



# Calculs et problèmes

## EXERCICE 1 - ETUDE D'UNE EXPRESSION COMPLEXE

Soit  $X = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$

- Montrer que  $X < 0$ .
- Calculer  $X^2$ .
- En déduire la valeur de  $X$ .

## EXERCICE 2 - CALCULS SUR LES PUISSANCES

Calculer :

$$A = (-2)^3 \times 5 + 3^2 \times 2^4 - 5 \times 2^2$$

$$B = 9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - (3^2 \times 2)^4 - 5 \times 2^2$$

## EXERCICE 3 - CALCULS AVEC DES FRACTIONS

Calculer les fractions suivantes et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$$A = 1 + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} - \frac{1}{6} : \frac{3}{4}$$

$$B = \left(7 - \frac{3}{2}\right) \times \left(\frac{25}{7} + \frac{3}{5}\right)$$

## EXERCICE 4 - DÉVELOPPER ET RÉDUIRE DES EXPRESSIONS

1. Développer et réduire:

$$a = (5x+1)(2x+3)$$

$$b = (4x-5)(7x-1)$$

$$c = (2x+5)(7x-3)$$

$$d = (-4x-6)(2x-1)$$

2. Développer et réduire:

$$e = (5x+1)(2x+3) + (5x+1)(x+2)$$

$$f = (4x-5)(7x-1) - (4x-5)(3x+2)$$

$$g = (-4x-6)(2x-1) + (2x-3)(8x-11)$$

$$h = (x-8)(5+3x) - (x-8)(7-x)$$

#### EXERCICE 5 - ENCADREMENT ET COMPARAISONS DE NOMBRES

Encadrer  $x^2$  lorsque  $-\sqrt{5} \leq x < 1$ .

#### EXERCICE 6 - LE CALCUL LITTÉRAL ET FACTORISATION

Factoriser les expressions suivantes :

$$A = (3x - 5)^2 + 3x - 5$$

$$B = -7x(x + 2) + 14(x + 2)$$

$$C = (4x - 8)^2 - (1 - x)(4x - 8)^3$$

#### EXERCICE 7 - LES NOMBRES

Simplifier au maximum :

$$A = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + \sqrt{27}$$

$$B = \frac{3 - \sqrt{6}}{4 - \sqrt{5}}$$

#### EXERCICE 8 - NOMBRES PAIRS ET IMPAIRS

1. Sous quelle forme s'écrit un nombre pair ?
2. Sous quelle forme s'écrit un nombre impair ?
3. Montrer que le carré d'un nombre pair est un nombre pair.

#### EXERCICE 9 - SOMME DE CINQ ENTIERS CONSÉCUTIFS

1. Calculer la somme de 5 entiers consécutifs.  
Que remarque-t-on ? (Faire plusieurs essais)
2. Montrer que la somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de 5.

#### EXERCICE 10 - PRODUIT DE QUATRE ENTIERS CONSÉCUTIFS

1. Calculer le produit de quatre entiers consécutifs et ajouter 1.  
Que remarque-t-on ? (Faire plusieurs essais)
2. Montrer que, pour tout réel  $x$ , on a :  

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$$
Expliquer le résultat observé à la question 1.

#### EXERCICE 11 - DES ENTIERS AMICAUX

Deux entiers positifs  $m$  et  $n$  sont dits amicaux, si la somme des diviseurs de  $m$  (autres que  $m$ ) est égale à  $n$  et simultanément la somme des diviseurs de  $n$  (autres que  $n$ ) est égale à  $m$ .

Les plus petits nombres amicaux sont 220 et 284.

- Décomposer en produit de nombres premiers 220 et 284.
- Vérifier que 220 et 284 sont amicaux.

