

## **CAPÍTULO 4.**

### **Realidad virtual y aumentada en la enseñanza de las matemáticas**

**José Efrén Marmolejo Valle**

<https://orcid.org/0000-0002-7191-4489>

**Felicidad del Socorro Bonilla Gómez**

<https://orcid.org/0000-0002-1835-6051>

**Pável Ernesto Alarcón Ávila**

<https://orcid.org/0000-0002-8651-893X>

**Víctor Campos Salgado**

<https://orcid.org/0000-0003-1369-0058>

#### **Resumen**

En las últimas décadas, las tecnologías emergentes nos brindan innumerables posibilidades para su incorporación en la educación, en sus diferentes niveles y modalidades, en el área de las matemáticas, planteando un cambio de paradigma en el proceso educativo y de los retos que deben afrontar. El presente capítulo forma parte de una investigación documental sobre la aplicación de la Realidad Virtual (RV) y Realidad Aumentada (RA), en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas a través de la recopilación y análisis de la literatura científica sobre las estrategias de diseño e implementación de la RV y RA en esta área del conocimiento. La metodología consistió en definir por medio de las palabras clave “Realidad virtual or realidad aumentada and matemáticas”, “Virtual reality or augmented reality and mathematics”. Los criterios de clasificación fueron: año, nivel educativo, área de matemáticas, país, tipo de realidad, tecnología utilizada e institución en la que se realizó el trabajo para la búsqueda de documentación en bases de datos científicas, con el objetivo de desarrollar e implementar estrategias de enseñanza de las matemáticas, que permita a los docentes y estudiantes de nivel básico la implementación de la realidad virtual y aumentada en su contexto educativo, identificando el software que permite su creación. Se concluye que aplicar realidades mixtas en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas

se realiza por iniciativa propia de los docentes probando diferentes herramientas para su creación, predominando el uso de la realidad aumentada ya que es más accesible su implementación.

**Palabras clave:** Realidad aumentada, realidad virtual, innovación educativa, tecnologías emergentes.

### **Abstract**

In recent decades, emerging technologies offer us innumerable possibilities for their incorporation into education at different levels and modalities in the area of mathematics, posing a paradigm shift in the educational process and the challenges they must face. This chapter is part of a documentary research on the application of Virtual Reality (VR) and Augmented Reality (AR), in the teaching-learning process of mathematics through the collection and analysis of the scientific literature on the strategies of design and implementation of VR and AR in the area of mathematics. The methodology consists of defining through the keywords "Virtual reality or augmented reality and mathematics" "Virtual reality or augmented reality and mathematics" and the classification criteria "year, educational level, area of mathematics, country, type of reality, technology used and institution" to search for documentation in scientific databases, with the aim of developing and implementing mathematics teaching strategies, which allows basic level teachers and students to implement virtual and augmented reality in their educational context, identifying the software that allows its creation. It is concluded that applying mixed realities in the teaching-learning process of mathematics is carried out on the teachers' own initiative, testing different tools for its creation, with the use of augmented reality prevailing since its implementation is more accessible.

**Key words:** Virtual reality, augmented reality, mathematics, educational innovation, Emerging technologies.

### **Introducción**

Durante los últimos años se han implementado diversas estrategias didácticas que permiten mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en la educación básica usando tecnologías. El rápido avance de las nuevas tecnologías abre un amplio campo de investigación de tecnologías emergentes a través de nuevos ambientes de aprendizaje y metodologías de enseñanza aprendizaje desarrollando habilidades que permitan formu-

lar conjeturas, compartirlas, analizarlas, corregirlas y mejorarlas, para que el alumno tenga un rol activo dentro del proceso de aprendizaje. Entre las tecnologías emergentes que recientemente se aplican en el contexto educativo con un verdadero potencial se encuentran la Realidad Virtual (RV) y la Realidad Aumentada (RA) (Cabrero-Almenara et al. 2021), pero para poder integrarlas proponemos que sea a través del modelo STEAM (Ciencia, tecnología, ingeniería, artes y matemáticas) por sus siglas en inglés, el cual se fortalece al pasar de una metodología educativa multidisciplinaria a una metodología educativa integral, gracias a la integración del arte para incorporar el pensamiento creativo y las artes aplicadas en situaciones reales. Esta metodología educativa busca un mejor incremento académico y personal en los estudiantes, desarrollando en ellos desde temprana edad habilidades sociales como colaboración, responsabilidad, comunicación, entre otras, así como destrezas individuales como creatividad, innovación, resolución de problemas y pensamiento crítico tal como lo describen Marmolejo Valle et al. (2019), de acuerdo con la Agenda digital para América Latina y el Caribe (*Digital Agenda for Latin America and the Caribbean* (eLAC2022), 2020) en la acción número 4 inclusión, competencias y habilidades digitales, tiene como objetivo 14

