PRUEBAS DE HIPÓTESIS

Inferencia estadística:

Dar conclusiones de la población (Parámetros: μ, σ^2, σ, p), a partir de una muestra (estadísticos: $\bar{x}$, s^2, s, $\bar{p}$)

$$\bar{x} \xrightarrow{\text{Inferencia estadística}} \mu$$

$$s^2 \longrightarrow \sigma^2$$

$$\bar{p} \longrightarrow p$$

muestra → Población

Inferencia estadística

- Intervalos de confianza
- Pruebas de hipótesis

PRUEBAS DE HIPÓTESIS

Partimos de hipótesis:

- H_0 : Hipótesis Nula (Siempre tiene la igualdad)
- H_1 : / H_a : Hipótesis alternativa

ej. Una empresa azucarera tiene como producto lider, su presentación de 100 libras. Se sospecha que en promedio, dicho producto NO pesa 100 libras.

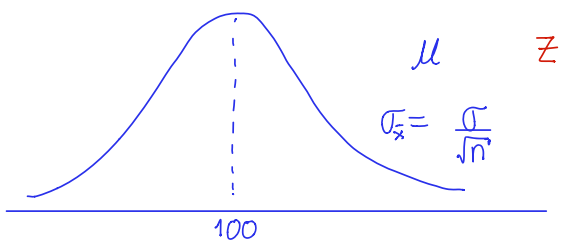
① Parámetro de interes μ

② HIPÓTESIS:

H_0: $\mu = 100$ $\quad$ $\mu \leq 100$ $\quad$ $\mu \geq 100$

H_a: $\mu \neq 100$ $\quad$ $\mu > 100$ $\quad$ $\mu < 100$

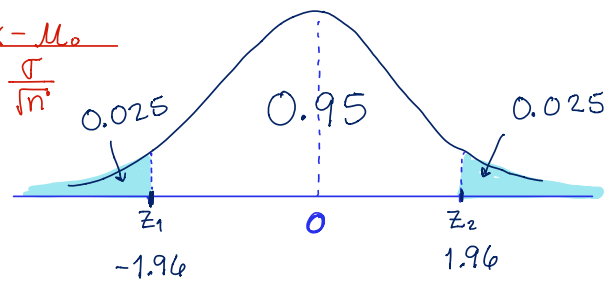
$X \longrightarrow Z$ $\qquad \sigma = 1$



μ

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

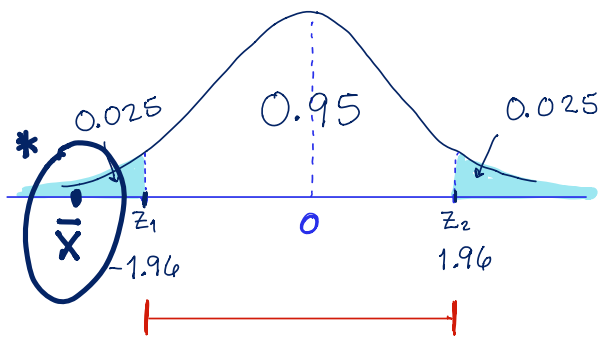
$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$



Asumimos como verdad

muestra

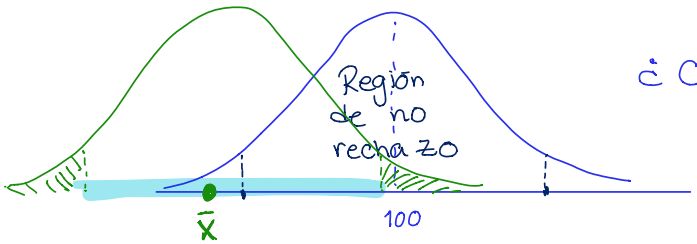
$\bar{x}$



Si la distribucion fuera la correcta el 95% de todas medias muestrales estarían en este intervalo.

* Si $\bar{x}$ cae en las colas (Poco probable asumiendo que la distribucion es verdadera)

Rechazamos H_0.

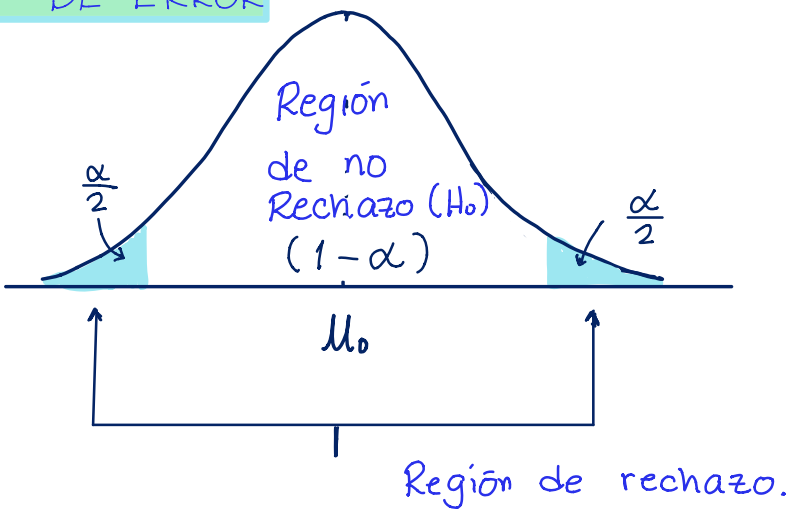


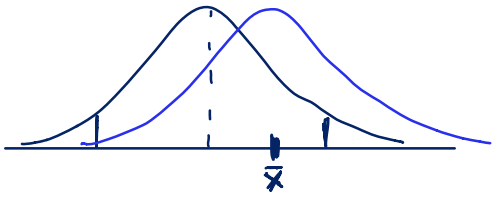
Si rechazo H_0.

¿Cuál es la probabilidad de error?

5%

TIPOS DE ERROR

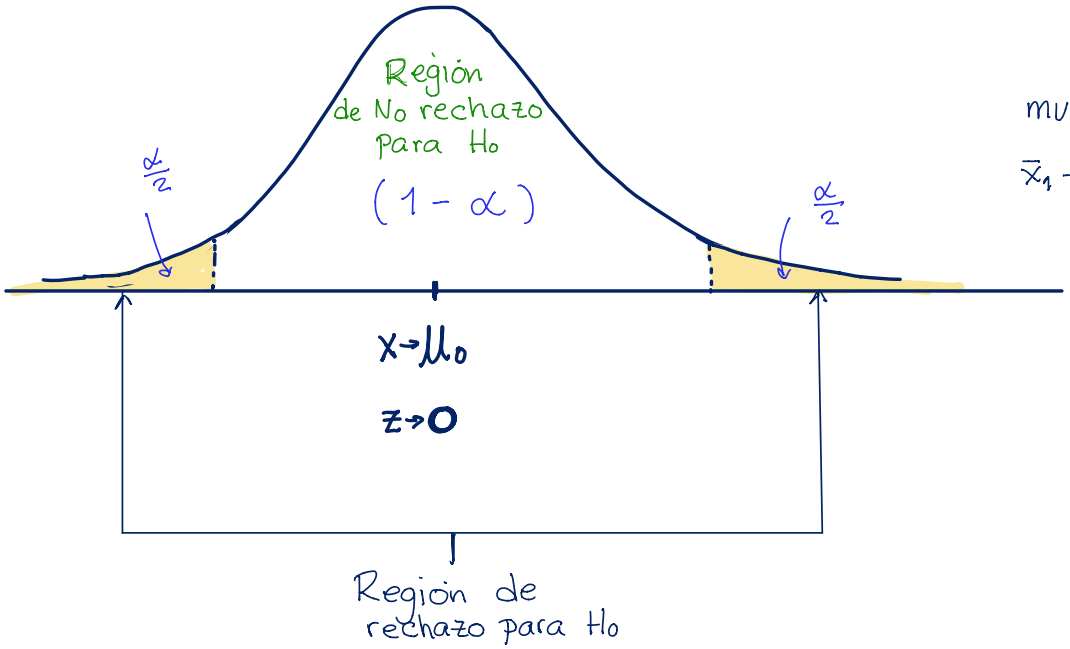




29/07/2020

PRUEBAS DE HIPÓTESIS

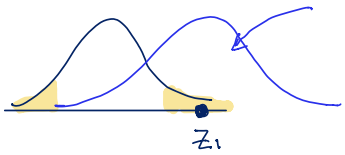
Asumimos que $\mu = \mu_0$ (Hipótesis nula)



muestra: $\bar{x}_1$

$\bar{x}_1 \rightarrow z_1$

Si cae en la región de rechazo.



Es más probable que la distribución de muestreo sea otra, en la cual el z_1 cae en la región central.

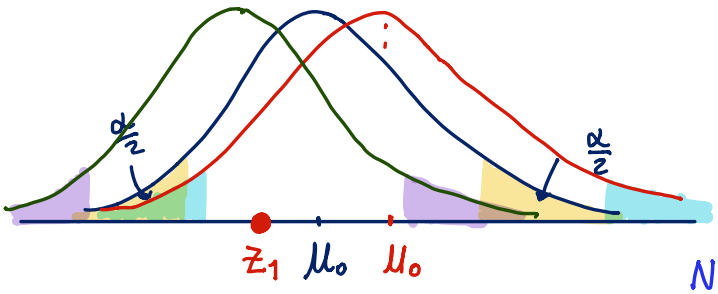
$\mu \neq \mu_0$

¿Cuál es la probabilidad de error?