### EXERCICE 12 - ECRIRE SOUS LA FORME D'INTERVALLE

Ecrire sous forme d'intervalles ( $x \in \dots$ ) :

$$\begin{aligned} -5 &< x \leq 2 \\ x &\geq \frac{3}{2} \\ x &\leq -\frac{1}{4} \\ x &> -5 \text{ et } x \leq 3,5 \end{aligned}$$

### EXERCICE 13 - HERVÉ ET LE COUP DU 1

$$A = (2x + 5)^2 + (2x + 5)(x - 4) + 2x + 5$$

1. Hervé doit factoriser A.

Voici sa réponse :

$$A =$$

$$A =$$

Tester l'égalité obtenue pour par Hervé pour  $x = 0$ .

Que peut-on en conclure ?

2. Pour factoriser A, on peut penser à écrire :

$$A = (2x + 5)^2 + (2x + 5)(x - 4) + (2x + 5)1$$

Factoriser alors correctement A.

### EXERCICE 14 - FACTORISER CHAQUE EXPRESSION

Factoriser chaque expression en mettant en évidence un facteur commun.

$$\begin{aligned} A &= 9a + 15 \\ B &= 3x^2 - 15x \\ C &= 8x - x^2(5x - 1) \\ D &= (3x - 2)^2 - (2x - 1)(3x - 2) \end{aligned}$$

### EXERCICE 15 - DÉVELOPPER PUIS RÉDUIRE

Développer puis réduire :

$$A = (7x + 1)^2$$

$$B = (x - 3)^2$$

$$C = (-3 - 2x)^2$$

$$D = (5x - 4)^2$$

$$E = (3x + 1)(3x - 1)$$

#### EXERCICE 16 - ECRIRE SIMPLEMENT UNE RACINE COMPLEXE

Ecrire plus simplement l'expression numérique suivante :

$$E = \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{5})^2} - \sqrt{(2\sqrt{2} - \sqrt{5})^2}$$

#### EXERCICE 17 - SUPPRIMER DES VALEURS ABSOLUES

Ecrire sans barres de valeurs absolues, les nombres suivants :

$$x = |\sqrt{2} - 1|$$

$$y = |\sqrt{3} - 5|$$

$$z = |\pi - 5|$$

$$t = |7 - 2\pi|$$

$$v = |3 - \pi|$$

#### EXERCICE 18 - INTERSECTIONS D'INTERVALLES

Ecrire plus simplement :

 Invalid Equation

#### EXERCICE 19 - SIMPLIFICATION D'UNE FRACTION RATIONNELLE

Simplifier :

$$A = \frac{a^{-4}b^5(ac^2)^3}{(ba^{-2})^5}$$

#### EXERCICE 20 - LE NOMBRE D'OR

Le nombre d'or est le nombre  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

Vérifier les égalités suivantes :

1.  $\phi^2 = \phi + 1$ .
2.  $\phi = \frac{1}{\phi} + 1$ .
3.  $\phi^3 = 2\phi + 1$

#### EXERCICE 21 - VITESSE DE LA LUMIÈRE

La vitesse de la lumière est estimée à  $3 \times 10^8$  m/s

et la distance moyenne Terre-Soleil à 149 millions de kilomètres.  
Calculer le temps nécessaire à un signal lumineux issu de la Terre pour parvenir au Soleil.



### EXERCICE 22 - CALCULER UNE EXPRESSION LITTÉRALE

Pour  $x = -\frac{1}{2}$ , calculer :

$$A = 4x^3 - 2x^2 + x + 3$$

$$B = \frac{x^3 - 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

### EXERCICE 23 - CALCULER LA LONGUEUR DE LA DIAGONALE D'UN CARRÉ

Démontrer que la diagonale d'un carré de côté  $a$  est  $a\sqrt{2}$ .

### EXERCICE 24 - DÉMONTRER QUE LE CARRÉ D'UN ENTIER IMPAIR EST UN NOMBRE IMPAIR

Démontrer que le carré d'un entier impair est un nombre impair.

