Tema 0: Base numérica

Índice

1. Números complejos

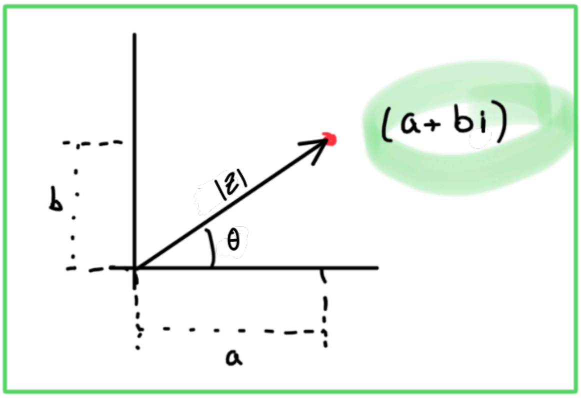
Definición

Los número complejos nacen de la necesidad de dar sentido a a la ecuación:

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1$$

$$i^2 = -1 \qquad i^2 + 1 = 0 \quad // \quad \boxed{\pm i = \sqrt{-1}}$$

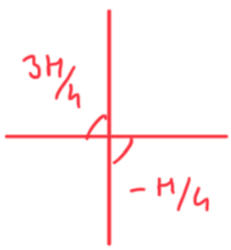
PTO DEL PLANO COMPLEJO



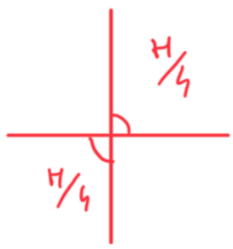
MÓDULO : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

ÁNGULO : $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$

* arctg (-1)



arctg (1)



Operaciones básicas

$\bar{z}_1 = a - bi$

$z_1 = a + bi \quad \begin{cases} Real(z) = a \\ Imag(z) = b \end{cases} \qquad z_2 = c + di \quad \begin{cases} Real(z) = c \\ Imag(z) = d \end{cases}$

$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} Real(z_1) = Real(z_2) \\ Imag(z_1) = Imag(z_2) \end{cases}$

IGUALDAD

$n \cdot z = a \cdot n + b \cdot n\, i$

PRODUCTO ESCALAR

$z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + (b \pm d)i$

SUMA Y RESTA

$* \; i \cdot i = -1$

$z_1 \cdot z_2 = a \cdot c + a \cdot di + c \cdot bi + b \cdot d \overset{(-1)}{\cancel{i^2}} = (ac - b \cdot d) + (ad + bc)i$

