10. Teoría EDs Lineales

No hay corto este miércoles.

ED lineal de 1er orden:

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_0 y = \underline{\underline{f(x)}}.$$

$\boxed{\text{homogénea} \quad f(x) = 0.}$

inhomogénea. $f(x) \neq 0.$

Propiedades de las ED's homogéneas. lineales.

$$a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0 y = 0.$$

- Tienen solución trivial $y = 0.$
- Si $y_1, y_2, \dots y_K$ son soluciones de la ED lineal, entonces La C.L. también es una soln de la ED.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_K y_K.$$

Evite combinaciones lineal con funciones que están repetidas $y_1 \neq K y_2$

- Dependencia lineal entre funciones. (LD)

Un conjunto de funciones $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ es LD si existen constantes diferentes de cero tal que.

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2 + \dots c_n f_n = 0$$

$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = 3 \qquad f_3(x) = 3x + 9.$

son C.D. $\quad 3f_1 + 3f_2 = 3x + 9 = f_3.$

$3f_1 + 3f_2 - f_3 = 0.$

- Independencia lineal: es un conjunto que es no es C.D.
ninguna función es C.L. de las otras funciones.

$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots c_n f_n = 0$ si y sólo si $c_1 = c_2 = \cdots c_n = 0.$

CL "combinación lineal"

Ejemplos de conjuntos que son C.D.

- $\{\cos^2 x, \sin^2 x, 1\}$. es C.D porque $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\{\sqrt{x} + 5, 5x - \sqrt{x}, x + 1\}$. también es C.D.

$1(\sqrt{x} + 5) + 1(5x - \sqrt{x}) - 5(x+1) = 0$

Se necesita un criterio más directo para analizar I L.

Criterio para analizar I L. $\qquad$ 1 ec y 3 incógnitas.

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0$$
$$c_1 f_1' + c_2 f_2' + c_3 f_3' = 0$$
$$c_1 f_1'' + c_2 f_2'' + c_3 f_3'' = 0$$

f_1
f

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{bmatrix}}_{W(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}}_{\vec{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{0}}$$

El sistema $W\vec{c} = \vec{0}$ tiene solución única cuando $|W| \neq 0$.

Criterio para analizar IL

El conjunto de funciones $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ es L.I. si y sólo el Wronskiano W es diferente de cero.

$$W(x) = \overbrace{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}^{n \text{ columnas}} \; n \text{ filas}$$

$W(x) = 0$ el conjunto es L.D.

$W(x) \neq 0$ el conjunto es L.I.

Ejercicio 1: Analice si el conjunto dado de funciones es L.I.

a. $\{4\sqrt{x}+5, -4\sqrt{x}+5x, 5x+5\}$.

$$w(x) = \begin{vmatrix} 4\sqrt{x}+5 & 5x-4\sqrt{x} & 5x+5 \\ 2x^{-1/2} & 5-2x^{-1/2} & 5 \\ -x^{-3/2} & x^{-3/2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$w(x) = -x^{-3/2}\begin{vmatrix} 5x-4\sqrt{x} & 5x+5 \\ 5-2x^{-1/2} & 5 \end{vmatrix}$$

$$-x^{-3/2}\begin{vmatrix} 4\sqrt{x}+5 & 5x+5 \\ 2x^{-1/2} & 5 \end{vmatrix}$$

$25x+25$
$-10x^{1/2}-10x^{-1/2}$

$$w(x) = -x^{-3/2}\left(25x-20\sqrt{x} - (5-2x^{-1/2})(5x+5)\right)$$

$$-x^{-3/2}\left(20\sqrt{x}+25-10x^{1/2}-10x^{-1/2}\right)$$

$$w(x) = -x^{-3/2}\left[25x-20\sqrt{x}-25x-25+10x^{1/2}+10x^{-1/2} + 20\sqrt{x} + 25-10x^{1/2}-10x^{-1/2}\right]$$

$$w(x) = -x^{3/2}\cdot 0 = 0$$

El conjunto es L. D.

No es idóneo para la soln de una ED lineal.

b. $\{ e^x, x, 1 \}$ caso idóneo.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & x & 1 \\ e^x & 1 & 0 \\ e^x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & 1 \\ e^x & 0 \end{vmatrix} = -e^x \neq 0.$$

El conjunto es L. Independiente.

Conjunto Fundamental de Soluciones.

