Le produit scalaire dans le plan

I. Différentes expressions du produit scalaire :

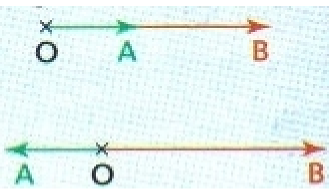
1. Vecteurs colinéaires :

Définition :

soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires non nuls, tels que

$\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{v} = \vec{OB}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens : $\vec{u}.\vec{v} = OA \times OB$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de sens contraires : $\vec{u}.\vec{v} = OA \times OB$.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
- $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||$ est le carré scalaire du vecteur $\vec{u}$



2. Vecteurs quelconques :

Propriété 1 :

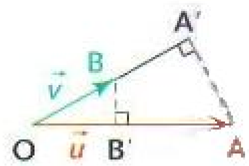
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que

$\vec{u} = O\vec{A}$ et $\vec{v} = O\vec{B}$.

Alors :

Invalid Equation .

A' et B' sont respectivement les projetés orthogonaux de A sur (OB) et de B sur (OA).



3. Propriétés :

Propriété 2 :

Soient (x;y) et (x';y') les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un **repère orthonormé** quelconque.

Invalid Equation .

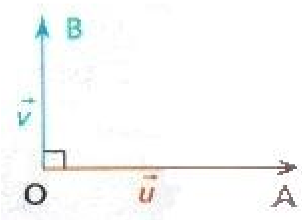
II. Produit scalaire et orthogonalité :

Définition :

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux signifie que :

• Soit $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$;

• Soit (OA)$\perp$(OB), avec $\vec{u} = O\vec{A}$ et $\vec{v} = O\vec{B}$ non nuls.



2. Propriété :

Propriété :

Invalid Equation .

III. Propriétés du produit scalaire :

Propriétés :

Propriétés :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs et k un nombre réel.

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (symétrie).
- $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$ (linéarité)
- $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$ (linéarité)
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ (linéarité)
- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ (identité remarquable)
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ (identité remarquable)
- $(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$ (identité remarquable)

IV. Applications du produit scalaire :

1. Produit scalaire et cosinus :

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times \; ||\vec{v}|| \times \; cos(\vec{u}, \vec{v})$

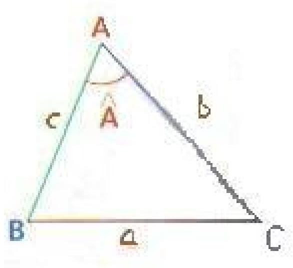
2. Théorème d'Al-Kashi :

Théorème :

Soit ABC un triangle tel que AB=c, AC=b et BC=a.

On a :

1. $a^2 \; = b^2 + c^2 - 2bc \times \; cos(\widehat{A})$
2. $b^2 \; = a^2 + c^2 - 2ac \times \; cos(\widehat{B})$
3. $c^2 \; = a^2 + b^2 - 2ab \times \; cos(\widehat{C}$



3. Théorème de la médiane :

Théorème :

Soient A et B deux points distincts et I le milieu du segment [AB] .

Pour tout point M, :

Invalid Equation