Les équations différentielles

Introduction

• Une **équation différentielle** est une équation dans laquelle **l'inconnue est une fonction f**.

De plus, cette équation fait intervenir **la fonction f ainsi que ses dérivées successives**, d'où le terme différentiel.

• Les équations différentielles apparaissent naturellement dans de nombreux domaines : physique, électricité, biologie,chimie, évolution des populations, modélisation informatique....

• En **électricité** , l'équilibre stationnaire d'un circuit électrique RLC(Résistance-Bobine) est traduit par l'équation : E = Ri(t) + L i'(t) où i est l'intensité du courant et t la variable temps.

• En **sciences physiques** encore, si N(t) désigne le nombre de noyaux désintégrés à l'instant t, l'expérience montre que N '(t) = -kN (t) où k est une constante.

• La résolution de ces équations est donc fondamentale dans de nombreux domaines déjà rencontrées lors de la construction de la fonction exponentielle, nous étudierons en priorité les **équations différentielles du type y' = ay + b**, où la fonction y est l'inconnue, et a et b sont deux réels.

I . Vocabulaire et généralités.

Dans **une équation différentielle l'inconnue est une fonction**, notée y en général.

L'équation est dite **différentielle** car elle fait intervenir **les dérivées successives** de la fonction y.

Rappelons en effet que la dérivée est associé à un taux de variation (ou croissance), qui est lui-même une différence (quotient des variations de y sur variation de x) : d'où le terme différentiel.

Résoudre l'équation différentielle **y' = ay + b** c'est trouver toutes les fonctions f dérivables sur IR telles que pour tout x, f '(x) = af(x) + b où a et b sont deux constantes (indépendant de x).

Précisons aussi que **l'équation y' = ay + b est dite du premier ordre car elle fait intervenir seulement la dérivée première**.

Evidemment, il y des équations différentielles du 2ème ordre, du 3ème ...

II . Résolution de y' = ay, a constante réelle :

Théorème :

1. Les fonctions solutions de l’équation y’ = ay sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = kexpax\ (k \in \mathbb{R})$.

2. Il existe une unique fonction dérivable f telle que y’ = ay et Invalid Equation : k est alors fixé par cette condition initiale.

Exercice :

a. Résoudre l’équation différentielle (E) : y’ = 3y.

b. Déterminer la solution de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées A(2,3).

III .Résolution de y’ = ay + b, a (non nul) et b constantes réelles

Théorème :

Soit a un réel non nul.

• Les fonctions solutions de l’équation y’ = ay + b sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = kexpax - \frac{b}{a}\ (k \in \mathbb{R})$.

• Il existe une unique fonction dérivable f telle que y’ = ay + b et $y(x_0) = y_0$ (k est alors fixé par cette condition initiale).

Exercice sur les équations différentielles

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l’équation 2y’ + y = 1.