Unidade II:
Somatórios (∑)

Exercício Resolvido (1):

Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros.

Resposta:

```
int soma(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 0; i < n; i++){
        soma += 1;
    }
    return soma;
}
```

$$\sum_{0 <= i <= n} i$$

Exercício Resolvido (2):

O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Quantas comparações entre registros ele realiza?

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {
        int menor = i;
        for (int j = (i + 1); j < n; j++){
                if (array[menor] > array[j]){
                        menor = j;
                }
        }
        swap(menor, i);
}
```

Resposta:

$$\sum_{0 <= i <= n-2} (n - i - 1)$$

Exercício Resolvido (3):

$$\sum_{n=1}^{4} n^2 = ?$$

Escolha 1 resposta:

- $1 + 2 + 3 + 4$
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$
- $(1 + 2 + 3 + 4)^2$
- $1^2 + 4^2$

Resposta:
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

Exercício Resolvido (4):

Resolva:

$$\sum_{1 <= i <= 4} 3i = ?$$

Resposta:

3*1 + 3*2 + 3*3 + 3*4 =
3(1 + 2 + 3 + 4) = 30

Exercício Resolvido (5):

Resolva:

$$\sum_{1 <= i <= 4} (3 - 2i) = ?$$

Resposta:

(3 + 3 + 3 + 3) - (2(1 + 2 + 3 + 4) = 12 - 20 = -8

Exercício Resolvido (6):

Resolva:

$$\sum_{1 <= i <= 3} (2i + x) = ?$$

Resposta:

2 * sum i + sum x =   2(1 + 2 + 3) + 3x = 12 + 3x

Exercício Resolvido (7):

Resolva:

$$\sum_{0 <= i <= 5} i * (i - 1) * (5 - i) = ?$$

Resposta:

0 *(-1)* 5 +   1 * 0 * 4 +   2 * 1 * 3 +   3 * 2 * 2 +   4 * 3 * 1 +   5 * 4 * 0 = 0 + 0 + 6 + 12 + 12 +0 = 30

Exercício Resolvido (8):

podemos afirmar que $\sum_{0 <= i <= 5} i * (i - 1) * (5 - i) = \sum_{2 <= i <= 4} i * (i - 1) * (5 - i)$

Resposta:

Sim, pois as equações onde i = 0, 1, 5   são iguais a 0

Exercício Resolvido (9):

Considere a soma $4 + 25 + 64 + 121$.

Qual expressão é igual à soma acima?

Escolha todas as respostas aplicáveis:

- $\sum_{i=0}^{3} (i^2 + 2i + 4)$
- $\sum_{i=0}^{3} (3i + 2)^2$
- Nenhuma das anteriores

Resposta:

B) $\sum (3i + 2)^2$

0 <= i <= 3

Exercício Resolvido (10):

$$\sum_{m=1}^{4} 8k - 6m = ?$$

Escolha 1 resposta:

- $8k - 6 + 8k - 12 + 8k - 18 + 8k - 24$
- $2 + 4 + 6 + 8$
- $8 - 6m + 16 - 6m + 24 - 6m + 32 - 6m$
- $0 + 2 + 4 + 6$

Resposta:

A) $8k - 6 + 8k - 12 + 8k - 18 + 8k - 24$

Exercício Resolvido (11):

Aplique associatividade para unificar os dois somatórios abaixo:

$$\sum_{3}^{n} a_i + \sum_{1}^{n} b_i$$

Resposta:

$$b_1 + b_2 + \sum_{3 <= i <= n} (a_i + b_i)$$

Exercício Resolvido (12):

Mostre (e justifique) se cada expressão abaixo é verdadeira ou falsa:

$a)\ (\quad)\ \sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3;$

$b)\ (\quad)\ \sum_{p=0}^{1000} (3+p) = 3 + \sum_{p=0}^{1000} p;$

$c)\ (\quad)\ \sum_{\ell=1}^{n} (3\ell) = 3\sum_{\ell=1}^{n} \ell;$

$d)\ (\quad)\ \sum_{k=0}^{12} k^p = \left(\sum_{k=0}^{12} k\right)^p;$

$e)\ (\quad)\ \sum_{t=8}^{32} (3+t) = 75 + \sum_{t=8}^{32} t.$

Resposta:

a) **true**

Ambos são iguais, pelo fato de que o primeiro somatório começa em 0.

b) **false**

Seria verdadeiro se 3 estivesse dentro de um somatório $\sum_{0<= p <=1000}$

c) **true**

Pela propriedade da distributividade.

d) **false**

K está sendo elevado a ^{2} nao o somatório

e) **true**

3*25 = 75, sendo possível fazer a distributividade.

Exercício Resolvido (13):

Explique a propriedade comutativa e, em seguida, ilustre sua resposta com o somatório

Resposta:

A propriedade comutativa permite seja possível fazer as somas dos termos em qualquer ordem.

$$S = \sum_{0 <= i <= 4} (3 + 4i) = \sum_{0 <= i <= 4} (3 + 4[4-i])$$

Exercício Resolvido (14):

Mostre os valores de a e b na sequência 1, 4, 7, 10, 13, ...

Resposta:

Os valores de **a** e **b** são 1 e 3

$$S = \sum_{0 <= i <= n} (a + bi) = \sum_{0 <= i <= n} (1 + 3i)$$

Exercício Resolvido (15):

Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma Sn dos elementos de uma PA.

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a + b.i$$

Resposta: obs: $\sum = \sum_{0<=i<=n}$

$2S_n = \sum a + bi + \sum a + bn - bi$
$2S_n = \sum a + bi + a + bn - bi$
$2S_n = \sum 2a + bn$
$2S_n = (2a + bn)\sum 1$
$2S_n = (2a + bn)(n+1)$
$S_n = ((2a + bn)(n+1))/2$

Exercício Resolvido (16):

Sabendo a fórmula da soma de uma progressão aritmética qualquer, mostre a fórmula para o somatório de 0 + 1 + 2 + 3 + ... + n = $\sum_{0 <= i <= n} i$

Resposta:

$$\sum_{0 <= i <= n} i = \sum_{0 <= i <= n} (0 + 1*i) = (2*0 + 1*n)(n+1)/2 = n(n+1)/2$$

Exercício Resolvido (17):

Dada a fórmula fechada do somatório dos n primeiros números inteiros, mostre um algoritmo mais eficiente que o apresentado abaixo:

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

Resposta:

