Observaciones: Lunes 15 de febrero
Corto 5 (4-6 preguntas y 90 mins).

ED Separables ← Modelos Lineales
ED lineales ← Modelos No Lineales.
ED Exactas
ED homogéneas

4. ED Logística.

Mejora al modelo de crecimiento exponencial.

$y' = Ky$. tasa porcentual K es siempre constante.

La población crece sin límite.

El modelo logístico toma en cuenta que los recursos son escasos, por lo que debe haber una población límite M.

$y(t) \longrightarrow M$ $\quad y'(t) \approx 0$. la población se estanca.

$y(t) > M$ $\quad y'(t) < 0$ la población disminuye

$y(t) < M$ $\quad y'(t) \approx Ky$ crecimiento exp.

$$\frac{\text{Dif. Pob Límite y Población Actual}}{\text{Población Límite}} = \frac{M-y}{M}$$

E.D Logística $\dfrac{dy}{dt} = Ky\underbrace{\left(\dfrac{M-y}{M}\right)}_{\text{corrección.}}$, $y(0) = y_0$

Resolución ED. Logística.

ED separable y no lineal.

$$\frac{M\,dy}{y(M-y)} = K\,dt.$$

M, K, y_0 son constantes.

Utilice fracciones parciales.

$$\frac{M}{y(M-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{M-y}$$

$$A(M-y) + By = M$$

$y=0$: $AM = M \Rightarrow A = 1$

$y=M$: $BM = M \Rightarrow B = 1$

$$\int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{M-y}\right)dy = \int K\,dt.$$

$$\ln y - \ln(M-y) = Kt + C.$$

$$\ln\left(\frac{y}{M-y}\right) = Kt + C.$$

$$\frac{y}{M-y} = c_1 e^{Kt}$$

$c_1 = e^{C}$

Encuentre $y(t)$ y c_1 $\quad y(0) = y_0.$

$$\boxed{\frac{y_0}{M - y_0} = c_1 \cdot 1}$$

Ahora resuelva para $y(t)$

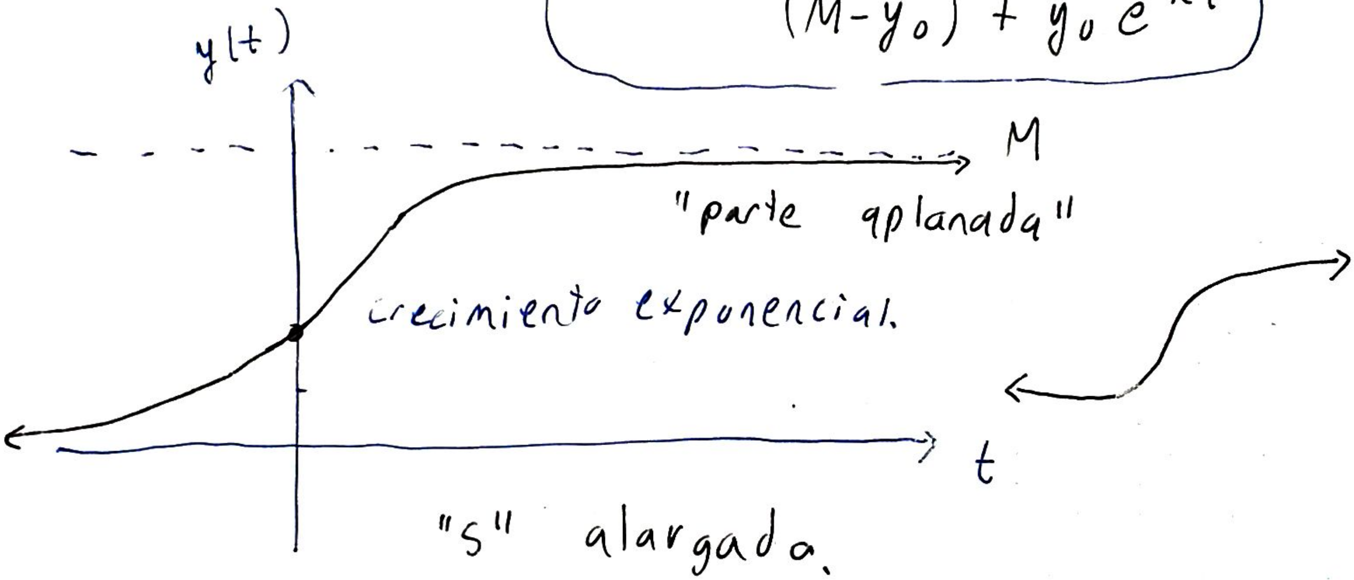
$$\underline{\underline{y}} = M c_1 e^{\kappa t} - c_1 \underline{\underline{y}} e^{\kappa t}.$$

$$y(1 + c_1 e^{\kappa t}) = M c_1 e^{\kappa t}.$$

Soln ED. logística. $\quad y(t) = \dfrac{M y_0 e^{\kappa t} / (M - y_0)}{1 + \frac{y_0}{M - y_0} e^{\kappa t}}.$

$$* \frac{(M - y_0)}{(M - y_0)}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{M y_0 e^{\kappa t}}{(M - y_0) + y_0 e^{\kappa t}}}$$



Modelo Logístico: población en islas o archipiélagos.

Ejercicio 1: La población de Kiribati sigue un crecimiento logístico y está limitada a 200 mil habs. En 1990, la población fue de 40 mil y en 2000 fue de 80 mil.

a. Encuentre la ec. que describe la población de Kiribati.

ED: $M = 200$ mil $\quad y_0 = 40$ mil $\quad$ $t=0$ es 1990.

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(\frac{200-y}{200}\right)$$ usando la fórmula de la ec. logística

$$y(t) = \frac{200 * 40e^{kt} \;/40}{160 + 40e^{kt} \;/40} = \frac{200e^{kt}}{4+e^{kt}}.$$

b. Encuentre la tasa relativa de crecimiento k.

$y(0) = 40$ mil
$y(10) = 80$ mil. ✓

$$\frac{200e^{10k}}{4+e^{10k}} = 80. \Rightarrow 200e^{10k} = 320 + 80e^{10k}.$$

$$120e^{10k} = 320.$$

$$e^{10k} = 320/120.$$

$$10k = \ln\left(\frac{32}{12}\right)$$

$$K = \frac{1}{10} \ln\left(\frac{32}{12}\right) \approx 0.09888 \quad \text{ó} \quad 9.88\% \text{ anual.}$$

$$y(t) = \frac{200\, e^{0.09808t}}{4 + e^{0.09808t}} \qquad e^{2.94} \approx 18.9629$$

c. Encuentre y en el $\left.\begin{matrix} 1990 \\ 2020 \end{matrix}\right\}$

$$y(30) = \frac{200 * 18.9629}{4 + 18.9629} \approx 165.161$$

165 mil habs.

Parcial viernes 19 de febrero.