Chapitre 20

Systèmes d'équations linéaires

20.1 Interprétations d'un système

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$.
On considère le système de n équations à p inconnues :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p & = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p & = b_n \end{cases}$$

- *Résoudre* le système consiste à trouver l'ensemble $\mathbb{S}$ de tous les p-uplets $(x_1, \dots ,x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant (S).
- Le vecteur $b = (b_1, \dots ,b_n) \in \mathbb{K}^n$ s'appelle le *vecteur second membre* du système.
- On appelle *système homogène* associé, le système obtenu lorsque $b = 0$. On note $\mathbb{S}_0$ l'ensemble des solutions du système homogène.
- La matrice A s'appelle *matrice* du système.
- $\text{rg}(A)$ s'appelle le *rang* du système.
- On dit que le système est *compatible* si l'ensemble des solutions est non-vide.

20.1.1 Interprétation vectorielle

Soit $E = \mathbb{K}^n$, $C_1 = (a_{11}, \dots ,a_{n1})$, $\dots C_p = (a_{1p}, \dots ,a_{np}) \in \mathbb{K}^n$ les vecteurs colonnes de la matrice A et $b = (b_1, \dots ,b_n) \in \mathbb{K}^n$ le vecteur second membre.
Alors

$$\boxed{\left((x_1, \dots ,x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de (S) }\right) \iff (x_1C_1 + \dots + x_pC_p = b)}$$

Le système est compatible ssi $b \in \text{Vect}(C_1, \dots ,C_p)$.
Le rang du système est le rang du système de vecteurs $(C_1, \dots ,C_p)$ dans $\mathbb{K}^n$.

20.1.2 Interprétation matricielle

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\left((x_1, \dots ,x_p) \text{ est solution de (S) }\right) \iff (AX = B)}$$

20.1.3 Interprétation linéaire

Soit $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$, munis des bases canoniques $e = (e_1, \dots ,e_p)$ et $f = (f_1, \dots ,f_n)$. Soit $b = (b_1, \dots ,b_n) \in F$.
Il existe une unique application linéaire $u \in L(E,F)$ telle que $Mat_{e,f}(u) = A$. Soit $x \in E$ l'unique vecteur tel que $Mat_e(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$. Alors

$$\boxed{((x_1,\dots,x_p) \text{ est solution de (S) }) \Longleftrightarrow (u(x)=b)}$$

Le système est compatible ssi $b \in \operatorname{Im} u$.

20.1.4 Interprétation duale

Considérons les n formes linéaires de $\mathbb{K}^{p\star}$:

$$f_i : \begin{cases} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1,\dots,x_p) & \mapsto & a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p \end{cases}$$

Alors

$$\boxed{(x=(x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de (S) }) \Longleftrightarrow (f_1(x)=b_1,\dots,f_n(x)=b_n)}$$

L'ensemble des solutions du système homogène est alors $\mathbb{S}_0 = \operatorname{Ker} f_1 \cap \dots \cap \operatorname{Ker} f_n$.

20.1.5 Structures de l'ensemble des solutions

Théorème 20.1 : **Structure de l'ensemble des solutions du système homogène**
$\mathbb{S}_0$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $\boxed{p - \operatorname{rg}(S)}$

Théorème 20.2 : **Structure de l'ensemble des solutions de** (S)

1. Si le système est incompatible, $\mathbb{S} = \emptyset$;
2. Si le système est compatible, alors il existe une solution particulière x_0. Dans ce cas,

$$\boxed{\mathbb{S} = \{x_0 + x ; x \in \mathbb{S}_0\}}$$

et $\mathbb{S}$ est un espace affine de dimension $p - \operatorname{rg}(S)$.

20.2 Systèmes de Cramer

Définition 20.1 : **Système de Cramer**
Un système de Cramer est un système de n équations à n inconnues de rang n.

Matriciellement, un système de Cramer s'écrit

$$AX = B$$

avec $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée inversible et $B \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Théorème 20.3 : **Résolution matricielle d'un système de Cramer**
Un système de Cramer possède une unique solution $\boxed{X = A^{-1}B}$.

