Ampliación de Algoritmia - Ejercicios de Examen

Ramon Cano Aparicio, Alvaro Armada y
David Nogales Pérez

6 de Junio del 2021

1. Problema 2

Enunciado:

Consideramos el problema EXACT SPANNING TREE:

Input: un grafo con pesos G y dos enteros l y u.

Question: Existe un *spanning tree* T con peso w tal que $l \leq w \leq u$?

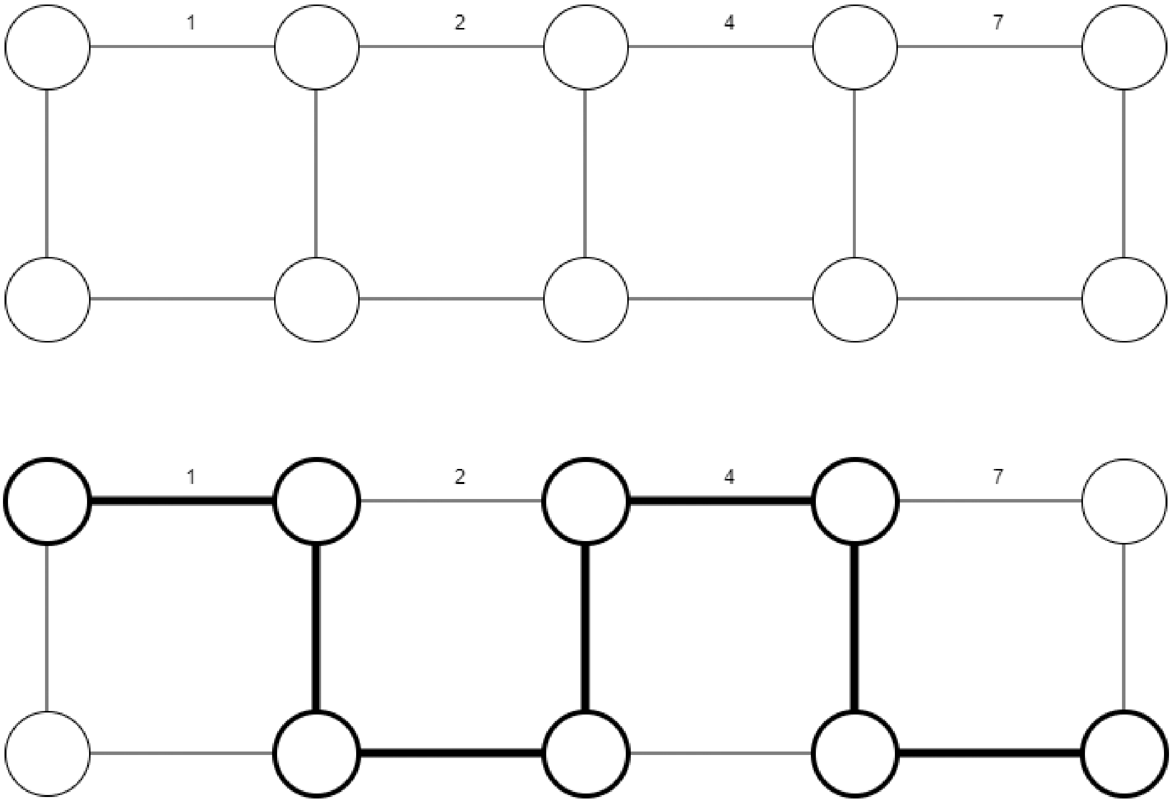
Queremos demostrar si el problema EXACT SPANNING TREE es NP-COMPLETE.

Solución:

Para demostrar que el problema es NP-COMPLETE primero demostraremos que es NP. Esto es trivial. Dado un MST podemos calcular su peso simplemente recorriendo las aristas, con coste polinómico. Luego solamente nos queda comprobar si este peso w está entre l y u.
A continuación hace falta demostrar que pertenece a NP-Hard, para ello reduciremos el problema *Subset Sum*, que ya sabemos que pertenece a NP-COMPLETE, a Exact Spanning Tree.
Recordamos que el problema *Subset Sum* se define como: dado un conjunto de enteros $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y un objetivo t, ¿Existe un subconjunto de enteros en S que sume exactamente t? $SubsetSum \leq ExactSpanningTree$.

Construimos un *ladder graph G'* de $n + 1$ escalones, donde $n = |S|$. Colocamos los números $x_1, x_2, ..., x_n$ como pesos en uno de los lados a lo largo de la escalera, el resto de aristas tendrán peso 0. Las variables l y u tomaran los valores $l = t = u$. De esta manera hemos reducido el input de *Subset Sum* a uno de *Exact Spanning Tree*.

Una vez tenemos el grafo *G'* podemos calcular un *Spanning Tree* de exactamente peso t, con el que podemos obtener la solución del *Subset Sum*, ya que sabríamos que elementos del set escoger teniendo en cuenta las aristas del árbol que tienen un peso superior a 0.



Ejemplo 1: $S = \{1, 2, 4, 7\}$ y $t = 5$

El nuevo grafo *G'* tendrá $2(n + 1)$ vértices, por lo que podremos construirlo en tiempo polinómico. Ya que podemos reducir $SubsetSum \leq ExactSpanningTree$ con un algoritmo polinómico, queda demostrado que *Exact Spanning Tree* pertenece a NP-Complete.