Föreläsning 4

- Derivata
  - Enkelderivata
  - Partialderivata
  - Tangentplan
  - Högre ordningars derivator
- Kedjeregeln
  - Kedjeregeln för en variabel
  - Kedjeregeln för två variabler
  - Kedjeregeln för flera variabler
- Kedjeregeln i flera led

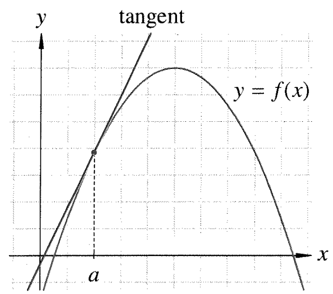
Derivata för reellvärda funktioner

Enkelderivata

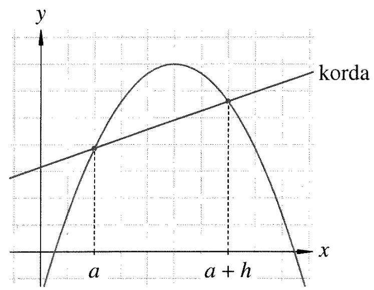
Derivatan av funktionen $f(x)$ i $x=a$ definieras som

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

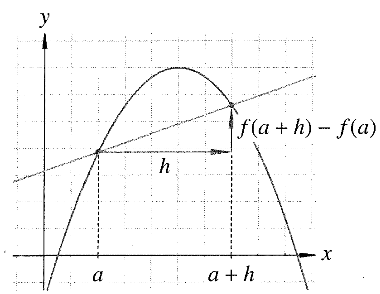
Derivatan anger lutningen av tangenten till $y=f(x)$ i punkten $x=a$.



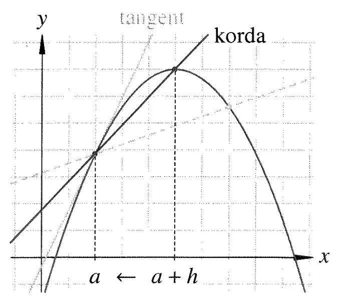
① Funktionskurvan $y=f(x)$ har en tangent genom punkten $(a, f(a))$.



② Bilda kordan genom punkterna $(a, f(a))$ och $(a+h, f(a+h))$.



③ Kordans lutning är $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$



④ Låt $h \to 0$ och då kommer kordans lutning närma sig tangentens lutning

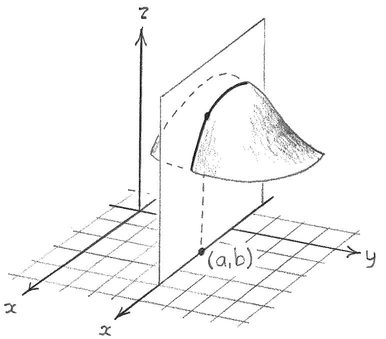
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Partialderivata

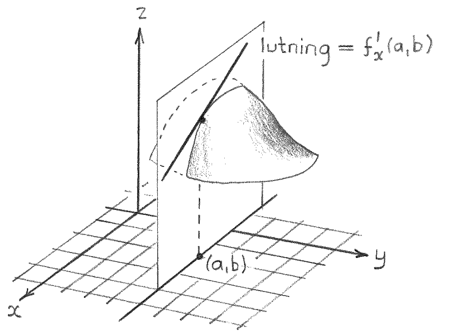
För en reellvärd funktion $f(x,y)$ definieras partialderivatorna av f i punkten (a,b) som

$$f'_x(a,b) = \frac{d}{dx} f(x,b)\Big|_{x=a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

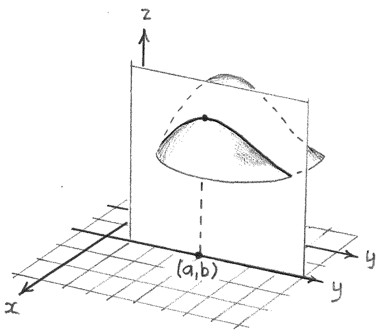
$$f'_y(a,b) = \frac{d}{dy} f(a,y)\Big|_{y=b} = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$$



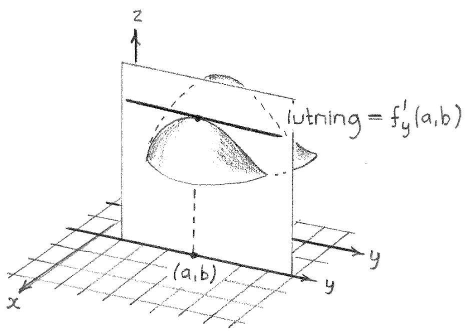
① Håll $y=b$ fix och låt x variera. Då får vi en funktion $f(x,b)$ som bara beror på x.



