NOM : ....
PRÉNOM : ....
CLASSE : ....

MATHÉMATIQUES
DEVOIR SURVEILLÉ 3

Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5		Note
/2	/2	/4.5	/8	/3.5		/20

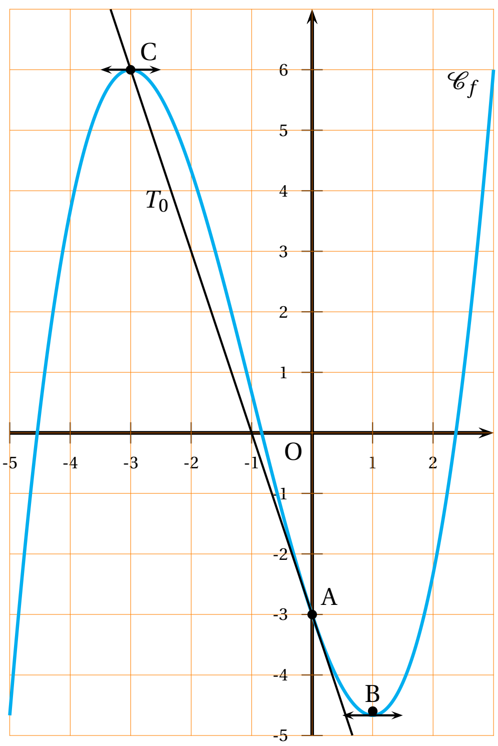
Le sujet est composé de 5 exercices indépendants.Vous devez traiter tous les exercices.
Pour chaque exercice, vous pouvez admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Vous êtes invités à faire figurer sur votre copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, que vous aurez développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.
⚠ Vous traiterez l'intégralité du sujet sur votre copie.

EXERCICE 1 : QCM **2 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, parmi lesquelles une seule est correcte.
Indiquez sur la copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte rapporte $0,5$ *point ; une absence de réponse ou une réponse fausse ne rapporte et n'enlève aucun point.*

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-5\ ;\ 3]$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.

Soit A le point de $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(0\ ;\ -3)$, B et C les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectivement égales à 1 et à -3. La tangente T_0 en A à $\mathscr{C}_f$ passe par le point C. Les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points B et C sont horizontales.



1. $f(1)$ est égal à :

   a. -3 **b.** $2,3$
   c. -1 **d.** $-4,6$

2. Le nombre dérivé en 1 de la fonction f est égal à :

   a. $-4,7$ **b.** -3
   c. 0 **d.** 1

3. Une équation de la tangente T_0 est :

   a. $y=-3x-3$ **b.** $y=-x-3$
   c. $y=-3x$ **d.** $y=-3$

4. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Sur l'intervalle $[-4\ ;\ -2]$, on peut affirmer que :

   a. f' est positive
   b. f' change de signe
   c. f' est partout nulle
   d. f' est négative

EXERCICE 2 : Restitution Organisée de Connaissances **2 points**

A et B sont deux évènements indépendants d'un univers Ω.
Que peut-on dire de A et $\overline{B}$? Le démontrer.

EXERCICE 3 : Les suites complexes... **4.5 points**

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lll} z_0 & = & 0 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 5 \end{array}\right.$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.
On considère le nombre complexe $z_{\mathrm{A}} = 4 + 2\mathrm{i}$ et A le point du plan d'affixe z_{A}.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_{\mathrm{A}}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times u_n$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4 - 2\mathrm{i}).$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

EXERCICE 4 : Epidémiologie **8 points**

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est «de type S» ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les évènements suivants :
S_n : «l'individu est de type S en semaine n» ;
M_n : « l'individu est malade en semaine n» ;
I_n : «l'individu est immunisé en semaine n».

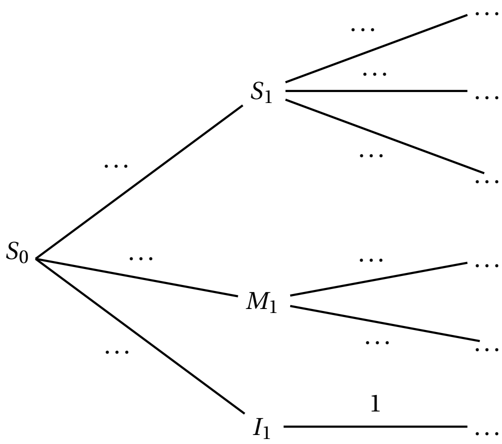
En semaine 0, tous les individus sont considérés «de type S», on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1\ ;\ P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2. Montrer que $P(I_2) = 0{,}2025$.

3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

PARTIE B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.
Pour tout entier naturel n, on : $u_n = P(S_n)$, $v_n = p(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des évènements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.

   On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$.

