ecuaciones diferenciales

David Corzo

2021 January 11

Índice general

Capítulo 1

Introducción a las EDs

1.1. Introducción a las ecuaciones diferenciales

- Def: una ecuacion diferencial (ED) es una ecuación que contiene derivadas de una variable dependiente, generalmente y, respecto a una o más variables independientes, generalmente x o t.
- Ejemplo:
  - crecimiento exponencial.
  $$\frac{\partial y}{\partial t} = ky \quad \Longrightarrow \quad y = f(t)?$$
  - Enfriamiento de Newton:
  $$\frac{\partial T}{\partial t} = K(T - T_m) \quad \Longrightarrow \quad T?$$
  - Deslizamiento:
  $$ay'' + by' + cy' = f(t)$$
  - Logística:
  $$y' = Ky(M - y)$$
- Objetivo: Encuentre una funcion $y(t)$ que satisfaga la ED.

1.1.1. Definiciones

- ED Ordinaria: la ec tiene derivadas respecto a una **sola** variable.
- Ejemplo de ED ordinaria:
$$y''' + zy'' + y' + y = x^3$$
- ED parcial: la ec tiene derivadas parciales respecto a dos o más variables.
- Ejemplo de ED parcial: ec de calor.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2}$$

1.1.2. Orden de una ED

- el orden de la mayor derivada en la ED.
- ED orden 3:
$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = \sin(x)$$

1.1.3. Ejercicios

Clasifique el orden de cada ED:

1. ED 1er orden.
$$\frac{dy}{dx} = Kx^2y^2$$
2. ED 2do grado.
$$p'' = zpp'$$
3. ED 3er orden.
$$y'y''' + 2y'' + \alpha y' + \beta y = \sin(x)\, e^{-2x}$$
4. ED 2do orden.
$$y(y'')^6 + 5(y')^2 0 = 0$$

1.1.4. Notaciones

- Notación prima: $y', y'', y^{(n)}$
- Notación Leibni: $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, ..., \frac{d^ny}{dt^n}$

1.1.5. Forma de una ED

- ED de orden n: ponga las derivadas como variables.
$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \quad \text{encuentre ¿y?}$$
- ED en su forma normal o estádar.
  - Sólo la derivada más grande se encuentra en el lado izquierdo.
$$y^{(n)} = g(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

1.1.6. Solución de una ED

- Solución: una funcion $y = \phi(x)$ que tiene n derivadas continuas y satisface la ecuación diferencial.
- La idea es meter la función $y = \phi(x)$ en la ED y solucionarla.

1.1.7. Ejercicio 2

Verifique que $y(t)$ es una solución de la ED dada.

- $\frac{dy}{dt} + 20y = 24$. Solución: $y(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$.

Derivar la solución:
$$y'(t) = +\frac{6}{5} \cdot 20e^{-20t}$$
Remplaze y' y y en la ED.
$$\cancel{24e^{-20t}} + 24 - \cancel{24e^{-20t}} = 0$$
$$24e^{-20t} + 20\left(\frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}\right) = 24$$

- $y'' + 4t = 0$. Solución: $y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$ c_1, c_2 son constantes.

$$
\begin{aligned}
&\text{Derivamos dos veces (por el orden) la solución.}\\
y' &= -2c_1 \sin(2t) + 2c_2 \cos(2t)\\
y'' &= -4c_1 \cos(2t) - 4c_2 \sin(2t)\\
&\text{Sustituir la segunda derivada en el problema original.}\\
4c_1 \cos(2t) - 4c_2 \sin(2t) + 4\left(c_1 \cos(2t)\right) + c_2 \sin(2t) &= 0\\
\cancel{4c_1 \cos(2t)} - \cancel{4c_2 \sin(2t)} + \cancel{4\left(c_1 \cos(2t)\right)} + \cancel{c_2 \sin(2t)} &= 0\\
0 = 0 \quad y(t) \text{ es la soln de la ED.}
\end{aligned}
$$

