2. Problemas de Valor Inicial.

ED 1er orden $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Soln General: $y(x) + C$. C, constante arbitraria.

Soln particular: libre de constantes arbitrarias.

Para que una solución esté libre de constantes arbitarias es necesario que tenga condiciones en la variable dependiente, conocidas como condiciones iniciales.

Problema de Valor Inicial (PVI)

Es una ED de 1er orden que pasa por el punto (x_0, y_0)

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

La soln tiene pendiente $f(x,y)$ y pasa (x_0, y_0).

Problema de Valor Inicial de 2do orden.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0$$
$$y'(x_0) = V_0.$$

Ejercicio 1: Encuentre la soln particular de las sigs. EDs.

a. $\boxed{y' = y - y^2}$, $y(-1) = 5$

use la soln gral. $y(x) = \dfrac{1}{1 + \boxed{c}e^{-x}}$

Use $x = -1$, $y = 5$ para encontrar el valor de c.

$\dfrac{1}{1 + ce^{1}} = 5$ $\quad 1 + ce^{+1} = \dfrac{1}{5}$

$ce^{1} = \dfrac{1}{5} - 1 = -\dfrac{4}{5}$

$c = -\dfrac{4}{5e} \approx -0.2943$

soln particular $y(x) = \dfrac{1}{1 - \frac{4}{5e} e^{-x}}$

b. $\boxed{u'' + u = 0.}$ $\quad u(\pi/2) = 2 \quad u'(\pi/2) = 5$

use la soln general $u = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

capítulo 3

$u' = c_1 \cos x - c_2 \sin x$

Aplique cada una de las CIs.

$u(\pi/2) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = \boxed{c_1 = 2}$

$u'(\pi/2) = c_1 \cdot 0 - c_2 \cdot 1 = 5 \Rightarrow \boxed{c_2 = -5}$

Soln particular: $u(x) = 2 \sin x - 5 \cos x$

Un PVI tiene.

I. solución única. ✓
II. infinitas soluciones.
III. no tenga solución. (función se indefine en (x_0, y_0))

Por ejemplo, $y' = 3y^{2/3}$ $y(0) = 0$ tiene por lo menos 2 solns $y(x) = 0$ ó $y(x) = x^3$.

$y'(x) = 3x^2$, $3y^{2/3} = 3(x^3)^{2/3} = 3x^2$.

Condiciones para que haya solución en un PVI

El PVI de 1er orden $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, tiene garantizada solución única si.

$f(x, y)$ & $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en (x_0, y_0)

El PVI tiene regiones en el plano $\mathbb{R}^2$ donde la solución única no está garantizada.

¿Cuándo un PVI tiene garantizada soln única?

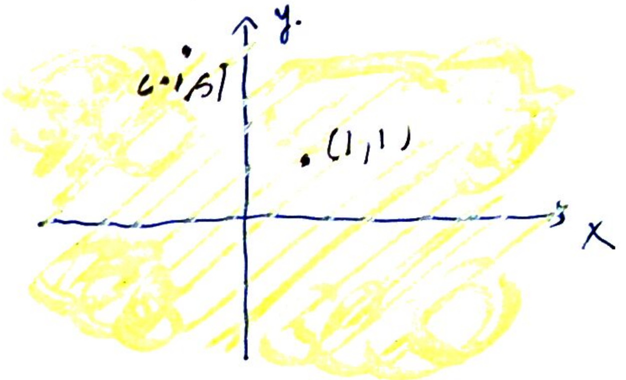
El PVI de 1er orden $y' = f(x, y)$ $y(x_0) = y_0$
tiene garantizada una soln. única si
$f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en (x_0, y_0)

Ejercicio 2: Encuentre y grafique los puntos (x, y) donde la soln única del PVI está garantizada.

a. $y' = y - y^2$

$f(x, y) = y - y^2$ es continua en $\mathbb{R}^2$.
$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - 2y$ es continua en $\mathbb{R}^2$ (plano)

La solución única está garantizada en $-\infty < x < \infty$
$-\infty < y < \infty$



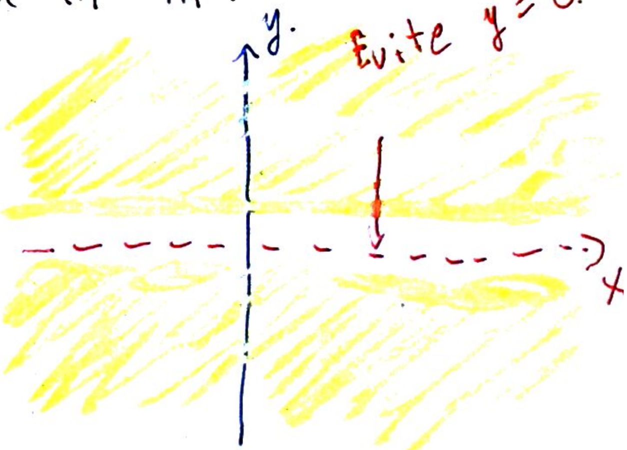
b. $y' = 3y^{2/3}$.

$f(x, y) = 3y^{2/3}$ es continua en $\mathbb{R}^2$.

PERO $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3 \cdot 2}{3} y^{-1/3} = \frac{2}{y^{1/3}}$

no es continua en $y = 0$.

No hay solución única garantizada si $y = 0$. (x, y) $y \neq 0$.



c. $y' = \dfrac{\sqrt{16-y^4}}{x^2-1}$ ← evite raiz cuadrada de un número negativo.
← evite denominador cero.

