Ecuaciones Diferenciales

David Corzo

2021 Enero 11

Índice general

Capítulo 1

Introducción a las EDs

1.1. Introducción a las ecuaciones diferenciales

- Def: una ecuacion diferencial (ED) es una ecuación que contiene derivadas de una variable dependiente, generalmente y, respecto a una o más variables independientes, generalmente x o t.
- Ejemplo:
  - crecimiento exponencial.
  $$\frac{\partial y}{\partial t} = ky \quad \Longrightarrow \quad y = f(t)?$$
  - Enfriamiento de Newton:
  $$\frac{\partial T}{\partial t} = K(T - T_m) \quad \Longrightarrow \quad T?$$
  - Deslizamiento:
  $$ay'' + by' + cy' = f(t)$$
  - Logística:
  $$y' = Ky(M - y)$$
- Objetivo: Encuentre una funcion $y(t)$ que satisfaga la ED.

1.1.1. Definiciones

- ED Ordinaria: la ec tiene derivadas respecto a una **sola** variable.
- Ejemplo de ED ordinaria:
$$y''' + zy'' + y' + y = x^3$$
- ED parcial: la ec tiene derivadas parciales respecto a dos o más variables.
- Ejemplo de ED parcial: ec de calor.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2}$$

1.1.2. Orden de una ED

- el orden de la mayor derivada en la ED.
- ED orden 3:
$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = \sin(x)$$

1.1.3. Ejercicios

Clasifique el orden de cada ED:

1. ED 1er orden.
$$\frac{dy}{dx} = Kx^2y^2$$
2. ED 2do grado.
$$p'' = zpp'$$
3. ED 3er orden.
$$y'y''' + 2y'' + \alpha y' + \beta y = \sin(x)\, e^{-2x}$$
4. ED 2do orden.
$$y(y'')^6 + 5(y')^20 = 0$$

1.1.4. Notaciones

- Notación prima: $y', y'', y^{(n)}$
- Notación Leibni: $\dfrac{dy}{dt}, \dfrac{d^2y}{dt^2}, ..., \dfrac{d^ny}{dt^n}$

1.1.5. Forma de una ED

- ED de orden n: ponga las derivadas como variables.
$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad \text{encuentre ¿y?}$$
- ED en su forma normal o estádar.
  - Sólo la derivada más grande se encuentra en el lado izquierdo.
$$y^{(n)} = g(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

1.1.6. Solución de una ED

- Solución: una funcion $y = \phi(x)$ que tiene n derivadas continuas y satisface la ecuación diferencial.
- La idea es meter la función $y = \phi(x)$ en la ED y solucionarla.

1.1.7. Ejercicio 2

Verifique que $y(t)$ es una solución de la ED dada.

- $\dfrac{dy}{dt} + 20y = 24$. Solución: $y(t) = \dfrac{6}{5} - \dfrac{6}{5}e^{-20t}$.

Derivar la solución:
$$y'(t) = +\frac{6}{5} \cdot 20e^{-20t}$$
Remplaze y' y y en la ED.
$$\cancel{24e^{-20t}} + 24 - \cancel{24e^{-20t}} = 0$$
$$24e^{-20t} + 20\left(\frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}\right) = 24$$

- $y'' + 4t = 0$. Solución: $y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$ c_1, c_2 son constantes.

$$
\begin{aligned}
&\text{Derivamos dos veces (por el orden) la solución.}\\
y' &= -2c_1 \sin(2t) + 2c_2 \cos(2t)\\
y'' &= -4c_1 \cos(2t) - 4c_2 \sin(2t)\\
&\text{Sustituir la segunda derivada en el problema original.}\\
4c_1 \cos(2t) - 4c_2 \sin(2t) + 4(c_1 \cos(2t)) + c_2 \sin(2t) &= 0\\
\cancel{4c_1 \cos(2t)} - \cancel{4c_2 \sin(2t)} + \cancel{4(c_1 \cos(2t))} + \cancel{c_2 \sin(2t)} &= 0\\
0 = 0 \quad y(t) &\text{ es la soln de la ED.}
\end{aligned}
$$

