4. ED lineales.

ED lineal 2do orden: $\boxed{A(x)\, y'' + B(x)\, y' + C(x)\, y = D(x)}$

ED lineal 1er orden: $\boxed{A(x)\, y' + B(x)\, y = C(x).}$

En general no es separable $C(x) - B(x)\, y$.

Divida la ED lineal por $A(x)$ para obtener su forma estándar.

$$\boxed{y' + P(x)\, y = Q(x)}, \quad P = \frac{B}{A}, \quad Q = \frac{C}{A}.$$

Resolución de una ED. lineal.

$Q(x) = 0$ resuelva $\dfrac{dy}{dx} = P(x)\, y$. separable.

$$\int \frac{dy}{y} = \int P(x)\, dx \Rightarrow \ln y = \int P(x)\, dx$$

$$\boxed{y = e^{\int P(x)\, dx}}$$

TFC $\dfrac{d}{dx} \int P\, dx = P$. $\qquad y' = e^{\int P\, dx}\, P(x)$

1. Factor de Integración $V = e^{\int P(x)\, dx}$.
2. Multiplique la ED por el factor de Integración

$$y' e^{\int P\, dx} + y\, P(x)\, e^{\int P\, dx} = Q(x)\, e^{\int P(x)\, dx}$$

Regla del Producto $\left(y\, e^{\int P\, dx}\right)' = y' e^{\int P\, dx} + y\, P(x)\, e^{\int P\, dx}$

3. Use la Regla del Producto en "Reversa"

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{\int P dx} \right) = Q(x) e^{\int P dx}$$

4. Integre ambos lados de la ec.

$$\underline{\underline{y}}\, e^{\int P dx} = \int Q(x) e^{\int P dx} dx + C.$$

5. Resuelva para y:

$$\boxed{y = e^{-\int P dx} \int Q(x) e^{\int P dx} dx + C e^{-\int P dx}}$$

Solución General.

Pasos ED lineal.

0. Verifique que la ED es lineal
1. Escriba la ED en su forma estándar $y' + Py = Q$.
2. Factor de Integración $e^{\int P(x) dx}$
3. Multiplique la ED por el FI.
4. Utilice la regla del producto.
5. Integre la ED y resuelva para y.

Ejercicio 1: Resuelva las sigs. EDs p. 25

a. $y' + \underbrace{2x}_{P(x)} y = \underbrace{4x}_{Q(x)}$). Lineal 1. Estándar.

Factor Integración: $e^{\int P dx} = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$
(no agregue c).

Multiplique la ED por el FI

$$\underbrace{y'}_{f_1'} \underbrace{e^{x^2}}_{f_2} + \underbrace{y}_{f_1} \underbrace{2xe^{x^2}}_{f_2'} = 4xe^{x^2} \qquad (f_1' f_2 + f_1 f_2') = (f_1 f_2)'$$

Utilice la Regla del Producto. en reversa.

$$(ye^{x^2})' = 4xe^{x^2}$$

Integre ambos lados respecto a x:

$$\underline{\underline{y}} e^{x^2} = \int 4xe^{x^2} dx = 2e^{x^2} + C.$$

$u = x^2$, $du = 2x dx$ $\int 2e^u du = 2e^u$

Resuelva para y:

$$y = \frac{2e^{x^2} + C}{e^{x^2}} = 2 + Ce^{-x^2}$$

También es separable.

$$y' = 4x - 2xy = 2x(2-y)$$

$$\int \frac{dy}{2-y} = \int 2x\,dx$$

$$-\ln(2-y) = x^2 + c.$$

$$\ln(2-y) = -x^2 - c.$$

$$2-y = e^{-x^2-c}.$$

$$\boxed{2 - e^{-x^2-c} = y.}$$

$$-e^{-x^2}e^{-c} = c_1 e^{-x^2}$$

$$c_1 = -e^{-c}.$$

b. $2(y-4x^2)dx + x\,dy = 0.$

Reescriba la ED.

$$2y - 8x^2 + x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\underline{x}\,y' + 2y = 8x^2$$

ED lineal. e^{2x}

$$\boxed{y' + \frac{2}{x}y = 8x}$$

ED lineal estándar

F.I. $\int P\,dx = \int \frac{2}{x}dx = 2\ln x$

$e^{2\ln x} = e^{\ln x}e^{\ln x}$

$2x \neq e^{\int P\,dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln(x^2)} = x^2.$

Multiplique por el FI.

$$\underline{\underline{x^2}}\,y' + 2x\,\underline{\underline{y}} = 8x^3$$

$$(x^2y)' = 8x^3.$$

Integre: $x^2 y = \int 8x^3\,dx = 2x^4 + C.$

Soln general: $y = \dfrac{2x^4 + C}{x^2} = 2x^2 + Cx^{-2}$

J. $(\cos x + 2y\cos x)\,dx - \sin x\,dy = 0.$

$(\cos x + 2y\cos x) - \sin x \dfrac{dy}{dx} = 0.$

$\cos x = \sin x \dfrac{dy}{dx} - 2y\cos x$ ED lineal.

$\dfrac{dy}{dx} - \underline{\dfrac{2\cos x}{\sin x}}\, y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ Forma estándar

F.I: $-2\int \dfrac{\cos x}{\sin x}\,dx = -2\int \dfrac{du}{u} = -2\ln(u) = -2\ln(\sin x)$

$u = \sin x \quad du = \cos x\,dx$

$e^{\int P dx} = e^{-2\ln(\sin x)} = e^{\ln(\sin^{-2} x)} = \sin^{-2} x$

Multiplique por el FI.

$\underbrace{\sin^{-2} x}_{f_1}\, y' - \underbrace{\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}}_{f_1'}\, y = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$

$\left(\dfrac{y}{\sin^2 x}\right)' = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$ $\int u^{-3}\,du = \dfrac{u^{-2}}{-2} + C.$

$\dfrac{y}{\sin^2 x} = \int \sin^{-3} x \cos x\,dx = -\dfrac{1}{2}\sin^{-2} x + C.$

$\boxed{y = -0.5 + C\sin^2 x}$