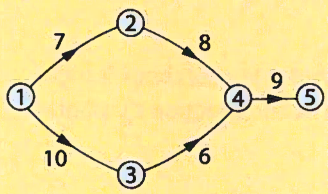


Figure 55

Remarque

Pour chercher le chemin de 1 à 5 ayant la valeur maximale, il suffit de chercher le sous-chemin de 1 à 4 ayant la valeur maximale.
En effet, par l'absurde, **tout sous-chemin d'un chemin optimal est optimal.**
Ici (1, 3, 4, 5) étant le chemin optimal de 1 à 5, (1, 3, 4) est le sous-chemin optimal de 1 à 4 car si c'était (1, 2, 4), alors (1, 2, 4, 5) serait optimal de 1 à 5, ce qui est faux.

6 | Ordonnancement

L'ordonnancement consiste à déterminer et à présenter sous forme de graphe l'ordre dans lequel les différentes tâches constituant un projet doivent être exécutées, certaines en parallèle, afin d'optimiser le processus.

Ce projet peut être une construction dans le bâtiment ou les travaux publics, une fabrication dans l'industrie, une mise en service d'un dispositif informatique professionnel…

À partir de la liste des tâches, de leur durée et des contraintes d'antériorité de certaines par rapport à d'autres, il s'agit de préciser non seulement la chronologie détaillée des différentes tâches, certaines pouvant être effectuées en parallèle, et la durée totale minimale du processus, mais aussi les éventuelles conséquences d'un retard dans la réalisation d'une tâche ou les tâches dont la durée doit être réduite de façon prioritaire si l'on veut diminuer la durée totale du processus.

L'étude détaillée d'un exemple va nous permettre de présenter une méthode très répandue précédant la réalisation d'un diagramme de Gantt utilisé très largement pour visualiser la planification des opérations.

Exemple

Nous ne précisons pas ici la nature du projet et de chacune de ses tâches pour faciliter la transposition à des exemples concrets de nature très diverse.

Un projet est constitué de huit tâches soumises aux contraintes suivantes.

Tâches	Durée (en jours)	Tâches précédentes
A	1	
B	3	*A*
C	2	*A*
D	5	*B*
E	1	*B, C*
F	7	*C*
G	4	*B, E, F*
H	2	*D, G*

Ce tableau est appelé tableau des contraintes, les colonnes 1 et 3 constituant le tableau des prédécesseurs.

Remarque

Pour « tâches précédentes », il faut comprendre ici tâches **immédiatement** antérieures.
Ainsi pour la tâche H les tâches immédiatement antérieures sont uniquement D et G alors que, la tâche B étant immédiatement antérieure à D, il est évident que la tâche B doit précéder la tâche H : on a la chronologie $B \rightarrow D \rightarrow H$.

À la place de « tâches précédentes », on peut rencontrer les expressions « tâches antérieures », « opérations préalables », « tâches prérequises », « antécédents immédiats »…

A. Méthode MPM

La méthode des potentiels Métra (MPM) a été inventée par le chercheur français Bernard Roy en 1958 dans la société conseil Métra pour la construction du paquebot France et de la première centrale nucléaire EDF.

Voir le paragraphe 5D.

Voir le tableau des contraintes.

Classement et représentation des tâches par niveau

• On place au niveau 0 les tâches qui n'ont pas de tâches précédentes, c'est-à-dire ici la tâche *A* ; **niveau 0 : *A*.**

• On obtient de même les tâches de chaque niveau en enlevant chaque fois les tâches déjà affectées à un niveau : elles n'ont alors plus de tâches précédentes.

Tâches restantes	Tâches précédentes
B	
C	
D	*B*
E	*B*, *C*
F	*C*
G	*B*, *E*, *F*
H	*D*, *G*

Niveau 1 : *B*, *C*

Tâches restantes	Tâches précédentes
D	
E	
F	
G	*E*, *F*
H	*D*, *G*

Niveau 2 : *D*, *E*, *F*

Tâches restantes	Tâches précédentes
G	
H	*G*

Niveau 3 : *G*

Tâche restante	Tâche précédente
H	

Niveau 4 : *H*

Nous obtenons ainsi le tableau de tâches par niveau.

Niveau	Tâches
0	*A*
1	*B*, *C*
2	*D*, *E*, *F*
3	*G*
4	*H*

Nous pouvons traduire ce tableau sous forme de graphe (fini, simple, orienté et valué) où :
– chaque tâche est représentée par un sommet, les sommets étant alignés verticalement par niveau ;
– les arcs entre les sommets indiquent l'antériorité des tâches ;
– le nombre associé à chaque arc donne la durée de la tâche à l'origine de l'arc ;
– deux sommets ne correspondant pas à des tâches concrètes sont placés aux extrémités du graphe : DÉBUT et FIN.

