Unidad IV

Límite y Continuidad

Objetivos

Introducir conceptos de cálculo infinitesimal

Conceptos teóricos requeridos para cumplir los objetivos:

Noción de límite. Cálculo de límites. Álgebra de límites. Límites finitos e infinitos. Indeterminaciones.

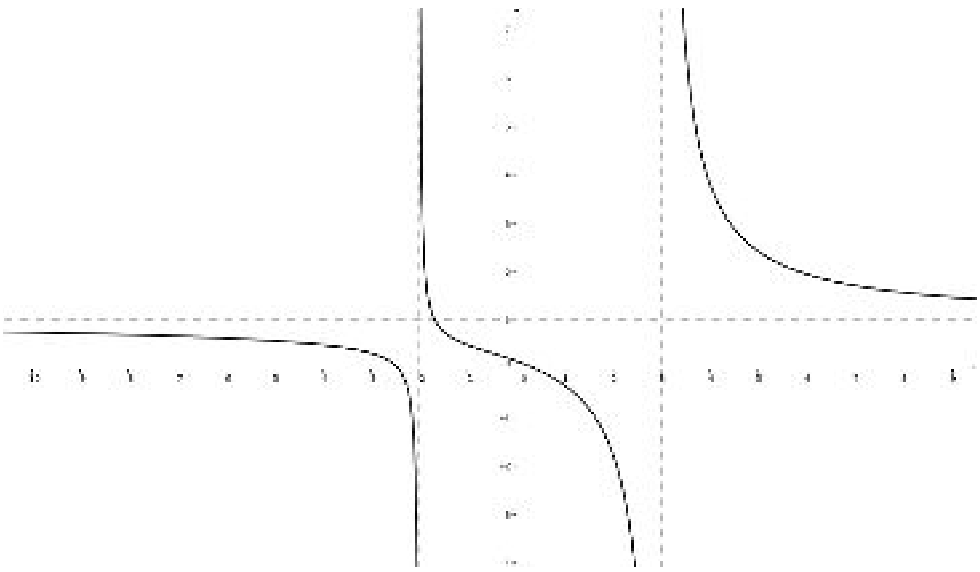
Ejercicio 1

Dado los siguientes gráficos determinar, si existen los siguientes límites:

1.1 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

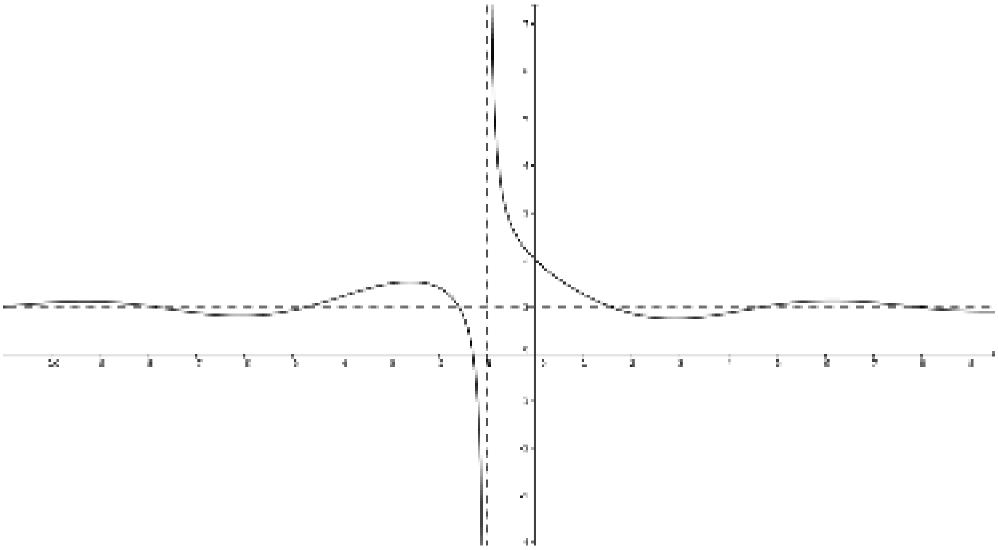
$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) =$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) =$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) =$

