ecuaciones diferenciales

David Corzo

2021 January 11

Índice general

Capítulo 1

Introducción a las EDs

1.1. Introducción a las ecuaciones diferenciales

- Def: una ecuacion diferencial (ED) es una ecuación que contiene derivadas de una variable dependiente, generalmente y, respecto a una o más variables independientes, generalmente x o t.
- Ejemplo:
  - crecimiento exponencial.
  $$\frac{\partial y}{\partial t} = ky \quad \Longrightarrow \quad y = f(t)?$$
  - Enfriamiento de Newton:
  $$\frac{\partial T}{\partial t} = K(T - T_m) \quad \Longrightarrow \quad T?$$
  - Deslizamiento:
  $$ay'' + by' + cy' = f(t)$$
  - Logística:
  $$y' = Ky(M - y)$$
- Objetivo: Encuentre una funcion $y(t)$ que satisfaga la ED.

1.1.1. Definiciones

- ED Ordinaria: la ec tiene derivadas respecto a una **sola** variable.
- Ejemplo de ED ordinaria:
$$y''' + zy'' + y' + y = x^3$$
- ED parcial: la ec tiene derivadas parciales respecto a dos o más variables.
- Ejemplo de ED parcial: ec de calor.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2}$$

1.1.2. Orden de una ED

- el orden de la mayor derivada en la ED.
- ED orden 3:
$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = \sin(x)$$

1.1.3. Ejercicios

Clasifique el orden de cada ED:

1. ED 1er orden.
$$\frac{dy}{dx} = Kx^2y^2$$
2. ED 2do grado.
$$p'' = zpp'$$
3. ED 3er orden.
$$y'y''' + 2y'' + \alpha y' + \beta y = \sin(x)\, e^{-2x}$$
4. ED 2do orden.
$$y(y'')^6 + 5(y')^2 0 = 0$$

1.1.4. Notaciones

- Notación prima: $y', y'', y^{(n)}$
- Notación Leibni: $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, ..., \frac{d^ny}{dt^n}$

1.1.5. Forma de una ED

- ED de orden n: ponga las derivadas como variables.
$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \quad \text{encuentre ¿y?}$$
- ED en su forma normal o estádar.
  - Sólo la derivada más grande se encuentra en el lado izquierdo.
$$y^{(n)} = g(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

1.1.6. Solución de una ED

- Solución: una funcion $y = \phi(x)$ que tiene n derivadas continuas y satisface la ecuación diferencial.
- La idea es meter la función $y = \phi(x)$ en la ED y solucionarla.

1.1.7. Ejercicio 2

Verifique que $y(t)$ es una solución de la ED dada.

- $\frac{dy}{dt} + 20y = 24$. Solución: $y(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$.

$$\text{Derivar la solución:}$$
$$y'(t) = +\frac{6}{5} \cdot 20e^{-20t}$$
$$\text{Remplaze } y' \text{ y } y \text{ en la ED.}$$
$$\cancel{24e^{-20t}} + 24 - \cancel{24e^{-20t}} = 0$$
$$24e^{-20t} + 20\left(\frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}\right) = 24$$

- $y'' + 4t = 0$. Solución: $y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$ c_1, c_2 son constantes.

$$\begin{aligned}
&\text{Derivamos dos veces (por el orden) la solución.}\\
y' &= -2c_1 \sin(2t) + 2c_2 \cos(2t)\\
y'' &= -4c_1 \cos(2t) - 4c_2 \sin(2t)\\
&\text{Sustituir la segunda derivada en el problema original.}\\
4c_1 \cos(2t) - 4c_2 \sin(2t) + 4(c_1 \cos(2t)) + c_2 \sin(2t) &= 0\\
\cancel{4c_1 \cos(2t)} - \cancel{4c_2 \sin(2t)} + \cancel{4(c_1 \cos(2t))} + \cancel{c_2 \sin(2t)} &= 0\\
0 = 0 \quad y(t) \text{ es la soln de la ED.}
\end{aligned}$$

1.1.8. Soluciones triviales

- Soln trivial: una ED tiene soln trivial si la función cero $\phi(x) = 0$ es una de sus soluciones.
- Ejemplo de no tener solucion trivial:

$$\begin{aligned}
y' + 20y &= 24\\
y = 0, \quad y' &= 0qq0 + 20 \cdot 0 = 0 \neq 24
\end{aligned}$$

- Ejempo de tener solución trivial:

$$\begin{aligned}
y'' + 4y &= 0\\
y = y'' = 0 \quad 0 + 4 \cdot 0 &= 0 = 0
\end{aligned}$$

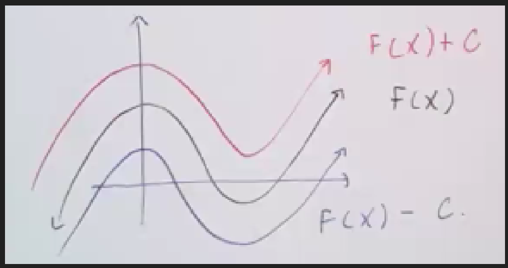
1.1.9. Infinitas soluciones

- Una ED puede tener infinitas soluciones.
- Considere la ED: $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$.
  - La integral de y':

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{dx} dx &= \int f(x) dx\\
y = \int f(x) dx &= F(x) + C
\end{aligned}$$

  - y' dependiente. x independiente
  - La solución de esta ED es la antiderivada de $f(x)$.
  - Hay infinitas soluciones: $y = F(x) + C$

- La familia de soluciones de la ED es: $F(x) + C$.
- Entonces necesitamos encontrar el valor de C.



- No sólo se encuentra $F(x)$ sino también el calor de C.

1.1.10. 2 tipos de soluciones para una ED

- La solución general: la solución contiene constantes arbitrarias $c_1, c_2, ..., c_n$. (infinitas soluciones)
- La solución particular: la solución no contiene constantes arbitrarias. (solución unica)

1.1.11. Ejemplo

1. $\dfrac{dy}{dt} + 20y = 24$

$$y(t) = \frac{6}{5} + \frac{6}{5}e^{-20t}$$

Solución particular de la ED.

2. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0$

$$y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$$

Solución general.

1.1.12. Hay una correlación directa entre el orden de la ED y el número de constantes arbitrarias que resultan de la integración

- En general la solución general de una ED depende del orden de la ecuación diferencial.
- ED 1er orden: 1 constante arbitraria.
- ED 2do orden: 2 constantes arbitraria.
- ED n-ésimo orden: n constantes arbitrarias.

1.1.13. Resolver el siguiente ejercicio

- $\frac{dy}{dt} + 20y = 24$

$$\frac{dy}{dt} = 24 - 20y$$

$$\underbrace{\int \frac{dy}{24-20y} = \int dt}_{\text{Recordar: } \int \frac{dy}{y+b}} = \ln|y+b| + C$$

$$-\frac{1}{20}\ln(24-20y) = t + C \quad \Longrightarrow \quad \text{ya no hay derivadas entre y}$$

$$24 - 20y = e^{-20t-20C}$$

$$-20y = -24 - e^{-20t-20C}$$

$$y = \frac{6}{5} + \frac{1}{20}e^{-20t-20C}$$

Tenemos una solución general, nos deben dar una condición inicial para sacar la solución particular.