Généralités sur les fonctions et fonctions usuelles

I. Fonctions affines

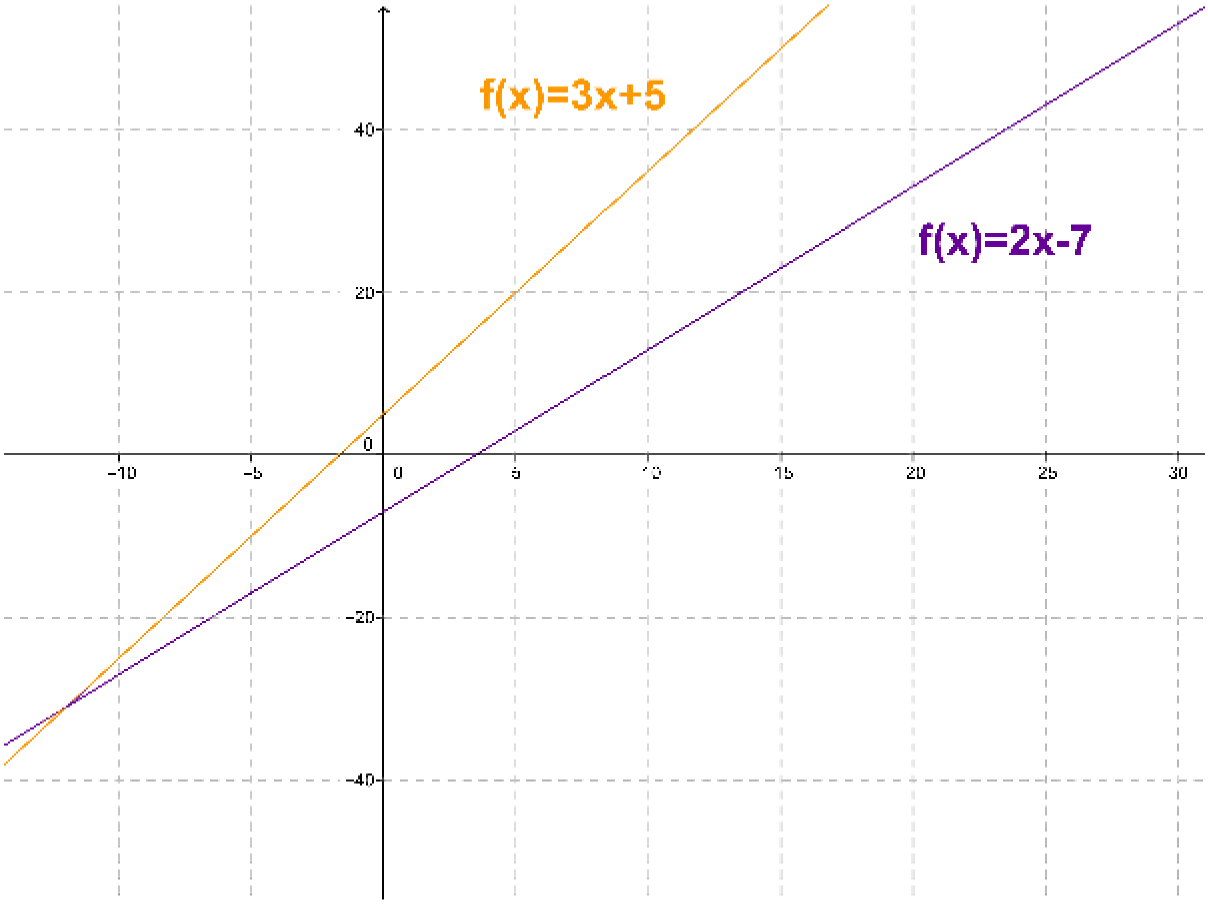
1. Définition

Définition :

Soient a et b deux réels donnés.Lorsque à chaque réel x, on associe le réel ax + b, on définit une fonction affine f et on note $f : x \mapsto ax + b$ ou la fonction f définie par $f(x) = ax + b$.