Ce nombre peut aussi intégrer un délai : Voir la remarque ci-après.

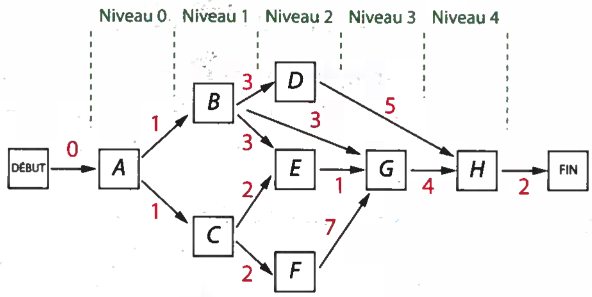


Figure 56

Remarques

1. Nous pouvons rencontrer des contraintes de succession autres que la durée d'une tâche ; en voici deux exemples avec leurs conséquences numériques et graphiques :

– La tâche B ne peut débuter au mieux que 2 jours après la fin de la tâche A. Dans ce cas la valeur associée à l'arc AB n'est plus la durée 1 jour de la tâche A mais $1 + 2 = 3$ jours. Cette valeur est appelée le **potentiel** de l'arc AB.

C'est cette notion de Potentiel qui figure dans le nom de la méthode MPM.

$$\boxed{A} \xrightarrow{1} \boxed{B} \quad \text{Devient} \quad \boxed{A} \xrightarrow{3} \boxed{B}$$

– La tâche D ne peut débuter au mieux que 5 jours après le début du processus.
Dans ce cas on ajoute un nouvel arc de **potentiel** 5 au graphe.

$$\boxed{\text{DÉBUT}} \xrightarrow{5} \boxed{D}$$

La valeur d'un chemin d'un graphe valué est définie au paragraphe **5E**.

On commence par le chemin le plus « haut » sur le graphe et on « descend ».

2. Dans cet exemple très simple, le graphe valué ci-dessus nous permet de donner tous les chemins permettant de réaliser le processus en dressant la liste des tâches de chacun, de calculer la valeur de chaque chemin, c'est-à-dire la durée totale associée à chacun et d'en déduire la durée minimale du processus.

DÉBUT $\xrightarrow{0} A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{3} D \xrightarrow{5} H \xrightarrow{2}$ FIN : 11 jours.

DÉBUT $\xrightarrow{0} A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{3} G \xrightarrow{4} H \xrightarrow{2}$ FIN : 10 jours.

DÉBUT $\xrightarrow{0} A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{3} E \xrightarrow{1} G \xrightarrow{4} H \xrightarrow{2}$ FIN : 11 jours.

DÉBUT $\xrightarrow{0} A \xrightarrow{1} C \xrightarrow{2} E \xrightarrow{1} G \xrightarrow{4} H \xrightarrow{2}$ FIN : 10 jours.

DÉBUT $\xrightarrow{0} A \xrightarrow{1} C \xrightarrow{2} F \xrightarrow{7} G \xrightarrow{4} H \xrightarrow{2}$ FIN : 16 jours.

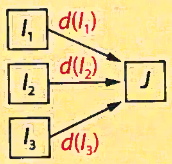
Pour que toutes les tâches soient effectuées, nous constatons qu'il faut 16 jours : en effet, en 11 jours les tâches des quatre premiers chemins peuvent être réalisées, mais il manque alors la tâche F.
Ainsi, dans cet exemple très simple, **la durée minimale du processus correspond au chemin dont la valeur est la plus grande.**

Nous allons compléter ce graphe par quatre informations numériques associées à chaque tâche qui vont nous permettre notamment de déterminer (facilement) la durée totale minimale du processus, y compris dans le cas de processus complexes ne permettant pas de dresser aisément la liste des chemins les réalisant.

Ces informations permettent aussi de choisir les contraintes à modifier prioritairement pour améliorer le processus.

Date au plus tôt de début d'une tâche

> On peut aussi définir la date au plus tôt de la fin d'une tâche.



> $T(J)$ est le plus grand des trois nombres $T(I_1)+d(I_1)$, $T(I_2)+d(I_2)$ et $T(I_3)+d(I_3)$.

À RETENIR

La date au plus tôt $T(J)$ de début d'une tâche J est la date à partir de laquelle toutes les tâches précédant (immédiatement) J sont terminées.

$T(J)$ est le plus grand des nombres $T(I)+d(I)$ où
I est une tâche précédant immédiatement J,
$T(I)$ est la date au plus tôt de début de la tâche I,
$d(I)$ est la durée de la tâche I.

Exemples

> Si on prend une autre valeur t_0 pour date au plus tôt de DÉBUT, on ajoute t_0 à toutes les valeurs $T(I)$ obtenues ici.

