Equations et inéquations du second degré

Dans tout ce chapitre, nous considérerons a un réel non nul.

I. Résolution de l'équation du second degré :

1. Définition et vocabulaire :

Définition :

1. Une **équation du second degré**, à une inconnue x, est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$, où $a,\ b,\ c$ sont trois réels donnés avec $a\neq\ 0$.

2. Résoudre l'équation $ax^2+bx+c\ =\ 0$, c'est trouver tous les nombres p tels que $ap^2+bp+c=0$.

3. Un tel nombre p est dit solution ou encore racine de l'équation.

2. Résolution de l'équation du second degré :

Posons f(x) = ax²+bx+c avec $a\neq\ 0$.

2.1. Ecriture de f(x) sous forme canonique :

Définition :

Puisque $a\neq\ 0$, $f(x)=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$ ou $x^2+\frac{b}{a}x=(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}$

donc $f(x)=a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}]$.

Cette dernière écriture est appelée forme canonique de f.

2.2. Résolution de l'équation ax²+bx+c=0 :

Propriété :

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ ainsi $f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$

PREMIER CAS :

Si $\Delta < 0$ alors $\frac{\Delta,}{4a^2} < 0$.

Le nombre entre crochets est strictement positif donc l'équation f(x)=0 n'a pas de solution.

SECOND CAS :

Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$.

Puisque $a \neq , 0$, l'équation f(x)=0 a une solution et une seule :

$x = -\frac{b}{2a}$.

TROISIÈME CAS :

Si $\Delta > 0$ alors $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$ et :

$$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$$

$$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2]$$

$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})$$

$$f(x) = a(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a})(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} -)$$

Si l'on pose :

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Donc puisque $a \neq 0$, l'équation f(x)=0 a deux solutions distinctes x_1 et x_2.

Définition :

Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant de l'équation** du second degré $ax^2 + bx + c$ ou du trinôme $ax^2 + bx + c$.

On le note Δ (lire « delta »).

Théorème :

a. Lorsque $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

b. Lorsque $\Delta = 0$, l'équation a une racine double : $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$.

c. Lorsque $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

II. Factorisation et signe du trinôme :

1. Factorisation du trinôme :

Nous avons vu, au cours de la démonstration du théorème 1 que si

$\Delta > 0$ alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Théorème 2 : factorisation du trinôme.

Lorsque l'équation f(x)=ax²+bx+c=0 a deux solutions x_1 et x_2 (dans le cas $\Delta > 0$) alors,

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

2. Signe du trinôme :

Théorème

1. Lorsque $\Delta < 0$, $f(x)$ est toujours du signe de a.
2. Lorsque $\Delta = 0$, $f(x)$ est du signe de a
3. Lorsque $\Delta < 0$, $f(x)$ est du signe de a, sauf lorsque x est entre les racines, auquel cas f(x) et a sont de signes contraires.

APPLICATION :

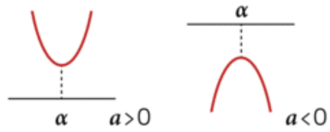
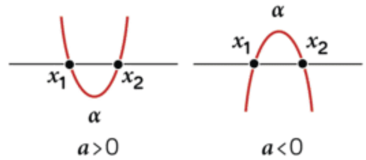
Pour résoudre une inéquation du second degré, on détermine le signe du trinôme associé.

III. Représentations graphiques des fonctions trinômes :

Définition :

La courbe de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est une parabole. Cette parabole est tournée vers le haut lorsque $a > 0$ et tournée vers le bas lorsque $a < 0$.

SYNTHÈSE :

	SOLUTIONS DE $ax^2+bx+c=0$	SIGNE DE $P(x)=ax^2+bx+c$	FACTORISATION DE $P(x)=ax^2+bx+c$	POSITION DE LA PARABOLE par rapport à l'axe des abscisses
$\Delta<0$	Pas de solution	x : $-\infty$ … $+\infty$ $P(x)$: signe de a	Pas de factorisation	
$\Delta=0$	Une solution double $x_0=-\dfrac{b}{2a}$	x : $-\infty$ … $-\dfrac{b}{2a}$ … $+\infty$ $P(x)$: signe de a | 0 | signe de a	$P(x)=a(x-x_0)^2$	
$\Delta>0$	Deux solutions distinctes $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	x : $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ $P(x)$: signe de a | 0 | signe de $-a$ | 0 | signe de a (en supposant ici $x_1<x_2$)	$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$	

EXEMPLES :

Résoudre $x^2+3x+3>0$

SOLUTION :

$\Delta=-3$ puisque $\Delta<0$, le trinôme n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

De plus a=1 donc a>0 ainsi $x^2+3x+3>0$ pour tout x réel et $S=\mathbb{R}$.

Résoudre l'inéquation du second degré $-x^2+3x-2\geq 0$.

Nous avons $\Delta=3^2-4\times(-1)\times(-2)=9-8=1$.

L'équation $-x^2+3x-2=0$ a deux racines qui son t:

$x_1=\dfrac{-3+\sqrt{1}}{2\times(-1)}=\dfrac{-2}{-2}=1$ x_1 = 1 et $x_2=\dfrac{-3-\sqrt{1}}{2\times(-1)}=\dfrac{-4}{-2}=2$.

Nous avons $a=-1$ donc $a<0$ ainsi l'ensemble solution de l'inéquation du second degré $-x^2+3x-2\geq 0$ est l'intervalle $[1\,;2]$.