1.1.8. Soluciones triviales

- Soln trivial: una ED tiene soln trivial si la función cero $\phi(x) = 0$ es una de sus soluciones.
- Ejemplo de no tener solucion trivial:

$$
\begin{aligned}
y' + 20y &= 24\\
y = 0, \quad y' = 0 \quad 0 + 20 \cdot 0 = 0 &\neq 24
\end{aligned}
$$

- Ejempo de tener solución trivial:

$$
\begin{aligned}
y'' + 4y &= 0\\
y = y'' = 0 \quad 0 + 4 \cdot 0 = 0 &= 0
\end{aligned}
$$

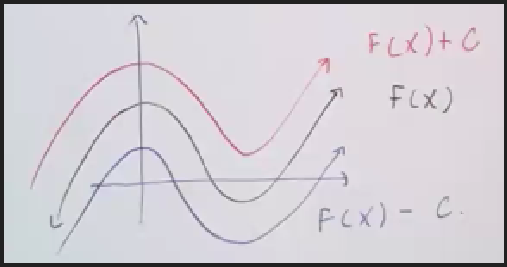
1.1.9. Infinitas soluciones

- Una ED puede tener infinitas soluciones.
- Considere la ED: $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$.
  - La integral de y':

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dy}{dx} dx &= \int f(x) dx\\
y = \int f(x) dx &= F(x) + C
\end{aligned}
$$

  - y' dependiente. x independiente
  - La solución de esta ED es la antiderivada de $f(x)$.
  - Hay infinitas soluciones: $y = F(x) + C$

- La familia de soluciones de la ED es: $F(x) + C$.
- Entonces necesitamos encontrar el valor de C.



- No sólo se encuentra $F(x)$ sino también el calor de C.

1.1.10. 2 tipos de soluciones para una ED

- La solución general: la solución contiene constantes arbitrarias $c_1, c_2, ..., c_n$. (infinitas soluciones)
- La solución particular: la solución no contiene constantes arbitrarias. (solución unica)

1.1.11. Ejemplo

1. $\dfrac{dy}{dt} + 20y = 24$

$$y(t) = \frac{6}{5} + \frac{6}{5}e^{-20t}$$

Solución particular de la ED.

2. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0$

$$y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$$

Solución general.

1.1.12. Hay una correlación directa entre el orden de la ED y el número de constantes arbitrarias que resultan de la integración

- En general la solución general de una ED depende del orden de la ecuación diferencial.
- ED 1er orden: 1 constante arbitraria.
- ED 2do orden: 2 constantes arbitraria.
- ED n-ésimo orden: n constantes arbitrarias.

1.1.13. Resolver el siguiente ejercicio

- $\frac{dy}{dt} + 20y = 24$

$$\frac{dy}{dt} = 24 - 20y$$

$$\underbrace{\int \frac{dy}{24-20y} = \int dt}_{\text{Recordar: } \int \frac{dy}{y+b}} = \ln|y+b| + C$$

$$-\frac{1}{20}\ln(24-20y) = t + C \quad \Longrightarrow \quad \text{ya no hay derivadas entre y}$$

$$24 - 20y = e^{-20t-20C}$$

$$-20y = -24 - e^{-20t-20C}$$

$$y = \frac{6}{5} + \frac{1}{20}e^{-20t-20C}$$

Tenemos una solución general, nos deben dar una condición inicial para sacar la solución particular.

Capítulo 2

Problemas de valor inicial

- EDs 1er orden:
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = e^x \sin(y)$$
- Solución general:
$$\phi(x,y) + C$$
- Solución particular: son libres de constantes.

Son necesarias condiciones en la variable $y(x_0) = y_0$ y sus derivadas para no tener constantes arbitrarias.

