Autómatas y Lenguajes Formales, 2021-2
Tarea 1

Alumnos:
Magali Díaz Hernándes
David Hernández Uriostegui

Fecha de entrega: lunes 22 de marzo

1. (1.5 pts.) Sea x una cadena, x^R su reversa y x^i la cadena concatenada consigo misma i veces (por ejemplo: $(abc)^R = cba$ y $(abc)^2 = abcabc$). Demuestre por inducción matemática que $(x^R)^i = (x^i)^R$. (**Hint:** Use el hecho de que $(xy)^R = y^R x^R$.)

   Sea X una cadena de longitud n tal que podemos definirla como $X = x_1, ..x_n$, con x_j el elemento en la posición j, $j \in \{1, .., n\}$. Por demostrar $(X^R)^i = (X^i)^R$

   Casos base:
   i=0
   $(X^0)^R = (\varepsilon)^R = \varepsilon = (x_n, ..x_1)^0 = ((x_1, ..x_n)^R)^0 = (X^R)^0$

   i=1
   $(X^1)^R = ((x_1, ..x_n)^1)^R = (x_1, ..x_n)^R = x_n, ..x_1 = (x_n, ..x_1)^1 = ((x_1, ..x_n)^R)^1 = (X^R)^1$

   H.I
   $(X^n)^R = (X^R)^n$

   P.D
   $(X^{n+1})^R = (X^R)^{n+1}$

   $(X^R)^{n+1} = (X^R)^n \circ (X^R) = (X^n)^R \circ (X^R) = (X \circ X^n)^R = (X^n \circ X)^R = (X^{n+1})^R$ ■

2. *a*) (0.5 pts.) Encuentre un lenguaje L sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ que no sea $\{\varepsilon\}$ ni $\{a, b\}^*$ y satisfaga $L = L^*$.

   Como primera observación, lo que nos piden es que $L = L^*$, esto implica que $\epsilon \in L$, y como L^* por definición es la unión de todas las potencias de L, tenemos que:
   $\boxed{\therefore L \text{ debe ser un lenguaje infinito}}$

   Uno de los ejemplos más sencillos que podemos encontrar es $L = \{b\}^*$, de esta manera tenemos $L = L^*$ ya que:

$$(\{b\}^*)^* = \{b\}^*$$

Esto por propiedades de la *Estrella de Kleene* vistas en la nota 2 del curso

$$\boxed{\therefore L = L^* = \{b\}^*}$$

b) (0.5 pts.) Dé un ejemplo de dos lenguajes L_1 y L_2 tales que $L_1^* \cup L_2^* \neq (L_1 \cup L_2)^*$.
Sean:

$$L_1 = \{a\}$$
$$L_2 = \{b\}$$

Tenemos que:

$$L_1^* = \{a\}^* = \{a^n | n \geq 0\}$$
$$L_2^* = \{b\}^* = \{b^n | n \geq 0\}$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{L_1^* \cup L_2^* = \{w | w = a^n \text{ o } w = b^n,\ n \geq 0\}}$$

Ahora veamos quien es $(L_1 \cup L_2)^*$

$$L_1 \cup L_2 = \{a, b\}$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{(L_1 \cup L_2)^* = \{a, b\}^*}$$

Pero:

$$L_1^* \cup L_2^* \neq (L_1 \cup L_2)^*$$

Por ejemplo $ab \in (L_1 \cup L_2)^*$, pero $ab \notin L_1^* \cup L_2^*$

c) (0.5 pts.) Considere la siguiente definición recursiva para $L \subseteq \{a, b\}^*$: $b \in L$; $\forall w \in L$, bw, wa y aw están en L. Dé una definición no-recursiva para L (por ejemplo, en español).
Para este ejercicio lo que se hizo fue realizar varios ejemplos usando la definición recursiva, y localizando cierto patrón.
Primero notemos algunas cosas, la definición recursiva nos dice que a nuestra b inicial podemos concatenarle a su izquierda repetidamente una a o una b y que podemos concatenarle a su derecha repetidamente una a.

