Equations, inéquations et résolution graphique

0. Introduction

Quelle est la différence entre une égalité et une équation ?

Une **égalité** est une affirmation qui utilise le symbole = et qui peut être que vraie ou fausse.Par exemple, $3 \times 4 = 12$ est une égalité qui est vraie, et $\pi = 3,14$ est une égalité qui est fausse.

Une **équation** est une égalité dans laquelle se trouve un nombre inconnu, généralement noté x.

I. Résolution exacte d’ équations et d'inéquations

La résolution algébrique d’une équation ou d'une inéquation permet de trouver la valeur exacte de chacune des solutions.

1. Equation et inéquation du 1er degré

Propriété : opérations sur les équations.

Les opérations suivantes ne changent pas l’ensemble des solutions d’une **équation** :

- additionner un même nombre aux deux membres d’une équation ;
- multiplier par un même nombre non nul les deux membres d’une équation.

Propriété : opérations sur les inéquations.

Les opérations suivantes ne changent pas l’ensemble des solutions d’une **inéquation** :

- additionner un même nombre aux deux membres d’une inéquation ;

- multiplier par un même nombre positif non nul les deux membres d'une inéquation ;
- multiplier par un même nombre négatif non nul les deux membres d'une inéquation à condition d'inverser le sens de l'inégalité.

Méthode : résoudre un problème algébriquement.

1. On détermine et dénomme l'inconnue.
2. On interprète les informations sous forme d'une (in)équation.
3. On résout l'(in)équation en utilisant les règles précédentes :
   - on regroupe les termes contenant l'inconnue dans le même membre de l'(in)équation ;
   - si nécessaire, on réduit les expressions des deux membres ;
   - on isole l'inconnue dans l'ordre inverse des priorités de calcul.

1. On répond au problème posé par une phrase. La résolution de l'(in)équation peut faire apparaître des solutions correctes mathématiquement,mais incohérentes avec le problème.

EXEMPLE :
Le cinéma d'art et d'essai de Mathyville propose une carte d'abonnement annuelle à 15 € et la séance coûte alors 6,40 € au lieu de 9 €.

Rania hésite à s'abonner.
À combien de séances dans l'année doit-elle assister au minimum pour que l'abonnement devienne intéressant ?

CORRECTION
1) On désigne par x le nombre de séances de cinéma auxquelles Rania ira cette année.
2) Avec l'abonnement cela coûterait : 15 + 6,4x.
Sans l'abonnement cela coûterait : 9x. Pour que l'abonnement soit intéressant, il suffit que 15 + 6, 4x < 9x.

3) Lors de la résolution qui suit, chaque étape est équivalente à la précédente.
$15 + 6,4x - 6,4x < 9x - 6,4x$
$15 < 2,6x$

$\dfrac{15}{2,6} < \dfrac{2,6x}{2,6}$

$\dfrac{15}{2,6} < x$

Les solutions de cette inéquation sont les nombres de l'intervalle $]\dfrac{15}{2,6}; +\infty[$.

4) Or, $\dfrac{15}{2,6} \simeq 5,8$. Les solutions du problème sont les nombres entiers supérieurs ou égaux à 6.
Donc il suffit que Rania aille au cinéma au moins 6 fois dans l'année pour que l'abonnement soit intéressant.

2. Les équations-produits :

Propriété :

Un produit est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.

Méthode : obtenir et résoudre une équation-produit.
Pour résoudre une équation plus complexe, on obtient puis résout une équation-produit.
1) On se ramène à une équation ayant un membre nul.
2) On factorise l'expression littérale.
3) On résout l'équation produit obtenue.

EXEMPLE :
Dans un repère, on représente f définie par $f(x) = 3(x-7)^2 - 12$ pour $x \in [-6; 6]$.
Combien de fois la courbe coupera-t-elle l'axe des abscisses ?
S'il(s) existe(nt), préciser les coordonnées de ce(s) point(s).

Correction
Les points d'intersection d'une courbe avec l'axe des abscisses sont les points de la courbe d'ordonnée nulle.

