Les limites et les asymptotes

I.Limite d’une fonction en l’infini

Dans toute cette partie, C_f désigne la courbe représentative de la fonction f dans un repère quelconque du plan.

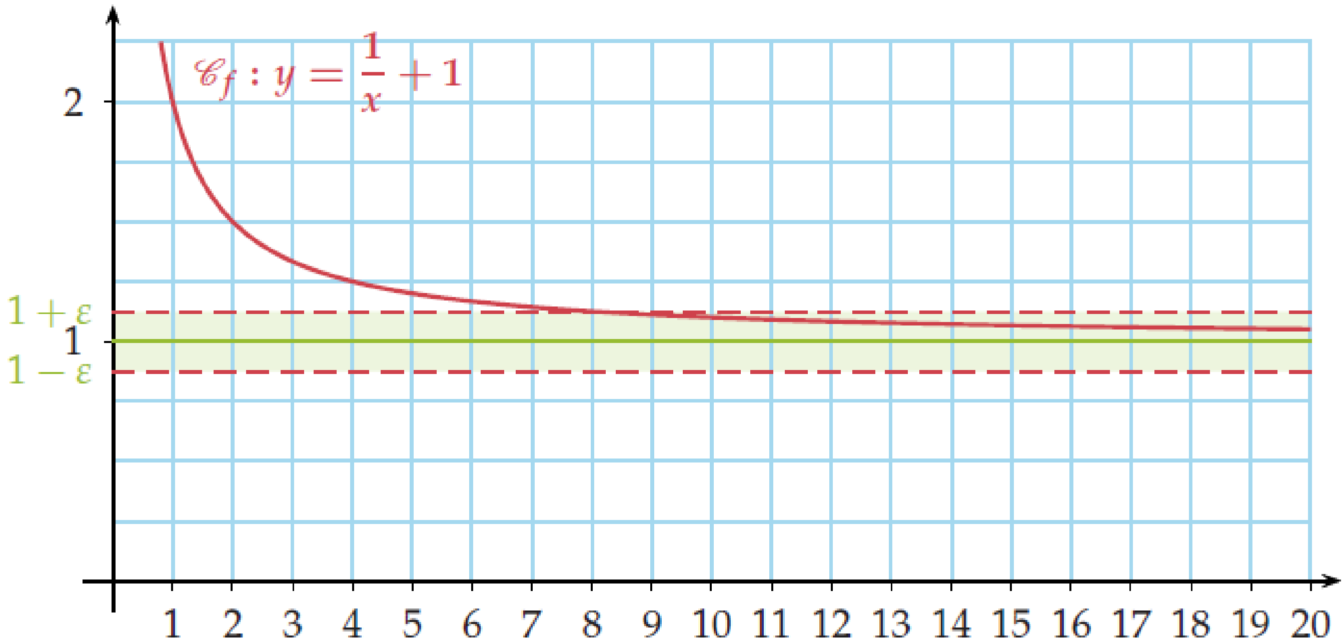
1. Limite finie en l’infini

Définition :

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]a\,;\,+\infty[$.
La fonction f a pour limite ℓ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de f (x) pour x assez grand. On note alors : $\lim_{xarrow+\infty} f(x) = l$.

EXEMPLE :

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$par $f(x) = \frac{1}{x} + 1$. On a $\lim_{xarrow+\infty} (\frac{1}{x} + 1) = 1$.
En effet, l’inverse de x se rapproche de 0 à mesure que x augmente.
Soit un intervalle ouvert I tel que $1 \in I$. Alors, f (x) sera toujours dans I pour x assez grand.
Graphiquement, aussi étroite que soit une bande parallèle à la droite d’équation y = 1 et qui la contient, il existe toujours une valeur de x au delà de laquelle C_f ne sort plus de cette bande.



Asymptote horizontale.

La droite d'équation y = ℓ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

REMARQUE :

On définit de façon analogue $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ qui caractérise une asymptote horizontale à C_f en $-\infty$ d'équation y = ℓ.

EXEMPLE :

On a vu précédemment que $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right) = 1$. On a aussi $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right) = 1$.
Donc, la droite d'équation y = 1 est asymptote horizontale à la courbe C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Propriété (admise) : limites finies des fonctions usuelles en ± ∞.

