2. Problemas de Valor Inicial

EDs 1er orden: $\frac{dy}{dx} = f(x, y) = e^x \sin y.$

Solución General: $\varphi(x, y) + C.$

Solución Particular: soln libre de constantes.

Son necesarias condiciones en la variable $y(x_0) = y_0$.
y sus derivadas para no tener constantes arbitrarias

Problema de Valor Inicial (PVI) de 1er orden.

Es una ED de 1er orden con una condición inicial.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0.$$

PVI de 2do orden.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') \qquad y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = V_0$$

En física, tienen la aceleración y'' y quieren encontrar el desplazamiento. se necesita la posición inicial $y(0) = y_0$ y la velocidad inicial $y'(0) = V_0$

Ejercicio 1: Encuentre la soln particular de las sigs. EDs.

a. $\boxed{y' = y - y^2}$, $y(-1) = 5$

use la soln gral. $y(x) = \dfrac{1}{1+\boxed{c}e^{-x}}$

Use $x=-1$, $y=5$ para encontrar el valor de c.

$$\frac{1}{1+ce^{1}} = 5 \qquad 1+ce^{+1} = \frac{1}{5}$$

$$ce^{1} = \frac{1}{5} - 1 = -\frac{4}{5}$$

$$c = -\frac{4}{5e} \approx -0.2943$$

Soln particular $\boxed{y(x) = \dfrac{1}{1 - \frac{4}{5e}e^{-x}}}$

b. $\boxed{u'' + u = 0.}$ $u(\pi/2) = 2$ $u'(\pi/2) = 5$

use la soln general $u = \underline{c_1} \sin x + \underline{c_2} \cos x$

capítulo 3

$u' = c_1 \cos x - c_2 \sin x$

Aplique cada una de las CIs.

$u(\pi/2) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = \boxed{c_1 = 2}$

$u'(\pi/2) = c_1 \cdot 0 - c_2 \cdot 1 = 5 \Rightarrow \boxed{c_2 = -5}$

Soln particular: $\boxed{u(x) = 2 \sin x - 5 \cos x}$

Resolución de una ED.

1. solución única
2. infinitas soluciones.
3. no hay solución, ocurre en un PVI.

No todos los PVIs tienen solución única.

Por ejemplo, $\frac{dy}{dt} = 3y^{2/3}$ sujeta $y(0) = 0$.

tiene por lo menos 2 solns. $y(t) = 0$ &
$y(t) = t^3$

$$\frac{dy}{3y^{2/3}} = dt.$$

$$\int \frac{1}{3} y^{-2/3}\, dy = \int dt.$$

$$\frac{3}{3} y^{1/3} = t + C.$$

$$y = (t+C)^3 \quad \text{soln general.}$$

$$0 = (0+C)^3 \Rightarrow C^3 = 0 \Rightarrow C = 0$$

soln particular $y = t^3$.

¿Cuándo un PVI tiene garantizada soln única?

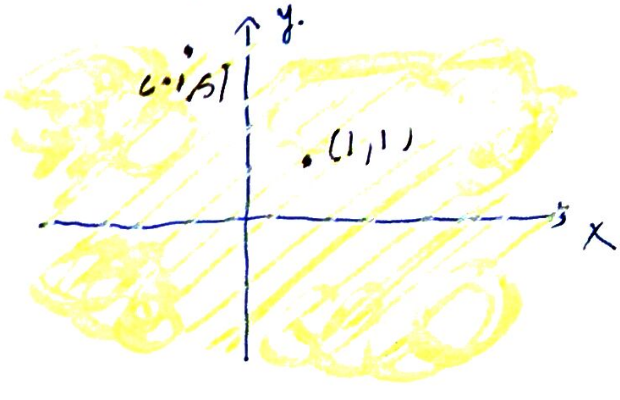
El PVI de 1er orden $y' = f(x, y)$ $y(x_0) = y_0$ tiene garantizada una soln. única si $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en (x_0, y_0)

Ejercicio 2: Encuentre y grafique los puntos (x, y) donde la soln única del PVI está garantizada.

a. $y' = y - y^2$

$f(x, y) = y - y^2$ es continua en $\mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - 2y$ es continua en $\mathbb{R}^2$ (plano)

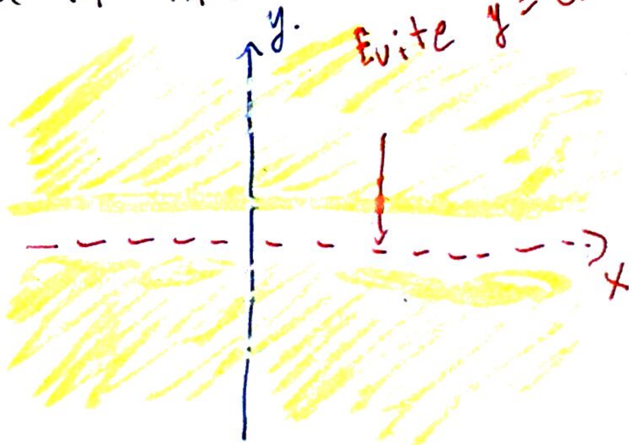


La solución única está garantizada en $-\infty < x < \infty$
$-\infty < y < \infty$

b. $y' = 3y^{2/3}$.