1.1.8. Soluciones triviales

- Soln trivial: una ED tiene soln trivial si la función cero $\phi(x) = 0$ es una de sus soluciones.
- Ejemplo de no tener solucion trivial:

$$
\begin{aligned}
y' + 20y &= 24\\
y = 0, \quad y' = 0qq0 + 20 \cdot 0 = 0 &\neq 24
\end{aligned}
$$

- Ejempo de tener solución trivial:

$$
\begin{aligned}
y'' + 4y &= 0\\
y = y'' = 0 \quad 0 + 4 \cdot 0 = 0 &= 0
\end{aligned}
$$

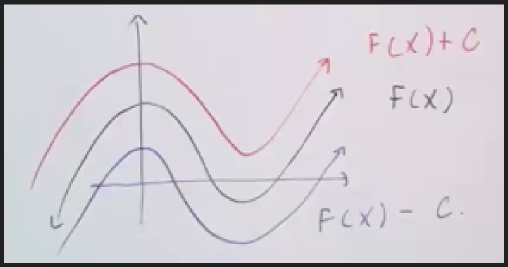
1.1.9. Infinitas soluciones

- Una ED puede tener infinitas soluciones.
- Considere la ED: $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$.
  - La integral de y':

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dy}{dx} dx &= \int f(x) dx\\
y = \int f(x) dx &= F(x) + C
\end{aligned}
$$

  - y' dependiente. x independiente
  - La solución de esta ED es la antiderivada de $f(x)$.
  - Hay infinitas soluciones: $y = F(x) + C$

- La familia de soluciones de la ED es: $F(x) + C$.
- Entonces necesitamos encontrar el valor de C.



- No sólo se encuentra $F(x)$ sino también el calor de C.

1.1.10. 2 tipos de soluciones para una ED

- La solución general: la solución contiene constantes arbitrarias $c_1, c_2, ..., c_n$. (infinitas soluciones)
- La solución particular: la solución no contiene constantes arbitrarias. (solución unica)

1.1.11. Ejemplo

1. $\frac{dy}{dt} + 20y = 24$

$$y(t) = \frac{6}{5} + \frac{6}{5}e^{-20t}$$

Solución particular de la ED.

2. $\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0$

$$y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$$

Solución general.

1.1.12. Hay una correlación directa entre el orden de la ED y el número de constantes arbitrarias que resultan de la integración

- En general la solución general de una ED depende del orden de la ecuación diferencial.
- ED 1er orden: 1 constante arbitraria.
- ED 2do orden: 2 constantes arbitraria.
- ED n-ésimo orden: n constantes arbitrarias.

1.1.13. Resolver el siguiente ejercicio

- $\dfrac{dy}{dt} + 20y = 24$

$$\frac{dy}{dt} = 24 - 20y$$

$$\underbrace{\int \frac{dy}{24-20y} = \int dt}_{\text{Recordar: } \int \frac{dy}{y+b}} = \ln|y+b| + C$$

$$-\frac{1}{20}\ln(24-20y) = t + C \quad \Longrightarrow \quad \text{ya no hay derivadas entre y}$$

$$24 - 20y = e^{-20t-20C}$$

$$-20y = -24 - e^{-20t-20C}$$

$$y = \frac{6}{5} + \frac{1}{20}e^{-20t-20C}$$

Tenemos una solución general, nos deben dar una condición inicial para sacar la solución particular.

Capítulo 2

Problemas de valor inicial

- EDs 1er orden:
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = e^x \sin(y)$$
- Solución general:
$$\phi(x,y) + C$$
- Solución particular: son libres de constantes.

Son necesarias condiciones en la variable $y(x_0) = y_0$ y sus derivadas para no tener constantes arbitrarias.

2.0.1. Problema de valor inicial (PVI) de primer orden

- Es una ED de 1er orden con una condición inicial.
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

2.0.2. PVI de 2do grado

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x,y,y'), \quad y(x_0) = y_0 11 y'(x_0) = V_0$$

En física, tienen la aceleración y'' y quieren encontrar el desplazamiento. Se necesita la posición inicial $y(0) = y_0$ y la velocidad inicial $y'(0) = V_0$.