Théorème 20.4 : **Formules de Cramer**
Soient $(C_1,\dots,C_n)$ les n vecteurs colonnes de la matrice A d'un système de Cramer, $b = (b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{K}^n$ le vecteur second membre et $(x_1,\dots,x_n)$ l'unique solution de (S). Alors, $\forall j \in [\![1,n]\!]$,

$$\boxed{x_j = \frac{\det(C_1,\dots,C_{j-1},B,C_{j+1},\dots,C_n)}{\det A}}$$

Exercice 20-1

Résoudre le système

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z &= \alpha \\ x + by + b^2 z &= \beta \\ x + cy + c^2 z &= \gamma \end{cases}$$

où a,b,c sont trois réels distincts.

Exercice 20-2

Déterminer le nombre de multiplications, divisions nécessaire pour résoudre un système de Cramer, en utilisant les formules de Cramer, sachant qu'il faut $n!$ opérations élémentaires pour calculer un déterminant $n \times n$.

Remarque 222. L'intérêt des formules de Cramer est donc purement théorique. Pour programmer la résolution d'un système d'équations linéaires, on a recours à des algorithmes plus efficaces (par exemple l'algorithme du pivot de Gauss pour un système quelconque).

20.3 Opérations élémentaires

Définition 20.2 : Matrices élémentaires
On définit les matrices suivantes :

1. Matrices de dilatation ($\lambda \neq 0$, $i \in [\![1,n]\!]$) :
$$D_\lambda(i) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$$
2. Matrices de permutation ($i \neq j$) :
$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$$
3. Matrices de transvection ($\lambda \neq 0$, $i \neq j$):
$$T_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & \lambda & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + \lambda E_{ij}$$

THÉORÈME 20.5 : **Propriétés des matrices élémentaires**

1. Les matrices élémentaires sont inversibles et on calcule facilement leur déterminant et leur inverse :
   (a) $\det(D_\lambda(i)) = \lambda$, $D_\lambda(i)^{-1} = D_{1/\lambda}(i)$
   (b) $\det(P_{ij}) = -1$, $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$
   (c) $\det(T_{ij}(\lambda)) = 1$, $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$.
2. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice quelconque : Multiplier à gauche la matrice A par une matrice élémentaire correspond à une opération élémentaire sur les lignes de la matrice A :
   (a) $D_\lambda(i) \times A$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$
   (b) $P_{ij} \times A$: $L_i \leftrightarrow L_j$
   (c) $T_{ij}(\lambda) \times A$: $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
3. Multiplier à droite la matrice A par une matrice élémentaire correspond à une opération élémentaire sur les colonnes de la matrice A :
   (a) $A \times D_\lambda(i)$: $C_i \leftarrow \lambda C_i$
   (b) $A \times P_{ij}$: $C_i \leftrightarrow C_j$
   (c) $A \times T_{ij}(\lambda)$: $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$

PROPOSITION 20.6 : **Algorithme du rang**
En effectuant un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice, on ne modifie pas son rang.

Remarque 223. On justifie ainsi l'algorithme du rang vu en td.

20.4 Méthode du pivot de Gauss

THÉORÈME 20.7 : **Résolution d'un système triangulaire**
On considère une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) T inversible et le système $TX = B$. On dispose d'un algorithme qui résout ce système en $\mathcal{O}(n^2)$ multiplications scalaires.

THÉORÈME 20.8 : **Transformation en système triangulaire**
Soit une matrice inversible $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et le système de Cramer associé $AX = B$. On peut transformer à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes ce système en un système équivalent triangulaire supérieur en $\mathcal{O}(n^3)$ multiplications scalaires.

THÉORÈME 20.9 : **Algorithme du pivot de Gauss**
On sait résoudre un système de cramer $n \times n$ en $\mathcal{O}(n^3)$ multiplications scalaires.

COROLLAIRE 20.10 : **Calcul d'un déterminant**
On sait calculer le déterminant d'une matrice $n \times n$ en $\mathcal{O}(n^3)$ multiplications scalaires.