Institutionen för Matematik
SF1626 Flervariabelanalys
Läsåret 2024-25

Tommy Ekola, Lars Filipsson, Roy Skjelnes

Modul I

Funktioner

Modul I

I bokens kapitel 10 är avsnitt 10.6 främst i fokus med cylindriska och sfäriska koordinater. Även avsnitt 10.1 är viktigt. Där införs de topologiska begreppen: omgivning, inre och yttre punkter, randpunkter, öppen mängd och sluten mängd.

Kapitel 12: Kontinuerliga vektorvärda funktioner av en reell variabel kan ses som parametriseringar av kurvor. Två vanliga tolkningar finns. Antingen är man intresserad av själva kurvan, hur den ser ut, vad den har för tangenter i olika punkter, vad den har för längd. Eller så tänker man sig att en partikel rör sig längs kurvan, vad den har för hastighet, fart och acceleration, hur långt den färdas. Om en vektorvärd funktion av en reell variabel är deriverbar så är dess derivata en vektor, som är en tangentvektor till kurvan och som beskriver hastigheten i fall vi har en partikel som rör sig. Längden av denna vektor är i så fall farten och det är integralen av den som är längden av kurvan. Andraderivatan är också en vektor, som beskriver accelerationen i fall vi har en partikel som rör sig.

I kapitel 13 börjar studiet av reellvärda funktioner av flera variabler, med definitionsmängd, värdemängd, graf. Gränsvärde och kontinuitet är grundläggande begrepp som det är viktigt att förstå nu. Senare, i nästa modul, ska vi derivera också. Missa inte begreppen nivåkurva och nivåyta, som fungerar ungefär som höjdkurvor på topografiska kartor. De kommer att vara användbara.

Inramningen för modulen är 6 timmar föreläsningar, 4 timmar workshop, samt 2 timmar seminarium.

Koordinatsystem

- Förstå och använda polära koordinater för att beskriva mängder i $\mathbb{R}^2$.
- Förstå och använda cylindriska koordinater för att beskriva mängder i $\mathbb{R}^3$.
- Förstå och använda sfäriska koordinater för att beskriva mängder i $\mathbb{R}^3$.

1.1 Polära koordinater

I planet använder vi ofta *polära koordinater*. En noll-skilld vektor i $\mathbb{R}^2$ kan beskrivas med avståndet från origo, och vinkeln - som vi mäter moturs från x-axeln. Om (x, y) är koordinaterna till en noll-skilld vektor har vi relationerna

$$x = r\cos(\theta) \quad \text{and} \quad y = r\sin(\theta),$$

där $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, och med vinkeln $0 \leq \theta < 2\pi$.

Exempel 1. Olikheterna $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$ bestämmer ett område, en såkallad annulus, A i planet. I polära koordinater är A det rektangulära området där $1 \leq r \leq 2$ och $0 \leq \theta < 2\pi$.

1.2 Cylinderkoordinater

För 3-rummet $\mathbb{R}^3$ använder vi ofta en av två koordinatbyten. Den ena är en naturlig utvigning av polära koordinater. Vi lägger simpelthen till tredje koordinaten. Det vill säga om (x, y, z) är koordinaterna till en punkt i $\mathbb{R}^3$, då ges denna punkt med *cylinderkoordinater* (r, θ, z) vilka bestäms av relationerna

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad \text{and} \quad z = z,$$

där $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, och med vinkeln $0 \leq \theta < 2\pi$. Punkterna på formen $(0, 0, z)$ är vad vi kallar z-axeln, är inte beskrivna med cylinderkoordinater.

1.3 Sfäriska koordinater

De sfäriska koordinaterna (R, ϕ, θ) är lite svårare att visualisera vid första möte, men är endå mycket naturliga. En given punkt (x, y, z) befinner sig på en unik sfär centrerad omkring origo. Radien av denna sfär är $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Vi låter positiva z-axeln bestämma nordpolen på varje sådan sfär. På sfären som innehåller punkten (x, y, z) har vi att punkten ligger på en unik breddgrad. Vinkeln från nordpolen tilll denna breddgrad blir något värde $0 \leq \phi \leq \pi$. (Märk att vinkeln inte kan överstiga π). Slutligen behöver vi specifiera vilken merdian som punkten befinner sig på. Merdianen anges med en vinkel $0 \leq \theta < 2\pi$ som vi mäter moturs (med z pekande uppåt) från positiva x-axeln. Relationerna mellan en punkt med koordinater(x, y, z) och *sfäriska koordinater* (R, ϕ, θ) är

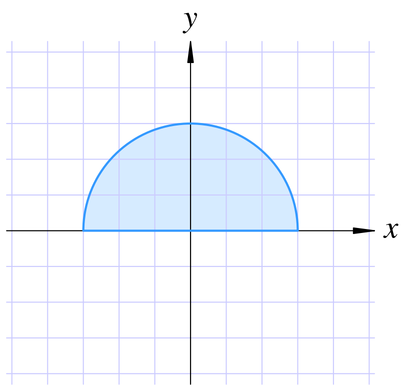
$$x = R\sin(\phi)\cos(\theta), \quad y = R\sin(\phi)\sin(\theta), \quad z = R\cos(\phi),$$

där $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, och $0 \leq \phi \leq \pi$, och $0 \leq \theta < 2\pi$.

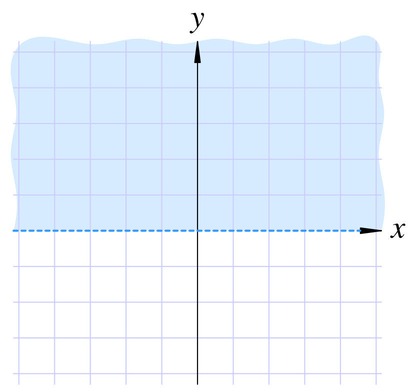
Uppgifter

Uppgift 1.1. Beskriv nedanstående områden i polära koordinater. (En ruta = en längdenhet.)

