Le théorème de Bézout

I.Enoncé du théorème de Bézout :

Théorème :

Soient a et b sont deux entiers naturels non nuls.

Dire que a et b sont **premiers entre eux** équivaut à dire il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

DÉMONSTRATION :

1.Supposons qu'il existe deux entiers u et v tels que au + bv = 1 et prouvons que a et b sont premiers entre eux.

On note $\Delta = PGCD(a, b)$

Δ divise a et b donc Δ divise au + bv.

Comme au + bv = 1, Δ = 1 et a et b sont premiers entre eux.

2.Supposons que a et b premiers entre eux et démontrons que 1 s'écrit sous la forme au + bv.

Soit $\wp$ l'ensemble des nombres sous la forme au + bv avec $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble $\wp$ n'est pas vide car pour u = 1 et v = 0, $a \in \varphi$.Il en est de même pour b.

Ainsi $\wp$ contient des entiers strictement positive, et, parmi eux, un plus petit que tous les autres.

Notons $m = au_1 + bv_1$ ce plus petit élément.

La division euclidienne de a par m s'écrit $a = mq + r$ avec $0 \leq r < m$

soit $r = a - mq = a - (au_1 + bv_1)q = a(1 - u_1q) + b(-v_1q)$.

Ainsi $r \in \varphi$.Or m est le plus petit entier strictement positif de $\wp$ donc r = 0.

Ainsi m divise a.On montre de même que m divise b.

Comme a et b sont premiers entre eux, m=1 et $au_1+bv_1=1$.

EN PRATIQUE, COMMENT TROUVER U ET V ?

Pour déterminer les coefficient, on utilise **l'algorithme d'Euclide.**

Donnons un exemple.

On cherche un couple (x;y) d'entiers relatifs tels que 89x+41y=1 (1).

89 et 41 sont premiers entre eux donc il existe deux entiers relatifs x et y vérifiant (1).

On pose a=89 et b=41.

$89=41\times\ 2+7$ donc $7=89-2\times\ 41=a-2b$.

$41=7\times\ 5+\ 6$ donc $6=41-7\times\ 5=b-5(a-2b)=11b-5a$.

$7=6\times\ 1\ +1$ donc $1=7-6=a-2b-11b+5a=6a-13b$.

Soit $89\times\ 6\ +41\times\ (-13)=1$.

Ainsi $(x_0;y_0)=(6;-13)$ est solution de (1).

II.Une nouvelle caractérisation du PGCD

Théorème :

a et b sont deux entiers naturels non nuls.Dire que Δ est le $PGCD(a,b)$ équivaut à dire Δ que est un diviseur de a et b et il existe deux entiers relatifs u et v tels que $\Delta\ =au+bv$.