7. EDs homogéneas. p.39.

Las funciones $\underbrace{x^3}_{3} - \underbrace{3xy^2}_{3} + \underbrace{6y^3}_{3}$, $\underbrace{x^4}_{4} + \underbrace{y^4}_{4} + \underbrace{x^2y^2}_{4}$

cada uno de los términos tiene la misma potencia.

$$f(Kx, Ky) = K^3x^3 - K^3 3xy^2 + K^3y^3$$

$$K^3[x^3 - 3xy^2 + y^3] = K^3 f(x,y)$$

Función homogénea de grado n: $\boxed{f(Kx, Ky) = K^n f(x,y)}$

Ejercicio 1: Analice si las sigs. funciones son homogéneas.

a. $f(x,y) = \dfrac{y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$ $\qquad \sqrt{K^4} = K^2$

$$f(Kx,Ky) = \frac{(Ky)^2}{\sqrt{(Kx)^4+(Ky)^4}} = \frac{K^2y^2}{\sqrt{K^4x^4+K^4y^4}} = \frac{K^2\,y^2}{\sqrt{K^4}\sqrt{x^4+y^4}}$$

$$f(Kx,Ky) = \frac{\cancel{K^2}}{\cancel{K^2}}\frac{y^2}{\sqrt{x^4+y^4}} = K^0 f(x,y)$$

homogénea de grado cero

b. $g(x,y) = 2y^3\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$

$$g(Kx,Ky) = 2K^3y^3\cos\left(\frac{Kx}{Ky}\right) = K^3\,2y^3\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= K^3\,g(x,y)$$

homogénea de grado tres

c. $h(x,y) = x \tan y$

$h(Kx,Ky) = Kx \tan(Ky) \neq K h(x,y)$

$\sin Kx \neq K \sin x$ no es función homogénea

Propiedades func. homogéneas.

- $M(x,y)$ & $N(x,y)$ son homogéneas y del mismo grado entonces $\frac{M}{N}$ es homogénea de grado cero.

- Si $f(x,y)$ es homogénea de grado cero, entonces $f(x,y)$ es solamente función de y/x.

$f(Kx,Ky) = K^n f(x,y)$ $\qquad$ $n=0$ $\quad f(Kx,Ky) = f(x,y)$

$f(x,y) = \cancel{x}^0 f(1, y/x) = g(\underbrace{y/x}_{u})$.

ED homogénea:

La ED de 1er orden $N(x,y)dy + M(x,y)dx = 0$ es homogénea si N & M son homogéneas del mismo grado.

Resolución de una ED homogénea.

- Utilice $v = \frac{y}{x}$ ó $\boxed{y = v \cdot x}$.
- Reemplace $\boxed{dy = x\,dv + v\,dx}$ en la ED.
- Simplifique y obtenga una ED separable

- Integre la ED separable.
- Reemplace v por y/x.

p. 41

Ejercicio 2: Resuelva las sigs. EDs.

a. $(x^2 - xy + y^2)\,dx - xy\,dy = 0.$

no es separable, no es lineal, no es exacta.

$M_y = -x + 2y \qquad N_x = -y$

ED homogénea de grado dos.

Use $\quad y = vx \qquad dy = x\,dv + v\,dx$

Sustituya en la ED.

$$(x^2 - vx^2 + v^2x^2)\,dx - vx^2(x\,dv + v\,dx) = 0.$$

$$x^2\,dx - vx^2\,dx + \cancel{v^2x^2\,dx} - vx^3\,dv - \cancel{v^2x^2\,dx} = 0.$$

$$(x^2 - vx^2)\,dx = vx^3\,dv.$$

$$x^2(1-v)\,dx = vx^3\,dv$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{v\,dv}{1-v}. \qquad \text{la ED es separable}$$

$w = 1 - v, \quad v = 1 - w.$

$dw = dv$

Integre $\quad \ln x = \int \frac{v}{1-v}\,dv.$

$$\ln x = \int \frac{1-w}{w}\,dw = \int \frac{1}{w} - 1\,dw$$

$$\ln x = \ln w - w + c.$$

Regrese a la variable y. $\quad w = 1 - v. \quad y = vx$

$$\ln x = \ln(1-v) + v - 1 + C. \qquad v = y/x.$$

Soln gral. forma implícita.

$$\ln x = \ln\left(1 - \frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} + C - 1$$

b. $xy\,dx - (x^2 - 3y^2)\,dy = 0.$ no es lineal, separable.

