Föreläsning 2

- Parameterkurvor
- Riktningsvektor
  - Hastighet och acceleration
  - Newtons andra lag
  - Singulära punkter
- Båglängdsintegraler
  - Längd av kurva
  - Bågelement

Parameterkurvor

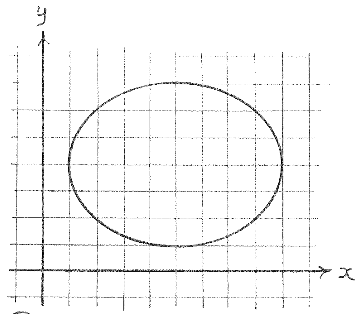
Parameterkurvor är ett sätt att beskriva kurvor med hjälp av en parameter.

Kurvor i planet

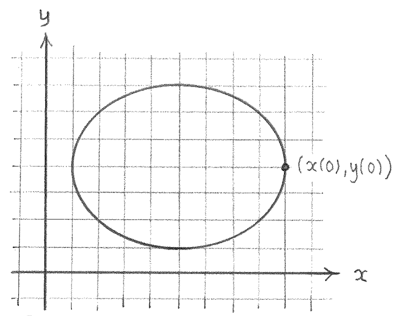
En kurva i planet där x- och y-koordinaterna styrs av en parameter t,

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad \text{alternativt} \qquad \bar{r}(t) = (x(t), y(t))$$

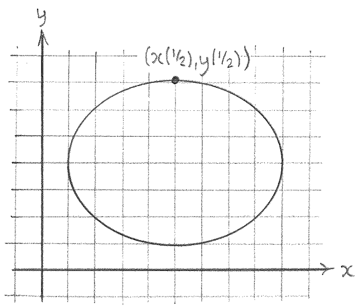
kallas för en parameterkurva.



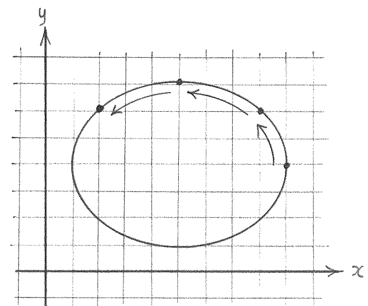
(1) Parameterkurvan
$x(t) = 5 + 4\cos \pi t$
$y(t) = 4 + 3\sin \pi t$



(2) Parametervärdet $t = 0$ ger en punkt $(x(0), y(0)) = (9, 0)$ på kurvan.



(3) När t ändras till $t = 1/2$ glider punkten utmed kurvan.



(4) Genom att variera t genomlöps kurvan.

Övning 1: Givet parameterkurvan

$$(x, y) = (t^2-4, 2t+1), \quad (t \text{ parameter}).$$

a) Bestäm punkterna som svarar mot $t = -2, -1, 0, 1$ och 2.

$(x(-2), y(-2)) = (\boxed{} , \boxed{})$

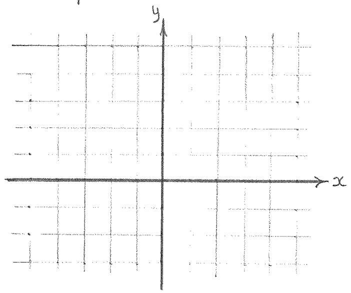
$(x(-1), y(-1)) = (\boxed{} , \boxed{})$

$(x(0), y(0)) = (\boxed{} , \boxed{})$

$(x(1), y(1)) = (\boxed{} , \boxed{})$

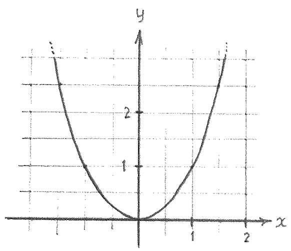
$(x(2), y(2)) = (\boxed{} , \boxed{})$

b) Skissera parameterkurvan.