$\hookrightarrow z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

PRODUCTO

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{(c^2 + d^2)}$$

DIVISIÓN

$z_1^* = a - bi$

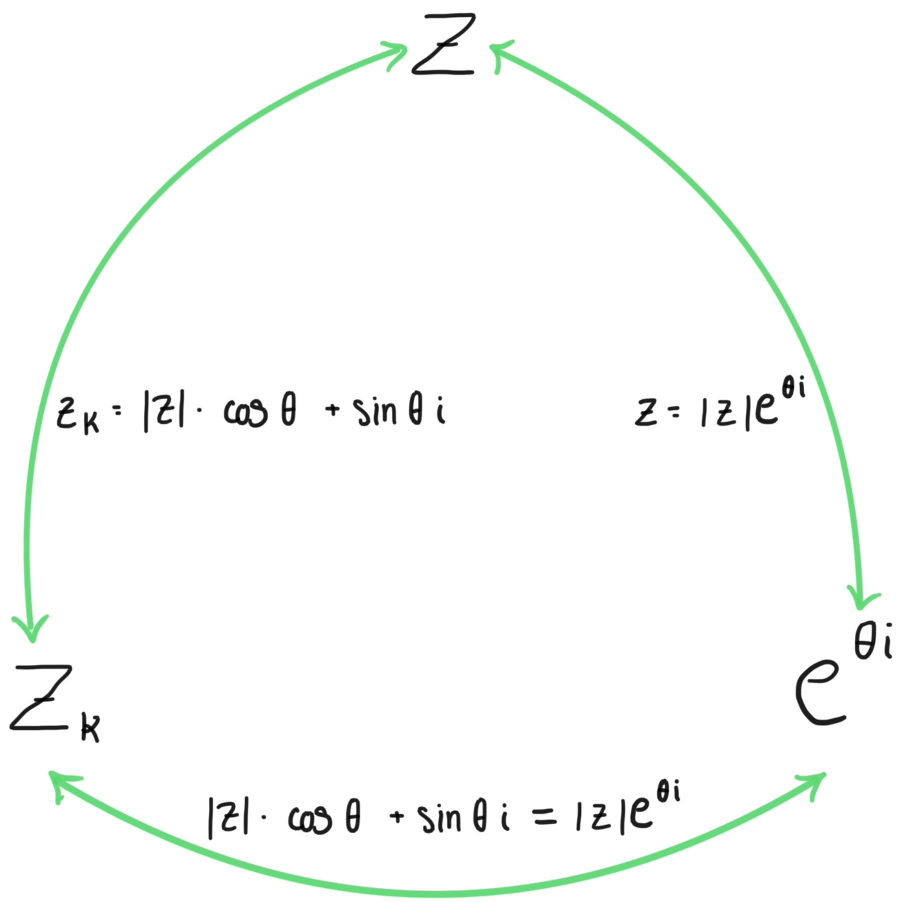
CONJUGADO

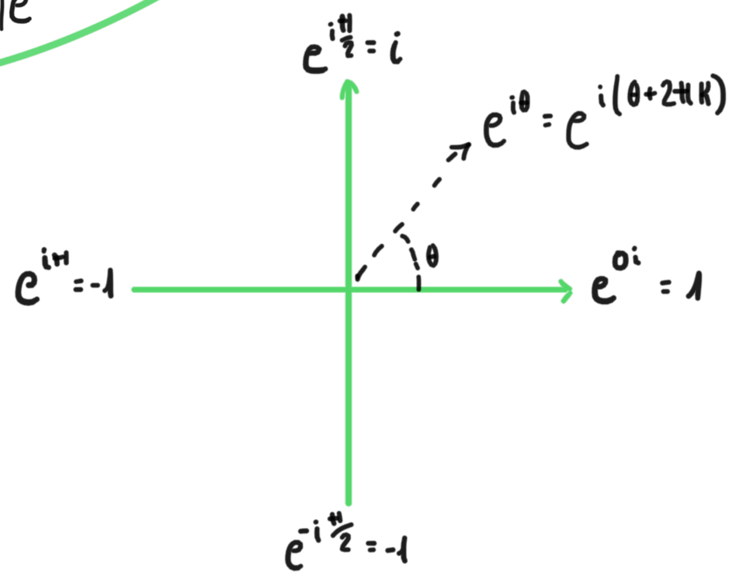
Notación

Binómica / cartesiana / rectangular $\quad z = a + bi$

Geométrica $\quad z_k = |z| \cdot [\cos(\theta + 2\pi k) + \sin(\theta + 2\pi k)]\, i$

Exponencial / polar $\quad e^{i\theta} = \cos(\theta) + \sin(\theta) i$





$$\boxed{\begin{array}{l} 2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \\ 2j \sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta} \end{array}}$$

¡OJO!

Ej

$z_1 = 9e^{i\pi/3}$; $z_2 = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$z_1 \cdot z_2 = 27e^{i\pi} = \underline{27e^{i\pi}}$

$z_1 \cdot \bar{z}_1 = 81 e^{i\cancel{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}}} = \underline{81}$

$z_1 / z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}} = \underline{3e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

$z_1^3 = 9^3 \cdot 3^{i\frac{\pi 3}{3}} = 729e^{i\pi}$

OJO

2. Sucesiones numéricas

Definición

Una ***sucesión*** es una lista ordenada de valores cuya longitud puede ser finita o infinita.

Una ***serie*** es la suma de los elementos de una sucesión. Todo serie finita converge a un valor. Las series infinitas pueden converger o no.

SERIE INFINITA (TIENDE A $+\infty$)

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \;\; y \;\; S = S_\infty = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

SERIE FINITA (TIENDE A 'N')

Sucesiones y series importantes

Progresión geométrica

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

$$\boxed{S_N = \sum_{n=0}^{N-1} r a^n = \frac{r(1-a^N)}{1-a}}$$

$$S_N=\sum_{n=0}^{N} ra^n \rightarrow \left\{\begin{array}{l} S_N=\sum_{n=0}^{N} ra^n=ra^0+ra^1+\ldots+ra^N \\ aS_N=\sum_{n=0}^{N} ra^{(n+1)}=ra^1+ra^2+\ldots+ra^N+ra^{N+1} \end{array}\right\} \rightarrow S_N-aS_N=r-ra^{N+1} \rightarrow S_N=\frac{r(1-a^{N+1})}{1-a}$$