α (Significancia de la prueba)

α: Error tipo 1: Rechazar Ho, cuando este era verdadero.

Si cae en la región de no rechazo



muestra:

$\bar{x}_1 \longrightarrow z_1$

No podemos asegurar que $\mu = \mu_0$

Si $\bar{x}_1$ cae en la región de NO RECHAZO, diremos que no hay evidencia para rechazar H_0.

Conclusión débil: No rechazar H_0.

Tipo de error: β (No controlado)

ERROR TIPO 2: Aceptar H_0 cuando este es falso.

Conclusión fuerte: Rechazar H_0

Tipo de error: α (Controlado)

ERROR TIPO 1: Rechazar H_0 cuando este es verdadero

ERRORES:

Ejemplo: Usted es un juez y debe decidir si aplica la pena de muerte a un hombre acusado de violación.

H_0: El acusado es culpable

H_a: El acusado no es culpable

Error tipo 1: Declaro al acusado inocente y lo dejo en libertad y resulta que si era culpable

Error tipo 2: Lo declaro culpable siendo inocente.

H_0: El acusado no es culpable

H_a: El acusado es culpable.

Error tipo 1: Rechazar Ho cuando esta era verdadera.

Lo declaro culpable, cuando éste era inocente.

Error tipo 2 (β): Aceptar Ho cuando ésta era falsa.

Declararlo inocente siendo culpable

ejercicios: Plantear las hipótesis para los siguientes problemas.

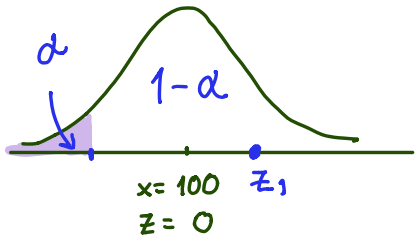
a) Acusan a nuestra empresa de estar robando, ya que aseguran que no damos las 100 Lb que dice nuestro empaque.

Del lado del acusador:

Si nos enfocamos en la cantidad promedio.

H_0: $\mu \geq 100$

H_a: $\mu < 100$



Prueba de cola inferior

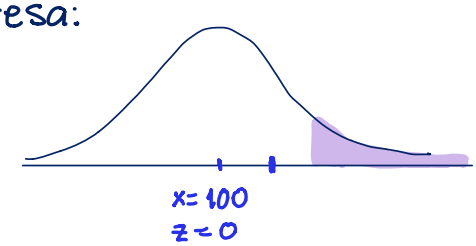
$\bar{x}_1 = 102$

z_1

Del lado de la empresa:

H_0: $\mu \leq 100$

H_a: $\mu > 100$



Prueba de cola superior

Sección 9.4 3/08/2020

29. El precio de un diamante de un quilate de color H y pureza VS2 de Diamond Source USA es \$5 600 (sitio web de Diamond Source, marzo de 2003). Un joyero del medio oeste llama a sus contactos en el distrito de los diamantes de Nueva York para saber si el precio medio de los que venden en ese lugar difiere de \$5 600.

a) Formule las hipótesis que se usarán para determinar si el precio medio en Nueva York difiere de \$5 600.

b) Los precios en una muestra de 25 contactos en la ciudad de Nueva York se presentan en el archivo *Diamonds*. ¿Cuál es el valor-*p*?

c) Con $\alpha = 0.05$, ¿es posible rechazar la hipótesis nula? ¿Cuál es su conclusión?

d) Repita la prueba de hipótesis anterior usando el método del valor crítico.

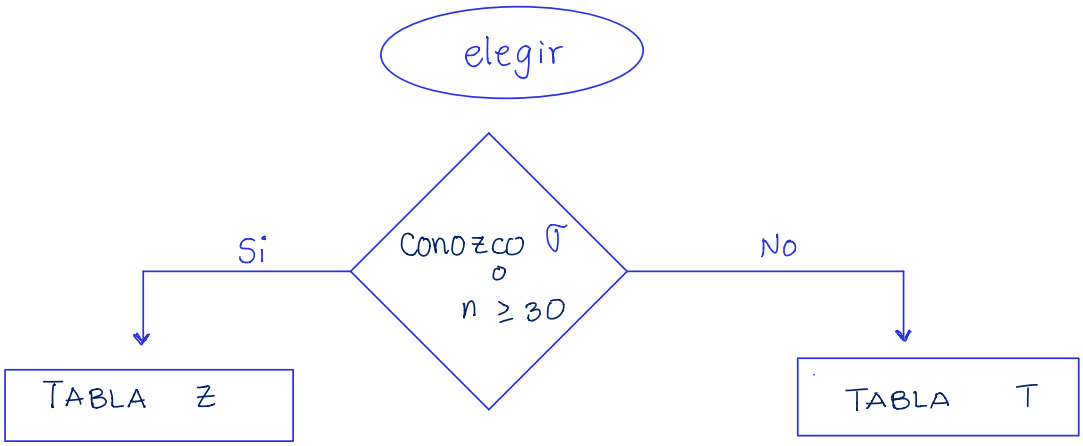
muestra

$\bar{x} = 5835$

$s = 520.11$

$n = 25$

asumiendo una distribución de muestreo aproximadamente normal.



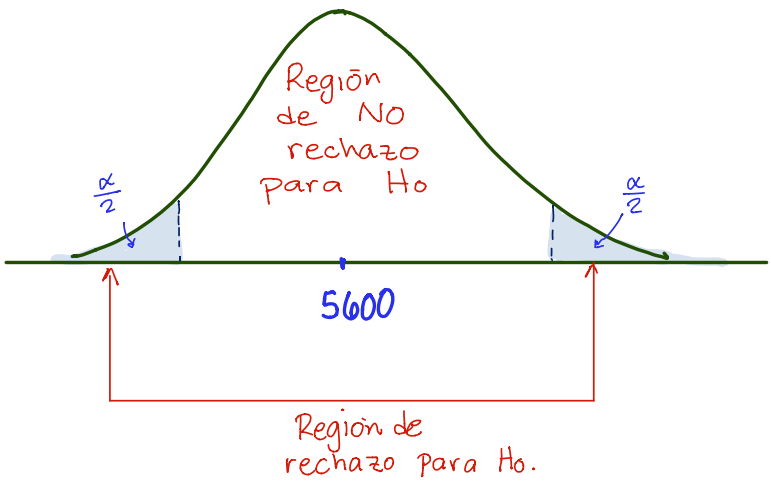
Para este ejemplo: Tabla t

① PLANTEAR PARÁMETRO DE INTERES: μ

② HIPÓTESIS:

$H_0: \mu = 5600$ ¿Difiere de \$5600?

$H_a: \mu \neq 5600$ Prueba de hipótesis de dos colas.



③ Plantear significancia.

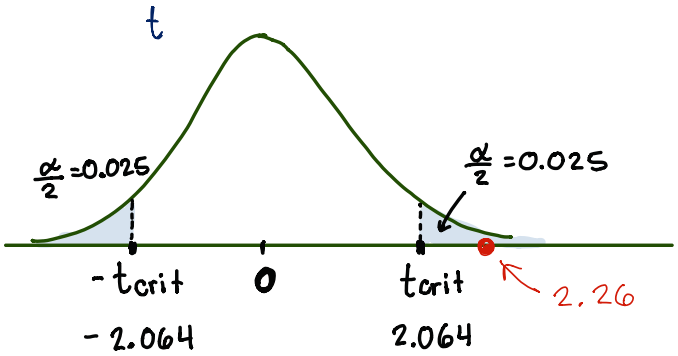
$\alpha = 0.05$ Probabilidad de error tipo 1.

④ Estadístico de prueba:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{5835 - 5600}{\frac{520.11}{\sqrt{25}}} = 2.26$$

⑤ DEFINIR CRITERIO DE RECHAZO

Criterio de rechazo del valor crítico



Rechazar Ho si $t \geq 2.064$ o

$t \leq -2.064$

⑥ Conclusión: Rechazar Ho.

Con una significancia de 0.05 podemos afirmar que el precio promedio de los diamentes en New York es diferente a $5600.-

Mismo problema.

① μ

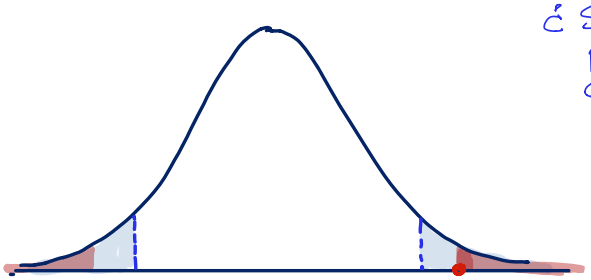
② Ho: $\mu = 5600$

Ha: $\mu \neq 5600$

③ $\alpha = 0.05$

④ $t = 2.26$

⑤



¿Si en lugar de pensar en posición, pensamos en comparar área?

