

# Notes: Stretch Mapping

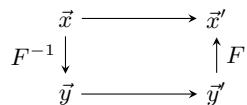
D. Fang

December 9, 2025

## Contents

<b>1</b>	<b>Coordonnées</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Smoothing length</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Équations d'état</b>	<b>3</b>
4.1	Fermi . . . . .	3
<b>5</b>	<b>HCP Lattice</b>	<b>4</b>
5.1	Relation masse rayon . . . . .	4
5.2	Polytrope . . . . .	5
<b>6</b>	<b>Equation de Chandrasekhar</b>	<b>6</b>

## 1 Coordonnées



La procédure de stretch mapping permet d'obtenir les 3 composantes  $\vec{y}'$  à partir de celles de  $\vec{y}$  de manière indépendante.

$$y'_i = \xi_i(y_i)$$

On veut ensuite retrouver les composantes dans la base de  $\vec{x}$ . Souvent les changements de bases se factorisent, dans le sens où

$$x_i = \prod_j F_i^j(y_j) \tag{1}$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \sin \phi \\y &= r \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \phi\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}x'_i &= \prod_j F_i^j(y'_j) \\&= \prod_j F_i^j(\xi_j(y_j))\end{aligned}$$

Le problème ainsi c'est que l'on réalise souvent des étapes en trop. Par exemple si on stretch seulement selon  $r$ , alors il faut partir de  $(x, y, z)$ , obtenir  $(r, \theta, \phi)$  puis  $(r', \theta, \phi)$  puis revenir à  $(x', y', z')$ . Le calcul de  $\theta$  et  $\phi$  est alors inutile puisqu'ils restent inchangés.

Dans ce cas, il suffit de suivre la procédure suivante. On part en fait de (1) et on l'injecte dans

## 2 Introduction

On cherche un potentiel pour contrer la pression.

$$-\nabla P + \nabla \phi_{\text{fictif}} = 0$$

On parle d'équation localement isotherme lorsque la température dépend uniquement de la position. Elle est prescrite. Dans les disques protoplanétaires, on dit en effet qu'elle dépend de la distance à l'étoile.

Eos adiabatique :

$$\rho = P^\gamma$$

## 3 Smoothing length

On veut imposer

$$h_a = h_{\text{fact}} \left( \frac{m_a}{\rho_a} \right)^{1/3}$$

Or on donne  $\rho_{\text{profile}}$  tel que

$$\rho(r) = m_{\text{tot}} \frac{\rho_{\text{profile}}(r)}{\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \rho_{\text{profile}}(r) dS dr}$$

## 4 Équations d'état

### 4.1 Fermi

Par définition de la vitesse du son

$$c_s^2 \equiv \frac{\partial P}{\partial \rho}$$

Dans le cas de Fermi,

$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \tilde{p}_F} \frac{\partial \tilde{p}_F}{\partial \rho}$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{p}_F &= \frac{1}{\mu_e} \alpha \rho^{1/3} \\ P &= \beta \left( \left[ \tilde{p}_F \sqrt{\tilde{p}_F^2 + 1} (2\tilde{p}_F^2 - 3) + 3 \operatorname{arcsinh}(\tilde{p}_F) \right] \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{m_e c} h \left( \frac{3}{8\pi m_p} \right)^{1/3} \\ \beta &= \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3} \end{aligned}$$

Donc chaque dérivée donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}_F}{\partial \rho} &= \frac{1}{3\mu_e} \alpha \rho^{\frac{1}{3}-1} \\ \frac{\partial P}{\partial \tilde{p}_F} &= \beta \left\{ \sqrt{\tilde{p}_F^2 + 1} (2\tilde{p}_F^2 - 3) + \tilde{p}_F \left[ \frac{\tilde{p}_F}{\sqrt{\tilde{p}_F^2 + 1}} (2\tilde{p}_F^2 - 3) + 4\tilde{p}_F \sqrt{\tilde{p}_F^2 + 1} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{\sqrt{1 + \tilde{p}_F^2}} \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{p}_F^2}} \left[ \underbrace{(2\tilde{p}_F^2 - 3)(1 + \tilde{p}_F^2)}_{-\tilde{p}_F^2 + 2\tilde{p}_F^4 - 3} + \tilde{p}_F^2 \underbrace{[2\tilde{p}_F^2 - 3 + 4(\tilde{p}_F^2 + 1)]}_{6\tilde{p}_F^2 + 1} \right] + \frac{3}{\sqrt{1 + \tilde{p}_F^2}} \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{8\tilde{p}_F^4 - 3}{\sqrt{1 + \tilde{p}_F^2}} + \frac{3}{\sqrt{1 + \tilde{p}_F^2}} \right\} \\ &= \beta \frac{8\tilde{p}_F^4}{\sqrt{1 + \tilde{p}_F^2}} \end{aligned}$$