2.0.1. Problema de valor inicial (PVI) de primer orden

- Es una ED de 1er orden con una condición inicial.
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

2.0.2. PVI de 2do grado

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x,y,y'), \quad y(x_0) = y_0 11 y'(x_0) = V_0$$

En física, tienen la aceleración y'' y quieren encontrar el desplazamiento. Se necesita la posición inicial $y(0) = y_0$ y la velocidad inicial $y'(0) = V_0$.

2.0.3. Ejercicio 1: Encuentre la solución particular de las sigs EDs.

- $y' = y - y^2$, $y(-1) = 5$ Use la solución general: $y(x) = \dfrac{1}{1 + ce^{-x}}$
    - Recordar que lo único que tenemos que hacer es encontrar la constante de la solución general.

$$\text{Use:} \quad x = -1, \quad y = 5 \quad \text{para encontrar el valor de C.}$$
$$\frac{1}{1+ce^1} = 5 \quad \Longrightarrow \quad 1 + ce^1 = \frac{1}{5}$$
$$ce = \frac{1}{5} - 1 \quad \Longrightarrow \quad c = -\frac{4}{5e}$$
$$\text{Solución particular:} \quad y(x) = \frac{1}{1 - \frac{4}{5e}e^{-x}}$$

- $u'' + u = 0, \quad u(\pi/2) = 2, \quad u'(\pi/2) = 5$ Use la solución general $u = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)$.

$$\begin{aligned}
u' &= c_1 \cos(x) - c_2 \sin(x) \\
&\text{Aplique cada una de las CIs.} \\
u(\pi/2) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 \quad &\implies \quad c_1 = 2 \\
u'(\pi/2) = c_1 \cdot 0 - c_2 \cdot 1 = 5 \quad &\implies \quad c_2 = -5 \\
\text{Solución particular: } u(x) &= 2\sin(x) - 5\cos(x)
\end{aligned}$$

2.0.4. Resolución de una ED

Casos:

1. Solución única.
2. Infinitas soluciones.
3. No hay solución, ocurre en un PVI (usualmente cuando se ponen condiciones imposibles).

- No todos los problemas con valor inicial con condiciones tienen soluciones únicas.
- Por ejemplo: $\frac{dy}{dt} = 3y^{2/3}$ sujera a $y(0) = 0$ tiene por lo menos 2 soluciones. $y(t) = 0 \quad y(t) = t^3$.
    - ¿Cómo sabemos que es t^3?

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{3y^{2/3}} &= dt \quad \text{integrar.} \\
\int \frac{1}{3} y^{-2/3} dy &= \int dt \\
\frac{3}{3} y^{1/3} &= t + c \\
y = (t+c)^3 \quad &\text{Solución general} \\
0 = (0+c)^3 \quad \implies \quad c^3 = 0 \quad &\implies \quad c = 0 \\
\text{Solución particular:} \quad &y = t^3
\end{aligned}$$

2.0.5. ¿Cuándo un PVI tiene garantizada solución única?

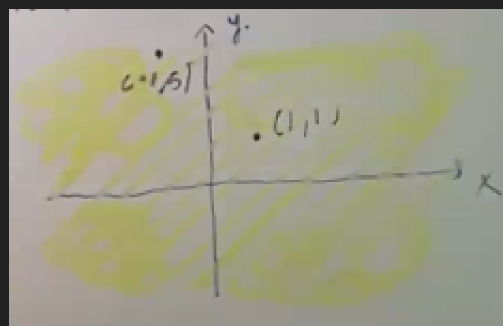
- El problema de valor inicial de primer orden $y' = f(x,y)$ $y(x_0) = y_0$ tiene garantizada una solución única si $f(x,y)$ y $\frac{\delta f}{\delta y}$ son continuas en (x_0, y_0).

2.0.6. Ejercicios

Ejercicio 2a: Encuentre y grafique los puntos (x,y) donde la solución única del PVI está garantizada.

