POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

PHS 4700
Physique pour les applications multimédia

Chapitre 6 — Mouvement Contraint

G. Marleau

Automne 2016

Table des matières

Introduction

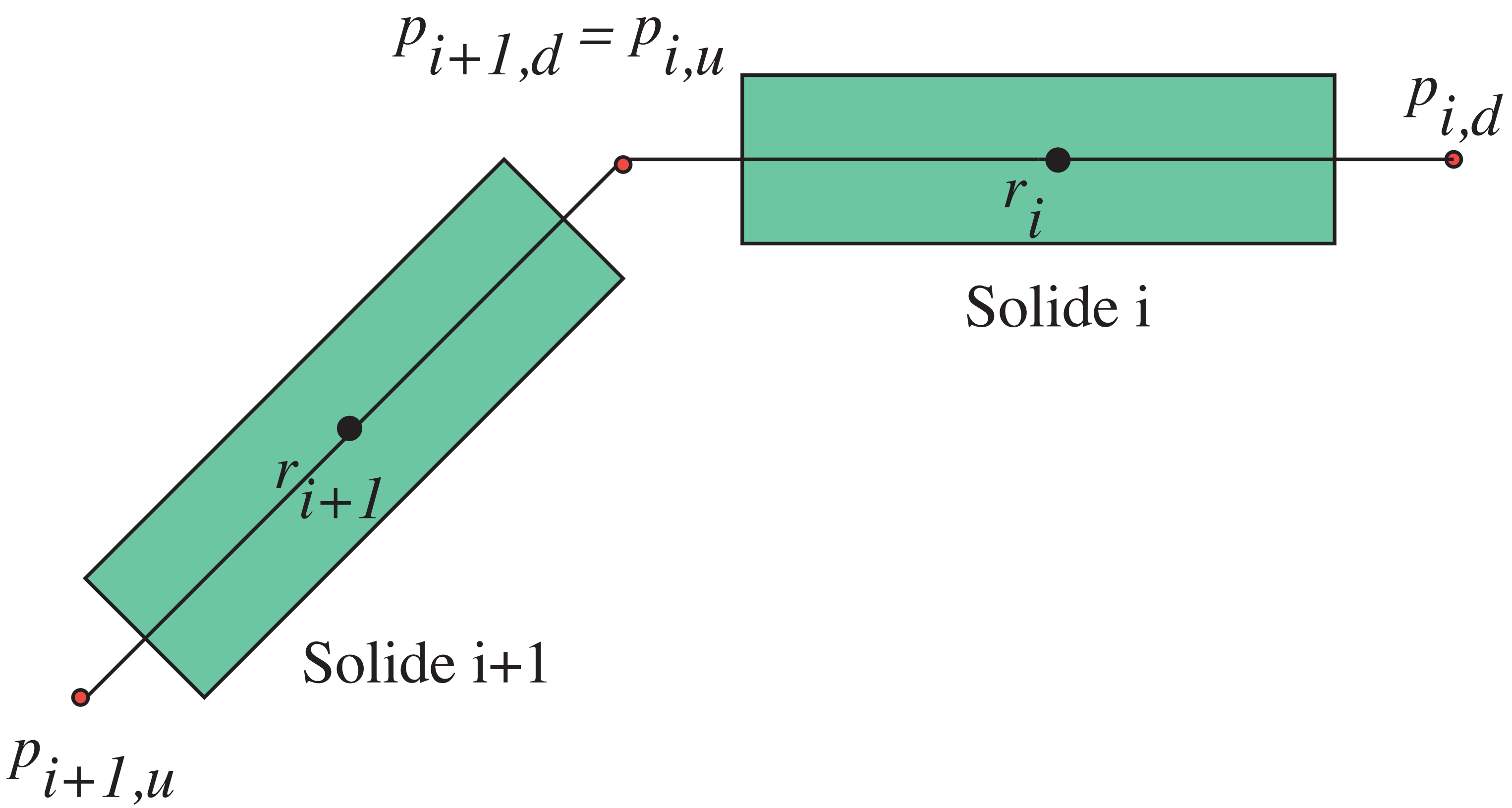
Dans les chapitres précédents, nous avons presque toujours considéré que les solides se déplaçaient de façon indépendante les uns des autres. La seule exception à cette règle est survenue lorsque nous avons considéré les collisions, et même dans ce cas, nous avons remplacé l'interaction entre les solides qui s'avérait difficile à analyser par des états avant et après la collision, sans trop nous préoccuper de ce qui se passait durant la collision. Ici, nous considérerons des situations tout à fait différentes où les solides sont reliés entre eux par des liens solides fixés un à l'autre par des joints flexibles.

