Le barycentre

I. Rappels :

1)Vecteurs du plan :

Les points A et B étant distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- sa direction (celle de la droite (AB))
- son sens (de A vers B)
- sa longueur ou sa norme (AB ou $\|\overrightarrow{AB}\|$)

Vecteurs égaux :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction, même sens et même norme, ou encore que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.

Si A et B sont confondus, $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul noté $\vec{0}$. Sa norme est 0.

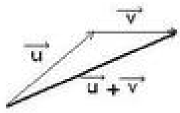
Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout point O, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

2)Addition vectorielle :

a) **Relation de Chasles :**

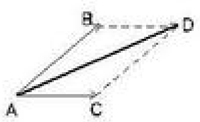
b)

Quels que soient les points A, B et C, on a :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

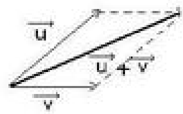


c) **Règle du parallélogramme :**

d)



Les points A, B et C étant donnés, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$
$\Leftrightarrow$
ABDC est un parallélogramme.



3)Produit d'un vecteur par un réel :

$\vec{u}$ un vecteur et k un réel. Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k, est le vecteur noté k $\vec{u}$ tel que :

- si k = 0 ou $\vec{u} = \vec{0}$, k $\vec{u} = \vec{0}$
- dans les autres cas, k $\vec{u}$ est
  - de même direction que $\vec{u}$
  - de même sens que $\vec{u}$ si k > 0 et de sens contraire si k < 0.
  - De norme égale à $|k|\times\|\vec{u}\|$.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et pour tous réel k et k', on a :

$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
$(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
$k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u} = kk'\vec{u}$

4)Vecteurs colinéaires :

Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires signifie qu'il existe un réel k non nul, tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarques :

- deux vecteurs colinéaires ont la même direction.
- par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

5)Repère et coordonnées :

Dire que le point M a pour coordonnées (x ; y) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ équivaut à dire que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
On note : M (x ; y), x est l'abscisse, y est l'ordonnée.

Dire que le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées (x ; y) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, signifie que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

On note : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ des vecteurs

$\vec{u} = \vec{v} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Si A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_A ; y_A)$ et $(x_B ; y_B)$ alors :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ $\qquad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

II. Barycentre de deux points :

1)Définition :

Soient A et B deux points et a et b deux réels dont **la somme n'est pas nulle.**
Alors il existe un unique point G du plan tel que a $\overrightarrow{GA}$ + b $\overrightarrow{GB}$ = $\vec{0}$.
Ce point G est le barycentre des points A et B affectés des coefficients a et b.
On dit que G est le barycentre du système de points (A ; a) et (B ; b).

2)Position du barycentre :

- $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$; les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires ; Le point G appartient à la droite (AB).
- Si a = b, on dit que G est l'isobarycentre de A et B, $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, G est le milieu de [AB].

3)Propriétés :

- Si G est le barycentre de (A ; a) et (B ; b), alors pour tout réel $k \neq 0$, alors G est le barycentre de (A ; ka) et (B ; kb).
  Dem :

- Si G est le barycentre de (A ; a) et (B ; b), avec $a + b \neq 0$, alors pour tout point M du plan, on a : a $\overrightarrow{MA}$ +b $\overrightarrow{MB}$ = (a + b) $\overrightarrow{MG}$.
  Dem : a $\overrightarrow{MA}$ + b $\overrightarrow{MB}$ = a ($\overrightarrow{MG}$ + $\overrightarrow{GA}$) + b ($\overrightarrow{MG}$ + $\overrightarrow{GB}$) = (a + b) $\overrightarrow{MG}$ + a $\overrightarrow{GA}$ + b $\overrightarrow{GB}$.
  Or si G est le barycentre de (A ; a) et (B ; b), a $\overrightarrow{GA}$ + b $\overrightarrow{GB}$ = $\vec{0}$, d'où l'égalité :
  a $\overrightarrow{MA}$ + b $\overrightarrow{MB}$ = (a + b) $\overrightarrow{MG}$.