- $y' = y - y^2$

$$f(x,y) = y - y^2 \quad \text{es continua en} \quad \mathbb{R}^{\nvDash}$$
$$\frac{\delta f}{\delta y} = 1 - 2y \quad \text{es continua en} \quad \mathbb{R}^{\nvDash} \quad \text{(plano)}$$
$$\text{La solución única está garantizada en:} \quad -\infty < x < \infty \quad -\infty < y < \infty$$

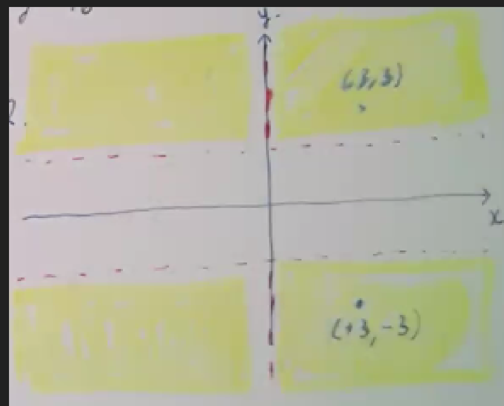


- $y' = 3y^{2/3}$

$$f(x,y) = 3y^{2/3} \quad \text{es continua en } \mathbb{R}^2$$
$$\text{Pero:} \quad \frac{\delta f}{\delta y} = \frac{3 \cdot 2}{3} y^{-1/3} = \frac{2}{y^{1/3}}$$
$$\text{No es continua en } y = 0\text{. No hay solución garantizada si } y = 0 \; (x,y), y \neq 0.$$

- $y' = \dfrac{\sqrt{y^4 - 16}}{x}$
  - Evite números negativos.
  - Evite denominador igual a cero.

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{y^4 - 16}}{x} \quad \text{no es continua en x=0 \& } -2 < y < 2$$
$$y^4 - 16 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad y^4 \geq 16 \quad \Longrightarrow \quad -2 \geq y \geq 2$$
$$\text{Adicionalmente:} \; \frac{\delta f}{\delta y} = \frac{1}{x}(y^4 - 16)^{-1/2} \frac{1}{2} 4y^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y^3}{x\sqrt{y^4 - 16}} \quad \text{se indefine en:} \quad \pm 2$$
$$\text{Solución garantizada si} \quad x = 0 \quad -2 \leq y \leq 2$$



2.0.7. ED separable de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

- el lado derecho es un producto de dos funciones en x y en y.
- ED lineal de 1er orden.
$$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = c(x)$$
- Las funciones coeficientes a, b, c sólo dependen de x.
$$\frac{dy}{dx} \quad \& \quad y \quad \text{sólo tienen potencias de uno.}$$
- ED exacta:
$$Mdy + Ndx = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$$
- Una ED de 1er orden $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ se puede escribir usando diferenciales. La idea es tratar el dy, dx como una fracción.
$$dy = f(x, y)dx \quad \Longrightarrow \quad dy = f(x, y)dx = 0$$

2.0.8. Ejercicio 3

Determine si la ED dada es lineal o es separable.

1. $(y - x^2)dx + 4ydy = 0$

$$(y - x^2)dx + 4xdy = 0$$
$$(y - x^2) + 4x\frac{dy}{dx} = 0$$
$$4x\frac{dy}{dx} = x^2 - y$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y}{4x} \quad \Longrightarrow \quad \text{No es separable por el término } x^2 - y$$

- Pero sí es lineal.

$$4x\frac{dy}{dx} + y = x^2$$
$$a(x) = 4x, \quad b(x) = 1, c(x) = x^2$$

2. $ydx + (x + xy + e^y)dy = 0$

$$y + \underbrace{(x + xy + e^y)}_{a(x)}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{No es lineal.}$$
$$(x + xy + e^y)\frac{dy}{dx} = -y\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{(x + xy + e^y)} \qquad \text{No es separable.}$$