*Impulsar el desarrollo y la incorporación de habilidades digitales y competencias en ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas en los procesos de enseñanza- aprendizaje, mediante la actualización de los contenidos curriculares y el uso de recursos educativos digitales y estándares de competencia docente acordes a las capacidades que demandarán las actividades del futuro.*

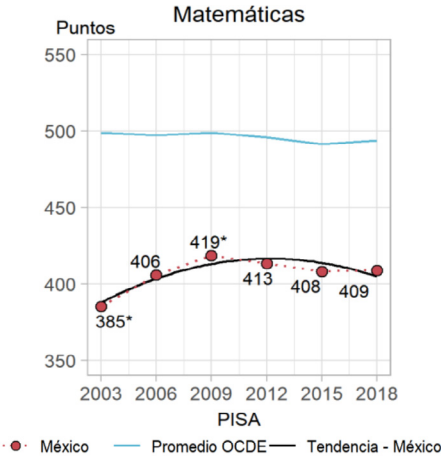
Por tal motivo el propósito es diseñar un laboratorio de realidades mixtas en matemáticas que permita a los docentes y estudiantes de nivel básico la implementación de la realidad virtual y aumentada en su contexto educativo, pero que también desarrollen la habilidad para crear sus propios proyectos. Este laboratorio es financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) a través del programa Ciencia de Frontera para la adquisición del equipo de laboratorios de realidades mixtas de idiomas, matemáticas y química, además de la integración del equipo interinstitucional conformado por expertos en contenidos, diseñadores instruccionales, programadores y diseñadores gráficos de la Universidad Autónoma de Guerrero, Universidad Autónoma de Nayarit y la Universidad Autónoma de Nuevo León.

### El rendimiento académico en matemáticas de los estudiantes en México

De acuerdo con evaluaciones nacionales e internacionales, en México hay un bajo rendimiento escolar, de acuerdo con los resultados del Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA por sus siglas en inglés) aplicado por la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE, 2019a), en la evaluación del año 2018 en la que participaron 79 países, México se encuentra en el lugar 57; en particular, en lo referido a la competencia matemática, que es reconocida como una de las competencias clave por la OCDE, se obtuvo un puntaje promedio nacional de 409 puntos. Esta competencia matemática permite desarrollar en el alumnado las habilidades necesarias para resolver situaciones interdisciplinarias en contextos reales (OECD, 2019b). De acuerdo con el siguiente gráfico, es evidente que México se encuentra 20% por debajo del promedio internacional. Cabe mencionar que el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE, es una encuesta trienal de alumnos de 15 años que evalúa hasta qué punto han adquirido los conocimientos y habilidades esenciales para la participación plena en la sociedad (PISA, 2018). En la Tabla 1 se presenta el puntaje de matemáticas que ha obtenido México del 2003 al 2018, de igual manera en la gráfica 1 se observa que de acuerdo al puntaje obtenido en cada evaluación no hemos llegado a la media internacional.

Año	Matemáticas
2003	385
2006	406
2009	419
2012	413
2015	408
2018	409

**Tabla 1.**  
Fuente: OCDE (2019).  
PISA 2018, Resultados.  
Nota para País: México.



**Gráfica 1.** Fuente: OCDE (2019). PISA 2018, Resultados. Nota para País: México.

La Secretaría de Educación Pública (SEP) en coordinación con la Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (MEJOR-EDU) y las autoridades educativas de las entidades federativas aplican la prueba Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA) a los alumnos del último grado de nivel primaria, secundaria y a los datos a los que nos referimos a continuación a un poco más de 18,000 escuelas de Educación Media Superior del país. PLANEA agrupa los resultados obtenidos por los estudiantes en cuatro niveles de logro que informan acerca de los aprendizajes clave que deben ser adquiridos por los estudiantes y en qué medida se han apropiado de ellos. Es importante señalar que estos niveles van del I al IV en orden progresivo, es decir, el nivel más bajo es el I y el más alto es el IV. Además, son acumulativos, ya que los estudiantes que se ubican en el nivel II cuentan con los aprendizajes del nivel previo (NI) y así sucesivamente.

