Nombres complexes

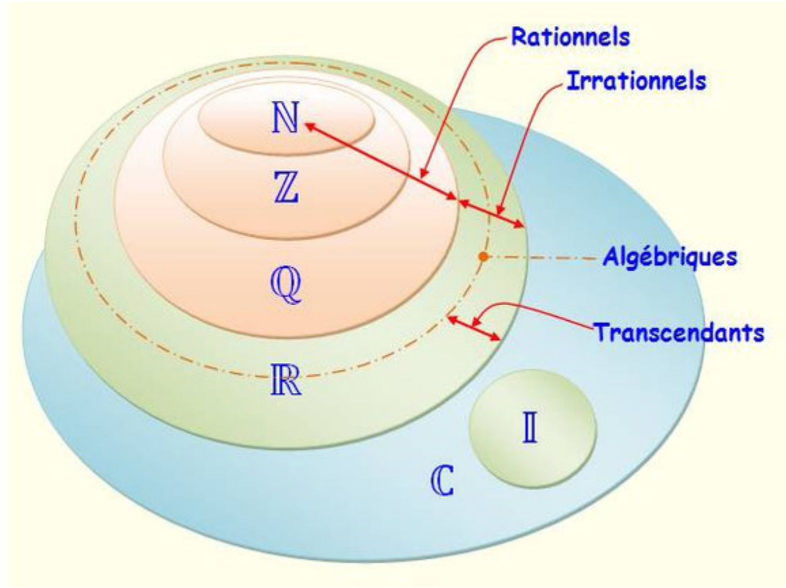
I. Notion de nombre complexe :

1. Théorème :

Théorème :

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes qui possède les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{C}$contient l'ensemble des nombres réels;
2. L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.
3. Il existe un nombre complexe noté i tel que $i^2 = -1$;
4. Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z = x + iy$ avec x et y réels.

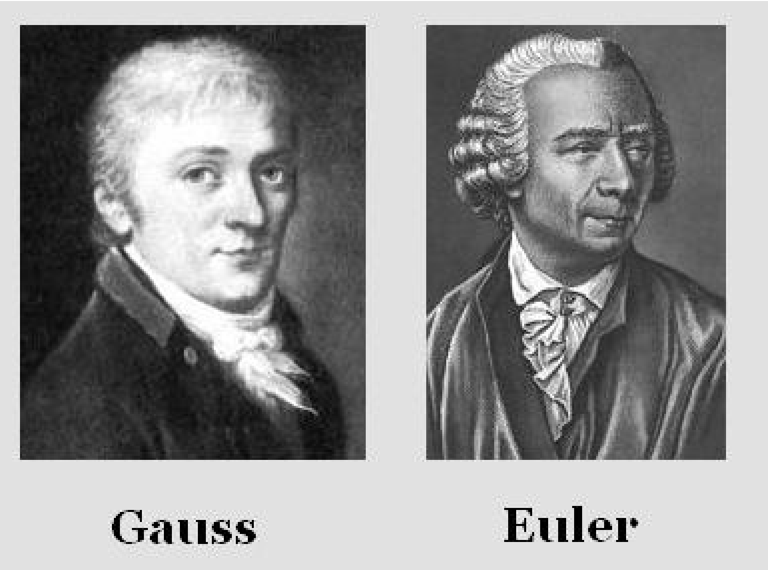


EXEMPLE :

z =3 + 5i ; z = - 3,7i ; z = - 7i sont des nombres complexes.

UN PEU D'HISTOIRE :

En 1777, Euler introduit la lettre i, Gauss en généralisera l'emploi à partir de 1830.



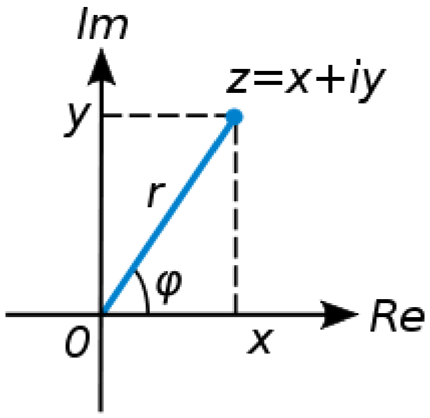
2. Définition :

Définition :

L'écriture z = x+iy avec x et y réels est appelée forme algébrique du nombre complexe z .

x est la partie réelle de z, notée Re(z).

y est la partie imaginaire de z, notée Im(z) .



EXEMPLE :

z = -3 +5i alors Re(z) = -3 et Im(z) = 5

REMARQUE :

1. Les parties réelles et imaginaires sont des nombres réels.
2. Lorsque y=0, z est un réel et lorsque x=0, z= iy (y réel) est appelé imaginaire pur.

3. Propriété 1 :

Propriété :

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

REMARQUE :

1. Cette propriété découle de l'unicité de l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique.
2. En particulier, x et y étant des réels, $x + iy = 0$ si et seulement si $x = 0$ et $y = 0$.