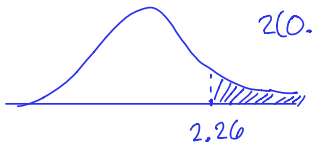
Si el área en rojo es más pequeña que $\frac{\alpha}{2}$, entonces rechazamos Ho.

Si es de dos colas

Valor-p = 2(área que deja en la cola)

Si Valor-p $\leq \alpha$ $\Rightarrow$ Rechazar Ho.

ej.



$2(0.01) \leq$ Valor-p $\leq (0.025) * 2$

$0.02 \leq$ Valor-p ≤ 0.05 (Tabla t)

con excel Valor-p = 0.03317

Valor-p $\leq \alpha$ $\Rightarrow$ Rechazar Ho.

5/08/2020

PRUEBA DE HIPOTESIS PARA LA MEDIA

EJEMPLO (Cap. 9)

WEB archivo
UsedCars

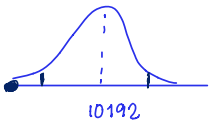
32. Según la National Automobile Dealers Association, el precio medio de un automóvil usado es de $10 192. El gerente de una distribuidora de la ciudad de Kansas revisó una muestra de 50 automóviles usados vendidos recientemente en ese establecimiento, con objeto de determinar si la media poblacional de sus precios difería del precio medio en todo el país. Los precios de los 50 automóviles se encuentran en el archivo denominado *UsedCars*.

a) Formule las hipótesis que se usarán para determinar si existe diferencia en el precio medio de los automóviles usados de la distribuidora.

b) ¿Cuál es el valor-*p*?

c) Con $\alpha = 0.05$, ¿cuál es su conclusión?

① Parámetro de interés: μ



② Hipótesis: $H_0: \mu = 10192$

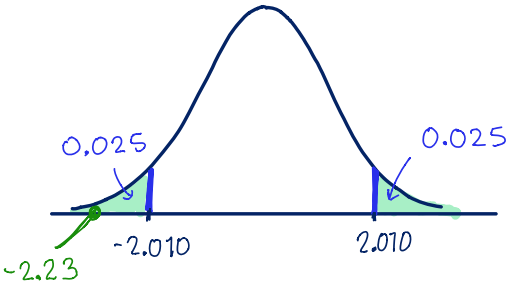
$H_a: \mu \neq 10,192$ * Prueba de 2 colas

③ Significancia: $\alpha = 0.05$

④ Estadístico de prueba:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{9750 - 10,192}{\frac{1400}{\sqrt{50}}} = -2.23$$

⑤ Región de rechazo:



$t_{crit} = 2.010$

Rechazar Ho si

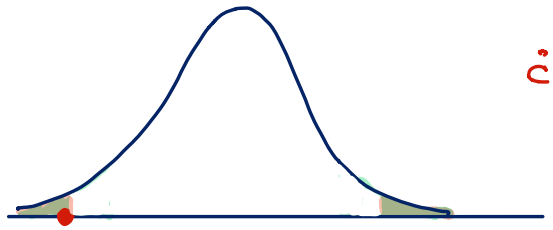
$t \geq 2.010$

$t \leq -2.010$

⑥ $t \leq -2.010$ $\quad -2.23 \leq -2.010$ $\quad \therefore$ Rechazar Ho.

Con una significancia de 0.05 podemos afirmar que su precio promedio es diferente al precio promedio de país (10,192)

¿ Cual es el nivel de significancia mínimo que me llevaría a rechazar Ho ?



$t = -2.23$

¿ Área que deja el estadístico de prueba en la cola ?

valor-p = 2(0.01518)

valor-p = 0.03036

⑤ Rechazar Ho Si valor-p $\leq \alpha$

$0.03036 \leq 0.05$ ✓ $\Rightarrow$ Rechazar Ho.

mismo ejercicio: Verificar si la media poblacional (De esta venta de vehiculos) es menor al Precio promedio de país.

① μ

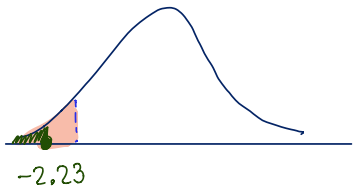
② Ho: $\mu \geq 10{,}192$

Ha: $\mu < 10{,}192$ prueba de cola inferior

③ $\alpha = 0.05$

④ $t = -2.23$

⑤



-2.23

Rechazar Ho Si valor-p $\leq \alpha$

valor-p = 0.015

⑥ Rechazar Ho.

10/08/2020

ejercicio:

Considere la prueba de hipótesis.

$H_0: \quad \mu \geq 45$

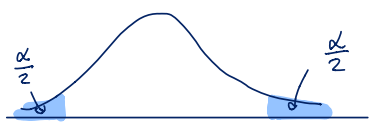
$H_a: \quad \mu < 45$

a) $\bar{x} = 44, \quad S = 5.2, \quad n = 36$

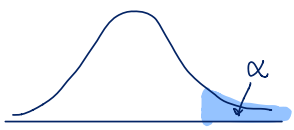
b) $\bar{x} = 43, \quad S = 4.6, \quad n = 36$

c) $\bar{x} = 46, \quad S = 5.0, \quad n = 36$

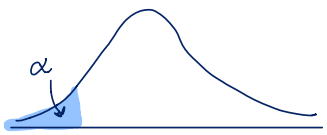
$H_a.$ $\mu \neq \mu_0$



$H_a.$ $\mu > \mu_0$



$H_a.$ $\mu < \mu_0$



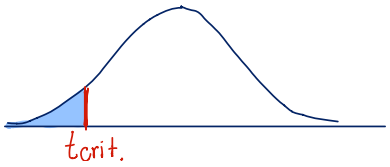
a) $\bar{x} = 44, \quad S = 5.2, \quad n = 36$

1. Parámetro de interés: μ
2. Hipótesis: $H_0: \mu \geq 45$

   $H_a: \mu < 45$
3. $\alpha = 0.05$
4. Estadístico de prueba:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{44 - 45}{\frac{5.2}{\sqrt{36}}} = -1.15$$

5. Criterio de rechazo

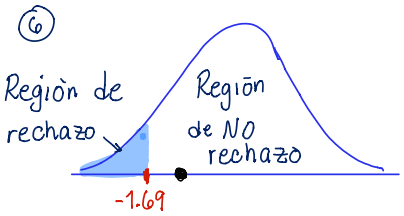


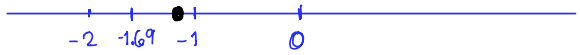
$t_{0.05,35} = -1.69$

Rechazar H_0 si:

$t \leq -1.69$

⑥



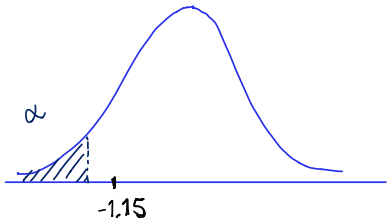


$-1.15 \nless -1.69 \quad \therefore$ No se rechaza Ho.

Con una significancia de 0.05 no hay suficiente evidencia para afirmar que la media poblacional es menor que 45.

USANDO VALOR-P.

Estadístico de prueba: $t = -1.15$



¿Cuánta área deja $t = -1.15$ en la cola inferior

Valor-p = 0.129

⑤ Rechazar Ho si

Valor-p $\leq \alpha$

c) $\bar{x} = 46$, $s = 5.0$, $n = 36$

① μ

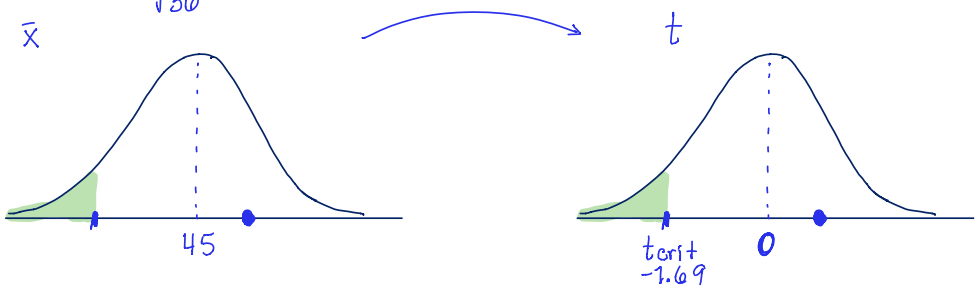
② Ho: $\mu \geq 45$

Ha: $\mu < 45$

③ $\alpha = 0.05$

④ $t = \dfrac{46 - 45}{\frac{5}{\sqrt{36}}} = 1.2$

⑤

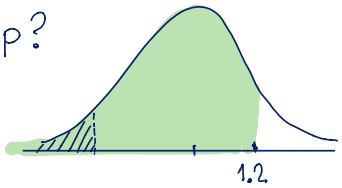


$t_{crit.} = -1.69$ Rechazar Ho si $t \leq -1.69$

⑥ $1.2 \nless -1.69$ $\therefore$ No se rechaza H_0.