A continuación, se presenta la descripción genérica de los niveles de logro:

**Nivel I:** Los estudiantes que se ubican en este nivel tienen un conocimiento insuficiente de los aprendizajes clave incluidos en los referentes curriculares. Esto refleja mayores dificultades para continuar con su trayectoria académica.

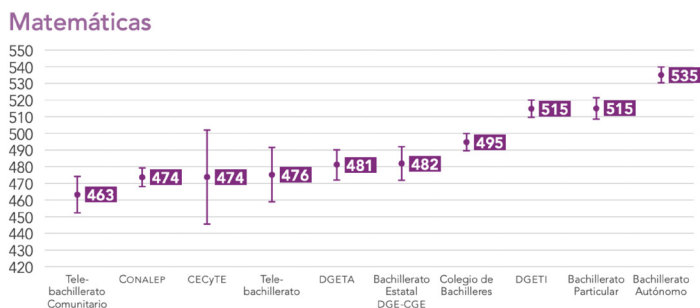
**Nivel II:** Los estudiantes que se ubican en este nivel tienen un conocimiento elemental de los aprendizajes clave incluidos en los referentes curriculares.

**Nivel III:** Los estudiantes que se ubican en este nivel tienen un conocimiento satisfactorio de los aprendizajes clave incluidos en los referentes curriculares.

**Nivel IV:** Los estudiantes que se ubican en este nivel tienen un conocimiento sobresaliente de los aprendizajes clave incluidos en los referentes curriculares (PLANEA, 2020).

De acuerdo con la Evaluación Nacional PLANEA 2017 aplicada a estudiantes de Educación Media Superior en Instituciones educativas autónomas, privadas, federales y estatales, de manera particular en el campo formativo de Matemáticas: seis de cada diez estudiantes se ubican en el nivel I (66%); casi dos de cada diez se ubican en el nivel II (23 %); en el nivel III, solo ocho de cada 100 estudiantes (8%); en el nivel IV, casi tres estudiantes de cada 100 (2.5%).

De acuerdo con los resultados nacionales 2017, en la Gráfica 2 se muestra el porcentaje promedio de los estudiantes por tipo de subsistema educativo, y se muestra que tres de los siete subsistemas analizados (autónomo, particular y DGETI) se encuentran por arriba del puntaje promedio nacional. El Bachillerato autónomo presenta el mayor puntaje promedio (535), mientras que el Telebachillerato Comunitario presenta el menor puntaje (463) (INEE, 2017).



**Gráfica 2..** Fuente INEE (2017) PLANEA Educación media superior.

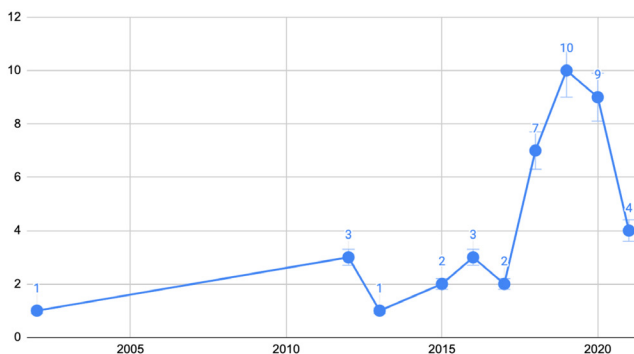
### Realidad Virtual y Realidad Aumentada en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas

De acuerdo con los datos anteriores, es de interés buscar estrategias que permitan mejorar el rendimiento académico en el dominio de las matemáticas, es importante mencionar que actualmente existe poca información documentada acerca de la implementación de la Realidad Aumentada o Virtual en el área de las matemáticas de los distintos niveles educativos. A continuación, se presentan las investigaciones más recientes sobre la implementación de Aplicaciones de RA en el área de las matemáticas; algunas de ellas están orientadas desde la planeación, diseño e implementación en un contexto determinado, otras investigaciones están enfocadas en el uso de aplicaciones ya existentes y son incorporadas en el proceso de su práctica docente en su contexto escolar.

