Angles orientés et repérage polaire

I. Repérage sur le cercle trigonométrique.

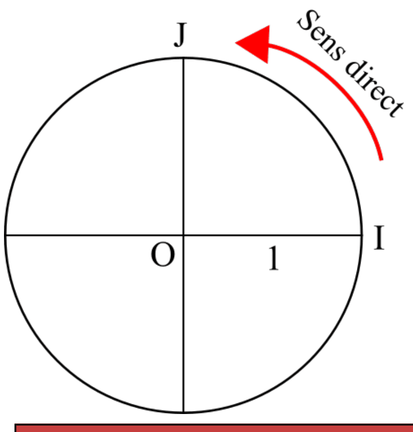
1.Enroulement sur la droite numérique.

Définition: cercle trigonométrique.

Le **cercle trigonométrique** $\wp$ est le cercle de centre O et de rayon 1.

Il est muni d'un sens de parcours appelé **sens direct**, qui est l'inverse de celui des aiguilles d'une montre.

Avec ce choix, on dit que le **plan est orienté**.



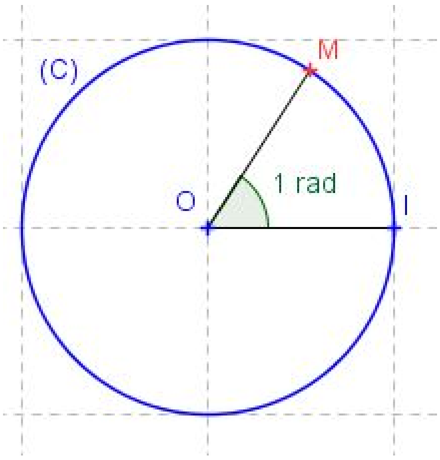
Propriété :

Tout nombre réel x a un point-image unique sur le cercle $\wp$.S'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x' = x + 2k\pi$, alors x et x' ont le même point-image sur le cercle $\wp$.

2.Le radian

Définition :

La mesure en radian d'un angle est égale à la longueur de l'arc du cercle trigonométrique qu'il intercepte.



Propriété :

Les mesures des angles en radian et en degré sont proportionnelles.

II. Mesures d'un angle orienté.

Définition : angle orienté.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et les points M et N tels que $\vec{OM}$ et $\vec{ON}$ sont leurs représentants respectifs d'origine O. Soient M' et N' les points d'intersection des demi-droites [OM) et [ON) avec le cercle trigonométrique.

Soient x et y deux nombres réels qui ont pour points-images M' et N', alors y-x est une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$.

Propriété : mesure principale.

L'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$ a une unique mesure α dans l'intervalle $]-\pi:\pi[$ appelée **mesure principale** de l'angle.

Propriétés :

1. Relation de Chasles pour les angles : soient $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls, alors $(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})$.
2. Caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $(\vec{u},\vec{v})=0[\pi]$.

Propriétés :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

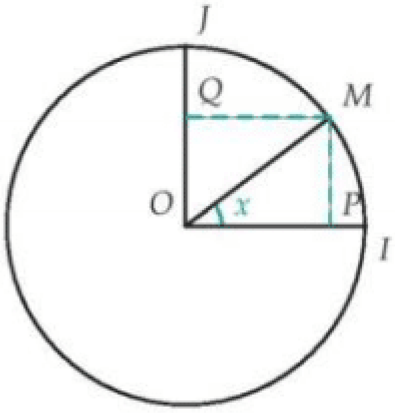
1. $(\vec{v},\vec{u})=-(\vec{u},\vec{v})$;
2. $(-\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$
3. $(-\vec{u},\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})[\pi]$
4. $(\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})[\pi]$

III. Cosinus et sinus d'un réel et d'un angle orienté.

1. Repérage à l'aide du cosinus et du sinus.

Théorème : coordonnées d'un point du cercle trigonométrique.

soit x un nombre réel et M son point-image sur le cercle trigonométrique φ.Le point M a pour coordonnées $(cosx; sinx)$.



