13. EDs Lineales Inhomogéneas

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

Inhomogénea: $g(x) \neq 0$.

Ejs: $y'' + 4y = 20x$ $\qquad$ $y'' - 3y' + 4y = 2e^{2x}$

Pasos para resolver una ED inhomogénea.

1. Resuelva el problema homogéneo $g(x) = 0$.
   Solución complementaria y_c
2. Encuentre la solución particular y_p.
3. Solución general: $y = y_c + y_p$.

¿Cómo se encuentra y_p? no tiene constantes arbitrari

13. Coeficientes Indeterminados.
14. Variación de Parámetros.

Ejercicio 1: Compruebe que y_p es una soln particular de la ED dada.

a. $y'' - 7y' + 10y = 24e^x$, $\qquad y_p = 6e^x$

$y_p'' = 6e^x \qquad y_p' = 6e^x \qquad y_p = 6e^x$

$6e^x - 42e^x + 60e^x = 24e^x$

$m^2 - 7m + 10 = 0$ $\quad (m-5)(m-2) = 0.$

$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x}$

Soln general: $y = y_c + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x} + 24e^{x}$

b. $y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16.$

$y_p = Ax^2 + Bx + C.$ $\quad$ ¿ A, B, C?

$y_p' = 2Ax + B$ $\quad y_p'' = 2A.$

sustituya en la ED y encuentre A, B, C.

$2A - 12Ax - 6B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = 5x^2 + 3x - 16.$

Agrupe términos semejantes.

$5A = 5. \Rightarrow A = 1$

$-12A + 5B = 3 \Rightarrow 5B = 3 + 12(1) \Rightarrow B = 3.$

$2A - 6B + 5C = -16. \Rightarrow 5C = -16 - 2(A) + 6(B)$

$5C = -16 - 2 + 18 = 0 \Rightarrow C = 0$

Solución particular: $y_p = x^2 + 3x + 0.$

Solución homogénea: $m^2 - 6m + 5 = 0$

$(m-5)(m-1) = 0 \Rightarrow m = 1, 5.$

Solución general: $\boxed{y = c_1 e^{x} + c_2 e^{5x} + x^2 + 3x}$

Método de Coeficientes Indeterminados.

Las funciones polinomiales, exponenciales y sinusoidales.

x^n, e^{rx}, $\sin(rx)$ $x^n e^{rx}\cos(bx)$

tienen la propiedad de que sus derivadas son también funciones exponenciales, polinomiales y sinusoidales.

No se puede utilizar para $\ln x$, $\frac{1}{x^n}$, $\sec x$, $\tan^{-1} x$

Solución Particular: Caso I. ¿ A, B, C. . . . ?

1. $g(x) = x^n + \dots + x^2 + x + 1$ $\qquad y_p = A_n x^n + \dots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0$

2. $g(x) = \begin{matrix} \sin(rx) \\ \cos(rx) \end{matrix}$ $\qquad y_p = A\sin(rx) + B\cos(rx)$

3. $g(x) = e^{rx}$ $\qquad y_p = Ae^{rx}$

4. $g(x) = xe^{rx}\sin(bx)$ $\qquad y_p = Axe^{rx}\sin(bx) + Bxe^{rx}\cos(bx)$

Ejercicio 2: Resuelva la ED $y'' + y' - 6y = g(x)$

Soln. Complementaria $\qquad r^2 + r - 6 = (r+3)(r-2) = 0.$

$g(x) = 0$ $\qquad r = 2, -3.$

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

a. $g(x) = 6x + 11$

Proponga que $\quad y_p = Ax + B.$

$$y_p' = A \qquad y_p'' = 0.$$

$$0 + A - \underline{6Ax} - 6B = \underline{6x} + 11$$

Agrupe términos semejantes.

$$-6A = 6 \Rightarrow A = -1$$
$$A - 6B = 11 \Rightarrow -6B = 11 - A = 12. \Rightarrow B = -2.$$