Introduction

Queue de cheval.

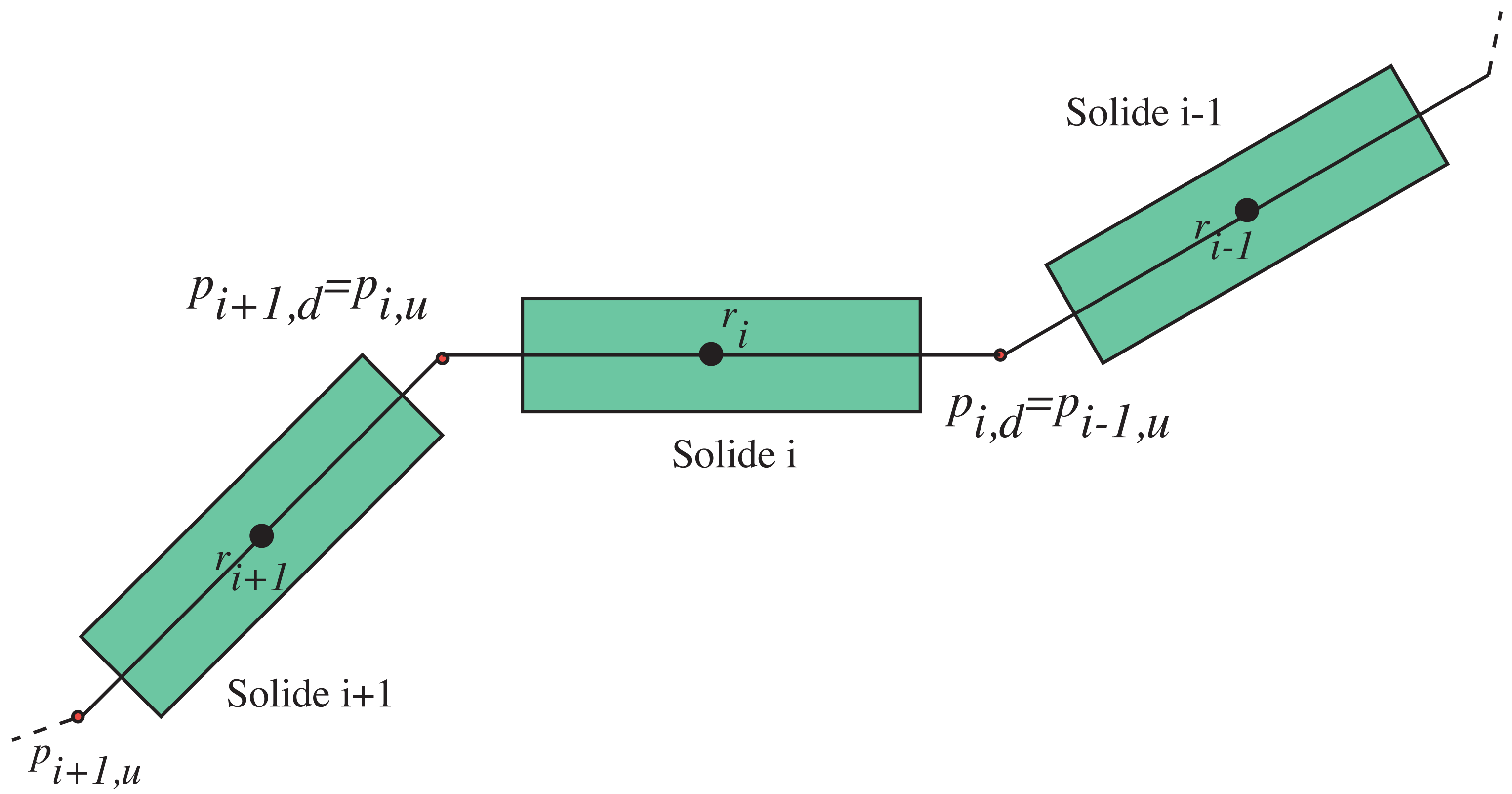
Introduction

Deux solides dont les mouvements sont limités par une contrainte.



