Limites et asymptotes

Les tableaux ci-dessous résument les résultats à connaître.

Ces tableaux sont valables dans les trois situations étudiées:

- Lorsque la variable $xarrow + \infty$.
- Lorsque la variable $xarrow - \infty$.
- Lorsque la variable $xarrow\, a$ où a $\in$ R.

Mais il va de soi que, pour les deux fonctions f et g concernées, les limites sont prises au même endroit!
Dans le cas particulier où les fonctions sont des suites numériques, on peut utiliser ces résultats en remplaçant f par (U_n) et g par (V_n) avec le seul cas envisageable la variable $narrow + \infty$.

Les conventions utilisées dans ces tableaux, sont:
· l et l' désignent des nombres réels (limites finies).
· ? indique que dans la situation concernée, on n’a pas de conclusion générale.

On dit parfois qu’il s’agit d’une « **forme indéterminée** » notée **F.I**.

Il faudra dans ces cas, mettre au point d’autres méthodes de résolution.

I. Limite d’une somme de deux fonctions

lim f	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim f + g	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

En $+\infty$ ou en $-\infty$, la limite d'une fonction polynôme est la limite de son terme de plus haut degré.

II. Limite d’une différence de deux fonctions

Utiliser : f - g = f + (-g) et le tableau précédent.

III. Limite d’un produit de deux fonctions

lim f	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim f $\times$ g	$\ell\,\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

IV. Limite de l'inverse d'une fonction

Dans le tableau ci-dessous, la limite de f égale à 0^+ , signifie, qu'à l'endroit où la limite est prise, cette limite est zéro et que, pour tout x suffisamment proche de cet endroit, on a f(x) > 0.
Définition analogue pour 0^- , mais avec f(x) < 0.

lim f	$\ell \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
lim 1/ f	$1/\ell$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

V. Limite d'un quotient de deux fonctions

On peut utiliser: $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ et avec les deux tableaux précédents, il est possible de conclure.

En + ∞ ou en - ∞ , la limite d'une fonction rationnelle est la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

On peut aussi retenir les résultats suivants :

lim f	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
lim g	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	ℓ	0	$\pm\infty$
lim f / g	ℓ / ℓ'	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?	?

Ce tableau est simplifié: ± ∞ signifie + ∞ ou bien - ∞ .

Pour décider, on applique la règle du signe du quotient selon les signes de f et de g au voisinage de l'endroit où la limite est cherchée.

VI. Limite des fonctions de références.

limite en:	Valeurs de la limite:			
	1	0	$+\infty$	$-\infty$
0	$x \mapsto \frac{\sin x}{x}$	$x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ $x \mapsto \lvert x \rvert$	$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ avec n pair $x \mapsto \frac{1}{\lvert x \rvert}$	
0 à droite		$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$	
0 à gauche				$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ avec n impair
$+\infty$		$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ $x \mapsto \frac{1}{\lvert x \rvert}$ $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ $x \mapsto \lvert x \rvert$ $x \mapsto \sqrt{x}$	
$-\infty$		$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ $x \mapsto \frac{1}{\lvert x \rvert}$	$x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ avec n pair $x \mapsto \lvert x \rvert$	$x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ avec n impair

VII. Le théorèmes de comparaison

Théorème :

Pour les fonctions, dans les propriétés ci-dessous, la lettre a désigne aussi bien un réel que + ∞ ou - ∞.
Lorsque a = + ∞, les fonctions sont définies sur R ou un intervalle I de la forme [A ; + ∞ [où A est un réel.

Lorsque a = - ∞, les fonctions sont définies sur R ou un intervalle I de la forme] - ∞ ; A] où A est un réel.
Lorsque a$\in$ R , les fonctions sont définies sur R ou un intervalle I de la forme [A ; B] où A et B sont des réels et a$\in$[A ; B].
Si la limite concernée est la limite à gauche de a, les fonctions sont définies sur un intervalle I de la forme] - ∞ ; a [ou [A ; a [où A est un réel.
Si la limite concernée est la limite à droite de a, les fonctions sont définies sur un intervalle I de la forme] a ; +∞ [ou] a ; A] où A est un réel.

Pour les suites, l'indice n est un entier naturel supérieur ou égal à un certain rang n_0 (qui sera souvent 0).