Con una significancia de 0.05 no hay evidencia para afirmar que μ es menor a 45.

¿valor-p?



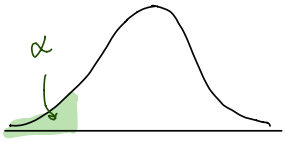
valor-p = 0.8809

PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA PROPORCIÓN

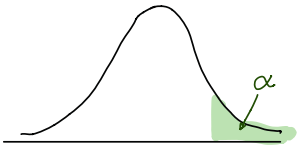
$\bar{p}$: proporción muestral

p : proporción poblacional

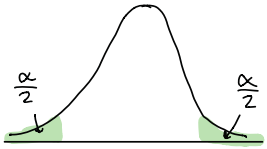
$H_0: p \geq p_0$
$H_a \quad p < p_0$



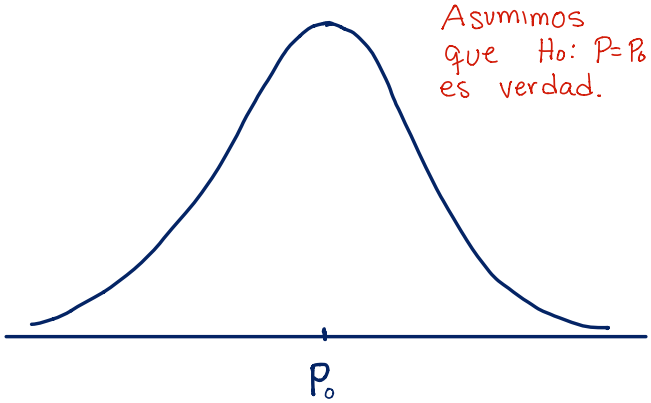
$H_0: p \leq p_0$
$H_a: p > p_0$



$H_0: p = p_0$
$H_a: p \neq p_0$



Distribución de muestreo para la proporción.



Asumimos que $H_0: p = p_0$ es verdad.

$$\begin{cases} E(\bar{p}) = p_0 \\ \sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}} \end{cases}$$

* n debe ser grande
* Usar tabla Z.

Pag. 380,

AUTO evaluación

38. Un estudio realizado por *Consumer Reports* indica que 64% de los clientes de los supermercados piensa que las marcas de esos establecimientos son tan buenas como las marcas nacionales. Para investigar si estos resultados aplican a sus propios productos, un fabricante de salsa de tomate de una marca nacional preguntó a los integrantes de una muestra si consideraban las salsas de tomate de marca propia de los supermercados tan buenas como la de marca nacional.

a) Formule las hipótesis para determinar si el porcentaje de clientes de los supermercados que considera las salsas de tomate de marca propia de estos establecimientos tan buenas como la de marca nacional difiere de 64%.

b) Si en una muestra de 100 clientes, 52 opinan que las marcas de los supermercados son tan buenas como las nacionales, ¿cuál es el valor-*p*?

c) Con $\alpha = 0.05$, ¿cuál es la conclusión?

d) ¿Le dará gusto esta conclusión al fabricante de la marca nacional de salsa de tomate? Explique.

1. Parámetro de interés: P

2. H_0: $P = 0.64$

   H_a: $P \neq 0.64$

3. $\alpha = 0.05$

4. $$Z = \frac{\bar{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

$\bar{P} = 0.52$

$P_0 = 0.64$ ...

17/08/2020

PRUEBAS DE HIPÓTESIS DE DOS POBLACIONES

10.2 DIFERENCIA DE MEDIAS (σ_1 y σ_2 DESCONOCIDAS)

INTERVALOS DE CONFIANZA:

$\mu_1 - \mu_2 < 0$

$\mu_1 < \mu_2$

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$gl = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}$$

PRUEBA DE HIPÓTESIS:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}$$

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - D_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

D_0: Diferencia de medias poblacional hipotética.

$$gl = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2-1}\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}$$

ejemplo:

muestra 1:	10	7	13	7	9	8
muestra 2:	8	7	8	4	6	8

m_1		m_2	
$\bar{x}_1 =$	9	$\bar{x}_2 =$	6.83
$S_1 =$	2.28	$S_2 =$	1.6
$n_1 =$	6	$n_2 =$	6

① Parámetro de interes: $\mu_1 - \mu_2$

② Hipótesis: H_0: $\mu_1 - \mu_2 \leq 0$] diferencia hipotética.

→ H_a: $\mu_1 - \mu_2 > 0$ → $\mu_1 > \mu_2$

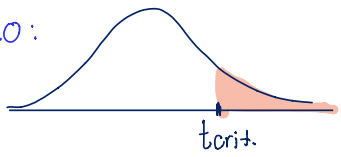
③ $\alpha = 0.05$

④ Estadístico:

$$t = \frac{(9 - 6.83) - 0}{\sqrt{\frac{2.28^2}{6} + \frac{1.6^2}{6}}} = 1.91$$

$gl = 8.96$ $\qquad$ $gl = 8$

⑤ Criterio de rechazo:
Valor Crítico:



$t_{\alpha, gl} = t_{0.05, 8} = 1.860$

Rechazar Ho si:

$t \geq 1.86$

(4) $1.91 \geq 1.86 \Rightarrow$ Rechazar H_0

Con una significancia de 0.05, podemos afirmar que $\mu_1 - \mu_2 > 0$, $(\mu_1 > \mu_2)$.

Ejemplo:

WEB archivo

SATVerbal

16. El Consejo Universitario compara las puntuaciones obtenidas en el examen de aptitudes escolares (SAT, por sus siglas en inglés) con base en el nivel máximo de estudios de los padres de los sustentantes. La hipótesis de investigación indica que los estudiantes cuyos padres tienen un nivel educativo más alto obtendrán mejores puntuaciones en el SAT. En 2003, la media general en el examen oral fue 507 (*The World Almanac*, 2004). A continuación se presentan las puntuaciones obtenidas en el examen verbal en dos muestras independientes de estudiantes. La primera corresponde a las puntuaciones de estudiantes cuyos padres tienen una licenciatura. La segunda, a las puntuaciones de sustentantes cuyos padres terminaron el bachillerato pero no cursaron una licenciatura.

Padres de los estudiantes

Con licenciatura		Con bachillerato	
485	487	442	492
534	533	580	478
650	526	479	425
554	410	486	485
550	515	528	390
572	578	524	535
497	448		
592	469		

Población 1:
Con licenciatura

$\bar{x}_1 = 525$
$s_1 = 59.42$
$n_1 = 16$

Población 2:
Con bachillerato.

$\bar{x}_2 = 487$
$s_2 = 51.75$
$n_2 = 12$

(1) Parámetro de interés.

$\mu_1 - \mu_2$

(2) Hipótesis: H_0: $\mu_1 \leq \mu_2 \rightarrow \mu_1 - \mu_2 \leq 0$

H_a: $\mu_1 > \mu_2 \rightarrow \mu_1 - \mu_2 > 0$

(3) Significancia: $\alpha = 0.05$

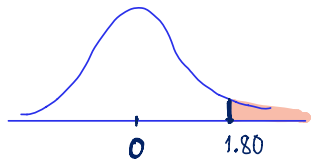
④ Estadístico de prueba:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = 1.804$$

$$gl = 25$$

⑤ Criterio de rechazo:

Valor-p.



Valor-p = 0.041

Rechazar Ho si Valor-p $\leq \alpha$

⑥ $0.041 \leq 0.05$ ✓ $\Rightarrow$ Rechazar Ho.

Con una significancia de 0.05 podemos afirmar que la nota promedio de los estudiantes cuyos padres tienen licenciatura, es mayor a la nota promedio de los estudiantes con padres con bachillerato.

PRUEBA t PAREADA

24/08/2020

2. Se llevó a cabo un estudio en el departamento de veterinaria del Instituto Politécnico y Universidad Estatal de Virginia, para determinar si la "resistencia" de una herida de incisión quirúrgica resulta afectada por la temperatura del bisturí. Se utilizaron 8 perros en el experimento. La incisión se realizó en el abdomen de los animales. Se aplicaron una incisión "caliente" y una "fría" a cada perro, y se midió la resistencia. Los datos que resultaron aparecen abajo.

Perro	Bisturí	Resistencia
1	Caliente	5120
1	frio	8200
2	Caliente	10000
2	frio	8600
3	Caliente	10000
3	frio	9200
4	Caliente	10000
4	frio	6200
5	Caliente	1000
5	frio	1000
6	Caliente	7900
6	frio	5200
7	Caliente	510
7	frio	885
8	Caliente	1020
8	frio	460

Si usted fuera veterinario. ¿Qué método preferiría?

En lugar de analizar la diferencia de medias ($\mu_1 - \mu_2$), analizaremos la media de las diferencias.

