

# Unidad I

## Funciones generalizadas

### Objetivos

Ampliar los conceptos básicos sobre las relaciones entre dos variables y las condiciones requeridas para que dicha relación pueda definirse como una función.

### Conceptos teóricos requeridos para cumplir los objetivos

Definición de variable -Definición de relación entre variables -Definición de dominio y codominio Definición de función -Definición de Imagen -Uso de tabla - Definición de sistema de referencia- Gráfico-Continuidad- Definición de conjuntos de ceros- Definición de conjunto de positividad y negatividad- Definición de intervalo de crecimiento y decrecimiento- Puntos máximos y mínimos. Ordenada al origen. Función definida por tramos. Corrimientos de gráficos.

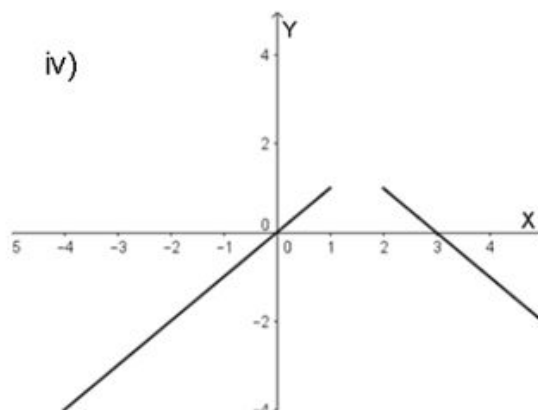
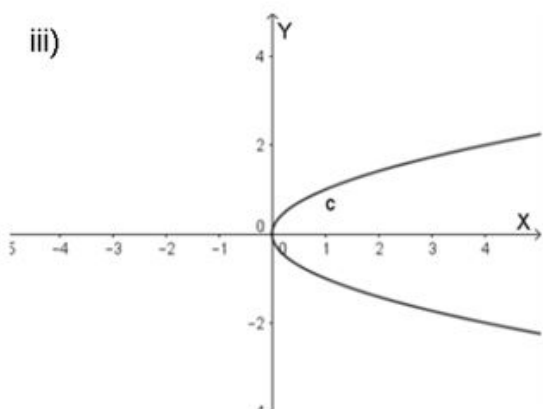
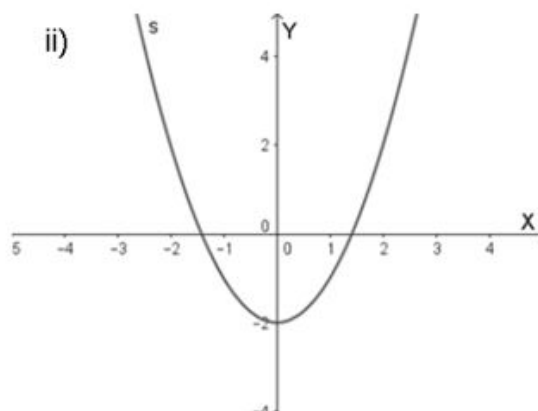
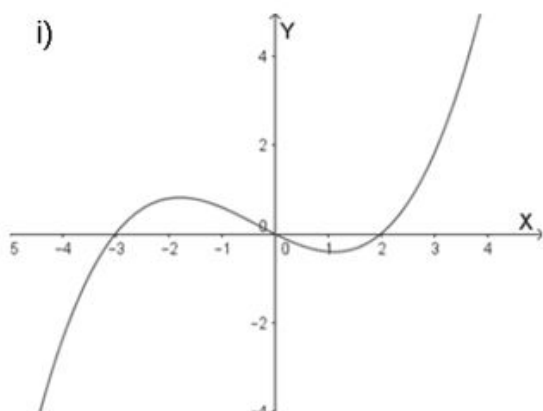
### Ejercicio 1:

Indicar cuáles de las siguientes expresiones se corresponden con una relación funcional:

- 1.a) El costo de comprar fruta y el número de kilos comprados.
- 1.b) Velocidad de un vehículo y tiempo empleado en recorrer una distancia.
- 1.c) Dinero invertido en publicidad por una marca y beneficios obtenidos.
- 1.d) El consumo de kilowatt/hora de luz con el costo de la tarifa eléctrica que paga un usuario.
- 1.e) El resultado de obtener dos temperaturas distintas en un mismo instante y punto del espacio.
- 1.f) La cantidad de nafta que consume un auto y los kilómetros recorridos.

### Ejercicio 2

Indicar, justificando adecuadamente, cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función:



