Généralités sur les fonctions numériques

I. La fonction racine carrée :

Définition :

La fonction f définie sur $[0;+\infty[$, qui à tout nombre réel positif x associe sa racine carrée $\sqrt{x}$, est appelée fonction racine carrée.

1. Sens de variation de la fonction racine carrée :

Propriété :

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0;+\infty[$.

COURBE REPRÉSENTATIVE DE LA FONCTION RACINE CARRÉE :

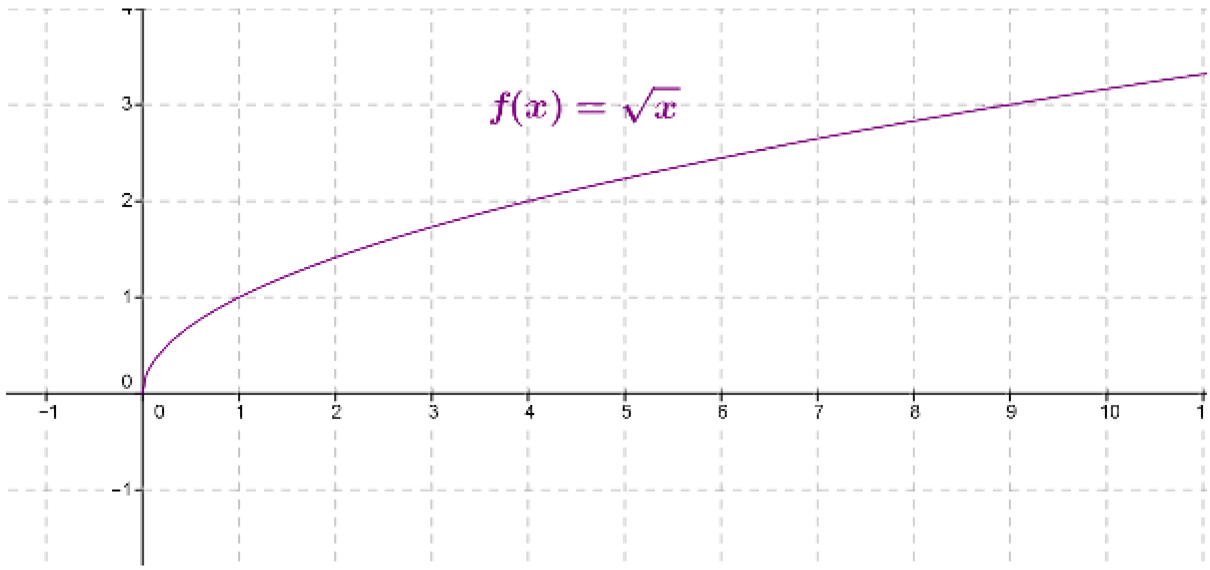


TABLEAU DE VARIATION :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

DÉMONSTRATION :

u et v désignent deux nombres réels positifs tels que $u \leq v$.

Les deux nombres positifs $\sqrt{u}$ et $\sqrt{v}$ sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

$(\sqrt{u})^2 = u$ et $(\sqrt{v})^2 = v$.

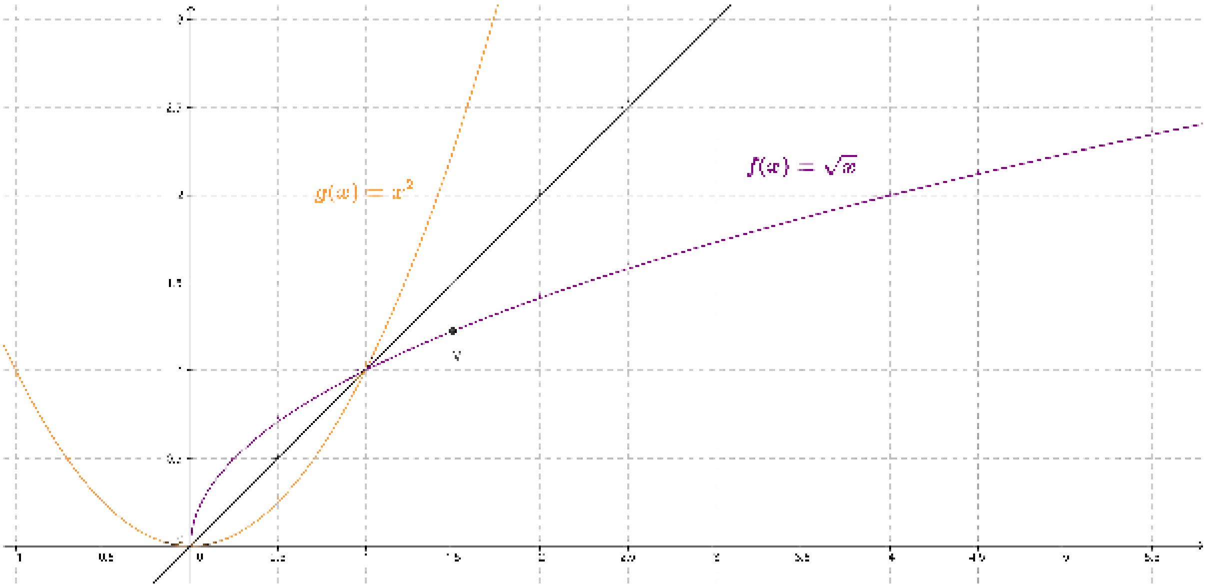
Or $0 \leq u \leq v$ donc $\sqrt{0} \leq \sqrt{u} \leq \sqrt{v}$, c'est à dire $f(u) \leq f(v)$.