	Caliente	frío	Diferencias
1	5120	8200	-3080
2	10,000	8600	1400
3	10,000	9200	800
4	10,000	6200	3800
5	1,000	1000	0
6	7,900	5200	2700
7	510	885	-375
8	1020	460	560

$\bar{X}_d = 725.63$

$S_d = 2072.21$

Población 1: Caliente

Población 2: frío

población 1 - población 2

① Parámetro de interes: μ_d

② Hipótesis: $H_0: \mu_d \leq 0$

$H_a: \mu_d > 0$ (La resistencia del bisturí caliente es mayor a la resistencia de frío)

③ Significancia: $\alpha = 0.05$

④ Estadístico de prueba: $t = \dfrac{\bar{X}_d - \mu_{d0}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = 0.9904$

$gl = n-1 = 7$

⑤ Criterio de rechazo.

Valor-p = 0.18

⑥ Valor-p $\nless \alpha$ No rechazar H_0.

Con una significancia de 0.05 no hay evidencia para afirmar que el bisturí caliente tiene una mayor resistencia.

Podría utilizar cualquiera.

PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA DIFERENCIA DE PROPORCIONES

(Sección 10.4)

Objetivo: Dar conclusiones de $p_1 - p_2$

p_1 : proporción poblacional 1

p_2 : " " 2

$\bar{p}_1$: proporción muestral 1

$$\underbrace{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}_{\text{Estimador puntual}} \xrightarrow{\text{Inferencia}} \underbrace{p_1 - p_2}_{\text{Parámetro}}$$

ERROR ESTANDAR

$$\sigma_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

Intervalo de Confianza:

$$\bar{p}_1 - p_2 \pm \text{Margen de error}$$

$$\bar{p}_1 - \bar{p}_2 \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{p}_1(1-\bar{p}_1)}{n_1} + \frac{\bar{p}_2(1-\bar{p}_2)}{n_2}}$$

donde $1-\alpha$ es el nivel de confianza.

PRUEBA DE HIPÓTESIS.

Parámetro de interés: $P_1 - P_2$

Hipótesis: H_0: $P_1 - P_2 = 0$ $\quad$ $P_1 - P_2 \leq 0$ $\quad$ $P_1 - P_2 \geq 0$

H_a: $P_1 - P_2 \neq 0$ $\quad$ $P_1 - P_2 > 0$ $\quad$ $P_1 - P_2 < 0$

En la hipótesis nula asumimos que $P_1 = P_2$.

$$P_1 = P_2 = P$$

$$\sigma_{\bar{P}_1 - \bar{P}_2} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n_1} + \frac{P(1-P)}{n_2}} = \sqrt{P(1-P)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

Estimador para P cuando $P_1 = P_2 = P$

$$\bar{P} = \frac{n_1 \bar{P}_1 + n_2 \bar{P}_2}{n_1 + n_2}$$

Estadístico de prueba

$$Z = \frac{(\bar{P}_1 - \bar{P}_2)}{\sqrt{\bar{P}(1-\bar{P})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

donde: $\bar{P} = \dfrac{n_1 \bar{P}_1 + n_2 \bar{P}_2}{n_1 + n_2}$

32. En un estudio de la Asociación Estadounidense de Automovilistas (AAA, por sus siglas en inglés) se investigó si era más probable que conductores de género masculino o femenino se detuvieran para solicitar indicaciones sobre cómo llegar a una dirección (AAA, enero de 2006). Se preguntaba a los conductores: "Si usted y su cónyuge van en su automóvil y se pierden, ¿se detiene para preguntar por el domicilio que busca?" En una muestra representativa se encontró que 300 de 811 mujeres dijeron que sí se detenían para preguntar, mientras que 255 de 750 hombres dijeron que también lo hacían.

a) La hipótesis de investigación de AAA afirmaba que era más probable que las mujeres se detuvieran para preguntar por el domicilio. Formule las hipótesis nula y alternativa para este estudio.

b) ¿Cuál es el porcentaje de mujeres que dijo que se detendría para preguntar por el domicilio?

c) ¿Cuál es el porcentaje de hombres que se manifestó en el mismo sentido?

d) Pruebe la hipótesis usando $\alpha = 0.05$. ¿Cuál es el valor-*p* y cuál es la conclusión a la que se esperaría que llegara AAA?

Población 1: mujeres

$P_1 = \frac{300}{811} = 0.3699$

$n_1 = 811$

Población 2: Hombres

$P_2 = \frac{255}{750} = 0.34$

$n_2 = 750$

① Parámetro de interes.

$P_1 - P_2$

② Hipótesis:

$H_0: \quad P_1 \leq P_2 \quad \Rightarrow \quad P_1 - P_2 \leq 0$

$H_a: \quad P_1 > P_2 \quad \Rightarrow \quad P_1 - P_2 > 0$

③ Significancia: $\alpha = 0.05$

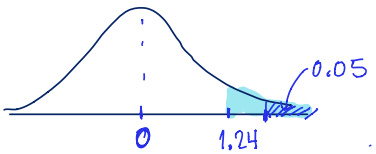
④ Estadístico de prueba.

$$Z = \frac{\bar{P}_1 - \bar{P}_2}{\sqrt{\bar{P}(1-\bar{P})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = 1.24$$

$$\bar{p} = \frac{n_1\bar{P}_1 + n_2\bar{P}_2}{n_1 + n_2} = 0.355$$

⑤ Criterio de rechazo.

Valor-p = 0.1087



Valor-p $\leq \alpha$

$0.1087 \nleq 0.05$ $\therefore$ No rechazar H_0.

Con una significancia de 0.05, no hay evidencia para afirmar que la proporción de mujeres que preguntan es mayor a la proporción de hombres.

16/09/2020

PRUEBAS NO PARAMÉTRICAS

PRUEBA DE SIGNOS

Ejemplo:

TIENDA	VENTAS ($)
56	485
19	562
36	415
128	860
12	426
63	474
39	662
84	380
102	515
44	721
45	450

¿Podemos afirmar que la mediana de las ventas es $450?

① Parámetro de interés:
mediana ($\tilde{\mu}$)

② Hipótesis:

H_0: $\tilde{\mu} = 450$

H_a: $\tilde{\mu} \neq 450$

③ Significancia:

$\alpha = 0.1$

Cálculos

④

TIENDA	VENTAS ($)	Signo
56	485	+
19	562	+
36	415	−
128	860	+
12	426	−
63	474	+
39	662	+
84	380	−
102	515	+
44	721	+
45	450	⇒ Descartar

Contar signos positivos

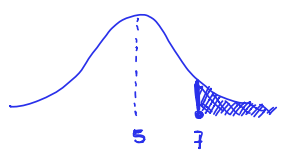
Signos + = 7

Hipótesis:

$H_0: \tilde{\mu} = 450$ $\Longrightarrow$ $H_0: p = 0.5$

$H_a: \tilde{\mu} \neq 450$ $\quad$ $H_a: p \neq 0.5$

p: probabilidad de éxito
éxito: Estar por arriba de 450 (+)



$$P(X \geq 7) = P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$$

$$P(X \geq 7) = \binom{10}{7} 0.5^{7} (1-0.5)^{10-7} + \binom{10}{8} 0.5^{8} (1-0.5)^{10-8}$$

$$+ P(X=9) + P(X=10)$$

Binomial

$$f(x) = \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x}$$

$$P(X \geq 7) = 0.1719$$

$H_a: p \neq 0.5$ ⇒ Dos colas

$$\text{Valor-p} = 2\,P(X \geq 7) = 2(0.1719)$$

$$\text{valor-p} = 0.3438$$

⑤ Conclusión.

valor-p $\leq \alpha$ $\quad$ $0.3438 \nleq 0.1$ $\quad$ No rechazar H_0.

Con una significancia de 0.1, no hay evidencia para afirmar que la mediana de las ventas es diferente a $450.-

6. El ingreso mediano anual de las familias que viven en Estados Unidos es de \$56 200 (*The New York Times Almanac,* 2008). Se presentan los ingresos anuales en miles de dólares para una muestra de 50 familias que viven en Chicago, Illinois. Utilice los datos de la muestra para ver si se puede concluir que las familias que viven en Chicago tienen un ingreso mediano anual de más de \$56 200. Utilice $\alpha = 0.05$. ¿Cuál es su conclusión?