3. $ydx + (xxye^y)dy = 0$

$$x^2ye^y\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \text{No es lineal.}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x^2ye^y} = -\frac{1}{x^2e^y} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{e^y}\right) \qquad \text{Es separable.}$$

Separe en términos de x & de y.

$$e^y dy = -\frac{1}{x^2}dx$$
$$\int e^y dy = \int -x^{-2}dx$$
$$e^y + c_1 = x^{-1} + c_2$$
$$y = \ln\left(c_2 - c_1 + \frac{1}{x}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Solución general.}$$

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales 1er orden separables

3.1. Ecuaciones diferenciales Separables

- ED de 1er grado separable: es una ED de 1er grado cuyo lado derecho es un producto de una función en x y una función y.
$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad \text{o} \quad g(y)dy + f(x)dx = 0$$
- Resolución: se coloca cada variable en un lado de la ecuación y se integra respecto a cada variable. Ya con eso eliminamos la derivada, pero debemos resolver para y.

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \implies \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$
$$G(y) = F(x) + C$$

Las dos constantes de integración se pueden combinar en una sola $C = C_2 - C_1$

- Ejemplos:

$$\frac{dy}{dx} = y^3x^2e^{x^3+y^4} = (y^3e^{y^4})(x^2e^{x^3}) \implies \text{Separable.}$$
$$\frac{dy}{dx} = tan(y+x) \implies \text{No es separable.}$$

3.1.1. Ejercicio 1: Resuelva

Pasos:

1. Separe.
2. Integre.
3. Resuelva para y.

1. $\dfrac{dy}{dx} = -3x^2y^2$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -3x^2y^2 \quad \text{Como un cociente de diferenciales } \frac{dy}{dx}. \\
\frac{dy}{-y^2} &= 3x^2dx \quad \text{Separe.} \\
\int -y^{-2}dy &= \int 3x^2dx \quad \text{Integre.} \\
\frac{1}{y} &= x^3 + C \quad \text{Resuelva para } y \\
y &= \frac{1}{x^3 + C}
\end{aligned}$$

- $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ también es ED separable porque $g(x) = 1$.

$$\int dy = \int f(x)dx \quad \Longrightarrow \quad y = F(x) + C$$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{Si es separable.} \\
\int dy &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
y &= \arcsin{(x)} + C
\end{aligned}$$

3.1.2. Una ED puede tener una C.I. $y(a) = b$

1. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 \sec{(x)} \tan{(x)} \;\; y(0) = 0{,}5$

- Tomar en cuenta que esta ED no es lineal por el término y^2.

$$
\begin{aligned}
\text{Separe:} \quad & \frac{dy}{y^2} = \sec(x)\tan(x)\,dx \\
\text{Integre:} \quad & \int y^{-2}dy = \int \sec(x)\tan(x)\,dx \\
& \frac{1}{y} = \sec(x) + C \\
\text{Resuelva para y:} \quad & \frac{-1}{\sec(x)+C} = y \quad \text{Sol. General.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Use } y(0) = 0{,}5 \text{ para encontrar c, } sec(0) = 1 \\
0{,}5 = \frac{-1}{\sec(0)+C} \quad \Longrightarrow \quad -0{,}5 = \frac{1}{1+C} \\
1 + C = \frac{1}{-0{,}5} = -2 \\
C = -2 - 1 = -3 \\
\text{Soln:} \quad y = \frac{-1}{\sec(x)-3}
\end{aligned}
$$

- Pueden encontrar C, antes de resolver para y también.

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{y} = \sec(x) + C \quad x = 0, y = 0{,}5 \\
-\frac{1}{0{,}5} = 1 + C \\
-\frac{1}{y} = \sec(x) - 3 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{\sec(x)-3} = y
\end{aligned}
$$

2. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x^2}\ y(1) = e^2$
    - El PVI no tiene solución única en $x = 0$, se indefine en 0.
    - Sí hay solución única en (1,1).

