La fonction logarithme népérien

I. Définition de la fonction logarithme népérien :

Définition :

Pour tout réel x de $]0;+\infty[$, il existe un unique réel y tel que $e^y = x$.

Définition :

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur]0 ; $+\infty$[qui à tout réel x>0, associe le réel noté ln(x) dont l'exponentielle est x.

REMARQUE :

L'image d'un réel strictement positif x par la fonction ln se note souvent ln x au lieu de ln(x).

Conséquences :

1. Pour tout réel x>0 et tout réel y, $x = e^y$ équivaut à $y = lnx$.
2. Pour tout réel x>0, $e^{lnx} = x$.
3. Pour tout réel x, $ln(e^x) = x$

PREUVE :

(1) et (2) se déduisent directement de la définition.

(3) Pour tout réel x, si y=$ln(e^x)$ alors d'après (1) $e^x = e^y$ donc x=y.

Conséquences :

$ln1 = 0$.En effet $e^0 = 1$ et d'après (1) ceci équivaut à $ln1 = 0$.

$lne = 1$.En effet $e^1 = e$ et d'après (1) ceci équivaut à $lne = 1$.

Pour tout réel λ, l'équation $lnx = \lambda$ a pour unique solution $x = e^\lambda$ d'après (1).

Propriété:

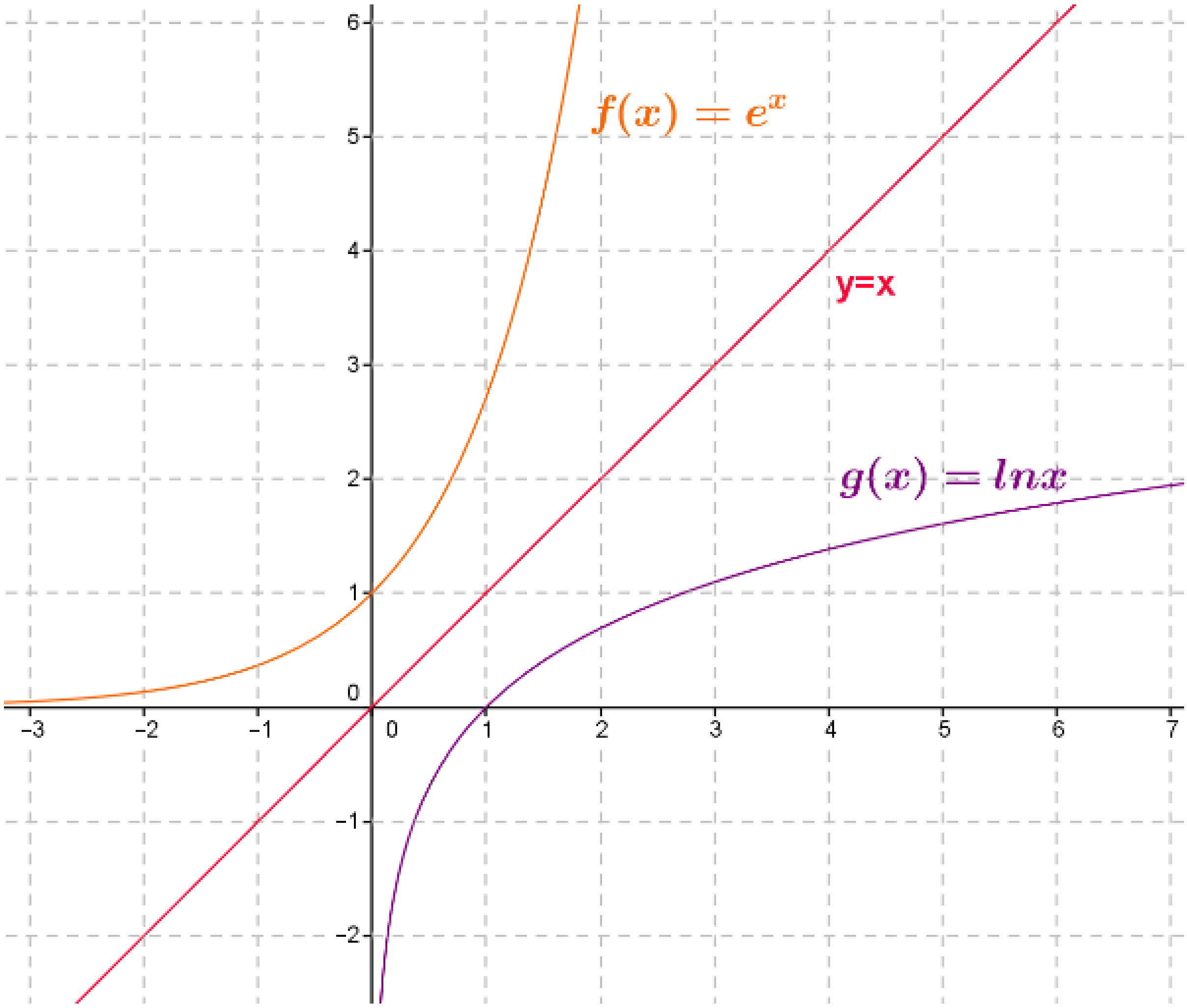
Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives des fonctions exponentielles et logarithmes népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation y=x.