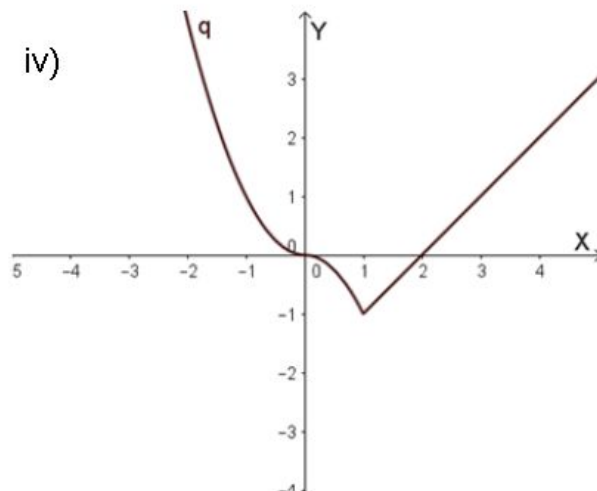
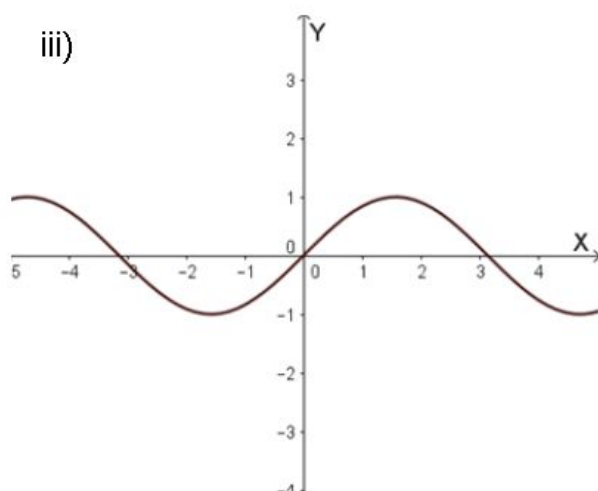
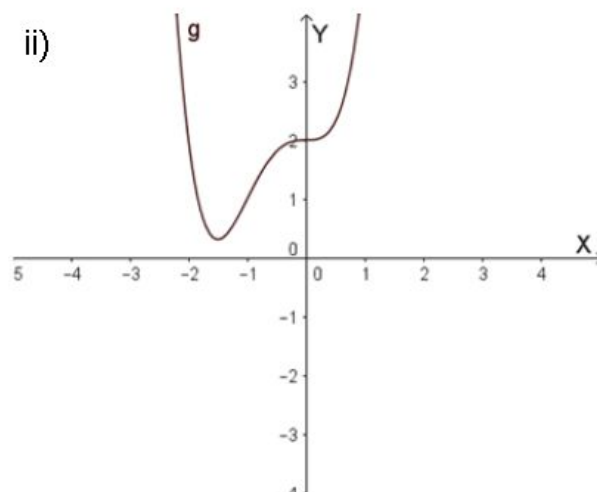
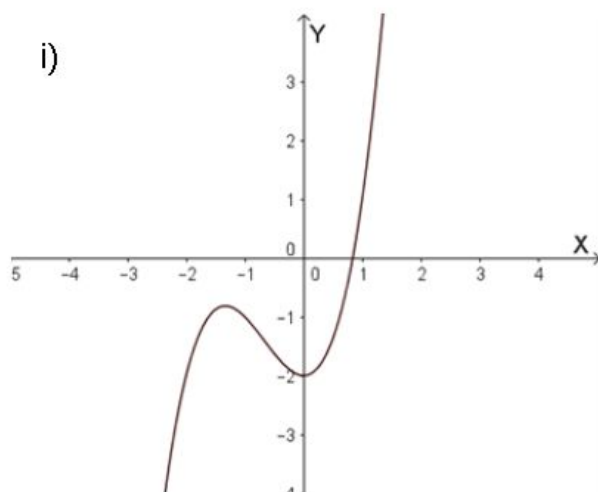
### Ejercicio 3

Identificar cuál es la variable independiente y la variable dependiente en cada una de las siguientes funciones:

- 3.a) La electricidad consumida y el importe de la boleta a pagar.
- 3.b) La cantidad de ejercicios físicos que realiza una persona y las calorías que quema.
- 3.c) Los kilogramos (kg) de pan que compra una persona y lo que debe pagar.
- 3.d) La cantidad de combustible cargado y el importe a pagar.

### Ejercicio 4

Dadas las siguientes funciones a través de sus gráficas cartesianas, indicar aproximadamente: dominio, imagen, máximos, mínimos, conjuntos de ceros, positividad y negatividad e intervalos de crecimiento y decrecimiento.



## Función Lineal

### Objetivos

Analizar la función lineal para que el estudiante pueda modelizar y resolver problemas en situaciones donde el cambio resulta de tipo lineal

### Conceptos teóricos requeridos para cumplir los objetivos

Generalidades de funciones. Definición de función lineal- Definición de recta. Definición de ecuación de recta. Definición de pendiente e indicación de la ordenada al origen a partir de la ecuación de la recta- Dominio- Gráfico- Análisis del signo de la pendiente y su relación con la gráfica -Imagen- Conjunto de ceros- Conjunto de positividad y negatividad-Intersección.

### Ejercicio 5

Dados los siguientes puntos también, denominados pares ordenados

$A = (0,2)$  ;  $B = (1,3)$  ;  $C = (-2,0)$  ;  $D = (-3,-1)$  ;  $E = (2,4)$  ;  $F = (3,10)$  ;  $G = (-1,1)$  ;  $H = (3,-7/2)$

se pide:

- 5.a) Representarlos en un mismo sistema de referencia.
- 5.b) ¿Cuáles de los puntos, representados en el inciso a), considera que se encuentran alineados?
- 5.c) ¿Qué figura geométrica se podría formar con dichos puntos alineados?
- 5.d) ¿Qué función analítica, dada a continuación, la asociaría con los puntos alineados:
- 5.d.1)  $f(x) = 5x - 1$
- 5.d.2)  $f(x) = x + 2$
- 5.d.3)  $f(x) = -4x + 2$
- 5.d.4)  $f(x) = -4x + 7$

### Ejercicio 6

- 6.a) Graficar todas las funciones del ejercicio 1) ítem d) en un mismo sistema de referencia.
- 6.b) De acuerdo al ítem anterior, indique si existen rectas paralelas. Justifique su respuesta.

### Ejercicio 7

Usando los datos que se dan para cada ítem siguiente, hallar de ser posible, la expresión analítica de la función lineal adecuada. Justifica los casos en que no sea posible.

- 7.1) Un punto por donde pasa y la pendiente.

7.1.a)  $A = (-1, 3)$  y  $m = 3$

7.1.b)  $A(-1, 3)$  y  $m = 0$

- 7.2) Dos puntos por donde pasa.

7.2.a)  $B = (2, 5)$  y  $C = (-1, -1)$

7.2.b)  $D = (-1, 3)$  y  $E = (-1, 4)$

7.2.c)  $F = (0, 2)$  y  $G = (-3, 2)$

### Ejercicio 8

- 8.1 Graficar cada función lineal del ejercicio 7, indicando cual de ellas es creciente, cual decreciente y cuál constante.

- 8.2 Defina:

8.2.a) ¿Cuándo una función lineal es creciente?

