

Notes: Stretch Mapping

D. Fang

December 24, 2025

Contents

1	Coordonnées	1
2	Introduction	2
3	Smoothing length	2
4	HCP Lattice	3
4.1	Relation masse rayon	3
4.2	Polytrope	3
5	Équations d'état	5
5.1	Fermi	5
6	Equation de Chandrasekhar	6
7	Pas de temps pour une naine blanche	7
8	Tillotson equation	8
8.1	Soundspeed	9
8.2	Initialiser une sphère de Tillotson	11
8.2.1	Cas général	11
8.2.2	Application à Tillotson	13
9	Formation de la Lune	13

1 Coordonnées

$$\begin{array}{ccc} \vec{x} & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & \vec{x}' \\ F^{-1} \downarrow & & \uparrow F \\ \vec{y} & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & \vec{y}' \end{array}$$

La procédure de stretch mapping permet d'obtenir les 3 composantes \vec{y}' à partir de celles de \vec{y} de manière indépendante.

$$y'_i = \xi_i(y_i)$$

On veut ensuite retrouver les composantes dans la base de \vec{x} . Souvent les changements de bases se factorisent, dans le sens où

$$x_i = \prod_j F_i^j(y_j) \quad (1)$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \sin \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \phi \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} x'_i &= \prod_j F_i^j(y'_j) \\ &= \prod_j F_i^j(\xi_j(y_j)) \end{aligned}$$

Le problème ainsi c'est que l'on réalise souvent des étapes en trop. Par exemple si on stretch seulement selon r , alors il faut partir de (x, y, z) , obtenir (r, θ, ϕ) puis (r', θ, ϕ) puis revenir à (x', y', z') . Le calcul de θ et ϕ est alors inutile puisqu'ils restent inchangés.

Dans ce cas, il suffit de suivre la procédure suivante. On part en fait de (1) et on l'injecte dans

2 Introduction

On cherche un potentiel pour contrer la pression.

$$-\nabla P + \nabla \phi_{\text{fictif}} = 0$$

On parle d'équation localement isotherme lorsque la température dépend uniquement de la position. Elle est prescrite. Dans les disques protoplanétaires, on dit en effet qu'elle dépend de la distance à l'étoile.

Eos adiabatique :

$$\rho = P^\gamma$$

3 Smoothing length

On veut imposer

$$h_a = h_{\text{fact}} \left(\frac{m_a}{\rho_a} \right)^{1/3}$$

Or on donne ρ_{profile} tel que

$$\rho(r) = m_{\text{tot}} \frac{\rho_{\text{profile}}(r)}{\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \rho_{\text{profile}}(r) dS dr}$$

4 HCP Lattice

On a un cube dans lequel on place des cellules unités hcp. Chaque cellule est de volume $24\sqrt{2}r$ donc au total on a $\frac{(2x_{\max})^3}{24\sqrt{2}r}$ cellules. Chaque cellule a 6 atomes donc il reste

$$\frac{(2x_{\max})^3}{4\sqrt{2} dr^3} \text{ atomes}$$

Enfin on crop une sphère donc il reste

$$N = \frac{(2x_{\max})^3}{4\sqrt{2} dr^3} \times \frac{\frac{4}{3}\pi x_{\max}^3}{(2x_{\max})^3} \text{ atomes}$$

Dans Shamrock on entre la masse d'une particule:

$$m_{\text{part}} = \frac{M_{\text{tot}}}{N}$$

où M_{tot} est la masse de l'étoile que l'on souhaite. Mais ce serait plus pratique d'entrer ($M_{\text{tot}}, N, x_{\max}$) et d'en déduire dr . On inverse donc

$$dr = 2x_{\max} \left[\frac{1}{4\sqrt{2}N} \times \frac{\frac{4}{3}\pi}{2^2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

4.1 Relation masse rayon

On veut connaître maintenant le lien entre x_{\max} et la masse totale de l'étoile puisqu'à la fin on ne précise que x_{\max} et dr . Le rayon d'une naine blanche est celle qui maximise ? l'énergie libre ?

$$R_* = \frac{(9\pi)^{2/3}}{8} \frac{\hbar^2}{m_e G m_p^{5/3} M_{\text{tot}}^{1/3}}$$

$$\frac{R_*}{R_\odot} = 0.010 \left(\frac{M_\odot}{M_{\text{tot}}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Plus l'étoile est massive, plutôt elle doit être petite.