Introduction

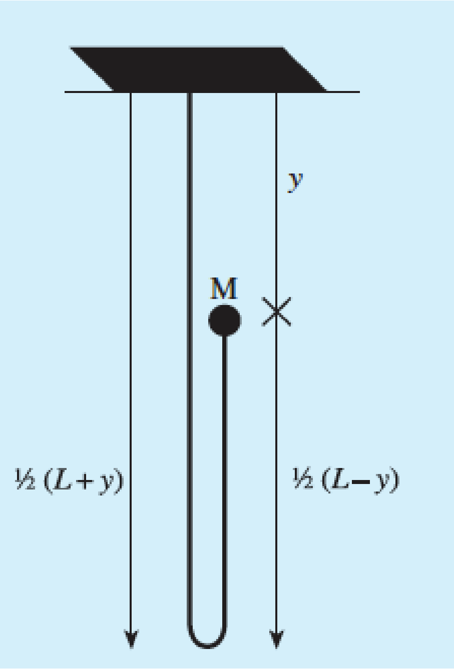
Plusieurs solides dont les mouvements sont limités par une série de contraintes.



Introduction

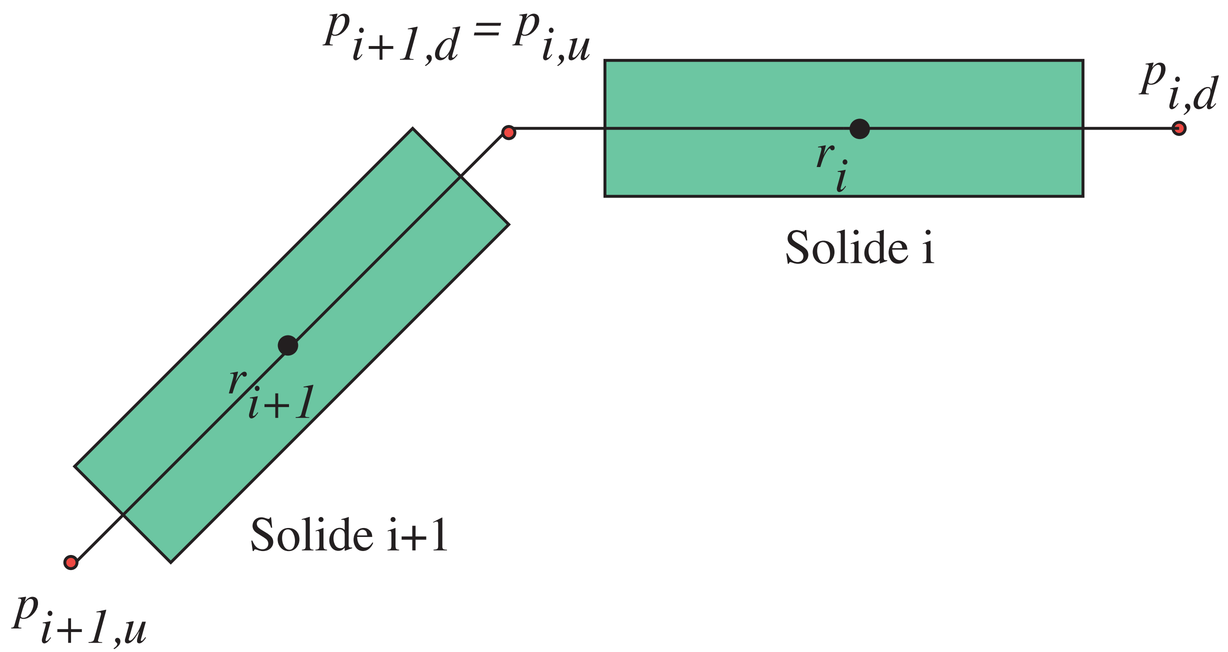
La technique que nous allons développer peut s'appliquer à plusieurs situations, incluant :

- queue de cheval ;
- fouet ;
- câble de bungee, dans sa phase descendante.



Équations du mouvement

Notation.



On suppose ici que les solides i et $i+1$ sont liés par deux tiges rigides attachées au point $\vec{p}_{i,u} = \vec{p}_{i+1,d}$ par un joint permettant des mouvements dans toutes les directions.

Équations du mouvement

Équations du mouvement pour solide i.

$$\frac{d\vec{r}_i(t)}{dt} = \vec{v}_i(t)$$
$$\frac{d\vec{v}_i(t)}{dt} = \vec{a}_i(t)$$
$$\frac{d\vec{\Omega}_i(t)}{dt} = \vec{\omega}_i(t)$$
$$\frac{d\vec{\omega}_i(t)}{dt} = \vec{\alpha}_i(t)$$

Des équations similaires s'appliquent au solide $i+1$.

