Universidad Nacional ARTURO JAURETCHE

Tercer Parcial Análisis Matemático I **C1** **21/11/2019** **Carrera: Bioquímica**

Nombre del Alumno:………………………………………….........DNI:............................Comisión:…...

IMPORTANTE: Uno de los requisitos para aprobar el presente examen es resolver correctamente, al menos, uno de los ejercicios referidos al cálculo de áreas (Ej.4 o Ej.5).   **No se permite realizar consultas una vez comenzado el examen.**   **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

Ejercicio 1- **Hallar** los valores de A, B y C que pertenecen a reales de modo que se verifique la siguiente igualdad:

$$\int_{x=\pi/2}^{x=\pi} f(\cos(x-\pi))\,\frac{sen(x-\pi)}{\cos(x-\pi)}\,dx = 2A\int_{z=C}^{z=B}\frac{f(z)}{z}\,dz$$

Ejercicio 2- **Hallar** una función $F(x)$ que verifique las siguientes condiciones:

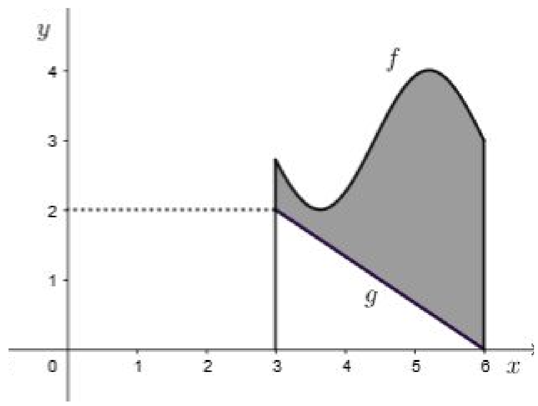
a) $F'(x) = 4.ln(x)$

b) $F(1) = -7$

Ejercicio 3- **Calcular** $\int\left(\frac{\cos(ln(x))}{x} - 16\right) dx$

Ejercicio 4-

Se sabe que $\int_3^6 f(x)\,dx = 3 + \int_0^3 2\,dx$



a) **Plantear** la integral que determinaría el cálculo del área sombreada referida a la figura anterior.

b) **Calcular** el valor del área de la región sombreada del inciso a) **Justificando** su respuesta .

Ejercicio 5.-

a) **<u>Graficar</u>** la región comprendida entre:

$f(x) = \sqrt{x}$, la recta $y = -\frac{1}{2}x + 4$ y el *eje y*

b) **<u>Calcular</u>** el área de la región del ítem **a)**

Ejercicio 1			Ejercicio 2		Ejercicio 3		Ejercicio 4		Ejercicio 5		Calificación
A	B	C	a	b	Método	Respuesta	a	b	a	b	
0.4	0.8	0.8	1.5	0.5	0.5	1.5	0.5	1.5	0.5	1.5	

Firma Alumno **Firma Docente**

1 Resolución Tercer parcial comisión 1, segundo cuatrimestre de 2019.

1. Ejercicio 1

   (a) Para llegar a la expresión final realizamos una sustitucíon con el siguiente cambio de variables y su respectivo diferencial:

   $$z = \cos(x-\pi) \tag{1}$$
   $$dz = z'\,dx = -\sin(x-\pi)dx \tag{2}$$
   $$-dz = \sin(x-\pi)dx \tag{3}$$

   Los límites de integración en la nueva variable se obtienen evaluando en $z(x)$:

   $$z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\frac{\pi}{2}-\pi) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0 \tag{4}$$
   $$z(\pi) = \cos(\pi-\pi) = \cos(0) = 1 \tag{5}$$

   Escribimos la integral en la nueva variable obteniendo y la igualamos al resultado que presenta el problema en términos de las constantes A, B y C:

   $$\int_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} f(\cos(x-\pi))dx = -\int_{z=0}^{z=1} \frac{f(z)}{z}dz = 2A\int_{z=C}^{z=B} \frac{f(z)}{z}dz \tag{6}$$

   Para que se verifique la igualdad, planteamos las siguientes condiciones

   $$2A = -1 \to A = -\frac{1}{2} \tag{7}$$
   $$B = 1 \tag{8}$$
   $$C = 0 \tag{9}$$

2. Ejercicio 2

   (a) La función $F(x)$ satisface la condición $F'(x) = 4\ln(x)$ y por lo tanto es una primitiva de $4\ln(x)$. Calculemos la integral indefinida para obtner la función $F(x)$ a menos de una constante que luego se puede calcular de la segunda condición.

   $$\int 4\ln(x)dx = 4\int \ln(x)dx = 4(x\ln(x)-x)+c \tag{10}$$

   Se integró el logaritmo por método de partes,

   $$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \tag{11}$$

   Aplicado al logaritmo obtenemos

   $$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int 1dx = x\ln(x)-x+c \tag{12}$$
   $$f(x) = \ln(x) \longrightarrow f'(x) = 1/x \tag{13}$$
   $$g'(x) = 1 \longrightarrow g(x) = x \tag{14}$$