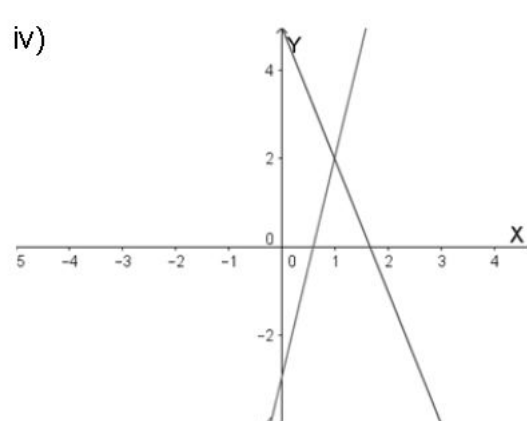
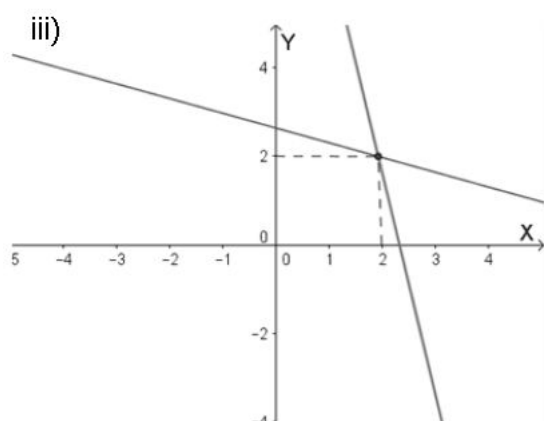
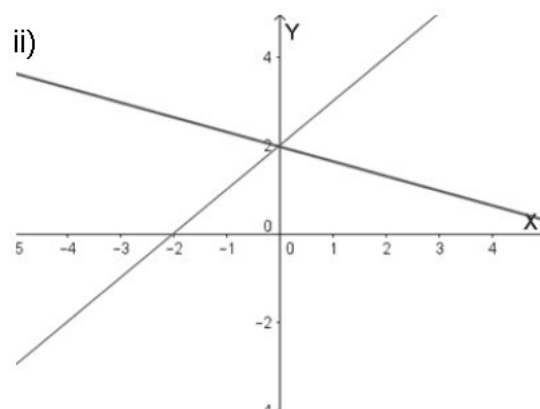
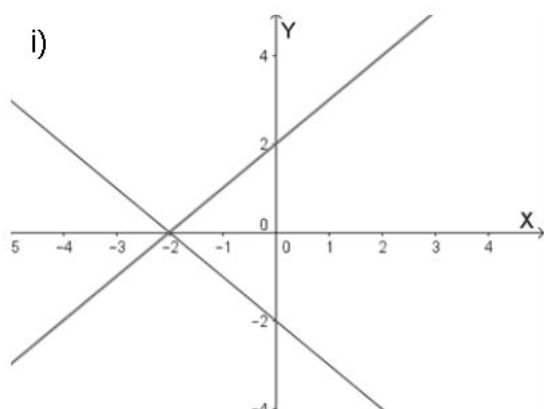
8.2.b) ¿Cuándo es decreciente?

8.2.c) ¿Cuándo es constante?

8.2.d) ¿Cómo se relacionan estos tres hechos con su pendiente?

### Ejercicio 9

Según los pares de rectas dadas a continuación, que además son funciones lineales, se pide indicar las coordenadas de los puntos donde se intersectan en cada caso:



### Ejercicio 10

Hallar el punto de intersección de los gráficos de  $f(x)$  y  $g(x)$  donde:

10.1)  $f(x) = x + 3$  con  $g(x) = -x + 2$

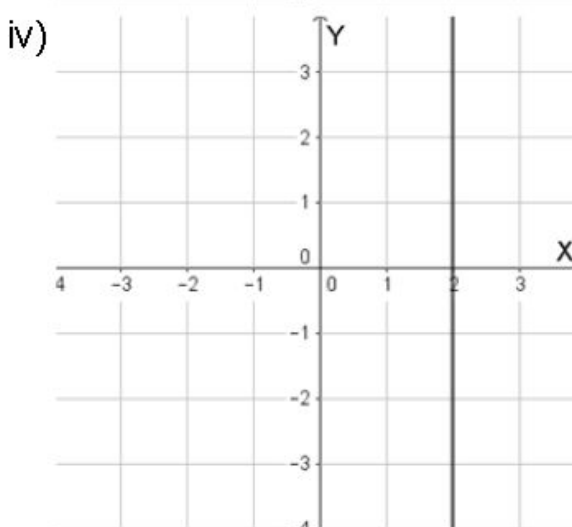
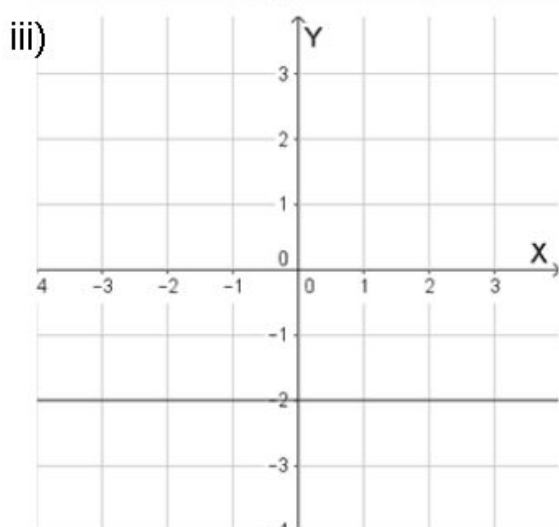
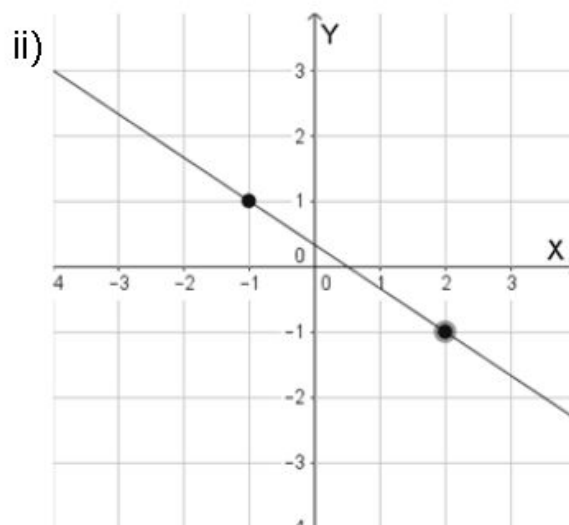
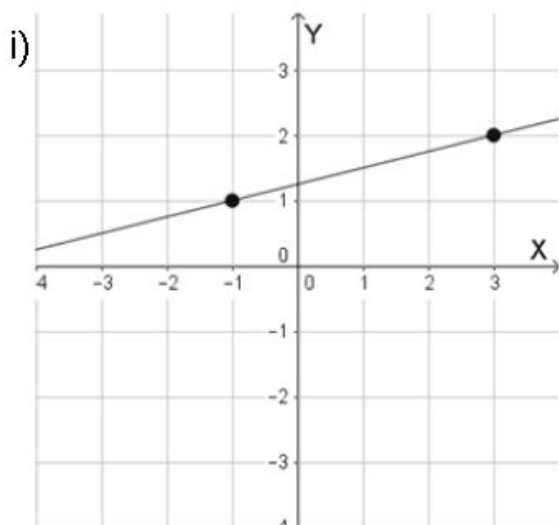
10.2)  $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$  con  $g(x) = 2$