Équations du mouvement

Forces et moments de force.

$$\vec{a}_i(t) = m_i^{-1}\left(\vec{F}_{E,i} + \vec{f}_{i+1\to i}\right) = \boldsymbol{M}_i^{-1}\left(\vec{F}_{E,i} + \vec{f}_{i+1\to i}\right)$$

$$\vec{\alpha}_i(t) = \boldsymbol{I}_i^{-1}\left(\vec{\tau}_{E,i} + \vec{r}_{i,u}\times\vec{f}_{i+1\to i} + \vec{L}_i\times\vec{\omega}_i(t)\right)$$

$$\vec{a}_{i+1}(t) = m_{i+1}^{-1}\left(\vec{F}_{E,i+1} + \vec{f}_{i\to i+1}\right) = \boldsymbol{M}_{i+1}^{-1}\left(\vec{F}_{E,i+1} + \vec{f}_{i\to i+1}\right)$$

$$\vec{\alpha}_{i+1}(t) = \boldsymbol{I}_{i+1}^{-1}\left(\vec{\tau}_{E,i+1} + \vec{r}_{i+1,d}\times\vec{f}_{i\to i+1} + \vec{L}_{i+1}\times\vec{\omega}_{i+1}(t)\right)$$

- $\vec{r}_{i,u} = \vec{p}_{i,u} - \vec{r}_i$ et $\vec{r}_{i+1,d} = \vec{p}_{i+1,d} - \vec{r}_{i+1}$
- $\vec{F}_{E,i}$ et $\vec{\tau}_{E,i}$ sont les forces et moments de force externes appliqués sur le solide i.
- $\vec{L}_i \times \vec{\omega}_i(t)$ est le terme introduit pour prendre en compte la dérivée temporelle du moment d'inertie.

Équations du mouvement

- La force $\vec{f}_{i+1\to i}$ est la force que le solide $i+1$ exerce sur le solide i au point $\vec{p}_{i,u} = \vec{p}_{i+1,d}$. Comme la troisième loi de Newton est

$$\vec{f}_{i+1\to i} = -\vec{f}_{i\to i+1}$$

la force nette qui est appliquée au point $\vec{p}_{i+1,d} = \vec{p}_{i,u}$ est donc nulle.

- La matrice $\boldsymbol{M}_i$ est définie comme suit

$$\boldsymbol{M}_i = m_i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et permet d'écrire les équations du mouvement linéaire et angulaire dans un format matriciel.

Équations du mouvement

Conditions initiales (temps t_0).

- La position du centre de masse de chacun des blocs $\vec{r}_i(t_0)$.
- La position angulaire d'un point sur le bloc $\vec{\Omega}_i(t_0)$.
- La vitesse du centre de masse de chacun des blocs $\vec{v}_i(t_0)$.
- La vitesse angulaire des blocs par rapport à leur centre de masse $\vec{\omega}_i(t_0)$.
- Le moment cinétique des blocs par rapport au système du laboratoire $\vec{L}_i(t_0)$.
- La position initiale du joint universel

$$\vec{p}_{i,u}(t_0) = \vec{p}_{i+1,d}(t_0)$$

Les forces $\vec{F}_{E,i}(t)$ et moments de force $\vec{\tau}_{E,i}(t)$ externes doivent être connus. La force $\vec{f}_{i+1\rightarrow i}(t)$ est inconnue, et nous verrons comment l'évaluer.

Équations du mouvement

Pour déterminer $\vec{v}_i(t_0 + \Delta t)$ et $\vec{r}_i(t_0 + \Delta t)$, il faut :

- évaluer $\vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t)$;
- résoudre les équations du mouvement (Runge-Kutta) en utilisant les accélérations linéaires et angulaires calculées en utilisant les équations de la page 10.

Cas à une contrainte

La contrainte est

$$\vec{p}_{i,u}(t) = \vec{p}_{i+1,d}(t)$$

ou

$$\vec{p}_{i,u}(t) - \vec{p}_{i+1,d}(t) = 0$$

La relation $\vec{p}_{i,u}(t) - \vec{p}_{i+1,d}(t) = 0$ implique aussi

$$\frac{d\vec{p}_{i,u}(t)}{dt} - \frac{d\vec{p}_{i+1,d}(t)}{dt} = 0$$

et

$$\frac{d^2\vec{p}_{i,u}(t)}{dt^2} - \frac{d^2\vec{p}_{i+1,d}(t)}{dt^2} = 0$$

Cas à une contrainte

Sachant que

$$\vec{p}_{i,u}(t) = \vec{r}_i(t) + \vec{r}_{i,u}(t)$$
$$\vec{p}_{i+1,d}(t) = \vec{r}_{i+1}(t) + \vec{r}_{i+1,d}(t)$$

on obtient alors

$$\frac{d^2\vec{p}_{i,u}(t)}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}_{i,u}(t)}{dt^2}$$
$$\frac{d^2\vec{p}_{i+1,d}(t)}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_{i+1}(t)}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}_{i+1,d}(t)}{dt^2}$$

