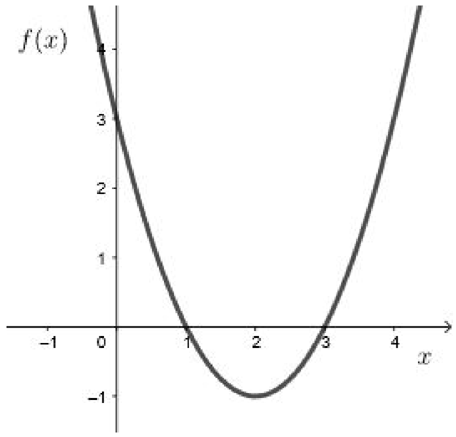
Segundo Parcial -Análisis Matemático I **C1** **30/10/2019** **Carrera: Bioquímica**

Nombre del Alumno:………………………………………………………………….Comisión:…..

IMPORTANTE: Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas y no se permite que el estudiante realice consultas sobre la resolución del examen una vez comenzado el mismo.

Ejercicio 1-

Sea $f(x)$ la función cuadrática cuyo gráfico es el siguiente:



a) **<u>Hallar</u>** la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x)$ en $x_0 = 0$.

b) **<u>Graficar</u>** la recta tangente hallada en el ítem a) sobre el mismo sistema de referencia donde está la parábola del enunciado.

Ejercicio 2-

a) **<u>Determinar</u>** si $f(x) = \frac{x}{1-cos(3x)+6x}$ posee asintota vertical en $x = 0$. **<u>Justificar</u>**.

b) **<u>Calcular</u>** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{ln(x)}$ y **<u>determinar</u>**, si existe, la ecuación de la asíntota horizontal correspondiente.

Ejercicio 3- (Problema)

La concentración de un fármaco en el torrente sanguíneo t minutos después de ser inyectado en un determinado paciente, está dado por la siguiente expresión:

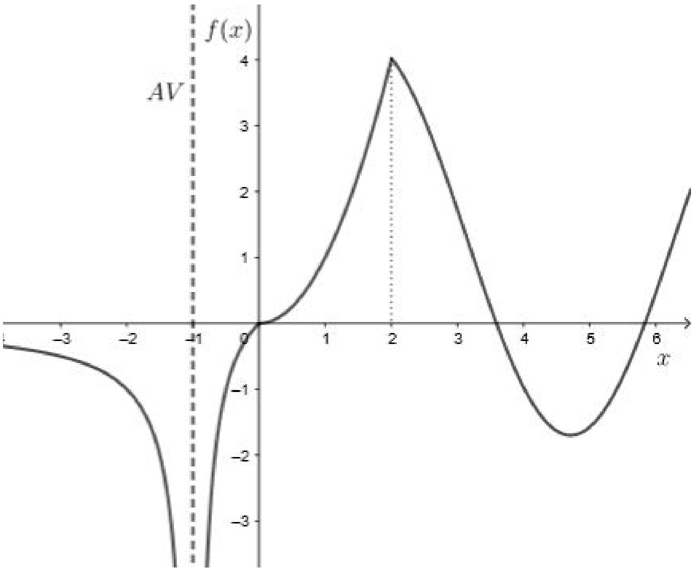
$$C(t) = \frac{6t+4}{2t^2+\frac{1}{2}} \; .$$

a) **<u>Determinar</u>** para qué valores de t la concentración $C(t)$ crece y cuando decrece.

b) **<u>Determinar</u>** <u>dónde</u> la concentración alcanza su valor máximo y <u>cuánto</u> vale dicho valor.