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dx}{x^2} \\
\ln(y) = \frac{1}{x} + C \quad \text{Use } x = 1, y = e^2 \\
C = \ln(y) - \frac{1}{x} \\
C = \ln(y) - \frac{1}{x} = \ln\left(e^2\right) - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1 \\
\ln(y) = x^{-1} + 1 \quad \text{use } e^{\ln([])} = [] \\
y = e^{x^{-1}} = e^{1+\frac{1}{x}} \\
\text{Solución general: } y = e^{1/x+C}
\end{aligned}
$$

- Esto se puede ver como una 'integración implícita'.

- Solución implícita: la solución de una ED separable es una función implícita.

$$G(y) = F(x) + C \quad \Longrightarrow \quad \text{Explicita:} \quad y = H(x) + C$$

En algunos casos no es posible resolver para y. Por ejemplo el siguiente.

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x}{1 + y + y^2}$

$$\int (1 + y + y^2) dy = \int 4x dx$$
$$y + 0{,}5y^2 + \frac{1}{3}y^3 = 2x^2 + C$$

- No se puede resolver para y, la solución es la función implícita.

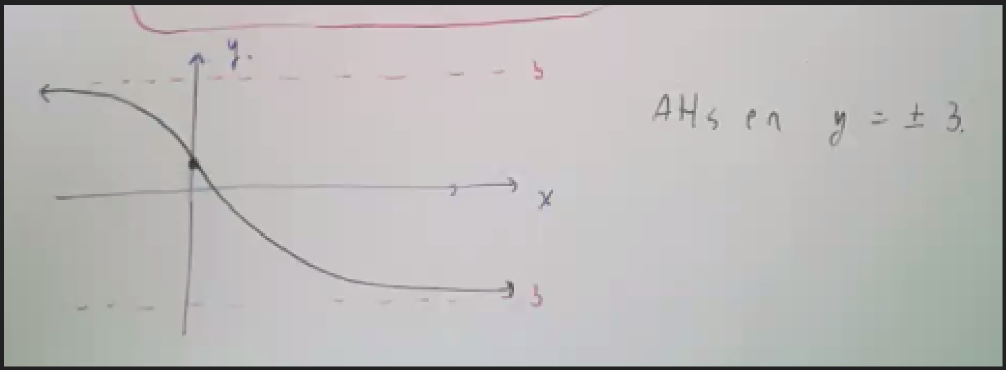
$$y + 0{,}5y^2 + \frac{1}{3}y^3 - x^2 = 15$$

En algunas EDs separables es necesario realizar fracciones parciales.

1. Resuelva: $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 9$

$$\int \frac{dy}{y^2 - 9} = \int dx = x + c \quad \text{Se debe hacer fracciones parciales.}$$

$$\text{Encuentre las fracciones parciales:}$$
$$\frac{1}{y^2 - 9} = \frac{1}{(y-3)(y+3)} = \frac{A}{y-3} + \frac{B}{y+3}$$
$$\text{Multiplique por:} \quad (y-3)(y+3)$$
$$y = 3: \quad \Longrightarrow \quad A(y+3) + B(y-3) = 1$$
$$y = -3: \quad \Longrightarrow \quad 6A + 0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{6}$$
$$0 - 6B = 1 \quad \Longrightarrow \quad B = -\frac{1}{6}$$
$$\text{Integre la variable } y$$
$$\frac{1}{6}\int \frac{dy}{y-3} - \frac{1}{6}\int \frac{dy}{y+3} = x + c$$
$$\frac{1}{6}\left(\ln(y-3) - \ln(y+3)\right) = x + c$$
$$\ln(y-3) - \ln(y+3) = 6x + 6c$$
$$\ln\left(\frac{y-3}{y+3}\right) = 6x + 6c$$
$$\frac{y-3}{y+3} = e^{6x+6c}$$
$$y - 3 = ye^{6x+6c} + 33^{6x+6c}$$
$$y\left(1 - e^{6x+6c}\right) = 3 + 3e^{6x+6c}$$
$$y = 3 + 3e^{6x+6c} \quad \text{Solución general.}$$