4.2 Polytrope

Pour une étoile polytropique. On suit la même procédure. On impose la masse, le rayon est alors contraint.

On donne $M_{\text{tot}}, \tilde{\rho}$. Alors avant de démarrer la procédure de stretch mapping il faut connaître le rayon.

$$M_{\text{tot}} = \int_0^R \rho_c \tilde{\rho}(r) 4\pi dr^2$$

mais donc il faut connaître ρ_c . Il nous faut une 2ème équation. Le profil de densité, peu importe son facteur de normalisation doit s'annuler en R .

$$\tilde{\rho}(R) = 0$$

ce qui impose R . On pourrait croire que cette équation suffit pour avoir R . Mais en fait ρ_c apparaît dedans en raison de l'adimensionnement des équations de Lane-Emden

$$\tilde{\rho}(r) = \text{sinc}(\xi(r, \rho_c))$$

avec

$$\xi(r, \rho_c) = r \sqrt{\frac{4\pi G \rho_c^2}{(n+1)P_c}} = r \sqrt{\frac{4\pi G \rho_c^{1-\frac{1}{n}}}{(n+1)K}}$$

Finalement, le couple d'équations est

$$0 = \tilde{\rho}(R, \rho_c) \tag{2}$$

$$M_{\text{tot}} = \int_0^R \rho_c \tilde{\rho}(r) 4\pi dr^2 \tag{3}$$

En particulier pour $n = 2$,

$$0 = \text{sinc}\left(R \sqrt{\frac{2\pi G}{K}}\right) \quad (\text{on a de la chance que } \rho_c \text{ disparaîsse...})$$

$$R = \sqrt{\frac{\pi K}{2G}}$$

$$M_{\text{tot}} = \rho_c \int_0^{\sqrt{\frac{\pi K}{2G}}} \tilde{\rho}(r) 4\pi dr^2$$

tl:dr. Pour $n = 1$, c'est la valeur de K uniquement qui impose le rayon. La seule chose qu'on impose c'est M_{tot} (donc $N_{\text{part}}, m_{\text{part}}$). ρ_c n'a aucune importance ici.

Résumé : R, M_{tot} sont directement liés.

- Fermi : On impose y_0 qui impose M_{tot}, R directement.
- Polytrope : On impose $K, n = 1$ ce qui contraint R . Puis M_{tot} arrive en dernier. Sinon on peut faire l'inverse : imposer R ce qui contraint K .
- Dans le cas général (par ex Tillotson), on impose le rayon ce qui impose la masse totale ou inversément.

5 Équations d'état

5.1 Fermi

Par définition de la vitesse du son

$$c_s^2 \equiv \frac{\partial P}{\partial \rho}$$

Dans le cas de Fermi,

$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \tilde{p}_F} \frac{\partial \tilde{p}_F}{\partial \rho}$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{p}_F &= \frac{1}{\mu_e^{\frac{1}{3}}} \alpha \rho^{1/3} \\ P &= \beta \left(\left[\tilde{p}_F \sqrt{\tilde{p}_F^2 + 1} (2\tilde{p}_F^2 - 3) + 3 \operatorname{arcsinh}(\tilde{p}_F) \right] \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{m_e c} h \left(\frac{3}{8\pi m_p} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \beta &= \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3} \end{aligned}$$

Donc chaque dérivée donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}_F}{\partial \rho} &= \frac{1}{3\mu_e^{\frac{1}{3}}} \alpha \rho^{\frac{1}{3}-1} \\ \frac{\partial P}{\partial \tilde{p}_F} &= \beta \left\{ \sqrt{\tilde{p}_F^2 + 1} (2\tilde{p}_F^2 - 3) + \tilde{p}_F \left[\frac{\tilde{p}_F}{\sqrt{\tilde{p}_F^2 + 1}} (2\tilde{p}_F^2 - 3) + 4\tilde{p}_F \sqrt{\tilde{p}_F^2 + 1} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{\sqrt{1 + \tilde{p}_F^2}} \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{p}_F^2}} \left[\underbrace{(2\tilde{p}_F^2 - 3)(1 + \tilde{p}_F^2)}_{-\tilde{p}_F^2 + 2\tilde{p}_F^4 - 3} + \tilde{p}_F^2 \underbrace{[2\tilde{p}_F^2 - 3 + 4(\tilde{p}_F^2 + 1)]}_{6\tilde{p}_F^2 + 1} \right] + \frac{3}{\sqrt{1 + \tilde{p}_F^2}} \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{8\tilde{p}_F^4 - 3}{\sqrt{1 + \tilde{p}_F^2}} + \frac{3}{\sqrt{1 + \tilde{p}_F^2}} \right\} \\ &= \beta \frac{8\tilde{p}_F^4}{\sqrt{1 + \tilde{p}_F^2}} \end{aligned}$$

