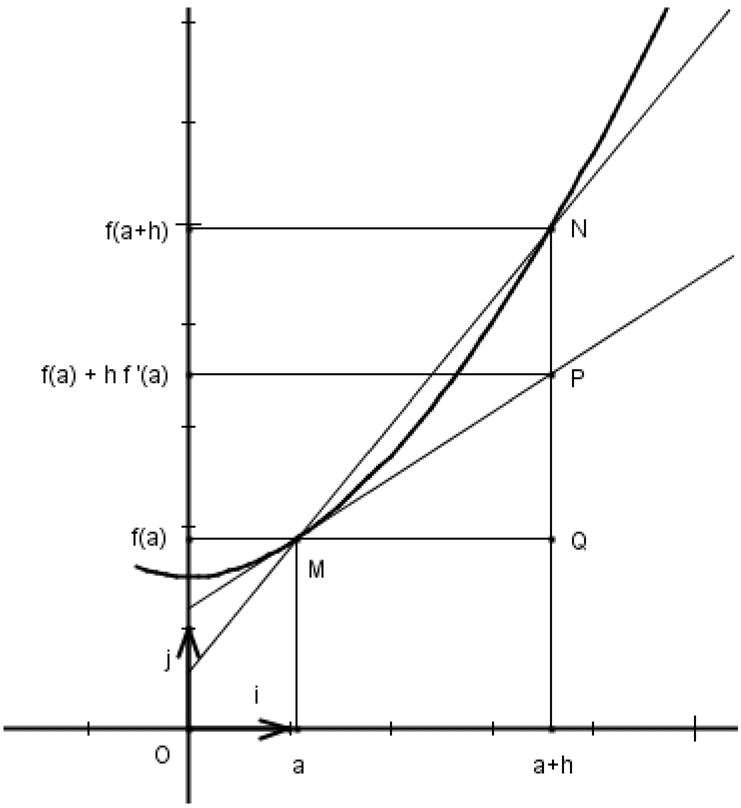
# Dérivée d'une fonction

## I. Nombre dérivé - Fonction dérivée - tangente à une courbe.

Définition :

Soit f est une fonction définie sur un intervalle I. La courbe (C) ci-dessous est la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.M et N sont deux points de (C) d'abscisses respectives $a\in I$et $x=a+h\in I$où $h\in\mathbb{R}^*$.




M et N ont donc pour coordonnées: $M(a;f(a))$et $N(x;f(x))$, c'est à dire: $N(a+h;f(a+h))$.

On a donc: $\vec{MN}(x-a;f(x)-f(a))$ soit $\vec{MN}(h;f(a+h)-f(a))$

La droite (MN) sécante à (C) a donc pour coefficient directeur:

$m = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

Si la courbe (C) possède en M une tangente de coefficient directeur d, alors lorsque le point N se rapproche de M, c'est à dire lorsque x tend vers a, ou, ce qui revient au même, lorsque h tend vers 0,

les sécantes (MN) vont atteindre une position limite qui est celle de la tangente(MP) en M à (C).

Ceci peut alors se traduire à l'aide des coefficients directeurs par:

$\lim\limits_{xarrowa} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = d$ , c'est à dire : $\lim\limits_{harrow0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h} = d$.

On a donc: $\lim\limits_{harrow0} [\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h} - d] = 0$.

Si nous appelons $\Phi$, la fonction définie pour $h \in \mathbb{R}^*$ et $a + h \in I$ par :

$\Phi(h) = \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h} - d$.

on a :

$\lim\limits_{harrow0} \Phi(h) = 0$ et $h\Phi(h) = f(a + h) - f(a) - dh$, ce qui s'écrit aussi:
$f(a + h) = f(a) + dh + h\Phi(h)$.

Réciproquement, s'il existe un réel d et une fonction $\Phi$ telle que, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ et $a + h \in I$, on ait:
$f(a + h) = f(a) + dh + h\Phi(h)$ avec $\lim\limits_{harrow0} \Phi(h) = 0$,

on en déduit que: $\Phi(h) = \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h} - d$ et donc que: $\lim\limits_{harrow0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h} = d$.

