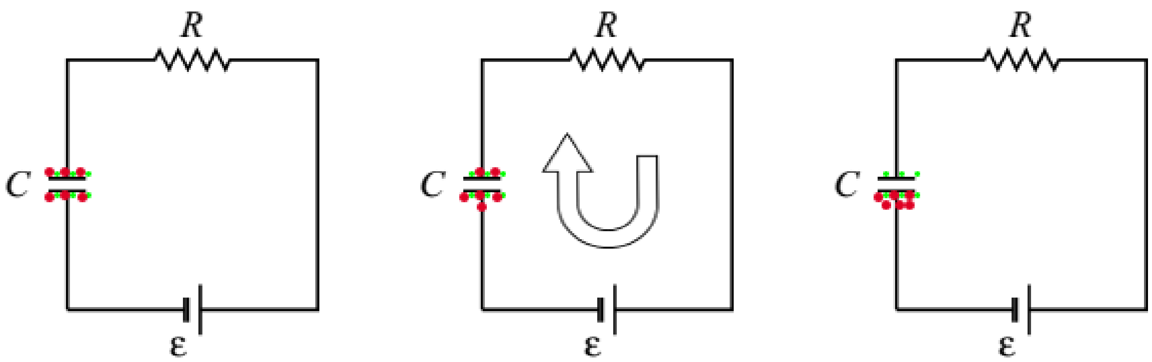
En este primer apéndice sobre la resolución de ecuaciones diferenciales, se presentan los pasos a seguir para obtener las expresiones que modelan el circuito RC.

0.1. Circuito RC en carga



(a) $t = 0s$ (b) Proceso de carga. (c) Carga completa

Figura 1: Fases del estado de carga de un condensador. Los puntos rojos hacen referencia a los electrones en movimiento, los puntos verdes a las cargas positivas. La flecha indica el sentido del movimiento de los electrones.

0.1.1. Carga del condensador

Partimos de la ecuación planteada a la hora de hacer el balance energético (**??**). Utilizando las definiciones de capacidad del condensador y la *ley de Ohm*; y posteriormente, la definición de *intensidad de corriente*, derivamos a la siguiente expresión:

$$\varepsilon = \frac{q(t)}{C} + R \cdot I(t) = \frac{q(t)}{C} + R\frac{\partial q(t)}{\partial t}$$

Para resolver esta ecuación diferencial de primer orden, utilizaremos el método de separación de variables, así que la reescribimos de la siguiente forma:

$$\frac{\partial q(t)}{C\varepsilon - q(t)} = \frac{\partial t}{RC}$$

Partiendo de las condiciones iniciales, donde la carga del condensador es cero

$$q(0) = 0$$

, integramos entonces en ambos lados bajo estas condiciones

$$\int_0^{q(t)} \frac{\partial q(t)}{C\varepsilon - q(t)} = \int_0^t \frac{\partial t}{RC}$$

$$-\ln\left(C\varepsilon - q(t)\right) + \ln C\varepsilon = t/RC$$

Despejamos $q(t)$:

$$e^{-\ln\left(C\varepsilon - q(t)\right) + \ln\left(C\varepsilon\right)} = e^{\frac{t}{RC}}$$

$$\frac{1}{C\varepsilon - q(t)} C\varepsilon = e^{\frac{t}{RC}}$$

$$e^{\frac{-t}{RC}} C\varepsilon = C\varepsilon - q(t)$$

Obteniendo finalmente

$$q(t) = C\varepsilon\left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right) \tag{1}$$

Además, es posible hallar que la carga máxima del condensador vendrá determinada por

$$q_{max} = \lim_{t \to \infty} q(t) = C \cdot \varepsilon$$

0.1.2. Intensidad de corriente

Utilizando entonces la definición de *intensidad de corriente*

$$I(t) = \frac{\partial q(t)}{\partial t}$$

, si derivamos la expresión de carga del condensador obtenemos que

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{\frac{-t}{RC}} \tag{2}$$

0.1.3. Diferencia de potencial resistencia (R)

Para obtener la diferencia de potencial entre los bornes de la resistencia, hacemos uso de la *ley de Ohm*