10.3)  $f(x) = 3x + 2$  con  $g(x)$  que es una función lineal cuya gráfica pasa por el punto  $A = (1, -1)$  y tiene ordenada al origen 4.

10.4)  $f(x)$  que es la función lineal cuya gráfica tiene pendiente 2 y pasa por el origen de coordenadas, con  $g(x)$  que es una función lineal cuya gráfica pasa por los puntos  $A = (2, -1)$  y  $B = (-1, 3)$ .

### Ejercicio 11

Hallar las ecuaciones de las siguientes rectas, cuyos gráficos se dan en cada apartado. Son todas funciones lineales? Justifica la respuesta.



### Ejercicio 12 (Problema)

La factura de luz tiene un costo fijo mensual de \$ 60 y \$0,04 por cada kilowatt hora (KWH) consumido.

- Determine la función lineal que representa el gasto mensual total a pagar en función de los KWH consumidos. Representar graficamente.
- Si se consumen 400 KWH a lo largo de todo el mes, ¿cuánto se debe pagar?
- Si se debe pagar a fin de mes \$ 110, ¿cuánto se consumió?

### Ejercicio 13 (Problema)

Un laboratorio de analisis clinicos debe contratar una empresa dedicada al servicio de traslado de tubos de ensayo. La empresa de servicio para traslados de tubos de ensayo TUBITOS cobra una suma fija de \$ 200 más \$3 pesos por cada tubo de ensayo que deba trasladar. Por otro lado, la empresa TUBAZOS cobra una suma fija de \$ 300 más \$ 2,50 por cada tubo de ensayo que traslade .

- Modelice el costo de traslado para cada empresa, hallando las funciones lineales correspondiente a cada una.
- ¿Qué empresa conviene contratar? (responda todas las opciones posibles). Justifique.

**Ejercicio 14**

Hallar en cada caso la ecuación de la recta tal que :

14.a) Sea paralela a la recta  $f(x) = -4x + 7$  y pase por el punto  $A=(2,-3)$ .

14.b) Sea perpendicular a la recta  $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$  y pase por el origen.

14.c) Tenga pendiente  $m=2$  y pase por la intersección de las rectas  $y = x + 5$  e  $y = 4x + 2$ .

14.d) Tenga un cero en 4 y ordenada 5.

**Función Cuadrática****Objetivos**

Reconocer la forma de la parábola. Manejar e interpretar sus ecuaciones y características básicas.

**Conceptos teóricos requeridos para cumplir los objetivos:**

Definición de la parábola . Forma polinómica, canónica y factorizada. Hallar raíces completando cuadrados desde la forma polinómica. Hallar vértice. Graficar utilizando los elementos de la parábola.

**Ejercicio 15**

15.a) Completar la siguiente tabla de acuerdo a los valores de x dados:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x^2$	16					1	4		

15.b) Graficar los puntos (x,y) anteriores en el plano cartesiano teniendo en cuenta que el dominio de la función es todos los reales (es decir x puede tomar cualquier valor real).

**Ejercicio 16**

Hallar el vértice de la parábola que representa el gráfico de cada una de las siguientes funciones indicando imagen, intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Graficarlas.

16.1  $f(x) = -3x^2 + 27$

16.2  $g(x) = (x - 3)^2$

16.3  $h(x) = -2x^2 + 8x + 24$

16.4  $i(x) = 3x^2 + 24x - 60$

**Ejercicio 17**

Asociar cada función con su imagen:

Función:

i)  $f(x) = 4x^2 + 8x + 4$

ii)  $g(x) = -3x^2 + 36x$

iii)  $h(x) = -x^2 - 1$

iv)  $i(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + \frac{45}{4}$

Imagen:

A.  $(-\infty, -1]$

B.  $[\frac{3}{4}, +\infty]$

C.  $[0, +\infty)$

D.  $(-\infty, 108]$

**Ejercicio 18**

Hallar los ceros, el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad de cada una de las siguientes funciones cuadráticas:

18.1  $f(x) = 12(x - 3)(x + 2)$

18.2  $h(x) = 2x^2 - 32$

18.3  $g(x) = -3x^2 + 15x - 18$

18.4  $i(x) = 4x^2 - 14x + 128$

**Ejercicio 19**

Asociar cada función con su conjunto de negatividad:

Función:

i)  $f(x) = -4x^2 - 8x$

ii)  $g(x) = 3x^2 - 36x$

iii)  $h(x) = -6x^2 - 36$

iv)  $i(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{21}{2}x + 36$

Conjunto de negatividad:

A.  $\mathbb{R}$

B.  $(6, 8)$

C.  $(0, 12)$

D.  $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

**Ejercicio 20**

Hallar, si existen, el o los puntos de intersección entre las siguientes funciones realizando la gráfica correspondiente en cada caso:

20.1)  $f(x) = 2(x - 1)(x + 5)$  con  $g(x) = 12x - 10$

20.2)  $m(x) = -x^2 + x + 1$  con  $h(x) = -2x + 4$

20.3)  $t(x) = x^2 + 3x + 3$  con  $n(x) = -x^2 - x + 9$

20.4)  $g(t) = t^2 - 6t + 8$  con  $f(t) = -t^2 + 4t$

20.5)  $g(t) = 4(t - 3)^2 + 5$  con  $f(t) = -3t^2 + 18t - 22$

**Ejercicio 21**

Sea  $f(x) = x^2$  graficar:

21.a)  $-f(x)$

21.b)  $-f(x - 4)$

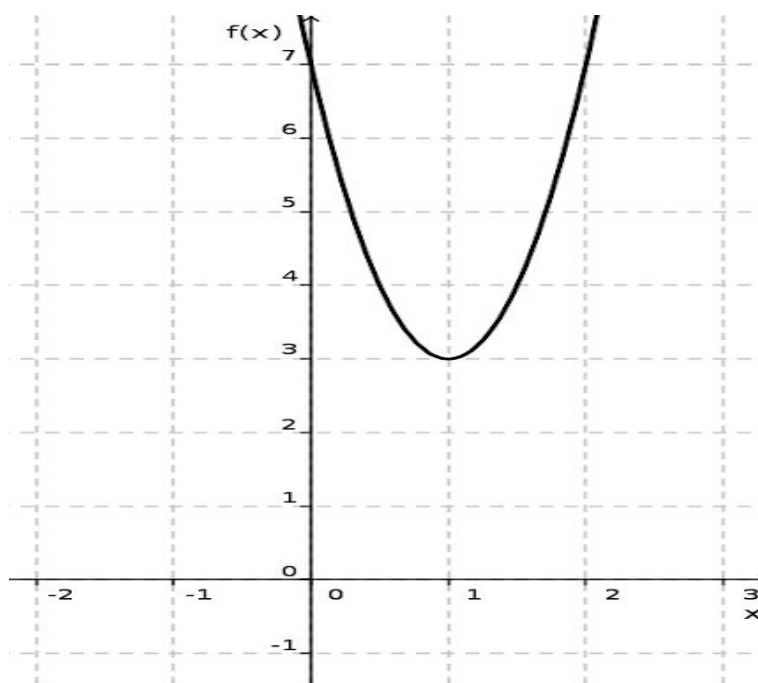
21.c)  $-f(x - 4) - 6$

21.d)  $-2f(x - 4) - 6$

**Ejercicio 22**

A partir del siguiente gráfico determine su función analítica de forma canónica:



**Ejercicio 23**

Hallar la expresión analítica de la función cuadrática  $f(x)$  tal que:

23.1) Su vértice sea  $(-1, 3)$  y  $f(3) = 4$

23.2) Su vértice sea  $(0, 5)$  y pasa por el punto  $(1, 6)$

23.3)  $f(-2) = f(4) = 0$  y su imagen sea  $(-\infty, 5]$

**Ejercicio 24 (Problema)**

Un electrón sometido a un campo magnético describe una trayectoria parabólica en un plano vertical según la siguiente expresión:  $s(x) = -x^2 + 6x - 5$ , se pide:

a) Hallar en qué momento el electrón alcanza su máximo alejamiento respecto al eje horizontal.

b) ¿Cuál es ese máximo alejamiento?

**Funciones Polinómicas****Objetivos**

Generalizar los conceptos desarrollados con las funciones lineales y cuadráticas

**Conceptos teóricos requeridos para cumplir los objetivos:**

Teorema de Bolzano.

**Ejercicio 25**

Sean  $(-2, 0)$ ,  $(-1, 0)$  y  $(3, 0)$  los ceros de  $g(x)$  y siendo una función polinómica de grado 3, se pide:

25.1) Hallar la expresión de  $g(x)$  sabiendo que  $g(2) = 4$ .

25.2) Hallar la expresión de  $g(x)$  sabiendo que  $g(1) = 3$ .

**Ejercicio 26**

26.a) Sea  $h(x) = 3x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 12x$ , hallar dominio y todos los ceros de  $h(x)$  sabiendo que  $h(1) = 0$ .

26.b) Hallar el conjunto de positividad y negatividad de  $h(x)$ , finalmente hacer un gráfico aproximado.

**Ejercicio 27**

27.a) Hallar la expresión de una función  $g(x)$  de cuarto grado, tal que sus únicas raíces reales simples sean -1 y 3, tenga a 5 como raíz real doble y además se cumpla que  $g(1) = -72$ .

27.b) Hallar  $C_+$ ,  $C_-$  de  $g(x)$ .

27.c) Hacer un gráfico aproximado de  $g(x)$  y otro de  $-g(x)$  usando el mismo sistema de referencia.

**Ejercicio 28**

Si  $f(x)$  es una función continua, con exactamente 3 raíces y que cumple lo siguiente:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
f(x)	3	-2	-1	-2	4	1	-3

hacer un gráfico aproximado de  $f(x)$ .