$xy\,dx + (3y^2 - x^2)\,dy = 0$ no es exacta.

es homogénea de grado 2.

$$u = \frac{y}{x} \qquad y = ux \qquad dy = u\,dx + x\,du.$$

$$ux^2\,dx + (3u^2x^2 - x^2)(u\,dx + x\,du) = 0.$$

$$\cancel{ux^2\,dx} + 3u^3x^2\,dx + 3x^3u^2\,du - \cancel{ux^2\,dx} - x^3\,du = 0.$$

$$3u^3x^2\,dx = (x^3 - 3x^3u^2)\,du.$$

$$3u^3x^2\,dx = x^3(1-3u^2)\,du.$$

$$3\frac{x^2}{x^3}\,dx = \frac{1-3u^2}{u^3}\,du. \qquad \text{ED separable.}$$

$$\frac{3\,dx}{x} = u^{-3} - \frac{3}{u}\,du. \qquad \text{Integre.}$$

$$3\ln x = \frac{u^{-2}}{-2} - 3\ln(u) + C. \qquad \text{Regrese a la variable } y.$$

$$\boxed{3\ln x = -\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{-2} - 3\ln\left(\frac{y}{x}\right) + C.}$$

c. $(x'\csc(y/x) - y')\,dx + x'dy = 0.$

ED homogénea. regla del producto.

Use $v = \dfrac{y}{x}$, $y = vx$ $\quad dy = x\,dv + v\,dx$

$$(x\csc v - vx)\,dx + x^2 dv + vx\,dx = 0.$$

$$x\csc v\,dx - vx\,dx + x^2 dv + \cancel{vx\,dx} = 0.$$

se vuelve a obtener una ED separable.

$$x\csc v\,dx = -x^2 dv$$

$$\frac{x}{x^2}\,dx = \frac{-dv}{\csc v}, \quad \frac{dx}{x} = -\sin v\,dv.$$

Integre. $\ln x = \cos v + C.$

$$\boxed{\ln x = \cos(y/x) + C.}$$

En general. Toda ED homogénea $M\,dx + N\,dy = 0.$ termina siendo una ED separable utilizando la sustitución $\boxed{y = vx \quad dy = x\,dv + v\,dx, \; g = \frac{M}{N}.}$

$$g\,dx + dy = 0.$$

$$g(v)\,dx + x\,dv + v\,dx = 0.$$

ATAJO.

$$[g(v) + v]\,dx = -x\,dv \Rightarrow \boxed{-\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v + g(v)}}$$

c. $\underbrace{(x\csc(y/x) - y)}_{M}dx + \underbrace{x}_{N}dy = 0.$

$$g = \frac{M}{N} = \frac{x\csc(y/x) - y}{x} = \csc(y/x) - y/x$$
$$= \csc(v) - v.$$

Aplique la fórmula directamente

$$-\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v + \csc(v) - v} = \frac{dv}{\csc v} = \sin v\, dv.$$

d. ED exacta y homogénea.

$$\underbrace{(2y^2x - 4x^3)}_{M}dx + \underbrace{(2yx^2 + 4y^3)}_{N}dy = 0,$$

$M_y = 4yx$ $\qquad$ $N_x = 4yx$ $\qquad$ exacta y homogénea de grado 3,

Resuelvala como exacta

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2y^2x - 4x^3 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2yx^2 + 4y^3.$$

$$F = y^2x^2 - x^4 + A(y).$$

$$F_y = \cancel{2yx^2} + A'(y) = \cancel{2yx^2} + 4y^3.$$

$$A(y) = y^4$$

Soln. General: $\boxed{y^2x^2 - x^4 + y^4 = C.}$

Ahora como homogenea.

$$(2y^2x - 4x^3)dx + (2yx^2 + 4y^3)dy = 0$$

reescriba.

$$y = vx \qquad dy = v\,dx + x\,dv. \qquad \frac{M}{N} \quad \frac{y}{x}$$

$$(2v^2x^3 - 4x^3)dx + (2vx^3 + 4vx^3)(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$2v^2x^3dx - 4x^3dx + 2v^2x^3dx + 2vx^4dv + 4v^2x^3dx + 4vx^4dv = 0.$$

$$8v^2x^3dx - 4x^3dx + 6vx^4dv = 0.$$

$$x^3(8v^2 - 4)dx = -6vx^4dv.$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{-6v}{8v^2 - 4}$$

$$\ln x = -\frac{6}{16}\ln(v^2 - 4) + c.$$

$$8\ln x = -3\ln\left(\left[\frac{y}{x}\right]^2 - 4\right) + c.$$