```
int somatorio(int n){
   return( (n * (n + 1))/2 );
} // end somatorio()
```

Exercício Resolvido (18):

O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos ele realiza $\sum_{0 <= i <= n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

Resposta:

obs: $\sum = \sum_{0 <= i <= n-2}$

$\sum(n - i - 1) = \sum n - \sum 1 - \sum i$
$n(n-1) - 1(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2}$
$\frac{2n(n-1) - 2(n-1) - (n^2 - 3n + 2)}{2}$
$\frac{2n^2 - 2n - 2n + 2 - n^2 + 3n - 2}{2}$
$n^2 - n / 2$

Exercício Resolvido (19):

Justifique a igualdade:

$$\sum_{1}^{n} i = \sum_{0}^{n} i$$

Resposta:
Ambos são iguais pelo fato de que o primeiro somatório começar somando em 0.

Exercício Resolvido (20):

Justifique a igualdade:

$$\sum_{1}^{n} a_i \neq \sum_{0}^{n} a_i$$

Resposta:
Eles são diferentes, porque, a_0 não será necessariamente igual a zero.

Exercício Resolvido (21):

Justifique a igualdade:

$$\sum_{1}^{n} a_i = \sum_{0}^{n-1} a_{i+1}$$

Resposta:
Eles são iguais, porque, mesmo que os somatórios possuam limites inferiores diferentes, n do segundo somatório é decrementado em 1, e i é incrementado em 1, igualando seus valores finais.

Exercício Resolvido (22):

Por que a primeira fórmula é mais adequada? (Dica: mostre os termos quando i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... , n-1 e n)

$$\sum_{i=2}^{n-1} i\,.\,(i-1)\,.\,(n-i) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} i\,.\,(i-1)\,.\,(n-i)$$

Resposta:

Os termos a_0, a_1, a_3 serão iguais a 0.

obs: n = 3

$\sum_{0<= i <= 3} i*(i-1)*(3-1) = 0*(-1)*3 +$ $1*0*2 +$ $2*1*1 +$ $3*2*0 = 0_0 + 0_1 + 2_2 + 0_3 = 2$
$\sum_{2<= i <= 3-1} i*(i-1)*(3-1) = 2*1*1 = 2_2 = 2$

Exercício Resolvido (23):

Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma Sn dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} a.x^i$$

Resposta:obs: $\sum = \sum_{0<=i<=n}$

$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum a_{i+1}$
$S_n + ax^{n+1} = ax^0 + \sum ax^{i+1}$

$S_n + ax^{n+1} = a + x\sum ax^i$
$S_n + ax^{n+1} = a + xS_n$
$S_n - xS_n = a - ax^{n+1}$
$(1 - x)S_n = a - ax^{n+1}$
$S_n = (a - ax^{n+1})/(1 - x)$

Exercício Resolvido (24):

Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} i.2^i$$

Resposta:

$s_{n+1} = s_n + (n+1).2^{n+1} = 0.2^0 + \sum_{0<= i <= n} (i+1).2^{i+1}$
$s_n + (n+1).2^{n+1} = \sum_{0<= i <= n} (i+1).2^{i+1}$
$s_n + (n+1).2^{n+1} = \sum_{0<= i <= n} i.2^{i+1} + \sum_{0<= i <= n} 2^{i+1}$