Finalement

$$c_s^2 = \frac{8\alpha\beta}{3\mu_e^{\frac{1}{3}}\rho^{\frac{2}{3}}} \frac{\tilde{p}_F^4}{\sqrt{1 + \tilde{p}_F^2}}$$

$$P = \beta \left(\left[\tilde{p}_F \sqrt{\tilde{p}_F^2 + 1} (2\tilde{p}_F^2 - 3) + 3 \operatorname{arcsinh}(\tilde{p}_F) \right] \right)$$

$$c_s^2 = \frac{8\alpha\beta}{3\mu_e^{\frac{1}{3}}\rho^{\frac{2}{3}}} \frac{\tilde{p}_F^4}{\sqrt{1 + \tilde{p}_F^2}}$$

with

$$\tilde{p}_F = \frac{1}{\mu_e^{\frac{1}{3}}} \alpha \rho^{1/3}$$

$$\alpha = \frac{1}{m_e c} h \left(\frac{3}{8\pi m_p} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\beta = \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3}$$

6 Equation de Chandrasekhar

$$\frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^2 \frac{d\Phi}{d\eta} \right) = - \left(\Phi^2 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2}$$

Conditions aux limites :

$$\begin{aligned}\Phi(0) &= 1 \\ \Phi'(0) &= 0\end{aligned}$$

On résout numériquement cette équation puis on repasse dans les bonnes dimensions.

$$\eta = \frac{r}{a}$$

$$\Phi = \frac{1}{y_0} \sqrt{1 + \frac{\rho^{\frac{2}{3}}}{C}}$$

On inverse

$$\begin{aligned}r &= a\eta \\ \rho &= C [(y_0\Phi)^2 - 1]^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Les constantes valent

$$C = \frac{8\pi m_e^3 c^3 m_p}{3h^3} \mu_e = C_1 \mu_e$$

$$a = \frac{1}{C y_0} \sqrt{\frac{2\beta}{\pi G}} = r_a \frac{1}{\mu_e y_0}$$

avec

$$r_a = \frac{1}{C_1} \sqrt{\frac{2\beta}{\pi G}}$$

7 Pas de temps pour une naine blanche

On regarde le rapport $\frac{\tau}{dt_{\min}}$ où τ est le temps caractéristique de l'évolution de l'étoile et dt_{\min} le pas de temps imposé par la CFL. Normalement le dt_{\min} est au centre

$$dt_{\min} = \frac{h_{\min}}{c_{s,\max}}$$

puisque c_s est maximal au centre et h minimal. Le τ correspond à la traversée d'une onde sonore à travers R .

$$\tau = \frac{R}{\bar{c}_s}$$

Au final,

$$\frac{\tau}{dt_{\min}} = \frac{R}{h_{\min}} \frac{c_{s,\max}}{\bar{c}_s} \approx \frac{R}{h_{\min}}$$

car c_s varie à peine d'un facteur 10 entre $r = [0, R]$. Ce qui doit correspondre à

$$\frac{\tau}{dt_{\min}} \approx N^{\frac{1}{3}}$$

En effet

$$h \approx n^{-\frac{1}{3}} \approx \left(\frac{R^3}{N} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Application numérique. Unités du code ($M_\odot, R_\odot, T_\odot = \sqrt{\frac{R_\odot^3}{M_\odot G}}$) (donc $G = 1$).

On prend une WD d'à peu près $M = M_\odot, R = 10^{-2}R_\odot$. Ça donne des $c_s \approx 10$. En effet, grossièrement à l'équilibre

$$\frac{P}{R} = \rho \frac{M_\odot G}{R^2}$$

D'où

$$c_s \approx \sqrt{\frac{P}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{M_\odot G}{R}} = \sqrt{\frac{R_\odot}{R} \frac{R_\odot}{T_\odot}} = \sqrt{\frac{R_\odot}{R}} \approx 10$$

