Verificación formal de arboles rojinegros en Haskell con Coq

David Felipe Hernández Chiapa
davifep.96@gmail.com

Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
Proyecto PAPIME PE102117

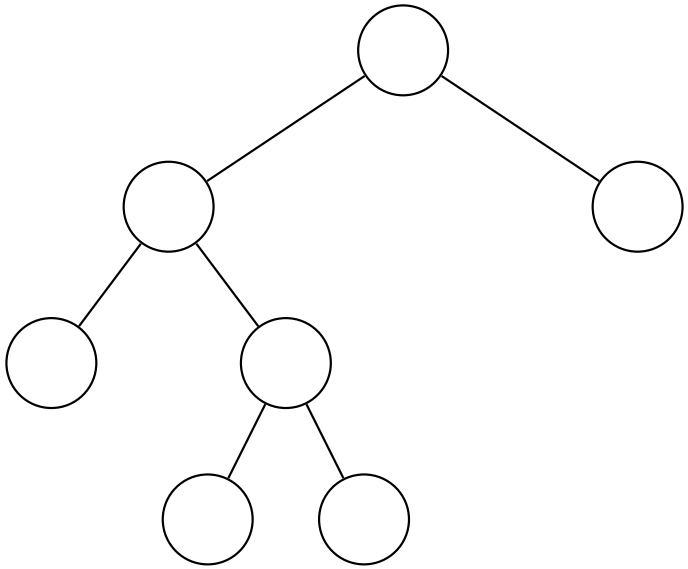
7 de diciembre de 2018

Árboles Binarios

Un Árbol binario es una estructura de datos no lineal, una definición formal de estos es:

- Gráfica conexa con vértices de grado a lo más 3.

Ejemplo:



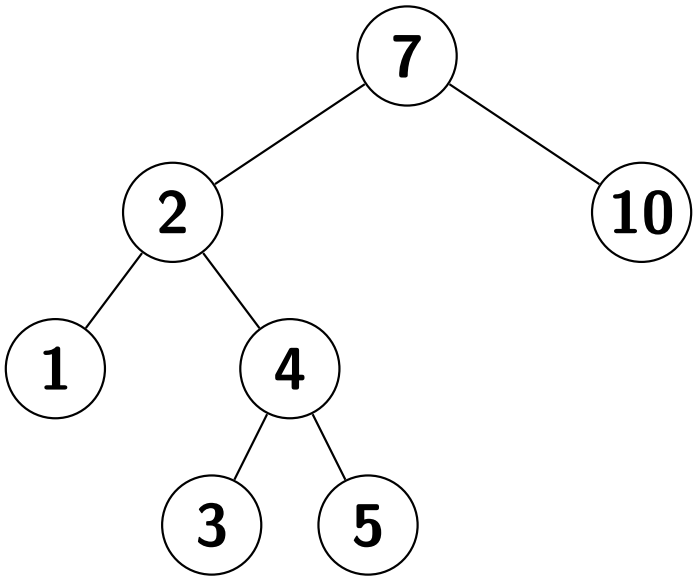
Árboles Binarios de Búsqueda

Un Árbol binario de búsqueda es un caso particular de un árbol binario, el cual tiene las siguientes invariantes:

- Todos los elementos del subárbol izquierdo son menores al elemento de la raíz.
- Todos los elementos del subárbol derecho son mayores al elemento de la raíz.
- Ambos subárboles también son de búsqueda.

Árboles Binarios de Búsqueda

Ejemplo:



Árboles Rojinegros

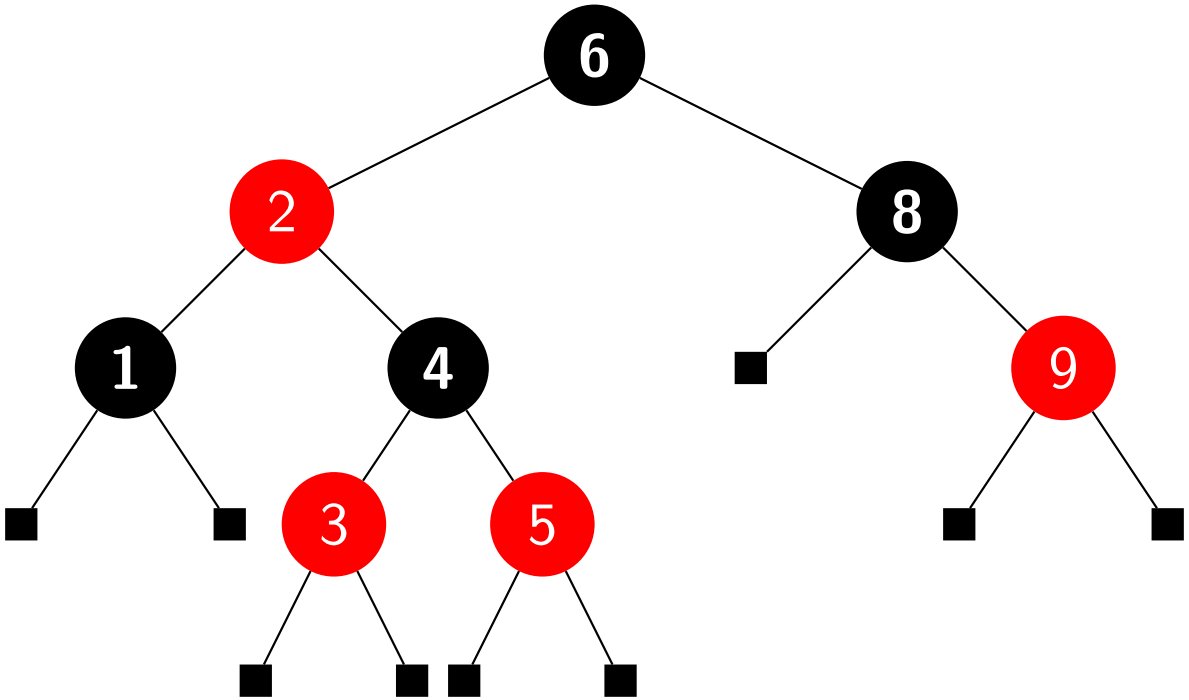
Son un caso particular de arboles binarios de búsqueda, estos a su vez incluyen más invariantes para garantizar una mayor eficiencia en las operaciones que se pueden realizar con ellos. Las invariantes son: [1]

- Todos los vértices son negros o rojos.
- La raíz es negra.
- Todas las hojas son negras, como la raíz.
- Un vértice rojo siempre tiene dos hijos negros.
- Para todo vértice v de este árbol, todas las trayectorias de v a alguna de sus hojas descendientes tiene el mismo número de vértices negros.

[1] Estructuras de Datos con Java Moderno. Canek Paláez Váldes

Árboles Rojinegros

Ejemplo:



Verificación de Árboles Rojinegros.

Los lenguajes de programación en los que generalmente se implementan este tipo de arboles son del paradigma imperativo, por ejemplo Java, en los cuales una manera de intentar verificar que la estructura funciona es usar pruebas unitarias.

Pero esto no es verificar.

Verificación formal en Haskell

Haskell es un lenguaje de programación funcional con una base muy grande de desarrolladores que constantemente están generando mas programas escritos en el.

Una de las cosas que se dice de Haskell es que la verificación de su código es bastante sencilla.

¿Pero qué tan cierto y escalable es esto?

Verificación formal en Coq

A diferencia de Haskell, Coq es un asistente de pruebas, con el cual se puede escribir un programa y a la par de demostrar su especificación formal.

Verificación formal en Coq

Las diferencias mas grandes entre la escritura de programas entre Haskell y Coq, es que Coq solo acepta funciones totales y que estas terminen en todos sus casos.

Problema

Nos gustaría una manera de traducir módulos de Haskell (con funciones totales) a Coq para poder verificarlas formalmente de una manera mas sencilla, ordenada y escalable.

hs-to-coq

Es una herramienta en desarrollo por un equipo de la Universidad de Pensilvania (`https://github.com/antalsz/hs-to-coq`).
En esta herramienta ya existen bibliotecas de Haskell traducidas a Coq y también permite traducir cualquier programa de Haskell.

hs-to-coq

Esta herramienta es creada para facilitar la verificación, siguiendo los siguientes pasos:

1. Escribir un módulo de Haskell, digamos un módulo de Árboles Rojinegros.
2. Probar ese código en Haskell por medio de ejemplos.
3. Utilizar hs-to-coq para traducir el código a Coq.
4. ¡A verificar!