21/09/2020

66.3	60.2	49.9	75.4	73.7
65.7	61.1	123.8	57.3	48.5
74.0	146.3	92.2	43.7	86.9
59.7	64.2	56.2	48.9	109.6
39.8	60.9	79.7	42.3	52.6
60.9	43.5	61.7	54.7	95.2
70.4	43.8	57.8	83.5	56.5
51.3	42.9	87.5	43.6	67.2
48.7	79.1	61.9	53.4	56.2
57.0	49.6	109.5	42.1	74.6

① Parámetro de interés: $\tilde{\mu}$

② H_0: $\tilde{\mu} \leq 56{,}200$ (asumir que $\tilde{\mu} = 56200$)

H_a: $\mu > 56{,}200$

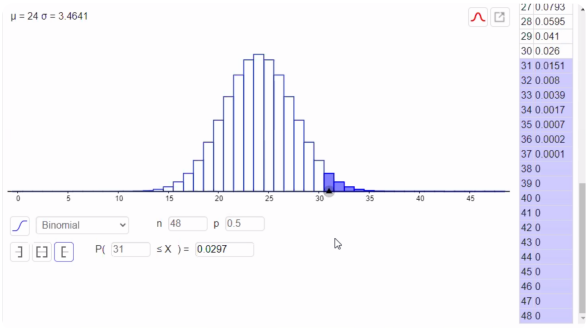
③ $\alpha = 0.05$ Éxito: Ser mayor a \$ 56,200 ←

④ H_0: $\tilde{\mu} \leq 56\,200$ ⇒ H_0: $p \leq 0.5$ $(p = 0.5)$

H_a: $\tilde{\mu} > 56200$ H_a: $p > 0.5$

X: Número de positivos

$n = 48$
$X = 31$



valor-p = $P(X \geq 31) = P(X=31) + P(X=32) + \ldots + P(X=48)$

Valor-p = 0.0297

⑤ Rechazar Ho si valor-p $\leq \alpha$

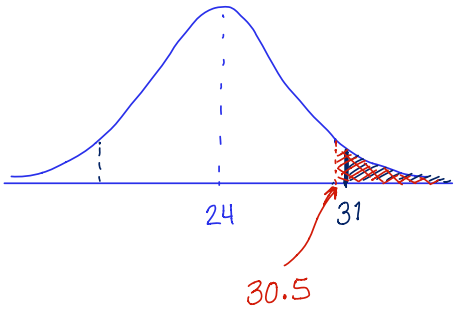
$0.0297 \leq 0.05$ ✓

Con una significancia de 0.05 podemos afirmar que el ingreso mediano en Chicago es superior a \$56,200.

Usando una aproximación.

$\mu_0 = np = 48(0.5) = 24$

$\sigma_0 = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{48(0.5)(0.5)} = 3.46$



Valor-p $= P(x \geq 30.5)$

$x = 30.5 \longrightarrow z$

$z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{30.5-24}{3.46} = 1.88$

$P(z \geq 1.88) \approx$ Valor-p

Valor-p ≈ 0.0301

Sección 19.1 $\boxed{23/09/2020}$

10. Nielsen Media Research estableció que *American Idol* y *Dancing with the Stars* son los dos programas de televisión con el nivel de audiencia mayor en el horario estelar (*USA Today*, 14 de abril de 2008). En un estudio local sobre el programa de televisión preferido, se le pidió a 750 personas que indicaran cuál era su favorito en el horario de mayor audiencia: 330 eligieron *American Idol*, 270 *Dancing with the Stars* y 150 otro programa. Utilice 0.05 como nivel de significancia para probar la hipótesis de que no hay diferencia en la preferencia por *American Idol* y *Dancing with the Stars*. ¿Cuál es su conclusión?

① Parámetro de interés: p (probabilidad de éxito)

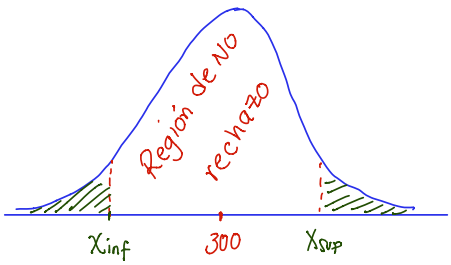
② Hipótesis: $H_0: p = 0.5$ éxito: Prefiere American Idol

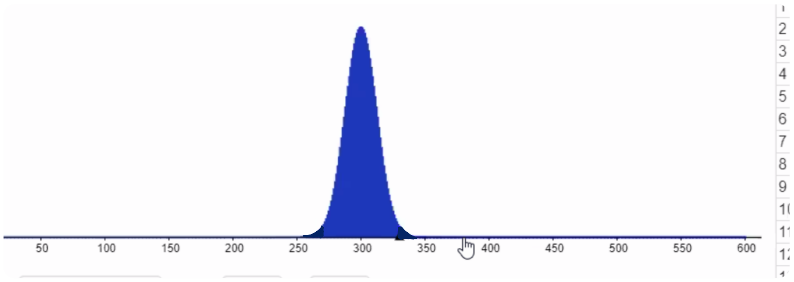
$H_a: p \neq 0.5$

③ Significancia: $\alpha = 0.05$

④ Cálculos: $x = 330$

$n = 600$





* Porque es de dos colas

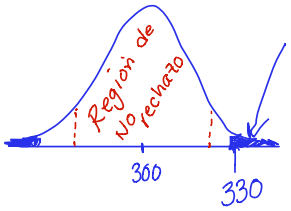
$$\text{Valor-}p = \overset{*2}{2}\,P(\chi \geq 330)$$

$$\text{Valor-}p = 2(0.008) = 0.016$$

⑤ Rechazar Ho si valor-$p \leq \alpha$

$0.016 \leq 0.05$ ✓ $\therefore$ Rechazar Ho.

Con una significancia de 0.05 podemos afirmar que la si hay diferencia en la preferencia de estos dos programas.



19.2 PRUEBA DE RANGOS CON SIGNO DE WILCOXON

* Utilizada para un análisis de muestras pareadas

Para utilizarla debe cumplir:

① Simetría en las diferencias

② $n \geq 10$ *

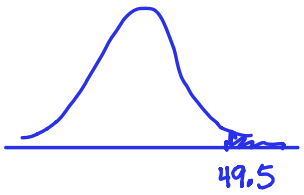
Ejemplo: Una empresa de manufactura desea determinar si dos métodos de producción difieren en cuanto al tiempo.

Trabajador.	Método		Diferencias	Diferencias absolutas	Rango	Rangos con signo	
	A	B				−	+
1	10.2	9.5	0.7	0.7 ✓	8		8
2	9.6	9.8	-0.2	0.2 ✓	2	-2	
3	9.2	8.8	0.4	0.4	3.5		3.5
4	10.6	10.1	0.5	0.5	5.5		5.5
5	9.9	10.3	-0.4	0.4	3.5	-3.5	
6	10.2	9.3	0.9	0.9	10		10
7	10.6	10.5	0.1	0.1 ✓	1		1
8	10.0	10.0	0				
9	11.2	10.6	0.6	0.6	7		7
10	10.7	10.2	0.5	0.5	5.5		5.5
11	10.6	9.8	0.8	0.8	9		9

$T^+ = 49.5$

Si $n \geq 10$ La distribución de muestreo para T^+ es aproximadamente normal con:

$$\begin{cases} \text{Media: } \mu_{T^+} = \dfrac{n(n+1)}{4} \\ \text{Desviación estándar: } \sigma_{T^+} = \sqrt{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{24}} \end{cases}$$



① Parámetro de interes: $\tilde{\mu}_d$

② Hipótesis: $H_0: \tilde{\mu}_d = 0$ $\quad p = 0.5$

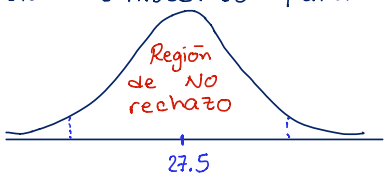
$H_a: \tilde{\mu}_d \neq 0$ $\quad p \neq 0.5$

③ $\alpha = 0.05$

④ $T^+ = 49.5$

$$\mu_{T^+} = \frac{n(n+1)}{4} = \frac{10(10+1)}{4} = 27.5$$

Distribución de muestreo para T^+

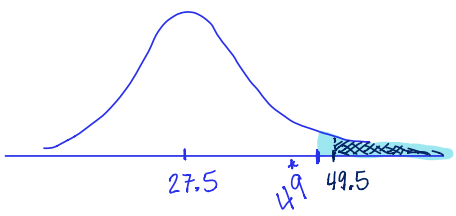


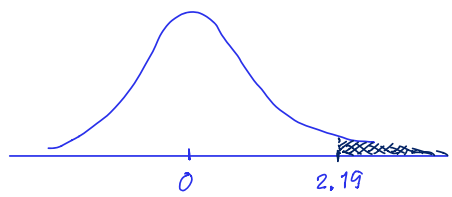
$$\sigma_{T^+} = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}} = 9.81$$

$$\text{Valor-p} = 2P(T^+ \geq \overset{x_1}{49})$$

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{49 - 27.5}{9.81} =$$

X $\longrightarrow$ Z





* por el factor de corrección.

$$\text{Valor-p} = 2P(Z \geq 2.19)$$

$$\text{Valor-p} = 0.0286$$

Rechazar Ho si.
Valor-p $\leq \alpha$

$0.0286 \leq 0.05$ ✓ $\therefore$ Se rechaza Ho.

Con una significancia de 0.05 podemos afirmar que los tiempos de los métodos A y B, son diferentes.

07/10/2020

PRUEBA DE MANN-WHITNEY-WILCOXON (MWW)

Prueba no paramétrica para comparar dos poblaciones independientes.

ejemplo:

Universitarios	Calificación	Bachillerato	Calificación
1	15	1	18
2	3	2	20
3	23	3	32
4	8	4	9
		5	25

¿Existe diferencia, en términos de rendimiento, entre los empleados de nivel universitario y los empleados con bachillerato?