Ejercicio 4 -

Dado el siguiente gráfico correspondiente a $f(x)$



a) **<u>Determinar</u>** el dominio de $f(x)$ y el dominio de $f\,'(x)$.
b) **<u>Determinar</u>** donde $f(x)$ no resulta derivable. **<u>Justificar respuesta.</u>**

Ejercicio 5-

Sea el dominio de $f(x)$: $R - \{-4, 4\}$ **y** sea $f\,'(x) = \frac{-x^2+10x-16}{(x^2-16)^{2}}$ la derivada de $f(x)$, **<u>determinar</u>**:

a) Intervalo/s de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
b) Máximo/s y/o mínimo/s de $f(x)$**.** **<u>Justificar.</u>**

Ítem	Ejercicio 1		Ejercicio 2		Ejercicio 3. P		Ejercicio 4		Ejercicio 5		Total
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	
Puntaje	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Firma alumno **Firma docente**

1 Resolución Segundo parcial comisión 1, segundo cuatrimestre de 2019.

1. Ejercicio 1

   (a) Para calcular la recta tangente necesitamos determinar la función primero. Se puede obtener la expresión análitica de función cuadrática $f(x)$ observando el gráfico que indica que tiene dos raices en $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$ y pasa por el punto $(0, 3)$. La función cuadrática en su forma factorizada es $f(x) = a(x-1)(x-3)$ y el parámetro a se puede calcular de la condición que pasa por el $(0, 3)$ y por lo tanto,

   $$f(0) = 3 \tag{1}$$
   $$a(-1)(-3) = 3 \tag{2}$$
   $$a = 1 \tag{3}$$

   La función la escribimos en su forma polínomica distribuyendo $f(x) = (x-1)(x-3) = x^2-4x+3$. Calculamos la ecuación de recta tangente al punto de coordenada $x_0 = 0$ obteniendo primero la pendiente m_T y luego despejamos la ordenada al origen imponiendo que pasa por el punto $(0, (f(0)))$. La pendiente se obtiene de la derivada de la función en $x = 0$.

   $$f'(x) = (x^2 - 4x + 3)' = 2x - 4 \tag{4}$$
   $$m_T = f'(0) = -4 \tag{5}$$

   La recta tangente tiene ecuación $y = -4x + b$ y el parámetro b se calcula sabiendo que pasa por el punto $(0, 3)$ $(f(0) = 3)$:

   $$3 = -4 * 0 + b \tag{6}$$
   $$3 = b \tag{7}$$

   Respuesta: La recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(0, 3)$ tiene ecuación $y = -4x + 3$.

   (b) La gráfica de $f(x)$ y la recta tangente se observa a continuación

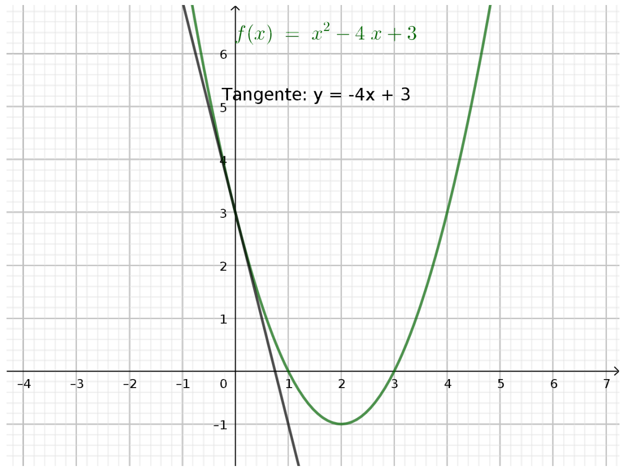


Figure 1: Gráfica de la función $f(x)$ y la recta tangente

2. Ejercicio 2

(a) La función posee una asíntota vertical en $x = 0$ si y sólo si algń límite lateral tiende a infinito cuando $x \to 0$. Vamos considerar el límite a secas que corresponde al resultado para los dos laterales.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1 - \cos 3x + 6x} \quad = \quad \lim_{x\to 0} \frac{x'}{(1 - \cos 3x + 6x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + \sin 3x3 + 6} = \frac{1}{6} \tag{8}$$

El límite presenta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ que se puede resolver aplicando l 'Hopital. El resultado es $\frac{1}{6}$ y por lo tanto no posee asíntota vertical en $x = 0$.

(b)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 1}{\ln x} \quad = \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x\to\infty} 2x^2 = +\infty \tag{9}$$

El límite presenta una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ que se puede resolver mediante el teorema de L ' Hopital derivando el numerador y denominador. El resultado es divergente e implica que no posee asíntota horizontal por derecha.