2.0.3. Ejercicio 1: Encuentre la solución particular de las sigs EDs.

- $y' = y - y^2$, $y(-1) = 5$ Use la solución general: $y(x) = \dfrac{1}{1 + ce^{-x}}$
  - Recordar que lo único que tenemos que hacer es encontrar la constante de la solución general.

$$\text{Use:} \quad x = -1, \quad y = 5 \quad \text{para encontrar el valor de C.}$$
$$\frac{1}{1 + ce^1} = 5 \quad \Longrightarrow \quad 1 + ce^1 = \frac{1}{5}$$
$$ce = \frac{1}{5} - 1 \quad \Longrightarrow \quad c = -\frac{4}{5e}$$
$$\text{Solución particular:} \quad y(x) = \frac{1}{1 - \frac{4}{5e} e^{-x}}$$

- $u'' + u = 0, \quad u(\pi/2) = 2, \quad u'(\pi/2) = 5$ Use la solución general $u = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)$.

$$
\begin{aligned}
u' &= c_1 \cos(x) - c_2 \sin(x) \\
&\text{Aplique cada una de las CIs.} \\
u(\pi/2) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 \quad &\implies \quad c_1 = 2 \\
u'(\pi/2) = c_1 \cdot 0 - c_2 \cdot 1 = 5 \quad &\implies \quad c_2 = -5 \\
\text{Solución particular: } u(x) &= 2\sin(x) - 5\cos(x)
\end{aligned}
$$

2.0.4. Resolución de una ED

Casos:

1. Solución única.
2. Infinitas soluciones.
3. No hay solución, ocurre en un PVI (usualmente cuando se ponen condiciones imposibles).

- No todos los problemas con valor inicial con condiciones tienen soluciones únicas.
- Por ejemplo: $\dfrac{dy}{dt} = 3y^{2/3}$ sujera a $y(0) = 0$ tiene por lo menos 2 soluciones. $y(t) = 0 \quad y(t) = t^3$.
    - ¿Cómo sabemos que es t^3?

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{3y^{2/3}} &= dt \quad \text{integrar.} \\
\int \frac{1}{3} y^{-2/3} dy &= \int dt \\
\frac{3}{3} y^{1/3} &= t + c \\
y = (t+c)^3 \quad &\text{Solución general} \\
0 = (0+c)^3 \quad \implies \quad c^3 = 0 \quad &\implies \quad c = 0 \\
\text{Solución particular:} \quad &y = t^3
\end{aligned}
$$

2.0.5. ¿Cuándo un PVI tiene garantizada solución única?

- El problema de valor inicial de primer orden $y' = f(x, y)$ $y(x_0) = y_0$ tiene garantizada una solución única si $f(x, y)$ y $\frac{\delta f}{\delta y}$ son continuas en (x_0, y_0).

2.0.6. Ejercicios

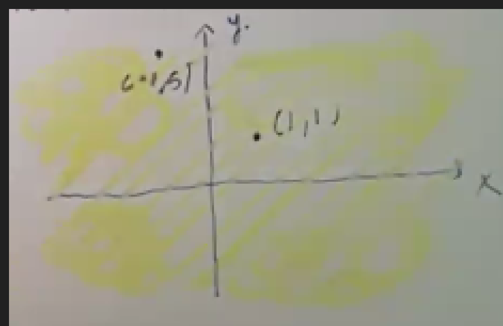
Ejercicio 2a: Encuentre y grafique los puntos (x, y) donde la solución única del PVI está garantizada.