Universitarios	Calificación	Rango
1	15	4
2	3	1
3	23	7
4	8	2
	Suma:	14

Bachillerato	Calificación	Rango
1	18	5
2	20	6
3	32	9
4	9	3
5	25	8
	Suma:	31

3	8	9	15	18	20	23	25	32
1	2	3	4	5	6	7	8	9

9 trabajadores

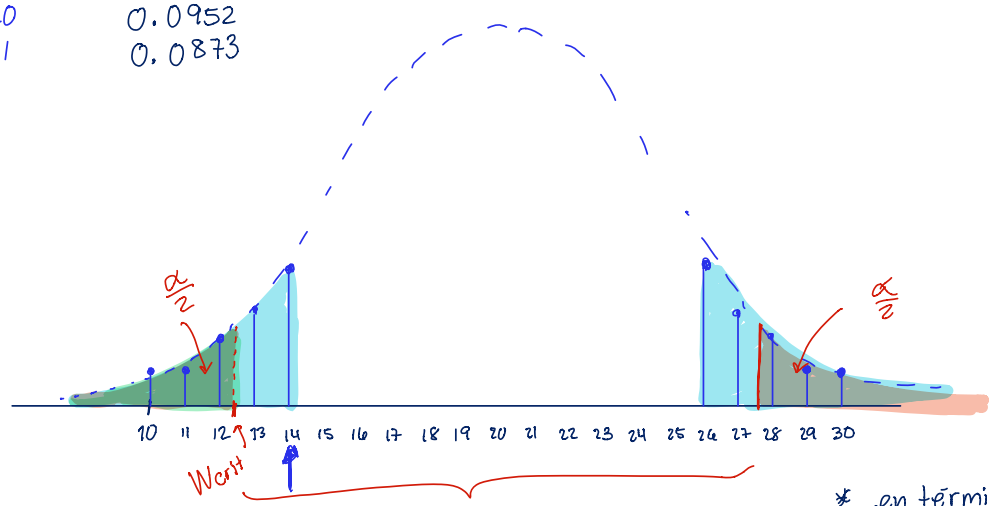
4	U
5	B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Rango
U	U	U	U	B	B	B	B	B	10
									16

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
B	B	B	B	B	U	U	U	U	30

Rango

10	0.0079 ✓	22	0.0873
11	0.0079	23	0.0714
12	0.0159	24	0.0635
13	0.0238	25	0.0476
14	0.0397	26	0.0397
15	0.0476	27	0.0238
16	0.0635	28	0.0159
17	0.0714	29	0.0079
18	0.0873	30	0.0079
19	0.0873		
20	0.0952		
21	0.0873		



Hipótesis: H_0. Las poblaciones son iguales *

H_a: Las poblaciones son diferentes.

* en términos de rendimiento

Significancia: $\alpha = 0.05$

Cálculos: $W = 14$ Valor-p $= 2(0.0952) = 0.1904$

Valor-p $= 0.1904 \nless 0.05$ No rechazar H_0.

Conclusión: Con una significancia de 0.05 No hay evidencia que muestre que existe diferencia en el rendimiento de ambos grupos.

DISTRIBUCIÓN DE MUESTREO DE W CON POBLACIONES IDÉNTICAS

Media: $\mu_W = \dfrac{n_1(n_1+n_2+1)}{2}$

$$\sigma_W = \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 (n_1+n_2+1)}{12}}$$

Forma aproximadamente normal siempre que $n_1 \geq 7$ y $n_2 \geq 7$

12/10/2020

Pag. 879 (Sección 19.3)

18. Dos aditivos de combustible son evaluados para determinar su efecto en el millaje de la gasolina. Se aplicaron sendas pruebas a siete vehículos con el aditivo 1 y a nueve vehículos con el aditivo 2. Los datos siguientes muestran las millas por galón obtenidas con los dos aditivos. Utilice $\alpha = 0.05$ y la prueba de MWW para ver si existe una diferencia significativa entre el rendimiento de la gasolina con los dos aditivos.

Aditivo 1	Aditivo 2
17.3	18.7
18.4	17.8
19.1	21.3
16.7	21.0
18.2	22.1
18.6	18.7
17.5	19.8
	20.7
	20.2

B	C	D	E	F	G	H	I
Aditivo 1	RANGO		Aditivo 2	RANGO			17.3
17.3	2		18.7	8.5			18.4
18.4	6		17.8	4			19.1
19.1	10		21.3	15			16.7
16.7	1		21	14			18.2
18.2	5		22.1	16			18.6
18.6	7		18.7	8.5			17.5
17.5	3		19.8	11			18.7
			20.7	13			17.8
			20.2	12			21.3
							21
w	34		w2	102			22.1
n1	7		n2	9			18.7
							19.8
							20.7
APROXIMACIÓN A LA NORMAL							20.2
media	59.5						
desv.	9.4472218						

HIPÓTESIS:

H_0: Las dos poblaciones son idénticas, con respecto al rendimiento.

H_0: rendimiento del aditivo 1 = rendimiento del aditivo 2

H_a: Las poblaciones son diferentes.

H_a: rendimiento del aditivo 1 ≠ rendimiento del aditivo 2

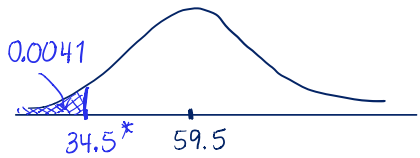
Significancia

$\alpha = 0.05$

Cálculos

Aditivo 1	RANGO		Aditivo 2	RANGO			17.3
17.3	2		18.7	8.5			18.4
18.4	6		17.8	4			19.1
19.1	10		21.3	15			16.7
16.7	1		21	14			18.2
18.2	5		22.1	16			18.6
18.6	7		18.7	8.5			17.5
17.5	3		19.8	11			18.7
			20.7	13			17.8
			20.2	12			21.3
							21
w	34		w2	102			22.1
n1	7		n2	9			18.7
							19.8
							20.7
APROXIMACIÓN A LA NORMAL							20.2
media	59.5						
desv.	9.4472218						

$W = 34$



* No oldivar el factor de corrección.

Valor-p = $2P(W \leq 34.5)$ $\Rightarrow$ VALOR-P = 0.0082

$\boxed{\text{Criterio de rechazo}}$ Rechazar H_0 Si valor-p $\leq \alpha$

$0.0082 \leq 0.05$ ✓ $\therefore$ Rechazar H_0.

$\boxed{\text{Conclusión}}$ Con una significancia de 0.05, podemos afirmar que el redimiento en millas recorridas es diferente si se utiliza el aditivo 1 o el aditivo 2.

$\boxed{14/10/2020}$

PRUEBA DE KRUSKAL-WALLIS

* Prueba no paramétrica que permite comparar varias muestras independientes.

hipótesis:

H_0: Todas las poblaciones son iguales

H_a: No todas las poblaciones son idénticas

ejemplo: Evaluación de desempeño a 20 empleados

Universidad

A	Rango	B	Rango	C	Rango
25	3	60	9	50	7
70	12	20	2	70	12
60	9	30	4	60	9
85	17	15	1	80	15.5
95	20	40	6	90	18.5
90	18.5	35	5	70	12
80	15.5			75	14
$R_1 =$	95	$R_2 =$	27	$R_3 =$	88

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
15	20	25	30	35	40	50	60	60	60	70	70	70	75	80	80	85	90	90	95

$$\frac{8+9+10}{3} = 9$$

Hipótesis: H_0: Las poblaciones son idénticas
H_a: No todas las poblaciones son idénticas

Significancia: $\alpha = 0.05$

Cálculos:

Estadístico de prueba de Kruskal-Wallis

$$H = \left[\frac{12}{n_T(n_T+1)} \sum_{i=1}^{K} \frac{R_i^2}{n_i} \right] - 3(n_T+1)$$

K = número de poblaciones.

n_i = número de observaciones en la muestra i

n_T = número total de observaciones

R_i = Suma de rangos en la muestra i

$n_T = 20$

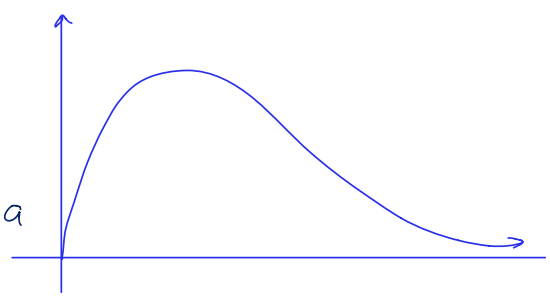
$K = 3$

$$H = \frac{12}{20(20+1)} \left(\frac{95^2}{7} + \frac{27^2}{6} + \frac{88^2}{7} \right) - 3(20+1)$$

$$H = 8.92$$

Si $n_1 \geq 5$, $n_2 \geq 5$ y $n_3 \geq 5$

La distribución se aproxima a una distribución χ^2 (Ji cuadrado) con $K-1$ grados de libertad



$$\text{valor-}p = 2P(H \geq 8.92) = 2(0.0116) = 0.0232$$

Si valor-$p \leq \alpha \Rightarrow$ rechazar H_0.

$0.0232 \leq 0.05 \Rightarrow$ Rechazar H_0

Con una significancia de 0.05 podemos afirmar que no todas las poblaciones son iguales, basándonos en el desempeño.

