5. ED exactas.

la ED 1er orden $\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$

se puede reescribir en términos de sus diferenciales.

$M\,dx = N\,dy \qquad M(x,y)\,dx - N(x,y)\,dy = 0$

No siempre son separables o lineales.

ED exactas: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Solución de una ED exacta:

Si la ED 1er orden $M\,dx - N\,dy = 0$ es exacta, entonces la soln de la ED satisface las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N.$$

Soln general: la función implícita $F(x,y) = C$.

0. ED exacta $M_y = N_x$.
1. Integre respecto a x $\quad F_x = M(x,y) \qquad F + A(y)$
   constante depende de y $\quad A(y)$
2. Derive F respecta a y $\quad F_y + A'(y) = N$.
3. Simplifique e integre $A'(y)$.

4. Soln general $f(x,y)=C$.

Ejercicio 2: Resuelva las sigs. EDs.

1. $(\underbrace{3x^2y-6x}_{M})dx + (\underbrace{x^3+2y}_{N})dy = 0$.

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2$ $\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2$ $\qquad M_y = N_x$

ED exacta.

La ED satisface.

(1) $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y-6x$ $\qquad$ (2) $\frac{\partial F}{\partial y} = x^3+2y$.

Integre F_x: $f(x,y) = x^3y - 3x^2 + C(y)$

Derive F resp. a y: $\frac{\partial F}{\partial y} = x^3 + C'(y) = x^3+2y$.

Simplifique e integre: $C'(y) = 2y \qquad C(y) = y^2$

Soln General: $F = C$. $\boxed{x^3y-3x^2+y^2 = C.}$

Puede empezar integrando la 2da ec.

$f(x,y) = x^3y + y^2 + A(x)$.

$F_x = 3x^2y + A'(x) = 3x^2y - 6x$

$A'(x) = -6x \Rightarrow A(x) = -3x^2$.

Misma soln. general $\boxed{x^3y-3x^2+y^2 = C.}$

b. $\underbrace{(2x^3 - xy^2 - 2y + 3)}_{M}dx - \underbrace{(x^2y + 2x + 2y)}_{N.}dy = 0.$

p. 32.

$M_y = -2xy - 2.$ $\qquad N_x = -(2xy + 2) = -2xy - 2.$

ED exacta $\quad M_y = N_x$

Resuelva. (1) $F_x = 2x^3 - xy^2 - 2y + 3$ (2) $F_y = -x^2y - 2x - 2y.$

Integre $\quad F = \frac{2}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^2 - 2yx + 3x + A(y)$

Derive: $\quad F_y = \cancel{-x^2y} \cancel{-2x} + A'(y) = \cancel{-x^2y} \cancel{-2x} - 2y.$

Integre: $\quad A'(y) = -2y \Rightarrow A(y) = -y^2$

Soln Gral: $\boxed{\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^2 - 2yx + 3x - y^2 = C.}$

c. $\underbrace{(\cos x\cos y - \cot x)}_{M}dx + \underbrace{(\sec y - \sin x\sin y)}_{N.}dy = 0.$

$M_y = -\cos x\sin y$ $\qquad N_x = -\cos x\sin y.$ $\qquad M_y = N_x$

Resuelva: (1) $F_x = \cos x\cos y - \cot x$ $\qquad \int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + c$

(2) $F_y = \sec y - \sin x\sin y.$ $\qquad \int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c$

$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x|$

Integre: $\quad F = \sin x\cos y - \ln(\sin x) + A(y).$

Derive: $\quad F_y = -\sin x\sin y + A'(y) = \sec y - \sin x\sin y.$

4\. Simplifique: $A'(y) = \sec y.$ $A(y) = \ln|\sec x + \tan y|$

Soln Gral: $\sin x \cos y - \ln(\sin x) + \ln|\sec x + \tan y| = C$

Una ED separable también es exacta.

d. $\frac{dy}{dx} = ry.$

$\frac{dy}{y} = r\,dx$ $\ln y = rx + c$

$y = e^{rx + c}.$

también es exacta, reescríbala.

$dy = ry\,dx$

$\underbrace{1}_{M} \cdot dy - \underbrace{ry}_{N.}\,dx = 0$ no se ve separable

$M = 1$ $M_x = 0$ no es exacta.

$N = -ry.$ $N_y = -r$

d. $\frac{1}{y}\,dy - r\,dx = 0.$ p. 34.

$M = y^{-1}$ $M_x = 0$ ahora si es exacta.

$N = -r$ $N_y = 0$

Resuelva: $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{y}$ $\frac{\partial F}{\partial x} = -r.$

$F = \ln y + A(x)$

$F_x = A'(x) = -r$ $\Rightarrow$ $A(x) = -rx$

5.

Soln. gral $\ln y - rx = C.$

$$\ln y = C + rx$$
$$y = e^{C+rx}$$

misma soln.

$g(x)\,dy + f(y)\,dx = 0.$

no son separables, pero se vuelven separable si dividen por $g(x)f(y)$.

$$\underbrace{\frac{1}{f(y)}}_{N}\,dy + \underbrace{\frac{1}{g(x)}}_{M}\,dx = 0.$$

$N_x = 0 \qquad N_y = 0.$

e. $x^2\,dy + y^3\,dx = 0.$ No es exacta

$$x^2\,dy = -y^3\,dx$$

$$\frac{dy}{y^3} = \frac{-dx}{x^2}$$ Ahora si lo es:

$$-\frac{y^{-2}}{2} = \frac{-x^{-1}}{-1} + C.$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} = \frac{1}{x} - C.$$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{-2}{x} + 2C$$

$$y^2 = \frac{1}{2C - 2/x} \qquad y = \sqrt{\frac{1}{2C-2/x}}$$

Ejercicios Misceláneos: Resuelva.

u. $\underbrace{x}_{M}dy \underbrace{-(y+2x^3)}_{N}dx = 0.$

$M_x = 1$ $\quad$ $N_y = -1$ $\quad$ no es exacta.

$x\,dy = (y + \underbrace{2x^3}_{})\,dx.$ $\quad$ no es separable.

$$x\frac{dy}{dx} = y + 2x^3.$$

$$xy' - y = 2x^3$$ ED lineal

$$y' \underbrace{- \frac{1}{x}}_{P} y = 2x^2$$

F.I: $e^{\int P dx} = e^{-\int 1/x\, dx} = e^{\ln x^{-1}} = \frac{1}{x}$

$-x^{-2}.$

* ED * FI: $\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 2x$

RP: $\left(\frac{y}{x}\right)' = 2x$

Integre: $\frac{y}{x} = x^2 + C.$

Soln. Gral: $\boxed{y = x^3 + Cx}$