PREUVE :

ON note φ et Invalid Equation les courbes représentatives des fonctions exp et ln.

Dire que $M'(x;y)$ appartient à Invalid Equation équivaut à dire que $M(y;x)$ appartient à φ.

φ et Invalid Equation sont donc symétriques par rapport à la droite y=x.



II. Sens de variation de la fonction logarithme népérien sur $]0;+\infty[$:

Propriété :

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

PREUVE :

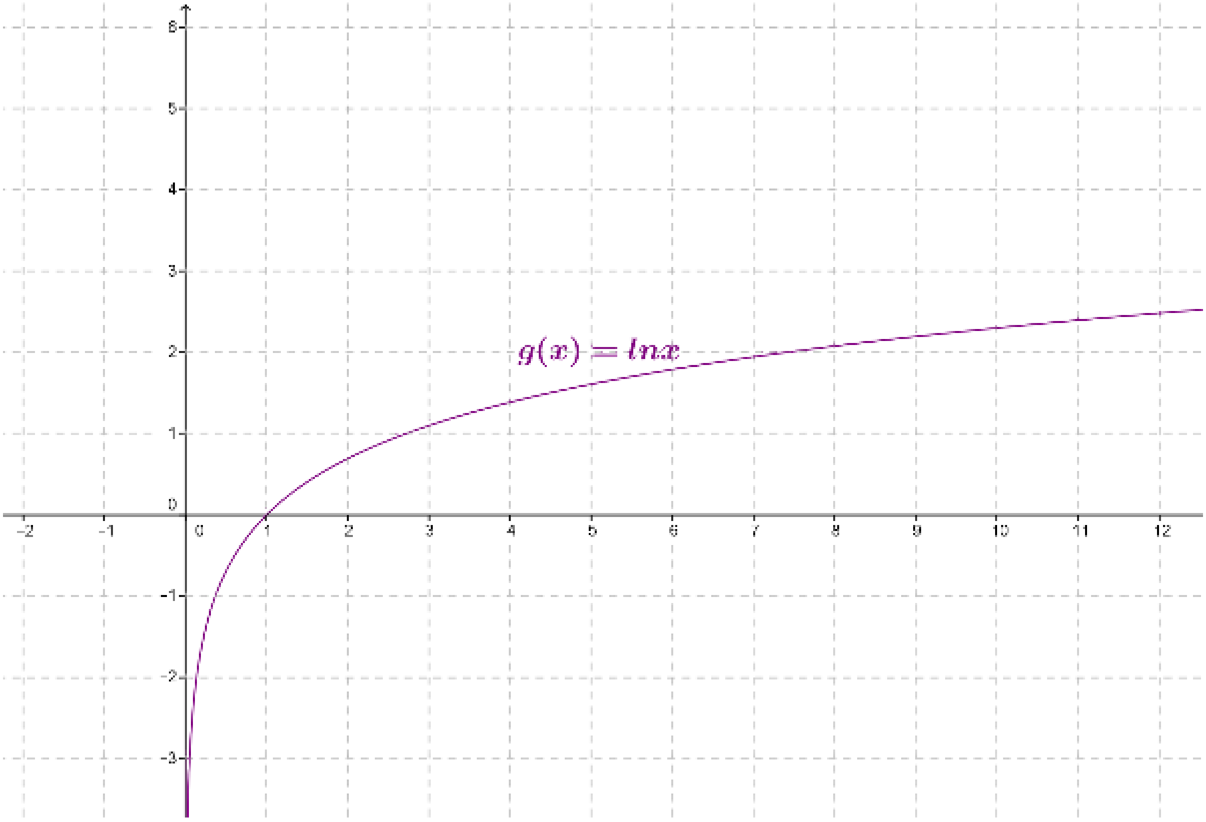
a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$, c'est à dire que $e^{lna} < e^{lnb}$.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $lna < lnb$.

