Tarea 1:

Corto Miércoles.

4. $\frac{\partial f}{\partial y}$ usando wolfram.

Libro ediciones UFM.

EDs separables.

ED de 1er orden cuyo lado derecho es un producto de una función en x y una función de y.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)} \quad ó \quad \boxed{g(y)dy + f(x)dx = 0.}$$

Resolución: se coloca cada variable en un lado de la ec y se integra respecto a cada variable.

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx. \qquad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx.$$

$$G(y) = F(x) + C.$$

Las dos constantes de integración se pueden combinar en una sola $C = C_2 - C_1$

se resuelve para y si es posible

Ejemplos:

$$\frac{dy}{dx} = y^3 x^2 e^{x^3+y^4} = (y^3 e^{y^4})(x^2 e^{x^3})$$ es separable.

$$\frac{dy}{dx} = \tan(y+x)$$ no es separable

Ejercicio 1: Resuelva.

a $\dfrac{dy}{dx} = -3x^2y^2$ como un cociente de diferenciales dy/dx

$\dfrac{dy}{-y^2} = 3x^2\,dx$ 1. separe.

$\int -y^{-2}\,dy = \int 3x^2\,dx$ 2. integre.

$\dfrac{1}{y} = x^3 + C.$ 3. resuelva para y.

$\boxed{y = \dfrac{-1}{-x^3 + C.}}$ $y \neq \dfrac{1}{x^3} + C.$ ✓ $\dfrac{-3x^2(-1)(-1)}{(-x^3+C)^2}.$

$\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ también es una ED separable.

$\int dy = \int f(x)\,dx$ $y = F(x) + C.$

b. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ si es separable.

$\dfrac{dy}{dx} = (1-y)\,y.$ también es separable.

$\int dy = \int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + C.$

$y = \sin^{-1}x + C.$

Una ED puede tener una C.I. $y(a) = b.$

a. $\frac{dy}{dx} = y^2 \sec x \tan x \qquad y(0) = 0.5$

no es ED lineal.

Separe: $\frac{dy}{y^2} = \sec x \tan x \, dx$

Integre: $\int y^{-2} dy = \int \sec x \tan x \, dx$

$-\frac{1}{y} = \sec x + C.$

Resuelva para y: $\frac{-1}{\sec x + C} = y.$ Soln General.

Use $y(0) = 0.5$ para encontrar C., $\sec 0 = 1.$

$0.5 = \frac{-1}{\sec 0 + C}$

$-0.5 = \frac{1}{1 + C}.$

$1 + C = \frac{1}{-0.5} = -2.$

$\underline{\underline{C}} = -2 - 1 = \underline{\underline{-3.}}$

Soln PVI: $\boxed{y = \frac{-1}{\sec x - 3}}$

Pueden encontrar C, antes de resolver para y.

$-\frac{1}{y} = \sec x + C. \qquad x = 0, \; y = 0.5$

$-\frac{1}{0.5} = 1 + C. \qquad C = -2 - 1 = -3.$

$-\frac{1}{y} = \sec x - 3 \Rightarrow \boxed{\frac{-1}{\sec x - 3} = y.}$

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x^2}$ $\quad y(1) = e^2$. si hay soln única en (1,1)

→ El PVI no tiene soln única en $x = 0$.

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{-dx}{x^2} = \int -x$$

$$\ln y = \frac{1}{x} + C.$$ use $x = 1$, $y = e^2$.

$$\boxed{c = \ln y - \frac{1}{x} = \ln e^2 - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1}$$

$$\ln y = x^{-1} + 1$$ use $e^{\ln [\,]} = [\,]$

$$\boxed{y = e^{x^{-1}+1} = e^{1+1/x}}$$ Soln PVI.

→ Soln general: $y = e^{1/x + C}$.

Solución Implícita.

La soln de una ED separable es una función implícita

$$G(y) = F(x) + C$$ explícita $y = H(X) + C$.

en algunos casos no es posible resolver para y:

p.e. resuelva $\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{1+y+y^2}$

$$\int (1+y+y^2)\,dy = \int 4x\,dx$$

$$y + 0.5y^2 + \frac{1}{3}y^3 = 2x^2 + C.$$

¿ No se puede resolver para y:

La soln es la función implícita

$$\boxed{y + 0.5y^2 + \frac{1}{3}y^3 - 2x^2 = C.}$$

En algunas EDs separables es necesario realizar fracciones parciales.