Veamos un ejemplo, la b de color rojo es la b inicial de nuestra cadena

$$b \xrightarrow{bw} bb \xrightarrow{aw} abb \xrightarrow{bw} babb \xrightarrow{wa} babba \xrightarrow{aw} ababba \xrightarrow{wa} ababbaa$$

Este ejemplo muestra la derivación de la cadena $ababbaa \in L$ siguiedo la definición recursiva.
A partir de esto podemos notar que:

- $\forall s \in L$, s debe terminar en una secuencia de a's, es decir, debe terminar en una cadena de la forma: $a^n, n \geq 0$
- Como se puede obsevar en el ejemplo, y si uno por su cuenta hace varios ejemplos, a la izquierda de nuestra b inicial, puede aparecer cualquier cadena w que sea combinación de a y b

Habiendo notado estas observaciones podemos definir lo siguiente:

Sea x una cadena que sea combinación a y b, pero que esta termine con b y sea y una cadena de la forma $a^n, n \geq 0$.

$\boxed{\text{Entonces el lenguaje } L \text{ son todas las cadenas de la forma } xy}$

3. (2 pts.) Suponga que $L \subseteq \{a, b\}^*$ se define como sigue:

- $\varepsilon \in L$,
- $\forall x, y \in L$, las cadenas xy, axb y bxa están en L.

Demuestre que $L = L_{AB}$, el lenguaje de todas las cadenas $w \in \{a, b\}^*$ tales que $n_a(w) = n_b(w)$.

$\subseteq$

Sea $w \in L$ por demostrar $w \in L_{AB}$. Usando inducción estructural sobre la grámatica

caso base:

La cadena vacia denotada por ϵ, sabemos $\epsilon \in L$ y

$$n_a(\epsilon) = 0 = n_b(\epsilon)$$

por lo tanto

$$\epsilon \in L_{AB}$$

H.I

Sean x,y cadenas en L tal que también son parte del lenguaje L_{AB}

P.D axb,bxa,xy cadenas pertenecen a L_{AB}

Sea w=axb cadena generada a partir de las reglas que definen a L entonces

$$n_a(w) = n_a(axb) = 1 + n_a(x)$$

y

$$n_b(w) = n_b(axb) = 1 + n_b(x)$$

por H.I

$$n_a(x) = n_b(x)$$

entonces

$$n_a(w) = 1 + n_a(x) = n_b(x) + 1 = n_b(w)$$

por lo tanto

$$w = axb \in L_{AB}$$

Sea w=bxa cadena generada a partir de las reglas que definen a L entonces

$$n_a(w) = n_a(bxa) = 1 + n_a(x)$$

y

$$n_b(w) = n_b(bxa) = 1 + n_b(x)$$

por H.I

$$n_a(x) = n_b(x)$$

entonces

$$n_a(w) = 1 + n_a(x) = n_b(x) + 1 = n_b(w)$$

porlo tanto

$$w = bxa \in L_{AB}$$

Sea $w = xy$ cadena generada a partir de las reglas que definen a L entonces

$$n_a(w) = n_a(x) + n_a(y)$$

y

$$n_b(w) = n_b(x) + n_b(y)$$

por H.I

$$n_a(x) = n_b(x)$$

y

$$n_a(y) = n_b(y)$$

por lo tanto

$$n_a(x) + n_a(y) = n_b(x) + n_b(y)$$

entonces

$$n_a(xy) = n_b(xy)$$

porlo tanto

$$w = xy \in L_{AB}\blacksquare$$

$\supseteq$
Sea $w \in L_{AB}$ por demostrar $w \in L$. Usando inducción sobre la longitu de las cadenas
Caso base:

$\epsilon \in L_{AB}$ ya que tiene el mismo número de a's que b's y por definicion de L, $\epsilon \in L$

H.I
para

$$x \in L_{AB} \text{ y } |x| \leq k \text{ ,con } |x| \text{ y } k \text{ números par; entonces } x \in L$$

Paso inductivo

Sea $w \in L_{AB}$ con $|w| = k+2$,sabemos que w es cadena formada por a's y b's, por lo que es sencillo notar que w puede escribirse como:$w = axb, w = bxa$ en donde x es subcadena de w por lo que cumple:

$|x| = k$ y $n_a(x) = n_b(x)$ Por lo anterior y por H.I sabemos: $x \in L$, y por definición de L, x puede construir las cadenas $axb = w$, $bxa = w$, por lo tanto $axb = w, bxa = w \in L$.