Conséquences :

Pour tous réels a et b de $]0;+\infty[$:

- $lna = lnb$ équivaut à $a = b$ et $lna < lnb$ équivaut à $a < b$.
- $lna > 0$ équivaut à $a > 1$ et $lna < 0$ équivaut à $0 < a < 1$.



III. Les propriétés algébriques :

1. Relation fonctionnelle :

Théorème :

Pour tout réels a et b de $]0;+\infty[$, $ln(ab) = lna + lnb$.

PREUVE :

a et b sont deux réels strictement positifs.On note A=lnab et B=ln a + ln b alors

$e^A = ab$ et $e^B = e^{lna+lnb} = e^{lna} \times e^{lnb} = ab$

donc $e^A = e^B$ d'où A=B puisque la fonction exponentielle est bijective sur $\mathbb{R}$.

2. Logarithme d'un quotient :

Propriété :

Pour tout réel a de $]0;+\infty[$, $ln(\frac{1}{a}) = -lna$.

PREUVE :

Pour a>0, on écrit $a \times \frac{1}{a} = 1$ donc $ln(a \times \frac{1}{a}) = ln1$

c'est à dire $ln(a) + ln(\frac{1}{a}) = 0$ d'où $ln(\frac{1}{a}) = -ln(a)$.

Propriété :

Pour tous réels a et b de $]0;+\infty[$, $ln(\frac{a}{b}) = ln(a) - ln(b)$.

PREUVE :

Pour a>0 et b>0, $ln(\frac{a}{b}) = ln(a \times \frac{1}{b}) = lna + ln\frac{1}{b} = ln(a) - ln(b)$.

3. Logarithme d'un produit de nombres réels strictement positifs :

Propriété :

Pour tous réels $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ de $]0;+\infty[$,

$ln(a_1a_2a_3....a_n) = lna_1 + lna_2 + lna_3 + ... + lna_n$

REMARQUE :

Cette formule généralise la relation fonctionnelle établie dans le paragraphe 1. et peut se démontrer par récurrence.

Propriété :

Pour tout réel a de $]0;+\infty[$ et tout entier relatif n, $ln(a^n)=nlna$.

Démonstration :

La démonstration de cette propriété se fait par récurrence et sur le signe de n.

4. Logarithme d'une racine carrée :

Propriété :

Pour tout réel a de $]0;+\infty[$, $ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}lna$.

PREUVE :

Pour a>0, $(\sqrt{a})^2=a$ donc $ln(\sqrt{a})^2=lna$

ainsi $2ln(\sqrt{a})=lna$

d'où $ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}lna$