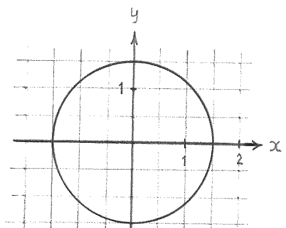
Övning 2: Parametrisera kurvorna.

a)



En parabel

b)

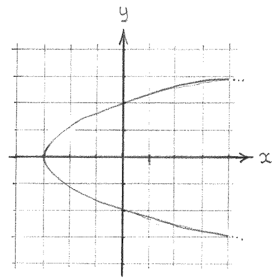


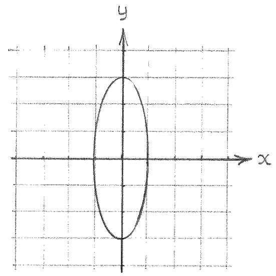
En cirkel

a) $(x, y) = \boxed{}$

b) $(x, y) = \boxed{}$

Exempel 1: Parametrisera kurvorna.



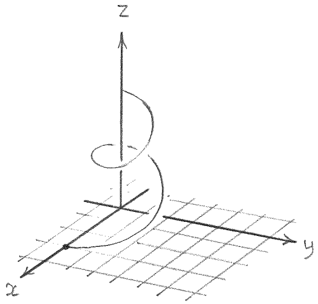


Kurvor i rummet

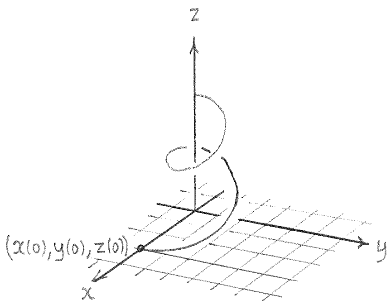
En kurva i rummet där x-, y- och z-koordinaterna styrs av en parameter t,

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \text{alternativt} \quad F(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

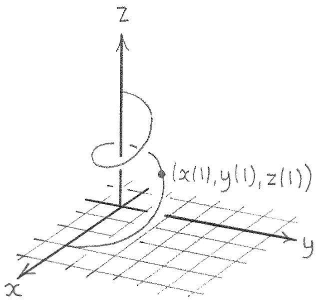
kallas för en parameterkurva.



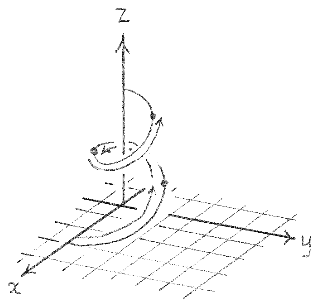
① En parameterkurva $(x(t), y(t), z(t))$.



② Parametervärdet $t=0$ ger en punkt $(x(0), y(0), z(0))$ på kurvan.



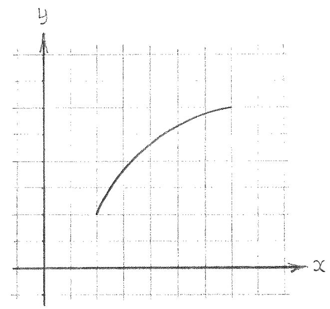
③ När t ändras till $t=1$ glider punkten utmed kurvan.



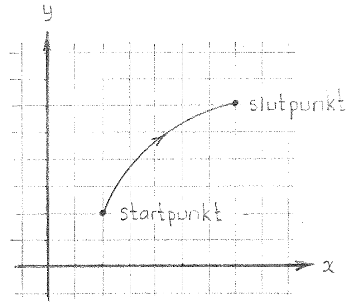
④ Genom att variera t genomlöps kurvan.

Orienterade kurvor

En kurva är orienterade om den ges en genomloppsriktning.

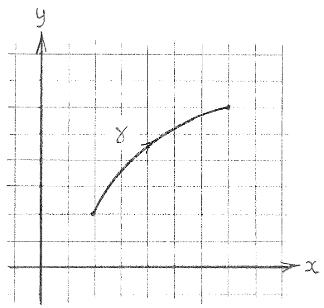


En kurva

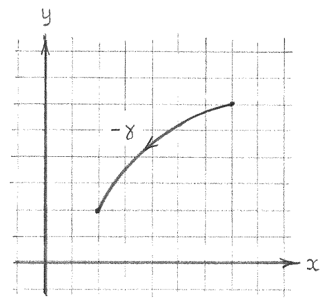


En orienterad kurva

Om γ är en orienterad kurva, då betecknar $-\gamma$ samma kurva med omvänd genomloppsriktning.