Ventajas

Esto simplifica mucho la verificación en varios frentes:

- La traducción no se hace a mano.
- La cooperación en un equipo de trabajo se hace mas sencilla.

Ejemplos

Definición de arboles rojinegros en Haskell

```
data Color = R | B

data RB a = E | T Color (RB a) a (RB a)
```

Ejemplos

Código de balance de Árboles Rojinegros en Haskell.

```
balance :: RB a → a → RB a → RB a
balance (T R a x b) y (T R c z d) = T R (T B a x b) y (T B c z d)
balance (T R (T R a x b) y c) z d = T R (T B a x b) y (T B c z d)
balance (T R a x (T R b y c)) z d = T R (T B a x b) y (T B c z d)
balance a x (T R b y (T R c z d)) = T R (T B a x b) y (T B c z d)
balance a x (T R (T R b y c) z d) = T R (T B a x b) y (T B c z d)
balance a x b = T B a x b
```

Ejemplos

Código de balance de Árboles Rojinegros en Coq, traducido con hs-to-coq.

```
Definition balance {a} : RB a → a → RB a → RB a :=
 fun arg_0__ arg_1__ arg_2__ ⇒
   match arg_0__, arg_1__, arg_2__ with
   | T R a x b, y, T R c z d ⇒ T R (T B a x b) y (T B c z d)
   | T R (T R a x b) y c, z, d ⇒ T R (T B a x b) y (T B c z d)
   | T R a x (T R b y c), z, d ⇒ T R (T B a x b) y (T B c z d)
   | a, x, T R b y (T R c z d) ⇒ T R (T B a x b) y (T B c z d)
   | a, x, T R (T R b y c) z d ⇒ T R (T B a x b) y (T B c z d)
   | a, x, b ⇒ T B a x b
 end.
```

Ejemplos

Código de inserción de Árboles Rojinegros en Haskell.

```
ins :: Ord a ⇒ a → RB a → RB a
ins x E = T R E x E
ins x s@(T B a y b)
  | x<y = balance (ins x a) y b
  | x>y = balance a y (ins x b)
  | otherwise = s
ins x s@(T R a y b)
  | x<y = T R (ins x a) y b
  | x>y = T R a y (ins x b)
  | otherwise = s

insert :: Ord a ⇒ a → RB a → RB a
insert x s = T B a z b where T _ a z b = ins x s
```