Cas à une contrainte

Par définition

$$\frac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = \vec{a}_i(t)$$
$$\frac{d^2\vec{r}_{i,u}(t)}{dt^2} = \vec{\alpha}_{i,u}(t) \times \vec{r}_{i,u}(t) + \vec{\omega}_i(t) \times (\vec{\omega}_i(t) \times \vec{r}_{i,u}(t))$$

et

$$\frac{d^2\vec{r}_{i+1}(t)}{dt^2} = \vec{a}_{i+1}(t)$$
$$\frac{d^2\vec{r}_{i+1,d}(t)}{dt^2} = \vec{\alpha}_{i+1,d}(t) \times \vec{r}_{i+1,d}(t) + \vec{\omega}_{i+1}(t) \times (\vec{\omega}_{i+1}(t) \times \vec{r}_{i+1,d}(t))$$

Cas à une contrainte

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\vec{p}_{i,u}(t)}{dt^2} &= \boldsymbol{M}_i^{-1}\left(\vec{F}_{E,i} + \vec{f}_{i+1\to i}\right) \\
&\quad + \vec{\alpha}_{i,u}(t) \times \vec{r}_{i,u}(t) + \vec{\omega}_i(t) \times (\vec{\omega}_i(t) \times \vec{r}_{i,u}(t)) \\
\frac{d^2\vec{p}_{i+1,d}(t)}{dt^2} &= \boldsymbol{M}_{i+1}^{-1}\left(\vec{F}_{E,i+1} - \vec{f}_{i+1\to i}\right) \\
&\quad + \vec{\alpha}_{i+1,d}(t) \times \vec{r}_{i+1,d}(t) + \vec{\omega}_{i+1}(t) \times (\vec{\omega}_{i+1}(t) \times \vec{r}_{i+1,d}(t))
\end{aligned}$$

où on a utilisé $\vec{f}_{i+1\to i} = -\vec{f}_{i\to i+1}$.

Rappelons-nous que

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}_{i,u}(t) &= \boldsymbol{I}_i^{-1}\left(\vec{\tau}_{E,i} + \vec{r}_{i,u} \times \vec{f}_{i+1\to i} + \vec{L}_i \times \vec{\omega}_i(t)\right) \\
\vec{\alpha}_{i+1,d}(t) &= \boldsymbol{I}_{i+1}^{-1}\left(\vec{\tau}_{E,i+1} + \vec{r}_{i+1,d} \times \vec{f}_{i\to i+1} + \vec{L}_{i+1} \times \vec{\omega}_{i+1}(t)\right)
\end{aligned}$$

Cas à une contrainte

Pour nous simplifier la vie, écrivons

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}_{i,u}(t) &= \vec{d}_i(t) + \boldsymbol{I}_i^{-1}\vec{r}_{i,u} \times \vec{f}_{i+1\to i} \\
&= \vec{d}_i(t) + \boldsymbol{I}_i^{-1}\boldsymbol{R}_{i,u}\vec{f}_{i+1\to i} \\
\vec{\alpha}_{i+1,d}(t) &= \vec{d}_{i+1}(t) - \boldsymbol{I}_{i+1}^{-1}\vec{r}_{i+1,d} \times \vec{f}_{i+1\to i} \\
&= \vec{d}_{i+1}(t) - \boldsymbol{I}_{i+1}^{-1}\boldsymbol{R}_{i+1,d}\vec{f}_{i+1\to i}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\vec{d}_i(t) &= \boldsymbol{I}_i^{-1}\left(\vec{\tau}_{E,i}(t) + \vec{L}_i(t) \times \vec{\omega}_i(t)\right) \\
\vec{d}_i(t) &= \boldsymbol{I}_{i+1}^{-1}\left(\vec{\tau}_{E,i+1}(t) + \vec{L}_{i+1}(t) \times \vec{\omega}_{i+1}(t)\right)
\end{aligned}$$

Cas à une contrainte

Noter qu'on a remplacé le produit vectoriel de deux vecteurs par le produit d'une matrice par un vecteur.