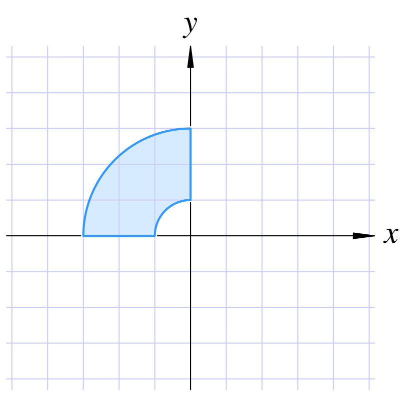
a)



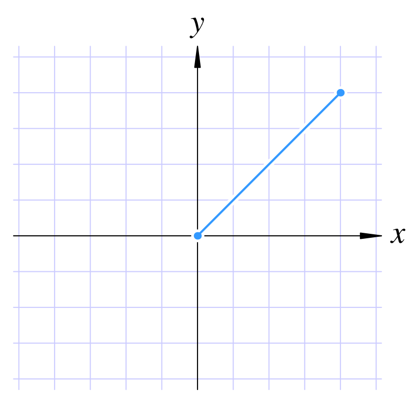
b)



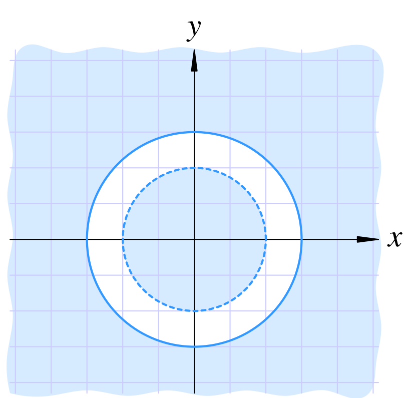
c)



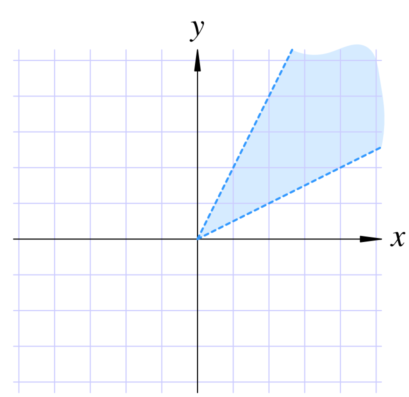
d)



e)



f)



Uppgift 1.2. Skissera följande områden uttryckta i polära koordinater.

a) $r \leq 4$

b) $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$

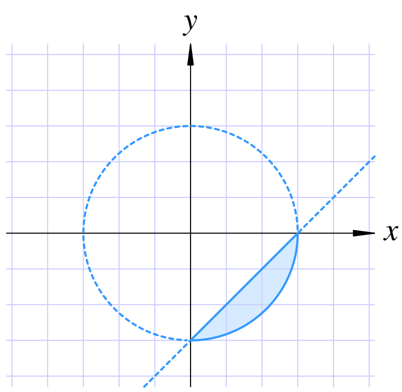
c) $0 \leq r \leq 5, \pi \leq \theta \leq 3\pi/2$

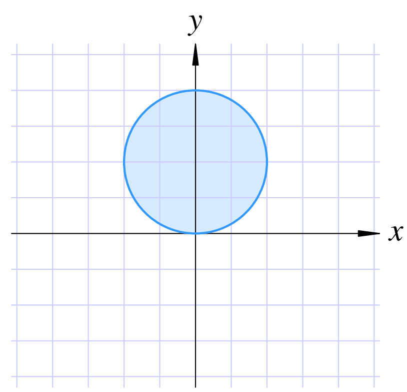
d) $r = 2,\ 0 \leq \theta \leq \pi$

e) $1 \leq r \leq 3,\ \theta = \pi/4$

f) $r = 0$

Uppgift 1.3. Beskriv nedanstående områden dels i rektangulära koordinater, dels i polära koordinater.

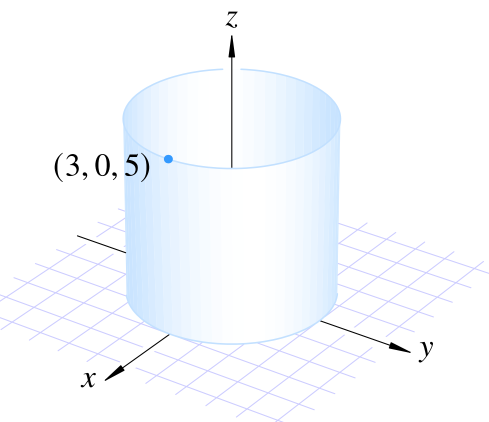
a) 

b) 

Uppgift 1.4. Hur beskrivs $\Omega = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3 \text{ och } |x| < y\}$ i polära koordinater.

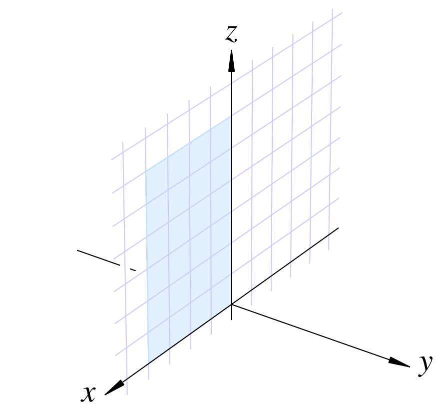
Uppgift 1.5. Beskriv området i cylindriska koordinater. (En ruta = en längdenhet.)

a)



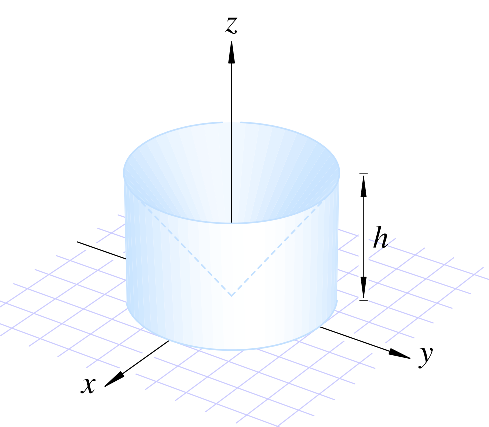
Rakt cirkulärt cylinderskal

b)



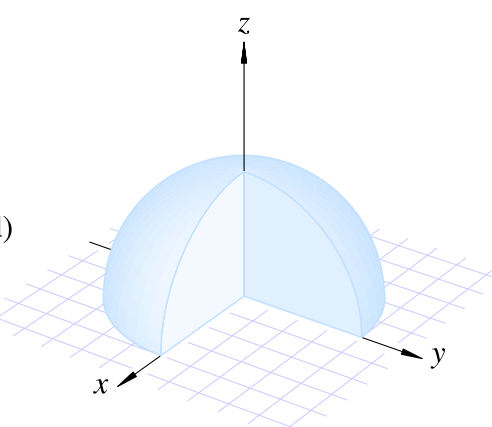
Rektangel i xz-planet

c)