Con el fin de identificar el estatus de la literatura existente sobre RA y RV para el aprendizaje de las matemáticas, se llevó a cabo una revisión sistemática de la literatura en bases de datos científicas por medio de la búsqueda de las siguientes palabras clave: “Realidad virtual or realidad aumentada and matemáticas” y “Virtual reality or augmented reality and mathematics”. Por su parte, los criterios de clasificación fueron: “año, nivel educativo, área de matemáticas, país, tipo de realidad, tecnología utilizada e institución”. Asimismo,

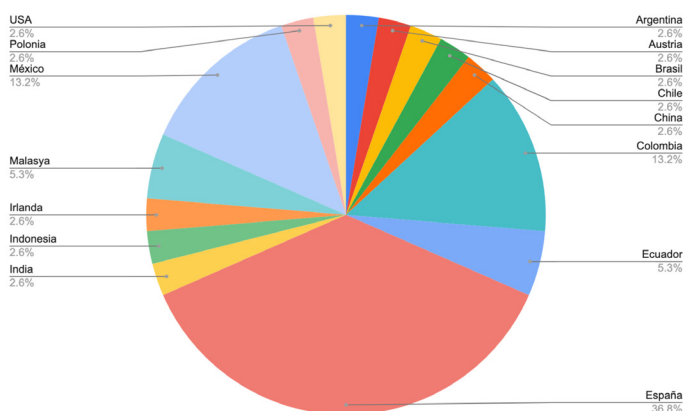
los criterios de inclusión para su selección fueron: Publicado en revistas académicas arbitradas y publicados entre 2002 a 2021.

Publicaciones entre 2002 - 2021



**Gráfica 3..** Fuente: Propia. *Publicación de artículos relacionados a RV y RA en matemáticas*

De acuerdo con la revisión de la literatura realizada, en la Gráfica 3 se observa un claro incremento en aplicaciones de la RV y RA en la enseñanza de las matemáticas durante los últimos años. Respecto al tipo de realidad utilizada en el contexto educativo predomina un 70% la RA, 28.8% RV y tan solo un 2.2% Realidad Mixta (RM). Esto debido a que la implementación de la RA es más fácil de implementar ya que el software para su creación no requiere de conocimientos de programación avanzada o hardware especializado, mientras que para la RV o RM se necesita de un equipo interdisciplinar de expertos en contenido, diseñadores gráficos, programadores, diseñadores instruccionales, software y hardware especializado para la creación de diseños 3D, editores visuales y de programación. Con relación a la productividad basada en el origen geográfico, se presenta la distribución de producción organizada por países.



**Gráfica 4.** Fuente: *Propia*. Porcentaje de publicación de artículos relacionados a RA y RV en matemáticas por País.

Se observa un notorio desequilibrio de las producciones científicas, ya que España lidera con un 38.8%, siguiendo México y Colombia con un 13.2%; llama la atención de que a pesar de haber mucha producción científica en Estados Unidos sobre la RV y RA hay muy poco aplicado a la enseñanza de las matemáticas en específico.

Las áreas de Matemáticas en las que se han aplicado la RV y RA, son las siguientes: Geometría con 51.9%, Cálculo con 18.5%, Aritmética con 11.1%, Álgebra con 7.4% y otro 7.4% no especifica en qué área de Matemáticas se enfocan, y por último, Estadística con el 3.7%.