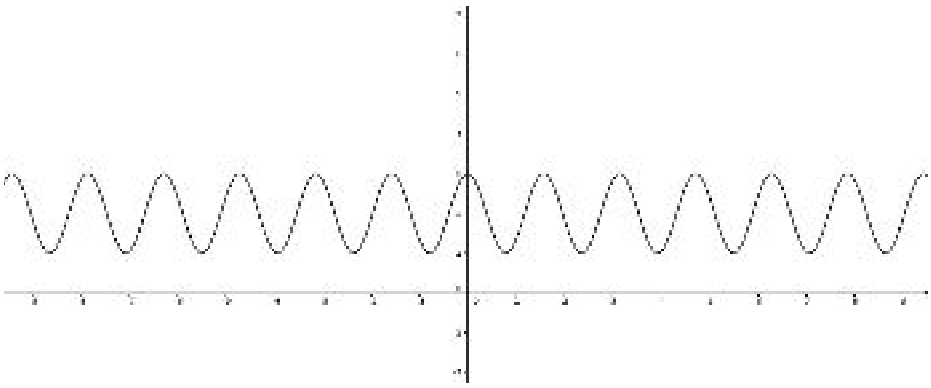


1.2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$

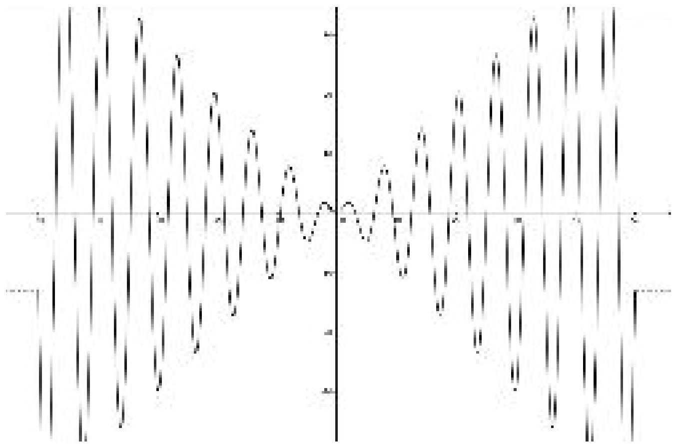
$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) =$; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) =$



1.3 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$

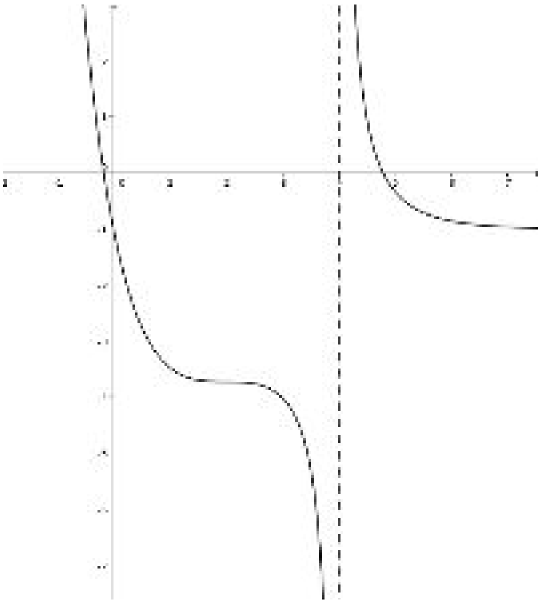


1.4 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$



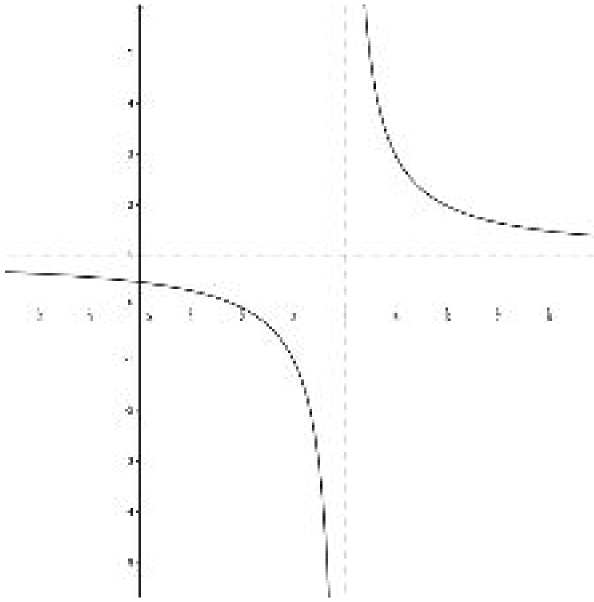
1.5 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$;