Rak cirkulär cylinder med kon borttagen

d)



$\frac{3}{4}$ halvklot

Uppgift 1.6. Rita upp följande områden beskrivna i cylindriska koordinater först i (r, z)-planet och därefter i xyz-rymden.

a) $0 \leq r \leq 3, \;\; 0 \leq z \leq 4$

b) $z = 2r, \;\; z \leq 4$

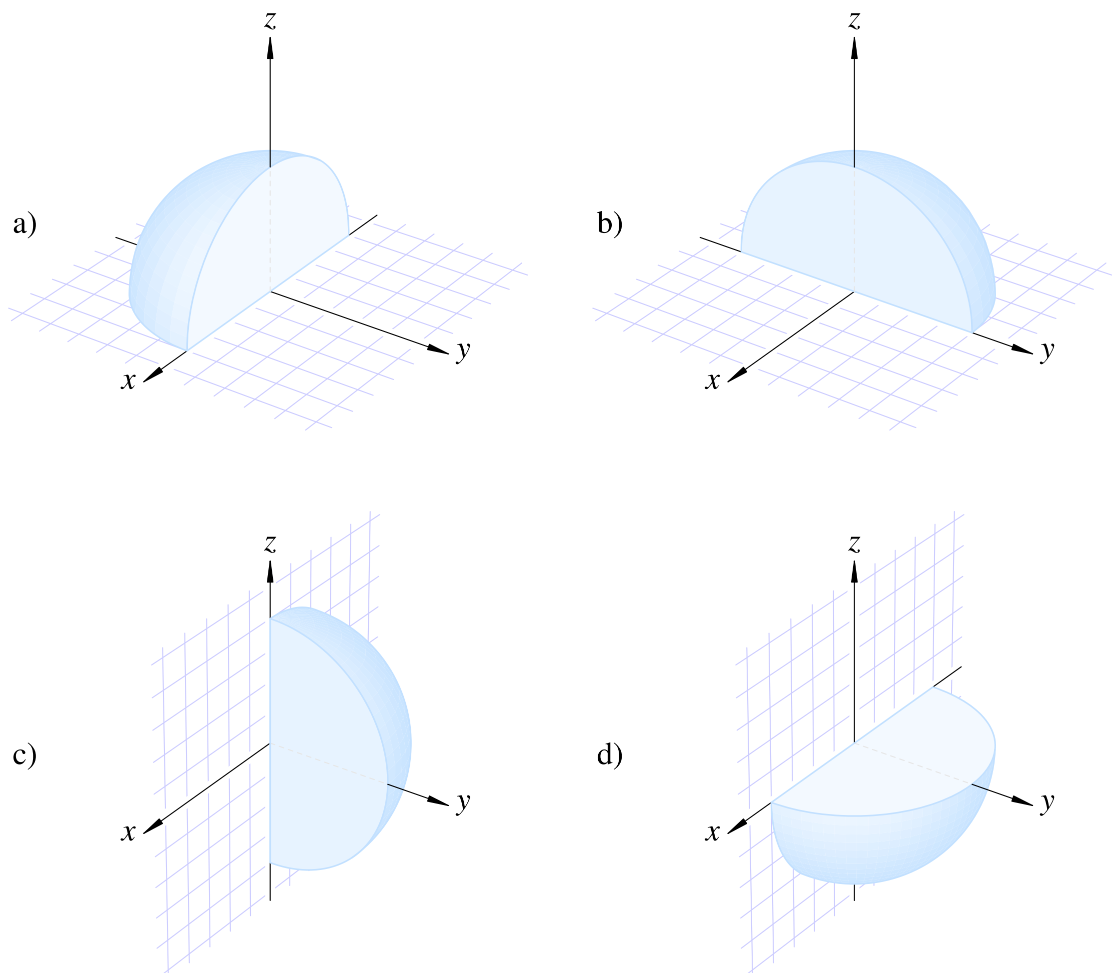
c) $0 \leq z \leq 5 - r^2/3$

Uppgift 1.7. Skissera följande områden beskrivna i sfäriska koordinater.

a) $0 \leq r \leq 5, \;\; 0 \leq \phi \leq \pi/6, \;\; \pi/2 \leq \theta \leq 2\pi$

b) $0 \leq r \leq 5, \;\; \pi/18 \leq \phi \leq \pi/4, \;\; 0 \leq \theta \leq \pi/2$

Uppgift 1.8. Beskriv följande fjärdedelsklot med radie a dels i rektangulära koordinater, dels i rymdpolära koordinater.



Uppgift 1.9. Hur beskrivs mängden $K = \{(x, y, z) : \, x^2 + y^2 + z^2 < 9, \, y > 0 \text{ och } z > 0\}$ i sfäriska koordinater?

Topologi

- Förstå och använda begreppet omgivning.
- Identifiera inre punkter, yttre punkter och randpunkter till en mängd.
- Avgöra om en mängd är öppen, sluten eller ingetdera.

2.1 Öppna och slutna mängder

Av rent notationstekniska skäl introduceras topologiska begrepp för planet $\mathbb{R}^2$. Generaliseringarna till godtyckliga $\mathbb{R}^n$ lämnas till läsaren.

Öppen boll

Låt $P = (a, b)$ vara en punkt i planet. Till varje $\epsilon > 0$ har vi cirkeln centrerad omkring (a, b) med radie ϵ. Insidan av cirkeln är definierad som

$$\begin{aligned} B_\epsilon(P) =& \{(x, y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < \epsilon^2\} \\ =& \{(x, y) \mid \quad |(x, y) - (a, b)| < \epsilon\}. \end{aligned}$$

Mängden $B_\epsilon(P)$ kallas den öppna skivan, eller den *öppna bollen*, omkring P med radie ϵ.

