



Variations de fonctions et extremums

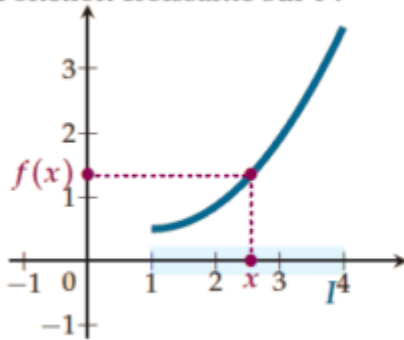
I. Point de vue graphique

1. Fonction croissante, décroissante, constante

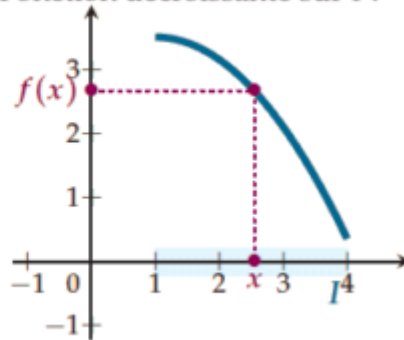
Définition :

On dit que f est croissante sur un intervalle I lorsque si x augmente sur I alors $f(x)$ augmente.
On dit que f est décroissante sur un intervalle I lorsque si x augmente sur I alors $f(x)$ diminue.

Fonction croissante sur I :



Fonction décroissante sur I :



Définition :

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère.
On voit sur un graphique que :

- f est **croissante** sur I lorsque C_f « monte » sur I ;
- f est **décroissante** sur I lorsque C_f « descend » sur I .
- Lorsque sur un intervalle, la courbe est horizontale, on dit que la fonction est **constante**. On considère qu'elle est à la fois croissante et décroissante.
Une fonction qui ne change pas de sens de variations sur un intervalle est dite **monotone**

sur cet intervalle.

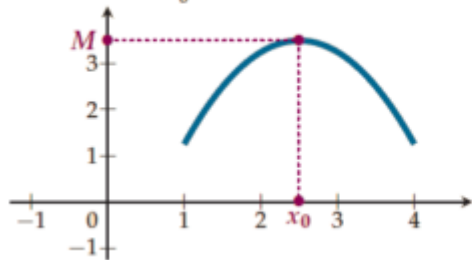
2. Maximum et minimum d'une fonction

Définition :

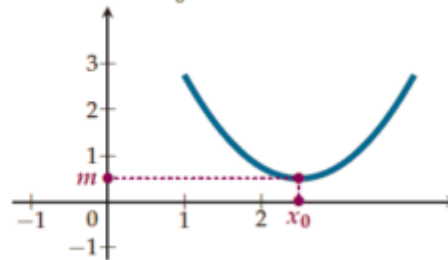
Sur un intervalle I ,

- le maximum d'une fonction f est la plus grande des valeurs prises par $f(x)$;
- le minimum d'une fonction f est la plus petite des valeurs prises par $f(x)$.

Maximum en x_0



Minimum en x_0



3. Tableau de variation d'une fonction et variations

Définition :

Un tableau de variations regroupe toutes les informations concernant les variations d'une fonction numérique sur son domaine de définition.

Méthode : dresser un tableau de variation

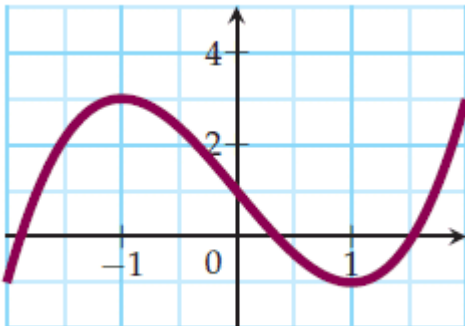
Un tableau de variations comporte deux lignes.

- Aux extrémités de la **première ligne**, on trouve les bornes du domaine de définition de la fonction. Entre les bornes, on place d'éventuelles valeurs particulières.

- Le sens de variation de la fonction est indiqué sur la **deuxième ligne** par une ou plusieurs flèches sur les intervalles où elle est monotone : ↗ pour croissante et ↘ pour décroissante.
- Les valeurs pour lesquelles **la fonction n'est pas définie** sont indiquées par une double barre verticale sur la deuxième ligne.
- On indique au bout des flèches les images des valeurs de la première ligne.

EXEMPLE :

Dresser le tableau de variations de la fonction définie sur $[-2; 2]$ par la courbe ci-dessous.