- Pour $\vec{r}_{i,u} \times \vec{f}_{i+1\to i}$ avec $\vec{r}_{i,u} = (x_{i,u}, y_{i,u}, z_{i,u})$ on aura

$$\boldsymbol{R}_{i,u} = \begin{pmatrix} 0 & -z_{i,u} & y_{i,u} \\ z_{i,u} & 0 & -x_{i,u} \\ -y_{i,u} & x_{i,u} & 0 \end{pmatrix}$$

- Pour $\vec{r}_{i+1,d} \times \vec{f}_{i\to i+1}$ avec $\vec{r}_{i+1,d} = (x_{i+1,d}, y_{i+1,d}, z_{i+1,d})$ on aura

$$\boldsymbol{R}_{i+1,d} = \begin{pmatrix} 0 & -z_{i+1,d} & y_{i+1,d} \\ z_{i+1,d} & 0 & -x_{i+1,d} \\ -y_{i+1,d} & x_{i+1,d} & 0 \end{pmatrix}$$

Cas à une contrainte

De plus si on définit

$$\vec{c}_{i,u}(t) = \boldsymbol{M}_i^{-1}\vec{F}_{E,i} + \vec{\omega}_i(t) \times (\vec{\omega}_i(t) \times \vec{r}_{i,u}(t))$$
$$\vec{c}_{i+1,d}(t) = \boldsymbol{M}_{i+1}^{-1}\vec{F}_{E,i+1} + \vec{\omega}_{i+1}(t) \times (\vec{\omega}_{i+1}(t) \times \vec{r}_{i+1,d}(t))$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\vec{p}_{i,u}(t)}{dt^2} &= \vec{c}_{i,u}(t) + \boldsymbol{M}_i^{-1}\vec{f}_{i+1\to i} - \boldsymbol{R}_{i,u}\vec{\alpha}_i(t) \\
&= \vec{c}_{i,u}(t) - \boldsymbol{R}_{i,u}\vec{d}_i(t) + \left(\boldsymbol{M}_i^{-1} - \boldsymbol{R}_{i,u}\boldsymbol{I}_i^{-1}\boldsymbol{R}_{i,u}\right)\vec{f}_{i+1\to i} \\
\frac{d^2\vec{p}_{i+1,d}(t)}{dt^2} &= \vec{c}_{i+1,d}(t) - \boldsymbol{R}_{i+1,d}\vec{d}_i(t) \\
&\quad - \left(\boldsymbol{M}_{i+1}^{-1} - \boldsymbol{R}_{i+1,d}\boldsymbol{I}_{i+1}^{-1}\boldsymbol{R}_{i+1,d}\right)\vec{f}_{i+1\to i}
\end{aligned}$$

Cas à une contrainte

Finalement, appliquons la contrainte

$$\frac{d^2\vec{p}_{i,u}(t)}{dt^2} - \frac{d^2\vec{p}_{i+1,u}(t)}{dt^2} = 0$$

Nous obtenons alors

$$\left(\boldsymbol{A}_{i,u} - \boldsymbol{A}_{i+1,d}\right)\vec{f}_{i+1\to i} = \left(\vec{b}_{i,u} - \vec{b}_{i+1,d}\right)$$

Cas à une contrainte

Avec

$$\boldsymbol{A}_{i,u} = \left(\boldsymbol{M}_i^{-1} - \boldsymbol{R}_{i,u}\boldsymbol{I}_i^{-1}\boldsymbol{R}_{i,u}\right)$$

$$\boldsymbol{A}_{i+1,d} = \left(\boldsymbol{M}_{i+1}^{-1} - \boldsymbol{R}_{i+1,d}\boldsymbol{I}_{i+1}^{-1}\boldsymbol{R}_{i+1,d}\right)$$

$$\vec{b}_{i,u} = \vec{c}_{i,u}(t) + \boldsymbol{R}_{i,u}\vec{d}_i(t)$$

$$\vec{b}_{i+1,d} = \vec{c}_{i+1,d}(t) + \boldsymbol{R}_{i+1,d}\vec{d}_{i+1}(t) +$$

Cas à une contrainte

La solution est

$$\vec{f}_{i+1\rightarrow i} = \left(\boldsymbol{A}_{i,u} - \boldsymbol{A}_{i+1,d}\right)^{-1}\left(\vec{b}_{i,u} - \vec{b}_{i+1,d}\right)$$

Sachant $\vec{f}_{i+1\rightarrow i} = -\vec{f}_{i\rightarrow i+1}$, on remplace dans les équations de la page 10 pour $\vec{a}_i$, $\vec{\alpha}_i$, $\vec{a}_{i+1}$ et $\vec{\alpha}_{i+1}$ qui sont requises pour résoudre les équations du mouvement de la page 9.