Öppna omgivningar

Låt U vara en delmängd i $\mathbb{R}^2$. En punkt $P \in U$ ligger i det *indre* av mängden U om det existerar en öppen boll $B_\epsilon(P)$ inkluderad i U. Mängden U är *öppen* om U är lika med dess indre, vilket betyder att varje punkt i U också finns i det indre av U. En *öppen omgivning* omkring en punkt P betyder en öppen, ospecifierad, mängd som innehåller punkten P.

Slutna mängder

En delmängd C i $\mathbb{R}^2$ är *sluten* om komplementet till C är en öppen mängd. En punkt P i $\mathbb{R}^2$ är en *randpunkt* till en mängd C om varje öppen boll omkring P innehåller punkt från C och från komplementet till C. En mängd C är sluten om den innehåller dess randpunkter ∂C. En sluten mängd C är den disjunkta unionen av dess indre och dess rand.

Kompakta mängder

En mängd C i $\mathbb{R}^2$ är *begränsad* om mängden C är innehållen i någon låda $\{(x_1, x_2) \mid |x_i| \leq N, i = 1, 2\}$, där N är en konstant. En mängd C i $\mathbb{R}^2$ som är sluten och begränsad är en *kompakt* mängd.

Uppgifter

Uppgift 2.10.

a) Visa att mängden $C_1 = \{(x, y) \mid x^2 = y\}$ är en sluten, men ej en kompakt mängd.

b) Visa att mängden $C_2 = \{(x, y) \mid x^2 = y, y \leq 5\}$ är kompakt.

c) Visa att mängden $C_3 = \{(x, y) \mid x^2 = y, y < 5\}$ ej är kompakt.

d) Bestäm randpunkterna till $C_4 = \{(x, y) \mid x^2 = y, x \neq 0\}$.

Uppgift 2.11. Hitta exempel som satisfierar följande.

a) En mängd som varken är sluten eller öppen.

b) En mängd som är sluten och öppen.

Kurvor

- Hantera vektorvärda funktioner av en reell variabel.
- Tolka sådana funktioner i termer av kurvor och partikelrörelse.
- Definiera, beräkna och tolka derivator av vektorvärda funktioner.
- Ta fram tangentvektorer och tangentlinjer.
- Beräkna hastighet, fart och acceleration av partikel som rör sig.
- Räkna ut båglängd av en parameterkurva.

3.1 Vektorvärda funktioner

En funktion $\mathbf{r}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tillordnar till varje reelt tal $t \in \mathbb{R}$ en vektor $\mathbf{r}(t)$ i $\mathbb{R}^n$, det vill säga ett ordnat n-tuppel $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ av reella tal. Liknande har vi en att en funktion $\mathbf{r}\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tillordnar en vektor $\mathbf{r}(t)$ för varje tal i intervallet $a \leq t \leq b$. Sådana funktioner kallas *vektorvärda* funktioner.

Koordinatfunktioner

Att specifiera en vektorvärd funktion $\mathbf{r}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ är att specifiera en ordnad sekvens $x_1, x_2, \ldots, x_n$ av reellvärda funktioner $x_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (med $i = 1, \ldots, n$). Funktionerna $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kallar vi koordinatfunktionerna till $\mathbf{r}$.

Derivator

Om koordinatfunktionerna till en vektorvärd funktion $\mathbf{r}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ är deriverbara får vi en ny vektorvärd funktion $d\mathbf{r}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definerad av uttrycket

$$d\mathbf{r}(t) = (\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)).$$

Anmärkning 3.1.1. Vi kan föreställa oss att $\mathbf{r}(t)$ är en funktion som sveper ut positionen till en partikel vid tiden t. Om dess koordinatfunktioner är deriverbara då beskriver $d\mathbf{r}$ hastigheten till partikeln vid positionen $\mathbf{r}(t)$. Om nu koordinatfunktionerna till $d\mathbf{r}$ är deriverbara då är accelerationen, som fås via derivering av koordinatfunktionerna till $d\mathbf{r}$, också en vektorvärd funktion.

3.2 Kurvor och parametrisering

Kurvor

Låt $\mathbf{r}\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vara en vektorvärd funktion där koordinatfunktionerna $x_1, \dots, x_n$ är deriverbara. Bildmängden C är mängden av vektorer $\mathbf{r}(t)$ med $a \leq t \leq b$, och kallas en *kurva* i $\mathbb{R}^n$.

Exempel 2. Lösningsmängden till ekvationen $x^2 + y^2 = 1$ blir enhetscirkeln. Denna kurva kan vi beskriva som bilden av funktionen $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$ med $0 \leq t \leq 2\pi$.

Bilden av funktionen $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$, med godtyckliga t, ger en kurva i planet som kan beskrivas av ekvationen $y^3 = x^2$.

I rummet, $\mathbf{R}^3$ vill inte en kurva vara givet av en ekvation. Ett exempel är x-axeln i rummet. Detta är en linje, och är en kurva som vi kan beskriva med funktionen $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 0)$, med godtyckliga t.

Slät kurva

Låt $\mathbf{r}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ vara en funktion med deriverbara koordinatfunktioner. Bilden till funktionen $\mathbf{r}$ är därmed en kurva C. Om derivatan $d\mathbf{r}(t)$ ger en noll-skilld riktningsvektor för tangentlinjen till kurvan C i varje punkt $\mathbf{r}(t)$ då säger vi att kurvan C är slät. Tangentlinjen till en slät kurva i punkten $\mathbf{r}(c)$ ges därmed av uttrycket

$$\mathbf{r}(c) + t \cdot d\mathbf{r}(c),$$

med godtyckliga t.

Exempel 3. Kurvan som bestäms av funktionen $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$ är inte slät i punkten $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$ då derivatan av komponentfunktionerna är noll i denna punkt.

Orientering

Låt $\mathbf{r} \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vara en vektorvärd funktion vars bild är en kurva C. Kurvan börjar i punkten $\mathbf{r}(a)$ och slutar i $\mathbf{r}(b)$. Riktningen som vi traverserar punkterna till kurvan C kallar vi för *orienteringen* till kurvan. Om $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ då börjar och slutar kurvan i samma punkt, och en sådan kurva är en *sluten* kurva.

Parametriserad kurva

Låt C vara en kurva, och låt $\mathbf{r} \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vara en vektorvärd funktion vars bild är kurvan C. Om funktionen $\mathbf{r}$ är injektiv, frånsätt ett ändligt antal tal i intervallet $[a, b]$, då är funktionen $\mathbf{r}$ en *parametrisering* av kurvan C.

