Universidad Nacional
ARTURO JAURETCHE

Tercer Parcial Análisis Matemático I C3 22/11/2019 Carrera: Bioquímica

Nombre del Alumno:……………………………………….....DNI:..............................Comisión:…...

IMPORTANTE: Uno de los requisitos para aprobar el presente examen es resolver correctamente, al menos, uno de los ejercicios referidos al cálculo de áreas (Ej.4 o Ej.5).
No se permite realizar consultas una vez comenzado el examen.
Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Ejercicio 1- **Hallar** los valores de A, B y C que pertenecen a reales de modo que se verifique la siguiente igualdad:

$$\int_{x=-\pi}^{x=\pi} f(sen\,(x+\pi))\,\frac{cos\,(x+\pi)}{sen\,(x+\pi)}\,dx = A\int_{t=B}^{t=C} \frac{f(t)}{t}\,du$$

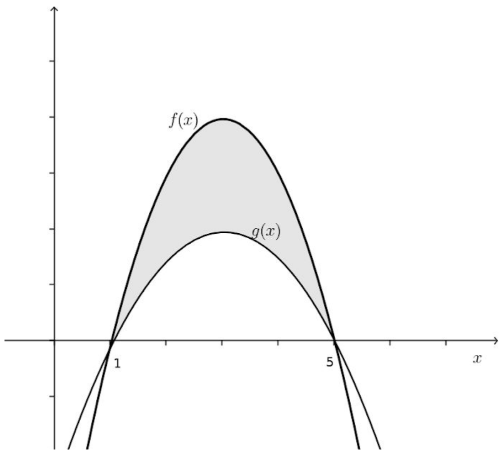
Ejercicio 2- **Hallar** una función $F(x)$ que verifique simultáneamente las siguientes condiciones:

a) $F'(x) = \frac{[ln(x-7)]^2 - ln(x-7)}{x-7}$

b) $F(8) = \frac{1}{2}$

Ejercicio 3- **Calcular** $\int (x.\sqrt{x^2+10} + 4)\,dx$

Ejercicio 4- Sabiendo que $\int_1^5 g(x)\,dx = 9$ y que $2.\int_1^5 f(x)\,dx = 32$ y además el área encerrada entre $f(x)$ y $g(x)$ es la siguiente:



Se pide:

a) **Plantear** la integral que determinaría el cálculo del área de la región sombreada.

b) **Determinar** el valor del área de la región sombreada **justificando** el procedimiento mediante el planteo de las integrales correspondientes.

Ejercicio 5.-

a) **<u>Graficar</u>** la región comprendida entre:

$f(x) = \sqrt{x}$ **,** la recta $y = -\frac{1}{2}x + 4$ y el *eje x*

b) **<u>Calcular</u>** el área de la región del ítem **a)**

Ejercicio 1			Ejercicio 2		Ejercicio 3		Ejercicio 4		Ejercicio 5		Calificación
A	B	C	a	b	Método	Respuesta	a	b	a	b	
0.4	0.8	0.8	1.5	0.5	0.5	1.5	0.5	1.5	0.5	1.5	

Firma Alumno **Firma Docente**

1 Resolución Tercer parcial comisión 3, segundo cuatrimestre de 2019.

1. Ejercicio 1

   (a) Para llegar a la expresión final realizamos una sustitucíon con el siguiente cambio de variables y su respectivo diferencial:

$$\begin{aligned} t &= \sin(x+\pi) && (1)\\ dt &= t'\ dx = \cos(x+\pi)dx && (2)\\ & && (3) \end{aligned}$$

   Los límites de integración en la nueva variable se obtienen evaluando en $t(x)$:

$$\begin{aligned} t(-\pi) &= \sin(-\pi+\pi) = \sin(0) = 0 && (4)\\ t(\pi) &= \sin(\pi+\pi) = \sin(2\pi) = 0 && (5) \end{aligned}$$

   Escribimos la integral en la nueva variable y la igualamos al resultado que presenta el problema en términos de las constantes A, B y C:

$$\int_{x=\pi}^{x=-\pi} f(g(x))\frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)}dx = \int_{t=0}^{t=0}\frac{f(t)}{t}dt = A\int_{t=C}^{t=B}\frac{f(t)}{t}dt \qquad (6)$$

   Para que se verifique la igualdad, planteamos las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} A &= 1 && (7)\\ B &= 0 && (8)\\ C &= 0 && (9) \end{aligned}$$

2. Ejercicio 2

   (a) La función $F(x)$ satisface la condición $F'(x) = \frac{(\ln(x-7))^2-\ln(x-7)}{x-7}$ y por lo tanto es una primitiva de $\frac{(\ln(x-7))^2-\ln(x-7)}{x-7}$. Calculemos la integral indefinida para obtener la función $F(x)$ a menos de una constante que luego se puede calcular de la segunda condición.

$$\begin{aligned} \int\frac{(\ln(x-7))^2-\ln(x-7)}{x-7}dx &= \int\left(t^2-t\right)dt = \frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+c = \frac{(\ln(x-7))^3}{3}-\frac{(\ln(x-7))^2}{2}+c\\ t = \ln(x-7) & && (10)\\ dt = \frac{1}{x-7}dx & && (11) \end{aligned}$$

   Aplicamos el método de sustitución para resolver la integral.