② Derivatan av $f(x,b)$ i $x=a$ betecknas $f'_x(a,b)$ och anger tangentens lutning i x-led.



③ Håll $x=a$ fix och låt y variera. Då får vi en funktion $f(a,y)$ som bara beror på y.



④ Derivatan av $f(a,y)$ i $y=b$ betecknas $f'_y(a,b)$ och anger tangentens lutning i y-led.

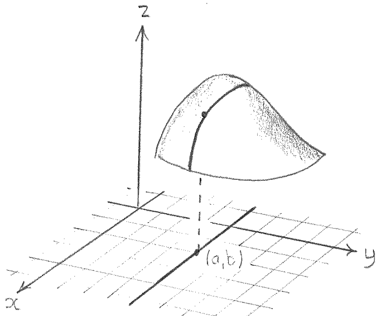
Övning 1: Beräkna partialderivatorna av $f(x,y) = xy + x^2$ i $(x,y) = (2,0)$.

Övning 2: Bestäm partialderivatorna av $f(x,y,z) = \ln(1+e^{xyz})$.

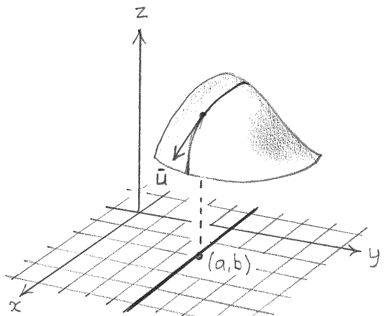
Tangentplan

En normal $\bar{n}$ till tangentplanet för funktionsytan $z = f(x,y)$ i $(x,y,z) = (a,b,f(a,b))$ ges av

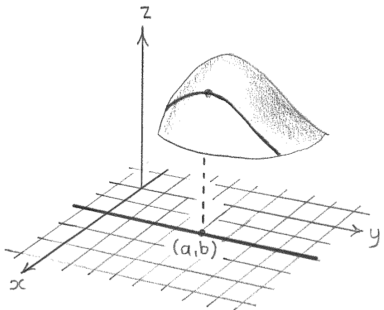
$$\begin{aligned}\bar{n} &= (1,0,f'_x(a,b)) \times (0,1,f'_y(a,b)) \\ &= (-f'_x(a,b), -f'_y(a,b), 1).\end{aligned}$$



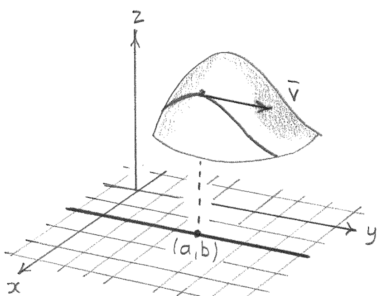
(1) Parametrisera kurvan på funktionsytan ovanför linjen $y = b$,
$\bar{r}(t) = (t, b, f(t,b))$.



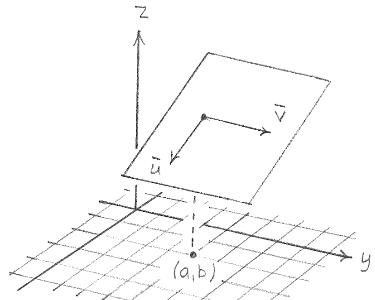
(2) Riktningsvektorn
$\bar{u} = \dot{\bar{r}}(a) = (1, 0, f'_x(a,b))$
är en tangentvektor till ytan i punkten $(a,b,f(a,b))$.



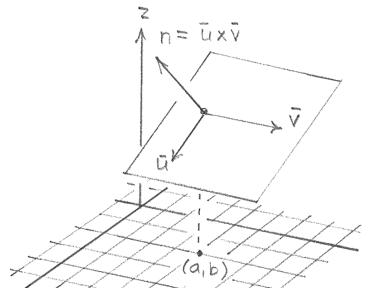
(3) Parametrisera kurvan på funktionsytan ovanför linjen $x = a$,
$\bar{r}(t) = (a, t, f(a,t))$.



(4) Riktningsvektorn
$\bar{v} = \dot{\bar{r}}(b) = (0, 1, f'_y(a,b))$
är en tangentvektor till ytan i punkten $(a,b,f(a,b))$.



(5) Vi har två vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ som är parallella med tangentplanet.



(6) Deras kryssprodukt är alltså en normal till planet.

Exempel 1: Bestäm en ekvation för tangentplanet till $z = x^2y + xy^3 - x + 1$ i punkten $(1,1,2)$.