Soit n un entier naturel non nul.
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

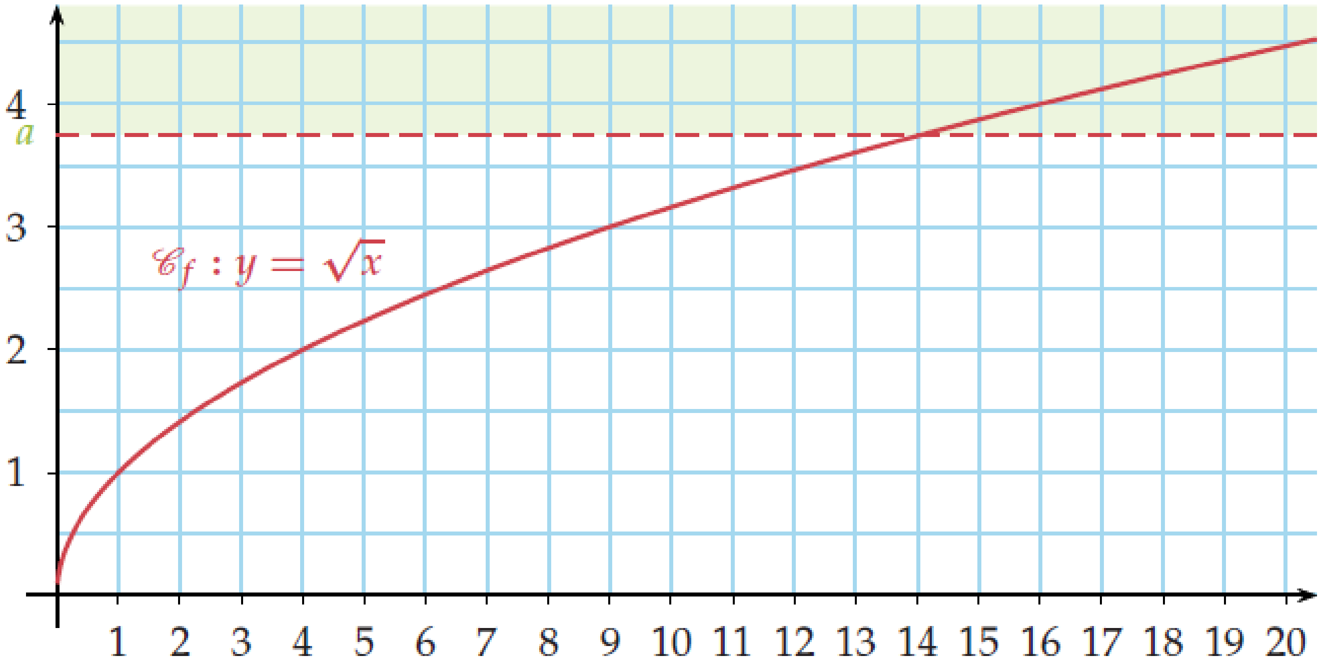
II. Limite infinie en l'infini

Définition :

La fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]a\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs de f (x) pour x assez grand. On note alors : $\lim_{xarrow+\infty} f\,(x)\;=\;+\infty$.

EXEMPLE :

Soit f la fonction racine carrée. On a $\lim_{xarrow+\infty} \sqrt{x}\;=\;+\infty$.
En effet, $\sqrt{x}$ devient aussi grand que l'on veut à mesure que x augmente.
Soit un intervalle ouvert $I\;=]a\,;\,+\infty[$. Alors, f (x) sera toujours dans I pour x assez grand.
Graphiquement, si on considère le demi-plan supérieur de frontière une droite d'équation y = a, il existe toujours une valeur de a au-delà de laquelle C_f ne sort plus de ce demi-plan.



Propriété (admise) : limites infinies des fonctions usuelles en ±∞.

Soit n un entier naturel non nul.
$\lim_{xarrow+\infty} \sqrt{x} = \lim_{xarrow+\infty} x^n = +\infty$ et
$\lim_{xarrow-\infty} x^n = 0\,(+\infty\;si\;n\,pair\,;\,-\infty\,si\;n\,impair\,)$.