4)Coordonnées du barycentre :

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ alors les coordonnées du barycentre G du système (A ; a) et (B ; b) sont $x_G = \dfrac{ax_A + bx_B}{a+b}$ et $y_G = \dfrac{ay_A + by_B}{a+b}$.

Preuve :
G barycentre de (A ; a) et (B ; b),
alors pour tout M du plan on a : a $\overrightarrow{MA}$ + b $\overrightarrow{MB}$ = (a + b) $\overrightarrow{MG}$
Si M = O, on obtient (a + b) $\overrightarrow{OG}$ = a $\overrightarrow{OA}$ + b $\overrightarrow{OB}$
Et $\overrightarrow{OG} = \dfrac{a}{a+b}\overrightarrow{OA} + \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{OB}$.
......

Exemple :
G barycentre de (A ; 1) et (B ; -2).
A (2 ; 4) et B(5 ; -1)
...... G (8 ; -6)

III. Barycentre de 3 points pondérés :

1)Définition :

Soient A, B et C trois points distincts et a, b et c trois réels dont la somme n'est pas nulle.
Alors il existe un unique point G du plan tel que a $\overrightarrow{GA}$ + b $\overrightarrow{GB}$ + c $\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
G est le barycentre des points pondérés (A ; a), (B ; b) et (C ; c).

Exemple :

Soit G le barycentre de (A ; 1), (B ; 2) et (C ; 3).
G existe car $1+2+3 = 6 \neq 0$.

$1\,\overrightarrow{GA} + 2\,\overrightarrow{GB} + 3\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$1\,\overrightarrow{GA} + 2\,\overrightarrow{GA} + 2\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{GA} + 3\,\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$6\,\overrightarrow{GA} + 2\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$6\,\overrightarrow{GA} = -2\,\overrightarrow{AB} - 3\,\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Conséquences :

- Si A, B et C ne sont pas alignés le point G appartient au plan (ABC).
- Le barycentre ne change pas si on multiplie les 3 coefficients par un réel $k \neq 0$.
- Si a = b = c, G est le barycentre de (A ; 1), (B ; 1) et (C ; 1), G est l'isobarycentre de A, B et C. G est aussi le centre de gravité du triangle ABC.

2)Propriétés :

Si G est le barycentre de (A ; a), (B ; b) et (C ; c), avec $a + b + c \neq 0$, alors pour tout point M du plan, on a : a $\overrightarrow{MA}$ + b $\overrightarrow{MB}$ + c $\overrightarrow{MC}$ = (a + b + c) $\overrightarrow{MG}$.

Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ si $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$ et $C(x_C ; y_C)$ alors les coordonnées du barycentre G du système (A ; a), (B ; b) et (C ; c) sont $x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}$ et $y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}$.

3) Associativité :

Si G est le barycentre de (A ; a), (B ; b) et (C ; c), avec $a + b + c \neq 0$ et si H est le barycentre de (A ; a) et (B ; b) avec $a + b \neq 0$, alors G est le barycentre de (H ; a+b) et (C ; c).

Preuve :

De a $\overrightarrow{GA}$ + b $\overrightarrow{GB}$ + c $\overrightarrow{GC} = \vec{0}$., on déduit (a+b) $\overrightarrow{GH}$ + a $\overrightarrow{HA}$ + b $\overrightarrow{HB}$ + c $\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
Or H est le barycentre de (A ; a) et (B ; b)
donc a $\overrightarrow{HA}$ + b $\overrightarrow{HB} = \vec{0}$ et (a+b) $\overrightarrow{GH}$ + c $\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
Donc G est le barycentre de (H ; a+b) et (C ; c).

Exemple :
Construire G le barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; 2) et (C ; 3).

On appelle H le barycentre de (A ; 1) et (B ; 2).
$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
G est le barycentre de (H ; 3) et (C ; 3).
G est le milieu de [HC].