1. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales.

Una ecuación diferencial (ED) es una ecuación que contiene derivadas de una variable dependiente respecto a una o más variables independientes. (x, t).

Ejemplos: Logística: $y' = Ky(M-y)$

Crecimiento Exponencial: $\frac{dy}{dt} = Ky$ ¿$y = f(t)$?

Enfriamiento de Newton: $\frac{dT}{dt} = K(\underbrace{T - T_m}_{\text{ambiente}})$ ¿T?

Desplazamiento: $ay'' + by' + cy = f(t)$.

Objetivo: encuentre una función $y(t)$ que satisfaga la ED.

Definiciones:

ED Ordinaria: la ec. tiene derivadas respecto a una SOLA variable.

p.e. $y''' + 2y'' + y' + y = x^3$.

ED Parcial: la ec. tiene derivadas parciales respecto a dos o más variables.

Ej: Ec. Calor. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

$u(x, y, t)$.

Orden de una ED:

el orden de la mayor derivada en la ED.

ED orden 3: $$\underbrace{\frac{d^3 y}{dx^3}}_{\text{3ra derivada}} + \Big(\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\text{1ra derivada.}}\Big)^4 = \sin x$$

Ejercicio 1: Clasifique el orden de cada ED:

a. $\frac{dy}{dx} = k x^2 y^2.$ ED 1er orden.

b. $P'' = 2PP'$ ED 2do orden.

c. $y' \underbrace{y'''}_{\text{3ra derivada.}} + 2y'' + \alpha y' + \beta y = (\sin x)e^{-2x}$ ED 3er orden.

d. $y(\underbrace{y''}_{\text{2da derivada}})^6 + 5(y')^{20} = 0$ ED 2do orden.

Notación Prima: $y', y'', y^{(n)}$

Notación Leibniz: $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots \frac{d^n y}{dt^n}$

Forma de una ED:

ED de orden n: ponga las derivadas como variables

$$F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$$ encuentre ¿y?

ED en su forma normal o estándar.

sólo la derivada más grande se encuentra en el lado izquierda.

$$y^{(n)} = g(x, y, y', \dots y^{(n-1)}).$$

Solución de una ED: es una función $\boxed{y = \phi(x)}$ que tiene n derivadas continuas y satisface la ec. diferencial.

Pueden utilizar calculadora.

Ejercicio 2: Verifique que y(t) es una solución de la ED dada:

ED: supuesta solución.

a) $\frac{dy}{dt} + 20y = 24$; $y(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$

$$y'(t) = +\frac{6}{5} \cdot 20e^{-20t} = 24e^{-20t}.$$

Reemplace y' & y en la ED.

$$24\cancel{e^{-20t}} + 24 - 24\cancel{e^{-20t}} = 24$$ → y(t) si es una solución.

$$24e^{-20t} + 20\left(\frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}\right) = 24$$

b) $y'' + 4y = 0$; $y(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$ solución.

ED.

C_1, C_2 son constantes.

$y' = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$

$y'' = -4C_1 \cos(2t) - 4C_2 \sin(2t)$.

$-4C_1 \cos(2t) - 4C_2 \sin(2t) + 4(C_1 \cos 2t) + C_2 \sin(2t))$

$-4C_1 \cancel{\cos(2t)} - 4C_2 \cancel{\sin(2t)} + 4C_1 \cancel{\cos(2t)} - 4C_2 \cancel{\sin(2t)} = 0$

$0 = 0$ $y(t)$ es la soln de la ED.

Soln Trivial: una ED tiene soln. trivial si la función cero $\phi(x) = 0$ es una de sus soluciones.

En 2a) $y' + 20y = 24$. no tiene soln trivial.

$y = 0$, $y' = 0$ $0 + 20 \cdot 0 = 0 \neq 24$.

2b) $y'' + 4y = 0$. si tiene soln trivial.

$y = y' = y'' = 0$ $0 + 4 \cdot 0 = \underline{0 = 0}$

Una ED puede tener infinitas soluciones.

Considere la ED: $\dfrac{dy}{dX} = f(X)$ ED 1er orden.

La integral de y' es y:

$$\int \frac{dy}{dX}\,dx = \int f(x)\,dx$$

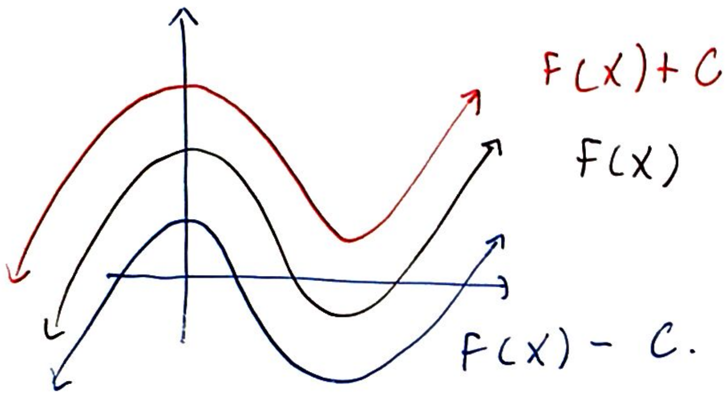
$$y = \int f(x)\,dx = F(X) + \underbrace{C}_{\text{constante.}}$$

y dependiente
x independiente.

La soln de esta ED es la antiderivada de f(x)

Hay infinitas soluciones: $y = \underbrace{F(X)}_{\text{antiderivada.}} + C.$

La familia de soluciones de la ED es: $F(X) + C.$



no sólo se encuentra F(x) sino también el valor de C.

2 Tipos de Soluciones para una ED:

Solución General: la solución contiene constantes arbitrarias. $C_1, C_2, \ldots, C_n.$
(infinitas solns.)

Solución Particular: la solución no contiene constantes arbitrarias.
(soln única).

Por ejemplo:

a. $\frac{dy(t)}{dt} + 20y^{(t)} = 24$ $\boxed{}$ Falta $y(0) = \frac{12}{5}$

$y(t) = \frac{6}{5} + \frac{6}{5}e^{-20t}$ solución particular para la ED.

b. $\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0.$

$y(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)$ solución general.

En general, la solución general de una ED. depende del orden de la ED.

ED 1er orden: 1 constante arbitraria.

ED 2do orden: 2 constantes

⋮

ED n-ésimo orden: n constantes

Tratemos de resolver $\frac{dy}{dt} + 20y = 24.$

$\frac{dy}{dt} = 24 - 20y.$

$\int \frac{dy}{y+b} = \ln|y+b| + c.$

$\int \frac{dy}{24-20y} = \int dt.$

$+c_1$

ya no hay derivadas encuentre y.

$\frac{-1}{20.}\ln(24-20\underline{\underline{y}}) = t + c_2$

$\ln(24-20y) = -20t - 20c.$

$e^{\ln[\,]} = [\,].$

$24 - 20y = e^{-20t-20c.}$

$c = c_2 - c_1$

$$-20y = -24 - e^{-20t-20c}. \qquad \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$$

$$y = \frac{6}{5} + \frac{1}{20} e^{-20t-20c}. \qquad \frac{1}{20} e^{-20c} = c_1$$

soln general, depende de c.

$$y(t) = \frac{6}{5} + c_1 e^{-20t}.$$