Les vecteurs et la translation

0. Point de vue historique :

Un peu d'histoire :

Le mot « vecteur » vient du latin « vehere » (conduire, transporter) La notion de vecteur est le fruit d'une longue histoire, commencée voici plus de deux mille ans.

I. Les vecteurs :

1.Définition et vocabulaire :

Définition :

Un vecteur $\vec{u}$ est un objet mathématique défini par :

- une direction;

- un sens;

- une longueur.

On le représente par une flèche .

Si on représente cette flèche à partir d'un point A (appelée origine) et qu'on note B son extrémité,

alors :

- La direction du vecteur $\vec{u}$ est celle de la droite (AB),

- Le sens du vecteur $\vec{u}$ est le sens de l'origine A vers l'extrémité B,

- La longueur (appelée norme) du vecteur $\vec{u}$est la longueur AB du segment [AB].

On a :

$\|\vec{u}\| = \|\vec{AB}\| = AB$

Vocabulaire :

- Le vecteur $\vec{BA}$ est l'opposé du vecteur $\vec{AB}$.

On a $\vec{u} = -\vec{AB}$

- $\vec{AA} = \vec{BB}$ est appelé le vecteur nul et est noté $\vec{0}$.

2. Egalité de deux vecteurs :

Propriétés :

- a. Deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont égaux si et seulement si :

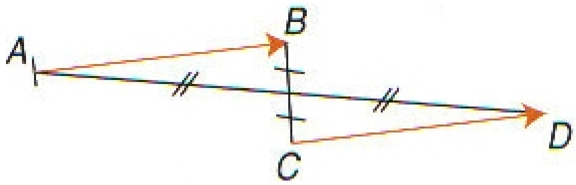
Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ont même direction, le même sens et la même longueur (norme).

- b. La translation qui transforme A en B transforme aussi C en D;

- c. Le quadrilatère ABDC, est un parallélogramme.(éventuellement aplati) ;

Réciproquement,

si ABDC est un parallélogramme alors $\vec{AB} = \vec{CD}$



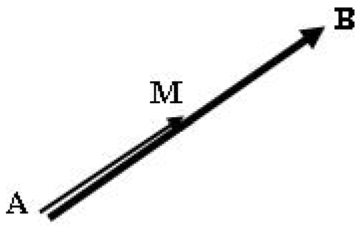
3. Milieu d'un segment :

Propriétés :

Soint A et B deux points distincts du plan .

- Si M est le milieu de [AB], alors $\vec{AM}=\vec{MB}$.
- Réciproquement, si

$\vec{AM}=\vec{MB}$ alors M est le milieu de [AB].

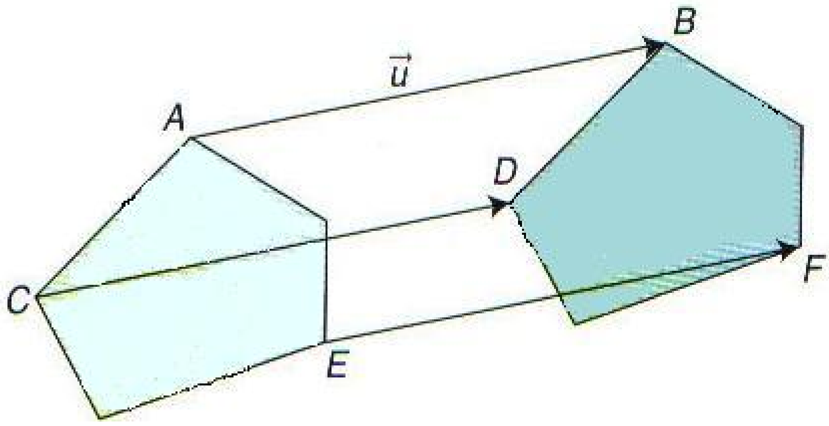


II. La translation :

1. Vocabulaire :

Définition :

- Lorsque deux droites sont parallèles, on dit qu'elles ont la même direction- Il y a deux sens de parcours sur une droite : de A vers B ou bien de B vers A



Définition :

Le déplacement de la figure a été effectué :

- dans la direction de la droite (AB)

- dans le sens A vers B, que l'on indique par la flèche

- d'une longueur égale à AB.

On dit que le dessin en position B est l'image du dessin en position A par la translation qui transforme A en B

ou, autrement dit,

par la translation de vecteur $\vec{AB}$.

2. Propriétés des translations :

Construire l'image d'une figure par une translation revient à faire glisser cette figure dans une direction, un sens et avec une longueur donnée.

Un tel glissement n'entraîne pas de déformation ni de changement de disposition .

Propriétés :

Dans une translation ;

- les longueurs;

- le parallélisme;

- la perpendicularité;

- les angles

sont conservés.