2. Représentation graphique de la fonction racine carrée :

Dans un repère orthogonal, ζ désigne la courbe représentative de la fonction racine carrée.

Propriété :

Dans un repère orthonormé, la courbe représentative ζ de la fonction racine carrée et la courbe représentative ρ de la fonction carré sur $[0;+\infty[$ sont **symétriques par rapport à la droite d'équation y=x.**



DÉMONSTRATION :

x et y désignent deux nombres réels positifs.

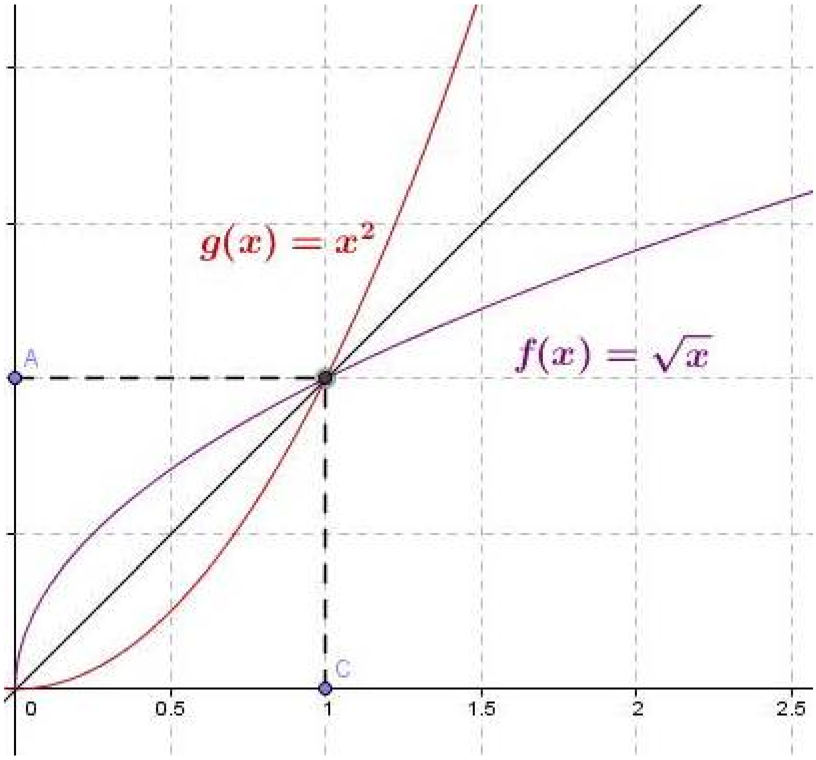
$y = \sqrt{x}$ équivaut à $x = y^2$, c'est à dire :

$M(x;y)$ appartient à ζ si, et seulement si, $M'(y;x)$ appartient à ρ.

Propriété :

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;1]$, $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1;+\infty[$, $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$.



II. La fonction valeur absolue :

1. Valeur absolue d'un nombre réel :

Définition :

Sur une droite graduée d'origine O, x est l'abscisse d'un point M.

La valeur absolue du nombre réel x, noté $|x|$, est la distance OM.

EXEMPLES :

$|7,3| = 7,3$

$|-5,2| = 5,2$

$|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$

Propriété :

Pour tout nombre réel x,

$|x| \geq 0$ et $|-x| = |x|$.