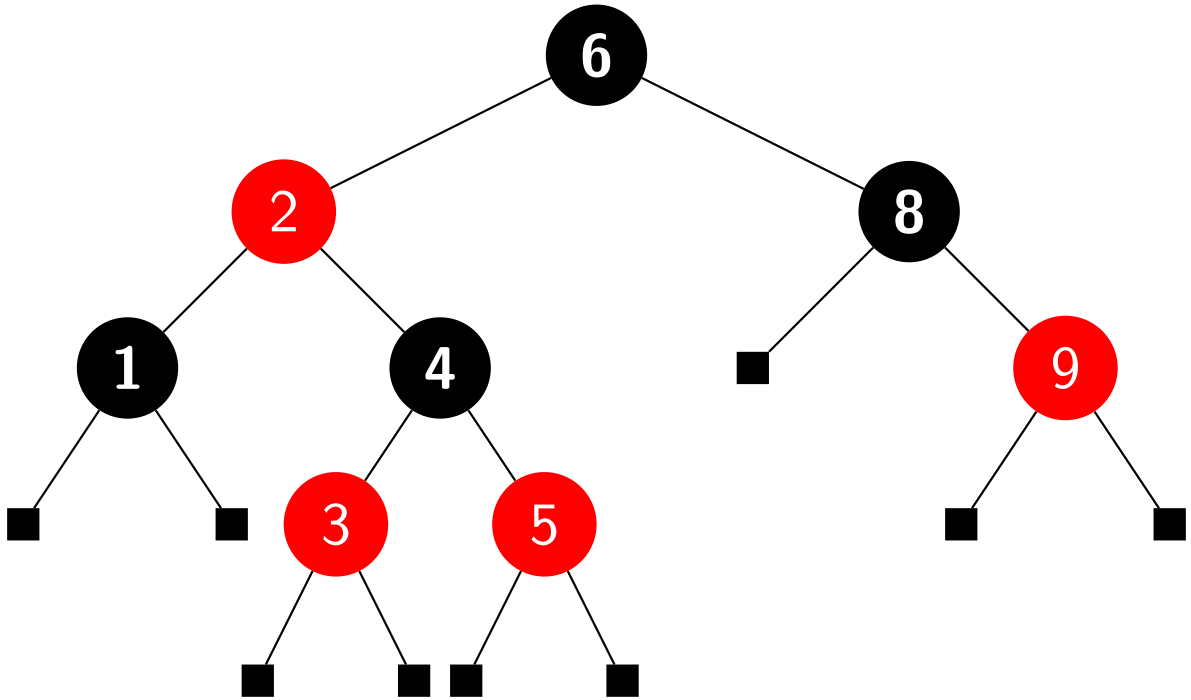
Ejemplos

Código de inserción de Árboles Rojinegros en Coq, traducido con hs-to-coq.

```
Definition ins {a} `{GHC.Base.Ord a} : a → RB a → RB a :=
  fix ins arg_0__ arg_1__
        := match arg_0__, arg_1__ with
           | x, E ⇒ T R E x E
           | x, (T B a y b as s) ⇒
             if x GHC.Base.< y : bool then balance (ins x a) y b else
             if x GHC.Base.> y : bool then balance a y (ins x b) else
             s
           | x, (T R a y b as s) ⇒
             if x GHC.Base.< y : bool then T R (ins x a) y b else
             if x GHC.Base.> y : bool then T R a y (ins x b) else
             s
end.
```

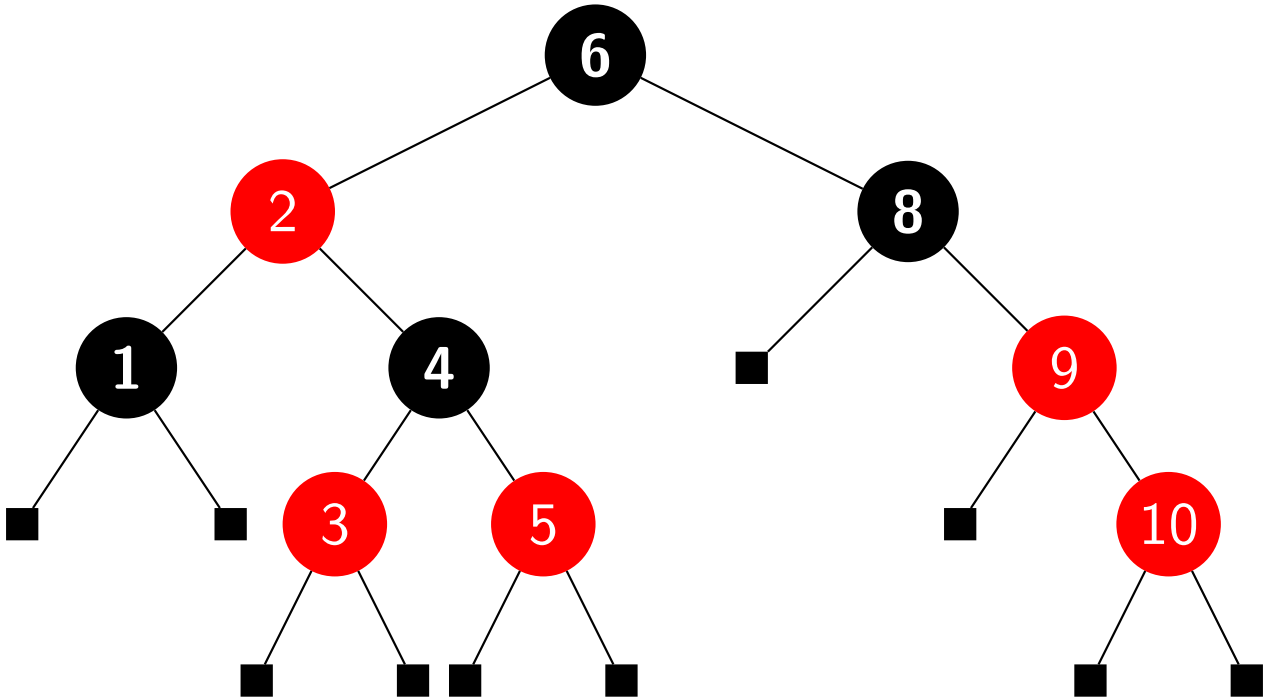
Ejemplo Práctico

Agregaremos el número 10:



Ejemplo Práctico

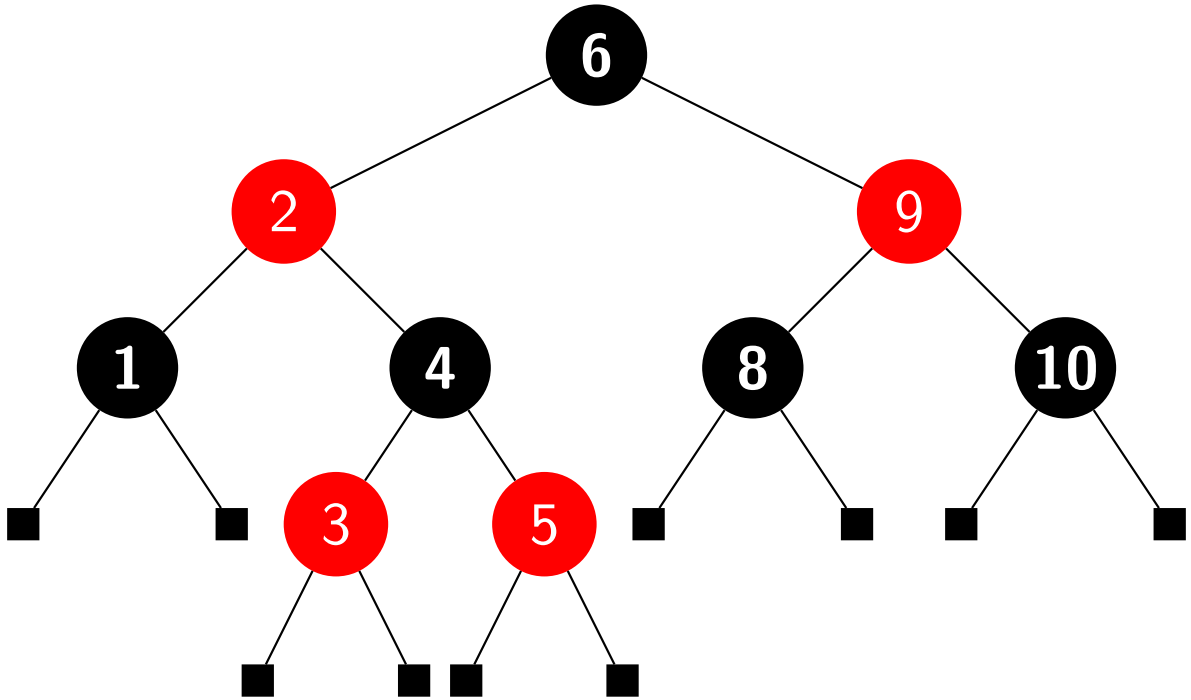
Se agrega como hijo rojo del 9.



case:10>9
T R a 9 (T R E 10 E)

Ejemplo Práctico

La función de balanceo mantiene el invariante todo el tiempo.




```
balance E 8 (T R E 9 (T R E 10 E)) =
                T R (T B E 8 E) 9 (T B E 10 E)
```

Por verificar...[2]

```
Inductive is_redblack : tree → color → nat → Prop :=
 | IsRB_leaf: forall c, is_redblack E c 0
 | IsRB_r: forall tl k kv tr n,
        is_redblack tl Red n →
        is_redblack tr Red n →
        is_redblack (T Red tl v tr) Black n
 | IsRB_b: forall c tl k kv tr n,
        is_redblack tl Black n →
        is_redblack tr Black n →
        is_redblack (T Black tl v tr) c (S n).

Lemma insert_is_redblack:
  forall x s n, is_redblack s Red n →
                  exists n', is_redblack (insert x s) Red n'.
```

[2] https://softwarefoundations.cis.upenn.edu/draft/vfa-current/Redblack.html

Trabajo en desarrollo

La herramienta **hs-to-coq** está en desarrollo y se le esta integrando mas funcionalidades de Haskell, como clases, polimorfismos, etc.

Este es un trabajo en curso, se busca poder traducir y verificar las operaciones de los árboles rojinegros y también las implementaciones de estos (*Implementaciones funcionales de árboles roji-negros* de Graciela López Campos).