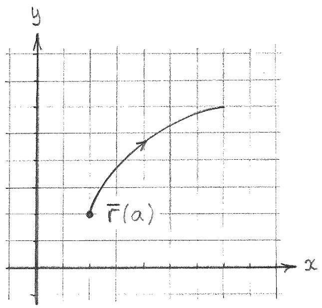
Den orienterad kurva γ



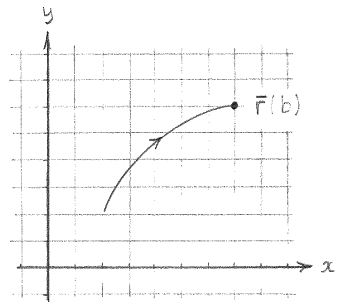
Den orienterade kurvan $-\gamma$

En orienterad parameterkurva beskrivs genom att parametern t anges gå från ett startvärde $t = a$ till ett slutvärde $t = b$,

$$t : a \to b.$$



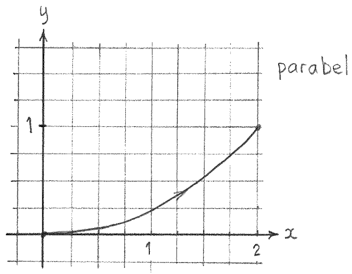
① Parametervärdet $t=a$ svarar mot startpunkten.



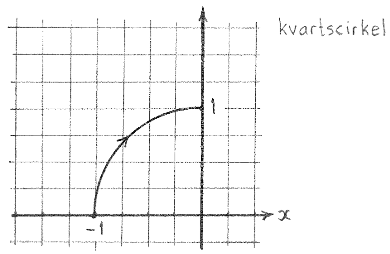
② Parametervärdet $t=b$ svarar mot slutpunkten.

Övning 3: Parametrisera de orienterade kurvorna

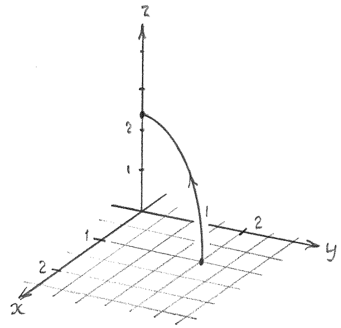
a)



b)



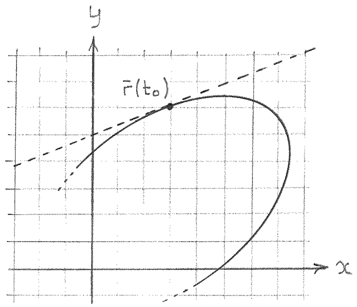
Exempel 2: Parametrisera den orienterade kvartscirkeln som har medelpunkt i origo.



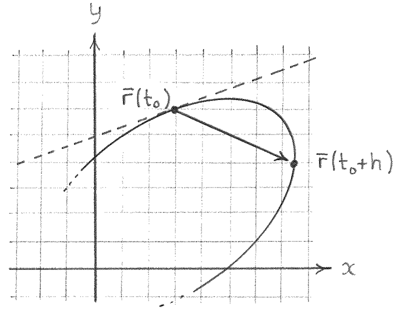
Riktningsvektor

Parameterkurvan $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$ har i punkten $\bar{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ en tangentriktning som är parallell med vektorn

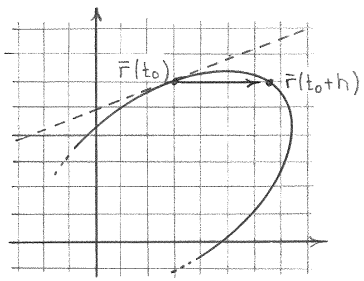
$$\dot{\bar{r}}(t_0) = \frac{d}{dt} r(t) \Big|_{t=t_0} = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)).$$



① Tangentriktningen i punkten $\bar{r}(t_0)$ söks.



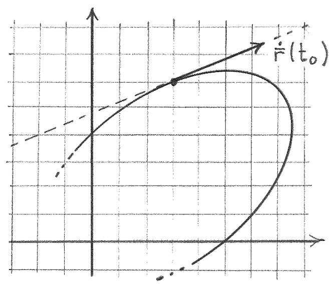
② Välj $t = t_0 + h$ och bilda vektorn $\bar{r}(t_0+h) - \bar{r}(t_0)$.



