron a detalle tres distribuciones de probabilidad continua: la uniforme, la normal y la exponencial. La distribución normal es muy empleada en la inferencia estadística y será muy empleada en lo que resta del libro.

## Glosario

**Función de densidad de probabilidad** Función que se usa para calcular probabilidades de una variable aleatoria continua. El área bajo la gráfica de una función de densidad de probabilidad y sobre un intervalo representa probabilidad.

**Distribución de probabilidad uniforme** Distribución de probabilidad continua en la cual la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor en cualquier intervalo es igual para intervalos de igual longitud.

**Distribución de probabilidad normal** Una distribución de probabilidad continua. Su función de densidad de probabilidad tiene forma de campana y está determinada por la media  $\mu$  y la desviación estándar  $\sigma$ .

**Distribución de probabilidad normal estándar** Distribución normal en la cual la media es cero y la desviación estándar es uno.

**Factor de corrección por continuidad** Valor de 0.5 que se suma o resta al valor de  $x$  cuando se usa una distribución normal continua para aproximar una distribución binomial discreta.

**Distribución de probabilidad exponencial** Una distribución de probabilidad continua útil para calcular probabilidades acerca del tiempo que se necesita para realizar una tarea.

## Fórmulas clave

**Función de densidad de probabilidad uniforme**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{para } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si no es así} \end{cases} \quad (6.1)$$

**Función de densidad de probabilidad normal**

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad (6.2)$$

**Conversión a la variable aleatoria normal estándar**

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (6.3)$$

**Función de densidad de probabilidad exponencial**

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \quad \text{para } x \geq 0, \mu > 0 \quad (6.4)$$

**Distribución exponencial: probabilidades acumuladas**

$$P(x \leq x_0) = 1 - e^{-x_0/\mu} \quad (6.5)$$

## Ejercicios complementarios

39. Una ejecutiva de negocios se va a mudar de Chicago a Atlanta y necesita vender rápidamente su casa en Chicago. Un empleado le ofrece comprársela en \$210 000, pero la oferta expira al final de esa semana. En este momento la ejecutiva no tiene otra oferta mejor, pero piensa que puede dejar la casa en el mercado un mes más. De acuerdo con las pláticas que ha tenido con su agente inmobiliario la ejecutiva cree que los precios que pueden ofrecerle dejando la casa un mes más en el mercado están distribuidos uniformemente entre \$200 000 y \$225 000.
- Si deja la casa en el mercado un mes más, ¿cuál es la expresión matemática para la función de densidad de probabilidad de los precios de venta que le sean ofrecidos?
  - Si la deja en el mercado un mes más, ¿cuál es la probabilidad de que venda la casa en por lo menos \$215 000?
  - Si la deja en el mercado un mes más, ¿cuál es la probabilidad de que venda la casa en menos de \$210 000?
  - ¿Deberá dejar la ejecutiva su casa en el mercado un mes más? ¿Por qué sí o por qué no?