$s_n + (n+1).2^{n+1} = 2\sum_{0<= i <= n} i.2^{i} + 2\sum_{0<= i <= n} 2^{i}$
$s_n + (n+1).2^{n+1} = 2.s_n + 2(2^{n+1}-1)$
$(n+1).2^{n+1} - 2(2^{n+1}-1) = 2.s_n - s_n$
$2n^{n+1} + 2^{n+1} - 4^{n+1} + 2 = s_n$
$2n^{n+1} - 2^{n+1} + 2 = s_n$
$(n - 1)2^{n+1} + 2 = s_n$

Exercício Resolvido (25):

Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{0}^{n}(3+i) =$$

Resposta:

Obs: $\sum = \sum_{0 <= i <= n}$

$\sum 3 + i$
$\sum 3 + \sum i$
3(n+1) + (n[n+1])/2
$(7n + 6 + n^2)/2$ (Verdadeiro)

1º passo:	2º passo:
$(7n + 6 + n^2)/2$	$S_n = S_{n-1} + a_n$
$(7*0 + 6\ 0^2)/2$	$(7[n-1] + 6 + [n-1]^2)/2 + 3 + n$
6/2	$(7n - 7 + 6 + n^2 - 2n + 1 + 6 + 2n)/2$
3 (Verdadeiro)	$(7n + 6 + n^2)/2$ (Verdadeiro)

Exercício Resolvido (26):

Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{1}^{n}[(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

Resposta:

Obs: $\sum = \sum_{1 <= i <= n}$

$\sum [(2i+1)^2 - (2i)^2]$
$\sum 4i^2 + 4i + 1 - 4i^2$
$\sum 4i + 1$
$4\sum i + \sum 1$
$4 * n(n+1)/2 + n$
$2n(n+1) + n$
$2n^2 + 3n$

1º passo:	2º passo:
$2n^2 + 3n$	$S_n = S_{n-1} + a_n$
$2 * 1^2 + 3*1$	$2(n-1)^2 + 3(n-1) + [(2i+1)^2 - (2i)^2]$
5 (Verdadeiro)	$2(n^2 - 2n+1) + 3n - 3 + 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2$
	$2n^2 - 4n + 2 + 3n - 3 + 4n + 1$
	$2n^2 + 3n$ (Verdadeiro)

Exercício Resolvido (27):

Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{1}^{n}[(5i+1)^2-(5i-1)^2] =$$

Resposta:

Obs: $\sum = \sum\limits_{1 <= i <= n}$

$\sum [(5i + 1)^2 - (5i - 1)^2]$
$\sum (25i^2 + 10i + 1) - (25i^2 - 10i + 1)$
$\sum 25i^2 + 10i + 1 - 25i^2 + 10i - 1$
$20\sum i$
$20 * n(n+1)/2$
$10n(n+1)$
$10n^2 + 10n$ (Verdadeiro)

1º passo: 2º passo:

$10n^2 + 10n$	$S_n = S_{n-1} + a_n$
$10 * 1^2 + 10 * 1$	$10(n-1)^2 + 10(n-1) + 20n$
$10 + 10$	$10(n^2 - 2n + 1) + 10n - 10 + 20n$
20 (Verdadeiro)	$10n^2 - 20n + 10 + 10n - 10 + 20n$
	$10n^2 + 10n$ (Verdadeiro)

Exercício Resolvido (28):

No Exercício Resolvido (24), encontramos a fórmula abaixo. Prove por indução que a mesma está correta.

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i.2^i = (n-1).2^{n+1} + 2$$

Resposta:

Obs: $\sum = \sum\limits_{0 <= i <= n}$

1º passo:	2º passo:
$(n-1)2^{n+1} + 2$	$S_n = S_{n-1} + a_n$
$(0-1)2^{0+1} + 2$	$([n-1]-1)2^{(n-1) + 1} + 2 + n2^n$
$(-1)2 + 2$	$(n-2)2^n + 2 + n2^n$
$-2 + 2$	$n2^n + n2^n - 4^n + 2$
0 (Verdadeiro)	$(2n - 2)2^n + 2$
	$(n - 1)2^n * 2 + 2$