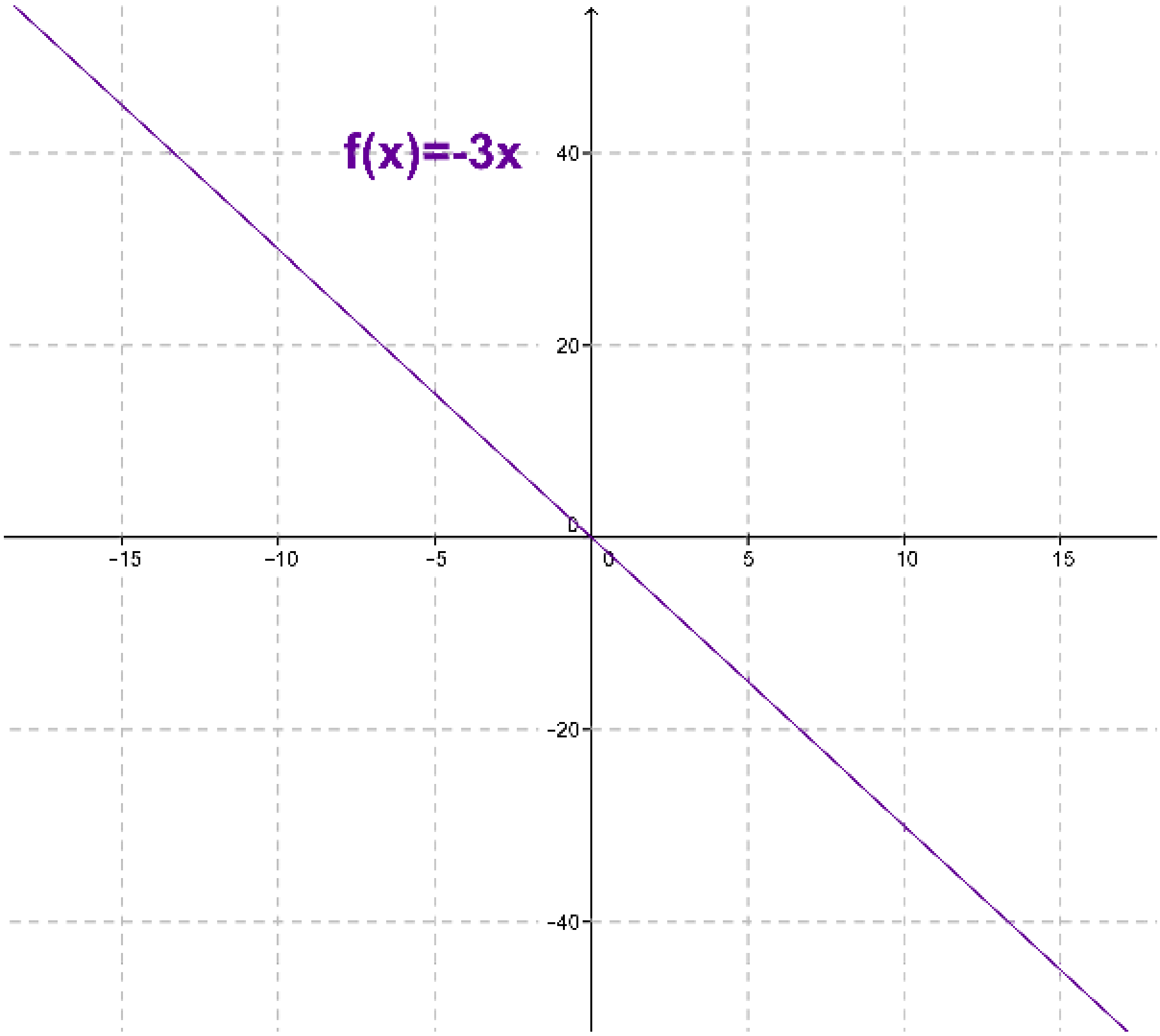
EXEMPLE :

Les fonctions f et g respectivement définies sur $\mathbb{R}$par f(x) = 3x + 5 et g(x) = 2x – 7 sont des fonctions affines.