40. La U.S. Bureau of Labor Statistics informa que el gasto promedio anual en alimentos y bebidas de una familia es \$5700 (*Money*, diciembre de 2003). Suponga que los gastos anuales en alimentos y bebidas están distribuidos en forma normal y que la desviación estándar es \$1500.
  - a. ¿Cuál es el intervalo en que se encuentran los gastos de 10% de las familias que tienen los menores gastos anuales en alimentos y bebidas?
  - b. ¿Qué porcentaje de las familias gasta más de \$7000 anualmente en alimentos y bebidas?
  - c. ¿Cuál es el intervalo en el que se encuentran los gastos de 5% de las familias que tienen los gastos más altos en alimentos y bebidas?
41. Motorola usa la distribución normal para determinar la probabilidad de defectos y el número de defectos esperados en un proceso de producción. Suponga que en un proceso de producción el peso promedio de los artículos producidos es 10 onzas. Calcule la probabilidad de un defecto y el número esperado de defectos en 100 unidades producidas en las situaciones siguientes.
  - a. La desviación estándar del proceso es 0.15 y los límites para el proceso se han fijado en más o menos una desviación estándar. Las unidades que pesen más de 9.85 o menos de 10.15 onzas se clasifican como defectuosas.
  - b. Después de hacer mejoras al proceso de producción, la desviación estándar se reduce a 0.05. Asuma que se siguen usando los mismos límites para el proceso; artículos que pesen menos de 9.85 o más de 10.15 onzas se clasifican como defectuosos.
  - c. ¿Cuál es la ventaja de haber reducido la variación en el proceso de producción, haciendo que los límites se encuentren a un número mayor de desviaciones estándar de la media?
42. El promedio anual de gastos de una familia estadounidense en transporte diario es \$6312 (*Money*, agosto de 2001). Suponga que dicha cantidad está distribuida normalmente.
  - a. Si sabe que 5% de las familias estadounidenses gastan menos de \$1000 en el transporte diario. ¿Cuál es la desviación estándar en esta cantidad de gasto?
  - b. ¿Cuál es la probabilidad de que un hogar gaste entre \$4000 y \$6000?
  - c. ¿En que intervalo se encuentran los gastos de las familias que constituyen 3% de las familias con los gastos más altos en transporte?
43. *Condé Nast Traveler* publica la lista de oro de los mejores hoteles en todo el mundo. Broadmoor Hotel en Colorado Springs tiene 700 habitaciones y estuvo en la lista de oro en 2004 (*Condé Nast Traveler*, enero de 2004). El grupo encargado del marketing de este hotel pronostica una demanda media de 670 habitaciones para el próximo fin de semana. Suponga que la demanda para el próximo fin de semana está distribuida normalmente y que la desviación estándar es 30.
  - a. ¿Cuál la probabilidad de que se ocupen todas las habitaciones del hotel?
  - b. ¿Cuál la probabilidad de que se ocupen 50 o más habitaciones del hotel?
  - c. ¿Recomendaría al hotel hacer una promoción para aumentar la demanda? ¿Qué consideraciones serían importantes?
44. Ward Doering Auto Sales está pensando en ofrecer un contrato especial de servicio que cubra todos los costos de servicio de los automóviles vendidos. De acuerdo con la experiencia, el director de la empresa estima que los costos anuales de servicio están distribuidos casi normalmente con una media de \$150 y una desviación estándar de \$25.
  - a. Si la empresa ofrece a los clientes el contrato de servicio por una cantidad anual de \$200, ¿cuál es la probabilidad de que el costo de un servicio sea mayor a los \$200 del precio del contrato?
  - b. ¿Cuál es la ganancia esperada por la empresa en estos contratos de servicio?
45. ¿La falta de sueño es causa de accidentes de tráfico de consecuencias fatales? En un estudio se encontró que el número promedio por año de accidentes de tráfico con consecuencias fatales ocasionados por conductores somnolientos es 1550 (*BusinessWeek*, 26 de enero de 2004). Suponga que el número promedio anual de accidentes de tráfico de consecuencias fatales está distribuido normalmente con una desviación estándar de 300.
  - a. ¿Cuál es la probabilidad de que haya menos de 1000 accidentes fatales en un año?
  - b. ¿De que el número anual de accidentes fatales esté entre 1000 y 2000?
  - c. Para que un año se encuentre en el 5% superior en número de accidentes fatales, cuántos de éstos tendrán que ocurrir?