Exempel 2: Bestäm normallinjen (i parameterform) till ytan $z = x^2 + y^2$ i punkten $(1,1,2)$.
(Normallinjen = den linje som går genom punkten $(1,1,2)$ och är vinkelrät mot ytan i den punkten.)

Högre ordningars derivator

För en reellvärd funktion $f(x,y)$ definieras andra ordningens partialderivator av f i punkten (a,b) som

$$f''_{xx}(a,b) = \frac{\partial}{\partial x} f'_x(x,y) \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}}$$

$$f''_{xy}(a,b) = \frac{\partial}{\partial y} f'_x(x,y) \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}}$$

Derivera först x och därefter y

$$f''_{yx}(a,b) = \frac{\partial}{\partial x} f'_y(x,y) \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}}$$

Derivera först y och därefter x

$$f''_{yy}(a,b) = \frac{\partial}{\partial y} f'_y(x,y) \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}}$$

Övning 3: Bestäm andra ordningens partialderivator av $f(x,y) = x^2y + 3y^3 + x$.

Om en funktion är tillräckligt deriverbar spelar det ingen roll i vilken ordning deriveringar sker.

Om $f(x,y)$ är två gånger kontinuerligt deriverbar i punkten (a,b), då är

$$f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b).$$

Övning 4: Funktionen $f(x,y,z)$ är fem gånger kontinuerligt deriverbar. Para ihop derivator som är lika.

$$f'''''_{xyxzy}$$

$$f'''''_{zxxzx} \qquad f'''''_{yyxzy}$$

$$f'''''_{yyxzx} \qquad f'''''_{xzyyx}$$

$$f'''''_{xxzzx}$$

Kedjeregeln för reellvärda funktioner

Eftersom elementära funktioner byggs upp genom funktionssammansättning av enkla funktioner behövs en deriveringsregel för sammansättningar.

Denna deriveringsregel kallas för kedjeregeln.

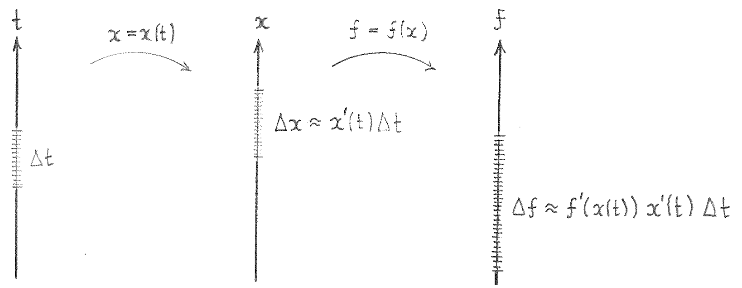
Kedjeregeln för en variabel

Betrakta sammansättningen

$$t \mapsto x(t) \mapsto f(x(t)).$$

Om $f(x)$ och $x(t)$ är kontinuerligt deriverbara funktioner, då är

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \overbrace{f'(x(t))}^{\text{yttre derivata}} \cdot \underbrace{x'(t)}_{\text{inre derivata}}$$



Vid varje steg i sammansättningen förlängs/förkortas små intervall med derivatan som skalfaktor. Hela sammansättningen får produkten av derivatorna som skalfaktor.

Övning 5: Skriv som en sammansättning och derivera med kedjeregeln

a) $\frac{d}{dt}\sqrt{1-3t^2}$

b) $\frac{d}{dt} f(t^2)$

c) $\frac{d}{dt} f(t^2 + h(t))$

Kedjeregeln för två variabler

Betrakta sammansättningen

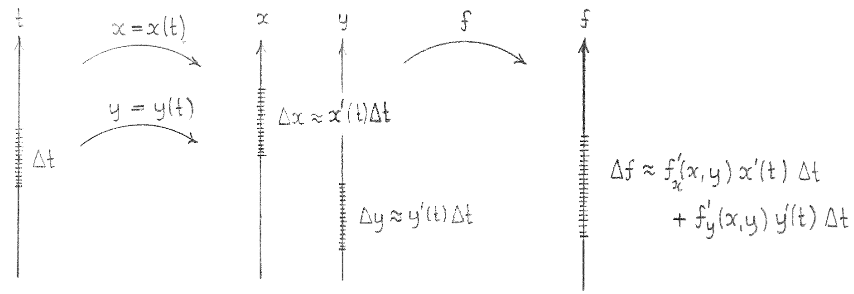
$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \mapsto f(x(t), y(t))$$

Om $f(x,y)$, $x(t)$ och $y(t)$ är kont. deriverbara funktioner, då är

yttre derivator

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f'_x(x,y) \cdot x'(t) + f'_y(x,y) \cdot y'(t)$$

inre derivator



Små intervall förlängs/förkortas med derivatan som skalfaktor. Vid det sista steget i sammansättningen förlängs/förkortas de två intervallen Δx och Δy med faktorn $f'_x(x,y)$ resp. $f'_y(x,y)$ och adderas för att ge intervallet efter avbildning med $f(x,y)$.