Exempel 4. Bilden av funktionen $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$ där $0 \leq t \leq 2\pi$ är enhetscirkeln C i planet. Funktionen $\mathbf{r}$ är inte injektiv då ändpunkterna $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi)$ är identifierade. Bortsätt from dessa tal är funktionen injektiv, och följdaktligen är funktionen en parametrisering av cirkeln.

Om vi istället låter $0 \leq t \leq 4\pi$ då ändras inte bilden till funktionen $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Bilden är fortfarande enhetscirkeln C. Nu genomlöper vi cirkeln två gånger, och funktionen är inte en parametrisering av cirkeln.

Exempel 5. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4 = & x^2 + y^2 \\ z = & x + 2y \end{cases}$$

i tre okända (x, y, z) är en rymdkurva C. Notera att den första ekvationen beskriver en cirkel med radie 2 i (x, y)-planet, men att z-värdet är godtyckligt. Lösningen till denna ekvation är en cylinder. Skärningen av denna cylinder med planet $\{z = x + 2y\}$ är rymdkurvan C. En parametrisering av denna kurva är

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), 2\cos(t) + 4\sin(t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

3.3 Båglängd

Låt $\mathbf{r}\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vara en parametrisering av en slät kurva C. Till varje $a \leq t \leq b$ har vi hastighetsvektorn $d\mathbf{r}(t) = (\dot{x}_1(t), \cdots, \dot{x}_n(t))$. Längden av hastighetsvektorn $d\mathbf{r}(t)$ är

$$|d\mathbf{r}(t)| = \sqrt{(\dot{x}_1(t))^2 + \cdots + (\dot{x}_n(t))^2}.$$

Vi definerar *båglängden* till kurvan C som

$$\int_C ds = \int_a^b |d\mathbf{r}(t)| dt. \tag{3.3.1}$$

Anmärkning 3.3.1. Definitionen av båglängd använder en parametrisering av kurvan, men det visar sig att båglängden är oberoende av val av parametrisering.

Exempel 6. Funktionen $\mathbf{r}(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), 5t)$ beskriver en cirkulär helixkurva C. När $0 \leq t \leq 4\pi$ vill kurvan börja i punkten $(2, 0, 0)$ och därefter åma sig runt cylindern $x^2 + y^2 = 4$ två gånger med slutpunkt $(2, 0, 20\pi)$. För att bestämma båglängden använder vi uttryck för hastigheten, som är $d\mathbf{r}(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t), 5)$. Definitionen av båglängden ger nu att

$$\int_C ds = \int_0^{4\pi} \sqrt{(-2\sin(t))^2 + (2\cos(t))^2 + 25} = \int_0^{4\pi} \sqrt{4 + 25} = 4\pi\sqrt{29}.$$

3.4 Linjeintegral

Antag nu att vi har en funktion $f\colon C \longrightarrow \mathbb{R}$ där C är en slät kurva. Om $\mathbf{r}(t)$ är en parametrisering av kurvan C då har vi att sammansättningen $f(\mathbf{r}(t))$ är en funktion i en variabel t, med $a \leq t \leq b$. Om funktionen $f(\mathbf{r}(t))$ är kontinuerlig defineras *linjeintegralen* enligt

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |d\mathbf{r}(t)| dt. \tag{3.4.1}$$

Exempel 7. Låt C vara delen av parabolan $y = x^2$ där $0 \leq x \leq 2$. Täthetsfunktionen $f\colon C \longrightarrow \mathbb{R}$ tillordnar talet $f(x, y) = x$ till en punkt (x, y) på kurvan C. Med denna täthetsfunktion blir vikten av kurvan lika med linjeintegralen $\int_C f ds$. Vi vill bestämma denna vikt. En parametrisering av kurvan är $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$ där $0 \le t \le 2$. Vi har att $d\mathbf{r}(t) = (1, 2t)$, och därmed att $|d\mathbf{r}(t)| = \sqrt{1+4t^2}$. Kurvans vikt ges av uttrycket

$$\int_0^2 f(\mathbf{r}(t))|d\mathbf{r}(t)|dt = \int_0^2 t\sqrt{1+4t^2}dt.$$

Funktionen $\varphi(t) = \frac{1}{12}(1+4t^2)^{3/2}$ är en primitiv funktion till $t\sqrt{1+4t^2}$. Detta ger att $\displaystyle\int_C f ds = [\varphi(t)]_0^2 = \frac{1}{12}(27-1) = \frac{13}{2}$.

Uppgifter

Uppgift 3.12. Parametrisera kurvan

$$C = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 = 4 \ \text{ och } \ x + z = 0\}.$$

Uppgift 3.13. Parametrisera nedanstående kurvor:

a) Cirkeln $2x^2 + 4x + 2y^2 = 6$.

b) Linjestycket $y = 3x + 5$, då $0 \le x \le 3$.

c) Ellipsen $x^2 + 4y^2 = 4$.

Uppgift 3.14. En partikel rör sig längs en kurva i $\mathbb{R}^2$ så att den vid tidpunkten t sekunder efter starten befinner sig i punkten $\mathbf{r}(t) = (2\cos\pi t, \sin\pi t)$. Enheten på axlarna är meter.

a) Vilken typ av kurva rör sig partikeln längs?

b) Bestäm partikelns hastighet, fart och acceleration vid tidpunkten $t = 2$.

Uppgift 3.15. En partikel rör sig i planet längs en ellipskurva så att den vid tidpunkten $t \ge 0$ befinner sig i punkten

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos 2\pi t, 2\sin 2\pi t).$$

a) I vilka punkter på kurvan är farten som störst?

b) Bestäm den största farten.

Uppgift 3.16. En partikel rör sig längs en kurva i $\mathbb{R}^3$ så att den vid tidpunkten t sekunder efter starten befinner sig i punkten $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$. Enheten på axlarna är meter. Bestäm partikelns hastighet, fart och acceleration i tidpunkten $t = 1$.

Uppgift 3.17. En kurva i $\mathbb{R}^3$ parametriseras genom $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, 4)$ där $t \in \mathbb{R}$.

a) Hur vet man att punkten $(2, 4, 4)$ ligger på kurvan?

b) Bestäm en parameterframställning av tangentligen till kurvan i punkten $(2, 4, 4)$.

c) Skriv upp en integral som ger längden av den del av kurvan som ligger mellan punkten $(-2, 4, 4)$ och $(2, 4, 4)$.