2. La fonction valeur absolue :

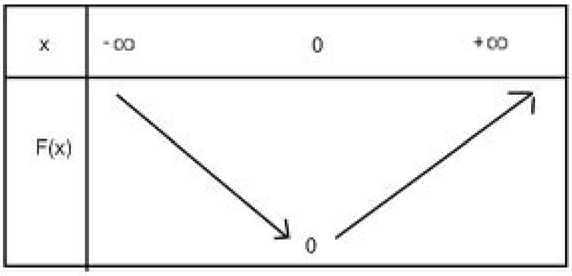
Définition :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout nombre réel x associe sa valeur absolue $|x|$, est appelée fonction valeur absolue.

a. Sens de variation :

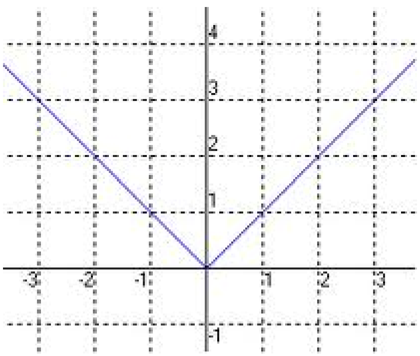
Propriété :

La fonction valeur absolue est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.



b. Représentation graphique :

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction valeur absolue est la réunion des demi-droites d'équations y=x sur $[0;+\infty[$ et y= - x sur $]-\infty;0]$.



Propriété :

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative ζ de la fonction valeur absolue est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.**

DÉMONSTRATION :
x et y désignent deux nombres réels.

M(x;y) appartient à la courbe ζ si, et seulement si, $y = |x|$.

Or ceci équivaut à $y = |-x|$ car $|-x| = |x|$, c'est à dire à M ' (- x; y) appartient à la courbe ζ.

III. sens de variation des fonctions $u+k, \lambda u, \sqrt{u}$ et $\frac{1}{u}$:

1. Fonctions $u+k$ et λu :

Propriété :

u est une fonction définie sur un intervalle I et k un nombre réel.

Les fonctions u et u+k ont le même sens de variation sur l'intervalle I.

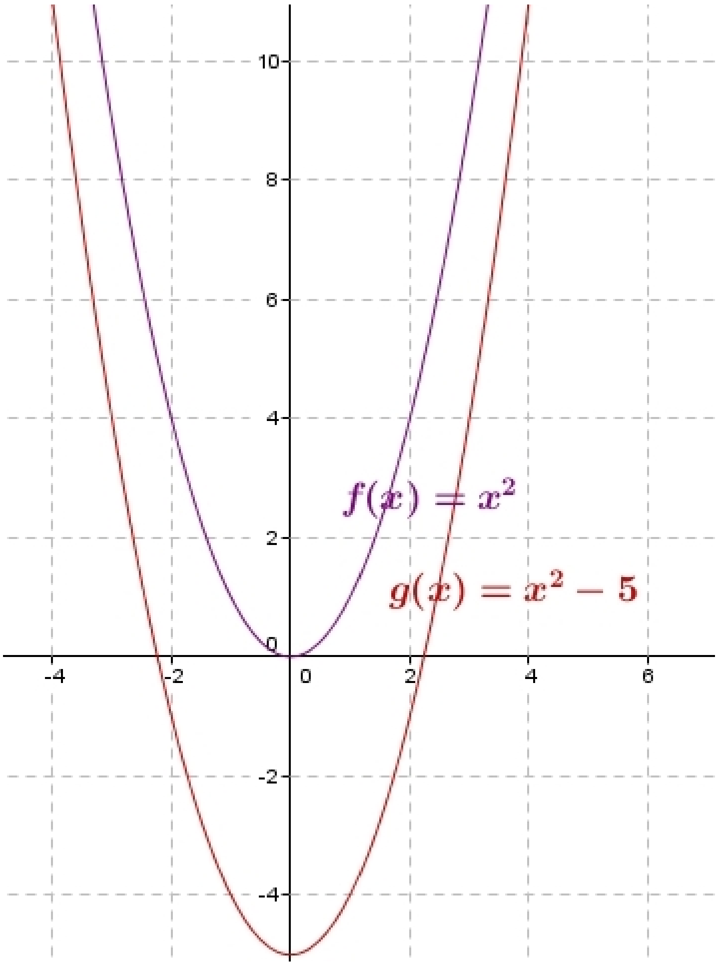
Propriété :

u est une fonction définie sur un intervalle I et λ un nombre réel non nul.

- Si $\lambda > 0$ alors les fonctions u et λu ont le même sens de variation sur I.

- Si $\lambda < 0$ alors les fonctions u et λu ont des sens de variation contraires sur I.

EXEMPLES :
La fonction $x \mapsto x^2 - 5$ a le même sens de variation sur $\mathbb{R}$ que la fonction carrée.



La fonction $x \mapsto -2\sqrt{x}$ est décroissante sur $[0;+\infty[$.

2. Fonctions $\sqrt{u}$ et $\dfrac{1}{u}$:

Propriété :

u est une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout nombre réel x de I, $u(x) \geq 0$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$, notée $\sqrt{u}$, a le même sens de variation que u sur l'intervalle I.

Propriété :

u est une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout nombre réel x de I, $u(x) \neq 0$ et $u(x)$ garde le même signe.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$, notée $\dfrac{1}{u}$, a un sens de variation contraire à celui de u sur I.