La función $F(x)$ es de la forma $F(x) = 4\left(x\ln(x) - x\right) + C$, en donde esta constante no es arbitraria como en la integral indefinida sino que la podemos calcular de la segunda condición $F(1) = -7$.

$$\begin{aligned} F(1) &= 4(\ln(1) - 1) + C = -7 && (15)\\ -4 + C &= -7 && (16)\\ C &= -3 && (17) \end{aligned}$$

Respuesta : $F(x) = 4\left(x\ln(x) - x\right) - 3$

3. Ejercicio 3

   (a) Separamos la integral utilizando propiedades de linealidad y luego resolvemos,

$$\begin{aligned} \int\left(\frac{\cos(\ln(x))}{x} - 16\right)dx &= \int\frac{\cos(\ln(x))}{x}dx - 16\int 1dx && (18)\\ &= \sin(\ln(x)) - 16x + c && (19) \end{aligned}$$

   La segunda integral se obtiene de tabla y la primera se resuelve aplicando el método de sustitución

$$\begin{aligned} \int\frac{\cos(\ln(x))}{x}dx &= \int\cos(t)dt = \sin(t) + c = \sin(\ln(x)) + c && (20)\\ t = \ln(x) & && (21)\\ dt = \frac{1}{x}dx & && (22) \end{aligned}$$

4. Ejercicio 4

   (a)

$$\text{Área} = \int_3^6 \left(f(x) - g(x)\right)dx \qquad (23)$$

   (b)

$$\text{Área} = \int_3^6 \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int_3^6 f(x)dx - \int_3^6 g(x)dx = 6 - \frac{b*h}{2} = 3 \qquad (24)$$

   La primera integral definida $\int_3^6 f(x)dx$ la daba el enunciado del problema y la segunda se puede obtener del área del triangulo formado entre la gráfica de $g(x)$ y el eje x.

$$\int_3^6 g(x)dx = \int_3^6 (g(x) - 0)dx = \frac{b*h}{2} = \frac{3*2}{2} = 3 \qquad (25)$$

   donde b es la base y h la altura del triangulo.

$$\int_3^6 f(x)dx = 3 + \int_0^3 2dx = 3 + 2\int_0^3 1dx = 3 + 2x\Big|_0^3 = 6 \qquad (26)$$

.

5. Ejercicio 5

(a) Calculamos la intersección de $f(x)$ y la recta,

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= -\frac{1}{2}x+4 & (27)\\ x &= (4-1/2x)^2 & (28)\\ 0 &= \frac{1}{4}x^2-5x+16 & (29)\end{aligned}$$

Elevamos al cuadrado para utilizar la resolvente cuadrática obteniendo $x_1 = 4$ y $x_2 = 16$. Antes de elevar al cuadrado vemos que hay dos restricciones sobre las soluciones de la ecuación, $x > 0$ (dominio de $\sqrt{x}$) y $-\frac{1}{2}x+4 > 0$ (imagen $\sqrt{x}$). Esto restrige la solución a $x_1 = 4$. Se puede verificar que x_2 no corresponde a la coordenada x de un punto de interserccción. Luego la coordenada y de la intersección con el eje y se obtiene evaluando en $x = 0$. Obtenemos que $f(x) = 0$ y la recta se corta en $y = 4$ (ordenada al origen). Realizamos el gráfico y marcamos la región:

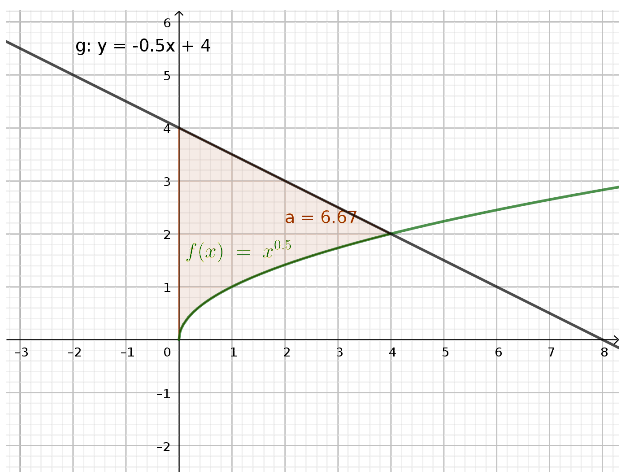


Figure 1: La gráfica del área sombreada.

(b) El área de la región sombrada se puede calcular en términos de la integral definida. El techo es la recta $g(x) = 4 - 0.5x$ y el piso el $f(x)$.

$$\begin{aligned}\text{área} &= \int_0^4 (g(x)-f(x))dx = \int_0^4 (4-0.5x-x^{1/2})dx = (4x-\frac{1}{4}(x)^2-\frac{2}{3}x^{3/2})\Big|_2^{11} & (30)\\ &= \left((4*4-\frac{1}{4}(4)^2-\frac{2}{3}4^{3/2})-(4*0-\frac{1}{4}(0)^2-\frac{2}{3}0^{3/2})\right) = \frac{20}{3} & (31)\end{aligned}$$

Respuesta: El área vale $\frac{20}{3}$.