$16 - y^4 \geq 0. \quad 16 \geq y^4 \quad y^4 \leq 2^4$

$-2 \leq y \leq 2.$ } solución única

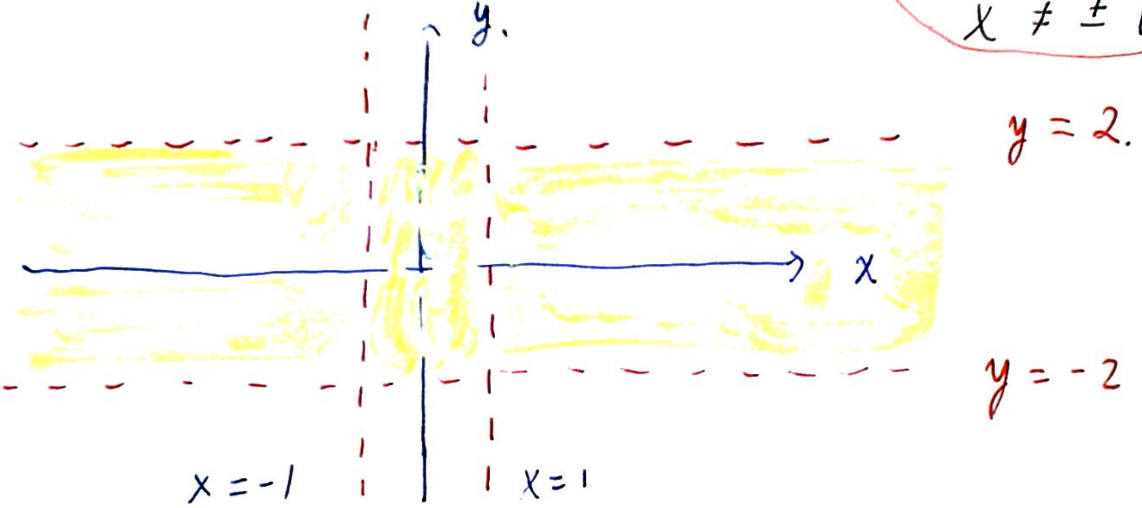
$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \quad x \neq \pm 1$

f es continua sólo en $-2 \leq y \leq 2$ & $x \neq \pm 1$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{0.5(-4y^3)(16-y^4)^{-1/2}}{x^2-1} = \frac{-2y^3}{(x^2-1)\sqrt{16-y^4}}$$

se indefine en $x = \pm 1$, $y = \pm 2$, $y > 2$ ó $y < -2$.

El PVI tiene soln única sólo si $-2 < y < 2$, $x \neq \pm 1$



p.e. si la CI es (1, 3) no hay solnúnica

si la CI es $\underbrace{(0, 0)}_{\text{inventados.}}$ hay solución única.

ED separable 1er orden.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$$

el lado derecho es un producto de dos funciones en x & en y.

ED lineal de 1er orden.

$$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)\,y = c(x)$$

las funciones coeficientes a, b, c sólo dependen de x.

$\frac{dy}{dx}$ & y sólo tienen potencias de uno.

ED exacta:

$$M\,dy + N\,dx = 0 \qquad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

Una ED de 1er orden $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$

se puede reescribir utilizando diferenciales

$$dy = f(x,y)\,dx \Rightarrow \boxed{dy - f(x,y)\,dx = 0}$$

Ejs: $\tan x \frac{dy}{dx} + e^x y = \ln x$ si es lineal.

xy^2

$(xy)y.$

$x\frac{dy}{dx} + x\boxed{y^2} = x+1$ No es lineal.

$\frac{dy}{dx} = \sin y.$ no es lineal
si es separable.

3. ED exacta.

$$M(x,y)\,dy + N(x,y)\,dx = 0 \qquad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}.$$

4. ED homogénea.

$$M\,dy + N\,dx = 0 \qquad \begin{array}{l} M(Kx, Ky) = K^n M(x,y) \\ N(Kx, Ky) = K^n N(x,y) \end{array}$$

Ejercicio 3: Determine si la ED dada es separable, lineal, ambas o ninguna.

a. $(y - x^3)\,dy + 4x\,dx = 0.$

$$\underbrace{(y - x^3)}_{a(x).}\frac{dy}{dx} + 4x = 0$$

no depende sólo de x

no es ED lineal.

$$(y-x^3)\frac{dy}{dx} = -4x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{\underbrace{y - x^3}_{\text{resta de 2 var. difs.}}}$$

Tampoco es separable.

c. $y\,dx + (xxye^y)\,dy = 0$

$x^2 y e^y \dfrac{dy}{dx} + y = 0.$ no es lineal

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y}{x^2 y e^y} = -\dfrac{1}{x^2 e^y} = \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(\dfrac{1}{e^y}\right)$

si es separable.

separe en términos de x & de y.

$e^y\,dy = -\dfrac{1}{x^2}\,dx$

$\int e^y\,dy + C_1 = \int -x^{-2}\,dx + C_2.$

$e^y = +x^{-1} + C_2 - C_1$

$y = \ln\Big(\underbrace{C_2 - C_1}_{C.} + \dfrac{1}{x}\Big)$ soln general.

d. $\dfrac{dy}{dx} = a(x)\,y.$ es separable.

$y' - a(x)\,y = 0.$ también es lineal

$y(t) = C e^{\int a(x)\,dx}$ soln general.