Par convention on prend 0 pour date au plus tôt de DÉBUT.

$T(A)=0$ car A n'a pas de tâche antérieure.

$T(B)=T(A)+d(A)=0+1=1$ car A est la seule tâche précédant B (voir le tableau des contraintes ou le graphe ci-dessus).

De même $T(C)=T(A)+d(A)=1$ et $T(D)=T(B)+d(B)=4$.

B et C sont les deux tâches précédant E ;

$T(B)+d(B)=4$ et $T(C)+d(C)=3$, donc $T(E)=4$ car $4>3$.

$T(F)=T(C)+d(C)=3$.

B, E et F sont les trois tâches précédant G ;

$T(B)+d(B)=4$, $T(E)+d(E)=5$ et $T(F)+d(F)=10$,

donc $T(G)=10$ car c'est le plus grand des trois nombres 4, 5 et 10.

> On peut noter $10=\max\{4, 5, 10\}$

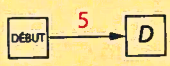
D et G sont les deux tâches précédant H ;

$T(D)+d(D)=9$ et $T(G)+d(G)=14$, donc $T(H)=14$ car $14>9$.

$T(\text{FIN})=T(H)+d(H)=14+2=16$ car H est la seule tâche précédant FIN.

Remarque

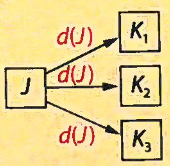
> Voir la remarque 1 du début du paragraphe **A**.



Dans le cas où la tâche B ne peut débuter au mieux que 2 jours après la fin de la tâche A, on remplace la durée $d(A)=1$ par le potentiel $d(A, B)=3$ de l'arc AB.
On obtient alors $T(B)=T(A)+d(A, B)=0+3=3$.
De même dans le cas où la tâche D ne peut débuter au mieux que 5 jours après le début du processus, $T(D)$ est le plus grand des deux nombres $T(B)+d(B)$ et $0+d\,(\text{DÉBUT}, D)=5$.

Date au plus tard de début d'une tâche

> On peut aussi définir la date au plus tard de la fin d'une tâche.



> $t(J)$ est le plus petit des trois nombres $t(K_1)-d(J)$, $t(K_2)-d(J)$ et $t(K_3)-d(J)$.

À RETENIR

La date au plus tard $t(J)$ de début d'une tâche J est la date la plus grande permettant de commencer la tâche sans retarder la fin du projet.

$t(J)$ est le plus petit des nombres $t(K)-d(J)$ où
K est une tâche succédant immédiatement à J,
$t(K)$ est la date au plus tard de début de la tâche K,
$d(J)$ est la durée de la tâche J.

Remarquez qu'on parcourt le graphe à l'envers.

On peut aussi s'aider en construisant d'abord le tableau des successeurs.

Tâche	Successeurs
H	
G	H
F	G
E	G
D	H
C	E, F
B	D, E, G
A	B, C

Exemples

Par convention la date au plus tard du début de FIN est sa date au plus tôt de début, c'est-à-dire ici 16.

$t(H) = t(\text{FIN}) - d(H) = 16 - 2 = 14$ car H a pour seul successeur FIN.

$t(G) = t(H) - d(G) = 14 - 4 = 10$ car G a H pour seul successeur.

De même $t(F) = t(G) - d(F) = 3$, $t(E) = t(G) - d(E) = 9$ et $t(D) = t(H) - d(D) = 9$.

E et F sont les deux successeurs de C ;
$t(E) - d(C) = 7$ et $t(F) - d(C) = 1$, donc $t(C) = 1$ car $1 < 7$.

D, E et G sont les trois successeurs de B ;
$t(D) - d(B) = 6$, $t(E) - d(B) = 6$ et $t(G) - d(B) = 7$, donc $t(B) = 6$ car $6 < 7$.

B et C sont les deux successeurs de A ;
$t(B) - d(A) = 5$ et $t(C) - d(A) = 0$, donc $t(A) = 0$.

Par convention on prend $t(A) = 0$ pour date au plus tard de DÉBUT.

Remarques

C'est une conséquence immédiate des définitions de $T(J)$ et de $t(J)$.

1. Observez que pour toute tâche J, $T(J) \leq t(J)$.
2. La remarque relative aux dates $T(J)$ se transpose aux dates $t(J)$: on remplace alors $d(J)$ par le potentiel $d(J, K)$ de l'arc JK.

Marge totale d'une tâche

À RETENIR

La marge totale $MT(J)$ d'une tâche J est le retard maximum possible pour le début de la tâche J sans retarder la fin du projet.

$$MT(J) = t(J) - T(J) \text{ où}$$

$t(J)$ est la date au plus tard de début de la tâche J,
$T(J)$ est la date au plus tôt de début de la tâche J.