Una ED lineal de orden n tiene exactamente n soluciones L. I., su solución general es:

$$y = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots c_n f_n$$

ED lineal 2do orden: dos soluciones L.I.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

- Elimine las funciones que estén de más.
- Si hay menos solns, encuentre las que faltan.

Ejercicio 2: Analice si el conjunto dado es un conjunto fundamental de solns. para la ED dada.

a. $y'' - 9y = 0$, $\quad y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-3x}$, $y_3 = 2\cosh 3x$.

conjunto fundamental: ED lineal 2^{do} orden.

sólo se pueden tener 2 funciones L. I.

Como hay más de 2 funciones $\{y_1, y_2, y_3\}$ no es un conjunto fundamental de solns para la ED.

Hay dependencia lineal $\quad e^{3x} + e^{-3x} = 2\cosh 3x$

$\{y_1, y_2\}$ si es un conjunto fundamental de solns.

La soln. general de $y'' - 9y = 0$ es $\boxed{y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}}$

ED lineales con coeficientes constantes tienen como soln funciones exponenciales $e^{rx} = y \quad$ ¿r?

$y' = re^{rx} \qquad y'' = r^2 e^{rx}$

$r^2 e^{rx} - 9e^{rx} = 0 \Rightarrow r^2 - 9 = 0. \Rightarrow r = \pm 3.$

Soln general es: $\boxed{y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}.}$

b. $y''' - 3y'' + 2y' = 0, \qquad y_1, y_2, y_3.$

$y = e^{rt} \quad , \quad y' = e^{rt} r \quad y'' = e^{rt} r^2, \; y''' = r^3 e^{rt}$

Sustituya en la ED y encuentre r.

$r^3 e^{rt} - 3r^2 e^{rt} + 2re^{rt} = 0.$

$$r^3 - 3r^2 + 2r = r(r^2 - 3r + 2) = 0.$$
$$= r(r-1)(r-2) = 0.$$

$r = 0, 1, 2. \qquad e^{0t} = 1$

soln general $\boxed{y = c_1 + c_2 e^{t} + c_3 e^{2t}.}$

conjunto fundamental de solns es $\{1, e^t, e^{2t}\}$.

$$W = \begin{vmatrix} 1 & e^t & e^{2t} \\ 0 & e^t & 2e^{2t} \\ 0 & e^t & 4e^{2t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ e^t & 4e^{2t} \end{vmatrix}$$

el conjunto es L.I.

$$W = 4e^{3t} - 2e^{3t} = 2e^{3t}. \neq 0$$

En algunos casos, la raíz está repetida, hay dependencia lineal y hay que encontrar la soln faltante.

Por ejemplo, resuelva $y'' - 6y' + 9y = 0$.

$$y = e^{rt}, \quad y' = re^{rt}, \quad y'' = r^2 e^{rt}$$

$$r^2 e^{rt} - 6re^{rt} + 9e^{rt} = 0.$$

$$(r^2 - 6r + 9) = (r-3)^2 = 0. \Rightarrow r = 3, 3$$

Soln general: $y = \underbrace{c_1 e^{3t}}_{y_1} + \underline{c_2 e^{3t}}$ problema, hay DL.

¿Cómo se encuentra y_2?

y_2 es L.I de y_1 si $\dfrac{y_2}{y_1} = u(x)$

Proponga. $y_2 = u e^{3t}$

Resuelva para u, sustituyendo en $y'' - 6y' + 9y = 0$.

$$y_2' = u' e^{3t} + 3e^{3t} u$$

$$y_2'' = u'' e^{3t} + 3e^{3t} u' + 9e^{3t} + 3e^{3t} u'$$

$$u'' e^{3t} + \cancel{6e^{3t} u'} + \cancel{9e^{3t} u} \cancel{- 6e^{3t} u'} \cancel{- 18e^{3t} u} + \cancel{9e^{3t} u} = 0.$$

$u'' e^{3t} = 0$. Resuelva.

$$u'' = 0.$$
$$u' = c_1$$
$$u = c_1 t + c_2.$$

2da soln L.I. $\quad y_2 = (c_1 t + c_2) e^{3t} = t e^{3t}$

Soln general: $\quad y = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$

$\{te^{3t}, e^{3t}\}$ son L.I.

Hizo el día de hoy.

- Justificar la forma de la soln gral.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

- cada soln $y = e^{rt}$.
- La raiz está repetida, multiplique por t para tener Independencia Lineal.