- Une translation transforme une droite en une droite parallèle.

- Par une translation, une figure géométrique est transformée en une figure géométrique semblable.

- Pour construire l'image d'une figure géométrique, on ne construit donc que l'image de ses points caractéristiques :

- pour un segment, ses extrémités;

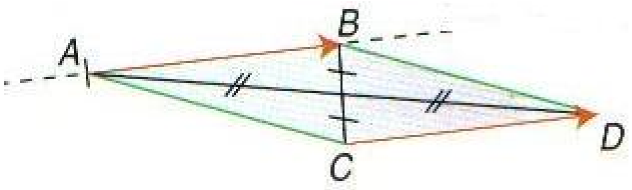
- pour un triangle, ses trois sommets;

- pour un cercle, son centre et son rayon.

3. Egalité de deux vecteurs :

Propriétés :

Deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont égaux si et seulement si :
- a. La translation qui transforme A en B transforme aussi C en D;- b. Le quadrilatère ABDC, est un parallélogramme.(éventuellement aplati) ;



III. Composée de deux translations et somme de deux vecteurs :

Propriétés :

Soient A, B et C trois points du plan, la composée de la translation de vecteur $\vec{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{BC}$ est la translation de vecteur $\vec{AC}$.

On dit que le vecteur $\vec{AC}$ est la somme des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$.

On note : $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$

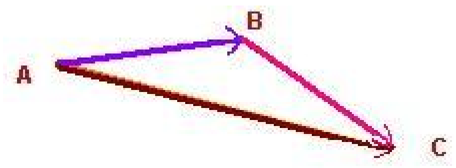
(cette relation est appelée « relation de Chasles »)

Construction de la somme de deux vecteurs :

On utilise la méthode du **<< bout à bout>>**,

C'est à dire qu'on représente le vecteur $\vec{AB}$ et a son extrémité on ajoute le vecteur $\vec{BC}$ et on obtient le vecteur $\vec{AB}+\vec{BC}$ qui est égal au vecteur $\vec{AC}$ (d'après la relation de Chasles).

L'extrémité de l'un est aussi l'origine de l'autre .



IV. Composée de deux symétrie centrales :

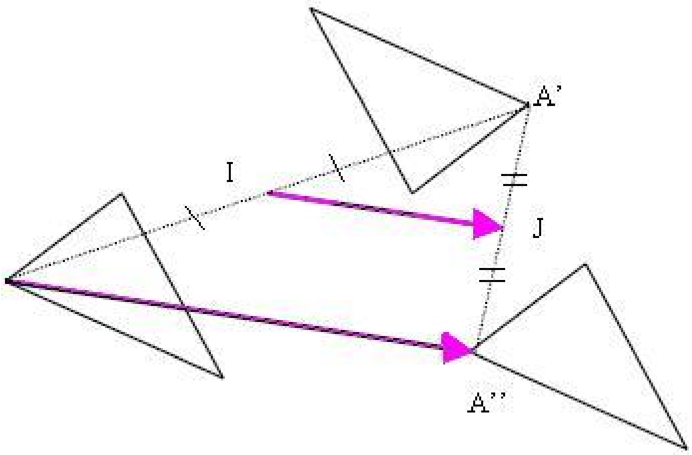
Propriétés :

Soient I et J deux points du plan,

la composée de la symétrie de centre I suivie de la symétrie de

centre J est la translation de vecteur $\vec{IJ}+\vec{IJ}$,

que l'on note $2\vec{IJ}$.



PREUVE :

I milieu de [AA'] et J milieu de [A'A'']

On en déduit que $\vec{AA'} = 2\vec{IJ}$ d'après les **propriétés de la droite des milieux dans un triangle** (étudié en quatrième).

V. Coordonnées dans un repère :

1. Repères :

Définition :

Trois points non alignés O,I,J ,tels que $\vec{OI} = \vec{i}, \vec{OJ} = \vec{J}$, définissent un repère du plan. On note souvent $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Repère quelconque	Repère orthogonal	Repère orthonormé
O,I,J non alignés	$\vec{i} \perp \vec{j}$	$\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

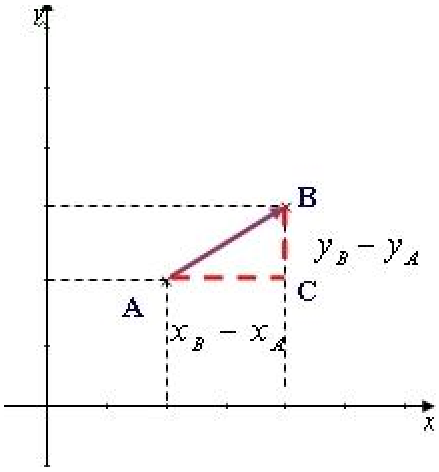
2. Coordonnées d'un vecteur.