Por otro lado si w no puede escribirse como axb o bxa entonces podemos escribirla como $w = xy$, donde x es el prefijo propio más pequeño que cumple:

$n_a(x) = n_b(x)$ lo que implica $n_a(y) = n_b(y)$

y al ser subcadenas de w , x, y cumplen $|x| \leq k$ y $|y| \leq k$,y son pares, por lo tanto podemos aplicar H.I, de esta forma: $x, y \in L$, y por definición de L pueden construir las cadenas $xy = w$, por lo tanto $xy = w \in L$■

4. (2 pts.) Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD. Sea $M_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F_1)$ un AFD idéntico a M excepto por el conjunto de estados finales, donde F_1 se define como el conjunto de estados $q \in Q$ para los cuales $\widehat{\delta}(q, z) \in F$ para alguna z. ¿Cuál es la relación entre el lenguaje aceptado por M_1 y el lenguaje aceptado por M? Justifique su respuesta. (**Hint:** Use el hecho de que $\widehat{\delta}(q, xy) = \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q, x), y)$.)

Haciendo uso del ejemplo mostrado por el profesor y haciendo unos cuantos ejemplos, pudimos notar la siguiente relación:

El lenguaje aceptado por M_1 contiene a todos los préfijos de todas las cadenas contenidas en el lenguaje aceptado por M.

Esto ya que por definición de F_1 tenemos que para que álgun $q \in F_1$, la función de transición extendida para una cadena z, $(\hat{\delta}(q, z))$, nos tiene que dar como resultado un q tal que ese $q \in F$, es decir cada llamada recursiva de $\hat{\delta}$ nos tiene que dar como resultado un estado final en M_1, es decir un q tal que ese $q \in F_1$, y como cada llamada recursiva nos lleva a un estado al que se llegó mediante una cadena anterior, entonces haciendo cada una de las llamadas nos genera todo los prefijos de la cadena z.

Puede sonar un poco confuso en palabras, pero formalmente se entiende mejor:

Sea x una cadena sobre $\sum$ y sea $q = \hat{\delta}(q, x) \in Q$.
Tenemos que x pertenece a el Lenguaje de M_1 si y sólo si $q \in F_1$, y esto a su vez pasa si y sólo si $\exists y$ tal que $\hat{\delta}(q, y) \in F$, tal que para cada y, tenemos que:

$$\hat{\delta}(q, y) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y) = \hat{\delta}(q, xy)$$

A partir de esto tenemos que $\exists y$ tal que $\hat{\delta}(q, y) \in F$ si y sólo xy pertence al lenguaje aceptado de M.

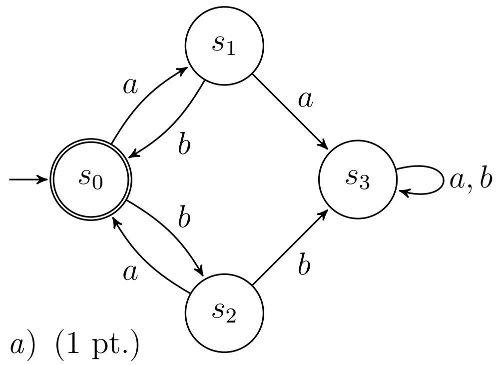
Entonces x pertenece al lenguaje aceptado por M_1, si y sólo $\exists y$ tal que xy pertenezca al lenguaje aceptado por M.

Esto en español es como lo dijo el profesor en las segurencias, x es una cadena que nos impulsa a un estado final en M.