	$(n - 1)2^{n+1} + 2$ (Verdadeiro)

Exercício Resolvido (29):

Aplique perturbação para encontrar a fórmula do somatório abaixo.

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} i^2$$

Resposta:

Obs: $\sum = \sum_{0 <= i <= n}$

$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum a_{i+1}$
$S_n + a_{n+1} = 0^2 + \sum (i+1)^2$
$S_n + a_{n+1} = \sum i^2 + \sum 2i + \sum 1$
$S_n + a_{n+1} = S_n + n(n+1) + n+1$
$S_n + a_{n+1} = S_n + n(n+1) + n+1$ (cancela a equação, então...)

$S_{cubo} = \sum i^3$ (usaremos o somatório do cubo para achar a fórmula do somatório do quadrado)
$S_{cubo} + a_{n+1} = a_0 + \sum a_{i+1}$
$S_{cubo} + (n+1)^3 = 0^3 + \sum (i+1)^3$
$S_{cubo} + (n+1)^3 = \sum i^3 + 3i^2 + 3i + 1$
$S_{cubo} + (n+1)^3 = \sum i^3 + \sum 3i^2 + \sum 3i + \sum 1$
$S_{cubo} + (n+1)^3 = S_{cubo} + 3S_n + 3n(n+1)/2 + n+1$
$S_{cubo} + (n+1)^3 = S_{cubo} + 3S_n + 3n(n+1)/2 + n+1$
$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)$
$6S_n = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)$
$6S_n = 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2$
$6S_n = 2n^3 + 3n^2 + n$
$S_n = (2n^3 + 3n^2 + n)/6$

Exercício (1):

Faça um método int somatorioPA(double a, double b, int n) que retorna o somatório dos n primeiros termos de uma PA com termo inicial a e razão b.

Resposta:

Pode se encontrar na pasta ***exercicios_praticos*** como Exerc01.java

Exercício (2)(Slide 104):

Aplique P1 para unificar os somatórios abaixo:

$$\sum_{1}^{m-3} a_i + \sum_{m}^{n} a_i = a_m + \sum_{1}^{n} a_i,\ 1 \leq m \leq n$$

Resposta:

Exercício (2)(Slide 224):

Faça um vídeo explicando como encontramos o somatório dos quadrados perfeitos (tempo máximo de 5 minutos).

Resposta:

Link Youtube: https://youtu.be/FZmlclVQLEc

Exercício (3):

Um algoritmo de ordenação tradicional é o Inserção. Faça a análise de complexidade desse algoritmo para os números de comparações e movimentações entre registros no pior e melhor caso.

Obs:

Será feita a análise do seguinte código de Inserção:

```
for (int i = 1; i < n; i++) {
    int tmp = array[i];
    int j = i - 1;
    while ( (j >= 0) && (array[j] > tmp) ){
        array[j + 1] = array[j];
        j--;
    }
    array[j + 1] = tmp;
}
```

Resposta:

	Melhor caso
COMP	**C(n) = (n-1)**
MOV	**M(n) = 2(n-1)**
Algoritmo	**O(n)**

	Pior caso
COMP	$\sum_{0 <= i <= (n-1)} i$ **= C(n) = n(n-1)/2**
MOV	**(C(n) - 1) +2 -> n(n-1)/2 - 1 -> (n(n-1)-2)/2**
Algoritmo	**O(n^2)**