46. Suponga que las puntuaciones obtenidas en el examen de admisión a una universidad están distribuidas en forma normal con una media de 450 y una desviación estándar de 100.
- ¿Qué porcentaje de las personas que hacen el examen tendrá una puntuación entre 400 y 500?
  - Si la puntuación que obtiene un estudiante es 630. ¿Qué porcentaje de los estudiantes que hacen el examen tendrá una puntuación mayor? ¿Qué porcentaje tendrá una puntuación menor?
  - Si la universidad no admite estudiantes que obtengan una puntuación menor a 480, ¿qué porcentaje de los estudiantes que hacen el examen podrá ser aceptado?
47. De acuerdo con *Adversiting Age*, el salario base promedio de las mujeres que trabajan como publicistas es superior al salario base promedio de los hombres. El salario base promedio de las mujeres es \$67 000 y el salario base promedio de los hombres es \$65 500 (*Working Woman*, julio/agosto de 2000). Suponga que los salarios están distribuidos normalmente con una desviación estándar de \$7000 tanto para hombres como para mujeres.
- ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer tenga un salario mayor que \$75 000?
  - ¿De que un hombre tenga un salario mayor que \$75 000?
  - ¿De que una mujer tenga un salario mayor que \$50 000?
  - ¿Cuánto tendrá que ganar una mujer para tener un salario mayor que 99% de los hombres?
48. Una máquina llena recipientes con un determinado producto. De acuerdo con datos anteriores se sabe que la desviación estándar en los pesos rellenados es 0.6 onzas. Si sólo 2% de los recipientes llenados tienen menos de 18 onzas, ¿cuál es el peso medio de llenado de la máquina? Es decir, a cuánto es igual  $\mu$ ? Suponga que los pesos llenados tienen una distribución normal.
49. Considere un examen de opción múltiple con 50 preguntas. Para cada pregunta hay cuatro respuestas posibles. Suponga que un estudiante que ha hecho las tareas y asistido a clase tiene 75% de probabilidad de contestar correctamente las preguntas.
- Para obtener A de calificación, un estudiante tiene que contestar correctamente 43 o más preguntas. ¿Qué porcentaje de los estudiantes que hicieron las tareas y asistieron a clase obtendrá A de calificación?
  - Para obtener C de calificación, un estudiante tiene que contestar correctamente de 35 a 39 preguntas. ¿Qué porcentaje de los estudiantes que hicieron las tareas y asistieron a clases obtendrá C de calificación?
  - Para aprobar el examen, un estudiante tiene que contestar correctamente 30 preguntas o más. ¿Qué porcentaje de los estudiantes que hicieron las tareas y asistieron a clases pasará el examen?
  - Suponga que un estudiante no asistió a clases ni hizo las tareas. Además, dicho estudiante sólo tratará de adivinar las respuestas a las preguntas. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante conteste correctamente 30 o más preguntas y pase el examen?
50. En Las Vegas un jugador de blackjack se entera de que la casa proporcionará una habitación gratis a quien juegue cuatro horas con un promedio de apuesta de \$50. La estrategia del jugador tiene una probabilidad de ganar en cualquier mano de 0.49 y el jugador sabe que hay 60 manos por hora. Suponga que el jugador juega durante cuatro horas con una apuesta de \$50 por mano.
- ¿Cuál es la ganancia esperada del jugador?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador pierda \$1000 o más?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador gane?
  - Si el jugador empieza con \$1500. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador se vaya a la bancarrota?
51. El tiempo, en minutos, que un estudiante usa una terminal de computadora en el centro de cálculo de una universidad sigue una distribución de probabilidad exponencial con una media de 36 minutos. Suponga que un estudiante llega a una terminal precisamente en el momento en que otro estudiante quería usar la terminal.
- ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo estudiante tenga que esperar 15 minutos o menos?
  - ¿De que el segundo estudiante tenga que esperar entre 15 y 45 minutos?
  - ¿Cuál la probabilidad de que el segundo estudiante tenga que esperar una hora o más?
52. El sitio Web de Bed and Breakfast Inns of North America ([www.cimarron.net](http://www.cimarron.net)) recibe aproximadamente siete visitas por minuto (*Time*, septiembre de 2001). Suponga que el número de visitantes por minuto sigue una distribución de probabilidad de Poisson.