Propriétés :

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

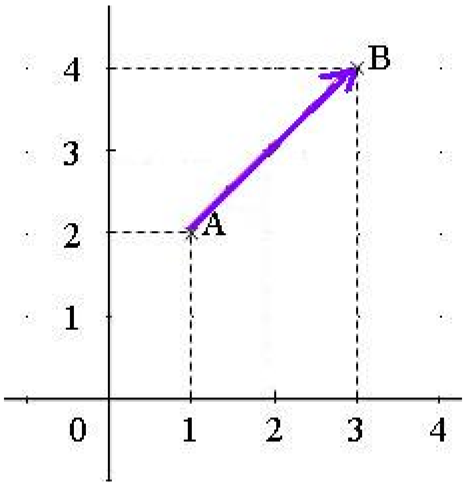
si deux points A et B ont pour coordonnées respectives (xA ; yA) et (xB ; yB), alors le vecteur AB a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Ces coordonnées correspondent au déplacement horizontal puis vertical pour aller de A à B (affectés de signes).



EXEMPLE :

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, soient A(1 ; 2) et B(3 ; 4)



$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

donc les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Coordonnées du milieu d'un segment :

Propriétés :

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

si deux points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A ; y_A)$et $(x_B ; y_B)$,

alors

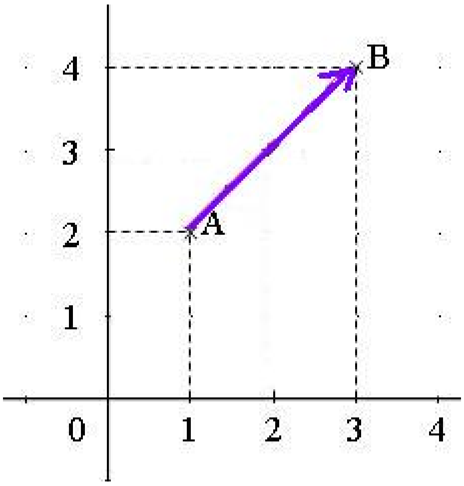
le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \; et \; y_M = \frac{y_A + y_B}{2} .$$

EXEMPLE :

Dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$,

on donne A(1 ; 2) et B(3 ; 4) :



CONCLUSION :

Les coordonnées du milieu I du segment [AB] sont (2 ; 3)

Propriétés :

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

si deux points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A ; y_A)$et $(x_B ; y_B)$.

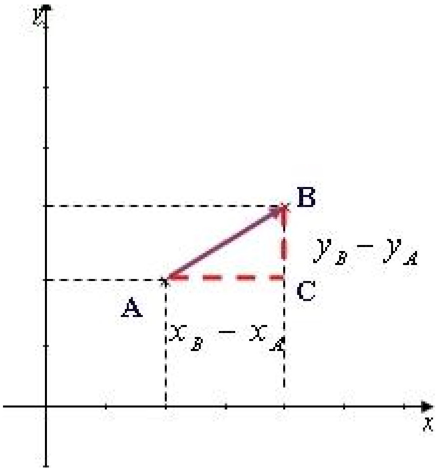
alors la distance entre les deux points A et B se calcule en utilisant la formule :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

ATTENTION :

Aucune simplification n'est possible dans cette formule entre la racine et les carrés .

PREUVE :



Considérons le triangle ABC de la figure rectangle en C,

d'après le **théorème de Pythagore** (étudié en quatrième)

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

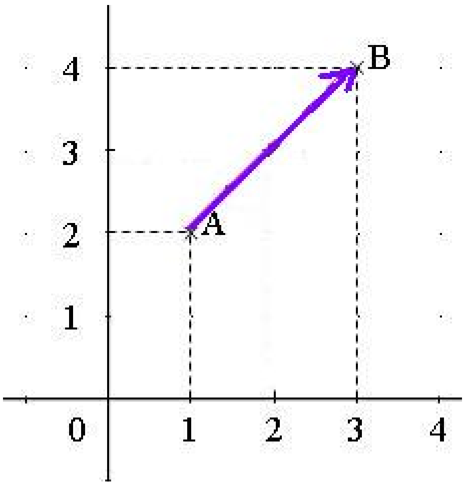
d' où

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

EXEMPLE :

Dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ du plan ,

Reprenons l'exemple précédent avec A(1 ; 2) et B(3 ; 4) :



$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2}$
$AB = \sqrt{2^2 + 2^2}$

$AB = \sqrt{8}$

CONCLUSION :

La distance AB vaut $\sqrt{8}$.