2. Integre: $\int \frac{y-2}{y^2-9}$

$$\frac{y-2}{(y-3)(y+3)} = \frac{A}{y-3} + \frac{B}{y+3}$$
$$y-2 = A(y+3) + B(y-3)$$
$$y=3: \quad 1 = 6A \quad \Longrightarrow \quad A = 1/6$$
$$y=-3: \quad -5 = -6B \quad \Longrightarrow \quad B = 5/6$$
$$\frac{A}{y-3} + \frac{B}{y+3} = \frac{1}{6}\ln(y-3) + \frac{5}{6}\ln(y+3) + c$$

La ED $\quad \frac{dy}{dx} = y^2 - 9 \quad \Longrightarrow \quad y^2 - 9 = 0 \quad$ cuando: $\quad y \pm 3$

Tiene otras dos soluciones $y = \pm 3$ contantes.

Solución general: $\quad y = 3(1 + e^{6x+6c})$

Las soluciones $y \pm 3$ se conocen como soluciones singulares:

Porque: $\quad \int \frac{dy}{y^2-9} \quad$ se indefine en $\quad x \pm 3$

Solución singular:

- La ED $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ tiene soluciones cuando $h(y) = 0$.
- Solución singular de una ED: son las soluciones $y = c$ donde $h(c)$

Capítulo 4

Ecuaciones diferenciales lineales

4.1. ED lineales

- ED lineal 2do orden:
$$A(X)y'' + B(x)y' + C(x)y = D(x)$$
- ED lineal 1er orden:
$$A(x)y' + B(x)y = C(x)$$
- En general no es separable $C(x) - B(x)y$.
- Divida la ED lineal por $A(x)$ para obtener su forma estándar.
$$y' + P(x)y = Q(x) \quad , P = \frac{B}{A} \quad , Q = \frac{C}{A}$$

4.1.1. Resolución de una ED lineal

$$Q(x) = 0 \quad \text{Resuelva} \quad \frac{dy}{dx} = P(x)y \quad \text{separable.}$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int P(x)dx \quad \Longrightarrow \quad \ln(y) = \int P(x)dx \quad \Longrightarrow \quad y = e^{\int P(x)dx}$$
$$y' = e^{\int P(x)dx} \cdot P(x) \quad \text{Usar el teorema fundamental del cálculo:} \quad \frac{d}{dx}\int Pdx = \int P(x)dx = P$$

1. Factor de integración $v = e^{\int P(x)dx}$
2. Multiplique la ED por el factor de integración:
$$y'e^{\int Pdx} + yP(x)e^{\int Pdx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$
   - Recordar regla del producto $u \cdot v = u'v + uv'$.
$$\left(ye^{\int P(x)dx}\right)' = y'e^{\int Pdx} + yP(x)e^{\int Pdx}$$
3. Use la regla del producto en “reversa”:

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int Psx}\right) = Q(x)e^{\int Pdx}$$

4. Integre ambos lados de la ec:

$$ye^{\int Pdx} = \int Q(x)e^{\int Pdx} + C$$

5. Resuelva para y:

$$y = e^{-\int Pdx}\int Q(x)e^{\int Pdx}dx + ce^{-\int Pdx}$$

4.1.2. Pasos ED lineal

- Verifique que la ED es lineal.
- Escriba la ED en su forma estándar.
- Factor de integración $e^{\int P(x)dx}$.
- Multiplique la ecuación diferencial $\times$ factor de integración.
- Utilice la regla del producto.
- Integre la ED y resuelva para y.