### EXERCICE 25 - FACTEURS PREMIERS ET PGCD

1. Décomposer 630 puis 3150 en produit de facteurs premiers.

2. Réduire la fraction  $\frac{3150}{630}$ .

3. Calculer PGCD(630 ; 3150).

### EXERCICE 26 - RACINES CARRÉES ET FRACTIONS

1. Simplifier les nombres suivants en utilisant la décomposition en facteurs premiers .

$$A = \frac{10 \times \sqrt{45} \times \sqrt{288}}{\sqrt{150} \times \sqrt{40}}$$

$$B = \frac{252}{28 \times 55 \times 44}$$

2. Mettre les nombres suivants sous forme de fractions irréductibles.

$$A = \frac{1 - \frac{2}{3}}{4 + \frac{1}{9}}$$

$$B = \frac{2}{9} - \frac{5}{9} \times \frac{7}{10} + \frac{5}{3}$$

### EXERCICE 27 - CALCULER LE CARRÉ D'UN MULTIPLE DE 5

$$15^2 = 225 ; 25^2 = 625 ; 35^2 = 1225 ; 45^2 = 2025 ; 85^2 = 7225 \dots$$

1. Il existe une méthode pour calculer mentalement le carré d'un nombre entier dont le chiffre des unités est 5.

Trouve le en regardant les nombres ci dessus.

2. Tu vas justifier !

k est un entier naturel dont le nombre des dizaines est a ( a appartient à N)

Par exemple, a = 13 pour 135.

$$\begin{aligned} \text{On décompose k : } & k = a \times 10 + 5 \\ & k = 10a + 5 \end{aligned}$$

Prouve alors ce que tu as trouvé en mettant au carré !

Ton procédé fonctionne-t-il pour le produit de deux nombres entiers à 2 chiffres dont les chiffres des dizaines sont égaux et la somme des unités est 10 ?

### EXERCICE 28 - ORDRE ET INTERVALLES

1. Pour chaque ligne, reconstruire la phrase en utilisant **Si.....alors ....** ou **...si et seulement si ....**:

a.

$A_1$ . Il pleut .....  $A_2$ . je prends mon parapluie.

$B_1$  I milieu de [AB] .....  $B_2$ . AI=BI

$C_1$ .  $a \geq b$  .....  $C_2$ .  $a - b \geq 0$ .

$D_1$ .  $a \leq 3$  .....  $D_2$ .  $a \leq 5$ .

$E_1$ .  $AB = AC$  .....  $E_2$ . ABC est isocèle .

### EXERCICE 29 :

Pour n entier naturel, comparer les nombres suivants :

$$\frac{n+1}{n+2} ; \frac{n+6}{n+3} ; 1 ; \frac{n+7}{n+3}$$

### EXERCICE 30 :

Pour  $a \geq 0 ; b \geq 0$ , comparer les nombres :

$$\sqrt{a+b} ; \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

### EXERCICE 31 - INTERVALLES

1. Compléter à l'aide des symboles  $\in$  ;  $\notin$

a.  $\sqrt{2} \dots ]1; 3[$

b.  $\frac{2}{\sqrt{2}} \dots [\sqrt{2}; 5]$

2. Préciser l'intervalle correspondant à :

a.  $[2; 5] \cup ]-1; 7]$

b.  $[-1; \pi[ \cup ]\sqrt{2}; 5]$

c.  $[3; +\infty[ \cup ]0; 3[ \cup \{3\}$

### EXERCICE 32 - ENSEMBLE DE NOMBRES

1. Calculer:

a.

$$\frac{3}{8} \times \left(3 - \frac{1}{3}\right)$$

b.

$$\frac{1 + \frac{1}{2}}{2 - \frac{23}{7}} \times \left(3 - \frac{1}{3}\right)$$

2. Simplifier puis donner sous forme d'écriture scientifique la fraction suivante :

$$\frac{(6 \times 10^{-2})^2 \times 3^2 \times 10^{-4}}{3^3 \times 10^{12}}$$

3. Simplifier les écritures suivantes :

a.  $\sqrt{343} - 10\sqrt{112} + \sqrt{7}$

b.  $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

c.  $(1 - 2\sqrt{2})^2$

3. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre  $A =$  .

### EXERCICE 33 :

a. Indiquer la nature des nombres suivants :

$A =$

b. Simplifier l'écriture du nombre suivant :

A =