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) =$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) =$;



1.6 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

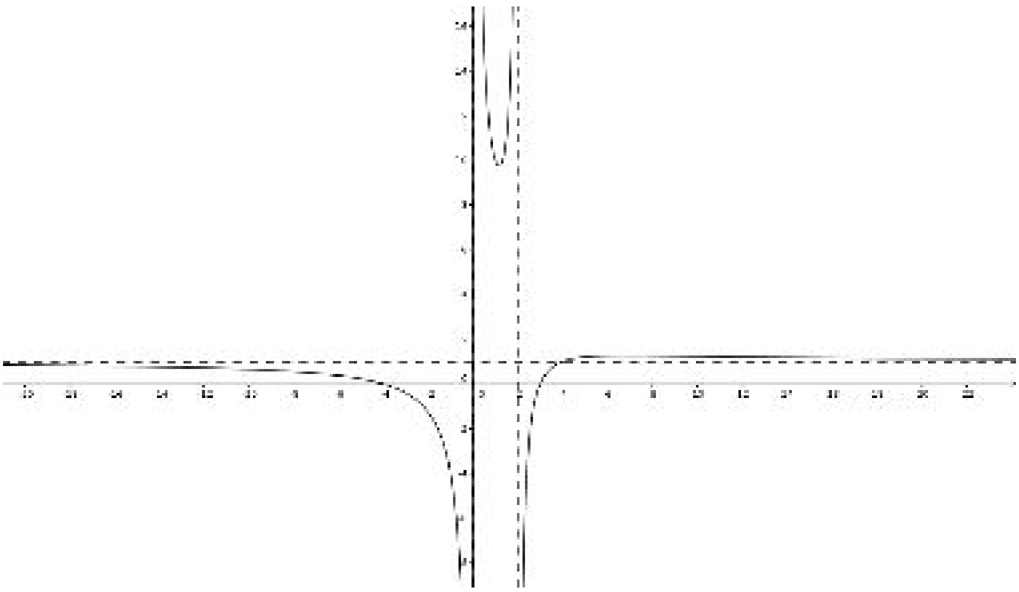
$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) =$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) =$



1.7 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) =$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) =$



Ejercicio 2

Resolver los siguientes límites:

2.1 $\lim\limits_{x\to+\infty} -x+4 =$ 2.2 $\lim\limits_{x\to-\infty} -x+4 =$ 2.3 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-1 =$

2.4 $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-1 =$ 2.5 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x =$ 2.6 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x =$

2.7 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} =$ 2.8 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} =$ 2.9 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{x^5} =$

2.10 $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(x) =$ 2.11 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} =$ 2.12 $\lim\limits_{x\to+\infty} sen(x) =$

2.13 $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^2-2x-16 =$ 2.14 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+x =$ 2.15 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+x =$

2.16 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x+5}+12 =$ 2.17 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x+5}+12x =$ 2.18 $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-x-3} =$

Ejercicio 3

Calcular los siguientes límites: $\frac{\infty}{\infty}$

3.1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-3}{2x-5} =$ 3.2 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-3}{2x-5} =$ 3.3 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{8x^2+7}{4x^2-2x-1} =$

3.4 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{8x^2+7}{4x^2-2x-1} =$ 3.5 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x}{2x+6} =$ 3.6 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x}{2x+6} =$

3.7 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-3}{x^2+2x-1} =$ 3.8 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-3}{x^2+2x-1} =$ 3.9 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+3}{3x^7+6x^2-x} =$

3.10 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+3}{3x^7+6x^2-x}$ 3.11 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^5+2x-1}{x^2+6x-9} =$ 3.12 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^5+2x-1}{x^2+6x-9} =$

3.13 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{e^x} =$ 3.14 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{e^x} =$ 3.15 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x} =$

3.16 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x-3).(x+4)}{7x^2+2} =$ 3.17 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x-3).(x+4)}{7x^2+2} =$ 3.18 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x^3}}{x^3 .\sqrt{x}} =$

3.19 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x-3}{2x-5}}+4 =$ 3.20 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{8x^2+7}{4x^2-2x-1}} =$ 3.21 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{54x^3+2x-5}{2x^3+16}} =$

