Ampliación de Algoritmia - Ejercicios de Examen

Ramon Cano Aparicio, Alvaro Armada y
David Nogales Pérez

6 de Junio del 2021

1. Problema 2

Enunciado:

Consideramos el problema EXACT SPANNING TREE:

Input: un grafo con pesos G y dos enteros l y u.

Question: Existe un *spanning tree* T con peso w tal que $l \leq w \leq u$?

Queremos demostrar si el problema EXACT SPANNING TREE es NP-COMPLETE.

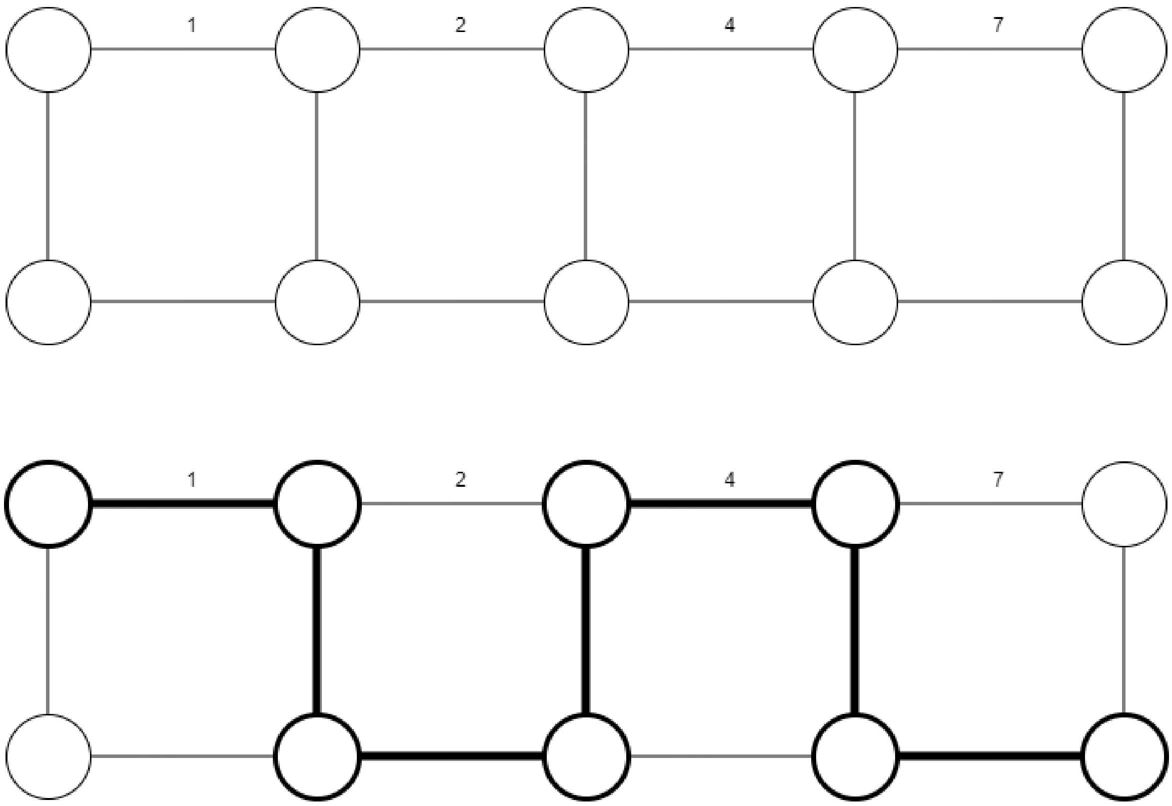
Solución:

Para demostrar que el problema es NP-COMPLETE reduciremos el problema *Subset Sum* que ya sabemos que pertenece a NP-COMPLETE.

Recordamos que el problema *Subset Sum* se define como: dado un conjunto de enteros $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y un objetivo t, ¿Existe un subconjunto de enteros en S que sume exactamente t? $SubsetSum \leq ExactSpanningTree$.

Construimos un *ladder graph G'* de $n + 1$ escalones, donde $n = |S|$. Colocamos los números $x_1, x_2, ..., x_n$ como pesos en uno de los lados a lo largo de la escalera, el resto de aristas tendrán peso 0. Las variables l y u tomaran los valores $l = t = u$. De esta manera hemos reducido el input de *Subset Sum* a uno de *Exact Spanning Tree*.

Una vez tenemos el grafo *G'* podemos calcular un *Spanning Tree* de exactamente peso t, con el que podemos obtener la solución del *Subset Sum*, ya que sabríamos que elementos del set escoger teniendo en cuenta las aristas del árbol que tienen un peso superior a 0.



Ejemplo 1: $S = \{1, 2, 4, 7\}$ y $t = 5$

El nuevo grafo *G'* tendrá $2(n + 1)$ vértices, por lo que podremos construirlo en tiempo polinómico. Ya que podemos reducir $SubsetSum \leq ExactSpanningTree$ con un algoritmo polinómico, queda demostrado que *Exact Spanning Tree* pertenece a NP-Complete.