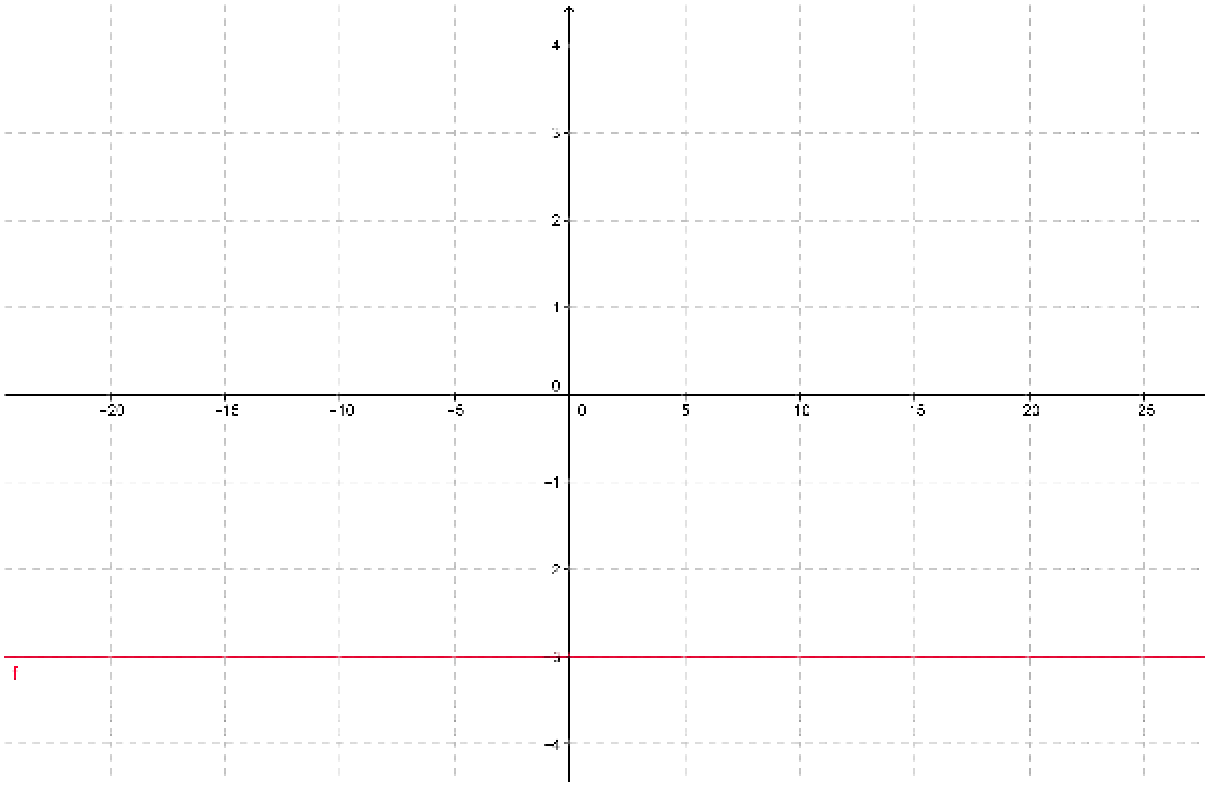


REMARQUE :

· Lorsque b = 0, la fonction est dite linéaire, comme par exemple, $f(x) = -3x$.



· Lorsque a = 0, la fonction est dite constante, comme par exemple, f(x) = 3, pour tout réel x.



2.Représentation graphique d'une fonction affine :

Définition :

Dans un repère, la représentation graphique d’une fonction

affine $f : x \mapsto ax + b$ est une droite. On dit que cette droite a pour équation y = ax + b et que a est son coefficient directeur, b son ordonnée à l’origine.

Cette droite passe par le point P(0 ; b).

