ED Cauchy - Euler.

$$a_n x^n y^{(n)} + \dots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 x y = g(x).$$

soluciones forma $y = x^r$.

Raíces Distintas: $y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$.

Raíces Repetidas: $y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_1} \ln x$

Raíces Complejas: $y = x^{\alpha}(c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x))$

Encuentre las raíces de la ec. auxiliar.

$y' = r x^{r-1}$ $\quad y'' = r(r-1) x^{r-2}$ $\quad y''' = r(r-1)(r-2) x^{r-3}$

Reemplace $y^{(k)} \to r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)$

Raíz multiplicidad s: agregue potencias de logs.

$$y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_1} \ln x + c_3 x^{r_1} (\ln x)^2 + \dots c_s x^{r_1} (\ln x)^{s-1}$$

Raíz compleja con multiplicidad s:

$$y = c_{11} x^{\alpha} \sin(\beta \ln x) + c_{12} x^{\alpha} \cos(\beta \ln x) +$$
$$c_{21} x^{\alpha} \sin(\beta \ln x) \ln x + c_{22} x^{\alpha} \cos(\beta \ln x) \ln x + \dots$$
$$\dots c_{s1} x^{\alpha} \sin(\beta \ln x)(\ln x)^{s-1} + c_{22} x^{\alpha} \cos(\beta \ln x)(\ln x)^{s-1}$$

Ejercicio 3: Resuelva.

a. $x^3 y''' + 2xy' - 12y = 0.$

$r(r-1)(r-2) + 2r - 12 = 0.$ $\qquad r^2 - 3r + 2.$

$r^3 - 3r^2 + \underbrace{2r + 2r}_{4r} - 12 = 0$

$r^2(r-3) + 4(r-3) = 0.$

$(r-3)[r^2+4] = 0 \Rightarrow r_1 = 3 \qquad r_{2,3} = \pm 2i$

Raiz Real y 2 complejas.

$$\boxed{y = c_1 x^3 + c_2 \sin(2\ln x) + c_3 \cos(2\ln x)}$$

b. $x y^{(4)} + y^{(3)} = 0.$ no es ED Cauchy-Euler.

$x^4 y^{(4)} + x^3 y^{(3)} = 0.$ $\qquad y = x^r.$

$r(r-1)(r-2)(r-3) + 1r(r-1)(r-2) = 0.$

$r(r-1)(r-2)[r-3+1] = r(r-1)(r-2)(r-2) = 0$

Raíces: $r = 0, 1, 2, 2.$ 2 Distintas y 1 repetida.

Soln. gral: $\boxed{y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^2 \ln x}$

ED Cauchy- Euler Inhomogéneas.

$$ax^2 y'' + bx y' + cy = g(x).$$

Soln complementaria: $y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

No se puede utilizar coeficientes indeterminados.

Utilice VP $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ $u_1' = -\dfrac{f y_2}{W}$ $u_2' = \dfrac{f y_1}{W}$

Soln. particular: $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$.

ED Estándar. $y'' + \dfrac{b}{ax} y' + \dfrac{c}{ax^2} y = \dfrac{g(x)}{ax^2} = f(x)$

Divida por ax^2:

Ejercicio 4: Resuelva.

a. $x^2 y'' - 4xy' = x^5$

Ec. Auxiliar: $r(r-1) - 4r = r^2 - r - 4r$
$r^2 - 5r = r(r-5) = 0$

$r = 0, 5$

Soln. complementaria: $y_c = c_1 + c_2 x^5$ $y_1 = 1,\ y_2 = x^5$

Wronskiano: $W = \begin{vmatrix} 1 & x^5 \\ 0 & 5x^4 \end{vmatrix} = 5x^4$

ED Estándar $y'' - \dfrac{4}{x} y' = x^3$

$$u_1' = -\frac{f\,y_2}{W} = -\frac{x^3\, x^5}{5x^4} = -\frac{1}{5}x^4 \Rightarrow u_1 = -\frac{1}{25}x^5$$

$$u_2' = \frac{f\,y_1}{W} = \frac{x^3 \cdot 1}{5x^4} = \frac{1}{5x} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{5}\ln x$$

Soln particular $\quad y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$

$$y_p = -\frac{1}{25}x^5 \cdot 1 + \frac{1}{5}(\ln x)\, x^5$$

Soln. general: $\quad y = y_c + y_p = c_1 + c_2 x^5 - \frac{x^5}{25} + \frac{x^5}{5}\ln x$

ó $\quad y = A_1 + A_2 x^5 + \frac{1}{5}x^5 \ln x$

6. $x^2 y'' + x y' - y = \ln x$

Ec. Auxiliar: $r(r-1) + r - 1 = 0.$

$$r^2 - r + r - 1 = r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = -1, +1$$

Soln. complementaria: $\quad y_c = c_1 x^{-1} + c_2 x$

Wronskiano: $\quad W = \begin{vmatrix} x^{-1} & x \\ -x^{-2} & 1 \end{vmatrix} = x^{-1} + x^{-1} = 2x^{-1}$

ED Estándar: $\quad y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \boxed{x^{-2}\ln x}$

$y_1 = x^{-1} \qquad y_2 = x$

$$u_1' = \frac{-f y_2}{W} = \frac{-x^{-2}(\ln x)\,x}{2x^{-1}} = -\frac{1}{2}\ln x$$

$$u_2' = \frac{f y_1}{W} = \frac{x^{-2}(\ln x)\,x^{-1}}{2x^{-1}} = \frac{1}{2}x^{-2}\ln x$$