③ När h minskar närmar sig vektorn

$$\bar{r}(t_0+h) - \bar{r}(t_0)$$

tangentens riktning men har en längd som krymper.



④ Gränsvärdet av den omskalade vektorn

$$\dot{\bar{r}}(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{r}(t_0+h) - \bar{r}(t_0)}{h}$$

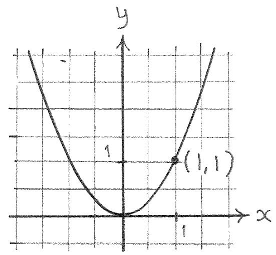
kommer peka i tangentens riktning.

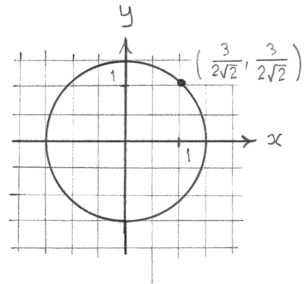
Övning 4: Bestäm riktningsvektorn i punkten som svarar mot $t = 3$.

a) $\bar{r}(t) = (t^2 - t, 1 - t)$

b) $\bar{r}(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t, t^2)$

Övning 5: Använd parametriseringen från övning 2 för att bestämma riktningsvektorn i punkten.

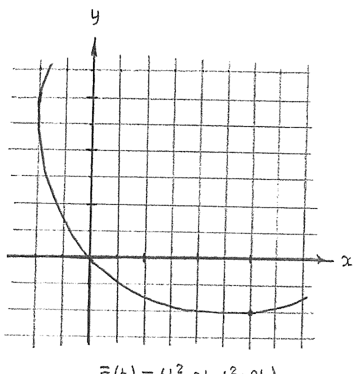




Exempel 3: Bestäm de punkter där parameterkurvan

$$\bar{r}(t) = (t^2-2t,\ t^2+2t)$$

har en horisontell tangent.



$\bar{r}(t) = (t^2-2t,\ t^2+2t)$

Hastighet och acceleration

Om en partikels läge ges av parameterkurvan

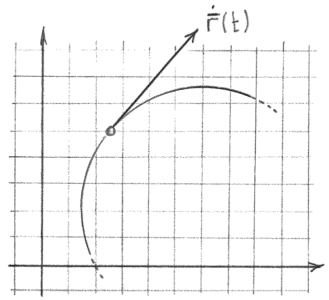
$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

vid tidpunkten t, då är

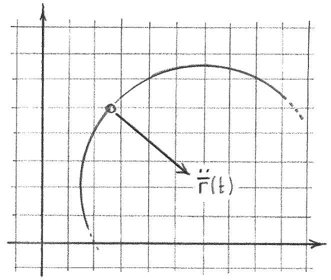
$\dot{\bar{r}}(t)$ = partikelns hastighet

$|\dot{\bar{r}}(t)|$ = partikelns fart

$\ddot{\bar{r}}(t)$ = partikelns acceleration



Partikelns hastighet anger den momentana rörelseriktningen och fart.



Partikelns acceleration anger riktningen mot rörelsens centrum vid konstant fart.

Newtons andra lag

Totalkraften $\bar{F}$ på en partikel är lika med partikelns massa m gånger accelerationen,

$$\bar{F} = m\ddot{\bar{r}}.$$

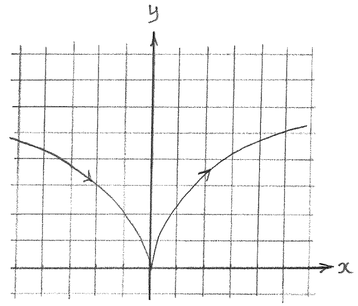
Exempel 4: En kanon i origo skjuter ut en partikelliknande kula med utgångshastigheten $\bar{v} = (10,10)$. Bestäm kulans bana om tyngdkraften är $\bar{F} = (0,-mg)$, där m är kulans massa.