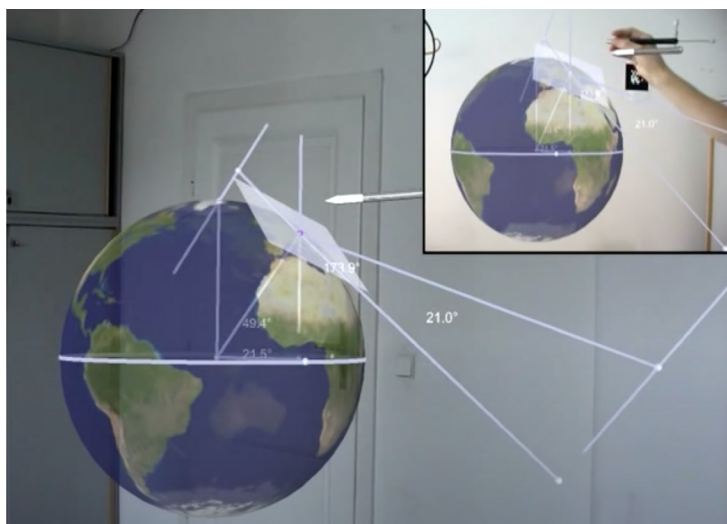
De acuerdo con la aplicación de la RV y RA en los distintos niveles educativos, el nivel superior es el predominante con un 48.3%, en seguida el nivel básico incluyendo nivel primaria y secundaria en un 44.8% de aplicación de estas tecnologías mientras que en el nivel medio superior solo hay un 6.9%.

En la investigación científica consultada para el diseño, elaboración y/o implementación de recursos de RA y RV, se aprecia que en un 57.7% se hace uso de software libre, mientras que un 43.3% hacen uso de software comercial; el software comercial que más se utiliza son: Aumentaty, NeoTrie, Second Life y Unity3D y de software libre son: Blender, Geogebra y Vuforia en su versión gratuita. A continuación, seleccionamos cuatro experiencias educativas en las que se aplica la RV y RA para la enseñanza de las matemáticas.

Una de las primeras herramientas documentadas es el constructor 3D, diseñado por Hannes Kaufmann, 2003, en la Universidad de Tecnología de Viena, es un constructor de geometría tridimensional. Construct3D promueve y apoya el comportamiento



exploratorio a través de la geometría dinámica, es decir, el usuario puede modificar continuamente todas las entidades geométricas y las entidades dependientes conservan sus relaciones geométricas. Por ejemplo, mover un punto que se encuentra en una esfera da como resultado el cambio del radio de la esfera. Todos los pasos de construcción se llevan a cabo mediante manipulación directa en 3D utilizando un lápiz óptico con seis grados de libertad. La RA permite que los usuarios vean su propio cuerpo y mano, así como los efectos de sus acciones mientras trabajan, por lo que el proceso de construcción involucra físicamente a los estudiantes y se asemeja más a la artesanía que al funcionamiento tradicional de la computadora (Kaufmann, 2002).



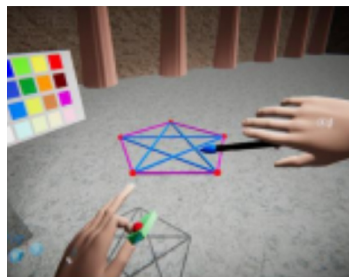
**Figura 1.** Fuente Kaufmann(2002) Construct3D-Overview

El uso de herramientas de autor también favorece el proceso de enseñanza aprendizaje en el área de matemáticas. A continuación, se presenta el trabajo de Diego Cangas, Grażyna Morga y José L. Rodríguez, quienes realizaron una prueba piloto en una escuela en Żernica, Polonia a niños de 11 a 14 años haciendo uso de NeoTrie; un software de realidad virtual que permite al usuario crear, manipular e interactuar con objetos geométricos y modelos 3D. El estudio se realizó de la manera siguiente. Las clases se han realizado de marzo a junio de 2018, en tres clases de niños de tres grupos de edad, a saber: 11, 12 y 14 años se llevaron a cabo 25 lecciones, basadas

en el plan de estudios básico de matemáticas. Se implementaron los temas referentes a ángulos, polígonos, prismas y pirámides, de acuerdo con este plan de estudios. El uso de NeoTrie ha facilitado la eliminación de algunos de los problemas a los que se enfrentan los alumnos en las primeras etapas del aprendizaje de geometría. Los niños a menudo tienen problemas para comprender el concepto de área de una figura y confunden el área con el perímetro y viceversa (Cangas et al., 2019).



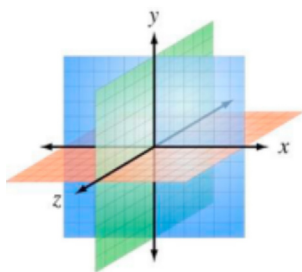
**Figura 2.** Fuente. (Cangas, Morgan y Rodríguez, 2019) Niños interactuando con NeoTrie.



