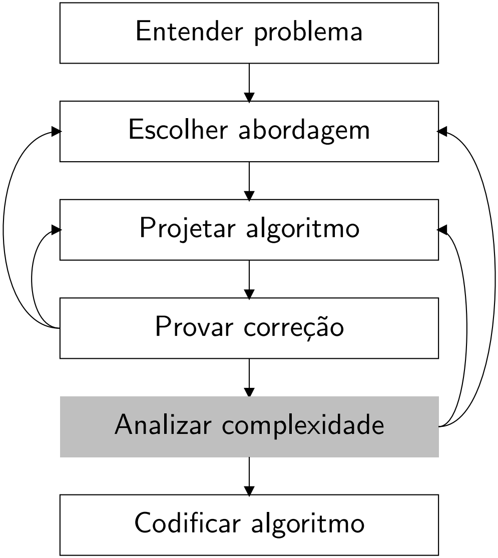
Aula 05: Análise matemática de algoritmos não recursivos

David Déharbe
Programa de Pós-graduação em Sistemas e Computação
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Informática e Matemáica Aplicada

Plano da aula

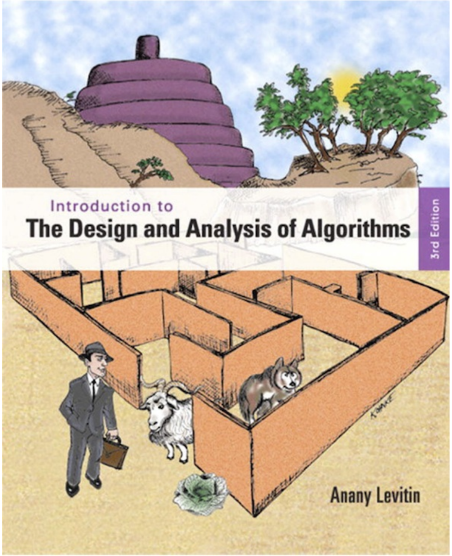
Contexto


Entender problema
Escolher abordagem
Projetar algoritmo
Provar correção
Analizar complexidade
Codificar algoritmo

Estrutura da apresentação

1. arcabouço teórico;
2. melhor caso, pior caso, caso médio;
3. notações asintóticas; O, Ω, Θ;
4. análise de algoritmos não recursivos;
5. análise de algoritmos recursivos.

Bibliografia usada



(seção 2.3)

Exemplo

Exemplo (Busca do maior elemento em uma sequência)

```
MAX-ITEM(A)
max = A[1]
for i = 2 to length[A]
    if A[i] > max
        max = A[i]
return max
```

Exemplo

```
MAX-ITEM(A)
max = A[1]
for i = 2 to length[A]
    if A[i] > max
        max = A[i]
return max
```

- Tamanho da entrada: $length[A]$, digamos n.
- Operações mais executadas: corpo do **for**.
  - A comparação é executada mais vezes que a atribuição
  - A comparação $A[i] > max$ é a *operação básica*
  - O número de comparações executadas é o mesmo para qualquer entrada de tamanho n
    $\Longrightarrow$ Não precisa estudar pior caso, caso médio, nem melhor caso.

Exemplo

```
MAX-ITEM(A)
max = A[1]
for i = 2 to length[A]
    if A[i] > max
        max = A[i]
return max
```

Seja $C(n)$ o número de comparações realizadas.

- A cada iteração, é realizada uma (1) comparação.
- $C(n) = \sum_{i=2}^{n} 1 = n - 2 + 1 = n - 1 \in \Theta(n)$.
- (resultado esperado)

Estratégia para analizar complexidade de algoritmos não recursivos

1. Escolher um parâmetro (ou vários) para indicar o tamanho da entrada
2. Identificar a operação básica do algoritmo
3. Verificar se o número de vezes que a operação básica é executada depende apenas do tamanho da entrada
   $\Rightarrow$ Caso contrário, o pior caso, o caso médio e o melhor caso devem ser aferidos individualmente
4. Escreva um somatório que expressa quantas vezes a operação básica é executada
5. Usando as leis da aritmética, encontre uma formulação que só depende de n, ou pelo menos o seu crescimento asintótico.

Propriedades importantes

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=L}^{U} (c \times a_i) &= c \times \left(\sum_{i=L}^{U} a_i \right) \\
\sum_{i=L}^{U} (a_i \pm b_i) &= \left(\sum_{i=L}^{U} a_i \right) \pm \left(\sum_{i=L}^{U} b_i \right) \\
\sum_{i=L}^{U} 1 &= U - L + 1 \\
\sum_{i=1}^{n} i &= \frac{n \times (n+1)}{2} \approx \frac{1}{2} \times n^2 \in \Theta(n^2)
\end{aligned}
$$

PPgSC

Um segundo exemplo

Exemplo (Teste de unicidade dos elementos)

```
UNICITY-ELEMS(A)
for i = 1 to length[A] − 1
    for j = i + 1 to length[A]
        if A[i] = A[j]
            return FALSE
return TRUE
```

Aplicação da estratégia

```
UNICITY-ELEMS(A)
for i = 1 to length[A] − 1
    for j = i + 1 to length[A]
        if A[i] = A[j]
            return FALSE
return TRUE
```

1. O tamanho da entrada é o número de elementos de A, digamos n.
2. O laço mais interno contem um teste de igualdade. A operação básica é o *teste de igualdade*.
3. O número de testes efetuados não depende só de n, mas também do conteúdo de A. Mas precisamente se tem elementos iguais, e quais posições eles ocupam.
   Vamos nos interessar à complexidade no pior caso: $C_{pior}(n)$.

