Le théorème de Gauss

I. Enoncé du théorème de Gauss.

Théorème :

Soient a,b et c sont des entiers **strictement positifs** tels que **a divise le produit bc** et **a est premier avec b**.

Alors a divise c.

Autrement dit : si un entier naturel divise un produit de deux facteurs et s'il est premier avec l'un d'eux, il divise l'autre.

DÉMONSTRATION :

Puisque a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bezout, il existe des entiers relatifs

u et v tels que $au + bv = 1$.

Donc $(ac)u + (bc)v = c$. Or a divise ac et bc donc a divise $acu + bcv$.

Il en résulte que a divise c.

II. Corollaire du théorème.

Si un entier n est divisible par deux entiers naturels a et b premiers entre eux, il est divisible par leur produit.

DÉMONSTRATION :

Par hypothèse, $n = aq$ et $n = bq'$ avec q et q' deux entiers naturels.

Donc $aq = bq'$.

Puisque b divise aq et que b est premier avec a, il divise q.

Donc $q = bp$ et $n = abp$.

On conclut que le produit ab divise n.

Généralisation :

Si n est divisible par plusieurs entiers premiers entre eux deux à deux, n est divisible par leur produit.

EXEMPLE :
Si un nombre est divisible par 3,7 et 11, alors il est divisible par 231 car 3,7 et 11 sont des entiers premiers entre eux deux à deux.

APPLICATION :
Pour prouver, par exemple, qu'un nombre est divisible par 6, il suffit de prouver qu'il est divisible par 2 et 3 car 2 et 3 sont premiers entre eux.

Ainsi pour tout entier naturel n>1, (n-1)n(n+1) est divisible par 6.

En effet, n(n+1) est le produit de deux entiers consécutifs : il est donc divisible par 2.

et (n-1)n(n+1) est le produit de trois entiers consécutifs : il est donc divisible par 3.

Il en résulte que (n-1)n(n+1) est divisible par 6.

ATTENTION :


L'hypothèses *a et b premiers entre eux* est une hypothèse essentielle.

Si on démontre qu'un nombre est divisible par 4 et 6, on peut seulement conclure qu'il est divisible par 12, et non pas par 24.Ainsi 36 est divisible par 4 et 6, mais n'est pas divisible par 24.