Unidad V

Derivada

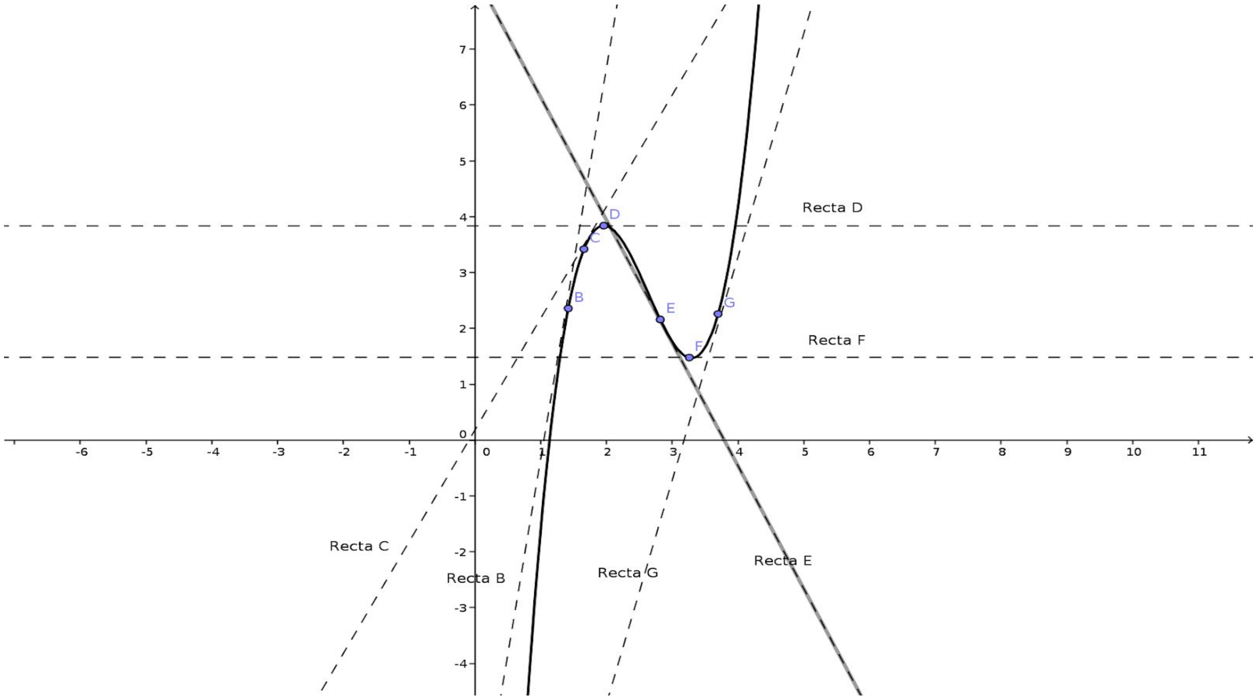
Objetivo
Introducir los conceptos elementales sobre los cambios infinitesimales de una función.

Conceptos necesarios para alcanzar los objetivos
Recta tangente - velocidad instantánea. Definición de derivada. Derivada de funciones elementales. Reglas de derivación. Regla de la cadena. Derivadas sucesivas. Relación entre continuidad y derivabilidad.

Ejercicio 1
Hallar, por definición, la derivada de las siguientes funciones:

1.1 $f(x) = 4$ 1.2 $f(x) = x^2$ 1.3 $f(x) = \sqrt{x}$ 1.4 $f(x) = x^2 + 1$

Ejercicio 2
Determine el signo de cada recta tangente a f(x) :



Ejercicio 3

a) De acuerdo a la función derivada hallada en 1.2 calcular:

a.1 $m = f'(0)$

a.2 $m = f'(1)$

a.3 $m = f'(-1)$

a.4 $m = f'(2)$

a.5 $m = f'(-2)$

b) Si (0,f(0)) , (1,f(1)) , (-1,f(-1)), (2,f(2)) , (-2,f(-2)) son los puntos donde pasa tangente las rectas a f(x), cuyas pendientes fueron calculadas en a) , se pide determinar la ecuación de cada recta tangente asociada a cada punto.

c) Graficar en un mismo sistema de referencia , $f(x)$, los puntos de tangencia y las rectas tangentes encontradas en b).