Ceci nous permet donc de donner les trois définitions équivalentes:

## Définition 1 :

Si f est une fonction définie sur un intervalle $I$ et si $a \in I$.

Lorsqu'il existe un nombre réel d tel que, pour tout réel h proche de 0, on ait

$\lim\limits_{harrow0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h} = d$

On dit que la fonction f est dérivable en a et que $d = f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a.

## Définition 2 :

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et si $a \in I$.

Lorsqu'il existe un nombre réel d tel que, pour tout réel $x \in I$et proche de a, on ait:

$$\lim_{xarrowa} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = d$$

On dit que la fonction f est dérivable en a et que $d = f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a.

## II. Fonction dérivable sur un intervalle I. Fonction dérivée d’une fonction dérivable sur I

Définition :

On dit que **f est dérivable sur un intervalle I** lorsqu'elle est dérivable en tout point de I.

Lorsque f est dérivable sur un intervalle I, la fonction qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f sur I. Cette fonction est notée $f'$.

Interprétation graphique du nombre dérivé.

Si f est une fonction définie sur un intervalle I. Si $a \in I$et si f est dérivable en $x = a$, alors :La courbe représentative de f possède une tangente au point $M(a; f(a))$ et le coefficient directeur de cette tangente est le nombre dérivé $f'(a)$de la fonction *f en* $x = a$.

REMARQUES :

Si le graphique de f ne possède pas de tangente au point M d’abscisse $x = a$, alors la fonction f n’est pas dérivable en a. C’est le cas de la fonction valeur absolue en $x = 0$.

Le graphique d’une fonction peut fort bien posséder une tangente en un point sans que la fonction soit dérivable en ce point : il suffit que le coefficient directeur de cette tangente n’existe pas (tangente parallèle à l’axe des ordonnées).

C’est le cas de la fonction racine carrée en $x = 0$.

## III. Équation de la tangente à une courbe

Définition :

Si fonction f est dérivable en a, la tangente (MP) à la courbe (C) en M d'abscisse $x = a$ existe.Elle a pour coefficient directeur $m = f'(a)$.

Son équation est donc de la forme: $y = mx + p$, où $m = f'(a)$ et son ordonnée à l'origine p peut être calculée.

Il suffit d'écrire que (MP) passe par $m = f'(a)$.

On a donc: $f(a) = f'(a) \times \ a + p$. Ceci donne: $p = f(a) - a \times \ f'(a)$.

Donc: $y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$que l'on écrit souvent sous l'une des formes, plus faciles à retenir:

Equation de la tangente au point $M(a; f(a))$ :

Définition :

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$ ou $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

## IV. Signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction

Nous admettrons sans démonstration les théorèmes suivants:

Théorème 1 :

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur I, alors pour tout $x \in I$, on a: $f'(x) \geq 0$
- Si f est décroissante sur I, alors pour tout $x \in I$, on a: $f'(x) \leq 0$.
- Si f est constante sur I, alors pour tout $x \in I$, on a: $f'(x) = 0$.

## Théorème 2 :

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si, pour tout $x \in I$, on a: $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.
- Si, pour tout $x \in I$, on a: $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si, pour tout $x \in I$, on a: $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

## Théorème 3 :

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si, pour tout $x \in I$, on a: $f'(x) > 0$ ( sauf peut-être en des points isolés $f'(x) = 0$ où ),alors f est strictement croissante sur I.
- Si, pour tout $x \in I$, on a: $f'(x) < 0$ ( sauf peut-être en des points isolés $f'(x) = 0$ où ),alors f est strictement décroissante sur I.

En particulier:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$.

## Propriété :

- Si, pour tout $x \in [a;b]$, on a $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $[a;b]$.
- Si, pour tout $x \in [a;b]$, on a $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur $[a;b]$.

EXEMPLES :

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

· Pour tout $x \in ]-\infty; 0]$, on a $f'(x) \leq 0$, donc f est décroissante sur $]-\infty; 0]$.

· Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a $f'(x) \geq 0$, donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.

Bien que $f'(0) = 0$, on a de façon plus précise :

· Pour tout $x \in ]-\infty; 0[$, on a $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.