3.22 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+6x} - \frac{2x-4}{x^2-3x} =$ 3.23 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+6x} + \frac{2x-4}{x^2-3x} =$ 3.24 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[5]{\frac{1}{x^2+6x} + \frac{2x-4}{x^2-3x}} =$

Ejercicio 4

Calcular los siguientes límites: $\infty - \infty$

4.1 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^9 - 5x^5 + 3 =$ 4.2 $\lim\limits_{x\to-\infty} x^9 - 5x^5 + 3 =$ 4.3 $\lim\limits_{x\to-\infty} x^9 + 5x^5 + 3 =$

4.4 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^9 + 5x^5 + 3 =$ 4.5 $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} + x =$ 4.6 $\lim\limits_{x\to-\infty} x - \sqrt{x^2 + 1} =$

4.7 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}-x}{x+7} =$ 4.8 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3}{x+1} - \frac{x^2}{x-2} =$ 4.9 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-3} - \sqrt{x+3} =$

Ejercicio 5

Dar en los casos que existan, las ecuaciones de las asíntotas horizontales de las funciones dadas de manera gráfica en el ejercicio N°1.

Ejercicio 6

Calcular, si existen, las asíntotas horizontales de las siguientes funciones:

6.1 $f(x) = \frac{3x-5}{2x-4}$ 6.2 $f(t) = \frac{8t-5}{4t-3}$ 6.3 $f(u) = \frac{u-1}{u^2+4u-5}$ 6.4 $g(u) = \frac{3u^4+5u+4}{u^3+u^2-2u}$

6.5 $f(x) = 2ln(x)$ 6.6 $f(t) = 2e^{t}$ 6.7 $f(u) = e^{u} + 3$ 6.8 $g(u) = e^{-u} + 3$

Ejercicio 7

Determinar k, que pertenece a reales, de modo que se cumplan las siguientes igualdades:

7.1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+7}{kx-2} = 2$

7.2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{kx^2-4x+1}{8x^2-x-2} = 3$

7.3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2kx^2-4x+1}{8x^2-x-2} = -1$

7.4) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{x-4} + 3k = 27$

Ejercicio 8

Determinar k,que pertenece a reales, de modo que:

8.1) $f(x) = \frac{3x+7}{kx-2}$ tenga asintota horizontal en y= 2

8.2) $f(x) = \frac{kx^2-4x+1}{8x^2-x-2}$ tenga asintota horizontal en y= 3

8.3) $f(x) = \frac{2kx^2-4x+1}{8x^2-x-2}$ tenga asintota horizontal en y= -1

8.4) $f(x) = 2e^{x-4} + 3k$ tenga asintota horizontal en y= 27

Ejercicio 9

Resolver los siguientes límites:

9.1 $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x} =$ 9.2 $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} =$ 9.3 $\lim\limits_{x\to4^-} \frac{1}{x-4} =$

9.4 $\lim\limits_{x\to4^+} \frac{1}{x-4} =$ 9.5 $\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{3x-2}{x+1} =$ 9.6 $\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{3x-2}{x+1} =$

9.7 $\lim\limits_{x \to 0^-} ln(x) =$ 9.8 $\lim\limits_{x \to 0^+} ln(x) =$ 9.8 $\lim\limits_{x \to 0^-} ln(-x) =$

9.9 $\lim\limits_{x \to 0^+} ln(-x) =$ 9.10 $\lim\limits_{x \to 1^+} ln(x-1) =$ 9.11 $\lim\limits_{x \to 1^-} ln(x-1) =$

9.12 $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{e^x}{x-1} =$ 9.13 $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{e^x}{x-1} =$ 9.14 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x+3}{4x^2+12x-16} =$

Ejercicio 10

Resolver los siguientes límites: $\frac{0}{0}$

10.1 $\lim\limits_{x \to -6} \frac{3x^2+21x+18}{x+6} =$ 10.2 $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2-16} =$ 10.3 $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2-2x-8}{x^2+3x+2} =$

10.4 $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-\sqrt{3x+10}} =$ 10.5 $\lim\limits_{x \to 4} \frac{2x-8}{\sqrt{x^2-7}-3} =$ 10.6 $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2-\sqrt{x^2-5}}{x-3} =$

10.7 $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(2x-4)\, ln(x)}{x^2-4x+4} =$ 10.8 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{xe^x - e^x}{x-1} =$ 10.9 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x ln(x) - ln(x)}{x-1} =$

Ejercicio 11

Dar en los casos que existan,las ecuaciones de asintotas verticales de las funciones dadas de manera gráfica en el ejercicio N°1.

