Föreläsning 3

- Gränsvärde
  - Reellvärda funktioner
  - Vektorvärda funktioner
  - Räkneregler
- Gränsvärdesberäkning
  - Instängningsprincipen
  - Polära koordinater
  - Sfäriska koordinater
- Kontinuitet
  - Elementära funktioner

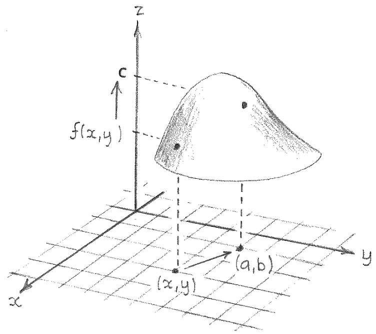
Gränsvärde

Reellvärda funktioner

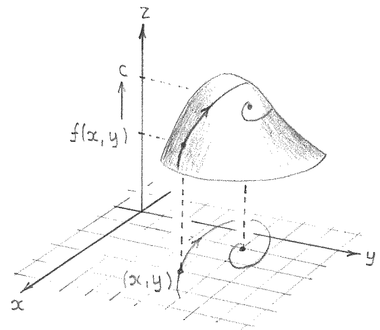
Gränsvärdet

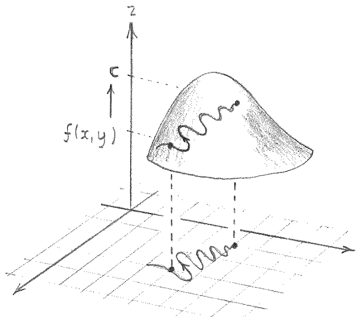
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c$$

betyder att när punkten (x,y) närmar sig (a,b) så ska funktionsvärdet $f(x,y)$ närma sig värdet c.



Detta ska gälla oavsett hur (x,y) närmar sig (a,b).

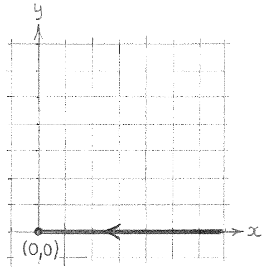




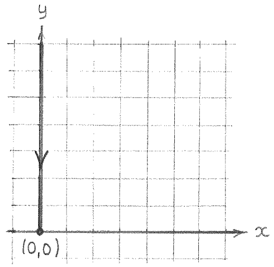
Obs! (x,y) ska vara inom definitionsområdet till f.

Vi kan börja undersöka ett gränsvärde genom att låta $(x,y) \to (a,b)$ längs räta linjer.

Övning 1: Parametrisera de riktade linjerna så att $t \to 0$ svarar mot att $(x,y) \to (0,0)$.

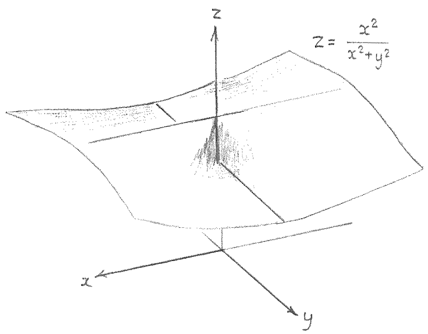


En rät linje längs x-axeln

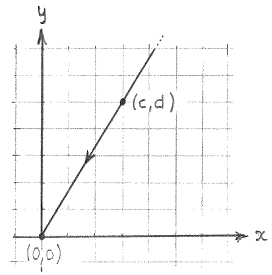


En rät linje längs y-axeln

Exempel 1: Undersök gränsvärdet $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.



Övning 2: Parametrisera den riktade linjen så att $t \to 0$ svarar mot att $(x,y) \to (0,0)$.

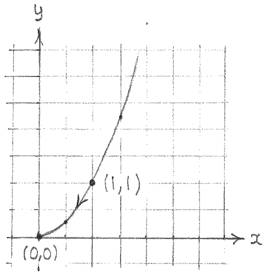


En rät linje genom $(0,0)$ och (c,d).

