



# Fonction continue

## I. Notion de continuité d'une fonction.

Propriétés : (admise)

1. Les **fonctions usuelles** (affines, carré, inverse, racine carrée, valeur absolue) sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

2. Toute fonction construite algébriquement (par somme, produit, inverse ou composée) à partir de fonctions usuelles est **continue sur tout intervalle** de son **ensemble de définition**.

3. On convient qu'une flèche oblique dans un tableau de variation traduit la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

4. Une fonction dérivable sur un intervalle est **continue** sur cet intervalle.

### REMARQUE :



Attention, la réciproque de cette dernière propriété est fausse.  
Par exemple, la fonction valeur absolue  $x \mapsto |x|$  est continue en 0 mais non dérivable en 0.

Méthode : interpréter graphiquement la continuité d'une fonction.

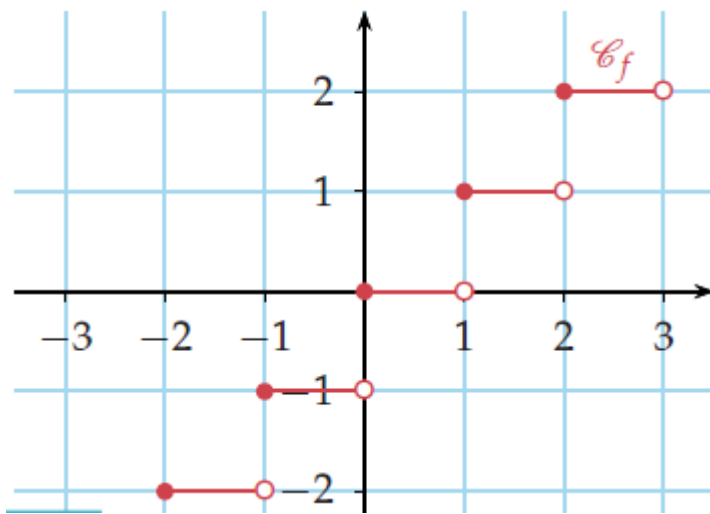
Par convention, une fonction est continue là où elle est tracée. S'il n'y a pas continuité en  $x_0$  :

1. le symbole bille rouge indique le point de la courbe de coordonnées  $(x_0 ; f(x_0))$  ;
2. le symbole bille rose vide indique un point qui n'appartient pas à la courbe mais dont l'ordonnée est égale à la limite à gauche ou à droite en  $x_0$ .

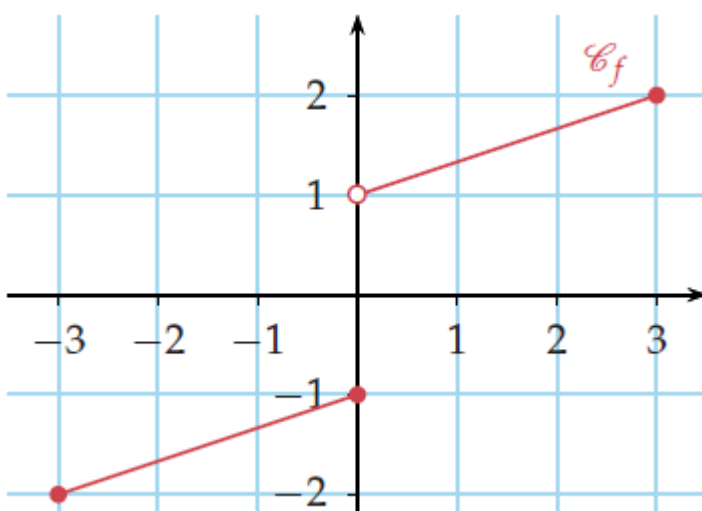
### EXERCICE D'APPLICATION :

Déterminer graphiquement les intervalles sur lesquels  $f$  est continue.

1) Soit la fonction partie entière  $f : x \mapsto |x|$ .



2) Soit la fonction  $f$  représentée ci-dessous.



## II. Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème : cas général.

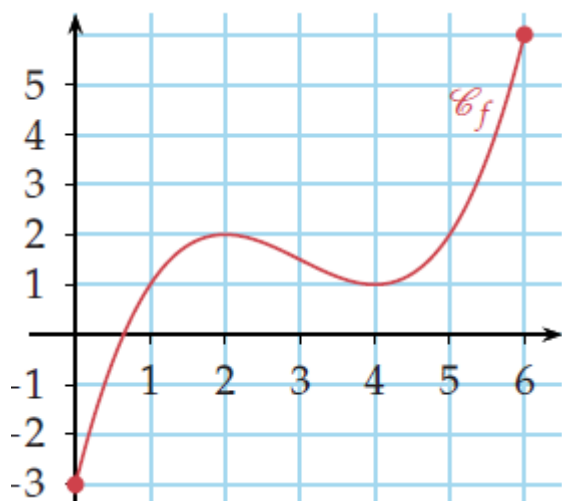
Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  contenant deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$ .  
Si  $f$  est continue sur  $[a ; b]$ , alors pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel  $c$  appartenant à  $[a ; b]$  tel que  $f(c) = k$ .

#### REMARQUE :

$f$  prend au moins une fois toute valeur intermédiaire entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .  
Autrement dit, l'équation  $f(x) = k$  a au moins une solution dans  $[a ; b]$  et, sur  $[a ; b]$ , la courbe représentative de  $f$  coupe la droite d'équation  $y = k$  en un point au moins.

#### EXEMPLE :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; 6]$  par  $f(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{9}{4}x^2 + 6x - 3$ .



On dresse le tableau de variation de  $f$ .  $f$  admet pour minimum  $-3$  et pour maximum  $6$ .  
 $f$  est continue sur  $[0 ; 6]$ .

$x$	0	2	4	6
$f$	-3	2	1	6

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $f$  prend toutes les valeurs de  $[-3 ; 6]$ . En particulier, l'équation  $f(x) = 0$  a au moins une solution dans  $[0 ; 6]$ .

#### Théorème : cas d'une fonction strictement monotone.

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  contenant deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$ .

Si  $f$  est continue et strictement monotone sur  $[a ; b]$ , alors pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe un unique réel  $c$  appartenant à  $[a ; b]$  tel que  $f(c) = k$ .