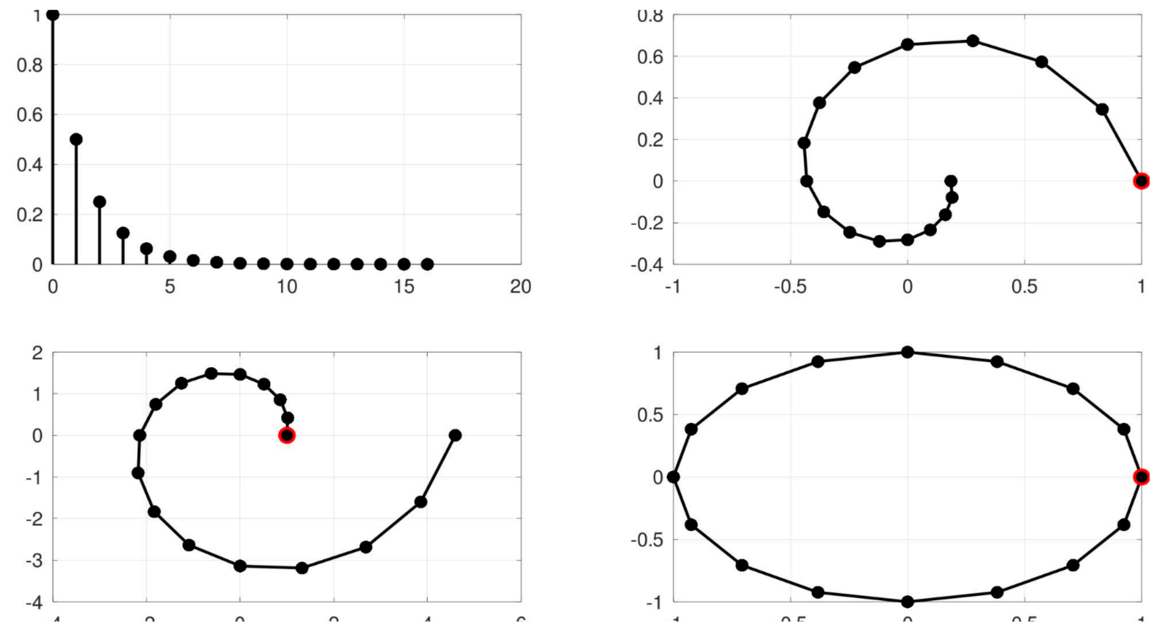
$$\lim_{N\rightarrow+\infty} S_N=\begin{cases} +\infty & \text{si } |a|\geq 1 \\ \dfrac{r}{1-a} & \text{si } 0<|a|<1 \end{cases}$$

$$n,N\in\mathbb{N} \quad r,a\in\mathbb{C}$$

$$r=1, a_n=(1/2)^n \rightarrow S_n=\sum_{k=0}^{n} a_n=\frac{1-0.5^{n+1}}{0.5}=2\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=2-\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow S=\sum_{k=0}^{+\infty} a_n=2$$

$$r=1, a_n=(e^{i\theta})^n \rightarrow S_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1} a_n=\frac{1-(e^{i\theta})^n}{1-e^{i\theta}}=\frac{e^{i\theta\frac{n}{2}}(e^{-i\theta\frac{n}{2}})-e^{i\theta\frac{n}{2}})}{e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}})}=e^{i\theta\frac{n-1}{2}}\frac{2 isen(\theta n/2)}{2i\, sen(\theta/2)}=e^{i\theta\frac{n-1}{2}}\frac{sen(\theta n/2)}{sen(\theta/2)}$$

$$a_n=(1/2)^n;\ b_n=(0.9e^{i\pi/8})^n;\ c_n=(1.1e^{i\pi/8})^n; d_n=(e^{i\pi/8})^n$$



3. Secuencias numéricas

Definición

Una ***secuencia*** es una serie de elementos que se suceden unos a otros y guardan relación entre sí.