Au final, on s'attend à un dt_{\min} de

$$dt_{\min} = \frac{h_{\min}}{c_{s,\max}} \approx \frac{h_{\min}}{10}$$

$$dt_{\min} = \frac{\tau}{N^{\frac{1}{3}}} = \frac{R}{\bar{c}_s N^{\frac{1}{3}}} \approx \frac{10^{-2}}{10 N^{\frac{1}{3}}} \stackrel{N=10^5}{=} [10^{-4}, 10^{-5}]$$

8 Tillotson equation

In the Tillotson EOS thermodynamic phase space is divided into a compressed region ($\rho > \rho_0$) and an expanded region ($\rho < \rho_0$), where ρ, ρ_0 are the density and zero-pressure density, respectively. The expanded region is further divided into **three** subregions, based on the material's internal energy e : (1) expanded cold state ($u < u_{IV}$), (2) expanded hot state ($u > u_{CV}$), which converges to ideal gas at low densities, and (3) an intermediate state ($u_{IV} < e < u_{CV}$), known as the mixed phase state. Here, u_{IV} , and u_{CV} are the energies at incipient vaporization and complete vaporization, respectively. In Tillotson (1962) the mixed phase state was governed by the same equation as the expanded cold state. To avoid pressure discontinuities, in modern approaches the mixed phase state is often assigned an alternative equation, which is simply a linear interpolation of the equations of the expanded subregions (Holian and Holian, 1989). The interpolation is purely mathematical, and does not represent a physical phase transition. Tillotson is convenient to implement in hydrocodes, is computationally fast, but suffers from the lack of phase transitions, and the exclusion of entropy and temperature

We write

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{\rho}{\rho_0} && \text{(compression)} \\ \chi &= \eta - 1 && \text{(strain)}\end{aligned}$$

1. Compressed region $\rho \geq \rho_0$

$$p = \left[a + \frac{b}{1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}} \right] \rho u + A\chi + B\chi^2$$

2. Expanded ($\rho_{IV} < \rho < \rho_0$) cold state ($u < u_{IV}$) Same thing
3. Expanded but completely vaporized ($\rho < \rho_0$) hot state ($u > u_{CV}$)

$$p = a\rho u + \left[\frac{b}{1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}} \rho u + A\chi e^{-\beta(\frac{\rho_0}{\rho} - 1)} \right] e^{-\alpha(\frac{\rho_0}{\rho} - 1)^2}$$

4. Between ($u_{IV} < u < u_{CV}$), ($\rho_{IV} < \rho < \rho_0$): linear interpolation

$$p = \frac{(u - u_{IV})p_3 + (u_{CV} - u)p_2}{u_{CV} - u_{IV}}$$

5. Low energy expansion ($\rho < \rho_{IV}, u < u_{IV}$)

$$p = \left[a + \frac{b}{1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}} \right] \rho u + A\chi$$

8.1 Soundspeed

La vitesse du son est définie par

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$$

Dans le domaine (P, ρ, u)

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_u d\rho + \left(\frac{\partial P}{\partial u} \right)_\rho du$$

Donc

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_u + \left(\frac{\partial P}{\partial u} \right)_\rho \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)_s$$

Il faut donc appliquer le premier principe à un processus isentropique dans le domaine (u, ρ, s)

$$du = -P dV = -P d\frac{1}{\rho} = \frac{P}{\rho^2} d\rho$$

Finalement

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_u + \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial P}{\partial u} \right)_\rho$$

C'est parti Déjà

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \rho} &= \frac{\partial \eta}{\partial \rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \rho} &= \frac{1}{\rho_0} \\ \frac{\partial \chi}{\partial \eta} &= 1 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial \eta} &= \frac{\partial(\eta - 1)^2}{\partial \eta} = 2(\eta - 1) = 2\chi \end{aligned}$$

1. Compressed region $\rho \geq \rho_0$

$$p = \left[a + \frac{b}{1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}} \right] \rho_0 \eta u + A\chi + B\chi^2$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \eta} &= \left[a + \frac{b}{1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}} \right] \rho_0 u + \frac{u}{E_0} \frac{2}{\eta^3} \left[\frac{b}{\left(1 + \frac{u}{E_0 \eta^2} \right)^2} \right] \rho_0 \eta u \\ &\quad + A + 2B\chi \\ \frac{\partial p}{\partial \rho} &= \left[a + \frac{b}{1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}} \right] u + \frac{u^2}{E_0} \frac{2}{\eta^2} \left[\frac{b}{\left(1 + \frac{u}{E_0 \eta^2} \right)^2} \right] + \frac{1}{\rho_0} (A + 2B\chi) \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial u} &= \left[a + \frac{b}{1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}} \right] \rho - \frac{1}{E_0 \eta^2} \left[\frac{b}{\left(1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}\right)^2} \right] \rho u \\ \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial u} &= \frac{p}{\rho} \left\{ \left[a + \frac{b}{1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}} \right] - \frac{u}{E_0 \eta^2} \left[\frac{b}{\left(1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}\right)^2} \right] \right\} \\ \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial u} &= \frac{p}{\rho} \left\{ \left[a + \frac{b}{\left(1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}\right)^2} \right] \right\}\end{aligned}$$

