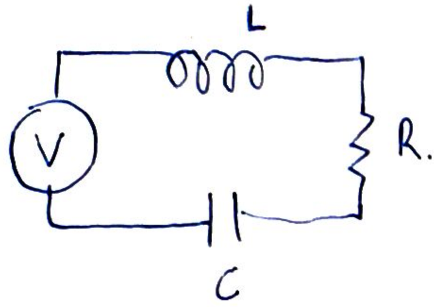
Modelos Lineales.

Crecimiento exponencial: $y' = Ky$ $\quad y(0) = y_0$.

Soln: $y = y_0 e^{Kt}$ $\quad K$ = tasa porcentual/tiempo

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ley de Enfriamiento de Newton: } \quad y' = K(y - T_s) \\ \text{Soln: } y = T_s + (T_0 - T_s)e^{Kt}. \quad y(0) = T_0.\end{array}}$$

Circuitos Eléctricos:



V voltaje voltios. (V)

C capacitancia C/V

R resistencia V/Amperes

L inductancia $H = V \cdot s/A$.

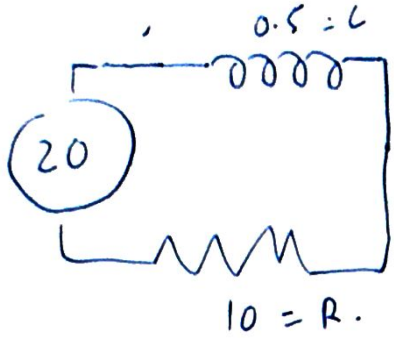
carga eléctrica $q(t)$ C $\quad$ corriente $i = \frac{dq}{dt}$ $\quad A = C/s$

2nda Ley de Kirchoff. La caída del voltaje de cada componente es.

$Ri \qquad \frac{q}{C} \qquad V \qquad L\frac{di}{dt}$.

$$\boxed{L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = V(t)}$$ Circuito RL-C.

Ejercicio 1:



Encuentre la corriente $i(t)$

$i(0) = 0$

$$0.5\frac{di}{dt} + 10i = 20 \quad , \qquad i(0) = 0.$$

$i' + 20i = 40.$ ED lineal y separable.

F.I. $e^{\int 20 dt} = e^{20t}.$

$$e^{20t} i' + 20e^{20t} i = 40e^{20t}.$$

$$(e^{20t} \underline{\underline{i}})' = 40e^{20t}.$$

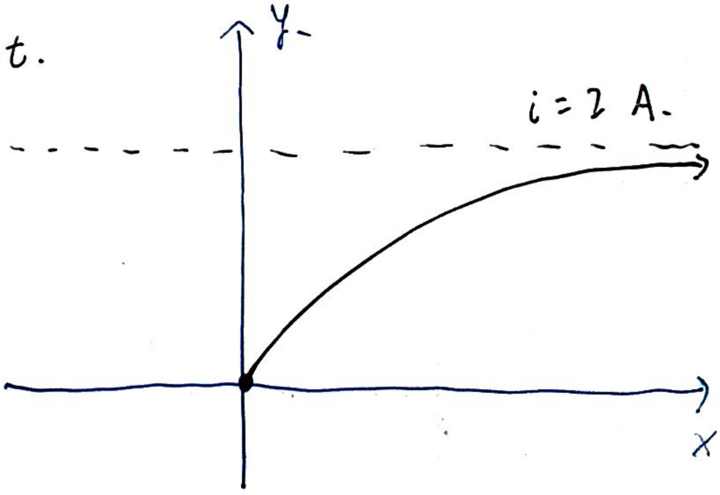
Integre y resuelva para $i(t)$

$$ie^{20t} = \int 40e^{20t} dt. = 2e^{20t} + C.$$

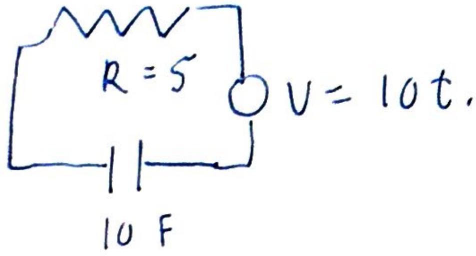
$$i(t) = \frac{2e^{20t} + C}{e^{20t}} = 2 + Ce^{-20t}.$$

Use $i(0) = 0.$ $\quad i(0) = 0 = 2 + C\cdot 1 \Rightarrow C = -2.$

Corriente. $\quad i(t) = 2 - 2e^{-20t}.$



Ejercicio 2:



Circuito RC.