Exemples

$MT(A) = t(A) - T(A) = 0.$
$MT(B) = t(B) - T(B) = 6 - 1 = 5.$

Marge libre d'une tâche

À RETENIR

La marge libre $ML(J)$ d'une tâche J est le retard maximum possible pour le début de la tâche J sans retarder la date au plus tôt de début de chaque tâche suivant immédiatement J.

$ML(J)$ est le plus petit des nombres $T(K) - T(J) - d(J)$ où
K est une tâche succédant immédiatement à J,
$T(K)$ et $T(J)$ sont les dates au plus tôt de début des tâches K et J,
$d(J)$ est la durée de la tâche J.

Exemples

B et C sont les deux successeurs de A.
$T(B) - T(A) - d(A) = 1 - 0 - 1 = 0$ et
$T(C) - T(A) - d(A) = 1 - 0 - 1 = 0$, donc $ML(A) = 0$.

D, E et G sont les trois successeurs de B.
$T(D) - T(B) - d(B) = 4 - 1 - 3 = 0$,
$T(E) - T(B) - d(B) = 4 - 1 - 3 = 0$ et
$T(G) - T(B) - d(B) = 10 - 1 - 3 = 6$, donc $ML(B) = 0$.

La **marge certaine** est aussi appelée **marge absolue**.

Remarques

1. On peut aussi définir **la marge certaine MC(*J*) d'une tâche *J*** : c'est le retard maximum possible pour le début de la tâche *J* sans retarder la date au plus tôt de début de chaque tâche suivant immédiatement *J*, et ceci **bien que la tâche *J* ait commencé à la date au plus tard *t*(*J*)**.

$$MC(J) = \begin{cases} \textbf{le plus petit des nombres } T(K) - t(J) - d(J) \\ \textbf{si ce nombre n'est pas négatif,} \\ \textbf{0 sinon,} \end{cases}$$

où K est une tâche succédant immédiatement à J,
$T(K)$ est la date au plus tôt de début de la tâche K,
$t(J)$ est la date au plus tard de début de la tâche J,
$d(J)$ est la durée de la tâche J.

Ainsi pour calculer $MC(B)$ où B a trois successeurs D, E et G, on calcule $T(D) - t(B) - d(B) = 4 - 6 - 3 = -5 < 0$.

Donc $MC(B) = 0$.

2. Pour toute tâche J, on a :

$$MT(J) \geq ML(J) \geq MC(J) \geq 0.$$

Graphe par la méthode MPM

Le graphe du projet par la méthode MPM est obtenu à partir du graphe précédent en complétant chaque sommet représentant une tâche J par les quatre nombres $T(J)$, $t(J)$, $MT(J)$ et $ML(J)$ présentés de la façon suivante.

Nom de la tâche	
Date au plus tôt	Date au plus tard
Marge totale	Marge libre

c'est-à-dire

J	
$T(J)$	$t(J)$
$MT(J)$	$ML(J)$

Nous obtenons ainsi le graphe suivant.

Nous rappelons ici les niveaux des tâches.

La signification des flèches bleues est données à la fin de ce paragraphe.

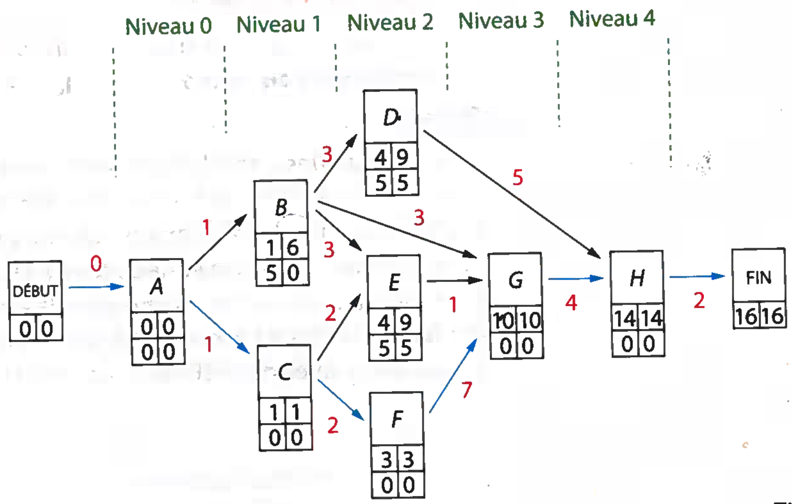


Figure 57

Tâches critiques, chemin critique, durée minimale

À RETENIR

Une tâche critique est une tâche de marge totale nulle.

Les dates de début au plus tôt et au plus tard sont égales.