Aplicação da estratégia

```
UNICITY-ELEMS(A)
for i = 1 to length[A] − 1
    for j = i + 1 to length[A]
        if A[i] = A[j]
            return FALSE
return TRUE
```

O pior caso é quando o número de comparações é o maior possível.

1. ou todos os elementos são distintos dois a dois;
2. ou apenas os elementos nas últimas duas posições são iguais.

$$C_{pior}(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} 1$$

PPgSC

Aplicação da estratégia

```
UNICITY-ELEMS(A)
for i = 1 to length[A] - 1
    for j = i + 1 to length[A]
        if A[i] = A[j]
            return FALSE
return TRUE
```

$$
\begin{aligned}
C_{pior}(n) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n-1} n - (i+1) + 1 = \sum_{i=1}^{n-1} n - i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} n - \sum_{i=1}^{n-1} i = (n-1) \times n - \frac{(n-1) \times n}{2} \\
&= \frac{(n-1) \times n}{2} \approx \frac{1}{2} \times n^2 \in \Theta(n^2)
\end{aligned}
$$

Um terceiro exemplo

Exemplo

Multiplicação de duas matrizes quadradas

MULT-MATRIX(A, B, C)

```
for i = 1 to NbLines[A]
    for j = 1 to NbCols[B]
        C[i, j] = 0
        for k = 1 to NbCols[A]
            C[i, j] = C[i, j] + A[i, k] × B[k, j]
```

Aplicação da estratégia

MULT-MATRIX(A, B, C)

```
for i = 1 to NbLines[A]
    for j = 1 to NbCols[B]
        C[i, j] = 0
        for k = 1 to NbCols[A]
            C[i, j] = C[i, j] + A[i, k] × B[k, j]
```

- Tamanho (digamos n): ordem das matrizes A, B, C.
  Obs. número de elementos m das matrizes é tal que $m = n^2$.
- Operação básica (laço mais aninhado): 1 adição + 1 multiplicação.

$$M(n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} n = \sum_{i=1}^{n} n^2 = n^3.$$

Um exemplo não tão simples

Exemplo

Tamanho da representação binária de um inteiro

Aplicação da estratégia

- A entrada é um inteiro n. O tamanho da entrada é o próprio n.
- A operação executada mais vezes é a comparação $n > 1$. É igual ao número de vezes que o laço é executado mais um.
- n apenas recebe alguns valores da faixa formada pelos seus valores inicial e final.
- O valor de n é dividido a cada iteração.
- O número de vezes qua operação básica é executada é $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.
- Utilizaremos uma relação de recorrência para mostrar isto.

Variação de amostra

Exercício (Cálculo de variação de amostra)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}(x_1 \cdots x_n) &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \text{ onde } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2/n}{n-1}.
\end{aligned}
$$

Encontre e compare a quantidade de cada tipo de operação para calcular a variação de amostra com cada uma das fórmulas.

PPgSC

Análise de algoritmo 1

Exercício

MYSTERY-1(n)

```
s = 0
for i = 1 to n
        s = s + i × i
return s
```

1. *O que este algoritmo calcula?*
2. *Qual a sua operação básica? Quantas vezes é executada?*
3. *Qual a classe de complexidade do algoritmo?*
4. *Existe um algoritmo mais eficiente? Se existir, qual a classe de complexidade dele? Senão, porque?*

Análise de algoritmo 2

Exercício

MYSTERY-2(A)

$m_1 = A[1]$, $m_2 = A[1]$
for $i = 2$ **to** $length[A]$
    if $A[i] < m_1$ **then** $m_1 = A[i]$
    if $A[i] > m_2$ **then** $m_2 = A[i]$
return $m_2 - m_1$

1. *O que este algoritmo calcula?*
2. *Qual a sua operação básica? Quantas vezes é executada?*
3. *Qual a classe de complexidade do algoritmo?*
4. *Existe um algoritmo mais eficiente? Se existir, qual a classe de complexidade dele? Senão, porque?*

Análise de algoritmo 3

Exercício

```
MYSTERY-3(A)
for i = 1 to NbLines[A] − 1
    for j = i + 1 to NbLines[A]
        if A[i, j] ≠ A[j, i] then return FALSE
return TRUE
```

1. *O que este algoritmo calcula?*
2. *Qual a sua operação básica? Quantas vezes é executada?*
3. *Qual a classe de complexidade do algoritmo?*
4. *Existe um algoritmo mais eficiente? Se existir, qual a classe de complexidade dele? Senão, porque?*