- a. ¿Cuál es el tiempo medio entre las visitas a este sitio de la Web?
  - b. Muestre la función de densidad de probabilidad exponencial para los tiempos entre las visitas a este sitio.
  - c. ¿Cuál es la probabilidad de que nadie visite este sitio en un lapso de 1 minuto?
  - d. ¿Cuál es la probabilidad de que nadie visite este sitio en un lapso de 12 minutos?
53. En la ciudad de Nueva York el tiempo de recorrido promedio al trabajo es de 36.5 minutos.
- a. Suponga que la distribución de probabilidad exponencial es aplicable y muestre la función de densidad de probabilidad para las duraciones de los recorridos al trabajo en Nueva York.
  - b. ¿Cuál es la probabilidad de que un neoyorquino típico necesite entre 20 y 40 minutos para transportarse a su trabajo?
  - c. ¿De que un neoyorquino típico necesite más de 40 minutos para transportarse a su trabajo?
54. El tiempo (en minutos) entre dos llamadas telefónicas en la oficina de solicitud de servicios de una aseguradora tiene la siguiente distribución de probabilidad exponencial.

$$f(x) = 0.50e^{-0.50x} \quad \text{para } x \geq 0$$

- a. ¿Cuál es el tiempo medio entre las llamadas telefónicas?
- b. ¿Cuál es la probabilidad de que pasen 30 segundos o menos entre llamadas telefónicas?
- c. ¿De que pase 1 minuto o menos entre las llamadas telefónicas?
- d. ¿Cuál es la probabilidad de que pasen 5 minutos o más sin que haya llamadas telefónicas?

## Caso problema Specialty Toys

Specialty Toys, Inc. vende una gran variedad de nuevos e innovadores juguetes para niños. Los directivos saben que la época prenavideña es la mejor oportunidad para la introducción de un nuevo juguete, en esta época muchas personas buscan cosas novedosas para los regalos navideños. Cuando Specialty descubre un nuevo juguete con un buen potencial de mercado, elige alguna fecha en octubre para su lanzamiento.

Para contar con los juguetes en octubre Specialty hace los pedidos a sus proveedores en junio o julio de cada año. La demanda de juguetes para niños puede ser muy volátil. Si un nuevo juguete se pone de moda, la posibilidad de que se agote suele incrementar la demanda hasta niveles altos y se pueden obtener grandes ganancias. Sin embargo, un nuevo juguete también puede fracasar dejando a Specialty con un gran inventario que debe vender a precios reducidos. La interrogante más importante que enfrenta la empresa es decidir cuántas unidades comprar de un juguete nuevo para satisfacer la demanda. Si compra muy pocos, perderá ventas; si compra demasiados, las ganancias se reducirán por los precios bajos que tendrá que ofrecer en una liquidación.

En la próxima temporada Specialty desea introducir un juguete nuevo que se llama *El osito pronosticador del clima*. Esta variación de un osito de peluche que habla es fabricada por una empresa en Taiwan. Cuando un niño oprime la mano del osito, éste empieza a hablar. El osito tiene un barómetro que le ayuda, de acuerdo con el estado del tiempo, a elegir una de cinco frases que pronostican el estado del tiempo. Las frases van desde “¡Parece que es un bonito día! Que te diviertas” hasta “Parece que va a llover. No se te olvide llevar tu paraguas”. Pruebas realizadas con el producto indican que, aunque no es preciso, sus pronósticos del tiempo son sorprendentemente buenos. Varios de los directivos de Specialty opinan que los pronósticos del tiempo del osito son tan buenos como muchos de los pronósticos del tiempo que se dan en televisión.

Como ocurre con todos los productos, Specialty se enfrenta a la pregunta de cuántos ositos ordenar para la temporada siguiente. Las cantidades que sugieren los directivos son 15 000, 18 000, 24 000 o 28 000 unidades. El intervalo tan amplio en que se encuentran estas cantidades indica una considerable discrepancia en lo que se refiere al potencial de mercado. El equipo de directivos le solicita a usted un análisis de las probabilidades de terminar el inventario de acuerdo con diversas cantidades a comprar, así como una estimación del potencial de ganancias y su ayuda para hacer una recomendación de la cantidad que se debe comprar. Specialty espera vender *El osito pronosticador del clima* a \$24 con base en un costo de \$16 por unidad. Si hay inventario sobrante después de la temporada de las fiestas decembrinas, Specialty venderá las unidades res-



tantes a \$5 cada una. Después de revisar las ventas anteriores de productos semejantes, los expertos de Specialty pronostican una demanda esperada de 20 000 unidades y 0.95 de probabilidad de que la demanda esté entre 10 000 y 30 000.