4.1.3. Ejercicios

1. $y' + 2xy = 4x$ es lineal y es estándar.

$$\begin{aligned}
\text{Factor de integración:} &\quad e^{\int Pdx} = e^{\int 2xdx} = e^{x^2} \qquad \text{Agregaremos C al final} \\
\text{Multiplique la ED por el FI:} &\quad y'\left(e^{x^2}\right) + y\left(2xe^{x^2}\right) = 4xe^{x^2} \\
\text{Utilice la regla del producto en reversa:} &\quad \left(ye^{x^2}\right)' = 4xe^{x^2} \\
\text{Integre ambos lados respect a } x\text{:} &\quad \int \left(ye^{x^2}\right)' dx = \int 4xe^{x^2}dx \quad \Longrightarrow \quad 2e^{x^2} + C \\
&\quad u = x^2, \quad du = 2xdx \quad \Longrightarrow \quad \int 2e^u du = 2e^u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Resuelva para } y\text{:} \quad y &= \frac{2e^{x^2} + C}{e^{x^2}} = 2 + Ce^{-x^2} \\
\text{También es separable} \quad y' &= 4x - 2xy = 2x(2 - y) \\
\int \frac{dy}{2-y} = \int 2xdx \quad &\Longrightarrow \quad -\ln(2-y) = x^2 - C \\
2 - y = e^{-x^2-c} \quad \Longrightarrow \quad 2 - e^{-x^2-c} &= y \quad \Longrightarrow \quad c_1 = -e^{-c}
\end{aligned}$$

2. $2\left(y-4x^2\right)dx + xdy = 0$ no es separable.

$$
\begin{aligned}
\text{Rescriba la ED} \quad & 2y - 8x^2 + x\frac{dy}{dx} = 0 \\
& xy' + 2y = 8x^2 \quad \text{ED lineal} \quad e^{2x} \\
y' + \frac{2}{x}y = 8x \quad \text{ED lineal estándar} \quad & \\
\text{FI} \quad & \int P dx = \int \frac{2}{x} dx = 2\ln(x) \\
& 2x \neq e^{\int P dx} = e^{2\ln(x)} = e^{\ln\left(x^2\right)} = x^2 \\
\text{Multiplique por el FI} \quad & x^2 y' + 2xy = 8x^3 \\
& \left(x^2 y\right)' = 8x^3 \\
\text{Integre:} \quad & x^2 y = \int 8x^3 dx \quad \Longrightarrow \quad x^2 y = 2x^4 + C \\
\text{Sol general:} \quad & y = \frac{2x^4 + C}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad 2x^2 + Cx^{-2}
\end{aligned}
$$

3. $(\cos(x) + 2y\cos(x))\,dx - \sin(dy) = 0$

$$
\begin{aligned}
(\cos(x) + 2y\cos(x)) - \sin(x)\frac{dy}{dx} &= 0 \\
\cos(x) = \sin(x)\frac{dx}{dy} - 2y\cos(x)\, qq \ \text{ED lineal} & \\
\frac{dy}{dx} - 2\frac{\cos(x)}{\sin(x)}y = \frac{\cos(x)}{\cos(x)} \quad & \text{Forma estándar} \\
\text{FI} \quad -2\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx = \quad \underbrace{-2\int \frac{du}{u} =}_{u=\sin(x), du=\cos(x)dx} \quad &= -2\ln(\sin(x)) \\
e^{\int P dx} = e^{-2\ln(\sin(x))} &= e^{\ln\left(\sin^{-2}(x)\right)} \\
\text{Multiplique por el FI} \quad \frac{\sin^{-2}(x)\,y'}{f_1} - 2\frac{\cos(x)}{\sin^3(x)} \quad \Longrightarrow \quad & \int u^{-3} du = \frac{u^-2}{-2} + C \\
\frac{y}{\sin^2(x)} = \int \sin^{-3}(x)\cos(x)\,dx = -\frac{1}{2}\sin^{-2}(x) + C \quad \Longrightarrow \quad & y = -0{,}5 + C\sin^2(x)
\end{aligned}
$$