Exempel 2: Undersök gränsvärdet $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$.

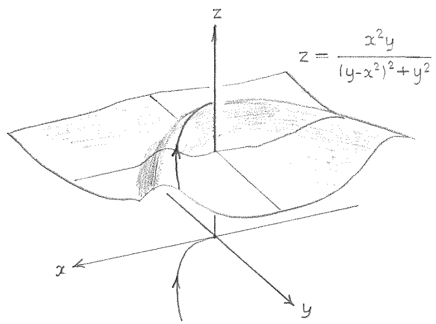
Bara för att $f(x,y) \to c$ när $(x,y) \to (a,b)$ längs räta linjer betyder inte det att gränsvärdet existerar.

Övning 3: Parametrisera den riktade parabeln så att $t \to 0$ svarar mot att $(x,y) \to (0,0)$.



En parabel

Exempel 3: Undersök gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{(y-x^2)^2+y^2}$.



Vektorvärda funktioner

För vektorvärda funktioner görs gränsövergången separat för varje komponent,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \big(f(x,y), g(x,y)\big) = \Big(\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y), \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)\Big).$$

Därför räcker det att koncentrera sig på reellvärda gränsvärden.

Räkneregler

Om $\lim f(x,y)$ och $\lim g(x,y)$ existerar, då är

- $\lim f(x,y)+g(x,y) = \lim f(x,y) + \lim g(x,y)$
- $\lim f(x,y)-g(x,y) = \lim f(x,y) - \lim g(x,y)$
- $\lim f(x,y)\cdot g(x,y) = \lim f(x,y) \cdot \lim g(x,y)$
- $\lim f(x,y)/g(x,y) = \lim f(x,y) / \lim g(x,y)$ om $\lim g(x,y) \neq 0$
- $\lim h(f(x,y)) = h(\lim f(x,y))$ om h är kontinuerlig
- $f(x,y) \leq g(x,y) \Rightarrow \lim f(x,y) \leq \lim g(x,y)$

Gränsvärdesberäkning

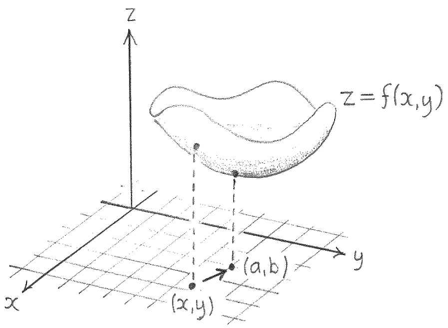
Instängningsprincipen

Om

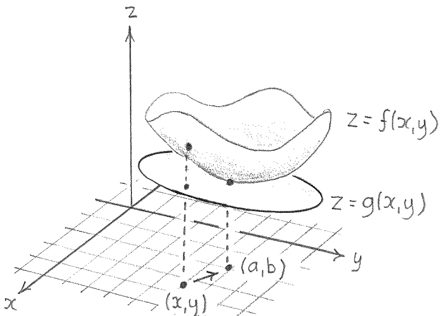
$$g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$$

i en omgivning av (a,b) och $g(x,y),\ h(x,y) \to c$
när $(x,y) \to (a,b)$ så gäller att

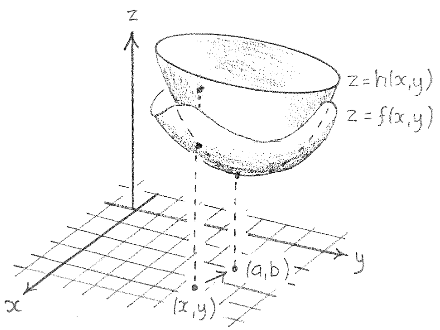
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c.$$



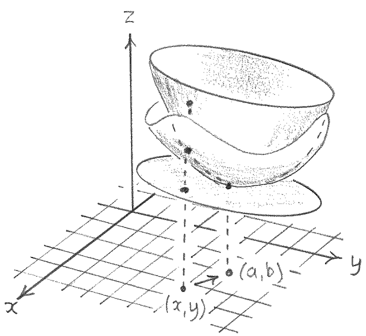
① Vi söker gränsvärdet
av $f(x,y)$ när $(x,y) \to (a,b)$.