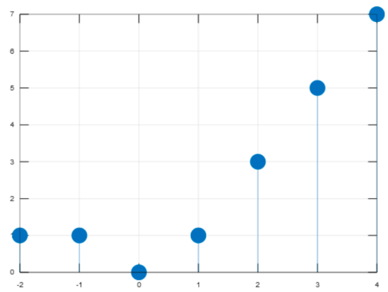
Existen secuencias **finitas** e **infinitas** (ver en ejemplo)

El centro o **inicio** de la serie se indica subrayando (_) el elemento (en el ejemplo, el centro de la serie finita es el 0) Si no se indica, se entiende que el inicio de la serie es el primer elemento de la lista.

$$x[n] = \{ \ldots 0, 0, 0, 1, 1, \underline{0}, 1, 3, 5, 7, 0, 0 \ldots \} =$$

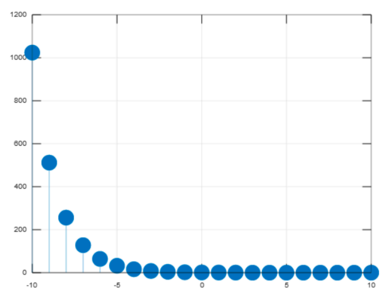
$$= \{1, 1, \underline{0}, 1, 3, 5, 7\} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } -3 < n < 0 \\ 2n-1 & \text{si } 0 < n < 5 \end{cases}$$

FINITA

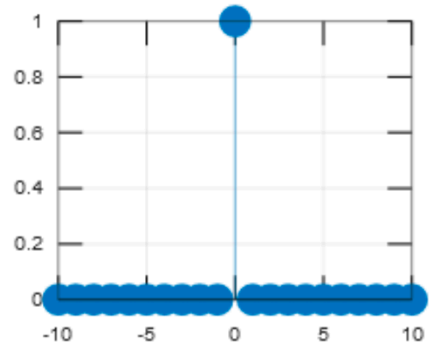


$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

INFINITA

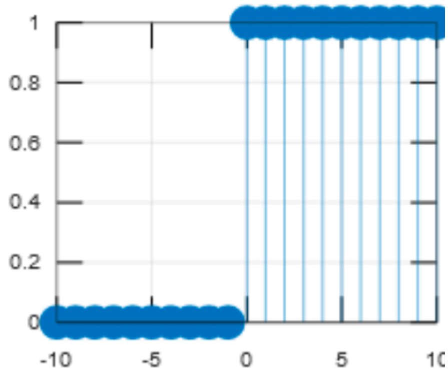


Secuencias importantes



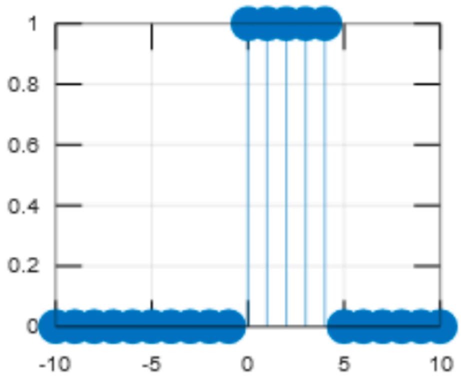
Impulso unitario

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$



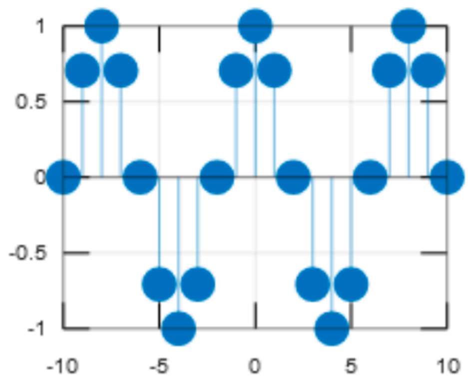
Secuencia escalón

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n\geq 0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$$



Secuencia pulso

$$P_L[n] = \begin{cases} 1 & 0\leq n<L \\ 0 & c.c \end{cases}$$



Secuencia coseno

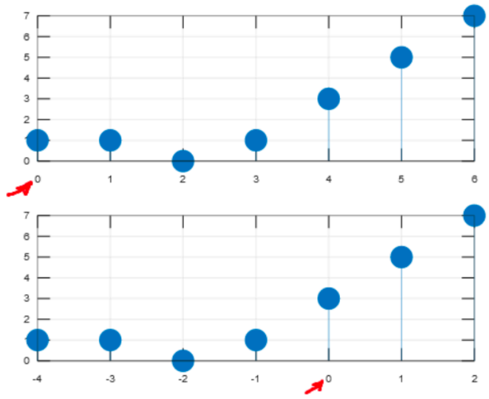
$$x[n] = \cos(2\pi f n+\theta)$$

Operaciones con secuencias

$x[x] - \{1, 1, \underline{0}, 1, 3, 5, 7\}$

Desplazamiento $y(n) = x(n \pm k)$

Se desplaza el inicio de la sucesión.