· Pour tout $x \in ]0; +\infty[$, on a $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

# V. Changement de signe de la dérivée et extremum d'une fonction

Nous admettrons sans démonstration les théorèmes suivants:

Théorème:

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I,

Et si f admet un maximum local ou un minimum local en $x = a$ différent des extrémités de l'intervalle I,

Alors: $f'(a) = 0$.

## 1.Cas particulier où f est dérivable sur un intervalle ouvert.

Propriété :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I,

Et si f admet un maximum local ou un minimum local en $a \in I$,

Alors: $f'(a) = 0$.

## Propriété :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I,

et si $a \in I$ et si $f'(x)$ s'annule pour $x = a$ en changeant de signe,

Alors f(a) est un extremum local de f sur I.

**EXEMPLES :**

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$.

$f'(x)$ s'annule en $x = -1$ et $x = 2$ en changeant de signe, car :

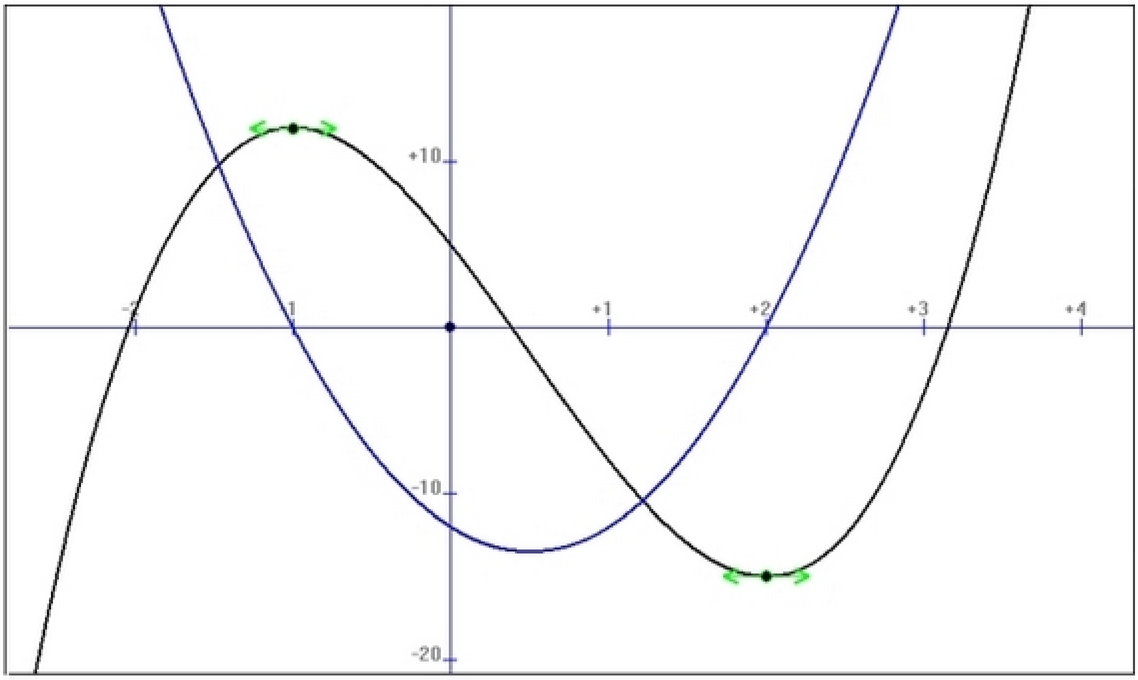
- pour x appartenant à $-]\infty; -1[$ , on a : $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $-]\infty; -1[$
- .
- pour x appartenant à $]-1; 2[$, on a : $f'(x) < 0$ donc *f est* strictement décroissante sur$]-1; 2[$.
- pour x appartenant à $]2; +\infty[$ , on a : $f'(x) > 0$ donc *f* est strictement croissante sur $]2; +\infty[$.

La fonction $f$ possède donc un maximum local en $x = -1$ et un minimum local en $x = 2$.

Toute cette étude peut être résumée dans le tableau ci-dessous :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $12$ | $\searrow$ | $-15$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Voici un morceau des représentations graphiques de *f et de* $f'$ *:*



+10
-10
-20
-2
-1
+1
+2
+3
+4