Tarea 2: Ejercicios de la Unidad 01

1. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por $p*$.

Sabemos que la formula del error absoluto es |p - p*| y la del error relativo es $\frac{|p-p*|}{|p|}$, fórmulas que se usaran para la resolución de los siguientes literales además que las respuestas están truncadas a 6 decimales.

a. $p = \pi, p* = 22/7$

Usando la calculadora tenemos que:

El error absoluto es $| \pi - 22/7 | = 1.264489\text{x}10^{-3}$

El error relativo es $\frac{|\pi-22/7|}{|\pi|} = 4.024994\text{x}10^{-4}$

b. $p = \pi, p* = 3.1416$

Usando la calculadora tenemos que:

El error absoluto es $| \pi - 3.1416 | = 7.346410\text{x}10^{-6}$

El error relativo es $\frac{|\pi-3,1416|}{|\pi|} = 2.338434\text{x}10^{-6}$

c. $p = \text{e}, p* = 2.718$

Usando la calculadora tenemos que:

El error absoluto es $| e - 2.718 | = 2.818284\text{x}10^{-4}$

El error relativo es $\frac{|e-2.718|}{|e|} = 1.036788\text{x}10^{-4}$

d. $p = \sqrt{2}, p* = 1.414$

Usando la calculadora tenemos que:

El error absoluto es $| \sqrt{2} - 1.414 | = 0.273213$

El error relativo es $\frac{|\sqrt{2}-1.414|}{|\sqrt{2}|} = 1.510114\text{x}10^{-4}$

2. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por $p*$

Para este ejercicio se truncarán los decimales a 6 en la respuesta de cada literal

a. a. $p = e^{10}, p* = 22000$

Usando la calculadora tenemos que:

El error absoluto es $| e^{10} - 22000 | = 26.465794$

El error relativo es $\frac{|e\text{^}10 \ -22000|}{|\pi|} = 1.201545\text{x}10^{-3}$

b. $p = 10^{\pi}$, $p* = 1400$

Usando la calculadora tenemos que:

El error absoluto es | 10^{π} – 1400 | = 14.544268

El error relativo es $\frac{|10\text{^}\ \pi - 22000|}{|\pi|}$ = 0.0104978

Para este literal se toma en cuenta 6 cifras significativas para el truncamiento de cifras.

c. $p = 8!$, $p* = 39900$

Usando la calculadora tenemos que:

El error absoluto es | 8! – 39900 | = 420

El error relativo es $\frac{|8! - 39900|}{|8!|}$ = 0.0104166

Para este literal se toma en cuenta 6 cifras significativas para el truncamiento de cifras.

d. $p = 9!$, $p* = \sqrt{18\pi}(9/e)^9$

Usando la calculadora tenemos que:

El error absoluto es | $9! - \sqrt{18\pi}(9/e)^9$ | = 3343.127158

El error relativo es $\frac{|9! - \sqrt{18\varpi}(9/e)\text{^}9\ |}{|9!|}$ = $9.212762\text{x}10^{-3}$

3. **Encuentre el intervalo más largo en el que se debe encontrar $p*$ para aproximarse a p con error relativo máximo de 10^{-4} para cada valor de p.**

Partiendo que la formula del error relativo es $\frac{|p-p*|}{|p|}$ tenemos que el error máximo es $\frac{|p-p*|}{|p|} < 10^{-4}$ entonces tenemos:

a. π

Sustituyendo el valor de p por el valor de π

$\frac{|p-p*|}{|p|} < 10^{-4} = \cancel{\pi}\ \frac{|\pi-p*|}{\cancel{|\pi|}} < 10^{-4}\pi = |\pi - p*| < 10^{-4}\pi \leftarrow$ Este paso nos indica cuanto puede variar p* y alcanzar máximo de error de 10^{-4}

Construcción del intervalo: Tomamos al valor de π (valor medio de referencia) y lo sumamos y restamos para hallar su intervalo permitido.

P*= [$\pi - \pi\text{x}10^{-4}$; $\pi + \pi\text{x}10^{-4}$]

P* є [3.141278494 ; 3.141906813]

b. e

Sustituyendo el valor de p por el valor de e

$\frac{|p-p*|}{|p|} < 10^{-4} = \cancel{e}\,\frac{|e-p*|}{\cancel{|e|}} < 10^{-4}\, e$ ← Este paso nos indica el rango de variación de p*

Construcción del intervalo: Tomamos al valor de e (valor medio de referencia) y lo sumamos y restamos para hallar su intervalo permitido.

P*= [e – ex10^{-4} ; e + ex10^{-4}]

P* ϵ [2.71801 ; 2.718553] ← Truncamos el valor de la respuesta a 6 decimales.

c. $\sqrt{2}$

Sustituyendo el valor de p por el valor de $\sqrt{2}$

$\frac{|p-p*|}{|p|} < 10^{-4} = \cancel{\sqrt{2}}\,\frac{|\sqrt{2}-p*|}{\cancel{|\sqrt{2}|}} < 10^{-4}\, \sqrt{2}$ ← Este paso nos indica el rango de variación de p*

Construcción del intervalo: Tomamos al valor de $\sqrt{2}$ (valor medio de referencia) y lo sumamos y restamos para hallar su intervalo permitido.