   La función $F(x)$ es de la forma $F(x) = \frac{(\ln(x-7))^3}{3} - \frac{(\ln(x-7))^2}{2} + C$, en donde esta constante no es arbitraria como en la integral indefinida sino que la podemos calcular de la segunda condición

$F(8) = 1/2$.

$$\begin{aligned} F(8) &= \frac{(\ln(8-7))^3}{3} - \frac{(\ln(8-7))^2}{2} + C = 0 + C = \frac{1}{2} && (12) \\ C &= \frac{1}{2} && (13) \end{aligned}$$

Respuesta : $F(x) = \frac{(\ln(x-7))^3}{3} - \frac{(\ln(x-7))^2}{2} + \frac{1}{2}$

3. Ejercicio 3

   (a) Separamos la integral utilizando propiedades de linealidad y luego resolvemos,

$$\begin{aligned} \int \left(x\sqrt{x^2+10} + 4\right) dx &= \int x\sqrt{x^2+10}\, dx + 4\int 1dx && (14) \\ &= \frac{(x^2+10)^{3/2}}{3} + 4x + c && (15) \end{aligned}$$

La segunda integral se obtiene de tabla y la primera se resuelve aplicando el método de sustitución

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x^2+10}dx &= \int t^{1/2}\frac{1}{2}dt = \frac{t^{3/2}}{3} + c = \frac{(x^2+10)^{3/2}}{3} + c && (16) \\ t = x^2 + 10 & && (17) \\ dt = 2xdx & && (18) \\ \frac{1}{2}dt = dx & && (19) \end{aligned}$$

4. Ejercicio 4

   (a)

$$\text{Área} = \int_1^5 (f(x) - g(x))\, dx \quad (20)$$

   (b)

$$\text{Área} = \int_1^5 (f(x) - g(x))\, dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_1^5 g(x)dx = 16 - \text{área dato} = \text{área perdida} = 7 \quad (21)$$

La integral definida $\int_1^5 g(x)dx = 9$ la daba el enunciado del problema y la otra se puede despejar de la condición:

$$\begin{aligned} 2\int_1^5 f(x)dx &= 32 && (22) \\ \int_1^5 f(x)dx &= \frac{32}{2} = 16 && (23) \end{aligned}$$

.

5. Ejercicio 5

(a) Calculamos la intersección de $f(x)$ y la recta,

$$\sqrt{x} = -\frac{1}{2}x + 4 \tag{24}$$

$$x = (4 - 1/2x)^2 \tag{25}$$

$$0 = \frac{1}{4}x^2 - 5x + 16 \tag{26}$$

Elevamos al cuadrado para utilizar la resolvente cuadrática obteniendo $x_1 = 4$ y $x_2 = 16$. Antes de elevar al cuadrado vemos que hay dos restricciones sobre las soluciones de la ecuación, $x > 0$ (dominio de $\sqrt{x}$) y $-\frac{1}{2}x + 4 > 0$ (imagen $\sqrt{x}$). Esto restrige la solución a $x_1 = 4$. Se puede verificar que x_2 no corresponde a la coordenada x de un punto de intersercción. . Realizamos el gráfico y marcamos la región:

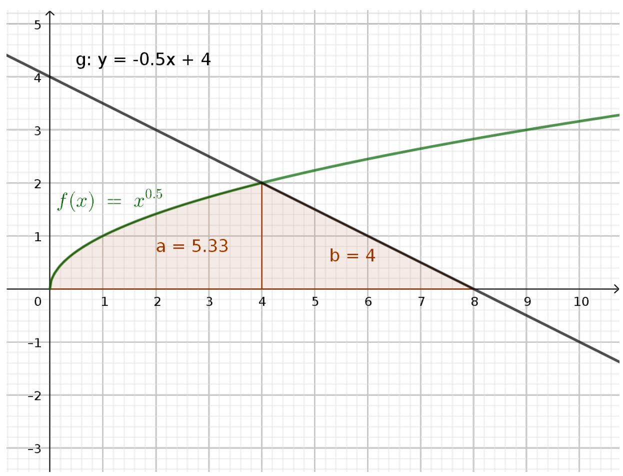


Figure 1: La gráfica del área sombreada.

(b) El área de la región sombrada se puede calcular en términos de la integral definida. En el intervalo $(0, 4)$ el techo es $f(x)$ y en $(4, 8)$ el techo es la recta. El piso siempre es el eje x ($y = 0$).

$$\text{área} = \int_0^4 (x^{1/2} - 0)dx + \int_4^8 \left(-\frac{1}{2}x + 4 - 0\right) dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^4 + -\frac{x^2}{4} + 4x\Big|_4^8 \tag{27}$$

$$= \left(\frac{2}{3}4^{3/2} - \frac{2}{3}0^{3/2}\right) + \left((-\frac{8^2}{4} + 4 * 8) - (-\frac{4^2}{4} + 4 * 4)\right) = \frac{28}{3} \tag{28}$$

Respuesta: el área vale $\frac{28}{3}$