$$V_R(t) = R \cdot I(t) \tag{3}$$

, que usando la expresión resultante en 0.1.2 obtenemos

$$V_R(t) = R \cdot e^{\frac{-t}{RC}} \tag{4}$$

0.1.4. Diferencia de potencial en el condensador (C)

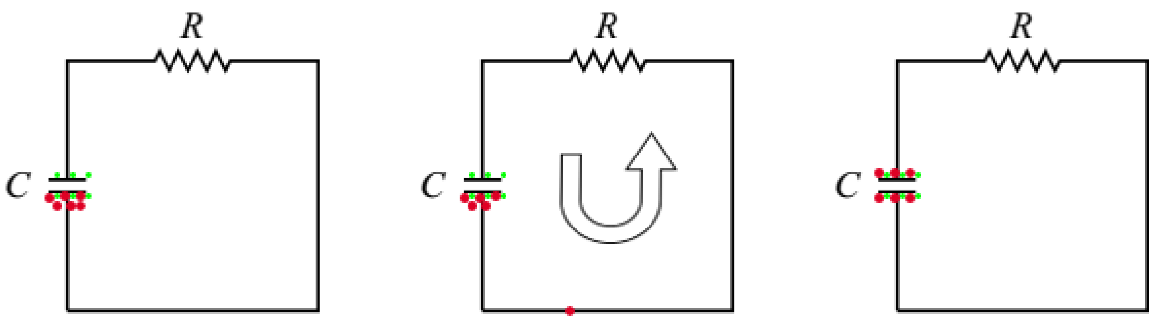
Por otro lado, la diferencia de potencial entre los terminales del condensador hacemos uso de la definición de capacidad del mismo

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} \tag{5}$$

, así que usando la expresión obtenida en 0.1.1 obtenemos

$$V_C(t) = \varepsilon \left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right) \tag{6}$$

0.2. Circuito RC en descarga



(a) $t = 0$. Carga previa.

(b) Proceso de descarga

(c) Condensador con $q = 0$

Figura 2: Descarga de un condensador.

0.2.1. Carga del condensador

Partimos de la ecuación planteada a la hora de hacer el balance energético (??). Utilizando las definiciones de capacidad de condensador y la *ley de Ohm*; y posteriormente, la definición de *intensidad de corriente*, obtenemos que:

$$0 = \frac{q(t)}{C} + R\frac{\partial q(t)}{\partial t}$$

Para resolver esta ecuación diferencial, utilizaremos el método de separación de variables, así que la reescribimos de la siguiente manera:

$$\frac{-\partial t}{RC} = \frac{\partial q(t)}{q(t)}$$

Si partimos de un condensador completamente cargado, donde la carga en el instante inicial se corresponde a

$$q(0) = q_{max} = C \cdot \varepsilon$$

,

integramos entonces en ambos lados,

$$\int_{C\varepsilon}^{q(t)} \frac{\partial q(t)}{q(t)} = \int_0^t \frac{-\partial t}{RC}$$

Resolvemos en ambos lados:

$$\ln q(t) - \ln C\varepsilon = \frac{-t}{RC}$$

$$e^{\ln q(t) - \ln C\varepsilon} = e^{\frac{-t}{RC}}$$

$$q(t)\frac{1}{C\varepsilon} = e^{\frac{-t}{RC}}$$

Despejamos $q(t)$:

$$q(t) = C\varepsilon e^{\frac{-t}{RC}} \tag{7}$$

0.2.2. Intensidad de corriente

Utilizando la definición de *intensidad de corriente*

$$I(t) = \frac{\partial q(t)}{\partial t}$$

y la expresión correspondiente a la carga del condensador en estado de dispación de energía (7), obtenemos:

$$I(t) = -\frac{\varepsilon}{R} e^{\frac{-t}{RC}} \tag{8}$$

0.2.3. Diferencia de potencial en la resistencia

Para obtener la diferencia de potencial entre los bornes de la resistencia, usamos la *ley de Ohm*

$$V_R(t) = R \cdot I(t)$$

, que usando la expresión resultante en 0.2.2 obtenemos:

$$V_R(t) = -\varepsilon \cdot e^{\frac{-t}{RC}} \tag{9}$$

0.2.4. Diferencia de potencial en el condensador

Para calcular la diferencia de potencial en los terminales del condensador, usamos la definición de capacidad en un conductor

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

, así que usando la expresión obtenida en 0.2.1 obtenemos:

$$V_C(t) = \varepsilon e^{\frac{-t}{RC}} \tag{10}$$

0.3. Energía del campo eléctrico

Si partimos de un condensador completamente descargado, entonces la energía en ese momento también es cero.

$$E(0) = 0$$

Por definición, sabemos que la carga en el condensador es

$$q(t) = C \cdot V_C(t)$$

,

y que la intensidad de corriente que lo atraviesa viene dada entonces por la siguiente expresión

$$I(t) = C \frac{\partial V_C(t)}{\partial t}$$

Usando las definiciones de energía y potencia consumidas por el condensador

$$\partial E(t) = p(t) \partial t = V_C(t) I(t) \partial t$$

obtenemos que la energía almacenada en es la solución de la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$\partial E(t) = C \cdot V_C(t) \partial V_C(t)$$

Resolvemos integrando usando las condiciones iniciales previas

$$\int_0^{E(t)} \partial E(t) = C \int_0^{V_C(t)} V_C(t) \partial V_C(t)$$

$$E(t) = C \left[\frac{V_C(t)^2}{2} \right]_0^{V_C(t)}$$

Luego, la energía almacenada en el condensador viene dada por:

$$E(t) = \frac{1}{2} C V_C(t)^2 \tag{11}$$

, dónde $V_C(t)$ es la diferencia de potencial en el condensador.