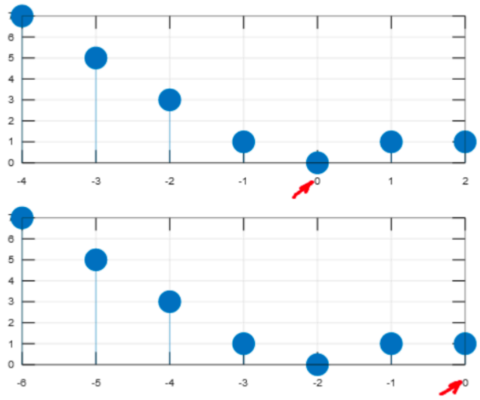


$y_1[n] = x[n-2] = \{\underline{1}, 1, 0, 1, 3, 5, 7\}$

$y_2[n] = x[n+2] = \{1, 1, 0, 1, \underline{3}, 5, 7\}$

Inversión $y(n) = x(-n)$

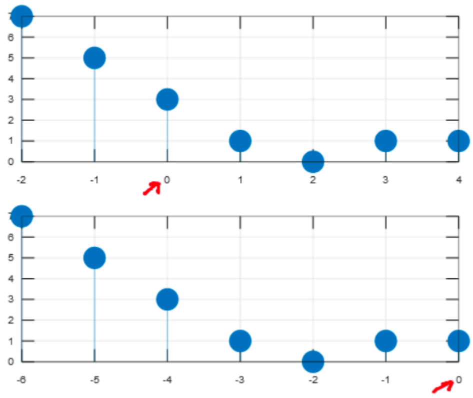
Se rota el orden de la sucesión por el inicio.



$y_3[n] = x[-n] = \{7, 5, 3, 1, \underline{0}, 1, 1\}$

$y_4[n] = y_1[-n] = \{7, 5, 3, 1, 0, 1, \underline{1}\}$

Desplazamiento + Inversión



Inv. + Desp. : $y_5[n] = y_3[n-2] = x[-(n-2)] = y_2[-n]$

Desp. + Inv. : $y_6[n] = y_1[-n] = x[-2-n]$

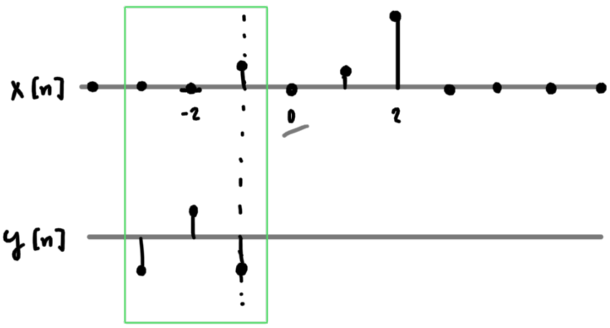
Convolución

Una ***convolución*** es un operador matemático que transforma dos funciones f y g en una tercera función que en cierto sentido representa la magnitud en la que se superponen f y una versión trasladada e invertida de g.

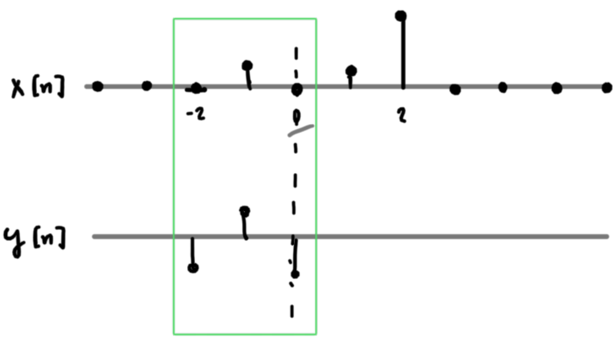
$$c[n]=x[n]*y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,y[n-k]$$

Ej Dadas las secuencias $x[n] = \{1,0,1,3\}$ e $y[n] = \{-1,1,-1\}$ realizar la convolución $c[n] = x[n] \cdot y[n]$.