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,850 0	0,050 0	0,100 0
4	2	0,722 5	0,075 0	0,202 5
5	3	0,614 1	0,084 9	0,301 0
6	4	0,522 0	0,085 9	0,392 1
7	5	0,443 7	0,081 9	0,474 4
8	6	0,377 1	0,075 4	0,547 4
…	…	…	…	…
20	18	0,053 6	0,013 3	0,933 0
21	19	0,045 6	0,011 3	0,943 1
22	20	0,038 8	0,009 6	0,951 6

*Pour répondre aux questions **a.** et **b.** suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.*

   a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?

   b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'une certain rang N, appelé le «pic épidémique» : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.
   Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

3. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,85u_n$.
   En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right).$$

4. Calculer les limites de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n).
Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

EXERCICE 5 : Etude de fonction **3.5 points**

1. Soit f le fonction définie sur $\mathbb{R} - 3$ par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentation dans un repère orthonormé.

a. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?

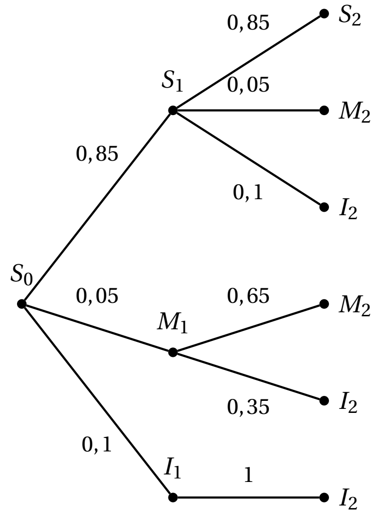
2. Déterminer : $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{5 + 5x - 5x^3}$

<table>
<tr><td></td><td>Exercice 1 : QCM</td><td>0/2</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>$f(1)=-4,6$ soit d. ; $f'(1)=0$ soit c. ; $y=-3x-3$ soit a. ; f' change de signe soit b.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Exercice 2 : Restitution Organisée de Connaissances</td><td>2/2</td></tr>
<tr><td></td><td>Pour A et B indépendants, il s'agit de montrer que $P\left(\overline{B}\cap A\right)=P\left(\overline{B}\right)\times P(A)$.

Notons préalablement que $P(A)=P\left(\overline{B}\cap A\right)+P(B\cap A)$ d'après la formule des probabilités totales donc $P\left(\overline{B}\cap A\right)=P(A)-P(B\cap A)$.
Comme A et B sont indépendants, on a $P(B\cap A)=P(B)\times P(A)$ donc, d'après ce qui précède, $P\left(\overline{B}\cap A\right)=P(A)-P(B\cap A)=P(A)-P(B)\times P(A)=(1-P(B))\times P(A)=P\left(\overline{B}\right)\times P(A)$: $\overline{A}$ et B sont bien indépendants.</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Exercice 3 : Les suites complexes...</td><td>4.5/4.5</td></tr>
<tr><td>1.a</td><td>Montrons que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{2}\mathrm{i}\times u_n$.
Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=z_{n+1}-z_{\mathrm{A}}=\frac{1}{2}\mathrm{i}\times z_n+5-(4+2\mathrm{i})=\frac{1}{2}\mathrm{i}\times z_n+1-2\mathrm{i}$.
Pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2}\mathrm{i}\times u_n=\frac{1}{2}\mathrm{i}(z_n-z_{\mathrm{A}})=\frac{1}{2}\mathrm{i}(z_n-4-2\mathrm{i})=\frac{1}{2}\mathrm{i}\times z_n+1-2\mathrm{i}$.
Et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{2}\mathrm{i}\times u_n$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1.b</td><td>On va démontrer par récurrence que, pour tout n, la propriété $\mathscr{P}_n$: $\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n(-4-2\mathrm{i})$ est vraie.

• Initialisation : $u_0=z_0-z_A=-z_A=-4-2\mathrm{i}$; pour $n=0$, $\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n(-4-2\mathrm{i})=\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^0(-4-2\mathrm{i})=-4-2\mathrm{i}$
Donc la propriété est vraie pour $n=0$.
• Hérédité : on suppose la propriété vraie au rang n , c'est-à-dire $\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n(-4-2\mathrm{i})$; on va la démontrer au rang $n+1$.
$u_{n+1}=\frac{1}{2}\mathrm{i}u_n=\frac{1}{2}\mathrm{i}\times\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n(-4-2\mathrm{i})=\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{n+1}(-4-2\mathrm{i})$
Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
• La propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

Pour tout entier naturel n, $u_n=\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n(-4-2\mathrm{i})$</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Démontrons que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.
Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{A}M_n}$ a pour affixe $u_n=z_n-z_{\mathrm{A}}$, et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{A}M_{n+4}}$ a pour affixe $u_{n+4}=z_{n+4}-z_{\mathrm{A}}$.
Mais d'après la question précédente, pour tout entier naturel n, $u_{n+4}=\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{n+4}(-4-2\mathrm{i})$ et $u_n=\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n(-4-2\mathrm{i})$.
On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_{n+4}=\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^4u_n$.
Mais $\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^4=\frac{1}{16}$
On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_{n+4}=\frac{1}{16}u_n$ et $\overrightarrow{\mathrm{A}M_{n+4}}=\frac{1}{16}\overrightarrow{\mathrm{A}M_n}$
Ce qui prouve que, pour tout entier naturel n, les vecteurs sont colinéaires et par conséquent les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Exercice 4 : Epidémiologie</td><td>8/8</td></tr>
</table>