② Antag att $g(x,y) \leq f(x,y)$
nära (a,b) och att $g(x,y) \to c$
när $(x,y) \to (a,b)$.



③ Antag att $f(x,y) \leq h(x,y)$
nära (a,b) och att $h(x,y) \to c$
när $(x,y) \to (a,b)$.

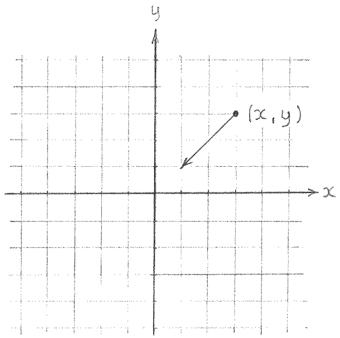


④ Då gäller att $f(x,y) \to c$
när $(x,y) \to (a,b)$.

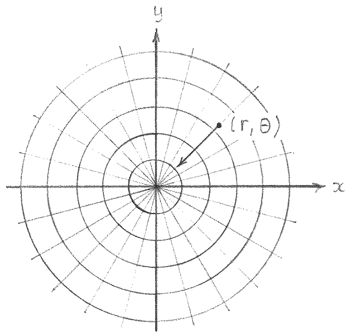
Exempel 4: Undersök gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$.

Polära koordinater

Gränsövergången $(x,y)\to(0,0)$ blir i polära koordinater $r\to 0^+$ och θ ospecifik.



Rektangulära koordinater

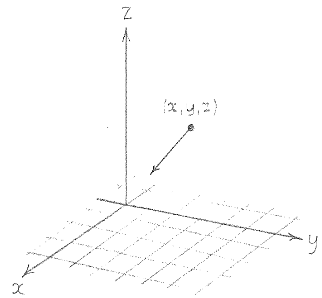


Polära koordinater

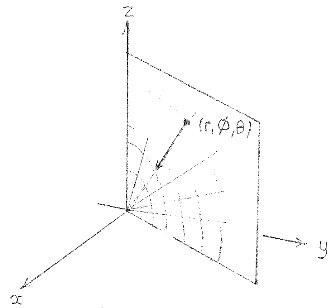
Exempel 5: Undersök gränsvärdet $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+xy+y^2}$.

Sfäriska koordinater

Gränsövergången $(x,y,z)\to(0,0,0)$ blir i sfäriska koordinater $r\to 0^+$ och ϕ,θ ospecifika.



Rektangulära koordinater



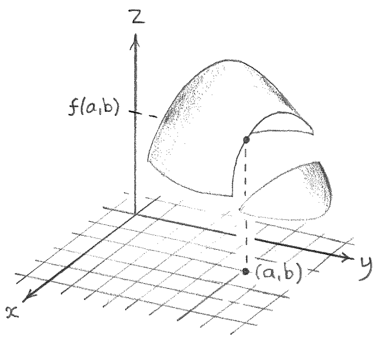
Sfäriska koordinater

Kontinuerliga funktioner

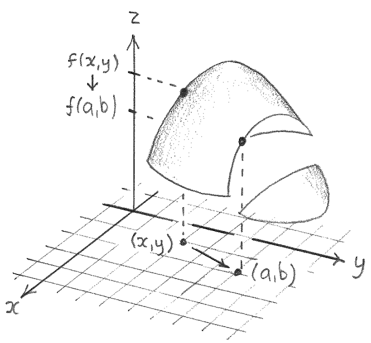
En funktion $f(x,y)$ är kontinuerlig i (a,b) om funktionsvärdet $f(x,y)$ inte gör ett plötsligt "hopp" när $(x,y) \to (a,b)$.