Ejercicio 4

Mediante el uso de la tabla y de las reglas de derivación, hallar la derivada de cada función dada a continuación:

4.1 $f(x) = x^{3/5}$

4.2 $f(x) = 2x^8$

4.3 $f(x) = 6x^3 - 2x + 6$

4.4 $f(x) = 2.cos(x)$

4.5 $f(x) = sen(x) + 2.cos(x)$

4.6 $f(x) = e^x - 2ln(x)$

4.7 $f(x) = (x+1)^2$

4.8 $f(x) = 4 + e^x - \frac{1}{x}$

Ejercicio 5

Mediante el uso de la tabla y reglas de derivación, hallar la derivada de cada función dada a continuación:

5.1 $f(x) = x.sen(x)$

5.2 $f(x) = sen(x).cos(x)$

5.3 $f(x) = ln(x) \,.\, e^x + 2x$

5.4 $f(x) = 2.cos(x) + x.\sqrt{x}$

5.5 $f(x) = \frac{sen(x)}{x+1}$

5.6 $f(x) = \frac{5+e^x}{sen(x).ln(x)}$

5.7 $f(x) = \frac{2.cos(x)+x.\sqrt{x}}{ln(x)\,.\,e^x}$

5.8 $f(x) = \frac{4+e^x-\frac{1}{x}}{(x+1)^2}$

5.9 $f(x) = arctg(x) + x^3$

5.10 $f(x) = arcsen(x^2).cos(x)$

5.11 $f(x) = arccos(x^4) - sen(ln(x))$

5.12 $f(x) = arcsen(ln(x^2))$

Ejercicio 6

Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f(x) en el punto cuya abscisa es x_o:

6.1 $f(x) = x^3 + 2$ $\quad x_o = 1$; 6.2 $f(x) = 4e^x + x^2 + 3$ $\quad x_o = 0$

6.3 $f(x) = \frac{x+3}{4x-18}$ $\quad x_o = 7$; 6.4 $f(x) = 2.cos(x)$ $\quad x_o = \pi$

Ejercicio 7

Mediante el uso de la tabla y reglas de derivación, hallar la derivada de cada función dada a continuación:

7.1 $f(x) = sen(x+1)$

7.2 $f(x) = [cos(x)]^2$

7.3 $f(x) = ln(x^2+2x-1)$

7.4 $f(x) = (x+3)^3.\sqrt{2-x}$

7.5 $f(x) = \frac{sen(x+1)}{x+1}$

7.6 $f(x) = \frac{5+e^{2x+3}}{sen(x^2)-ln(x+4)}$

7.7 $f(x) = \frac{2.cos(sen(x)+3)}{ln(\sqrt{2-x}\ ).\, e^x}$

7.8 $f(x) = \frac{4+e^{x}-\frac{1}{x}}{(x+1)^2}$

7.9 $f(x) = (\frac{sen(x+1)}{x+1})^3$

7.10 $f(x) = ln(\frac{5+e^{2x+3}}{sen(x^2)-ln(x+4)})$

7.11 $f(x) = \sqrt{\frac{2.cos(sen(x)+3)}{ln(\sqrt{2-x}\ ).\, e^x}}$

7.12 $f(x) = \frac{[cos(x)]^2}{ln(x^2+2x-1)}$

Ejercicio 8

Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f(x) en el punto cuya abscisa es x_o:

8.1 $f(x) = (x-1)^3 - 5$ $\quad x_o = 1$

8.2 $f(x) = (x+2).e^{2x-6}$ $\quad x_o = 3$

8.3 $f(x) = \frac{x+3}{(4x-1)^2}$ $\quad x_o = 0$

8.4 $f(x) = ln(cos(x-\frac{\pi}{2}))$ $\quad x_o = \frac{\pi}{2}$

8.5 $f(x) = sen(ln(x)+\frac{\pi}{6})$ $\quad x_o = 1$

8.6 $f(x) = ln(cos(4x-3)) + 2x$ $\quad x_o = \frac{3}{4}$

8.7 $f(x) = \frac{cos(ln(x))}{x+2}$ $\quad x_o = 1$

Ejercicio 9

9.1 Hallar “k” , que pertenece a reales, de modo que la recta tangente a

$f(t) = 2kt\, cos(t+\pi)$

en $t_0 = \pi$ tenga pendiente igual a 6.

9.2 Hallar "a" que pertenece a reales, tal que $f(x) = \sqrt{x^2+ax+16}$ tal que la recta tangente a $f(x)$ en $x_o = 0$ sea paralela a la recta cuya ecuación es y=2x -16.

9.3 Sea $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ hallar el punto de tangencia (x_o, y_o) entre $f(x)$ y su recta tangente $y = -x + 5$.