Conséquences :

· Dans le cas d’une fonction linéaire $f : x \mapsto ax$, la droite d’équation y = ax passe par l’origine du repère. L’image est proportionnelle à la variable.· Dans le cas d’une fonction constante, la droite d’équation y = b est parallèle à l’axe des abscisses. L’image est constamment égale à b.

II. fonctions affines et taux de variation

Théorème :

Soit f une fonction affine définie par f(x) = ax + b.

Alors, pour tous u et v tels que $u \neq v$, $\dfrac{f(u) - f(v)}{u - v} = a$.

Ce rapport est appelé taux de variation de f entre u et v; il traduit la proportionnalité des écarts des images de la fonction par rapport aux variables.

EXERCICE :
Dans un repère, les points A et B ont pour coordonnées (-4 ; -1) et (2 ; 2).

Quelle est la fonction affine représentée par la droite (AB) ? Deux méthodes sont demandées.

III. Sens de variation d'une fonction affine

Théorème :

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine.

1. Si a > 0 alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Si a = 0 alors f est constante sur $\mathbb{R}$.
3. Si a < 0 alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION :

Soient u et v deux nombres réels tels que u < v.

f(u) – f(v) = au + b – (av + b) = a(u - v)

Si a est positif, alors a > 0 et comme u – v < 0, on déduit que f(u) – f(v) < 0 puis f(u) < f(v)

Donc f est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [.

Si a est négatif, alors a < 0 et comme u – v < 0, on déduit que f(u) – f(v) > 0 puis f(u) > f(v)

Donc f est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [.

Si a = 0 alors f(u) = b pour tout u et f est constante.