Finalement,

2. Expanded ($\rho_{IV} < \rho < \rho_0$) cold state ($u < u_{IV}$) Same thing ??
3. Expanded but completely vaporized ($\rho < \rho_0$) hot state ($u > u_{CV}$)

$$p = a\rho u + \left[\frac{b}{1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}} \rho u + A\chi e^{-\beta(\frac{\rho_0}{\rho} - 1)} \right] e^{-\alpha(\frac{\rho_0}{\rho} - 1)^2}$$

On a les dérivées partielles :

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial u} &= a\rho + b\rho \left[\frac{\left(1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}\right) - \frac{u}{E_0 \eta^2}}{\left(1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}\right)^2} \right] \mathcal{E} \\ \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial u} &= \frac{p}{\rho} \left\{ a + b \frac{1}{\left(1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}\right)^2} \mathcal{E} \right\} \\ \mathcal{E} &= e^{-\alpha(\frac{\rho_0}{\rho} - 1)^2} = e^{-\alpha X} \\ X &= \frac{\rho_0}{\rho} - 1 = \frac{1}{\eta} - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial \eta} &= a\rho_0 u + b \left(\left[\frac{1}{1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}} \right] \rho_0 u + \frac{\frac{2u}{E_0 \eta^3}}{\left(1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}\right)^2} \rho u \right) \mathcal{E} \\ &\quad + \left(A \left[1 + \chi \frac{\beta}{\eta^2} \right] e^{-\beta X} \right) \mathcal{E} \\ &\quad + \left[\frac{b\rho u}{1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}} + A\chi e^{-\beta X} \right] \left(\frac{2\alpha X}{\eta^2} \right) \mathcal{E}\end{aligned}$$

Soit

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = au + \mathcal{E} \left(b \left[\frac{1 + \frac{2\alpha X}{\eta}}{1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}} + \frac{2u}{E_0 \eta^2 (1 + \frac{u}{E_0 \eta^2})^2} \right] u + \frac{A}{\rho_0} \left(1 + (2\alpha X + \beta) \frac{\chi}{\eta^2} \right) e^{-\beta X} \right)$$

4. Between $(u_{\text{IV}} < u < u_{\text{CV}})$, $(\rho_{\text{IV}} < \rho < \rho_0)$: linear interpolation

$$p = \frac{(u - u_{\text{IV}})p_3 + (u_{\text{CV}} - u)p_2}{u_{\text{CV}} - u_{\text{IV}}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \eta} &= \frac{(u - u_{\text{IV}}) \frac{\partial p_3}{\partial \eta} + (u_{\text{CV}} - u) \frac{\partial p_2}{\partial \eta}}{u_{\text{CV}} - u_{\text{IV}}} \\ \frac{\partial p}{\partial u} &= \frac{p_3 - p_2 + (u - u_{\text{IV}}) \frac{\partial p_3}{\partial u} + (u_{\text{CV}} - u) \frac{\partial p_2}{\partial u}}{u_{\text{CV}} - u_{\text{IV}}} \end{aligned}$$

8.2 Initialiser une sphère de Tillotson

8.2.1 Cas général

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) &= -4\pi G\rho \\ p &= \left[a + \frac{b}{1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}} \right] \rho u + A\chi + B\chi^2 \end{aligned}$$

La première équation s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) + \frac{2}{r} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} &= -4\pi G\rho \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) + \frac{2}{r} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} &= -4\pi G\rho \\ \left[-\frac{\frac{dp}{dr}}{\rho^2} \frac{dp}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2 p}{dr^2} \right] + \frac{2}{r} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} &= -4\pi G\rho \\ \frac{d^2 p}{dr^2} + \left(\frac{2}{r} - \frac{\frac{dp}{dr}}{\rho} \right) \frac{dp}{dr} &= -4\pi G\rho^2 \end{aligned}$$