2. Limite infinie en un réel

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ du type $]x_0 - \varepsilon\,;\,x_0[$ ou $]x_0\,;\,x_0+\varepsilon[$. La fonction f a pour limite $+\infty$ en x_0 si tout intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]A\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs de f (x) pour x assez proche de x_0. On note alors : $\lim\limits_{x arrow\, x_0} f\left(x\right) \;=\; +\infty$.

Définition : asymptote verticale.

La droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale à C_f si $\lim\limits_{x arrow\, x_0} f\left(x\right) \;=\; +\infty$ ou $\lim\limits_{x arrow\, x_0} f\left(x\right) \;=\; -\infty$.

Propriété (admise) : limites finies des fonctions usuelles en 0.

Soit n un entier naturel non nul.
$\lim\limits_{x arrow\, 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x arrow\, 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x arrow\, 0^+} \dfrac{1}{x^n} = 0\,(+\infty\;\;si\;\;n\,pair\,;\,-\infty\,si\;\;n\,impair\,).$

III. Opérations sur les limites.

Propriété : limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient de deux fonctions.

■ Limite d'une somme :

f	g	$f+g$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	???

■ Limite d'un produit :

f	g	fg
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
$\ell\neq 0$	∞	∞
∞	∞	∞
0	∞	???

■ Limite d'un quotient :

f	g	f/g
ℓ	$\ell'\neq 0$	ℓ/ℓ'
$\ell\neq 0$	0	∞
ℓ	∞	0
0	0	???
∞	∞	???

IV. Limite d'une fonction composée

1. Fonction composée

Définition :

Soit f une fonction définie sur E et à valeurs dans F, et soit g une fonction définie sur F.
La composée de f suivie de g est la fonction notée $g\,o\,f$ définie sur E par $g\,o\,f\,(x) = g(\,f\,(x))$.

REMARQUE :

Il ne faut pas confondre $g\,o\,f$ et $f o\,g$ qui sont, en général, différentes.

2. Théorème de composition des limites

Théorème :

Soit h la composée de la fonction f suivie de g et a, b et c trois réels ou $\pm\,\infty$.
Si $\lim\limits_{xarrow\,a} f\,(x) = b$ et $\lim\limits_{xarrow\,b} g\,(x) = c$, alors $\lim\limits_{xarrow\,a} h\,(x) = c$.

V. Limites et comparaison

1. Théorème de comparaison

Théorème :

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle $]\alpha\ ;\ +\infty[$ de $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle $]-\infty\ ;\ \beta[$ de $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle $]\alpha\ ;\ \beta[$ de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in]\alpha\ ;\ \beta[$.

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

2. Théorème d'encadrement dit « des gendarmes » ou « sandwich ».

Théorème :

Soit deux réels a et ℓ et trois fonctions f , g et h telles que, pour x > a, on a $f\,(x) \le g(x) \le h(x)$.
Si $\lim\limits_{x arrow +\infty} f\,(x) = \lim\limits_{x arrow +\infty} h\,(x) = l$, alors $\lim\limits_{x arrow +\infty} g\,(x) = l$.

REMARQUE :

On a, comme pour le théorème de comparaison précédent, deux théorèmes analogues lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers un réel x_0.

EXEMPLE :

Déterminons la limite en $-\infty$ de $f\,(x) = \dfrac{x\cos x}{x^2 + 1}$.
La limite de cos x en $-\infty$ est indéterminée. Donc celle de f (x) aussi.
Cependant pour tout x réel strictement négatif, $-1 \le \cos x \le 1$ donc $x \le x\cos x \le -x$.
Et en divisant membre à membre par $x^2 + 1 > 0$ on a :
$\dfrac{x}{x^2+1} \le \dfrac{x\cos x}{x^2+1} \le \dfrac{-x}{x^2+1}$.

Pour $x \in R^*$,$\dfrac{x}{x^2 + 1} = \dfrac{1}{x + \frac{1}{x}}$.

Or, $\lim\limits_{x arrow -\infty} x + \dfrac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x arrow -\infty} \dfrac{x}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x arrow -\infty} \dfrac{-x}{x^2 + 1} = 0$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x arrow -\infty} \dfrac{x\cos x}{x^2 + 1} = 0$.