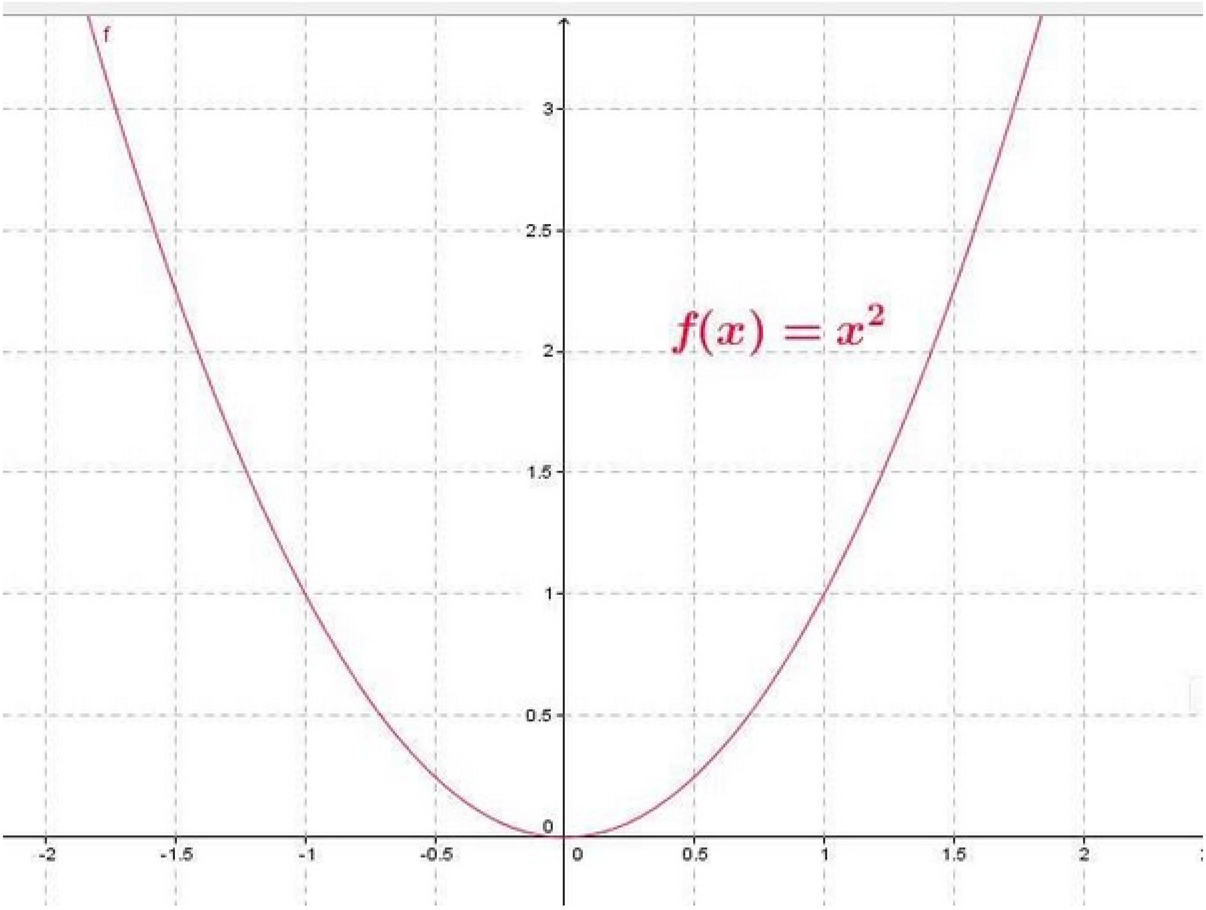
IV La fonction carrée

Définition :

Il s’agit de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = x^2.

1.Tracé point par point de la courbe représentative de f.

On peut alors tracer la courbe représentative de *f.*



La courbe représentative de f s'appelle une parabole.

2. Etude de la parité de f

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors$-x \in \mathbb{R}$.

Comparer $f(x)\, et\, f(-x)\ :\ f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

On dit que f est une fonction paire.

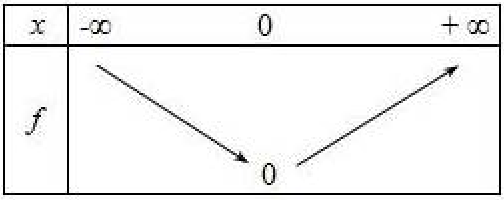
Graphiquement, cela signifie que les points $M(x; f(x))$et $M'(-x; f(-x))$ qui sont des points de la courbe représentative de f sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

La représentation graphique de f admet donc l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

3. Sens de variation de f

D'après le graphique, on peut établir le tableau de variation de f.

x	- ∞ 0 + ∞	

f		f est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [.f est strictement décroissante sur] - ∞ ; 0].

Par le calcul : Soient a et b deux nombres réels tels que a < b.

f(a) – f(b) = a² – b² = (a + b)(a – b)

Si a et b sont positifs ou nuls, alors a + b > 0 et comme a – b < 0, on déduit que f(a) – f(b) < 0

Donc f est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [.

Si a et b sont négatifs ou nuls, alors a + b < 0 et comme a – b < 0, on déduit que f(a) – f(b) > 0

Donc f est strictement décroissante sur] - ∞ ; 0].

