Les systèmes d'équations

0. Introduction :

PROBLÈME :

Je dispose de deux récipients A et B dont la contenance est exprimée en centilitre (cL).

Si je prends un volume de A et trois volumes de B, j'obtiens 10Cl.

Si je prends trois volumes de A et cinq volumes de B, j'obtiens 18 cL.

Quelle est la contenance des récipients A et B?

Nous remarquons que dans ce problème, il y a deux inconnues. Notons

x : la contenance du récipient A ;

et

y:la contenance du récipient B.

Si nous traduisons la première information, nous obtenons : x+3y=10 (E1).

Si nous traduisons la seconde information, nous obtenons : 3x+5y=18 (E2) .

Ainsi, nous obtenons **deux équations du premier degré à deux inconnues** qui sont dépendantes l'une de l autre.

L'ensemble de ces deux équations (E1) et (E2) est appelé **système, noté (S) de deux équations à deux inconnues du premier degré**.

Premier degré car l'exposant le plus élevé des inconnues est 1.

NOTATION :

$$(S)\begin{cases} x+3y=10(E_1) \\ 3x+5y=18(E_2) \end{cases}$$

I. METHODE D'ELIMINATION PAR SUBSTITUTION :

Sur l'exemple :	Cas général :
1) Dans cet exemple, le coefficient de x dans la première équation est 1. On choisit pour plus de facilité d'edxprimer x en fonction de y dans cette équation : x = -3y + 10	1) Exprimer, dans l'une des deux équations, une inconnue en fonction de l'autre. Parmi les quatres possibilités, on choisit celle qui rend les calculs plus simples
2) On remplace x par -3y + 10 dans la seconde équation. On écrit le nouveau système obtenu : $\begin{cases} x = -3y + 10 \\ 3(-3y + 10) + 5y = 18 \end{cases}$	2) Réécrire le système en remplaçant dans l'autre équation l'inconnue choisie, par l'expression obtenue à l'étape 1. On obtient ainsi un système dont l'une des deux équations est une équation du premier degré à une inconnue. Il a les mêmes solutions que le système de départ
3) On résout la seconde équation à une inconnue y : $\begin{cases} x = -3y + 10 \\ -4y + 30 = 18 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = -3y + 10 \\ y = 3 \end{cases}$ soit	3) Résoudre l'équation du premier degré à une inconnue pour trouver la valeur de cette inconnue.
4) On reporte la valeur de y dans la première équation pour calculer x : $\begin{cases} x = -3 \times 3 + 10 \\ y = 3 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ soit	4) Remplacer cette inconnue par sa valeur trouvée à l'étape 3, dans l'équation à deux inconnue et calculer la valeur de l'autre inconnue
>5) La solution du système : $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$ est le le couple $(1\ ;\ 3)$	5) Conclure : la solution du système donné au départ est le couple de nombres trouvés.

II. METHODE D'ELIMINATION PAR COMBINAISON :

Sur l'exemple :	Cas général :

1) Dans cet exemple, le coefficient de x dans la première équation est 1. On choisit pour plus de facilité d'éliminer x, on multiplie par -3 les deux membres de la première équation : -3x - 9y = -30.	1) Choisir l'inconnue que l'on veut éliminer. Multiplier les deux membres des deux équations par des nombres choisis de façon à obtenir des coefficients de cette inconnue opposés dans chacune des deux équations.
2) On additionne membre à membre les deux équations du système . $\begin{cases} -3x - 9y = -30 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$ On obtient l'équation -4y = -12. On écrit le nouveau système : $\begin{cases} -4y = -12 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$.	2) Ecrire le système dont les deux équations ont des coefficients opposés pour l'inconnue à éliminer et additionner membre à membre les deux équations de ce système. Ecrire un nouveau système, avec cette équation et l'une des deux équations de départ. On obtient ainsi un système dont l'une des équations est une équation du premier degré à une inconnue. Il a les mêmes solutions que le système de départ.
3) On résout la première équation à une inconnue y : $\begin{cases} y = 3 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$	3) Résoudre l'équation du premier degré à une inconnue pour trouver la valeur de cette inconnue.
4) On reporte la valeur de y dans la première équation pour calculer x : $\begin{cases} y = 3 \\ 3x + 5 \times 3 = 18 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$	4) Remplacer cette inconnue par sa valeur trouvée à l'étape 3, dans l'équation à deux inconnue et calculer la valeur de l'autre inconnue.
5) La solution du système : $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$ est le couple $(1\ ;\ 3)$	5) Conclure : la solution du système donné au départ est le couple de nombres trouvés.

III. Vérification et conclusion du problème.

On remplace les valeurs trouvées de x et y dans les équations (E1) et (E2) du système (S). Puis on vérifie si les égalités sont établies et on conclue par une phrase.

$$(S)\begin{cases} x + 3y = 1 + 3 \times 3 = 10 \\ 3x + 5y = 3 \times 1 + 5 \times 3 = 18 \end{cases}$$

CONLUSION:

Les contenances des récipients que je possédais sont 1 cL pour le contenant A et 3 cL pour le contenant B.