4.7 ED Cauchy-Euler.

ED lineal donde las funciones coeficientes son polinomios de grado $u_i = b x^i \rightarrow y^{(i)}$

$$\boxed{b_n x^n y^{(n)} + b_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots b_2 x^2 y^{(2)} + b_1 x y' + b_0 y = g(x)}$$

Ejemplos: $\boxed{x^3 y''' - 2x^2 y'' + 6xy' = x^3}$ ED-Cauchy Euler.

$e^{mx} \leftarrow a y''' - b y'' + c y' + d y = x^4$ ED lineal coefs. constantes

$x^4 y^{(4)} + y'' + x^2 y = e^x$

ED lineal pero no es ni Cauchy ni coefs. consts.

Solución de una ED Cauchy-Euler.

2do orden: $ax^2 y'' + bxy' + cy = 0.$

Proponga $y = x^m$ ¿m?

$y' = m x^{m-1}$ $y'' = m(m-1) x^{m-2}.$

Sustituya en la ED:

$a m(m-1) x^m + b m x^m + c x^m = 0.$

$x^m (a m(m-1) + bm + c) = 0$

como $x^m \neq 0.$

Ec. característica $am^2 + (b-a)m + c = 0.$

Raíces: $m_{1,2} = \dfrac{a-b}{2a} \pm \dfrac{1}{2a}\sqrt{(b-a)^2 - 4ac}$

Casos de Solución General:

Caso I. Raíces Distintas: $(b-a)^2 > 4ac.$

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}.$$

Caso II. Raíz Repetida: $(b-a)^2 = 4ac.$

$y_1 = x^{m_1}$ $\qquad m_1 = \dfrac{a-b}{2.}$ $\qquad y_2 \neq x^{m_1} x$

$y_2 = u x^{m_1}$ $\qquad$ use reducción de orden.

$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1}(\ln x)$ el lunes.

Caso III. Raíces Complejas: $(b-a)^2 < 4ac.$

$m = \alpha \pm i\beta \qquad y = c_1 x^{\alpha + i\beta} + c_2 x^{\alpha - i\beta}$

Escriba la soln. en términos de soluciones reales

$$x^{\alpha \pm i\beta} = x^{\alpha} \underbrace{x^{\pm i\beta}}.$$

Fórmula de Euler $\quad e^{\pm i\beta} = \cos\beta \pm i \sin\beta.$

use $x = e^{\ln x}$ $\qquad x^{\pm i\beta} = e^{\ln x^{\pm i\beta}} = e^{\pm i\beta \ln x}$

$$e^{\pm i\beta \ln x} = \cos(\beta \ln x) \pm i \sin(\beta \ln x)$$

Reescriba la soln. general $A_1 = c_1 + c_2$
$A_2 = ic_1 - ic_2.$

Soln general $\boxed{y = A_1 x^{\alpha} \cos(\beta \ln x) + A_2 x^{\alpha} \sin(\beta \ln x)}$

Ejercicio 1: Encuentre la soln. general de las sigs. EDs

a. $x^2 y'' - 2y = 0.$ $y = x^m$ $y' = m x^{m-1}$
$y'' = m(m-1)x^{m-2}.$

$m(m-1)x^m - 2x^m = 0.$

Ec. Auxiliar: $m(m-1) - 2 = m^2 - m - 2 = 0.$

Raíces Distintas: $(m+1)(m-2) = 0 \Rightarrow m = -1, 2.$

Soln. General: $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^2$ definidas en $(0, \infty)$

b. $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0.$ $y = x^m$

Ec. Auxiliar $m(m-1) - 3m + 4 = 0.$
$m^2 - m - 3m + 4 = m^2 - 4m + 4 = 0.$

Raíz Repetida: $(m-2)(m-2) = 0$ $m = 2, 2.$

Soln. General: $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$

¡Cuidado! $x \cdot x^2$ no es la 2da soln.

c. $25x^2 y'' + 25xy' + y = 0.$

$$25m(m-1) + 25m + 1 = 0$$
$$25m^2 - 25m + 25m + 1 = 0$$
$$25m^2 = -1 \Rightarrow m = \pm\sqrt{\frac{-1}{25}} = \pm\frac{i}{5} + 0.$$

Raices Complejas.

Soln General
$$\boxed{y = c_1 X^0 \cos\left(\frac{1}{5}\ln x\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{5}\ln x\right)}$$

Comprobación ¿Porque $y_2 = X^{m_1}\ln x$?

$$m = \frac{a-b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{\underbrace{(a-b)^2 - 4ac}_{0}} = \frac{a-b}{2a} = \frac{1}{2}a - \frac{b}{2a}$$

$$y_1 = X^{0.5(a-b)/a} = X^{0.5 - b/2a}$$

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0.$$
$$y'' + \underbrace{\frac{b}{ax}}_{p} y' + \frac{c}{ax^2} y = 0.$$

Reducción de orden $\quad y_2 = u y_1 \qquad u = \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}\,dx.$

$$\int p\,dx = \int \frac{b}{ax}\,dx = \frac{b}{a}\ln x$$
$$e^{-\int p\,dx} = e^{-\frac{b}{a}\ln x} = e^{\ln x^{-b/a}} = x^{-b/a}.$$

$y_1 = x^{0.5 - b/2a}$ $\qquad$ $y_1^2 = x^{1-b/a}.$

$$\frac{e^{-\int P\,dx}}{y_1^2} = \frac{x^{-b/a}}{x^{1-b/a}} = x^{-b/a - 1 + b/a} = x^{-1}$$

$$u = \int \frac{e^{-\int P\,dx}}{y_1^2}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$$

$$\boxed{y_2 = x^{m_1} \ln x}$$