Mer precist,

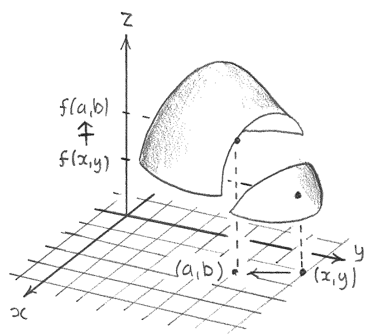
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$



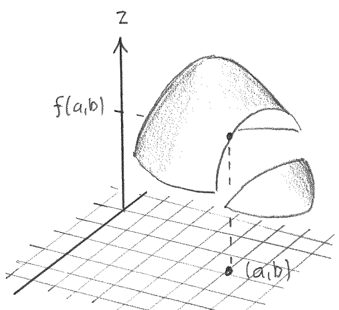
① Är $f(x,y)$ kontinuerlig i punkten (a,b)?



② Visserligen är $f(x,y) \to f(a,b)$ när $(x,y) \to (a,b)$ i vissa riktningar.



③ men $f(x,y) \nrightarrow f(a,b)$ när $(x,y) \to (a,b)$ i andra riktningar.



④ Funktionen $f(x,y)$ är inte kontinuerlig i (a,b).

Elementära funktioner är kontinuerliga

Följande enkla funktioner är alla kontinuerliga

* $(x,y) \mapsto x+y$
* $(x,y) \mapsto x-y$
* $(x,y) \mapsto x\cdot y$
* $(x,y) \mapsto x/y$
* $(x,y) \mapsto$ konstant
* Exponential- och logaritmfunktionen
* Trigonometriska och cyklometriska funktioner

Om f och g är kontinuerliga funktioner, då är $f\circ g$ också en kontinuerlig funktion.

Eftersom elementära funktioner byggs upp av sammansättning av de enkla funktionerna (som är kontinuerliga) följer att alla elementära funktioner är kontinuerliga.

Exempel 6: I vilka punkter är funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}, & \text{när } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{när } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

kontinuerlig?

Svar

Övning 1

x-axeln: $(x,y)=(t,0)$

y-axeln: $(x,y)=(0,t)$

Exempel 1

Gränsvärdet existerar inte.

(Olika gränsvärden 1 och 0 fås när $(x,y)=(t,0)\to(0,0)$ resp. $(x,y)=(0,t)\to(0,0)$.)

Övning 2

$(x,y)=t(c,d)$

Exempel 2

Gränsvärdet existerar inte.

(Gränsvärdet blir $(c+d)^2/(c^2+d^2)$ när $(x,y)=t(c,d)\to(0,0)$ som beror på c och d.)

Övning 3

$(x,y)=(t,t^2)$

Exempel 3

Gränsvärdet existerar inte.

(Olika gränsvärden 0 och 1 fås när $(x,y)=(t,0)\to(0,0)$ resp. $(x,y)=(t,t^2)\to(0,0)$.)

Exempel 4

Gränsvärdet existerar och är lika med 0.

(Använd instängningsprincipen på

$$0\leqslant\frac{x^2y^2}{x^2+y^4}\leqslant\frac{x^2y^2+y^6}{x^2+y^4}=\frac{y^2(x^2+y^4)}{x^2+y^4}=y^2.)$$

Exempel 5

Gränsvärdet existerar och är lika med 0.

(Byt till polära koordinater och använd instängningsprincipen på

$$\left|\frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}\right|\leqslant r\cos^2\theta\sin\theta$$

som följer av att $1+\cos\theta\sin\theta=1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\geqslant 1$.)

Exempel 6

$f(x,y)$ är kontinuerlig när $(x,y)\neq(0,0)$.

(När $(x,y)\neq(0,0)$ ges $f(x,y)$ av ett elementärt

uttryck och är därför kontinuerlig där.
När $(x,y)=(0,0)$ är $f(x,y)$ kontinuerlig om

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0$$

men det är inte uppfyllt eftersom gränsvärdet inte existerar.)