Singulära punkter

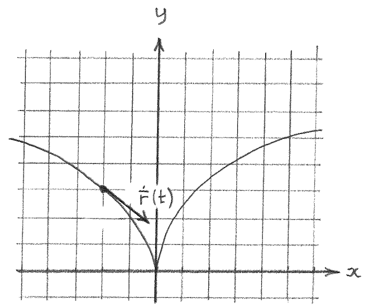
Om en parameterkurva har en punkt där

$$\dot{\bar{r}}(t) = \bar{0},$$

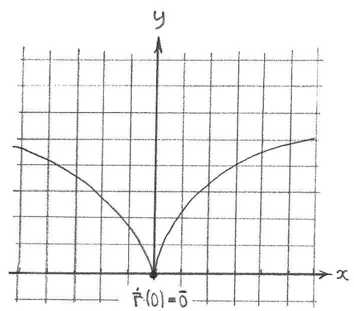
då kallas punkten för singulär. I sådana punkter kan kurvan tvärt byta riktning.



(1) Parameterkurvan $\bar{r}(t) = (t^3, t^2)$ har en singulär punkt i origo $(t=0)$.

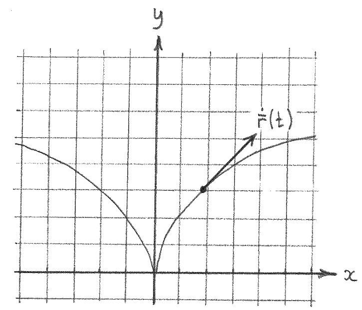


(2) När $t<0$ närmar sig kurvan origo i riktningen $\dot{\bar{r}}(0^-) // (0,-1)$.



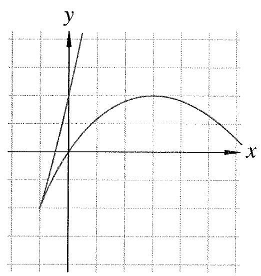
(3) Vid origo $(t=0)$ stannar kurvan upp, dvs

$$\dot{\bar{r}}(0) = (0,0).$$



(4) När $t>0$ fortsätter kurvan i en annan riktning $\dot{\bar{r}}(0^+) // (0,1)$.

Övning 6: Bestäm alla singulära punkter på parameterkurvan $\bar{r}(t) = (2t + t^2, 3t - t^3)$.



Båglängdsintegraler

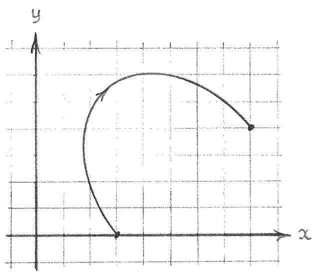
Längd av kurvor

En kontinuerligt deriverbar parameterkurva

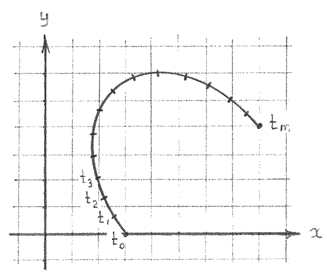
$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad \text{där} \quad a \leq t \leq b,$$

har längden

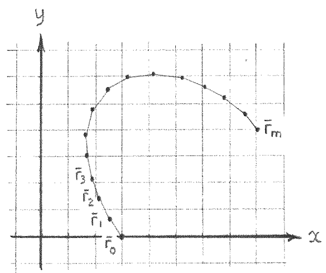
$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt.$$



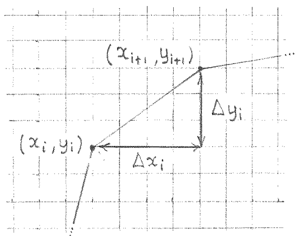
① Vi ska bestämma längden av kurvan $\bar{r} = (x(t), y(t)),\ t: a \to b$



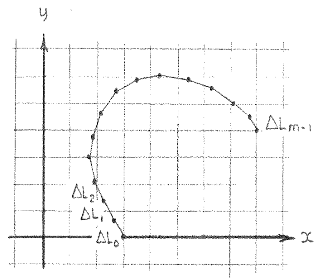
② Dela in parameterintervallet $[a, b]$ i delintervall $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b$.



③ Detta ger en indelning av kurvan i räta linjestycken mellan punkterna $\bar{r}_i = (x(t_i), y(t_i))$.



④ Längden av ett linjestycke är $\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$.



⑤ Kurvans totala längd är approximativt $L \approx \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\substack{m \to \infty \\ \text{finhet} \to 0}} \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \lim_{\substack{m \to 0 \\ \text{finhet} \to 0}} \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2}\, \Delta t_i \\ &= \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt \end{aligned}$$

⑥ Summaformeln för längden är en Riemannsumma som konvergerar mot en integral.