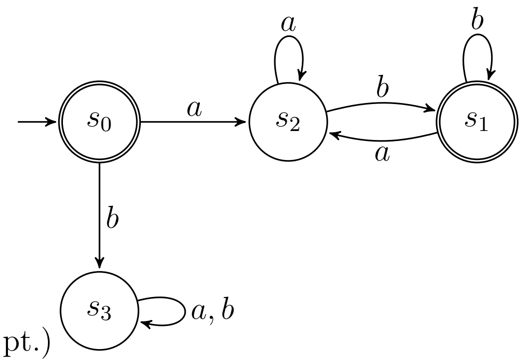
$\boxed{\therefore x \text{ es un prefijo de una cadena } s \text{ que pertenece al lenguaje aceptado por } M.}$

Entonces, el lenguaje aceptado por M_1 es el lenguaje que contiene a todos los prefijos de todos los elementos contenidos en el lenguaje aceptado por M.

5. Describa informalmente el lenguaje reconocido por los siguientes Autómatas Finitos Deterministas (AFD):



a) (1 pt.)



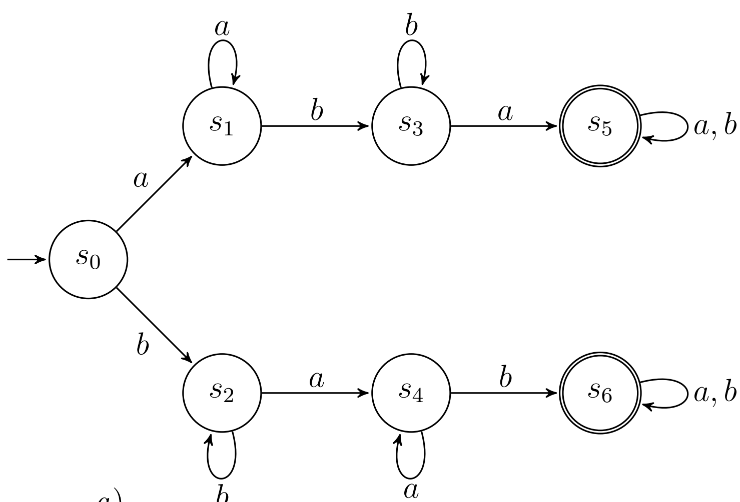
b) (1 pt.)

`a) Es el lenguaje de las cadenas de` a`'s y` b`'s de longitud par tal que no hay dos o mas` a`'s consecutivas ni dos o mas` b`'s consecutivas.`

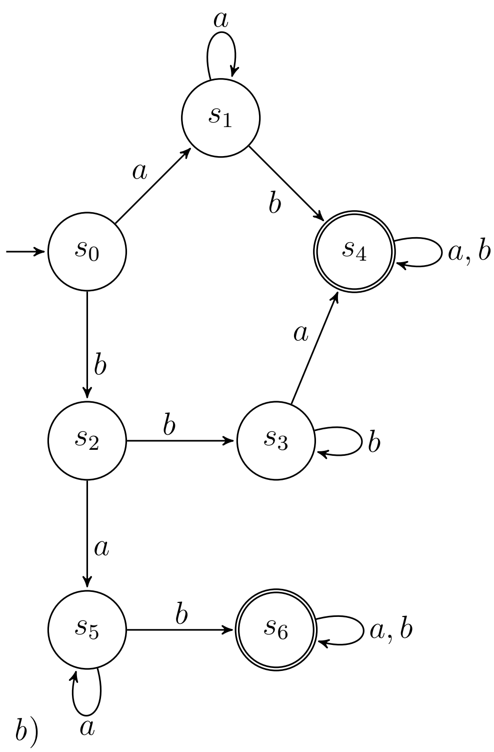
`b)Es el lenguaje de las cadenas` a`'s y` b`'s tales que comienzan con` a `y terminan con` b`.`

6. *a*) (1 pt.) Diseñe un Autómata Finito Determinista (AFD) que reconozca el lenguaje $\{w \in \{a, b\}^* \mid w$ tiene como subcadenas a ab y a $ba.\}$.

   b) (1 pt.) Diseñe un Autómata Finito Determinista (AFD) que reconozca el lenguaje $\{w \in \{a, b\}^* \mid w$ contiene como subcadenas a ab o a $bba.\}$.



a)



$b)$