Fonctions polynômes du second degré

1. Forme canonique

Définition : Fonction polynôme de degré 2

Soit a, b, c trois nombres réels avec $a \neq 0$.
On appelle fonction polynôme de degré 2 toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ pouvant être exprimée sous la forme :$P(x) = ax^2 + bx + c$.
On parle aussi de fonction trinôme.

Propriété

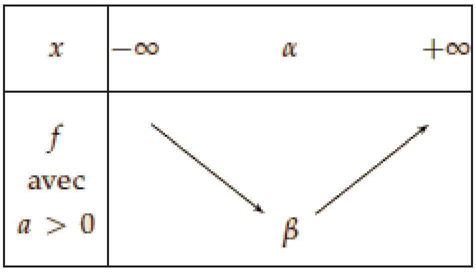
Soit P une fonction polynôme du second degré exprimée sous la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$.
Il existe deux nombres réels α et β permettant d'écrire P sous le forme :
$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
Cette forme s'appelle forme canonique.

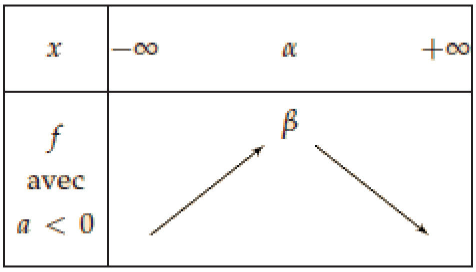
2. Étude d'une fonction trinôme

Propriété : sens de variations.

Soit a, α, β trois nombres réels et f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Le sens de variation d'une fonction dépend du signe de a.





Extremum d'une fonction.

Soit a, α, β trois nombres réels.
f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique
$f\,(x) \;=\; a\,(x\;-\alpha\,)^2 \;+\; \beta$.
Sur R, la fonction f admet β comme extremum. Il est atteint pour x = α.
C'est un maximum si α est négatif.
C'est un minimum si α est positif.

Signe d'une fonction.

Soit a, α, β trois nombres réels et f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique $f\,(x) \;=\; a\,(x\;-\alpha\,)^2 \;+\; \beta$.
Le signe d'une fonction trinôme dépend du signe de a et du signe de β.
Si a < 0 et $\beta \leq$ 0, alors la fonction est toujours négative.
Si a > 0 et $\beta \geq$ 0 alors la fonction est toujours positive.
Dans les autres cas,
la fonction change de signe sur l'intervalle $]\;-\infty;\alpha[$;
la fonction change à nouveau de signe sur l'intervalle$]\alpha$; $+\infty[$.

Méthode : étudier une fonction trinôme du second degré.

EXEMPLE:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\,(x) \;=\; -2(x\;-\;0,\,25)^2\;-\;8.$
Déterminer :
1) son sens de variation ;
2) son extremum;
3) le signe de la fonction.

CORRECTION :

Dans le cas de la fonction f :
• α = 0, 25 • β= −8 • a = −2
1) a est négatif donc la fonction f est croissante sur $]-\infty;\ 0,\ 25[$ et décroissante sinon.
2) Elle admet un maximum en x = α = 0, 25. Il vaut f (0, 25) = −8.

x	$-\infty$		0,25		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	-8	$\searrow$	

3) La fonction f est négative sur $\mathbb{R}$.

3. Représentation graphique de fonctions

Définition :

La courbe représentative d'une fonction trinôme est une parabole.

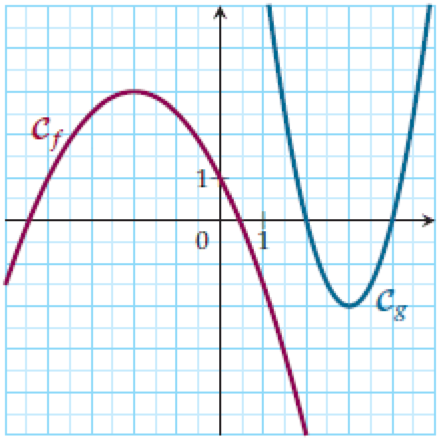
Propriété :

Soit a, α, β trois nombres réels et f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.La courbe représentative de cette fonction est une parabole qui admet un axe de symétrie : la droite d'équation x = α.

EXEMPLE :

Tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :
• $f(x) = -0,5(x+2)^2 + 3$
• $g(x) = 2(x-3)^2 - 2$
Donner leurs sens de variations et leur éventuel extremum.

CORRECTION



La fonction f :
- est croissante sur $]-\infty;-2[$;
- est décroissante sur $]-2;+\infty[$;
- elle admet un maximum en -2 qui vaut 3.

La fonction g :
- est décroissante sur $]-\infty; 3[$;
- est croissante sur $]3;+\infty[$;
- elle admet un minimum en 3 qui vaut -2.