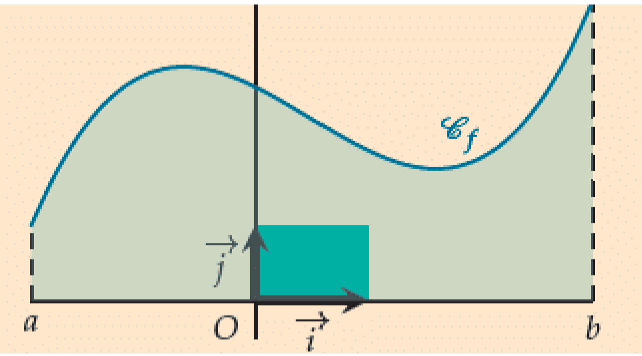
Calculs d'intégrales

Définition

Soit (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère orthogonal du plan.
On note I et J les points tels que $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$.
L'unité d'aire, que l'on note u.a., est l'aire du rectangle dont O, I et J forment trois sommets.

I. Intégrale d'une fonction continue et positive.

Définition : notion d'intégrale.



Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b] de courbe représentative C_f dans un repère orthogonal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$).
L'intégrale de a à b de f est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation x = a et x = b.
Cette aire se note $\int_a^b f(x)dx$ et on prononce « intégrale (ou somme) de a à b de f (x) dx ».

REMARQUES :

1. a et b s'appellent respectivement « borne inférieure » et « borne supérieure » de l'intégrale.

2. La valeur de l'intégrale ne dépend que de a, b et f ; la variable x n'intervenant pas dans le résultat, on dit qu'elle est muette et l'on peut donc noter indifféremment : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$

3. Pour toute fonction f continue et positive en un réel a, $\int_a^a f(x)dx = 0$ puisqu'il s'agit de l'aire d'un segment de hauteur f (a).

4. Le symbole $\int$ est dû à Leibniz, (1646-1716). Il ressemble à un « s » allongé, rappelant que l'aire peut être calculée comme la somme de petites aires élémentaires.

Théorème : dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b].
La fonction $F\ :\ x\ \mapsto\ \int_a^x f\,(t)\,dt$ est définie et dérivable sur [a ; b] et on a F′ = f .

II. Primitives d'une fonction continue.

Définition

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Une primitive de f sur I est une fonction F définie et dérivable sur I telle que F′ = f .

REMARQUES :

On dit que F est une **primitive de f** et non pas la primitive de f car une fonction admettant une primitive n'en admet pas une seule, comme le montre l'exemple ci-dessous.

EXEMPLE :

Soit $f\ :x\ \mapsto\ 2x$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors $F_1\ :x\ \mapsto\ x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
De même, $F_2 : x\ \mapsto\ x^2 + 1$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On a $F_1'\ =\ F_2'\ =\ f$.

Théorème : existence de primitives.

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Théorème : Lien entre les primitives.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Alors f admet une infinité de primitives sur I qui sont toutes de la forme
$x \mapsto F(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Propriété : condition d'unicité de la primitive.

Soient $x_0 \in I$ et y_0 deux réels donnés. Parmi toutes les primitives d'une fonction f définie et continue sur I, il en existe une seule qui vérifie la condition $F(x_0) = y_0$.

REMARQUE :

Pour tout $x_0 \in I$ et $F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ est donc la primitive de f sur I s'annulant en x_0.

En effet, F est bien une primitive de f sur I et c'est la seule vérifiant la condition $F(x_0) = 0$.

Propriété : calcul pratique d'une intégrale.

Soit f une fonction continue et positive sur [a ; b] et F une primitive de f sur [a ; b]. Alors :
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

EXEMPLE :

On souhaite calculer $\int_0^1 x^2 dx$. Pour cela, posons $f : x \mapsto x^2$, définie sur [0 ; 1].
En remarquant que $F : x \mapsto \frac{x^3}{3}$ est une primitive de f sur [0 ; 1], on obtient :
$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$

Propriété : primitives des fonctions usuelles.

Fonction f définie par	Une primitive F définie par	Domaine de validité
$f(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$	$F(x) = kx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$	$F(x) = -\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Propriété : primitives et opérations sur les fonctions.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive	Domaine de validité
$f = u' + v'$	$F = u + v$	$x \in I$
$f = u'u^n, n \in \mathbb{N}$	$F = \dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	$x \in I$
$f = \dfrac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$	$F = -\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{u^{n-1}}$	$x \in I$ tel que $u(x) \neq 0$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$F = \ln(u)$	$x \in I$ tel que $u(x) > 0$
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$	$x \in I$ tel que $u(x) > 0$
$f = u'e^u$	$F = e^u$	$x \in I$

III. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque.

On a vu au paragraphe précédent que, pour une fonction continue et positive sur [a ; b] :
$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur [a ; b].