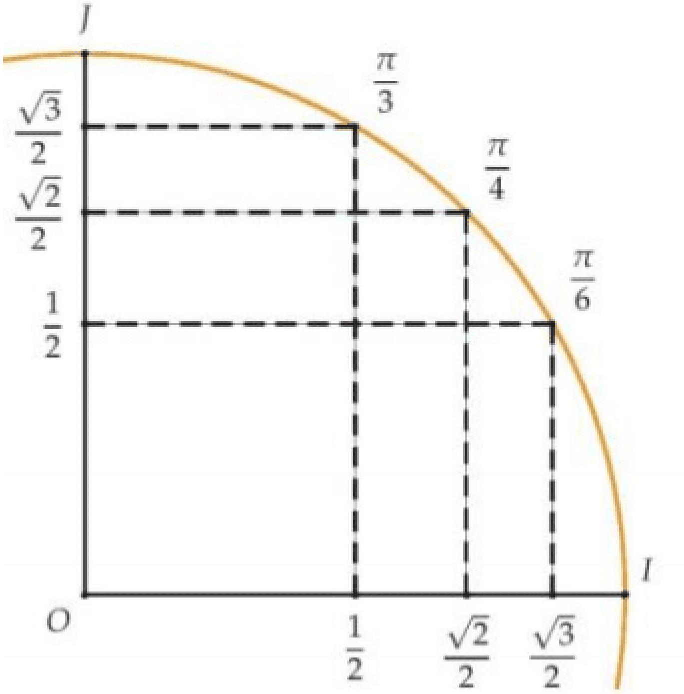
Propriétés :

Pour tout réel x et pour tout entier relatif k.

1. $cos^2x + sin^2x = 1$ (théorème de Pythagore).
2. $-1 \leq\ cosx \leq\ 1$
3. $-1 \leq\ sinx \leq\ 1$
4. $cos(x + 2k\pi) = cosx$
5. $sin(x + 2k\pi) = sinx$

Les valeurs particulières :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

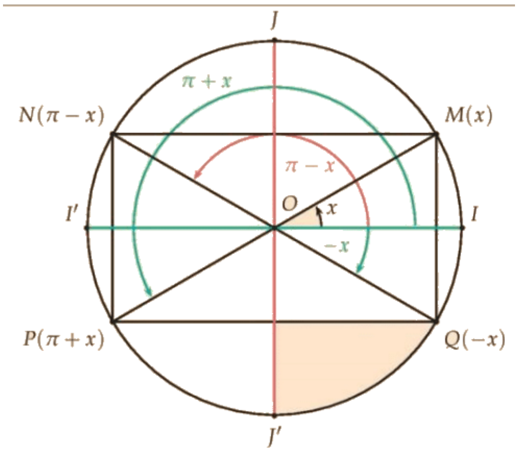


2. Les angles associés.

Propriétés :

Pour tout nombre réel x :

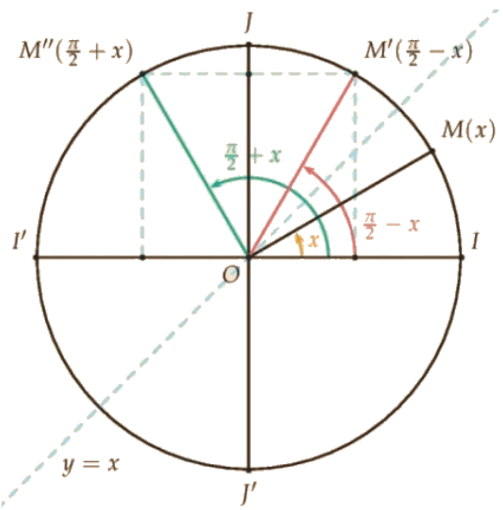
1. $cos(-x) = cosx$
2. $sin(-x) = -sinx$
3. $cos(\pi - x) = -cosx$
4. $sin(\pi - x) = sinx$
5. $cos(\pi + x) = -cosx$
6. $sin(\pi + x) = -sinx$



Propriétés :

Pour tout nombre réel x :

1. $cos(\frac{\pi}{2} - x) = sinx$.
2. $sin(\frac{\pi}{2} - x) = cosx$.
3. $cos(\frac{\pi}{2} + x) = -sinx$.
4. $sin(\frac{\pi}{2} + x) = cosx$.



3. Formules de duplication.

Propriétés :

On considère deux nombres réels a et b.

1. $cos(a+b) = cosa \times \ cosb - sina \times \ sinb$.
2. $cos(a-b) = cosa \times \ cosb + sina \times \ sinb$.
3. $sin(a+b) = sina \times \ cosb + cosa \times \ sinb$.
4. $sin(a-b) = sina \times \ cosb - cosa \times \ sinb$.

Propriétés :

On considère un nombre réel a.

1. $$\begin{aligned} cos(2a) &= cos^2 a - sin^2 a \\ &= 2cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2sin^2 a \end{aligned}$$.
2. $sin2a = 2 \times \ cosa \times \ sina$.