Bågelementet

Uttrycket

$$ds = |\dot{\bar{r}}(t)|\, dt = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt$$

kallas för bågelementet.

För kurvor i rummet

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \text{där} \quad a \leq t \leq b,$$

blir bågelementet

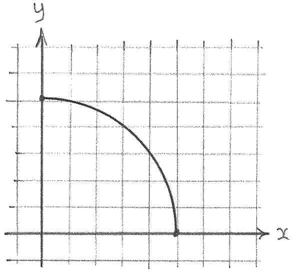
$$ds = |\dot{\bar{r}}(t)|\, dt = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt.$$

och längden ges av

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt.$$

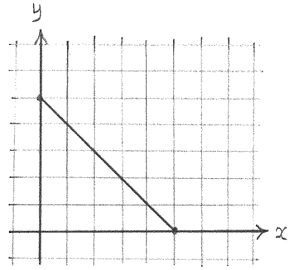
Övning 7: Bestäm längden av kurvstycket

a)



$x(t) = 2\cos t$
$y(t) = 2\sin t$
$t: 0 \to \pi/2$

b)



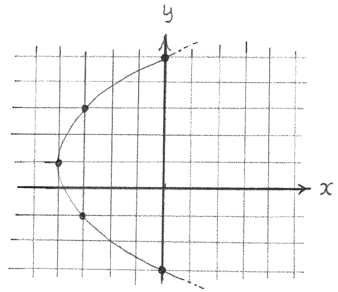
$x(t) = 1 + t$
$y(t) = 1 - t$
$t: -1 \to 1$

Svar

Övning 1

a) $(x(-2), y(-2)) = (0,-3)$
$(x(-1), y(-1)) = (-3,-1)$
$(x(0), y(0)) = (-4,1)$
$(x(1), y(1)) = (-3,3)$
$(x(2), y(2)) = (0,5)$

b)



Övning 2

a) $(x,y) = (t, t^2)$

b) $(x,y) = (\frac{3}{2}\cos t, \frac{3}{2}\sin t)$

Exempel 1

a) $(x,y) = (\frac{3}{4}t^2 - 3, t)$

b) $(x,y) = (\cos t, 3\sin t)$

Övning 3

a) $(x,y) = (t, \frac{1}{4}t^2)$, $t: 0 \to 2$

b) $(x,y) = (\cos t, \sin t)$, $t: \pi \to \pi/2$

Exempel 2:

Parametrisering i sfäriska koordinater

$r = \sqrt{5}$

$\phi : \pi/2 \to 0$

$\theta = \arctan 2$

Parametrisering i rektangulära koordinater

$x = \sqrt{5} \sin t \cos \arctan 2 = \sin t$

$y = \sqrt{5} \sin t \sin \arctan 2 = 2 \sin t$

$z = \sqrt{5} \cos t$

där $t : \pi/2 \to 0$.

Övning 4:

a) $\dot{\bar{r}}(t) = (2t-1, -1)$

$\dot{\bar{r}}(3) = (5, -1)$

b) $\dot{\bar{r}}(t) = (-\pi \sin \pi t, \pi \cos \pi t, 2t)$

$\dot{\bar{r}}(3) = (0, -\pi, 6)$

Övning 5:

a) $\dot{\bar{r}}(t) = (1, 2t)$

$\dot{\bar{r}}(1) = (1, 2)$

b) $\dot{\bar{r}}(t) = (-\frac{3}{2} \sin t, \frac{3}{2} \cos t)$

$\dot{\bar{r}}(\pi/4) = (-\frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}})$

Exempel 3

Punkten $\bar{r}(-1) = (3, -1)$.

Exempel 4

Newtons andra lag $m(\ddot{x}, \ddot{y}) = (0, -mg)$ tillsammans med begynnelsevillkoren $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ och $(\dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (10, 10)$ ger banan

$x(t) = 10t$

$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 10t$

Övning 6

Punkten $\bar{r}(-1) = (-1, -2)$.

Övning 7

a) $ds = 2dt; \quad L = \pi$

b) $ds = \sqrt{2}dt; \quad L = 2\sqrt{2}$