## Informe administrativo

Elabore un informe sobre los puntos siguientes y recomiende la cantidad a comprar de *El osito pronosticador del clima*.

1. Use los pronósticos de ventas para describir una distribución de probabilidad normal que pueda servir para aproximar la distribución de la demanda. Dibuje la distribución y dé su media y su desviación estándar.
2. Calcule la probabilidad de terminar el inventario de acuerdo con las cantidades a comprar sugeridas por los miembros del equipo de directivos.
3. Calcule las ganancias proyectadas de acuerdo con las cantidades a comprar sugeridas por los miembros del equipo de directivos bajo tres escenarios: el peor de los casos, en el cual se venderán 10 000 unidades, en el caso más probable, en el cual se venderán 20 000 unidades y en el mejor de los casos en el cual se venderán 30 000 unidades.
4. Uno de los directivos de Specialty encuentra que el potencial de ganancia es tan bueno que la cantidad a comprar debe tener 70% de posibilidades de satisfacer la demanda y 30% de posibilidades de quedarse sin mercancía. De acuerdo con esto, ¿qué cantidad debe comprarse y cuál es la ganancia proyectada bajo cada uno de los tres escenarios?
5. Dé su propia recomendación sobre la cantidad que debe comprarse y muestre las proyecciones de ganancia correspondientes. Fundamente su recomendación.

## Apéndice 6.1 Distribuciones de probabilidad continua con Minitab

Para demostrar el procedimiento de Minitab para el cálculo de probabilidades continuas se retomará el problema de la empresa Grear Tire, en el que la duración de los neumáticos en millas se describió mediante una distribución normal en la que  $\mu = 36\,500$  y  $\sigma = 5000$ . Una de las preguntas que se plantearon fue: ¿cuál es la probabilidad de que los neumáticos duren más de 40 000 millas?

Para distribuciones de probabilidad continua, Minitab proporciona probabilidades acumuladas; es decir, Minitab da la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor menor o igual que una constante específica. En el caso de la pregunta sobre la duración de los neumáticos, Minitab se puede usar para determinar la probabilidad acumulada de que un neumático dure 40 000 millas o menos. (En este caso la constante específica es 40 000.) Una vez que se tiene la probabilidad acumulada que proporciona Minitab, es necesario restar esta probabilidad de 1 para determinar la probabilidad de que el neumático dure más de 40 000 millas.

Para que Minitab calcule una probabilidad, es necesario ingresar la constante específica en una de las columnas de la hoja de cálculo. En este caso se introduce la constante específica 40 000 en la columna C1 de la hoja de cálculo de Minitab. A continuación se presentan los pasos necesarios para que Minitab calcule la probabilidad acumulada de que la variable aleatoria normal tome valores menores o iguales que 40 000.

**Paso 1.** Seleccionar el menú **Calc**

**Paso 2.** Elegir **Probability Distributions**

**Paso 3.** Elegir **Normal**

**Paso 4.** Cuando aparezca el cuadro de diálogo Normal Distribution:

Seleccionar **Cumulative probability**

Ingresar 36 500 en el cuadro **Mean**

Ingresar 5 000 en el cuadro **Standard deviation**

Ingresar C1 en el cuadro **Input column** (la columna que contiene 40 000)

Clic en **OK**

Después de que el usuario hace clic en **OK**, Minitab da la probabilidad acumulada de que la variable aleatoria normal tome un valor menor o igual que 40 000. Minitab indica que esta probabilidad es 0.7580. Como lo que interesa es la probabilidad de que el neumático dure más de 40 000, la probabilidad buscada es  $1 - 0.7580 = 0.2420$ .

