Le raisonnement par récurrence

1.Principe de récurrence et ses axiomes :

Axiome :

Soit P(n) une propriété qui dépend d'un entier naturel n.

Si les deux conditions suivantes sont réunies :
,
• P(n) est vraie pour le rang n = 0 ;

• Si pour tout entier n, P(n) est vérifiée implique P(n+1) est vérifiée ;

Alors pour tout entier n, P(n) est vraie.

EXEMPLE :

On considère la suite U_n définie par :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + 3 \end{cases}$$
Montrons par récurrence, sur l'entier n, que :
$\forall n\in\mathbb{N},\ U_n \leq 4$
Soit la propriété de récurrence suivante :
Invalid Equation
Initialisation :

Montrons que $P(0)$ est vraie.

D'après les hypothèses, $U_0 = 1 \leq 4$

Donc $P(0)$ vraie .

Hérédité de la propriété :

Supposons qu'il existe un entier $n\in\mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie.

Montrons que $P(n+1)$ reste vraie .

Comme $P(n)$ est vraie.

alors $U_n \ \leq \ 4$

$\frac{1}{4}U_n \ \leq \ \frac{4}{4}$

$\frac{1}{4}U_n \ + \ 3 \ \leq \ 1+3$

$U_{n+1} \ \leq \ 4$

donc $P(n+1)$ est vraie .

Conclusion :

$(P(0); \forall n \in \mathbb{N}\,,\ P(n) \implies \ P(n+1))$

donc d'après le principe de récurrence :

Invalid Equation