Uppgift 3.18. Betrakta spiralkurvan $(x, y, z) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$ där $t \in \mathbb{R}$.

a) Verifiera att punkten $(1, 0, 1)$ ligger på kurvan.

b) Bestäm en tangentvektor till kurvan i punkten $(1, 0, 1)$.

c) Bestäm en parametrisering av tangentlinjen till kurvan i punkten $(1, 0, 1)$.

d) Bestäm längden av den del av spiralkurvan som fås då $0 \leq t \leq 1$.

Tentamensuppgifter

Tentamen. 20.01.10, Problem 1B. Kurvan C parametriseras av $\mathbf{r}(t) = (3\cos(2t), 1+\cos^2(2t))$ med $-\pi/2 \leq t \leq 0$. Förklara varför följande påståenden stämmer.

- Punkterna (x, y) på kurvan satisfierar ekvationen $y = 1 + x^2/9$.
- Kurvan är symmetrisk om y-axeln.

- Avståndet från kurvan till origo är 1.
- Båglängden till kurvan är $\frac{1}{9}\int_{-3}^{3}\sqrt{81+4t^2}\,dt$.
- Kurvan är slät.

Funktioner i flera variabler

- Hantera reellvärda funktioner av flera variabler.
- Resonera kring gränsvärde och kontinuitet för sådana funktioner.
- Beräkna gränsvärden alternativt visa att gränsvärde saknas.
- Ta fram definitionsmängd och värdemängd, graf.
- Bestämma och använda nivåkurvor och -ytor.

4.1 Funktioner i flera variabler

Låt $U \subseteq \mathbb{R}^m$ vara en öppen delmängd. En funktion $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ tillordnar till varje vektor $(x_1, \ldots, x_m)$ i U ett tal $f(x_1, \ldots, x_m)$. Sådana funktioner kallas funktioner i *flera variabler*, eller en funktion i m variabler. Mängden U är *definitionsområdet* till funktionen, och mängden

$$\{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x_1, \ldots, x_m) \quad \text{någon vektor} \quad (x_1, \ldots, x_m) \in U\}$$

är *värdemängden till funktionen. Grafen* till en funktionen är delmängden i $U \times \mathbb{R}$ som består av alla $(m+1)$-tupler på formen $(x_1, \ldots, x_m, f(x_1, \ldots, x_m))$.

Nivåkurva

Nivåkurvan till en funktion $f\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definieras som delmängden av $\mathbb{R}^m$ som består av alla m-tupler $(x_1, \ldots, x_m)$ sådana att $f(x_1, \ldots, x_m) = c$.

Med andra ord har vi att nivåkurvan är den inversa bilden $f^{-1}(c)$ till ett givet tal c.

Nivåkurvan till en funktion $f(x, y)$ in två variabler är definierad av en ekvation $c = f(x, y)$, och följdaktligen är dessa ofta kurvor. Nivåkurvorna till funktioner $f(x, y, z)$ i tre variabler är ofta ytor.

Exempel 8. Vi har funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$ i två variabler x och y. Definitionsmängden är talplanet $\mathbb{R}^2$, och värdemängden är alla positiva tal $y \geq 0$. Vi har vidare att till varje tal c har vi nivåkurvan $c = x^2 + y^2$. Med $c < 0$ vill nivåkurvan vara den tomma mängden. Med $c = 0$ vill nivåkurvan vara punkten $(0, 0)$. Med $c > 0$ vill nivåkurvan vara cirkeln centrerad omkring origo, med radie $\sqrt{c}$.

Grafen till funktionen f är delmängden av $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ givet av ekvationen $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Detta är en paraboloid yta. Skärningen av paraboloiden med det horisontella planet $z = c$ ger, efter projektion ned på (x, y)-planet, nivåkurvan.

4.2 Gräns och kontinuerliga funktioner

Gränsenbegräppet för funktioner i flera variabler är mera komplicerat än vad som är fallet för en-variabel funktioner. Den formella definitionen är dock den samma.

Gränsbegreppet

Anta att funktionen $f(x, y)$ är definierad i en öppen omgiving omkring en punkt (a, b). Vi definierar *gränsen* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ om det till varje $\epsilon > 0$ existerar något $\delta > 0$ sådan att

$$| f(x, y) - L | \leq \epsilon$$

för alla $0 <| (x, y) - (a, b) |< \delta$.

Kontinuitet

Anta att funktionen $f(x, y)$ är definierad i en öppen omgivning omkring punkten (a, b). Funktionen är *kontinuerlig* i (a, b) om $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

Sats 1. *Låt $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion. Funktionen är kontinuerlig om och endast om inversa bilden $f^{-1}(I)$ är öppen för varje öppen mängd I i $\mathbb{R}$.*

Sats 2. *Elementära funktioner (sammansättningar och algebraiska uttryck av polynom, rationella funktioner, rotfunktioner, trigonometriska funktioner, exponential och logaritm-funktioner) är kontinuerliga.*

Uppgifter

Uppgift 4.19. Bestäm definitionsmängderna till följande funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$.

a) $f(x,y) = \ln(1+x+y)$

b) $g(x,y) = e^{x^2+y^2-1}$

c) $h(x,y) = \sqrt{e^x(3-2y-y^2)}$

Uppgift 4.20. Betrakta funktionen $f(x,y) = x^2+y^2-1$.

a) Bestäm definitionsmängd och värdemängd till f.

b) Skissa några nivåkurvor till f.

c) Skissa grafen till f.

Uppgift 4.21. Skissa några nivåkurvor/nivåytor till nedanstående funktioner.

a) $f(x,y) = \ln(1+x+y)$

b) $g(x,y) = e^{x^2+y^2-1}$

c) $h(x,y,z) = 2x^2+y^2+z^2$

Uppgift 4.22. Beräkna nedanstående gränsvärden eller bevisa att de inte existerar!

a) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} e^{x^2+y^2-5}$

b) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{e^{x^2+y^2-5}-1}{x^2+y^2-5}$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2}$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2+xy}{x^2+y^2-xy}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2+xy)}{x^2+y^2+xy}$

Uppgift 4.23. I vilka punkter är nedanstående funktioner kontinuerliga?