**Ejercicio 29**

Hallar los ceros y determinar intervalos de positividad y negatividad de las siguientes funciones polinómicas:

29.1)  $d(x) = x^4 - 16x^2$

29.2)  $g(x) = 2x^2 \cdot (x + 4)^2$

29.3)  $u(x) = (x^2 - \frac{25}{16}) \cdot (2x^2 - 8)$

29.4)  $t(x) = (x^2 - \frac{81}{49}) \cdot (x^2 - 7)$

29.5)  $h(x) = (2x^3 - 14x^2 + 24x) \cdot (x + 4)^2$

29.6)  $r(x) = (2x^3 - 14x^2 + 24x) \cdot (x - 4)^2$

**Ejercicio 30**

Probar que  $s(x) = x^3 + x^2 - 11$

30.a) Tiene un cero en el intervalo (1;2).

30.b) Tiene un cero en el intervalo (1,9 ; 2)

30.c) Tiene un cero en el intervalo (1,92 ; 1,94)

## Función Módulo

### Objetivos

Estudiar magnitudes con valores absolutos.

### Conceptos teóricos requeridos para cumplir los objetivos:

Definición de valor absoluto en  $\mathbb{R}^2$

### Ejercicio 31

31.a) Complete las siguientes tabla de valores:

x	$f(x) =  x $	$f(x) =  x-2 $	$f(x) =  x+2 $	$f(x) =  x  + 2$
-4	4		2	
-3		5		5
-2				
-1	1			
0				
1		1		
2				
3	3			
4				6

31.b) Grafique cada función del ítem anterior.

### Ejercicio 32

A partir de  $u(x) = |x|$  dar la expresión analítica y graficar las siguientes funciones:

32.a)  $-u(x)$

32.b)  $-u(x) + 2$

32.c)  $-u(x - 4) + 2$

32.d)  $u(x + 4)$

32.e)  $u(-x)$

32.f)  $u(-x - 4)$

32.g)  $2 \cdot u(x)$

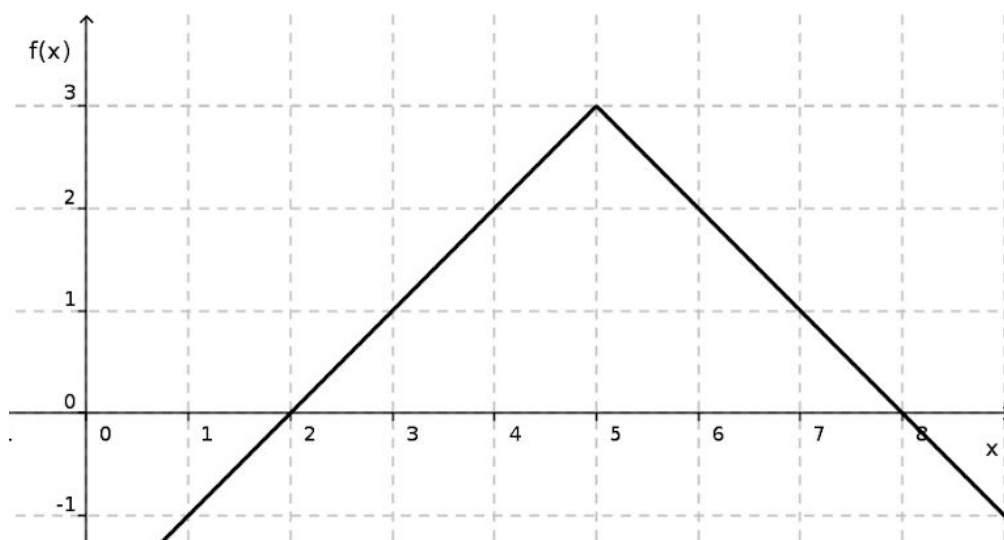
32.h)  $6 \cdot u(x)$

32.i)  $\frac{1}{2} \cdot u(x)$

32.j)  $u(x-4) - 5$

**Ejercicio 33**

Dado el siguiente gráfico encuentre su expresión analítica:

**Función Homográfica****Objetivos**

Poder introducir conceptos de límite y asíntotas.

Conceptos teóricos requeridos para cumplir los objetivos:

Conceptos de discontinuidad en un punto. Cálculo de dominio de una función e imagen.

**Ejercicio 34**

34.a) Completa la siguiente tabla de acuerdo a los valores de  $x$  dados:

$x$	-10000	-1000	-100	-10	-4	-2	-1	-0,1	0,1	1	2	4	10	100	1000	10000
$\frac{1}{x}$	-0,0001				-0,25						0,5					

34.b) De acuerdo a la función anterior, ¿cuál es el único valor de  $x$  que no podría tomar en la tabla?

34.c) Realizar un gráfico aproximado de acuerdo a los valores obtenidos en la tabla del inciso a) y la respuesta dada en el inciso b).

**Ejercicio 35**

Determinar cuáles de las siguientes funciones no resulta ser homográfica. Justifique su respuesta:

35.1  $f(x) = \frac{3x-15}{x+5}$

35.2  $f(x) = \frac{x^2-4}{x-5}$

35.3  $f(x) = \frac{1+2x}{x}$

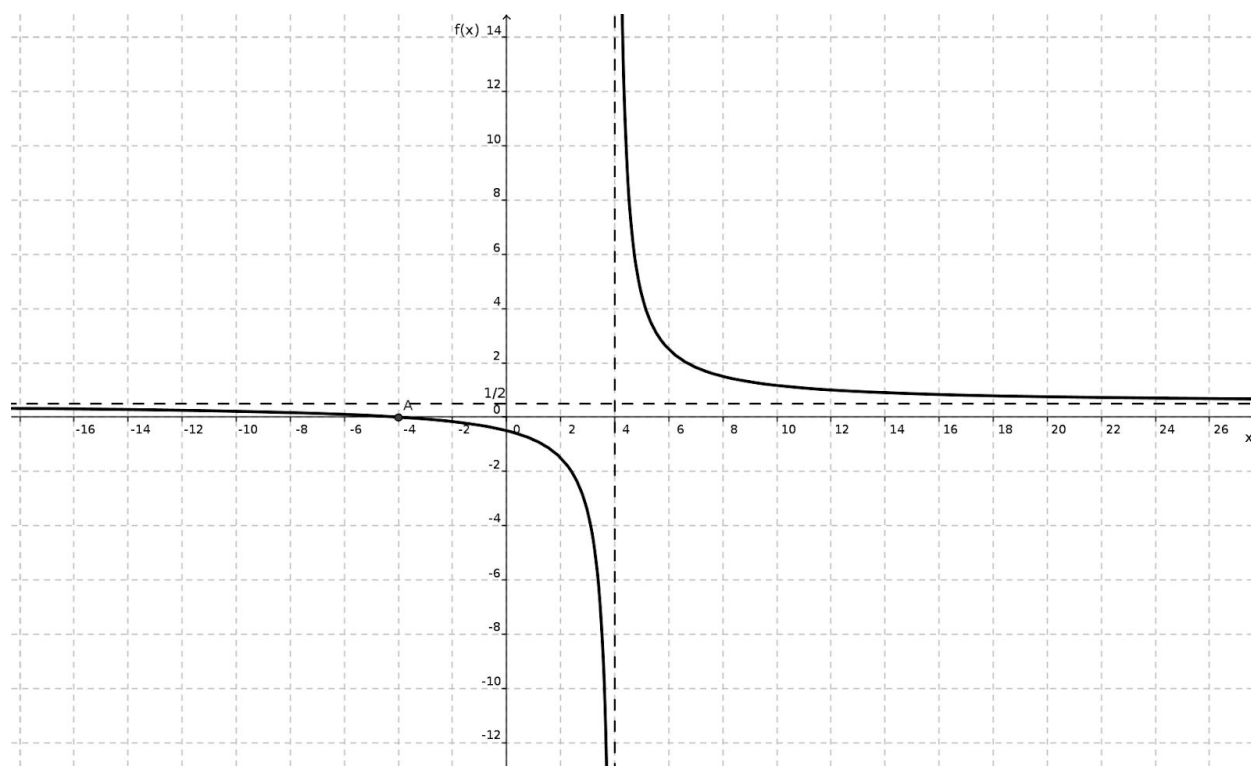
35.4  $f(x) = \frac{1}{x} + 2$

35.5  $f(x) = \frac{4x-2}{2x-8}$

**Ejercicio 36**

De acuerdo al siguiente gráfico de  $f(x)$ , el cual representa una función homográfica, determinar:

36.a) Dominio, imagen, ceros, conjuntos de positividad y negatividad, asíntotas verticales y horizontales:



36.b) De acuerdo al gráfico anterior, a qué valores se acerca  $f(x)$  cuando  $x$ :

- 36.b.1) Se acerca a 4 por el lado derecho
- 36.b.2) Se acerca a 4 por el lado izquierdo
- 36.b.3) Tiende a menos infinito
- 36.b.4) Tiende a más infinito

**Ejercicio 37**

37.1) De acuerdo a la función homográfica  $f(x) = \frac{1}{x}$ , escribir las expresiones analíticas, hallar el dominio y realizar las gráficas de:

37.1.a)  $-f(x)$

37.1.b)  $-f(x) + 1$

37.1.c)  $-f(x - 5) + 1$

37.2) De acuerdo a la función homográfica  $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$  se pide:

Escribir las expresiones analíticas, hallar el dominio y realizar las gráficas de:

37.2.a)  $-f(x)$

37.2.b)  $-f(x) + 1$

37.2.c)  $-f(x - 5) + 1$

**Ejercicio 38**

Dada  $f(x) = \frac{ax+2}{2x-4}$  se pide:

38.a) Hallar el dominio de  $f(x)$ .

38.b) Hallar  $a$ , que pertenece a reales, de modo que  $f(x)$  tenga como asíntota horizontal  $y=8$ .

38.c) Hacer un gráfico aproximado de  $f(x)$ .

**Composición de funciones****Objetivos**

Componer funciones de acuerdo sus dominios e imágenes

**Conceptos teóricos requeridos para cumplir los objetivos:**

Dominio e imagen de funciones

**Ejercicio 39**

Calcular  $f \circ g$ ,  $g \circ f$  siendo:

39.1)  $f(x) = 3x - 4$       y       $g(x) = x^2 + 2$

39.2)  $f(x) = \frac{1}{4+2x} + 4$       y       $g(x) = x + 5$

39.3)  $f(x) = x\sqrt{x^3 - 4}$       y       $g(x) = 2x - 4$

39.4)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{2x + 8}$       y       $g(x) = \frac{1}{x}$

**Ejercicio 40**

Dada  $f(x) = 3k + x$  y  $g(x) = 2x - 4$  se pide:

40.a) Hallar  $k$ , que pertenece a reales, tal que  $f \circ g(1) = 0$ .

40.b) Para el valor de  $k$  encontrado determinar el conjunto de positividad y negatividad de  $f \circ g(x)$ .

**Ejercicio 41 (Problema)**

Sea  $C(x) = x - 273$  la función que convierte la temperatura Kelvin a grados Celsius. Sea  $F(x) = 1,8x + 32$  la función que convierte la temperatura de grados Celsius a grados Fahrenheit. Encontrar la función que convierte la temperatura de grados Kelvin a Fahrenheit.

## Función Inversa

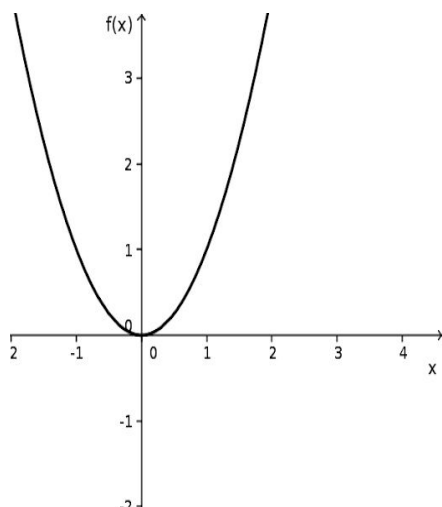
**Objetivos**

Establecer conceptos sobre biyectividad de funciones.