Ejercicio 3: Resuelva $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 9$

$$\int \frac{dy}{y^2-9} = \int dx = x + C \qquad \int \frac{dy}{y^2+9} = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{y}{3}\right)$$

Encuentre las fracciones parciales.

$$\frac{1}{y^2-9} = \frac{1}{(y-3)(y+3)} = \frac{A}{y-3} + \frac{B}{y+3}$$

Multiplique por $(y-3)(y+3)$

$$A(y+3) + B(y-3) = 1$$

$y = 3$: $\quad 6A + 0 = 1 \Rightarrow A = 1/6.$

$y = -3$: $\quad 0 - 6B = 1 \Rightarrow B = -1/6$

Integre la variable y.

$$\frac{1}{6}\int \frac{dy}{y-3} - \frac{1}{6}\int \frac{dy}{y+3} = x + C.$$

$$\frac{1}{6}\left[\ln(y-3) - \ln(y+3)\right] = x + C.$$

$$\ln(y-3) - \ln(y+3) = 6x + 6C.$$

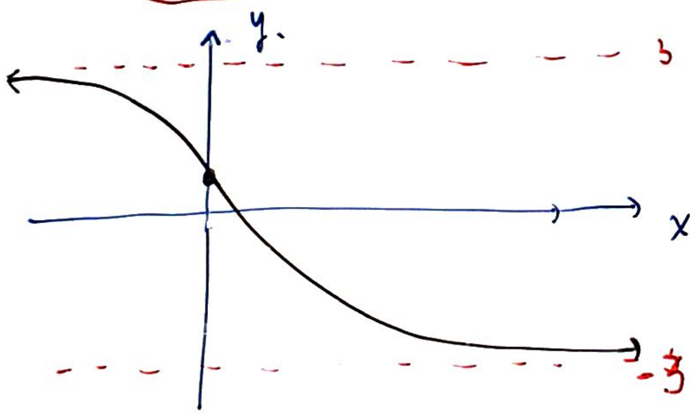
$$\ln\left[\frac{y-3}{y+3}\right] = 6x + 6C.$$

$$\frac{y-3}{y+3} = e^{6x+6C}.$$

$$\underline{\underline{y}} - 3 = \underline{\underline{y}}e^{6x+6C} + 3e^{6x+6C}.$$

$$y(1-e^{6x+6C}) = 3 + 3e^{6x+6C}.$$

$$\boxed{y = \frac{3+3e^{6x+6c}}{1-e^{6x+6c}}}$$ soln general.



AHs en $y = \pm 3$.

4. Integre $\displaystyle\int \frac{y-2}{y^2-9}\,dy = \frac{1}{6}\int\frac{dy}{y-3} + \frac{5}{6}\int\frac{dy}{y+3}.$

$$\frac{y-2}{(y-3)(y+3)} = \frac{A}{y-3} + \frac{B}{y+3}$$

$$\frac{1}{6}\ln(y-3) + \frac{5}{6}\ln(y+3) + C.$$

$$y-2 = A(y+3) + B(y-3)$$

$y=3$: $1 = 6A.$ $\Rightarrow$ $A = 1/6$

$y=-3$: $-5 = -6B$ $B = 5/6.$

La ED $\dfrac{dy}{dx} = \boxed{y^2-9}$ $y^2-9=0$ cuando $y=\pm 3$

tiene otras dos soluciones $y = \pm 3$ constantes.

$$0 = (\pm 3)^2 - 9 = 0.$$

soln general $y = \dfrac{3(1+e^{6x+6c})}{1-e^{6x+6c}}.$

Las solns $y = \pm 3.$ se conocen como soluciones singulares.

porque $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2-9}$ se indefine en $x = \pm 3.$

La ED $\dfrac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ tiene soluciones cuando $h(y) = 0.$

Solución singular de una ED: son las soluciones $y \equiv c$ donde $h(c) = 0.$

estas no se pueden encontrar con separación de variables.

$$-\ln y = -\frac{1}{x} + C. \qquad x = 1,\ y = e^2$$

$$c = \frac{1}{x} - \ln y = 1 - 2 = -1 \qquad c = -1$$

$$-\ln y = -\frac{1}{x} - 1$$

$$\ln y = \frac{1}{x} + 1 \Rightarrow y = e^{1/x + 1}$$

$$\int \frac{1}{x^4 - 1}\,dx = \int \frac{1}{(x^2+1)(x^2-1)}\,dx$$

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2+1}.$$

Integre $\quad A\ln(x+1) + B\ln(x-1) + \frac{1}{2}C\ln(x^2+1)$

$+ D\tan^{-1}(x)$ fuera del enfoque:

Soluciones Aproximadas

Series Infinitas y de fourier $\sum \sin(mx)$

EDs parciales

más aplicaciones

Sistemas de EDs lineales.