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2+xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Uppgift 4.24. I vilka punkter är nedanstående funktioner kontinuerliga?

a) $f(x,y) = \ln(1+x+y)$

b) $g(x,y) = e^{x^2+y^2-1}$

c) $h(x,y) = \sqrt{e^x(3-2y-y^2)}$

Facit och lösningstips

1.1.

a) $0 \leq r \leq 3,\ \ 0 \leq \theta \leq \pi$

b) $0 < \theta < \pi$

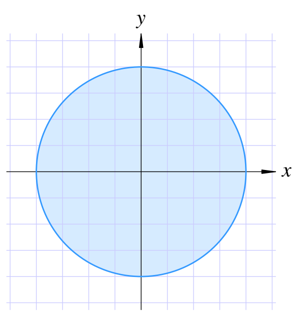
c) $1 \leq r \leq 3,\ \ \pi/2 \leq \theta \leq \pi$

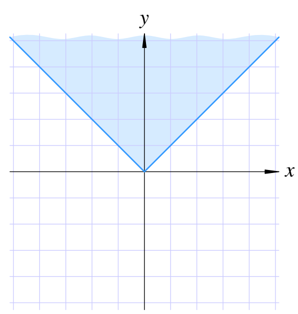
d) $0 \leq r \leq \sqrt{32},\ \ \theta = \pi/4$

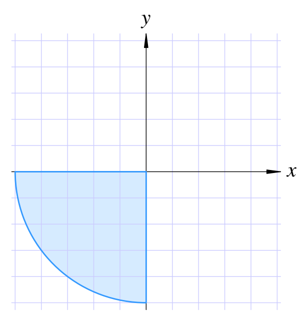
e) $r < 2$ eller $r \geq 3$

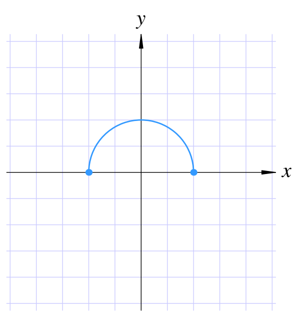
f) $\arctan \frac{1}{2} < \theta < \arctan 2$

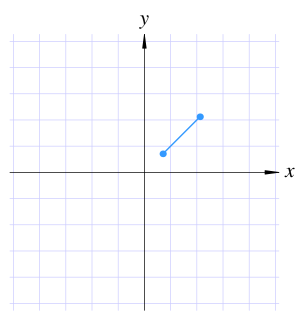
1.2.

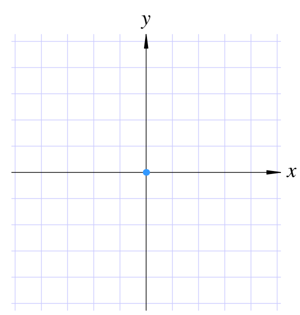
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

1.3. a) Rektangulära koordinater: $x^2 + y^2 \leq 9, \ \ x - y \geq 3$

Polära koordinater: $3\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi, \ \ \dfrac{3}{\cos\theta - \sin\theta} \leq r \leq 3$

b) Rektangulära koordinater: $x^2 + (y-2)^2 \leq 4$

Polära koordinater: $0 \leq \theta \leq \pi, \ \ 0 \leq r \leq 4\sin\theta$

1.4. $1 \leq r \leq \sqrt{3}, \ \ \pi/4 < \theta < 3\pi/4.$

1.5.

a) $r = 3, \ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ \ 0 \leq z \leq 5$

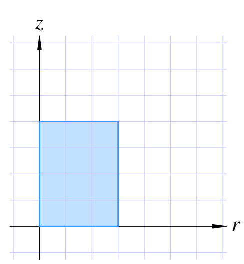
b) $0 \leq r \leq 4, \ \ \theta = 0, \ \ 0 \leq z \leq 6$

c) $3z/h \leq r \leq 3, \ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ \ 0 \leq z \leq h$
Alternativt: $0 \leq r \leq 3, \ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ \ 0 \leq z \leq hr/3$

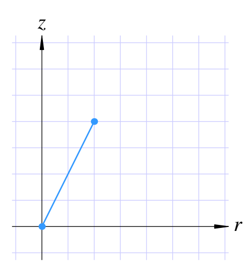
d) $r^2 + z^2 \leq 16, \ \ z \geq 0, \ \ \pi/2 \leq \theta \leq 2\pi$

1.6. I (r, z)-planet:

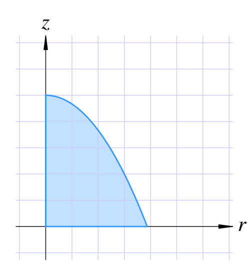
a)



b)

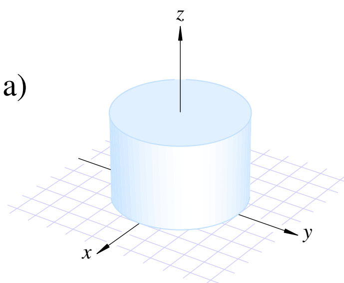


c)

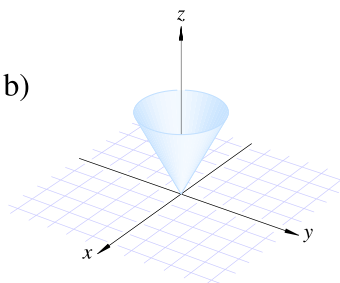


I xyz-rymden:

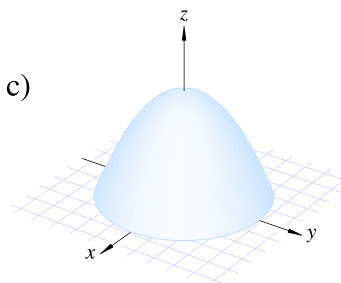
a)



b)

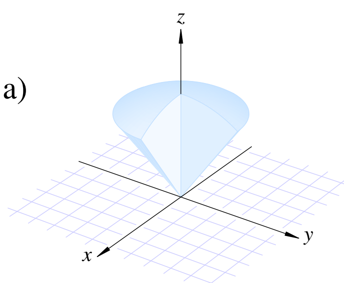


c)