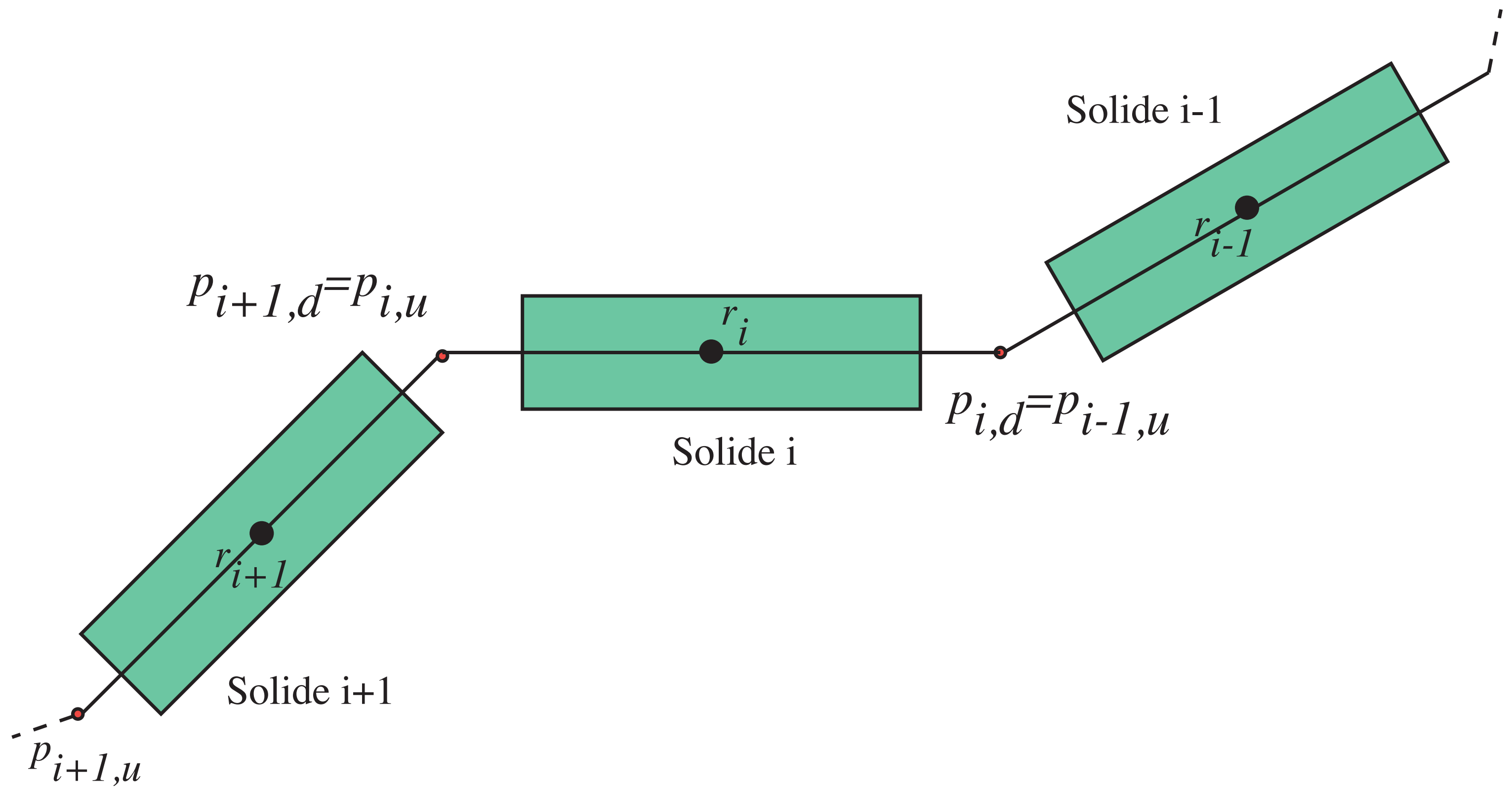
Cas à plusieurs contraintes

Dans le cas que nous venons d'analyser, nous avons supposé qu'une seule contrainte était appliquée pour les deux solides. Dans le cas général où on a N solides semblables attachés les uns aux autres en ligne les équations du mouvement pour le solide i seront toujours

$$\frac{d\vec{r}_i(t)}{dt} = \vec{v}_i(t)$$
$$\frac{d\vec{v}_i(t)}{dt} = \vec{a}_i(t)$$
$$\frac{d\vec{\Omega}_i(t)}{dt} = \vec{\omega}_i(t)$$
$$\frac{d\vec{\omega}_i(t)}{dt} = \vec{\alpha}_i(t)$$