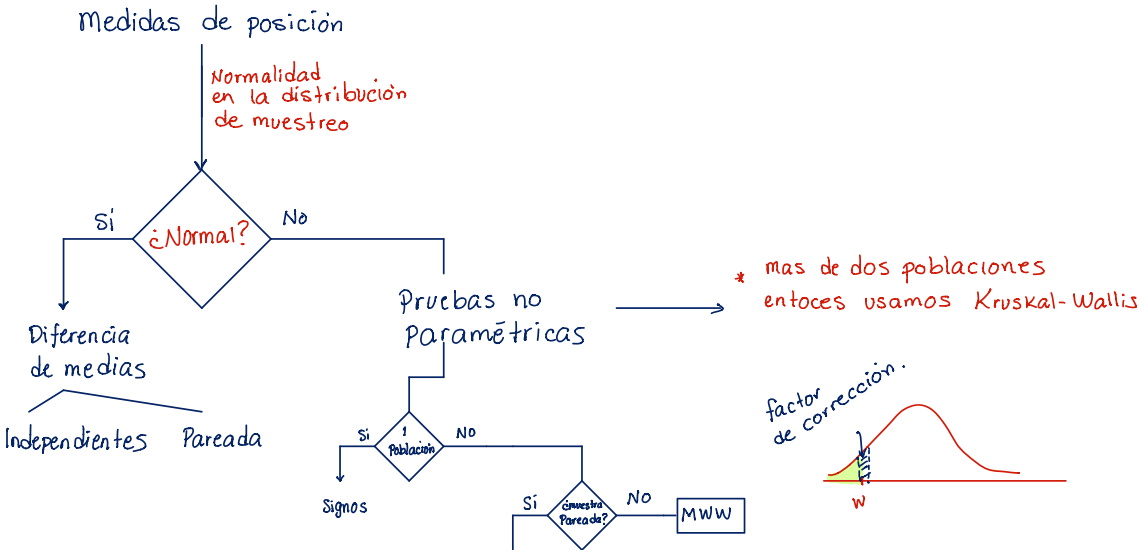
PRUEBAS PARAMÉTRICAS:

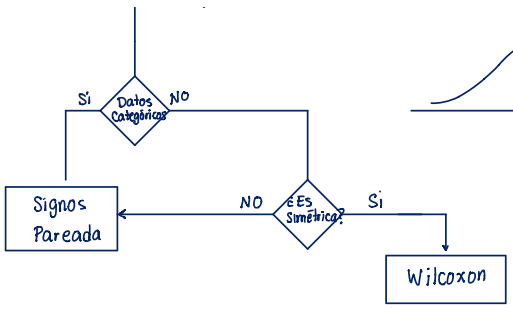
- Diferencia de medias (muestras independientes)
- Media de las diferencias (experimento pareado)
- Diferencia de proporciones
- * Varianzas

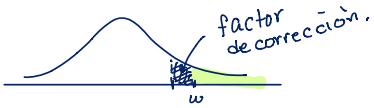
PRUEBAS NO PARAMÉTRICAS

- Signos: (mediana)
- Signos pareada: (medianas)
- Wilcoxon: (medianas)
  - * $n \geq 10$
  - * Simetría
- MWW: $n \geq 7$
  Comparación de muestras independientes
- KW: Compara más de dos poblaciones
  $n_i \geq 5$

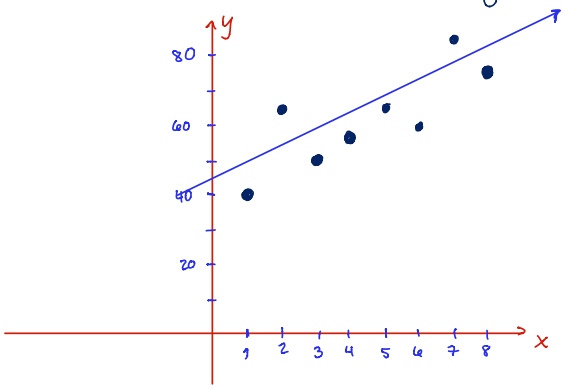
Investigación
↓ Pregunta
Hipótesis de investigación

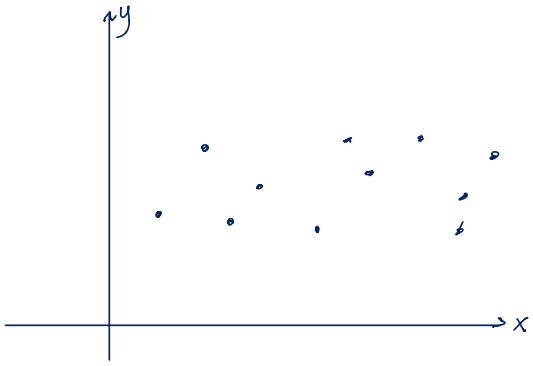






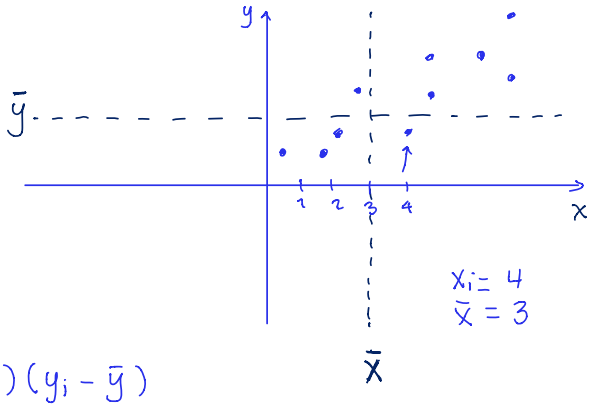
19.5 Correlación de rangos





¿Los datos están relacionados?

Coeficiente de correlación (r)



$x_i = 4$
$\bar{x} = 3$

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}\, S_{yy}}}$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

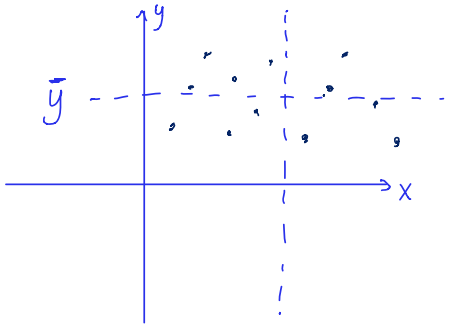
$+ \quad +$

$+ \quad -$

$$S_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2$$

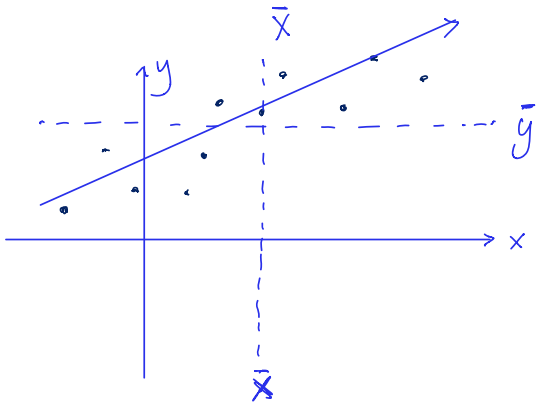
$$S_{yy} = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$-1 \leq r \leq 1$$



$S_{xy} \approx 0 \Rightarrow r \approx 0$

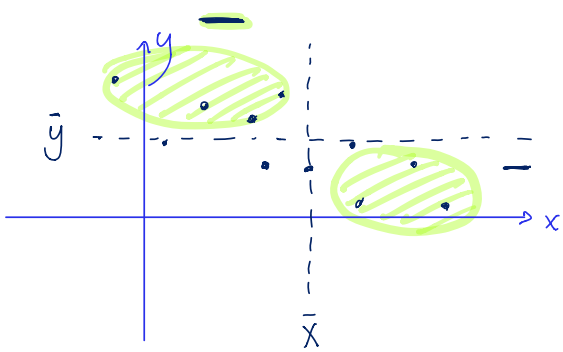
Las variables x y y no estan correlacionadas



$S_{xy} > 0 \Rightarrow r \approx 1$

Correlación positiva

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}\, S_{yy}}}$$



$r \approx -1$

Correlación negativa.

26/10/2020

15.5 CORRELACIÓN DE RANGOS

Coeficiente de correlación por rangos de Spearman.

$$\boxed{r_s = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}}} \xrightarrow{\text{DUPA}} r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

donde

$d_i = x_i - y_i$

n = número de observaciones

* Se asume que no hay empates.

r_s → ρ_s

r_s: estimación puntual

ρ_s: coeficiente de correlación poblacional

Distribución de muestreo para r_s.

Media: $\mu_{rs} = 0$

Desviación estándar: $\sigma_{rs} = \sqrt{\frac{1}{n-1}}$

Forma de la distribución: Aproximadamente normal siempre que $n \geq 10$

estadístico de prueba: r_s

$$z = \frac{r_s - \mu_{rs}}{\sigma_{rs}}$$

$H_0: \rho_s = 0$

$H_a: \rho_s \neq 0$

$\mu_{rs} = \rho_s$

Si $\mu_{rs} \neq 0 \Rightarrow$ existe una relación entre las variables