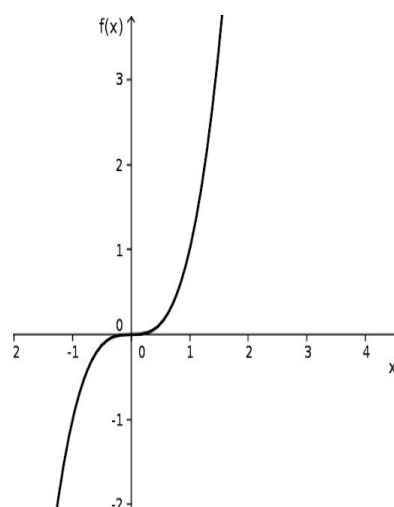
**Ejercicio 42**

De acuerdo a las siguientes gráficas determinar, cuales admiten inversa en el dominio determinado:

i)

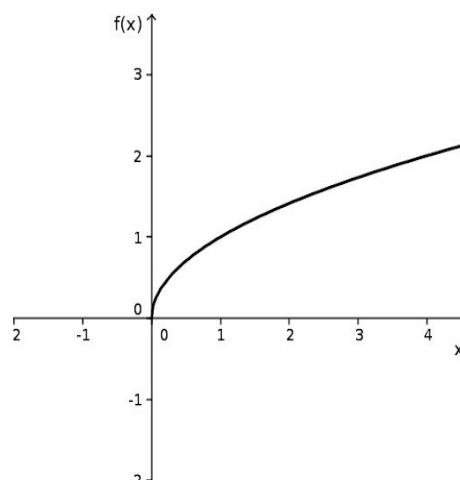
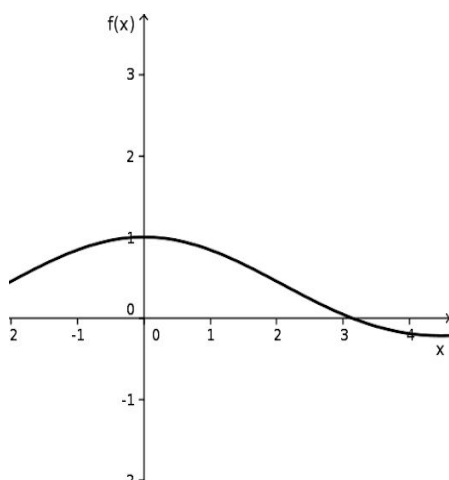


ii)



iii)

iv)



15

**Ejercicio 43**

43.1) Hallar el dominio de las siguientes funciones:

43.1.1)  $f(x) = 4x - 1$

43.1.2)  $f(x) = \frac{1}{x-4}$

43.1.3)  $f(x) = \frac{2x-1}{x-6}$

43.1.4)  $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

43.1.5)  $f(x) = \sqrt{4x+2} + 3$

43.1.6)  $f(x) = \frac{x+3}{x-4} + 2$

43.2) Hallar el dominio de funciones inversas de cada inciso anterior.

43.3) De acuerdo a los incisos anteriores, calcular  $f \circ f^{-1}$  y  $f^{-1} \circ f$ .**Ejercicio 44**44.1) Restringir el dominio de modo que  $f(x)$  tenga inversa y hallar  $f^{-1}(x)$ 

44.1.1)  $f(x) = 2 \cdot (x - 4)^2 + 3$

44.1.2)  $f(x) = x^2 + 4x + 10$

44.1.3)  $f(x) = 2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$

44.2) Graficar, en un mismo sistema de referencia,  $f(x)$  y  $f^{-1}(x)$  de cada inciso anterior, respectivamente.**Ejercicio 45**45.1) Dadas  $f(x) = 2x - 3$  y  $g(x) = \frac{x}{4x+1}$  hallar  $(f \circ g)^{-1}$  (1)45.2) Dada  $f(x) = \frac{x-7}{2x-3}$  calcular  $(f \circ f^{-1})$  (2) y  $(f^{-1} \circ f)$  (4).**Ejercicio 46 (Problema)**

Sea  $T(t) = \frac{1}{2}t - 3$  la función que representa la temperatura de un determinado compuesto químico a medida que pasa el tiempo  $t$ . Hallar la expresión que represente el tiempo transcurrido en función de la temperatura del compuesto.

**Integrador**



**Complete las siguientes afirmaciones:**

1. Una función lineal es creciente si y solo su pendiente es.....
2. Una función lineal es decreciente si y sólo si su pendiente es.....
3. Las rectas distintas en el plano no se cortan si son.....
4. Dos rectas paralelas tienen igual .....
5. Si el producto de las pendientes de dos rectas resulta ser -1 estas son.....
6. Invente una expresión analítica que le brinde una recta que no sea función lineal. En ese caso se dice que su pendiente .....

16

7. Dos rectas en  $\mathbb{R}^2$  son perpendiculares si.....
8. El dominio de toda función lineal son.....
9. La imagen de toda función lineal son.....
10. El dominio de toda función polinómica son .....

**Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales son falsas. En el caso que resulten falsas justifique el por qué.**

- i) Las rectas en el plano solo cortan al menos una vez a algún eje cartesiano.
- ii) Con solo dos puntos es suficiente para definir una recta.
- iii) Las rectas verticales no definen una función.
- iv) Si una función lineal es creciente no puede ser luego decreciente.
- v) Toda función lineal puede representarse por medio de una recta y toda recta puede representar a una función lineal.
- vi) Si el dominio de una función son todos los reales su gráfica no posee asíntotas verticales.
- vii) Si el dominio de una función cuadrática son todos los reales entonces existe su inversa.
- viii) Siempre es posible llevar la forma polinómica de una función cuadrática a su forma canónica.
- ix) Siempre es posible llevar la forma polinómica de una función cuadrática a su forma factorizada.
- x) Si no existen raíces de una función entonces la función o es siempre positiva o es siempre negativa.