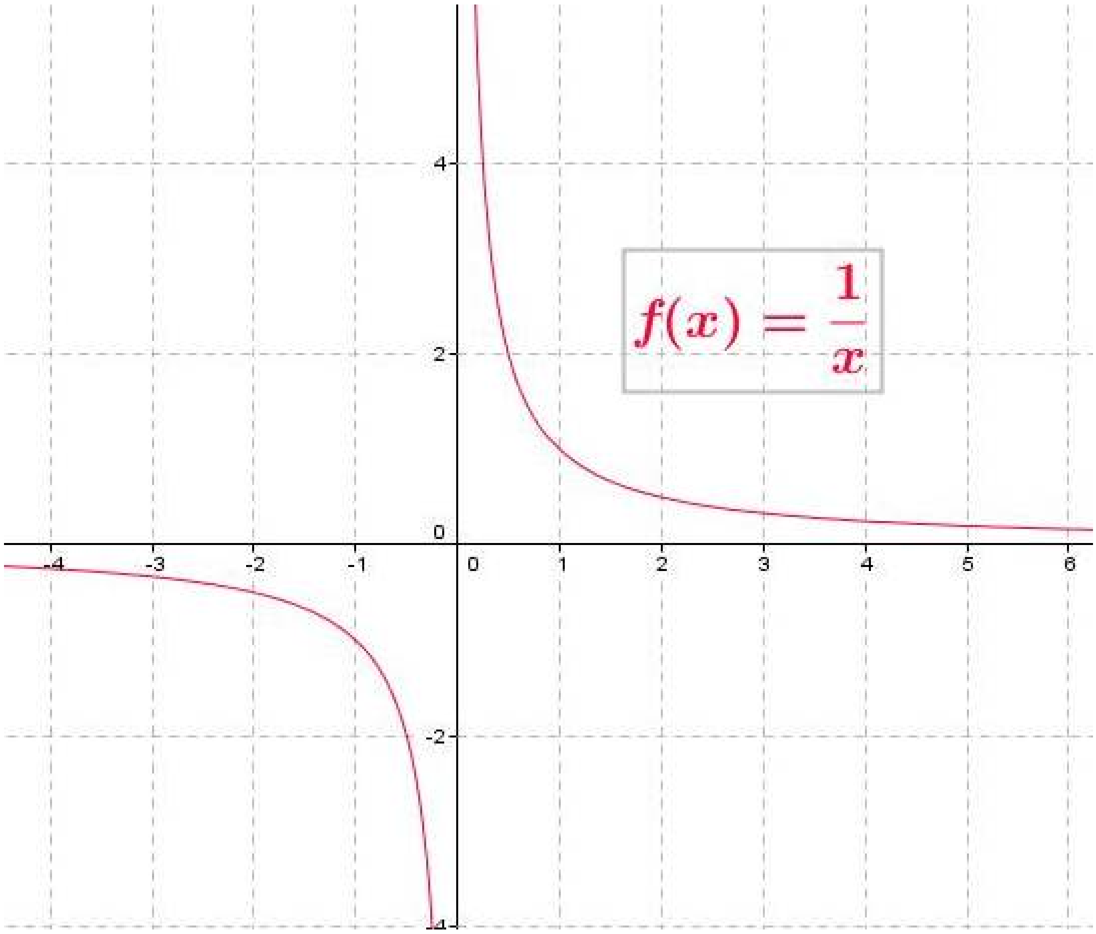
V. La fonction inverse.

Définition :

Il s'agit de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$*=] - ∞ ; 0[∪]0 ; + ∞ [par $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Tracé point par point de la courbe représentative de g.

On peut alors tracer la courbe représentative de *g.*



La courbe représentative de g s'appelle une hyperbole.

2. Etude de la parité de g.

Propriété :

Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $-x \in \mathbb{R}$.Comparer g(x) et g(-x) : $g(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -g(x)$.

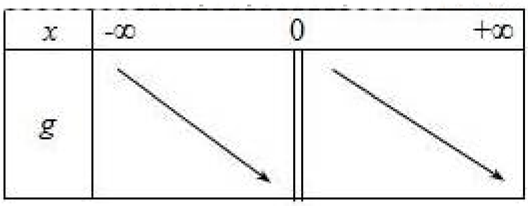
On dit que g est une fonction impaire.

Graphiquement, cela signifie que les points $M(x; g(x))$et $M'(-x; g(-x))$ qui sont des points de la courbe représentative de g sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

La représentation graphique de g admet donc l'origine du repère pour centre de symétrie.

3. Sens de variation de g.

D'après le graphique, on peut établir le tableau de variation de g.

Tableau de variation		g est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

DÉMONSTRATION :

si a et b sont deux réels non nuls tels que a < b.

$$g(a)-g(b)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$$

Si a et b sont strictement positifs, ab > 0 et comme b – a > 0, on déduit que g(a) – g(b) > 0

Donc g est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Si a et b sont strictement négatifs, ab < 0 et comme b – a > 0, on déduit que g(a) – g(b) > 0

Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$.