$f(x, y) = 3y^{2/3}$ es continua en $\mathbb{R}^2$.

PERO $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3 \cdot 2}{3} y^{-1/3} = \frac{2}{y^{1/3}}$



no es continua en $y = 0$.

No hay solución única garantizada si $y = 0$. (x, y) $y \neq 0$.

i. $y' = \dfrac{\sqrt{y^4-16}}{x}$ evite números negativos
evite denominador igual a cero.

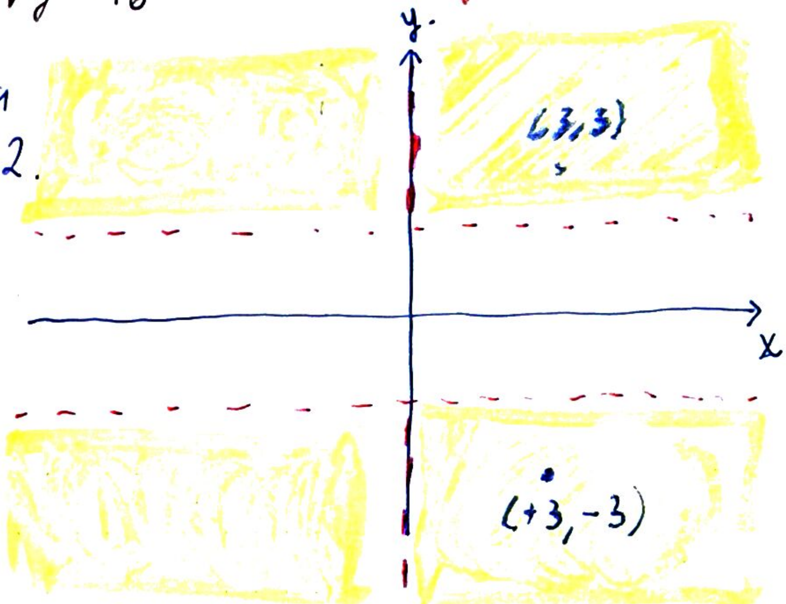
$f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y^4-16}}{x}$ no es continua en $x = 0$.
& $-2 < y < 2$.

$y^4 - 16 \geq 0$ $y^4 \geq 16 \Rightarrow -2 \leq y \leq 2.$

Adicionalmente $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x}(y^4-16)^{-1/2}\dfrac{1}{2}4y^3$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y^3}{x\sqrt{y^4-16}}$ se indefine en $y = \pm 2$.

Soln única NO está garantizada si $x = 0$ ó $-2 \leq y \leq 2$.



ED separable 1er orden.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$$

el lado derecho es un producto de dos funciones en x & en y.

ED lineal de 1er orden.

$$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)\,y = c(x)$$

las funciones coeficientes a, b, c sólo dependen de x.

$\frac{dy}{dx}$ & y sólo tienen potencias de uno.

ED exacta:

$$M\,dy + N\,dx = 0 \qquad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

Una ED de 1er orden $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$

se puede reescribir utilizando diferenciales

$$dy = f(x,y)\,dx \Rightarrow \boxed{dy - f(x,y)\,dx = 0}$$

Ejercicio 3: Determine si la ED dada es lineal o es separable.

a. $(y - x^2)\,dx + 4x\,dy = 0.$

$$(y - x^2) + 4x\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \frac{y - x^2}{-4x.}$$

$$4x\frac{dy}{dx} = x^2 - y.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y}{4x} = f(x)\,g(y)$$

no es separable por el término $x^2 - y$.

Pero si es lineal.

$$\underbrace{4x}_{a}\frac{dy}{dx} + y = x^2$$

$a(x) = 4x$
$b(x) = 1$
$c(x) = x^2.$

b. $y\,dx + (x + xy + e^y)\,dy = 0.$

$$y + \underbrace{(x + xy + e^y)}_{a(x)}\frac{dy}{dx} = 0. \qquad \text{No es lineal}$$

$$(x + xy + e^y)\frac{dy}{dx} = -y.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{(x + \underline{\underline{xy}} + \underline{\underline{e^y}}).}$$

no es separable.

c. $y\,dx + (xxye^y)\,dy = 0$

$x^2 y e^y \frac{dy}{dx} + y = 0.$ no es lineal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x^2 y e^y} = -\frac{1}{x^2 e^y} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{e^y}\right)$$

si es separable.

separe en términos de x & de y.

$$e^y\,dy = -\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\int e^y\,dy \overset{+C_1}{=} \int -x^{-2}\,dx. \quad +C_2.$$

$$e^y = +x^{-1} + C_2 - C_1$$

$$y = \ln\left(\underbrace{C_2 - C_1}_{C.} + \frac{1}{x}\right)$$ soln general.

d. $\frac{dy}{dx} = a(x)\,y.$ es separable.

$y' - a(x)\,y = 0.$ también es lineal

$y(t) = Ce^{\int a(x)\,dx}$ soln general.