Suite de matrices

Un cours sur les suites de matrices en terminale S spécialité où nous étudierons des suites convergentes vers une autre matrice.

I.Suite de nombres (Un) vérifiant $U_{n+1}=aUn+b$.

Une telle suite est dite arithmético-géométrique (ou à récurrence affine).

Etudions un exemple.La suite (Un) est définie par $U_0=12$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=0,2U_n+4$.

1. De la formule de récurrence à la formule explicite.

Observons que si la suite (Un) converge, alors sa limite x est solution de l'équation x=0,2x+4.

Cette équation a pour solution x=5.Cela suggère de poser : pour tout entier naturel n, $x_n=u_n-5$.

De $U_{n+1}=0,2U_n+4$ et $5=0,2,\times,5+4$, on déduit par soustraction : $U_{n+1}-5=0,2(U_n-5)$.

Soit $x_{n+1}=0,2x_n$.La suite (x_n) est géométrique de raison a = 0,2 et de premier terme $x_0=u_0-5=7$.

D'où pour tout entier naturel n, $x_n=,x_0\times,0,2^n=,7\times,0,2^n$.

Ainsi $u_n-5=,7\times,0,2^n$ donc $u_n,=,7\times,0,2^n+5$.

2.Méthode générale : détermination d'une formule explicite.

On considère une suite de nombre (Un) qui vérifie $U_{n+1}=aUn+b$, avec $a\neq 1$.

1. On résoud l'équation $x=ax+b$: elle a une solution unique c.
2. On introduit la suite auxiliaire (x_n)définie par $x_n=u_n-c$.On prouve qu'elle est géométrique de raison a.; il en résulte que pour tout naturel n, $x_n=x_0a^n$.
3. On revient à la suite initiale : pour tout entier naturel n, $u_n=x_n+c$.D'où l'expression : $u_n=a^n(u_0-c)+c$

3.Etude de la convergence

Sur notre exemple, la raison a=0,2 est telle que - 1<a<1 donc $\lim_{n,\mapsto,+\infty,}0,2^n=0$.

Ainsi, $\lim_{n,\mapsto,+\infty,} u_n = 5$.

Si on applique cette méthode dans le cas général, on obtient le résultat suivant :

Théorème :

Une suite de nombres (Un) vérifie $U_{n+1} = aUn + b$, avec -1<a<1.

Alors la suite (Un) converge vers le nombre c vérifiant c = ac+b.

Ce résultat découle de la formule explicite et de la condition -1<a<1, car alors, $\lim_{n,\mapsto,+\infty,} a^n = 0$.

Remarque :

On démontre que, si $a \leq, -1$ ou a>1, la suite est divergente (hormis le cas particuliers où $u_0 = c$, auquel cas elle est constante.

II.Suite de matrices colonnes (Un) vérifiant $U_{n+1} = AU_n + B$.

Etudions un exemple.La suite de matrices colonne (Un) de format (2,1) est définie par :

$U_0 = \begin{pmatrix} ,3 \\ ,-2, \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} ,1,4, \\ 1,,2, \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} ,12 \\ -2, \end{pmatrix}$.

1.De la formule de récurrence à la formule explicite.

Inspirons-nous de la méthode précédente.Cherchons une matrice colonne C de format (2,1), telle que C=AC+B.Cette équation d'inconnue C s'écrit C-AC=B, c'est-à-dire (I-A)C=B.

Si I-A est inversible, multiplions à gauche les deux membres par $(I-A)^{-1}$: $C = (I-A)^{-1})B$.

Or $I - A = \begin{pmatrix} ,0,-4, \\ ,-1,-1, \end{pmatrix}$,cette matrice est inversible et $(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} ,0,25,-1, \\ ,-0,25,0, \end{pmatrix}$

donc $C = \begin{pmatrix} ,5 \\ -3, \end{pmatrix}$.

De $U_{n+1} = AU_n + B$ et C=AC+B, on déduit par soustraction : $U_{n+1} - C = A(U_n - C)$.

Poson alors, pour tout entier naturel n, $X_n = U_n - C$; on obient $X_{n+1} = AX_n$ **(1)**.

Démontrons par récurrence que l'égalité $X_n = A^n X_0$ **(2)** est vraie pour tout entier naturel n.

- Pour n=0, l'égalité **(2)** est vraie car $A^0 = I$.
- Si $X_n = A^n X_0$ alors en multipliant à gauche les deux membres par A, on obtient $AX_n = A^{n+1}X_0$, c'est-à-dire d'après **(1),** $X_{n+1} = A^{n+1}X_0$**.**Ainsi, l'égalité **(2)** est héréditaire.
- On conclut que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

Revenons à la suite (U_n) : pour tout entier naturel n, $U_n - C = A^n(U_0 - C)$ d'où

$U_n = A^n(U_0 - C) + C$.

2. Méthode générale : détermination d'une formule explicite.

Une suite de matrices colonnes (U_n) vérifie $U_{n+1} = AU_n + B$ où $I - A$ est **inversible**.

1. On résout l'équation l'équation C=AC+B; elle admet une unique solution $C = (I - A)^{-1})B$.
2. On introduit la suite auxiliaire (X_n) définie par $X_n = U_n - C$.On prouve qu'elle vérifie, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$ puis par récurrence que $X_n = A^n X_0$.
3. On revient à la suite initiale: pour tout entier naturel n, $U_n = X_n + C$.D'où l'expression $U_n = A^n(U_0 - C) + C$.

3. Suites de matrices lignes

Si (U_n) est une suite de matrices lignes de même format telle que $V_{n+1} = V_n A + B$, où A est une matrice carrée et B une matrice ligne, on obtient des résultats analogues : si $I - A$ est **inversible**, l'équation $C = CA + B$ a une solution unique $C = B(I - A)^{-1}$.

Alors pour tout naturel n, $V_n = (V_0 - C)A^n + C$.

III. Convergence d'une suite de matrice

Définition :

(U_n) est une suite de matrices de format donné, L est une matrice de même format.Dire que la suite (U_n) a pour **limite L**, signifie que, pour chaque emplacement, la suite des coefficients de (U_n) a pour limite le coefficient de L**.**

On dit aussi que (U_n) **converge vers L**.

Exemple :

$U_n = \begin{pmatrix} ,3 + 0,2^n \\ 2 - 0,5^n, \\ ,7 + 0,3^n, \end{pmatrix}$ converge vers la matrice $\begin{pmatrix} ,3 \\ 2, \\ ,7, \end{pmatrix}$.