II. Représentation géométrique des nombres complexes.

Soit $(O, \vec{OU}, \vec{OV})$ un repère orthonormé du plan .

1. Définition.

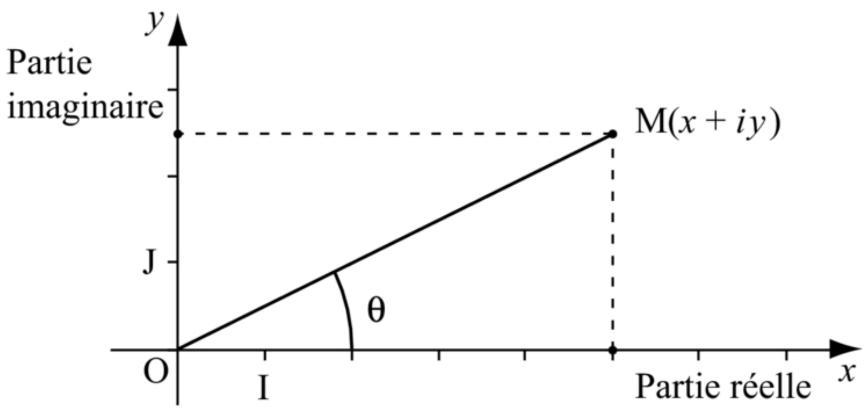
Définition :

A tout nombre complexe $z = x + iy$ avec x et y réels, on associe le point M de coordonnées $(x; y)$.

On dit que

- M est le point image de z
- OM est le vecteur image de z.
- z est l'affixe du point M on note M(z)

Le plan est alors appelé plan complexe, noté P.



REMARQUE ET VOCABULAIRE :

1. Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses appelé axe des réels .
2. Les imaginaires purs sont les affixes des points de l'axe des ordonnées appelé aussi axe des imaginaires purs.

$(\vec{OU}, \vec{OV}) = \frac{\pi}{2}$ [2pi], on dit que $(O, \vec{OU}, \vec{OV})$ est un repère direct .

III. Opérations sur les nombres complexes :

1. Addition et multiplication dans C :

1.1. Règles de calculs :

Règles :

L'addition et la multiplication des nombres réels se prolonge aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.

EXEMPLE :

$(1+3i)+(-3+2i)=(1-3)+(3i+2i)=-2+5i$

$(4+i)(-5+3i)=-20+12i-5i+3i^2=-20+7i-3=-23+7i$(car i² = - 1) .

REMARQUE :

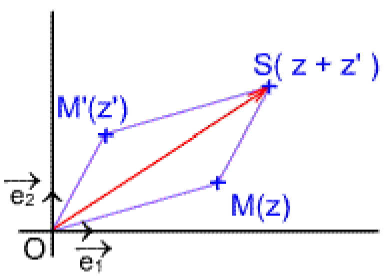
1. Les identités remarquables abordées en classe de 3° restent valables dans $\mathbb{C}$.
2. Soit z et z' éléments de C, $zz'=0$ équivaut à $z\ =\ 0$ ou $z'\ =\ 0$.

1.2. Représentations géométrique de la somme.

Propriété :

Deux nombres complexes z et z' ont pour images respectives M et M' dans le plan complexe .

$z+z'$ a pour image le point S quatrième sommet du parallélogramme OMSM' .



2. Inverse et quotient :

2.1. Propriété 2 :

Propriété :

Tout nombre complexe non nul z admet un inverse noté $\frac{1}{z}$.

Pour obtenir la forme algébrique de :

$$\frac{1}{x+iy}$$

((x,y) différent du couple (0;0)).

On multiplie numériquement le numérateur et le dénominateur par $x - iy$ car $(x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$ est un nombre réel.

L'avantage est de faire disparaître le i au dénominateur.

EXEMPLES :

Ecrire sous forme algébrique $\frac{1}{2+3i}$ et $\frac{1-5i}{2+i}$.

3. Affixe d'un vecteur, d'un barycentre :

3.1. Propriété 3 :

Propriété :

Deux points A et B du plan complexe ont pour affixes respectives z_A et z_B .

L'affixe du vecteur $\vec{AB}$ est $z_B - Z_A$.

REMARQUES :

1. Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs affixes sont égales.

2. Si k est un réel, l'affixe du vecteur $k\vec{u}$ est kz où z est l'affixe de $\vec{u}$.

3.2. Propriété 4 :

Propriété :

Deux points A et B du plan complexe ont pour affixes respectives z_A et z_B.

L'affixe du barycentre G des points pondérés (A, k) et (B, k') (avec $k + k'$ non nul) est :

$\dfrac{kz_A + k'z_B}{k + k'}$.

REMARQUE :

Ce résultat se généralise à plus de deux points.

G Bar (A;a) (B;b) (C;c) $\Leftrightarrow$ $\boxed{Z_G = \dfrac{aZ_A + bZ_B + cZ_C}{a + b + c}}$