Cas à plusieurs contraintes

On aura aussi $N-1$ contraintes.



Cas à plusieurs contraintes

Les équations du mouvement sont toujours celles de la page 9, mais on doit maintenant prendre en compte deux forces de couplage pour chaque volume.

$$\vec{a}_i(t) = m_i^{-1}\left(\vec{F}_{E,i} + \vec{f}_{i+1\to i} + \vec{f}_{i-1\to i}\right)$$
$$\vec{\alpha}_i(t) = \boldsymbol{I}_i^{-1}\left(\vec{\tau}_{E,i} + \left(\vec{r}_{i,u}\times\vec{f}_{i+1\to i} + \vec{r}_{i,d}\times\vec{f}_{i-1\to i}\right) + \vec{L}_i\times\vec{\omega}_i(t)\right)$$

Ici, deux contraintes devront être considérées ($\vec{p}_{i,u}(t) = \vec{p}_{i+1,d}(t)$ et $\vec{p}_{i-1,u}(t) = \vec{p}_{i,d}(t)$ d'où

$$\frac{d^2\vec{p}_{i,u}(t)}{dt^2} = \frac{d^2\vec{p}_{i+1,d}(t)}{dt^2}$$
$$\frac{d^2\vec{p}_{i,d}(t)}{dt^2} = \frac{d^2\vec{p}_{i-1,u}(t)}{dt^2}$$

Cas à plusieurs contraintes

En suivant la même procédure qu'avant on obtient

$$\left(\boldsymbol{A}_{i-1,u}-\boldsymbol{A}_{i,d}\right)\vec{f}_{i\to i-1}+\left(\boldsymbol{A}_{i,u}-\boldsymbol{A}_{i+1,d}\right)\vec{f}_{i+1\to i}= \vec{b}_{i-1,u}-\vec{b}_{i,d}+\vec{b}_{i,u}-\vec{b}_{i+1,d}$$

les différents termes étant identiques à ceux définis précédemment.

- Pour le premier bloc, on supposera $\vec{f}_{0\to 1}=-\vec{f}_{1\to 0}=0$ et

$$\left(\boldsymbol{A}_{1,u}-\boldsymbol{A}_{2,d}\right)\vec{f}_{2\to 1}=\vec{b}_{1,u}-\vec{b}_{2,d}$$

- Pour le dernier bloc N, on supposera $\vec{f}_{N+1\to N}=-\vec{f}_{N\to N+1}=0$ et

$$\left(\boldsymbol{A}_{N-1,u}-\boldsymbol{A}_{N,d}\right)\vec{f}_{N\to N-1}=\vec{b}_{N-1,u}-\vec{b}_{N,d}$$

Cas à plusieurs contraintes

Forme matricielle du système à résoudre

$$\boldsymbol{A}\vec{f} = \vec{b}$$

avec

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \left(\boldsymbol{A}_{1,u} - \boldsymbol{A}_{2,d}\right) & 0 & \dots & 0 \\ \left(\boldsymbol{A}_{1,u} - \boldsymbol{A}_{2,d}\right) & \left(\boldsymbol{A}_{2,u} - \boldsymbol{A}_{3,d}\right) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \left(\boldsymbol{A}_{N-1,u} - \boldsymbol{A}_{N,d}\right) \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = \left(\vec{f}_{2\to 1}, \vec{f}_{3\to 2}, \dots, \vec{f}_{N\to N-1}\right)^T$$

$$\vec{b} = \left((\vec{b}_{1,u} - \vec{b}_{2,d}), (\vec{b}_{2,u} - \vec{b}_{3,d}), \dots, (\vec{b}_{N-1,u} - \vec{b}_{N,d})\right)^T$$

Cas à plusieurs contraintes

Encore une fois, ces forces ($\vec{f}_{i+1\to i}$) peuvent ensuite être utilisées pour résoudre les équations du mouvement pour chacun des solides.