Les suites numériques

I . Comportement d’une suite numérique :

Définition :

Une suite est une application de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l}(U_n) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longrightarrow U_n\end{array}\right| .$$

Définitions :

1. Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq U_{n+1}$.
2. Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq U_{n+1}$.
3. Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone signifie qu’elle est soit croissante soit décroissante.

REMARQUES :

1. On parle aussi de suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante à partir d’un rang $n_0 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$ $\forall n \geq n_0, U_n \geq U_{n+1}$
2. On définit aussi les suites strictement croissantes ou décroissante en remplaçant les inégalités par des inégalités strictes .

MÉTHODE 1 :

Considérons la suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}\,,\, U_n = n^2$
$U_{n+1} - U_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 > 1$. (car n est un entier naturel donc positif) donc $U_{n+1} - U_n > 0 \Leftrightarrow \ U_{n+1} > U_n$ donc la suite (U_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

MÉTHODE 2 :

Pour une suite (U_n) à termes strictement positifs : comparer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$. et 1.

Considérons la suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}\,,\, U_n = expn^2$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{exp(n+1)^2)}{expn^2} = exp(n+1)^2 - n^2 = expn^2 + 2n + 1 - n^2 = exp2n + 1 >$ car la $exp0$
fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et 2n+1 >0 .

donc $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ car $exp0 =$

ainsi $\frac{U_{n+1} \times U_n}{U_n} > 1 \ \times \ U_n$

car (U_n) est à termes strictement positifs .

$U_{n+1} > U_n$ donc (U_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Définitions :

1. Une suite (U_n) est majorée lorsqu'il existe un réel M (un majorant) tel que $\forall n \in \mathbb{N}\,,\, U_n \leq \ M$.
2. Une suite (U_n) est minorée lorsqu'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}\,,\, U_n \geq \ M$.
3. Une suite (U_n) est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée .

REMARQUES :

1. Si (U_n) est une suite croissante, alors elle est minorée par son premier terme U_0 : $U_0 \leq U_1 \leq U_2 \leq .... \leq U_n \leq ....$
2. Si (U_n) est une suite décroissante, alors elle est majorée par son premier terme U_0 : $U_0 \geq U_1 \geq U_2 \geq .... \geq U_n \leq ....$

EXEMPLES :

1. La suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}\,,\, U_n = expn + 1$ est strictement croissante, elle est minorée par

1 par contre, elle n'est pas majorée.

2. La suite (V_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = -2n - 4$ est strictement décroissante, majorée par -4, par contre elle n'est pas minorée .

3. La suite (W_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = sinn$ est bornée, majorée par 1 et minorée par -1.

Théorème :

1. Une suite croissante et majorée est convergente .
2. Une suite décroissante et minorée est convergente .

Théorème :

1. Toute suite croissante non majorée, diverge vers $+\infty$.
2. Tout suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

EXEMPLE :

1. La suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = expn + 1$ est strictement croissante, elle n'est pas majorée donc diverge vers $+\infty$.
2. La suite (V_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = -2n - 4$ est strictement décroissante, elle n'est pas minorée donc diverge vers $-\infty$.
3. La suite (W_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = sinn$ est bornée, elle est dite divergente .

Théorème :

Soit (U_n) définie par U_0 et $\forall n \ \in \ \mathbb{N}$, $U_n = .$

Si (U_n)converge vers l et si f est continue en l alors cette limite l vérifie $f(l) \ = \ l$.

EXEMPLE :

Considérons (U_n) définie par $U_0 =$ et $\forall n \ \in \ \mathbb{N}, \ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2}{3}$.

(U_n) est décroissante et minorée par 0 (à montrer...).

Donc (U_n) converge vers l d'après le théorème précédent .

Posons $\forall x \ \in \ \mathbb{R}^+, \ f(x) = \dfrac{x^2}{3}$

On est amené à résoudre $f(l) \ = l \Longleftrightarrow \dfrac{l^2}{3} = l \Longleftrightarrow l \times (\dfrac{l}{3} - 1) = 0 \Longleftrightarrow l =$

or

$\forall n \ \in \ \mathbb{N}, \ U_n \leq 2,5$

donc $l \neq \ 0$

d'où

$l = 0 =$

II . Suites adjacentes :

Définition :

Dire que deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes signifie que :

1. L'une est croissante.
2. L'autre est décroissante.
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - V_n) \ = \ 0.$

EXEMPLE :

Considérons les deux suites numériques suivantes :

$\forall n \geq 1,\ U_n =$

$$\forall n \geq 1,\ U_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = U_n + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Donc $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{n+1^2} > 0$

donc (U_n) est croissante .

$$\forall n \geq 1,\ V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{n+1} - U_n - \frac{1}{n} = U_{n+1} - U_n - \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$\forall n \geq 1,\ V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{n+1} - U_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1^2} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\forall n \geq 1,\ V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{n+1} - U_n - \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n+1)^2} - \frac{n+1}{n(n+1)^2}$$

$$\forall n \geq 1,\ V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{n+1} - U_n - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$$

donc (V_n) est décroissante .

$V_n - U_n = \dfrac{1}{n}$

Invalid Equation

CONCLUSION :

Les deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes .

Définition :

Si **deux suites sont adjacentes** alors elles **convergent** vers la même **limite**.

EXEMPLE :

Reprenons notre exemple précédente :

$\forall n \geq 1,\ U_n =$

Les deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes donc elles sont convergentes et convergent vers la même limite .

Nous pourrions montrer que :

Invalid Equation