Utilice IPP.

$$u_1 = -\frac{1}{2}\int \ln x\,dx = -\frac{1}{2}\left[x\ln x - \int dx\right] = -\frac{1}{2}x\ln x + \frac{1}{2}x$$

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{dx}{x} \qquad v = x$

$$u_2 = \frac{1}{2}\int \ln x\,(x^{-2}\,dx) = \frac{1}{2}\left[-x^{-1}\ln x + \int x^{-2}\,dx\right]$$

$u = \ln x \qquad dv = x^{-2}\,dx \qquad \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1,\; x\,x^{-1} = 1$

$du = \frac{dx}{x} \qquad v = -x^{-1}$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left[-x^{-1}\ln x - x^{-1}\right] = \frac{-1}{2x}\ln x - \frac{1}{2x}$$

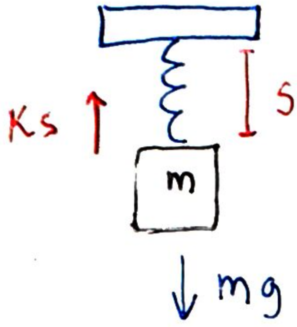
Soln particular $\quad y_p = \frac{u_1}{x} + u_2 x$

$$y_p = -0.5\ln x + \underline{0.5} - 0.5\ln x \underline{-0.5} = -\ln x$$

soln. General: $\boxed{y = c_1 x^{-1} + c_2 x - \ln x}$

Sistemas Resorte - Masa.

a. Movimiento Libre Amortiguado.



En una posición de equilibrio

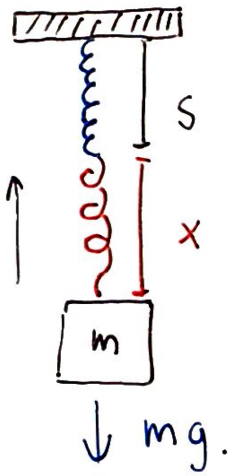
$x(t) = s \qquad x'(t) = 0.$

Ley de Hooke $\quad F = Ks.$

$mg = Ks \quad$ ó $\quad \underbrace{mg - Ks = 0.}$

K constante dada en N/m ó Kg/s^2

¿Qué sucede si el resorte se estira x unidades?



El resorte se empieza a mover.

$ma = mg - K(x+s)$ } Fuerza restauradora.

$ma = \underbrace{mg - Ks}_{0} - Kx$

$ma = -Kx \qquad$ como $a = x''$

ED. Resorte $\qquad mx'' = -Kx \qquad$ m, K son constantes

ED. Movimiento No Amortiguado. Libre

$$mx'' + Kx = 0$$

$$x'' + \frac{K}{m}x = 0 \qquad \frac{Kg/s^2}{Kg} = \frac{1}{s^2}.$$

$$\boxed{x'' + \omega^2 x = 0} \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

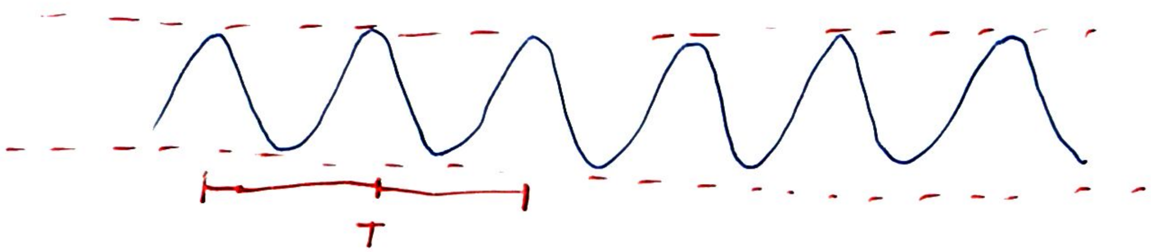
ω frecuencia circular rad/s.

Período : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ tiempo en que tarda el objeto en ejecutar un ciclo o vuelta.

Solución ED $x'' + \omega^2 x = 0$ $\quad x(0) = y_0 \quad x'(0) = V_0.$

$x = e^{rt}$ $\qquad r^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow r = \sqrt{-\omega^2} = \pm i\omega$

Soln general: $\boxed{y = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t).}$



Ejercicio 1: Un resorte con constante $K = 12\ Kg/s^2$ tiene una masa de 3 Kg. Inicialmente, El resorte se estira 1m de su equilibrio y está en reposo. Encuentre la ec. de movimiento del resorte.

$$m y'' + K y = 0 \qquad y(0) = y_0 \qquad y'(0) = V_0.$$

$$\boxed{3y'' + 12y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0.}$$

$$3r^2 + 12 = 0 \Rightarrow r^2 = -4 \Rightarrow r = \pm 2i$$

Soln gral: $y = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t).$

$y(0) = 0 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 1$

$y'(t) = 2c_1 \cos(2t) - 2c_2 \sin(2t)$

$y'(0) = 2c_1 - 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$

Ec. Movimiento : $\boxed{y = \cos 2t.}$ Período π

ED Movimiento Amortiguado: $m y'' - \underbrace{\beta y'}_{\text{fricción.}} + K y = 0$

Raices Distintas → Sobreamortiguado

Raíces Repetidas → Críticamente Amortiguado

Raices complejas. → Subamortiguado.