Finalement

$$c_s^2 = \frac{8\alpha\beta}{3\mu_e \rho^{2/3}} \frac{\tilde{p}_F^4}{\sqrt{1 + \tilde{p}_F^2}}$$

$$P = \beta \left( \left[ \tilde{p}_F \sqrt{\tilde{p}_F^2 + 1} (2\tilde{p}_F^2 - 3) + 3 \operatorname{arcsinh}(\tilde{p}_F) \right] \right)$$

$$c_s^2 = \frac{8\alpha\beta}{3\mu_e\rho^{\frac{2}{3}}} \frac{\tilde{p}_F^4}{\sqrt{1 + \tilde{p}_F^2}}$$

with

$$\tilde{p}_F = \frac{1}{\mu_e} \alpha \rho^{1/3}$$

$$\alpha = \frac{1}{(m_e c)^{\frac{1}{3}}} \frac{3h^3}{8\pi m_p}$$

$$\beta = \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3}$$

## 5 HCP Lattice

On a un cube dans lequel on place des cellules unités hcp. Chaque cellule est de volume  $24\sqrt{2}r$  donc au total on a  $\frac{(2x_{\max})^3}{24\sqrt{2}r}$  cellules. Chaque cellule a 6 atomes donc il reste

$$\frac{(2x_{\max})^3}{4\sqrt{2} dr^3} \text{ atomes}$$

Enfin on crop une sphère donc il reste

$$N = \frac{(2x_{\max})^3}{4\sqrt{2} dr^3} \times \frac{\frac{4}{3}\pi x_{\max}^3}{(2x_{\max})^3} \text{ atomes}$$

Dans Shamrock on entre la masse d'une particule:

$$m_{\text{part}} = \frac{M_{\text{tot}}}{N}$$

où  $M_{\text{tot}}$  est la masse de l'étoile que l'on souhaite. Mais ce serait plus pratique d'entrer  $(M_{\text{tot}}, N, x_{\max})$  et d'en déduire  $dr$ . On inverse donc

$$dr = 2x_{\max} \left[ \frac{1}{4\sqrt{2}N} \times \frac{\frac{4}{3}\pi}{2^2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

### 5.1 Relation masse rayon

On veut connaître maintenant le lien entre  $x_{\max}$  et la masse totale de l'étoile puisqu'à la fin on ne précise que  $x_{\max}$  et  $dr$ . Le rayon d'une naine blanche est celle qui maximise ? l'énergie libre ?

$$R_* = \frac{(9\pi)^{2/3}}{8} \frac{\hbar^2}{m_e} \frac{1}{G m_p^{5/3} M_{\text{tot}}^{1/3}}$$

$$\frac{R_*}{R_\odot} = 0.010 \left( \frac{M_\odot}{M_{\text{tot}}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Plus l'étoile est massive, plutôt elle doit être petite.

## 5.2 Polytrope

Pour une étoile polytropique. On suit la même procédure. On impose la masse, le rayon est alors contraint.

On donne  $M_{\text{tot}}, \tilde{\rho}$ . Alors avant de démarrer la procédure de stretch mapping il faut connaître le rayon.

$$M_{\text{tot}} = \int_0^R \rho_c \tilde{\rho}(r) 4\pi dr^2$$

mais donc il faut connaître  $\rho_c$ . Il nous faut une 2ème équation. Le profil de densité, peu importe son facteur de normalisation doit s'annuler en  $R$ .

$$\tilde{\rho}(R) = 0$$

ce qui impose  $R$ . On pourrait croire que cette équation suffit pour avoir  $R$ . Mais en fait  $\rho_c$  apparaît dedans en raison de l'adimensionnement des équations de Lane-Emden

$$\tilde{\rho}(r) = \text{sinc}(\xi(r, \rho_c))$$

avec

$$\xi(r, \rho_c) = r \sqrt{\frac{4\pi G \rho_c^2}{(n+1)P_c}} = r \sqrt{\frac{4\pi G \rho_c^{1-\frac{1}{n}}}{(n+1)K}}$$

Finalement, le couple d'équations est

$$0 = \tilde{\rho}(R, \rho_c) \tag{2}$$

$$M_{\text{tot}} = \int_0^R \rho_c \tilde{\rho}(r) 4\pi dr^2 \tag{3}$$

En particulier pour  $n = 2$ ,

$$0 = \text{sinc} \left( R \sqrt{\frac{2\pi G}{K}} \right) \quad (\text{on a de la chance que } \rho_c \text{ disparaîsse...})$$

$$R = \sqrt{\frac{\pi K}{2G}}$$

$$M_{\text{tot}} = \rho_c \int_0^{\sqrt{\frac{\pi K}{2G}}} \tilde{\rho}(r) 4\pi dr^2$$

tl:dr. Pour  $n = 1$ , c'est la valeur de  $K$  uniquement qui impose le rayon. La seule chose qu'on impose c'est  $M_{\text{tot}}$  (donc  $N_{\text{part}}, m_{\text{part}}$ ).  $\rho_c$  n'a aucune importance ici.

Résumé :

- Fermi : On impose  $M_{\text{tot}}$  ce qui constraint  $R$  directement.
- Polytrope : On impose  $K, n = 1$  ce qui constraint  $R$ . Puis  $M_{\text{tot}}$  arrive en dernier. Sinon on peut faire l'inverse : imposer  $R$  ce qui constraint  $K$ .

## 6 Equation de Chandrasekhar

$$\frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left( \eta^2 \frac{d\Phi}{d\eta} \right) = - \left( \Phi^2 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2}$$

$$\Phi'' + \frac{2}{\eta} \Phi' = - \left( \Phi^2 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2}$$

Sous forme vectorielle

$$u = \Phi$$

$$v = \Phi'$$

$$u' = v$$

$$v' = - \left( u^2 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2} - \frac{2}{\eta} v$$

Conditions aux limites:

$$u(0) = 1$$

$$v(0) = 1$$