1.	L'énoncé donne : $P_{S_n}(S_{n+1}) = 0,85$ $P_{S_n}(M_{n+1}) = 0,05$ $P_{S_n}(I_{n+1}) = 0,1$ $P_{S_n}(S_{n+1}) = 0,85$ $P_{M_n}(M_{n+1}) = 0,65$ $P_{M_n}(I_{n+1}) = 0,35$ $P_{I_n}(I_{n+1}) = 1$ 	1
2.	S_1 , M_1 et I_1 forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales on a $P(I_2) = P(I_2 \cap S_1) + P(I_2 \cap S_M) + P(I_2 \cap I_1)$ $= P_{S_1}(I_2) \times P(S_1) + P_{M_1}(I_2) \times P(M_1) + P_{I_1}(I_2) \times P(I_1)$ $= 0,1 \times 0,85 + 0,35 \times 0,05 + 1 \times 0,1$ $= 0,2025$	1.5
3.	On cherche $P_{I_2}(M_1)$ $P_{I_2}(M_1) = \dfrac{P(M_1 \cap I_2)}{P(I_2)} = \dfrac{P_{M_1}(I_2) \times P(M_1)}{0,2025} = \dfrac{0,0175}{0,2025} = \dfrac{7}{81} \approx 0,0864$	0.5
1.	S_n , M_n et I_n forment une partition de l'univers puisque qu'un individu est soit de type S soit malade soit immunisé à l'exclusion de toute autre possibilité donc $P(S_n) + P(M_n) + P(I_n) = 1$ on a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n + w_n = 1$	0.5
2.a	en C3 on a entré «=0,65*C2+0,05B2» car $v_{n+1} = 0,65 v_n + 0,05 u_n$	0.5
2.b	D'après le tableur, le «pic épidémique » est atteint lors de la 4^e semaine	0.5
3.a	$P(S_{n+1}) = P_{S_n}(S_{n+1}) \times P(S_n) = 0.85 u_n$ On a bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,85 u_n$ On en déduit que (u_n) est géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $u_0 = P(S_0) = 1$ on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0,85^n$	1
3.b	**initialisation** : pour $n = 0$ $v_0 = P(M_0) = 0$ et $\dfrac{1}{4}\left(0,85^0 - 0,65^0\right) = 0$ **hérédité** : Soit n un entier naturel tel que $v_n = \dfrac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right)$ alors $v_{n+1} = 0,65 v_n + 0,05 u_n$ $= 0,65 \times \left(\dfrac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right)\right) + 0,05 \times 0,85^n$ $= \left(0,65 \times \dfrac{1}{4} + 0,05\right) \times 0,85^n - \dfrac{1}{4} \times 0,65^{n+1}$ $= \left(0,65 \times \dfrac{1}{4} + 0,2 \times \dfrac{1}{4}\right) \times 0,85^n - \dfrac{1}{4} \times 0,65^{n+1}$ $= \dfrac{1}{4} \times 0,85^{n+1} - \dfrac{1}{4} \times 0,65^{n+1}$ $= \dfrac{1}{4} \times \left(0,85^{n+1} - 0,65^{n+1}\right)$ La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$ or elle est vérifiée à ce rang 0 donc par le principe de récurrence on vient de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right)$	1.5

<table>
<tr><td>4.b</td><td>donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,85^n = 0$ et de même,$1 < 0,65 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,65^n = 0$
On en déduit, par opération sur les limites que
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
de plus on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n + w_n = 1$
on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$
Cela signifie qu'à terme, l'épidémie sera éradiquée</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Exercice 5 : Etude de fonction</td><td>3.5/3.5</td></tr>
<tr><td>1.a</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2 = 2$; et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2$
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ 3 $+\infty$</td></tr><tr><td>$x-3$</td><td>$-$ 0 $+$</td></tr></table>$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to3} 2x+1 = 7\\ \lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} x-3 = 0^-\end{array}\right\}$ par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x) = -\infty$;et $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to3} 2x+1 = 7\\ \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} x-3 = 0^+\end{array}\right\}$ par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x) = +\infty$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1.b</td><td>Les droites d'équation $y = 2$ et $x = 3$ sont des asymptotes à la courbe C_f.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2.b</td><td>$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 5+5x-5x^3 = \lim\limits_{x\to-\infty} -5x^3 = +\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty\end{array}\right\}$ Par composée $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{5+5x-5x^3} = +\infty$</td><td>1</td></tr>
</table>