Exempel 3: Beräkna $\frac{d}{dt}(t^2 + t^3)$

a) direkt

b) med kedjeregeln

Övning 6: Bestäm $\frac{d}{dt} f(t^2, t^3)$, där $f(x,y) = xy$.

a) genom att bestämma $f(t^2, t^3)$ och sedan derivera.

$$f(t^2, t^3) =$$

$$\frac{d}{dt} f(t^2, t^3) =$$

b) Med kedjeregeln

$$x(t) =$$

$$y(t) =$$

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) =$$

Exempel 4: Bevisa produktregeln

$$\frac{d}{dt}\big(f(t)g(t)\big) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t).$$

Kedjeregeln för flera variabler

Allmänt gäller för sammansättningen

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \longmapsto f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$$

där alla funktioner är differentierbara att

$$\frac{d}{dt} f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$$

$$= f'_{x_1}(x_1, \ldots, x_n)\, x_1'(t) + \cdots + f'_{x_n}(x_1, \ldots, x_n)\, x_n'(t).$$

Kedjeregeln i flera led

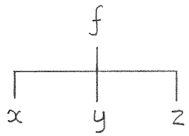
När ett uttryck är sammansatt i flera led måste kedjeregeln användas upprepade gånger.

Variabelträd

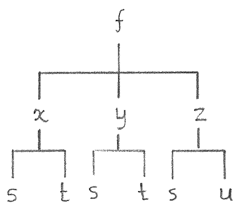
Ett hjälpmedel för att visa hur ett komplext uttryck är uppbyggt är att rita ett variabelträd.

$f(x(s,t), y(s,t), z(s,u(t)))$

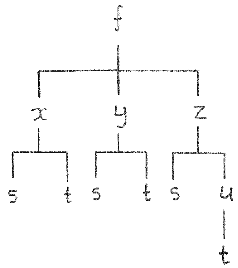
① Antag att vi har ovanstående uttryck.



② Vi börjar med att rita ut variablerna f primärt beror av.



③ Variablerna x, y och z beror i sin tur på variablerna s, t och u.



④ Till sist beror variabeln u på t.

Övning 7: Rita ett variabelträd till följande uttryck.

a) $f(u(s), v(s,t))$

b) $g(f(h(t)), u(s,t))$

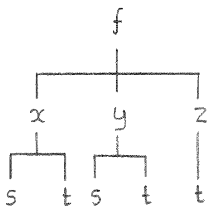
c) $f(xy, x+y)$

d) $f(x\,g(x,y), y\,h(x))$

Kedjeregeln

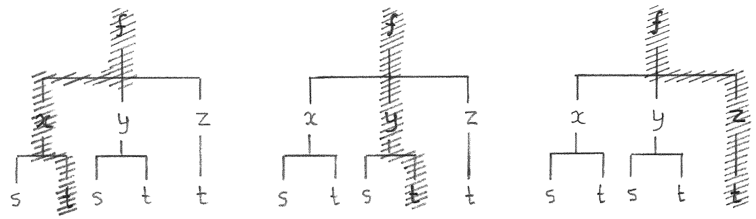
Kedjeregeln medför att varje stig i trädet fram till variabeln ger en term i uttrycket för derivatan. Termen är en produkt av derivator som varje steg i stigen ger upphov till.

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x(s,t), y(s,t), z(t))$$

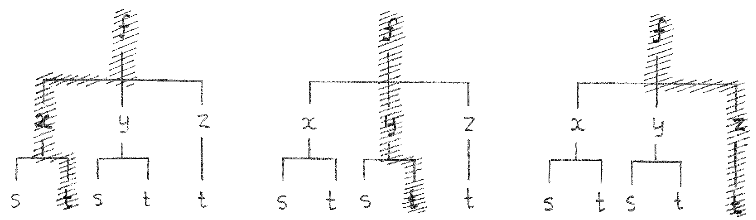


(1) Vi ska bestämma ovanstående derivata.

(2) Rita upp variabelträdet.



(3) Förbind f med stigar fram till alla t i trädet.



$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

(4) Varje stig motsvarar en produkt av partialderivator mellan varje nivå i trädet. Den sökta derivatan är summan av dessa.