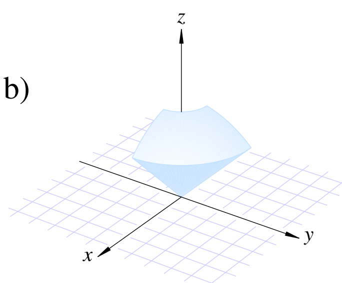


1.7.

a)



b)



1.8. a) Rektangulära koordinater: $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \; y \leq 0, \; z \geq 0$
Rymdpolära koordinater: $0 \leq r \leq a, \; 0 \leq \phi \leq \pi/2, \; \pi \leq \theta \leq 2\pi$

b) Rektangulära koordinater: $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \; x \leq 0, \; z \geq 0$
Rymdpolära koordinater: $0 \leq r \leq a, \; 0 \leq \phi \leq \pi/2, \; \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$

c) Rektangulära koordinater: $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \; x \leq 0, \; y \geq 0$
Rymdpolära koordinater: $0 \leq r \leq a, \; 0 \leq \phi \leq \pi, \; \pi/2 \leq \theta \leq \pi$

d) Rektangulära koordinater: $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \; y \geq 0, \; z \leq 0$
Rymdpolära koordinater: $0 \leq r \leq a, \; \pi/2 \leq \phi \leq \pi, \; 0 \leq \theta \leq \pi$

1.9. $0 < r < 3, \; 0 < \phi < \pi/2, \; 0 < \theta < \pi$

2.10.

a) Låt $P = (a, b)$ vara en punkt ej med i mängden C_1. Välj ϵ att vara ett positivt tal som är mindre än avståndet från P till C_1. Då vill den öppna bollen $B_\epsilon(P)$ inte skära C_1. Med andra ord finns bollen i komplementet till C_1. Detta gäller för alla punkt i komplementet som därmed är en öppen mängd. Följdaktligen är C_1 en sluten mängd. Mängden är inte kompakt då kurvan C_1 inte får plats i någon låda.

b) Mängden är sluten av samma skäl som uppgiften a), och ryms i lådan där $|x| \leq 5$ och $|y| \leq 5$.

c) Mängden är begränsad men ej sluten. Punkten $P = (\sqrt{5}, 5)$ är inte med i mängden C_3, men varje boll $B_\epsilon(P)$ vill ha en icke-tom skärning med C_3. Komplementet till C_3 är därför inte öppen, och då är inte C_3 sluten.

d) Randpunkterna är mängden $\{(x, y) \mid x^2 = y\}$.

2.11.

a) Mängden C_4 i uppgift 2.10 d), till exempel.

b) Mängden $\mathbb{R}^2$ är uppenbarligen öppen, men också sluten! För att se att $\mathbb{R}^2$ är sluten måste vi visa att komplementet är öppen. Komplementet är tomt, och då blir det inget att kolla.

3.12. Exempelvis $\mathbf{r}(\theta) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, -2\cos\theta)$

3.13. Till exempel (flera alternativ är möjliga):

a) $x = -1 + 2\cos t$ och $y = 2\sin t$, där $0 \leq t < 2\pi$.

b) $x = t$ och $y = 3t + 5$, där $0 \leq t \leq 3$

c) $x = 2\cos\theta$ och $y = \sin\theta$, där $0 \leq \theta < 2\pi$

(Ovan är parametriseringarna givna koordinat för koordinat. Det går förstås också bra att uttrycka samma sak med hjälp av en vektorvärda funktioner, t ex i uppgift a:

$$\mathbf{r}(t) = (-1 + 2\cos t, 2\sin t) \quad \text{med} \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Tänk efter så att du förstår båda dessa skrivsätt och att de ger samma information!)

3.14. Ellips. Hastigheten vid $t = 2$ är $\mathbf{r}'(2) = (0, \pi)$, farten är π och accelerationen $\mathbf{r}''(2) = (-2\pi^2, 0)$.

3.15. Farten är som störst i punkterna $(0, \pm 2)$ och maxfarten är 6π.

3.16. Hastighet $(1, 2, 3)$. Fart $\sqrt{14}$ m/s. Acceleration $(0, 2, 6)$.

3.17. Om man väljer $t = 2$ och sätter in i parametriseringen får man punkten $(2, 4, 4)$ som alltså ligger på kurvan. En tangentvektor till kurvan i den punkten är $\mathbf{r}'(2) = (1, 4, 0)$ så tangentlinjen kan parametriseras

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Längden av den aktuella delen av kurvan är $\int_{-2}^{2} \sqrt{1 + 4t^2}\, dt$.

3.18.

a) Sätt in $t = 1$ i parametriseringen.

b) Tangentvektor är $(x'(1), y'(1), z'(1)) = (0, 2\pi, 1)$.

c) tangentlinjen kan parametriseras

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(Här ovan är parameterformen för linjen skriven som i Algebra och geometri. Ibland skriver vi bara $(x, y, z) = (1, 2\pi t, 1 + t)$, då $t \in \mathbb{R}$, och menar samma sak som ovan. Tänk igenom det här så att du förstår att de båda skrivsätten innehåller samma information!)

d) Längden är $\int_0^1 \sqrt{1 + 4\pi^2}\, dt = \sqrt{1 + 4\pi^2}$.

4.19.

a) Halvplanet $\{(x, y) : x + y > -1\}$.

b) Hela $\mathbb{R}^2$

c) Stripen $\{(x, y) : -3 \leq y \leq 1\}$

4.20. Definitionsmängden är hela $\mathbb{R}^2$, värdemängden är alla tal som är större än eller lika med -1. Nivåkurvorna är cirklar runt origo i xy-planet. Grafen är en paraboloid (skålliknande).

4.21.

a) Nivåkurvorna är räta linjer i xy-planet.

b) Nivåkurvorna är cirklar runt origo i xy-planet.

c) Nivåytorna är ellipsoider runt origo i xyz-rymden.

4.22. a) 1. b) 1. c) 0. d) Existerar inte. e) 1. Tips för b) och e): kom ihåg standardgränsvärden från envarre.

4.23. a) Alla punkter i hela $\mathbb{R}^2$. b) Alla punkter i $\mathbb{R}^2$ utom $(0, 0)$.

4.24. Exakt samma svar som i uppgift 4.19.[1] Eftersom detta är funktioner som ges av elementära uttryck så är de kontinuerliga överallt där de är definierade.

[1]manuellt insatt referens