12. EDs Lineales Homogéneas

ED lineal 2do orden. $ay'' + by' + cy = 0.$
homogénea
coeficientes constantes

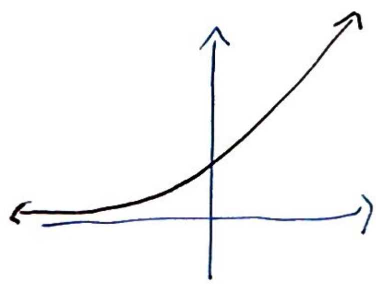
a, b, c son constantes

Asuma que la soln es $y = e^{mx}$ ¿m?

$y' = me^{mx}$ $y'' = m^2 e^{mx}$

$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0.$

$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$ $e^{mx} \neq 0.$



Ec. Auxiliar: $\boxed{am^2 + bm + c = 0.}$

Las raíces nos dan la m's.

Ec. Cuadrática: $\boxed{m_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

Caso I: Raíces Reales Distintas. $b^2 > 4ac.$

Dos solns. L.I. $\boxed{y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}}$ I.

Caso II: Raíces Repetidas. $b^2 = 4ac.$

sólo hay una raíz $m_1 = -\dfrac{b}{2a}$

No es la soln general. $y = c_1 e^{-bx/2a} + c_2 e^{-bx/2a}.$

soluciones repetidas

$y_2 = u\, y_1$ sustituya en $ay'' + by' + cy = 0$.

$$\int P(x)\,dx = \int \frac{b}{a}\,dx = \frac{b}{a}x \qquad y_1 = e^{-bx/2a}.$$

$$u = \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}\,dx = \int \frac{e^{-bx/a}}{e^{-bx/a}}\,dx = \int dx = x$$

Dos solns L.I. $\quad y_1 = e^{m_1 x} \qquad y_2 = x e^{m_1 x}$

$$\boxed{y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}} \qquad \underline{II}.$$

Caso III: Raíces complejas. $\quad b^2 < 4ac \qquad \sqrt{-x}$.

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(4ac - b^2)(-1)}}{2a.} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a.}$$

$i = \sqrt{-1}$

$m_{1,2} = \underset{\smile}{\alpha} \pm i\beta.$ $\qquad$ α parte real
β parte imaginaria.

soln General $\quad y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$

Dos soluciones son L.I.

Reescriba en términos de funciones reales

Fórmula de Euler. $\quad e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$e^{\alpha x} e^{\pm i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x \pm i \sin \beta x)$$

$$y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + i c_1 e^{\alpha x}\sin\beta x + c_2 e^{\alpha x}\cos\beta x - i c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y = \underbrace{(c_1 + c_2)}_{A_1} e^{\alpha x}\cos\beta x + \underbrace{(i c_1 - i c_2)}_{A_2.} e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Soln. General $\boxed{y = A_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + A_2 e^{\alpha x}\sin\beta x}$ III.

Resumiendo, $am^2 + bm + c = 0.$

1. Raíces Distintas $\quad y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$
2. Raíces Repetidas $\quad y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_2 x}$
3. Raíces Complejas $\quad y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$

$r = \alpha \pm i\beta.$

Ejercicio 1: Resuelva.

a. $y'' - 2y' - 8y = 0. \qquad y = e^{mx}$

$$m^2 - 2m - 8 = (m-4)(m+2) = 0$$

Raíces Reales Distintas: $m_1 = 4, \quad m_2 = -2.$

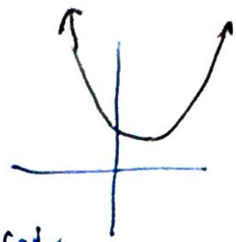
Soln Gral: $\boxed{y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x}}$

b. $y'' - 14y' + 49y = 0.$ $\qquad y_2 = u e^{7x}, \quad u = x$

Ec. Auxiliar: $m^2 - 14m + 49 = (m-7)(m-7) = 0$

Raíz Repetida: $m_1 = 7, 7$ (mult. algebraica 2)

Soln General: $y = c_1 e^{7x} + c_2 x e^{7x}$



c. $y'' - 2y' + 2y = 0.$

Ec. Auxiliar. $m^2 - 2m + 2 = \underbrace{m^2 - 2m + 1}^{\text{completando el cuadrado.}} + 2 - 1 = 0$

$(m-1)^2 + 1 = 0 \qquad m - 1 = \sqrt{-1} = \pm i$

$\boxed{m = 1 \pm i.}$

Raíces Complejas

fórmula Cuadrática. $m = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4(2)}}{2} = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4} = \underset{\text{real}}{1} \pm \underset{\text{imaginaria.}}{\frac{2i}{2}}$