Encuentre la carga y corriente del circuito si $q(0) = 500$.

$$5i + \frac{q}{10} = 10t. \qquad i = dq/dt.$$

$$5\frac{dq}{dt} + \frac{q}{10} = 10t \quad , \quad q(0) = 500$$

ED lineal y no separable.

$$\frac{dq}{dt} + \underbrace{\frac{1}{50}}_{P.} q = 2t. \qquad F.I. \quad e^{\int \frac{1}{50} dt} = e^{t/50.}$$

Multiplique la ED por el F.I.

$$e^{t/50} q' + \frac{1}{50} e^{t/50} q = 2t e^{t/50.}$$

$$(e^{t/50} q)' = 2t e^{t/50.}$$

$$e^{t/50} q = \int \underbrace{2t}_{u} \underbrace{e^{t/50} dt.}_{dv}$$

$-\int v du.$

derive		integre.
$2t$	+	$e^{t/50}$
2	−	$50e^{t/50}$ v
0		$2500e^{t/50.}$

$$q e^{t/50} = 100t e^{t/50} - 5000e^{t/50.} + C.$$

$$q(t) = 1000t - 5000 + \underline{\underline{C}} e^{-t/50.}$$

use $q(0) = 500.$

$q(0) = 0 - 5000 + c = 500. \Rightarrow c = 5,500.$

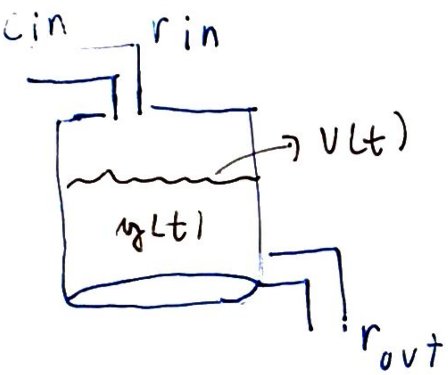
Carga eléctrica: $\boxed{q(t) = 1000t - 5000 + 5,500\, e^{-t/50}}$

La corriente es la derivada de la carga.

$$\boxed{i(t) = q'(t) = 1000 - \frac{5500}{50} e^{-t/50}}$$

Mezclas:

Al mezclar dos soluciones salinas de distintas concentraciones surge una ED de 1er orden que define la cantidad de sal contenida en l mezcla.



$y(t)$ cantidad de sal. "masa"

$V(t)$ volumen del tanque.

r_{in} flujo de entrada.

r_{out} flujo de salida (volumen/tiempo)

C_{in} concentración inicial de sal (masa/volumen)

¿Cómo cambia la cantidad de sal en el tiempo?

$$\frac{dy}{dt} = Y_{entra} - Y_{salida}. \qquad \text{masa/tiempo}$$

$$Y_{entra} = C_{in} * r_{in}. \qquad \frac{\text{masa}}{\cancel{\text{volumen}}} * \frac{\cancel{\text{volumen}}}{\text{tiempo}}$$

$Y_{salida} = C_{out} * r_{out}$. $\quad C_{salida} = \dfrac{y(t)}{V(t)} \quad \dfrac{\text{masa}}{\text{volumen}}$

E.D. Lineal cantidad de sal en el tanque.

$$\frac{dy}{dt} = C_{in} * r_{in} + \frac{y}{V(t)} r_{out}, \quad y(0) = y_0$$

usualmente C_{in}, r_{in}, r_{out} son constantes.

$V(t)$ es constante si $r_{in} = r_{out}$.

Ejercicio 3: $V = 100$ gal $\quad y(0) = 10$. libras.

a 1 lb/gal. $\quad C_{in} = 1$ lb/gal $\quad r_{in} = 5$ gal/min.

$r_{out} = 5$ gal/min

Encuentre la cantidad de sal dentro del tanque en cualquier momento.