Ejercicio 10

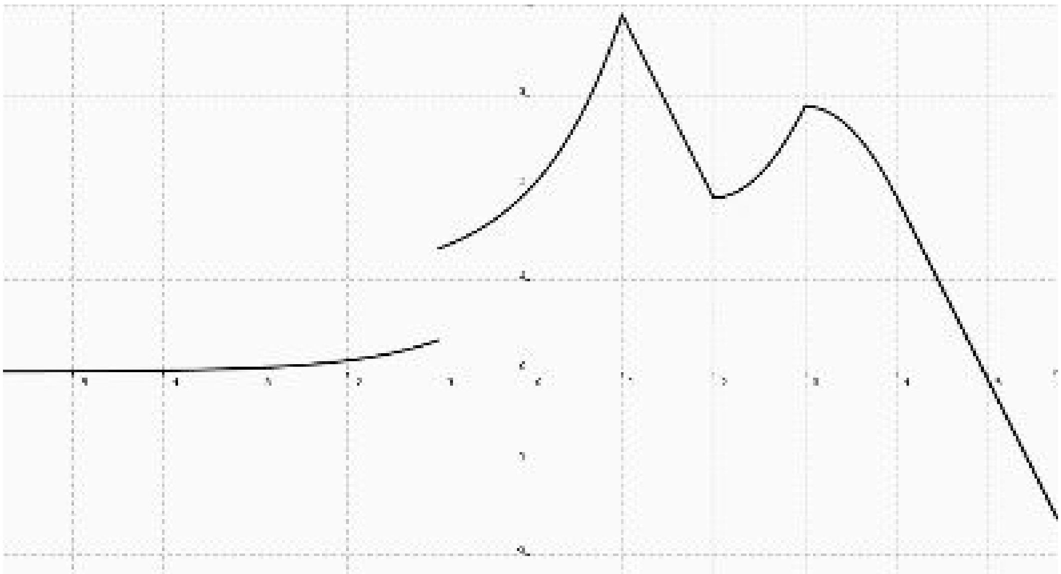
La siguiente gráfica corresponde a una función f(x) definida a trozos, se pide contestar las siguientes preguntas justificando la respuesta:

a) f(x) ¿es derivable en x= -1?

b) f(x) ¿es derivable en x=1?

c) f(x) ¿es derivable en x=2?

d) f(x) ¿es derivable en x=3?
e) f(x) ¿ es derivable en x=4?



Ejercicio 11
11.1 Dada

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{\sqrt{3x+4}-4} & si\ x > 4 \\ 5x + \frac{3}{4} & si\ x \leq 4 \end{cases}$$

a) Determinar si $g(x)$ resulta continua en x= 4
b) Determinar si $g(x)$ resulta derivable en x=4

11.2 Dada

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & si\ x < 1 \\ x^3 + 3x + 2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

a) Determinar si $f(x)$ resulta continua en x= 1
b) Determinar si $f(x)$ resulta derivable en x=1

11.3 Dada

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+2 & si\ x<2\\ (x-3)^2+2 & si\ x\geq 2\end{cases}$$

a) Determinar si $f(x)$ resulta continua en x= 1
b) Determinar si $f(x)$ resulta derivable en x=1

Ejercicio 12

12.1 Dada

$$f(x)=\begin{cases}4x^2+4x+m & si\ x\geq -2\\ -12x-24 & si\ x<-2\end{cases}$$

a) Determinar el valor de “m” que pertenece a reales de modo que f(x) resulte continua en x=-2.
b) Para el valor de “m” hallado determine si f(x) resulta derivable en x=-2

12.2 Dada

$$f(x)=\begin{cases}e^x-m & si\ x\geq 0\\ x.e^{-x^2} & si\ x<0\end{cases}$$

a) Determinar el valor de “m” que pertenece a reales de modo que f(x) resulte continua en x=0.
b) Para el valor de “m” hallado determine si f(x) resulta derivable en x=0.

12.3 Dada

$$f(x)=\begin{cases}e^{x-1}-4r & si\ x\geq 1\\ (x-1)e^{-(x-1)^2} & si\ x<1\end{cases}$$

a) Determinar el valor de “r” que pertenece a reales de modo que f(x) resulte continua en x=1.
b) Para el valor de “r” hallado determine si f(x) resulta derivable en x=1.

12.4 Dada

$$f(x)=\begin{cases}x^2-nx-1 & si\ x\geq 3\\ 2x+\ln\left(x^2-8\right) & si\ x<3\end{cases}$$

a) Determinar el valor de “n” que pertenece a reales de modo que f(x) resulte continua en x=3.
b) Para el valor de “n” hallado determine si f(x) resulta derivable en x=3.

Integrador

Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales son falsas. En el caso que resulten falsas justifique el por qué.

1) Calcular la derivada por definición implica calcular un …………………………………...
2) Si $f(x)$ posee una asintota vertical en x=x_o entonces la derivada en x_o …………. ……..
3) La gráfica de una función posee infinitos puntos y en cada punto se asocia a una única recta………………..
4) Si (x_o, y_o) es un punto de tangencia , entonces el mismo pertenece a $f(x)$ y a ………….

Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales son falsas. Justifique en todos los casos la elección escogida:

i) Si $f(x)$ es continua en x_o entonces $f(x)$ también es derivable en x_o .
ii) Si $f(x)$ es derivable en x_o entonces $f(x)$ también es continua en x_o .
iii) Si $f(x)$ no es continua en x_o entonces $f(x)$ no es derivable en x_o .
iv) Si $f(x)$ no es derivable en x_o entonces $f(x)$ no es continua en x_o .
v) Que $f(x)$ sea derivable en x_o no implica que $f(x)$ sea continua en x_o .