P*= [$\sqrt{2} - \sqrt{2}$x10^{-4} ; $\sqrt{2} + \sqrt{2}$x10^{-4}]

P* ϵ [1.414072 ; 1.414354]

d. $\sqrt[3]{7}$

Sustituyendo el valor de p por el valor de $\sqrt[3]{7}$

$\frac{|p-p*|}{|p|} < 10^{-4} = \cancel{\sqrt[3]{7}}\,\frac{|\sqrt[3]{7}-p*|}{\cancel{|\sqrt[3]{7}|}} < 10^{-4}\, \sqrt[3]{7}$ ← Este paso nos indica el rango de variación de p*

Construcción del intervalo: Tomamos al valor de $\sqrt[3]{7}$ (valor medio de referencia) y lo sumamos y restamos para hallar su intervalo permitido.

P*= [$\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{7}x10^{-4}$; $\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{7}x10^{-4}$]

P* ϵ [1.912739 ; 1.913122]

4. **Use la aritmética de redondeo de tres dígitos para realizar lo siguiente. Calcule los errores absoluto y relative con el valor exacto determinado para por lo menos cinco dígitos.**

a. $\frac{\frac{13}{14}-\frac{5}{7}}{2e-5.4}$ **p=** 5.860620418

$\frac{13}{14} = 0.9285714286$

$\frac{5}{7} = 0.7142857143$

2e= 5.436563657

Redondeado a tres dígitos tenemos:

P*= $\frac{0.929-0.714}{5.44-5.4} = 5.375$

Cálculo del error:

Error Absoluto: | p - p* |= |5.86062 - 5.375| = 0.48562

Error Relativo: $\frac{|p-p*|}{|p|} = \frac{|5.86062 - 5.37|}{|5.86062|} = 0.082862$ → 8.28 % de error

b. $\mathbf{-10\pi + 6e - {}^{3}/_{61}}$ **p=** -15.15541589

$-10\pi = -31.41592654$

$6e = 16.30969097$

$^{3}/_{61} = 0.04918032787$

Redondeado a tres dígitos tenemos:

P*= -31.4 + 16.3 - 0.0492 = -15.1492

Cálculo del error:

Error Absoluto: | p - p* |= |-15.15541 - (-15.1492) | = 0.000621

Error Relativo: $\frac{|p-p*|}{|p|} = \frac{|15.15541 \ -15.1492|}{|15.15541|} = 0.000040975$ → 0.0409% de error

c. $\left(\frac{2}{9}\right)*\left(\frac{9}{11}\right)$ **p=** 0.1818181818

2/9= 0.2222222222

$9/11 = 0.818181$

Redondeado a tres dígitos tenemos:

P*= 0.222 * 0.818 = 0.181596

Cálculo del error:

Error Absoluto: | p - p* |= |0.18181 - 0.181596 | = 0.0000214

Error Relativo: $\frac{|p-p*|}{|p|} = \frac{|0.18181 \ -0.181596|}{|0.18181|} = 0.000177$ → 0.11% de error

d. $\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}$ p= 0.0023958

Siguiendo el mismo proceso de los problemas anteriores tenemos:

P*= 0.00240

Error Absoluto: |p - p*|= 0.042

Error relativo$\frac{|p-p*|}{|p|} = 0.0001753$ → 0.017% de error

5. **Los primeros tres términos diferentes a cero de la serie de Maclaurin para la función arcotangente son: x - (1/3) +(1/5) x^5 . Calcule los errores absoluto y relativo en las siguientes aproximaciones de π mediante el polinomio en lugar del arcotangente:**

a. 4[arcotan (1/2)+ arcotan (1/3)] **p*=** 3.1455766132

Error Absoluto: $|\pi - p^*| = 3.98\text{x}10^{-3}$

Error relativo: $\frac{|p-p*|}{|p|} = \frac{|\ \pi - 3.1455766132|}{|\pi|} = 1.27\text{x}10^{-3}$

b. 16 arcotan (1/2) -4 arcotan (1/239) $p^*= 3.141621029$

Error Absoluto: $|\pi - p^*|= 2.83\text{x}10^{-5}$

Error relativo: $\frac{|p-p*|}{|p|} = \frac{|\ \pi-p*|}{|\ \pi|} = 9.03\text{x}10^{-6}$

6. Calcule los errores absoluto y relativo en la siguiente aproximación de e:

a. $\sum_{n=0}^{5}\left(\frac{1}{n!}\right)$ **P*=** 2.71666667

Error Absoluto: $|e- p^*| =1.615\text{x}10^{-3}$

Error relativo: $\frac{|e-p*|}{|e|} = 5.94\text{x}10^{-4}$

b. $\sum_{n=0}^{10}\left(\frac{1}{n!}\right)$ **P*=** 2.718281801

Error Absoluto: $|e- p^*| = 2.731\text{x}10^{-8}$

Error relativo: $\frac{|e-p*|}{|p|} = 1.004\ \text{x}10^{-8}$

7. Suponga que dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) se encuentran en línea recta con $y_1 \neq y_0$. Existen dos fórmulas para encontrar la intersección x de la línea:

Use los datos $(x_0, y_0) = (1.31, 3.24)$ y $(x_1, y_1) = (1.93, 5.\ 76)$ y la aritmética de redondeo de tres dígitos para calcular la intersección con x de ambas maneras. ¿Cuál método es mejor y por qué?

a. $x = \frac{x0y1-x1y0}{y1-y0} = 0.5128571429$

b. $x = x_0 - \frac{(x1-x0)y0}{y1-y0} = 0.5128571429$

R: Como podemos observar las dos expresiones son bastante precisas en cuento al resultado obtenido, pero la segunda formula nos ayuda a evitar la posible cancelación que puede ocurrir en la primera fórmula, donde términos grandes y casi iguales se restan. Teniendo una mejor precisión.