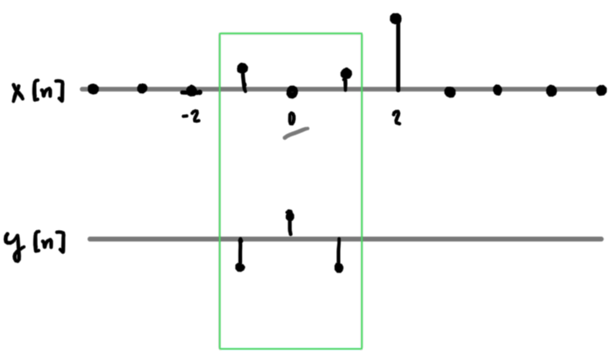
$c[-1] = \cancel{(0\cdot -1)} + \cancel{(0\cdot 1)} + (1\cdot -1) = \underline{-1}$



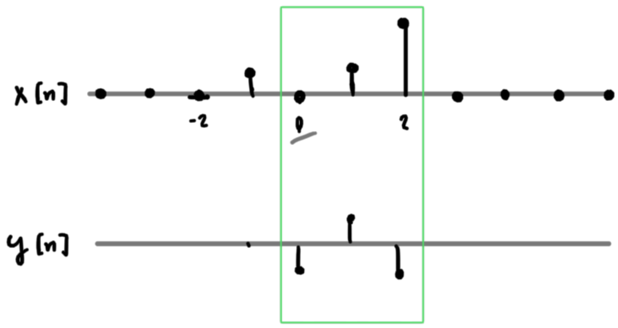
$c[0] = \cancel{(0\cdot -1)} + (1\cdot 1) + \cancel{(0\cdot -1)} = \underline{1}$



$c[1] = (1\cdot -1) + \cancel{(0\cdot 1)} + (1\cdot -1) = \underline{-2}$

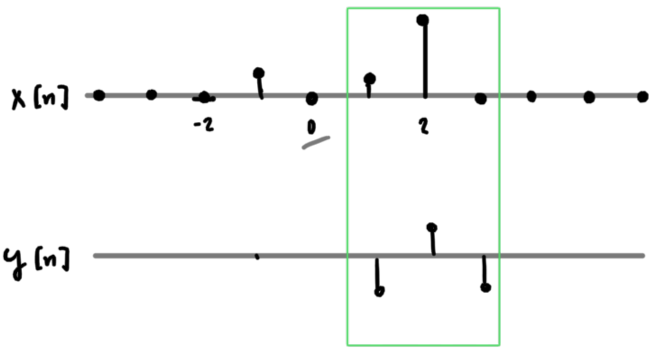


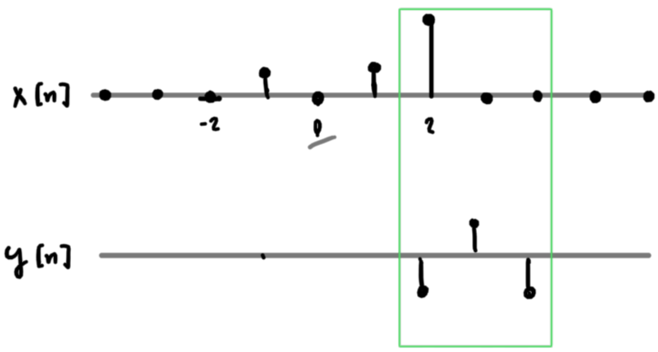
$c[2] = \cancel{(0\cdot -1)} + (1\cdot 1) + (3\cdot -1) = \underline{-2}$



$c[3] = (1\cdot -1) + (3\cdot 1) + \cancel{(0\cdot -1)} = 2$

$c[4] = (3\cdot -1) + \cancel{(0\cdot 1)} + \cancel{(0\cdot -1)} = -3$





$$c[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]\cdot y[n-k] = \boxed{\{-1, 1, -2, -2, 2, -3\}}$$

Otra forma de resolver la convolución es mediante una matriz o tabla de la siguiente forma:

y[n] \ x[n]	1	0	1	3
-1	-1	0	-1	-3
1	1	0	1	3
-1	-1	0	-1	-3

1. Se multiplica ca x_i con su y_j y se coloca en la casilla ij
2. Se suman en diagonal

$$c[n] = \boxed{\{-1, 1, -2, -2, 2, -3\}}$$