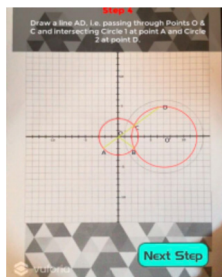
**Figura 3.** Fuente. (Cangas, Morgan y Rodríguez, 2019) Niños interactuando con NEOTrie.

ARLE es una herramienta de RA sobre RV desarrollada por Shubham Gargish, Archana Mantri, Deepti Prit Kaur de la Chitkara University Institute of Engineering and Technology de la India. El proyecto está diseñado en Vuforia, Unity 3D. La aplicación ha sido diseñada para hacer que la visualización y la interacción sea en tiempo real, ya que los estudiantes enfrentan dificultades al imaginar, visualizar y resolver problemas. La aplicación cuenta con un kit de marcadores para visualizar el entorno virtual.

El trabajo propuesto pretende brindar una experiencia inmersiva y visualización en el proceso de aprendizaje y enseñanza que no solo debe beneficiar a los estudiantes sino también a los docentes. Para comprender las vistas geométricas, se ha diseñado una aplicación de geometría móvil en la que los estudiantes pueden obtener asistencia personal y una mejor imaginación desde diferentes ángulos (Gargish et al., 2019).



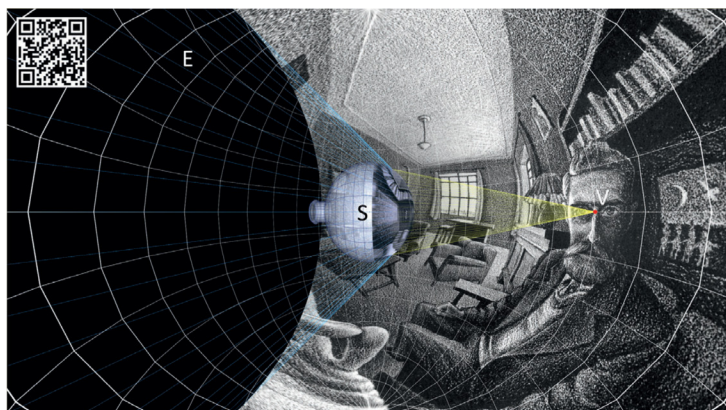
**Figura 4.** Fuente. (Gargrish et al., 2019) Trazado de coordenadas y trazado de problema numérico.



**Figura 5.** Fuente. (Gargrish et al., 2019). Captura del Juego Arle.

En la fase de desarrollo se realiza la producción de un producto final y se realiza la evaluación con el fin de depurarlo, se hacen modificaciones si es necesario. Además, el diseñador instruccional debe desarrollar el kit didáctico de acuerdo con las características de la fase de diseño, aspectos de seguridad, costos y materiales. Estos aspectos deben tenerse en cuenta para crear un kit didáctico atractivo, fácil de llevar y fácil de usar.

Pedro M. Cabezos Bernal, Juan J. Cisneros Vivó realizaron en Realidad Virtual con MatLab el Autorretrato de Escher titulado: Mano con esfera reflejante. Se trata de la representación de un espacio real que, aunque distorsionado por el efecto del globo reflectante, abarca la práctica totalidad de la escena, a excepción de la pequeña área oculta tras la superficie reflejante (Cabezos Bernal y Cisneros Vivó, 2018).



**Figura 6.** Fuente (Bernall, 2018) Visualización inmersiva concéntrica al elipsoide.

El resultado de la investigación nos permite contemplar esta obra de Escher desde un nuevo punto de vista y de forma totalmente inmersiva e interactiva, reafirmando todavía más si cabe el increíble talento del artista al comprobar la exactitud y meticulosidad de su trabajo (Bernal, 2018).