Svar

Övning 1

$f'_x(2,0) = 4$ (eftersom $f'_x(x,y) = y + 2x$)

$f'_y(2,0) = 2$ (eftersom $f'_y(x,y) = x$)

Övning 2

$$f'_x(x,y,z) = \frac{1}{1+e^{xyz}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(1+e^{xyz}) = \frac{1}{1+e^{xyz}}\cdot yz\,e^{xyz}$$

$$f'_y(x,y,z) = \frac{xz\,e^{xyz}}{1+e^{xyz}}$$

$$f'_z(x,y,z) = \frac{xy\,e^{xyz}}{1+e^{xyz}}$$

Exempel 1

$$-2(x-1) - 4(y-1) + 1\cdot(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4y - z = 4$$

Exempel 2

$(x,y,z) = (1,1,2) + t(-2,-2,1)$ (t parameter)

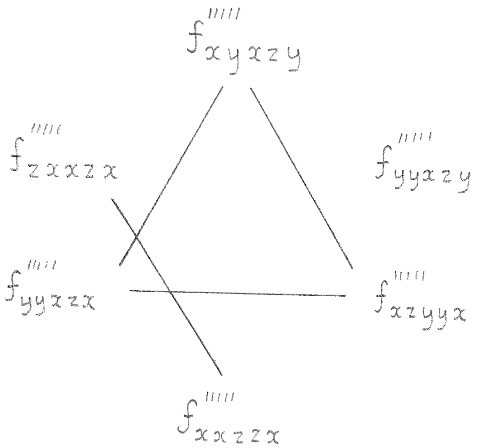
Övning 3

$f''_{xx}(x,y) = 2y$

$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 2x$

$f''_{yy}(x,y) = 18y$

Övning 4



Övning 5

a) $t \mapsto 1-3t^2 = u \mapsto \sqrt{u} = f$

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(-6t) = \frac{-3t}{\sqrt{1-3t^2}}$$

b) $t \mapsto t^2 = u \mapsto f(u) = f$

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dt} = f'(u)\cdot 2t = 2t f(t^2)$$

c) $t \mapsto t^2 + h(t) = u \mapsto f(u) = f$

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dt} = f'(u)\cdot(2t+h'(t)) = f'(t^2+h(t))\cdot(2t+h'(t))$$

Exempel 3

a) $\frac{d}{dt}(t^2+t^3) = 2t+3t^2$

b) $t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x+y = f$

$$\frac{df}{dt} = f'_x(x,y)\cdot x'(t) + f'_y(x,y)\cdot y'(t) = 1\cdot 2t + 1\cdot 3t^2$$

Övning 6

a) $f(t^2,t^3) = t^2\cdot t^3 = t^5$

$$\frac{d}{dt} f(t^2,t^3) = \frac{d}{dt} t^5 = 5t^4$$

b) $x(t) = t^2, \quad y(t) = t^3$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} f(x(t),y(t)) &= f'_x(x(t),y(t))\cdot x'(t) + f'_y(x(t),y(t))\cdot y'(t) \\ &= y\cdot 2t + x\cdot 3t^2 \\ &= t^3\cdot 2t + t^2\cdot 3t^2 \\ &= 5t^4\end{aligned}$$

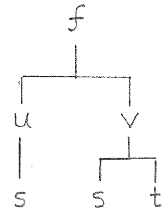
Exempel 4

$t \mapsto \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x\cdot y = h$

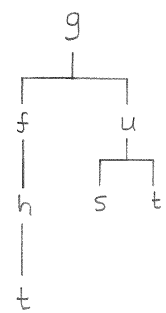
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f(t)g(t)) &= \frac{d}{dt} h(x(t),y(t)) = h'_x x' + h'_y y' = y x' + x y' \\ &= g(t)f'(t) + f(t)g'(t).\end{aligned}$$

Övning 7

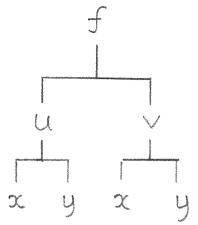
a)



b)

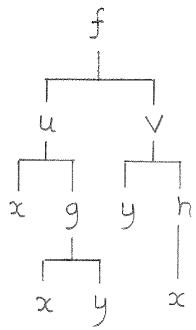


c)



$(u = xy, \ v = x + y)$

d)



$(u = x\,g(x,y), \ v = y\,h(x))$

Övning 8

a) $\dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{du}{ds} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial s}$

b) $\dfrac{\partial g}{\partial f} \cdot \dfrac{df}{dh} \cdot \dfrac{dh}{dt} + \dfrac{\partial g}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial t}$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot y + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot 1$

d) $\dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial g} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot x \cdot \dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot h(x)$