La dérivée d'une fonction

I. La notion de dérivée d'une fonction

1.Dérivabilité et fonction dérivée

Définition : le nombre dérivé

On considère une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ainsi que deux nombres réels a et h tel que$a$ et $a+h$ appartiennent à I.

La fonction f est dérivable en a si et seulement si $\lim\limits_{h arrow 0} \frac{f(a+h)-f(a))}{h} = l$ avec $l \in \mathbb{R}$.

Si c'est le cas, le réel l est appelé le **nombre dérivée** de f en a et se note $f'(a)$.

Définition :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ .La fonction f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout x de I.

La fonction f' : $x \mapsto f'(x)$ définie sur I est appelée la **fonction dérivée** de f sur l'intervalle I.

2.Applications à la dérivation

Propriété : tangente en un point à la courbe.

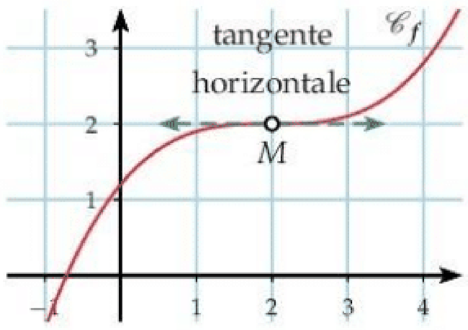
On considère une fonction f dérivable en a et C_f sa courbe dans un repère orthonormé du plan.Une équation de la **tangente à la courbe** C_f au point d'abscisse a est :

$y = f'(a)(x - a) + f(a).$

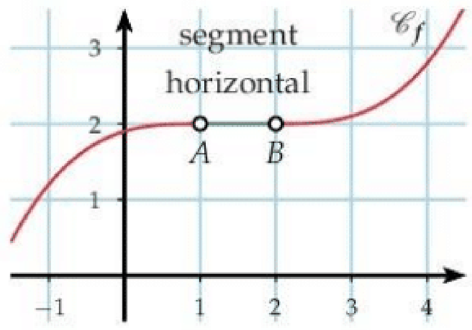
Propriété : passage du signe de $f'(x)$ aux variations de f.

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si f' est **strictement positive** sur I alors f est **strictement croissante** sur I;
- Si f' est **strictement négative** sur I alors f est **strictement décroissante** sur I;
- Si f' est nulle sur I alors f est **constante** sur I.



f' est strictement positive sauf en 2 où elle s'annule donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

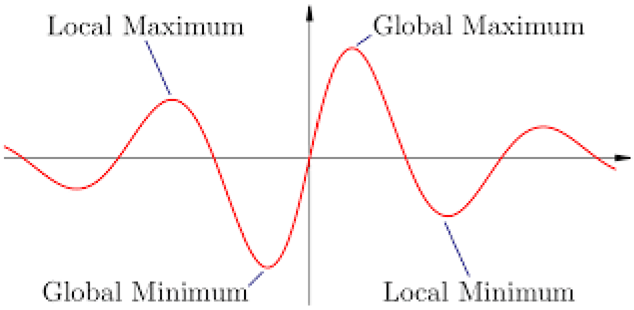


*f' est strictement positive sur $]-\infty\,;\,1[\cup]2\,;\,\infty[$ donc f n'est pas **strictement** croissante sur $\mathbb{R}$.*

Propriété : extremums locaux d'une fonction.

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.Si f admet un **extremum local** en a alors $f'(a) = 0$.

Si f' **s'annule et change de signe** en a alors f admet un extremum local en a.



3.Calculs de dérivées

Propriétés : dérivée des fonction usuelles.

On note D_f le domaine de définition de la fonction f.Toutes les fonctions du tableau ci-dessous sont dérivables sur D_f à l'exception de la fonction racine carrée qui n'est pas dérivable en 0.

Fonction f		$\mathscr{D}_f$	Dérivée f'
$f(x) = k$	$(k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$		$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$		$[0\,;+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Propriétés : opérations sur les fonctions dérivées.

On considère un nombre réel k et deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I.Les fonction u+v, ku et uv sont dérivables sur I;

Les fonctions $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{v}$ sont dérivables sur I sauf là où v s'annule.

Fonction	$u+v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$
Dérivée	$u'+v'$	ku'	$u'v+uv'$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

II.Dérivées des fonctions composées

Propriété :

- Si la fonction u est dérivable et strictement positive sur I alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I.
- Si c'est le cas, nous avons : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Propriété :

Soit n un entier naturel non nul.Si u est dérivable sur I alors :

- La fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.
- La fonction u^{-n} est dérivable sur I sauf là où u s'annule et $(u^{-n})' = -nu^{-n-1}u'$.

Propriété :

On considère deux nombres réels a et b.Si u est dérivable sur I alors :

La fonction $f : x \mapsto u(ax+b)$ est dérivable là où $(ax+b) \in I$.

Si c'est le cas , $f'(x) = au'(ax+b)$.

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur I et f une fonction dérivable sur un intervalle J telle que :Pour tout $x \in I, u(x) \in J$.

La fonction fou **composée de u suivie de f** est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$:

$(fou)'(x) = u'(x) \times (f'ou)(x)$ ou encore $[f(u(x))]' = u'(x) \times f'(u(x))$.