Ejercicio 12

Calcular, si existen, las ecuaciones de las asíntotas verticales de las siguientes funciones:

12.1 $f(x) = \frac{3x-5}{2x-4}$ 12.2 $f(t) = \frac{8t-5}{4t-3}$ 12.3 $f(u) = \frac{u-1}{u^2+4u-5}$ 12.4 $g(u) = \frac{3u^4+5u+4}{u^3+u^2-2u}$

12.5 $f(x) = 2ln(x)$ 12.6 $f(t) = 2e^{\frac{1}{3-t}}$ 12.7 $f(u) = \frac{u-1}{ue^u - e^u}$ 12.8 $g(u) = \frac{e^{-u}+3}{u+8}$

Ejercicio 13

Hallar k ,que pertenece a reales, de modo que:

13.1 $\lim\limits_{x \to -1} \frac{3x-5}{2x-k} = \infty$

13.2 $\lim\limits_{x \to 7} \frac{8t-5}{kt-3} = \infty$

13.3 $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3\,(t+4).(t-1)}{5kt-3} = \infty$

Ejercicio 14

Hallar k ,que pertenece a reales, de modo que:

14.1 $f(x) = \frac{3x-5}{2x-k}$ tenga una asintota vertical en x=-1

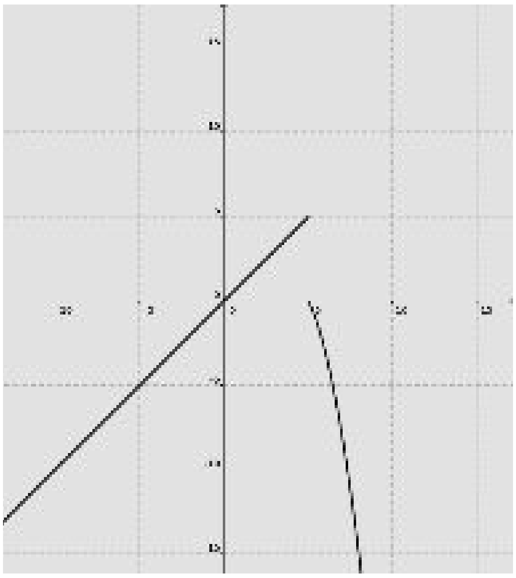
14.2 $f(t) = \frac{8t-5}{kt-3}$ tenga una asintota vertical en x=7

14.3 $g(t) = \frac{3\,(t+4).(t-1)}{5kt-3}$ tenga una asintota vertical en x=2

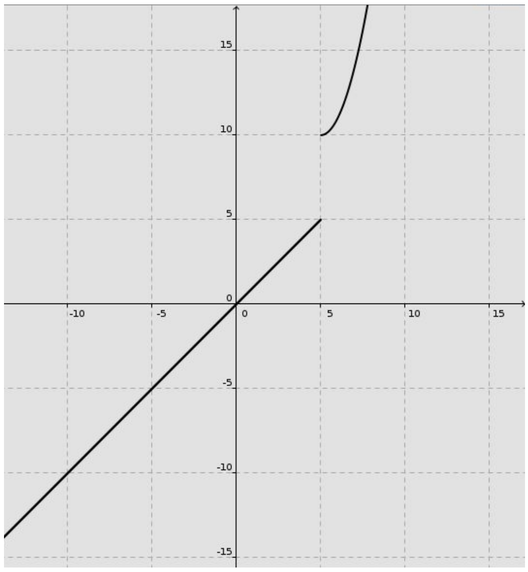
Ejercicio 15

a) Determine cuáles de las siguientes gráficas presentan discontinuidad:

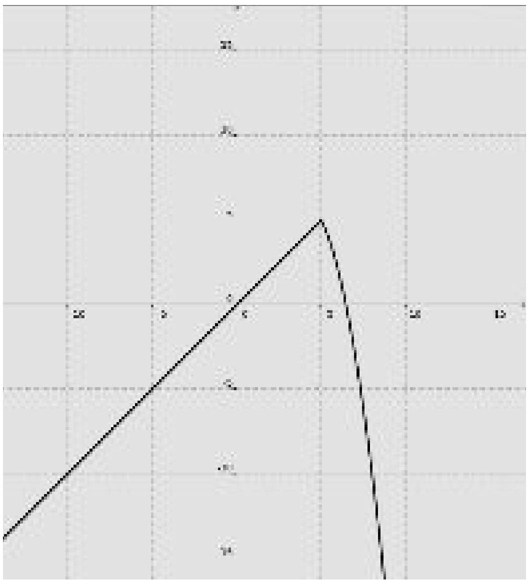
i)



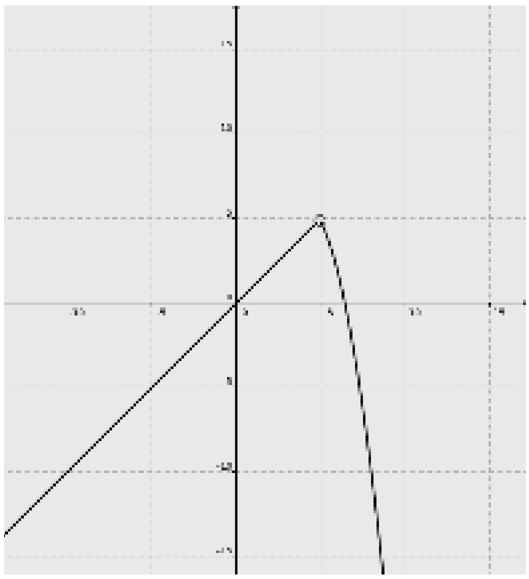
ii)



iii)



iv)



b) Para cada grafica anterior calcule $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$.

c) ¿Qué relación encuentra entre los resultados del ítem a) con los resultados obtenidos en el ítem b)?

d) ¿Determinar en qué casos no existe f(5)?

c) Cuál de las gráficas anteriores resulta ser continua en x=5?

Ejercicio 16

16.1 Determinar si f(x) resulta continua en x=5

$$f(x)=\begin{cases} x & si\, x\leq 5 \\ -(x-4)^2+6 & si\, x>5 \end{cases}$$

16.2 Determinar si f(x) resulta continua en x=5

$$f(x)=\begin{cases} x & si\, x\leq 5 \\ (x-5)^2+10 & si\, x>5 \end{cases}$$

16.3 Determinar si f(x) resulta continua en x=-6

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3x^2+21x+18}{x+6} & si\, x<-6 \\ (x+1)^2+2 & si\, x\geq -6 \end{cases}$$

16.4 Determinar si f(x) resulta continua en x= 0

$$f(x)=\begin{cases} \frac{e^x}{2}-xe^x+\frac{1}{2} & si\, x\geq 0 \\ \frac{x^2e^x-xe^x}{x^3-x} & si\, x<0 \end{cases}$$

Ejercicio 17

Determinar el valor de k que pertenece a reales de modo que:

17.1 f(x) resulta continua en x=5

$$f(x)=\begin{cases} 2e^{x-5}+1 & si\, x>5 \\ -(x-2)^2+k & si\, x\leq 5 \end{cases}$$

17.2 f(x) resulta continua en x=3

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & si\ x < 3 \\ 2 + kx & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

17.3 f(x) resulta continua en x=1

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & si\ x < 1 \\ x^3 + 3x + k & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 18

Determinar el valor de b que pertenece a reales de modo que f(x) resulte continua en x=-2 y en x=2 siendo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-16}{x^2-4} & si\ x \neq -2\ \ y\ \ x \neq 2 \\ b + 3x^2 & si\ x = -2\ \ y\ \ x = 2 \end{cases}$$

Integrador

Complete las siguientes afirmaciones:

1) Una función es continua en $x = a$ si $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) =$.........
2) Si $y = L$ resulta ser una asíntota horizontal entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) =$ …….
3) Si $x = a$ resulta ser una asíntota vertical $\lim_{x\to a} f(x) =$ …….

Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales son falsas. Justifique en todos los casos, la elección escogida.

i) Si $x = a$ es asintota vertical de f(x) entonces $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

ii) Una función es continua en $x = a$ *si* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) \neq f(a)$

iii) El límite de una función es único.