On étend cette propriété aux fonctions de signe quelconque, continues sur un intervalle [a ; b] avec la définition ci-dessous.

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b] et de signe quelconque et F une primitive de f sur [a ; b]. On pose : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

EXEMPLE :

On souhaite calculer $\int_{-1}^{2} (x^2 - 2)\,dx$. Pour cela, on pose $f : x \mapsto x^2 - 2$ définie sur I = [−1 ; 2].

Une primitive de f sur I est $F : x \mapsto \frac{x^3}{3} - 2x$ et on obtient alors :

$$\int_{-1}^{2} (x^2 - 2)\,dx = (\frac{2^3}{3} - 2 \times 2) - (\frac{(-1)^3}{3} - 2 \times (-1)) = -3.$$

Propriété : linéarité de l'intégrale.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a ; b] et l un réel.Alors :

$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

$$\int_a^b (\alpha\, f)(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt$$

Propriété : fonction négative et aire.

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle [a ; b]. Alors, l'aire du domaine situé entre C_f et l'axe des abscisses, sur l'intervalle [a ; b] est $-\int_a^b f(x)dx$.

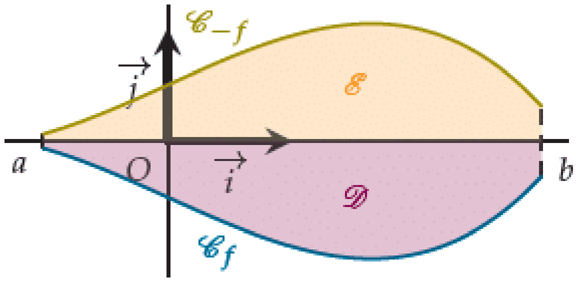
PREUVE :

On note D le domaine situé entre Cf et l'axe des abscisses, sur [a ; b].

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire de D est égale à l'aire du domaine E , compris entre la courbe de $-f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle [a; b].

Ainsi :

$$A_D = A_E = \int_a^b (-f)(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$



Propriété : relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c, trois réels appartenant à I. Alors :
$\displaystyle\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$

PREUVE :

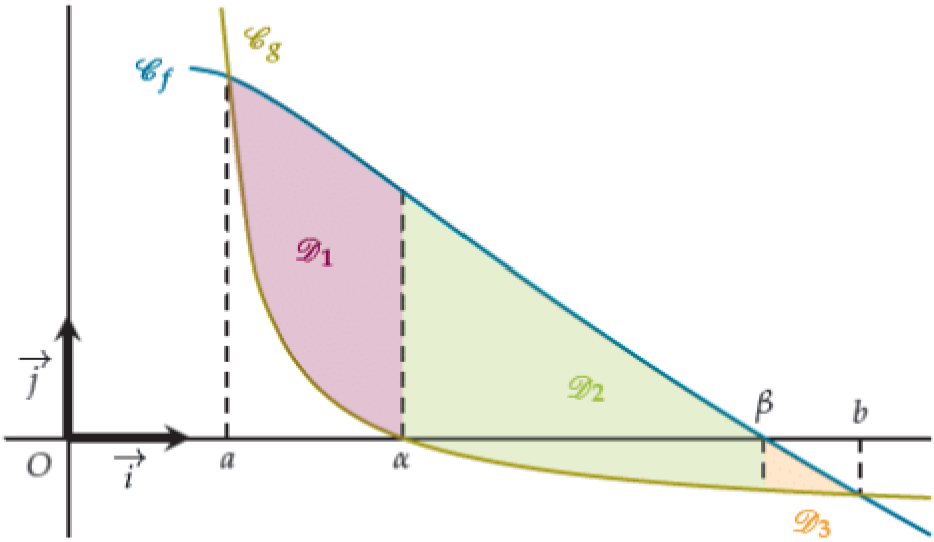
f étant une fonction continue sur I, elle admet une primitive sur cet intervalle.
Notons F une primitive de f sur I.

- Pour démontrer l'égalité annoncée, calculons séparément chaque membre de l'égalité :
  $\displaystyle\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a)$ par définition.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a)$ toujours par définition
  puis en réduisant l'expression obtenue.

L'égalité annoncée est donc vraie.

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a ; b] telles que f > g. Alors, l'aire du domaine compris entre les courbes Cf et Cg sur [a ; b] est donnée par $\int_a^b (f - g)(x)\,dx$.



Propriété : intégrales et inégalités.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a ; b]. Alors :

- Si f est positive sur [a ; b], alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Définition : valeur moyenne.

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b].La valeur moyenne de f sur [a ; b] est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

REMARQUE :

Dans le cas où f est positive et continue sur [a ; b], la valeur moyenne de f entre a et b représente la hauteur du rectangle construit sur l'intervalle [a ; b].
L'aire du rectangle ABCD est égale, en u.a., à l'aire du domaine coloré car d'après la définition :

$$(b-a)\mu = \int_a^b f(t)dt$$