La fonction exponentielle

I . Equation différentielle f ’ = f avec f(0) = 1. :

Définition :

Une équation où figure une fonction et sa dérivée est une équation différentielle.

La résoudre sur un intervalle I, c’est trouver toutes les fonctions dérivables sur I qui vérifient l’égalité.

Ici, on cherche les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x :
$f'(x) = f(x)$.

L’égalité f(0) = 1 est appelée condition initiale.

Propriété :

S’il existe une fonction f dérivable sur I telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ alors f ne s’annule pas sur I.

Théorème :

Il existe une unique fonction f dérivable sur I telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

C’est la **fonction exponentielle**, notée exp.

II . Propriétés algébriques :

Théorème : >Relation fonctionnelle caractéristique.

La fonction exponentielle est la seule fonction dérivable sur I non nulle qui vérifie les conditions :

Pour tous réels a et b, f(a+b) = f(a).f(b)

f’(0) = 1

Propriétés :

Pour tous réels a et b et pour tout n entier relatif :

1. $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
2. $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
3. $\exp(na) = (\exp(a))^n$

Remarque :

Pour tout réel a :

$$\exp(a) = \exp(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}) = \exp(\frac{a}{2}). \exp(\frac{a}{2}) = [\exp(\frac{a}{2})]^2 > 0$$

Donc pour tout réel a, $exp(a) > 0$.

Notations :

$\forall n \in \mathbb{N}, \exp(n) = \exp(n \times\ 1) = (\exp(1))^n.$

On pose :

$e =$

Par analogie avec les puissances (et leurs règles de calcul) on pose :

Invalid Equation

Propriétés :

$\forall a, b \in \mathbb{R},$

1. $exp(0) = 1.$
2. $exp(a + b) = exp(a) \times\ exp(b).$
3. $exp(-a) = \dfrac{1}{exp(a)}.$
4. $exp(na) = [exp(a)]^n.$
5. $exp(a - b) = \dfrac{exp(a)}{exp(b)}.$

III . Etude de la fonction exponentielle.

Théorème :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}.$.

Propriétés :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{\not\vDash}$.

1. $x =$
2. $x < y \Longleftrightarrow expx < expy$.

Théorème :

$$\lim_{x \to +\infty} expx =$$

$$\lim_{x \to -\infty} expx = 0^{+}.$$

Théorème :

$$\lim_{x \to 0} \frac{expx - 1}{x} = 1.$$

$$Pour\ x\ proche\ de\ 0,\ expx \approx 1 + x.$$

La fonction x $\mapsto$ 1+x est l'approximation affine de la fonction exponentielle au voisinage de 0.

Théorème :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{expx}{x} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} xexpx =$$

On admet que ce théorème se généralise et qu'à l'infini, l'exponentielle l'emporte sur les puissances.

EXEMPLE :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{expx}{3x^2+5x+1} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} expx \times \ (3x^5+5x^3+1) = 0.$$