

En este primer apéndice sobre la resolución de ecuaciones diferenciales, se presentan los pasos a seguir para obtener las expresiones que modelan el circuito RC.

0.1. Estado de almacenamiento de energía

0.1.1. Carga del condensador

Partimos de la ecuación planteada a la hora de hacer el balance energético (?). Utilizando las definiciones de capacidad del condensador y la *ley de Ohm*; y posteriormente, la definición de *intensidad de corriente*, derivamos a la siguiente expresión:

$$\varepsilon = \frac{q(t)}{C} + R \cdot I(t) = \frac{q(t)}{C} + R \frac{\partial q(t)}{\partial t}$$

Para resolver esta ecuación diferencial ordinaria, utilizaremos el método de separación de variables, así que la reescribimos de la siguiente forma:

$$\frac{\partial q(t)}{C\varepsilon - q(t)} = \frac{\partial t}{RC}$$

Partiendo de las condiciones iniciales, donde la carga del condensador es cero

$$q(0) = 0$$

, integramos entonces en ambos lados bajo estas condiciones

$$\int_0^{q(t)} \frac{\partial q(t)}{C\varepsilon - q(t)} = \int_0^t \frac{\partial t}{RC}$$

$$\left[-\ln(C\varepsilon - q(t)) \right]_0^{q(t)} = \frac{1}{RC} \left[t \right]_0^t$$

$$-\ln(C\varepsilon - q(t)) + \ln C\varepsilon = t/RC$$

Despejamos $q(t)$:

$$e^{-\ln(C\varepsilon - q(t)) + \ln(C\varepsilon)} = e^{\frac{t}{RC}}$$

$$\frac{1}{C\varepsilon - q(t)} C\varepsilon = e^{\frac{t}{RC}}$$

$$e^{\frac{t}{RC}} C\varepsilon = C\varepsilon - q(t)$$

Obteniendo finalmente

$$q(t) = C\varepsilon \left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right) \quad (1)$$

Además, es posible hallar que la carga máxima del condensador vendrá determinada por

$$q_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = C \cdot \varepsilon$$

0.1.2. Intensidad de corriente

Utilizando entonces la definición de *intensidad de corriente*

$$I(t) = \frac{\partial q(t)}{\partial t}$$

, si derivamos la expresión de carga del condensador obtenemos que

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{\frac{-t}{RC}} \quad (2)$$

0.1.3. DDP Resistencia

Para obtener la diferencia de potencial entre los bornes de la resistencia, hacemos uso de la *ley de Ohm*

$$V_R(t) = R \cdot I(t) \quad (3)$$

, que usando la expresión resultante en 0.1.2 obtenemos

$$V_R(t) = R \cdot e^{\frac{-t}{RC}} \quad (4)$$

0.1.4. DDP Condensador

Por otro lado, la diferencia de potencial entre los terminales del condensador hacemos uso de la definición de capacidad del mismo

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} \quad (5)$$

, así que usando la expresión obtenida en 0.1.1 obtenemos

$$V_C(t) = \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (6)$$

0.2. Estado de disipación de energía

0.2.1. Carga del condensador

Partimos de la ecuación planteada a la hora de hacer el balance energético (??). Utilizando las definiciones de capacidad de condensador y la *ley de Ohm*; y posteriormente, la definición de *intensidad de corriente*, obtenemos que:

$$0 = \frac{q(t)}{C} + R \frac{\partial q(t)}{\partial t}$$

Para resolver esta ecuación diferencial, utilizaremos el método de separación de variables, así que la reescribimos de la siguiente manera:

$$\frac{-\partial t}{RC} = \frac{\partial q(t)}{q(t)}$$

Si partimos de un condensador completamente cargado, donde la carga en el instante inicial se corresponde a

$$q(0) = q_{max} = C \cdot \varepsilon$$

,

integramos entonces en ambos lados,

$$\int_{C\varepsilon}^{q(t)} \frac{\partial q(t)}{q(t)} = \int_0^t \frac{-\partial t}{RC}$$

Resolvemos en ambos lados:

$$\left[-\ln q(t) \right]_{C \cdot \varepsilon}^{q(t)} = \frac{-1}{RC} \left[t \right]_0^t$$

$$\ln q(t) - \ln C\varepsilon = \frac{-t}{RC}$$

$$e^{\ln q(t) - \ln C\varepsilon} = e^{\frac{-t}{RC}}$$

$$q(t) \frac{1}{C\varepsilon} = e^{\frac{-t}{RC}}$$

Despejamos $q(t)$:

$$q(t) = C\varepsilon e^{\frac{-t}{RC}} \quad (7)$$

0.2.2. Intensidad de corriente

Utilizando la definición de *intensidad de corriente*

$$I(t) = \frac{\partial q(t)}{\partial t}$$

y la expresión correspondiente a la carga del condensador en estado de disipación de energía (7), obtenemos:

$$I(t) = -\frac{\varepsilon}{R} e^{\frac{-t}{RC}} \quad (8)$$

0.2.3. Diferencia de potencial en la resistencia

Para obtener la diferencia de potencial entre los bornes de la resistencia, usamos la *ley de Ohm*

$$V_R(t) = R \cdot I(t)$$

, que usando la expresión resultante en 0.2.2 obtenemos:

$$V_R(t) = -\varepsilon \cdot e^{\frac{-t}{RC}} \quad (9)$$

0.2.4. Diferencia de potencial en el condensador

Para calcular la diferencia de potencial en los terminales del condensador, usamos la definición de capacidad en un conductor

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

, así que usando la expresión obtenida en 0.2.1 obtenemos:

$$V_C(t) = \varepsilon e^{\frac{-t}{RC}} \quad (10)$$

0.3. Energía almacenada en un condensador

Si partimos de un condensador completamente descargado, entonces la energía en ese momento también es cero.

$$E(0) = 0$$

Por definición, sabemos que la carga en el condensador es

$$q(t) = C \cdot V_C(t)$$

,

y que la intensidad de corriente que lo atraviesa viene dada entonces por la siguiente expresión

$$I(t) = C \frac{\partial V_C(t)}{\partial t}$$

Usando las definiciones de energía y potencia consumidas por el condensador

$$\partial E(t) = p(t) \partial t = V_C(t) I(t) \partial t$$

obtenemos que la energía almacenada en es la solución de la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$\partial E(t) = C \cdot V_C(t) \partial V_C(t)$$

Resolvemos integrando usando las condiciones iniciales previas

$$\int_0^{E(t)} \partial E(t) = C \int_0^{V_C(t)} V_C(t) \partial V_C(t)$$

$$E(t) = C \left[\frac{V_C(t)^2}{2} \right]_0^{V_C(t)}$$

Luego, la energía almacenada en el condensador viene dada por:

$$E(t) = \frac{1}{2} C V_C(t)^2 \tag{11}$$

, dónde $V_C(t)$ es la diferencia de potencial en el condensador.