Voici le **tableau de variation** correspondant :

x	-2	-1	1	2
$f(x)$				

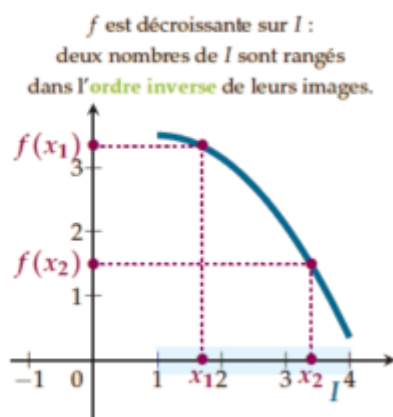
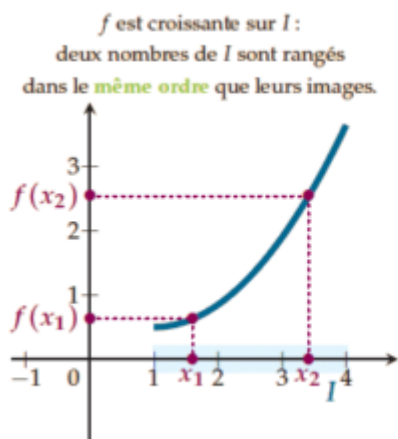
II. Point de vue algébrique

1. Variation d'une fonction

Définition : croissance, décroissance sur un intervalle.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_1 et x_2 deux nombres de I .

Si $x_1 \leq x_2$ implique $f(x_1) \leq f(x_2)$ alors f est dite croissante sur I .
 Si $x_1 \geq x_2$ implique $f(x_1) \geq f(x_2)$ alors f est dite décroissante sur I .



Propriété : tableau de variations des fonctions affines et de la fonction inverse.

Le sens de variation de la fonction affine dépend du signe de a .
 La fonction inverse est décroissante sur \mathbb{R}^{-*} et sur \mathbb{R}^{+*} .



Tableau de variation des fonctions affines

x	$-\infty$	$+\infty$	x	$-\infty$	$+\infty$
$ax + b$ avec $a > 0$	↗		$ax + b$ avec $a < 0$	↘	

DÉMONSTRATION :

On considère une fonction f tel que $f(x) = ax + b$ et deux nombres tels que $x_1 < x_2$.
 Si $a < 0$; $ax_1 > ax_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$. La fonction f est donc décroissante sur \mathbb{R} .
 Si $a > 0$; $ax_1 < ax_2$ et $f(x_1) < f(x_2)$. La fonction f est donc croissante sur \mathbb{R} .

Tableau de variation de la fonction inverse

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			

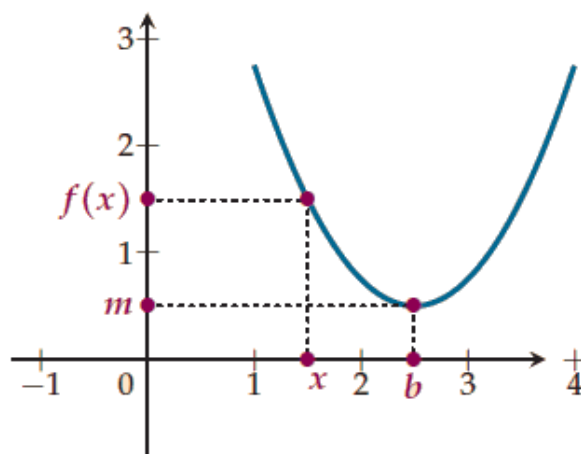
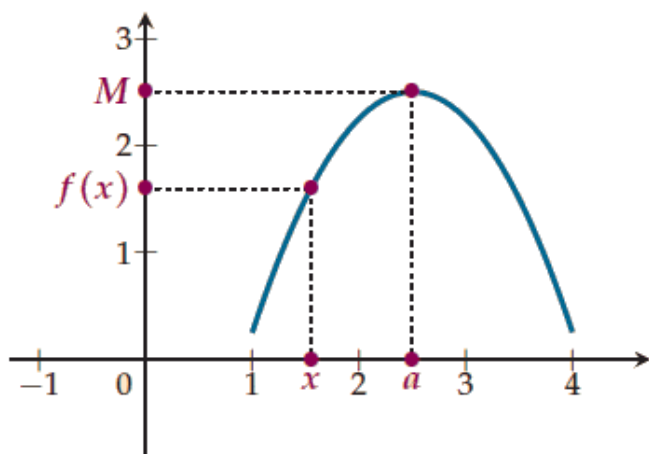
2. Maximum et minimum d'une fonction

Définition : maximum, minimum et extremum d'une fonction

- Dire que f admet un maximum en a sur l'intervalle I signifie que :



Il existe un réel M tel que pour tout x dans I : $f(x) \leq M$ et $M = f(a)$;

- Dire que f admet un minimum en b sur l'intervalle I signifie que :
Il existe un réel m tel que pour tout x dans I : $f(x) \geq m$ et $m = f(b)$;
- Un **extremum** est le terme générique pour désigner un **maximum** ou un **minimum**.



Propriété : tableau de variations de la fonction carrée.

- La fonction carrée est décroissante sur \mathbb{R}^- et croissante sur \mathbb{R}^+ .
- Elle admet, sur \mathbb{R} , un minimum en 0.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^2$	$+\infty$ 	0 	$+\infty$