



Le produit scalaire

I. Différentes expressions du produit scalaire :

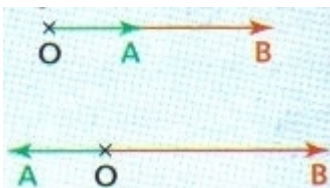
1. Vecteurs colinéaires :

Définition :

soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs colinéaires non nuls, tels que

$$\vec{u} = \vec{OA} \text{ et } \vec{v} = \vec{OB}.$$

- Si \vec{u} et \vec{v} sont de même sens : $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB$.
- Si \vec{u} et \vec{v} sont de sens contraires : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OB$.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$ est le carré scalaire du vecteur \vec{u}



2. Vecteurs quelconques :

Propriété 1 :

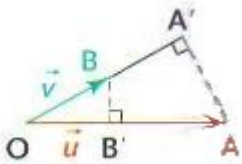
Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls tels que

$$\vec{u} = \vec{OA} \text{ et } \vec{v} = \vec{OB}.$$

Alors :

Invalid Equation .

A' et B' sont respectivement les projetés orthogonaux de A sur (OB) et de B sur (OA).



3. Propriétés :

Propriété 2 :

Soient $(x;y)$ et $(x';y')$ les coordonnées respectives des vecteurs \vec{u} et \vec{v} dans un **repère orthonormé** quelconque.

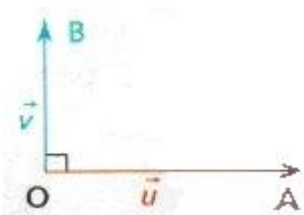
Invalid Equation .

II. Produit scalaire et orthogonalité :

Définition :

Dire que \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs orthogonaux signifie que :

- Soit $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$;
- Soit $(OA) \perp (OB)$, avec $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{v} = \vec{OB}$ non nuls.



2. Propriété :

Propriété :

 Invalid Equation .

III. Propriétés du produit scalaire :

Propriétés :

Propriétés :

Soient \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} trois vecteurs et k un nombre réel.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (symétrie).
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ (linéarité)
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ (linéarité)
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (linéarité)
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ (identité remarquable)
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ (identité remarquable)
- $(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$ (identité remarquable)

IV. Applications du produit scalaire :

1. produit scalaire et cosinus :

Propriété :

Soit \vec{u} et \vec{v} non nuls.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

2. Théorème d'Al-Kashi :

Théorème :

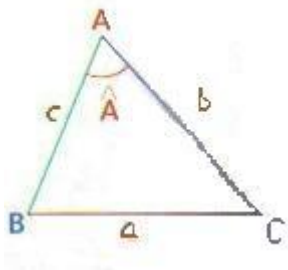
Soit ABC un triangle tel que $AB=c$, $AC=b$ et $BC=a$.

On a :

$$\bullet a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos A$$

$$\bullet b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos B$$

$$\bullet c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos C$$



3. Théorème de la médiane :

Théorème :

Soient A et B deux points distincts et I le milieu du segment [AB] .

Pour tout point M, :