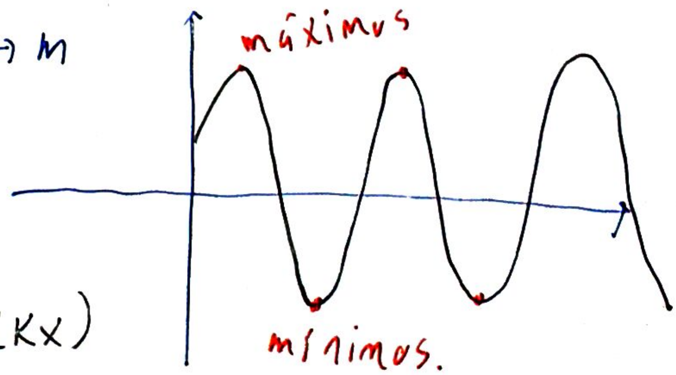
Soln general: $\boxed{y = c_1 e^{x} \cos x + c_2 e^{x} \sin x}$

d. Oscilador Lineal sin Amortiguamiento

$y'' + K^2 y = 0. \qquad y' \to m$

$m^2 + K^2 = 0$

$m = \sqrt{-K^2} = \pm iK.$



$y = c_1 e^0 \cos Kx + c_2 e^0 \sin(Kx)$

$\boxed{y = c_1 \cos Kx + c_2 \sin Kx}$

e. Movimiento Hiperbólico

$$y'' - K^2 y = 0.$$

$$m^2 - K^2 = 0 \rightarrow m = \sqrt{K^2} = \pm K.$$

$$\boxed{y = c_1 e^{Kx} + c_2 e^{-Kx}}$$ reales distintas.

Use $\sinh(Kx) = \frac{1}{2}\left(e^{Kx} - e^{-Kx}\right)$ $\cosh(Kx) = \frac{e^{Kx} + e^{-Kx}}{2}.$

y $A_1 = \frac{c_1 + c_2}{2}.$ $A_2 = \frac{c_1 - c_2}{2}.$

Para rescribir la soln general como.

$$\boxed{y = A_1 \sinh(Kx) + A_2 \cosh(Kx)}$$ 2 solns L.I.

Conjunto fundamental de soluciones no es único.

EDs Lineales Coeficientes Constantes Homogéneas de orden n.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

La solución sigue siendo una combinación de funciones exponenciales $y = e^{mx}$ $y^{(K)} = m^K e^{mx}$

Ec. Auxiliar $a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_2 m^2 + a m + a_0 = 0.$

"n raíces"

La soln. general es una combinación de los 3 casos.

1. Raíces Reales Distintas.

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n e^{m_n x}$$

2. Raíz Real con multiplicidad K.

Se utilizan las potencias de x para tener K soluciones L. I.

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx} + c_3 x^2 e^{mx} + \dots c_K x^{K-1} e^{mx}$$

3. Raíces Complejas: $2 \pm i$ $\quad 1 \pm 2i$

a. si no están repetidas.

$$y = e^{\alpha_1 x}(c_1 \cos \beta_1 x + c_2 \sin \beta_1 x) + e^{\alpha_2 x}(c_3 \cos \beta_2 x + c_4 \sin \beta_2 x)$$

b. repetidas. multiplique por x para tener I.L.

$(2 \pm i)\ (2 \pm i)$

$$y = e^{\alpha_1 x}(c_1 \cos \beta_1 x + c_2 \sin \beta_1 x) + x e^{\alpha_1 x}(c_3 \cos \beta_1 x + c_4 \cos \beta_1 x)$$

Ejercicio 2: Resuelva.

$y^{(k)} \to m^k$.

a. $y^{(4)} - 81y = 0$. $\qquad \frac{d^4y}{dx^4} - 81y = 0$.

Ec. Auxiliar: $m^4 - 81 = 0$.

$(m^2+9)(m^2-9) = 0$.

$\sqrt{-9}$

$(m^2+9)(m-3)(m+3) = 0$.

Raíz Reales y Complejas $\quad m_{1,2} = \pm 3i \quad m_3 = 3 \quad m_4 = -3$.

$$\boxed{y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-3x}}$$

4 solns. L.I.

b. $\frac{d^6y}{dt^6} + 8\frac{d^4y}{dt^4} + 16\frac{d^2y}{dt^2} = 0$. $\qquad$ 6 solns L.I.

$$m^6 + 8m^4 + 16m^2 = m^2(m^4 + 8m^2 + 16) = 0$$

Ec. Auxiliar: $m^2(m^2+4)^2 = 0$ $\qquad m^2 = -4$, $m = \pm 2i$

Raíz Real Repetida. $\quad m_1 = 0, 0$.

Raíces Complejas Repetidas $\quad m_2 = \pm 2i, \pm 2i$ $\qquad e^0 = 1$

Soln General:
$$\boxed{\begin{aligned} y = c_1 + c_2 t + c_3 \cos(2t) + c_4 \sin(2t) \\ + c_5 t \cos(2t) + c_6 t \sin(2t) \end{aligned}}$$

c. $\dfrac{d^5 y}{dt^5} = 0.$ $\qquad y = c_1 e^0$

$m^5 = 0 \qquad m_1 = 0, 0, 0, 0, 0.$

$y = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5$ } NO ES.

$\boxed{y = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 t^3 + C_5 t^4}$ Ésta es.

Multiplique por t para evitar repeticiones.

$y^{(5)} = 0$

$y^{(4)} = C_1$

$y^{(3)} = C_1 t + C_2.$

$y'' = \frac{C_1}{2} t^2 + C_2 t + C_3.$

$y' = \frac{C_1}{6} t^3 + \frac{C_2}{2} t^2 + C_3 t + C_4$

$y = \frac{C_1}{24} t^4 + \frac{C_2}{6} t^3 + \frac{C_3}{2} t^2 + C_4 t + C_5$