- $y' = y - y^2$

$$f(x,y) = y - y^2 \quad \text{es continua en} \quad \mathbb{R}^{\nvDash}$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 1 - 2y \quad \text{es continua en} \quad \mathbb{R}^{\nvDash} \quad \text{(plano)}$$

$$\text{La solución única está garantizada en:} \quad -\infty < x < \infty \quad -\infty < y < \infty$$



- $y' = 3y^{2/3}$

$$f(x,y) = 3y^{2/3} \quad \text{es continua en } \mathbb{R}^2$$

$$\text{Pero:} \quad \frac{\delta f}{\delta y} = \frac{3 \cdot 2}{3} y^{-1/3} = \frac{2}{y^{1/3}}$$

No es continua en $y = 0$. No hay solución garantizada si $y = 0$ $(x, y), y \neq 0$.

- $y' = \dfrac{\sqrt{y^4 - 16}}{x}$
  - Evite números negativos.
  - Evite denominador igual a cero.

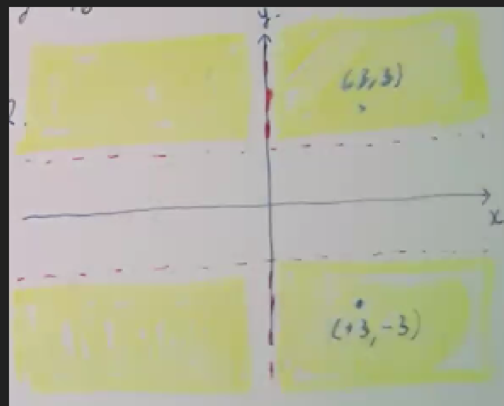
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{y^4 - 16}}{x} \quad \text{no es continua en x=0 \& -2¡y¡2}$$

$$y^4 - 16 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad y^4 \geq 16 \quad \Longrightarrow \quad -2 \geq y \geq 2$$

$$\text{Adicionalmente: } \frac{\delta f}{\delta y} = \frac{1}{x}(y^4 - 16)^{-1/2} \frac{1}{2} 4y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y^3}{x\sqrt{y^4 - 16}} \quad \text{se indefine en:} \quad \pm 2$$

$$\text{Solución garantizada si} \quad x = 0 \quad -2 \leq y \leq 2$$



2.0.7. ED separable de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

- el lado derecho es un producto de dos funciones en x y en y.
- ED lineal de 1er orden.

$$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = c(x)$$

- Las funciones coeficientes a, b, c sólo dependen de x.

$$\frac{dy}{dx} \quad \& \quad y \quad \text{sólo tienen potencias de uno.}$$

- ED exacta:

$$Mdy + Ndx = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

- Una ED de 1er orden $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ se puede escribir usando diferenciales. La idea es tratar el dy, dx como una fracción.

$$dy = f(x, y)dx \quad \Longrightarrow \quad dy = f(x, y)dx = 0$$

2.0.8. Ejercicio 3

Determine si la ED dada es lineal o es separable.

1. $(y - x^2)dx + 4ydy = 0$

$$(y - x^2)dx + 4xdy = 0$$
$$(y - x^2) + 4x\frac{dy}{dx} = 0$$
$$4x\frac{dy}{dx} = x^2 - y$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y}{4x} \quad \Longrightarrow \quad \text{No es separable por el término } x^2 - y$$

- Pero sí es lineal.

$$4x\frac{dy}{dx} + y = x^2$$
$$a(x) = 4x, \quad b(x) = 1, c(x) = x^2$$

2. $ydx + (x + xy + e^y)dy = 0$

$$y + \underbrace{(x + xy + e^y)}_{a(x)}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{No es lineal.}$$
$$(x + xy + e^y)\frac{dy}{dx} = -y\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{(x + xy + e^y)} \qquad \text{No es separable.}$$

3. $ydx + (xxye^y)dy = 0$

$$x^2ye^y\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \text{No es lineal.}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x^2ye^y} = -\frac{1}{x^2e^y} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{e^y}\right) \qquad \text{Es separable.}$$
$$\text{Separe en términos de } x \text{ \& de } y.$$
$$e^y dy = -\frac{1}{x^2}dx$$
$$\int e^y dy = \int -x^{-2}dx$$
$$e^y + c_1 = x^{-1} + c_2$$
$$y = \ln\left(c_2 - c_1 + \frac{1}{x}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Solución general.}$$