Solución Particular. $\quad y_p = -x - 2.$

Soln. General: $\quad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} - x - 2.$

b. $y'' + y' - 6y = 104 \cos(2x).$

$$y_p = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$
$$y_p' = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$$
$$y_p'' = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$$

$$-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) - 2A\sin(2x)$$
$$+ 2B\cos(2x) - 6A\cos(2x) - 6B\sin(2x) = 104\cos(2x)$$

$$(-10A + 2B)\cos(2x) + (-2A - 10B)\sin(2x) = 104\cos(2x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} -10A + 2B &= 104 \\ -2A - 10B &= 0 \end{aligned}} \Rightarrow \begin{aligned} &50B + 2B = 104 \Rightarrow B = \frac{104}{52} = 2. \\ &A = -5B \Rightarrow A = -10. \end{aligned}$$

Soln. Particular: $y_p = -10\cos(2x) + 2\sin(2x)$

Soln. General: $y = \underbrace{c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}}_{y_c} \underbrace{-10\cos(2x) + 2\sin(2x)}_{y_p}$

c. $y'' + y' - 6y = -6xe^{-x} - e^{-x}$

Proponga: $y_p = Axe^{-x} + Be^{-x}$

$y_p' = \underline{Ae^{-x}} - Axe^{-x} \quad \underline{Be^{-x}}$

$y_p'' = \underline{-Ae^{-x} - Ae^{-x} + Be^{-x}} + Axe^{-x}$

sustituya en la ED:

$$-2Ae^{-x} + Be^{-x} + Ae^{-x} - Be^{-x} - \underline{Axe^{-x}} = -6xe^{-x} - e^{-x}$$
$$\underline{+Axe^{-x}} \qquad -6\underline{Axe^{-x}} - 6Be^{-x}$$

$$\underline{-6Axe^{-x}} - Ae^{-x} - 6Be^{-x} = \underline{-6xe^{-x}} - e^{-x}$$

Agrupe términos.

$-6A = -6 \Rightarrow A = +1$

$-A - 6B = -1 \Rightarrow -6B = -1 + A. = 0. \Rightarrow B = 0$

$y_p = -xe^{-x} + \frac{1}{3}e^{-x}$

soln. General: $\boxed{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} + xe^{-x}}$

J. $y'' + y' - 6y = \underbrace{6x + 11}_{g_a(x)} + \underbrace{104\cos 2x}_{g_b(x)} \underbrace{- 6xe^{-x} - e^{-x}}_{g_c(x)}$

Proponga $y_p = Ax + B + C\cos 2x + D\sin 2x$
$+ Exe^{-x} + Fe^{-x}$.

Principio de Superposición: $\boxed{y_p = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3}}$

No hay que volver a encontrar A, B, C, D, E, F.

Soln. Gral. $\boxed{y = \underbrace{C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}}_{\text{homogéneo}} \underbrace{- x - 2}_{y_{p1}} \underbrace{- 10\cos 2x + 2\sin(2x)}_{y_{p2}} - xe^{-x}}$

La y_p propuesta no tiene que ser una soln del problema homogénea, tiene que haber Ind Lineal.

Ejemplo: Encuentre la soln particular de

$$y'' + y' - 6y = 5\underline{e^{2x}}$$

Proponga que $y_p = Ae^{2x}$ $\quad y_p' = 2Ae^{2x}$

$y_p'' = 4Ae^{2x}$

$4Ae^{2x} + 2Ae^{2x} - 6Ae^{2x} = \underline{0 = 5e^{2x}}$ no hay soln.

$y_p \neq \underline{Ae^{2x}}$ porque $y_c = \underline{C_1 e^{2x}} + C_2 e^{-3x}$

forma parte de y_c.

Para evitar repetición $y_p = Axe^{2x}$

$$y_p' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$$

$$y_p'' = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$$

Sustituya en la ED y encuentre A.

$$4Ae^{2x} \underline{+4Axe^{2x}} + Ae^{2x} \underline{+2Axe^{2x}} \underline{-6Axe^{2x}} = 5e^{2x}$$

$$5Ae^{2x} = 5e^{2x} \Rightarrow A = 1$$

Soln. General: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} + \underline{xe^{2x}}$

Miércoles: Caso II coeficientes indeterminados.

$g(x)$ es parte de la soln. complementaria.

multiplique y_p por x^r necesaria para evitar repeticiones.

Por ejemplo: $y'' - 4y' + 4y = 100e^{2x} + e^x$

Complementaria: $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0 \quad r = 2, 2.$

Raíz Repetida: $y_c = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

Particular: $y_p = Ax^2e^{2x} + Be^x$ Multiplique por x^2.

Soln. General: $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + Ax^2 e^{2x} + Be^x$