Otra pregunta en el problema de la empresa Grear Tire fue: ¿cuál es la duración en millas que la empresa debe establecer en la garantía de manera que en no más de 10% de los neumáticos se tenga que pagar la garantía? En este caso se da una probabilidad y se quiere hallar el valor correspondiente de la variable aleatoria. Minitab usa una rutina de cálculo inverso para hallar el valor de la variable aleatoria que corresponde a la probabilidad acumulada dada. Primero, se ingresa la probabilidad acumulada en la hoja de cálculo de Minitab (por ejemplo en C1). En este caso la probabilidad acumulada es 0.10. Después, los tres primeros pasos del procedimiento de Minitab son los dados antes. En el paso 4 se selecciona **Inverse cumulative probability** en lugar de **Cumulative probability** y se realiza la parte restante de este paso. Minitab da entonces 30 092 millas para la duración en la garantía.

Minitab también calcula las probabilidades de otras distribuciones de probabilidad continua, entre las que se encuentra la distribución de probabilidad exponencial. Para calcular probabilidades exponenciales se sigue el procedimiento antes dado para la distribución de probabilidad normal eligiendo la opción **Exponential** en el paso 3. El paso 4 es igual, salvo que no es necesario ingresar la desviación estándar. Minitab da los resultados de probabilidades acumuladas o probabilidades acumuladas inversas en la misma forma que se describió para la distribución de probabilidad normal.

## Apéndice 6.2 Distribuciones de probabilidad continua con Excel

Excel permite calcular las probabilidades de varias distribuciones de probabilidad continuas. Entre las que se encuentran las distribuciones de probabilidad normal y exponencial. En este apéndice, se describe cómo usar Excel para calcular probabilidades en cualquier distribución normal. El procedimiento para la exponencial y para las otras distribuciones continuas es semejante al descrito aquí para la distribución normal.

Recuerde el problema de la empresa Grear Tire, la duración de los neumáticos en millas se describe mediante una distribución normal con media  $\mu = 36\,500$  y  $\sigma = 5000$ . Suponga que se desea conocer la probabilidad de que un neumático dure más de 40 000 millas.

La función de Excel **DISTR.NORM.** suministra probabilidades acumuladas de una distribución normal. La forma general de la función es **DISTR.NORM** (*x*,media,desv\_estándar,acum). En el cuarto argumento se especifica **VERDADERO** si se desea una probabilidad acumulada. De esta manera, para calcular la probabilidad acumulada de que la duración de un neumático sea menor o igual que 40 000 millas se ingresará la fórmula siguiente en cualquier celda de la hoja de cálculo Excel:

=DISTR.NORM(40000,36500,5000,VERDADERO)

En este momento, en la celda en que se ingresó la fórmula aparecerá 0.7580, indicando que la probabilidad de que la duración del neumático sea 40 000 millas es 0.7580. Por tanto, la probabilidad de que un neumático dure más de 40 000 millas es  $1 - 0.7580 = 0.2420$ .

La función de Excel **DISTR.NORM.INV.** usa un cálculo inverso para hallar el valor de *x* que corresponde a una probabilidad acumulada dada. Por ejemplo, si se desea hallar la duración que Grear debe ofrecer en su garantía de manera que no más de 10% de los neumáticos sean aptos para solicitar la garantía. Se ingresará en cualquier celda de la hoja de cálculo de Excel la fórmula siguiente:

=DISTR.NORM.INV(.1,36500,5000)

En este momento, en la celda en la que se ingresó la fórmula aparecerá 30092, indicando que la probabilidad de que un neumático dure 30 092 millas es 0.10.

La función de Excel para calcular probabilidades exponenciales es **DISTR.EXP.** Usar esta función es muy sencillo. Pero si se necesita ayuda para especificar los argumentos adecuados, se puede usar la herramienta Insertar Función de Excel (véase apéndice E).