On note x l'abscisse des points d'intersection. Ce sont donc les antécédents de 0 et il suffit de résoudre l'équation $3(x-7)^2 - 12 = 0$ dans [−6; 6] pour les trouver.
Lors de la résolution, chaque étape est équivalente à la précédente.
1) On obtient et on simplifie une équation ayant un membre nul.
$3(x-7)^2 - 12 = 0$
$(x-7)^2 - 4 = 0$

2) On factorise en reconnaissant l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.
$(x-7)^2 - 22 = 0$
(x − 7 + 2)(x − 7 − 2) = 0
(x − 5)(x − 9) = 0

3) On résout l'équation produit obtenu.
x − 5 = 0 ou x − 9 = 0

x = 5 ou x = 9

4) On répond au problème posé.
Cette équation a deux solutions : 5 et 9.
Or, 9 $\notin$ [−6; 6]. La courbe représentative de la fonction f dans un repère pour $x \in [-6;6]$,
coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées (5; 0).

REMARQUES :
Certaines équations ne se factorisent pas dans $\mathbb{R}$.
Par exemple $x^2 + 3 = 0$ n'admet pas de solution réelle.
Des logiciels de calculs formels peuvent aider à la résolution d'équation.

II. Résolution approchée d'équations et d'inéquations

Quand la résolution algébrique d'une (in)équation n'est pas possible, on peut cependant
localiser et estimer des valeurs approchées.

Méthode : estimer graphiquement une solution.
1) On trouve deux fonctions f et g telles que l'équation ou l'inéquation puisse s'écrire sous la forme
f (x) = g(x) ou f (x) < g(x).
2) On trace les courbes représentatives de f et g dans un même repère.
3) On cherche les abscisses
• des points d'intersection des deux courbes pour résoudre f (x) = g(x) ;
• des points de Cf au-dessous (au-dessus) de Cg pour f (x) < g(x) (f (x) > g(x)).

EXEMPLE :
Jacques a dit que le périmètre d'un carré est toujours inférieur à son aire. A-t-il raison ?

CORRECTION
1) On note x le côté d'un carré. Le périmètre est définie par P(x) = 4x et l'aire par A(x) = x^2.
Répondre à la question revient à étudier l'inéquation $P(x) \leq A(x)$.
2) On trace leur courbe représentative C_P et C_A dans un même repère.
3) Le graphique indique deux zones disjointes pour lesquelles $P(x) \leq A(x)$: $]-\infty;0]$ et
[4;+%5Cinfty[" />. Donc, pour des valeurs entre 0 et 4 unités, le périmètre d'un carré est supérieur à son
aire. Jacques a tort !

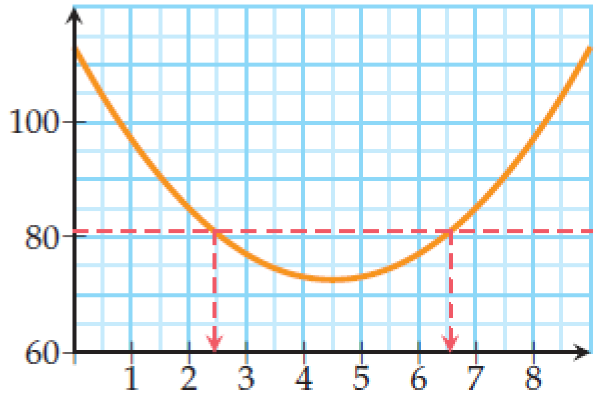
NOTATION:

Les solutions de l'inéquation $P(x) \leq A(x)$ sont dans $]-\infty;0]$ ∪ [4;+%5Cinfty[" />.

Le symbole ∪ désigne la réunion des deux intervalles ; il indique qu'un nombre dans l'un ou
l'autre des deux intervalles est solution de cette inéquation.

MÉTHODE : AFFINER UNE SOLUTION.

Voici le graphique obtenu lors de la résolution de $x^2 + (9-x)^2 + 32 = 81$.
Donner des valeurs approchées à 10^{-2} près des solutions.



CORRECTION

Le graphique met en évidence deux solutions proches l'une de 2,5 et l'autre de 6,5.

On pose $f(x) = x^2 + (9 - x)^2 + 32$.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
2,41	81,24	6,51	80,58
2,42	81,15	6,52	80,66
2,43	81,07	6,53	80,74
2,44	80,99	6,54	80,82
2,45	80,91	6,55	80,91
2,46	80,82	6,56	80,99
2,47	80,74	6,57	81,07
2,48	80,66	6,58	81,15
2,49	80,58	6,59	80,24

Les deux solutions sont environ 2,44 cm et 6,56 cm.