Como los dos flujos son iguales, $V = 100$ se mantiene constante

$$\frac{dy}{dt} = 1(5) - \frac{5y}{100} \qquad y(0) = 10.$$

$$\frac{dy}{dt} = 5 - \frac{y}{20} = \frac{100 - y}{20}.$$

ED separable y lineal.

$$\frac{dy}{100 - y} = \frac{1}{20} dt.$$

$$-\ln(100 - y) = \frac{1}{20} t + C.$$

$$\ln(100-y) = -\frac{t}{20} - c. \qquad c_1 = e^{-c}$$

$$100 - y = e^{-t/20 - c} = c_1 e^{-t/20}.$$

son positivos

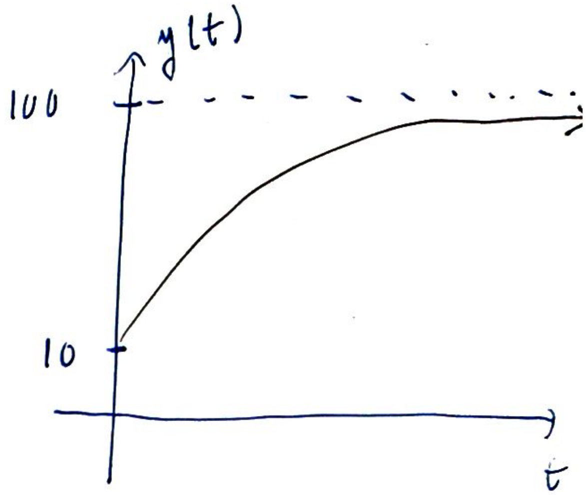
Use $y(0) = 10.$ para encontrar c_1.

$$100 - 10 = c_1 \cdot 1 \Rightarrow c_1 = 90.$$

Resuelva para $y(t)$

$$100 - y = 90e^{-t/20}.$$

$$\boxed{100 - 90e^{-t/20} = y.}$$



Flujo entrada $1\,lb/gal$ tanque 100 gals 100 lbs.

Ejercicio 4: considere los datos del ejercicio 3 pero ahora el flujo de salida es de 4 gal/min. Encuentre la cantidad de sal en cualquier momento.

$$\frac{dy}{dt} = 5 - \frac{4y}{V(t)}$$

Los dos flujos son diferentes $r_{in} = 5$ $r_{out} = 4.$

Flujo neto de entrada de $r_{out} - r_{in} = 5 - 4 = 1$ gal/min

$$V(t) = 100 + t.$$

$$\frac{dy}{dt} = 5 - \frac{4y}{100+t} \qquad y(0) = 10.$$

sólo es ED lineal.

$$y' + \underbrace{\frac{4}{100+t}}_{p(t)} y = 5 \qquad y(0) = 10$$

$$\int p\,dt = 4\int \frac{dt}{100+t} = 4\ln(100+t) \neq 4(100+t)$$

F.I. $e^{\int p\,dt} = e^{4\ln(100+t)} = e^{\ln(100+t)^4} = (100+t)^4$

$$(100+t)^4 y' + 4(100+t)^3 y = 5(100+t)^4$$

$$\left((100+t)^4 y\right)' = 5(100+t)^4$$

$$(100+t)^4 y = \int 5(100+t)^4\,dt = (100+t)^5 + C.$$

$$y = \frac{(100+t)^5}{(100+t)^4} + \frac{C}{(100+t)^4} = 100+t + \underline{\underline{C}}(100+t)^{-4}$$

Use $y(0)=10$ para encontrar C.

$$y(0) = 100 + \frac{C}{100^4} = 10 \qquad \frac{C}{100^4} = -90$$

$$C = -90 \cdot 100^4$$

$$\boxed{y(t) = 100 + t - \frac{90 \cdot 100^4}{(100+t)^4}} \quad \approx 0.$$

la cantidad de sal sigue aumentando

ED exactas:

$$M\,dx + N\,dy = 0.$$

$$(y + y\sec^2 x)\,dx + (x + \tan x)\,dy = 0.$$

$M = y + y\sec^2 x \qquad N = x + \tan x$

$M_y = 1 + \sec^2 x. \qquad N_x = 1 + \sec^2 x \qquad M_y = N_y.$

$F_x = y + y\sec^2 x \qquad \boxed{F_y = x + \tan x}$

$$\left\{\begin{array}{l} F = xy + y\tan x + A(x) \\ F_x = y + y\sec^2 x + A'(x) = y + y\sec^2 x. \\ \qquad A'(x) = 0 \Rightarrow A(x) = 0. \end{array}\right.$$

Soln general: $xy + y\tan x = C.$

$$y(x + \tan x) = C.$$

$$y = \frac{C}{x + \tan x}$$

Atajo: $\dfrac{-dx}{x} = \dfrac{dv}{g(v) + v} \qquad g(v) = \dfrac{M}{N} \quad v = \dfrac{y}{x}$

$g(v) = \dfrac{N}{M}. \quad v = \dfrac{x}{y}.$