Or

$$P = P(\rho)$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dr} &= \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} \\ \frac{d^2P}{dr^2} &= \frac{dp}{d\rho} \frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{dp}{d\rho} \right) \frac{d\rho}{dr} \\ &= \frac{dp}{d\rho} \frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{d^2P}{d\rho^2} \left(\frac{d\rho}{dr} \right)^2\end{aligned}$$

Finalement

$$\frac{dp}{d\rho} \frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{d^2P}{d\rho^2} \left(\frac{d\rho}{dr} \right)^2 + \left(\frac{2}{r} - \frac{\frac{d\rho}{dr}}{\rho} \right) \left(\frac{dp}{d\rho} \right) \left(\frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi G \rho^2$$

De manière plus lisible,

$$p' \frac{d^2\rho}{dr^2} + p'' \left(\frac{d\rho}{dr} \right)^2 + p' \left(\frac{2}{r} - \frac{\frac{d\rho}{dr}}{\rho} \right) \left(\frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi G \rho^2$$

Sous forme vectorielle

$$\begin{aligned}\mu &= \rho \\ \nu &= \frac{d\rho}{dr}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{dr} &= \nu \\ p'(\mu) \frac{d\nu}{dr} + p''(\mu) \nu^2 + p'(\mu) \left(\frac{2}{r} - \frac{\nu}{\mu} \right) \nu &= -4\pi G \mu^2\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{dr} &= \nu \\ \frac{d\nu}{dr} &= \left(\frac{\nu}{\mu} - \frac{2}{r} \right) \nu - \frac{p''(\mu)}{p'(\mu)} \nu^2 - \frac{1}{p'(\mu)} 4\pi G \mu^2\end{aligned}$$

Il reste les conditions aux limites. Si on connaît déjà le rayon final alors simplement :

$$\rho(R_{\max}) = 0$$

Sinon on impose une densité arbitraire au centre

$$\rho(0) = \rho_a$$

et le rayon est alors déterminé par l'annulation de ρ .

8.2.2 Application à Tillotson

On part d'une sphère condensée

$$\begin{aligned}
 p &= \left[a + \frac{b}{1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}} \right] \rho u + A\chi + B\chi^2 \frac{\partial p}{\partial \rho} \\
 \frac{\partial p}{\partial \rho} &= \left[a + \frac{b}{1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}} \right] u + \frac{u^2}{E_0} \frac{2}{\eta^2} \left[\frac{b}{\left(1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}\right)^2} \right] + \frac{1}{\rho_0} (A + 2B\chi) \\
 \rho_0 \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} &= \left[\frac{2 \frac{u}{E_0 \eta^3} bu}{\left(1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}\right)^2} \right] + b \frac{u^2}{E_0} \frac{2}{\eta^2} \left[\frac{4 \frac{u}{E_0 \eta^3}}{\left(1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}\right)^3} \right] - \frac{u^2}{E_0} \frac{4}{\eta^3} \left[\frac{b}{\left(1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}\right)^2} \right] + \frac{2B}{\rho_0} \\
 &= \frac{8b \frac{u^3}{E_0^2 \eta^5}}{\left(1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}\right)^3} - \frac{2b \frac{u^2}{E_0 \eta^3}}{\left(1 + \frac{u}{E_0 \eta^2}\right)^2} + \frac{2B}{\rho_0}
 \end{aligned}$$

Problèmes

1. Tillotson ne permet pas de récupérer la température donc j'impose température uniforme ($u = 0$ partout)
2. En dessous d'une certaine densité ($\rho \lesssim 0.95\rho_0$) la pression devient négative. Domaine non pris en compte par Tillotson ? Correspond à une situation non physique donc j'impose $P = 0$ et le rayon de la sphère est le rayon où P s'annule.
3. Problème qui suit : la densité n'est pas encore nulle au moment la pression s'annule. Il vaudrait mieux qu'il y ait une discontinuité de densité donc j'étends un peu au delà du rayon initial et j'y fixe $\rho = 10^{-6}$.

9 Formation de la Lune

Corps	Masse (kg)	Rayon (km)	Densité (kg m^{-3})
Terre	6×10^{24}	6400	5.47×10^3
Lune	7×10^{22}	1700	3.40×10^3
Théia	5×10^{22}	3250	3.48×10^2

Table 1: Masses, rayons et densités moyennes (densités calculées par $\rho = M/(\frac{4}{3}\pi R^3)$, R en mètres).