## **Conclusiones**

De acuerdo con las investigaciones analizadas en diversos niveles educativos, la aplicación de la RA y RV predomina el nivel superior y el 51.9% corresponde a estrategias de enseñanza aprendizaje en el área de la Geometría, pero estos se encuentran en una etapa incipiente y expansiva, predominando la implementación de la RA en relación a la RV, se observa una tendencia en pleno crecimiento, por lo que es importante realizar proyectos que permitan la incorporación de las realidades mixtas en el proceso de enseñanza aprendizaje en el área de las matemáticas en los distintos niveles educativos de acuerdo al contexto y grado de complejidad, de esta manera a través de la inclusión de tecnologías en el contexto escolar y metodologías activas de RM, RV y RA se fomenta el interés y motivación de los estudiantes para experimentar de una forma visual, interactiva, individual o grupal, a base de retos y niveles de ciertos temas que solo podíamos entender de una forma abstracta de acuerdo a la explicación del docente y materiales disponibles en el aula y percepción individual como estudiante. Es necesario contar con mayor investigación en esta estrategia de aprendizaje que se encuentra en pleno desarrollo, ya que las instituciones educativas debemos de cambiar los modelos educativos tradicionales, haciendo uso del enfoque STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) y las tecnologías emergentes para desarrollar en los estudiantes destrezas y habilidades que les permitan la resolución de problemas complejos, trabajo colaborativo, comunicación, pensamiento crítico y pensamiento computacional, permitiéndoles ser protagonistas de la construcción de su propio conocimiento, así como la necesidad de diseñar cursos y talleres de formación continua para los docentes interesados en desarrollar prácticas docentes innovadoras. De acuerdo a los resultados, las estrategias de RV y RA son más interactivas y generan mayor interés por el aprendizaje de las matemáticas en comparación con los métodos tradicionales de enseñanza, dependiendo en todo momento de la estrategia didáctica y adecuada selección de actividades integrales en el currículum y contexto escolar.

## Referencias

- Cabero-Almenara, J. 1., Barroso-Osuna, J. 2., & Martínez-Roig, A. 3. (2021). Mixed, Augmented and Virtual, Reality Applied to the Teaching of Mathematics for Architects. *Appl. Sci*, 11(15). 10.3390/app11157125
- Cabezos Bernal, P. M. 1., & Cisneros Vivó, J. J. 2. (2018). La habitación de Escher. *EGA: revista de expresión gráfica arquitectónica*, 23(32), 122-131. <https://doi.org/10.4995/ega>
- CANGAS, D. 1., MORGA, G. 2., & RODRÍGUEZ, J. L. 3. (2019). Geometry teaching experience in virtual reality wi NeoTrie VR. *Psychology, Society, & Education*, 11(3), 355-366. <http://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/7585/2270-8301-1-PB.pdf?sequence=1>
- Digital Agenda for Latin America and the Caribbean (eLAC2022) (1st ed., Vol. 1). (2020). CEPAL. <https://www.cepal.org/es/publicaciones/46439-agenda-digital-america-latina-caribe-elac2022>
- Gargrish, S. 1., Mantri, A. 2., & Prit Kaur, D. 3. (2019). Augmented Reality-Based Learning Environment to Enhance Teaching-Learning. *Procedia Computer Science*, 172, 1039-1046. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2020.05.152>
- INEE. (2017). *PLANEA Resultados nacionales 2017*. PLANEA. Retrieved 2021, from <http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2017/ResultadosNacionalesPlaneaMS2017.PDF>
- Kaufmann, H. (2002, Diciembre). Construct3D: An Augmented Reality Application for Mathematics and Geometry Education. *Association for Computing Machinery*, 656-657. <https://doi.org/10.1145/641007.641140>
- Marmolejo Valle, J. E., Campos Salgado, V., & Alarcón Ávila, P. E. (2019). *Desarrollo de estrategias didácticas en el aula a través del pensamiento computacional. Makey Makey + Scratch 2019* [Proyecto realizado con financiamiento de la Secretaría de Educación Pública-Subsecretaría de Educación Superior-Dirección General de Educación Superior Universitaria.]. COCYTIEG.
- OECD (Ed.). (2019b). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. PISA, OECD (1st ed., Vol. 1). OECD. <https://doi.org/10.1787/b25efab8-en>
- PLANEA. (2020). *PLANEA SEP*. Plan para la evaluación de los aprendizajes. Retrieved 2021, from <http://planea.sep.gob.mx/ms/>
- Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA). (2018). OCDE. Retrieved 2021, from [https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018\\_CN\\_MEX\\_Spanish.pdf](https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_MEX_Spanish.pdf)