3. Ejercicio 3

(a) Para determinar cuando la concentración crece y decrece tenemos que estudiar el signo de la derivada de la función $C(t)$. Este análisis también nos permite determinar los extremos locales de la función (máximos y mínimos). El dominio de la fución lo vamos a restringir a valores positivos del tiempo.

$$\mathrm{Dom}(f(x)) = (0, +\infty) \tag{10}$$

Derivamos la función concentración para estudiar el signo y las raices

$$\begin{aligned} C'(t) &= \frac{6 * (2t^2 + \frac{1}{2}) - (6t + 4) * 4t}{(2t^2 + \frac{1}{2})^2} && (11) \\ &= \frac{-12t^2 - 16t + 3}{(2t^2 + \frac{1}{2})^2} && (12) \end{aligned}$$

El dominio de la derivada es mismo que el de la función. Los puntos críticos corresponden a las raices de la derivada:

$$\begin{aligned} C'(t) &= 0 && (13) \\ \frac{-12t^2 - 16t + 3}{(2t^2 + \frac{1}{2})^2} &= 0 && (14) \\ -12t^2 - 16t + 3 &= 0 && (15) \end{aligned}$$

Aplicando resolvente de las cuadráticas se obtienen como raices $t_1 = -\frac{3}{2}$ y $t_2 = \frac{1}{6}$. El punto crítico que nos va a interesar es el t_2 que pertenece al dominio de $C(t)$ Analizamos el signo de la derivada aplicando Bolzano en la tabla 1 y obtenemos los intervalos de creciemiento y decrecimiento que nos permiten analizar si los puntos críticos son extremos. El análisis se realiza sobre el dominio de la función.

	$(0, \frac{1}{6})$	$\frac{1}{6}$	-$(\frac{1}{6}, +\infty)$
$f'(x)$	$f'(0.1) > 0$	0	$f'(1) < 0$
$f(x)$	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Table 1: Análisis de C'_+ y C'_- aplicando teorema de Bolzano

Respuesta:La concentración crece en $\mathrm{I}^+ = \{(0, 1/6)\}$ y decrece en $\mathrm{I}^- = \{(1/6, +\infty)\}$.

(b) Respuesta: De la tabla se puede inferir que posee un máximo en el tiempo $t = 1/6$ y vale $f(1/6) = 9$.

4. Ejercicio 4

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}(f(x)) &= \mathbb{R} - \{-1\} && (16) \\ \mathrm{Dom}(f'(x)) &= \mathbb{R} - \{-1, 2\} && (17) \end{aligned}$$

(b) En $x = -1$ la función no es continua y por lo tanto no es derivable. En $x = 2$ los límites laterales no coinciden y genera la apariencia puntiaguda que implica que no es derivable y no se puede definir la recta tangengte en ese punto.

.

5. Ejercicio 5

(a) El dominio de la derivada coincide con el de la función y vale $\mathrm{Dom} f'(x) = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$.Se pueden analizar el crecimiento a partir del signo de la derivada utlizando el Teorema de Bolzano. Los puntos críticos, que son los candidatos a extremos, corresponden a los ceros de la derivada. Estos puntos críticos, juntos con los puntos que excluimos del dominio (recordar que el teorema de Bolzano requiere que la función sea continua), nos permiten plantear la tabla 2 y calcular el conjunto de postividad y negatividad de la derivada. Los puntos críticos se obtienen a partir de

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 10x - 16}{(x^2 - 16)^2} = 0 \tag{18}$$

$$-x^2 + 10x - 16 = 0 \tag{19}$$

Aplicando la resolvente de las cuadráticas se obtienen las siguientes raices: $x_1 = 2$ y $x_2 = 8$.

De la tabla podemos obtener los intervalos de crecimeinto y decrecimeinto de la función $f(x)$.

	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, 8)$	8	$(8, +\infty)$
$f'(x)$	$f'(-6) < 0$	$\nexists$	$f'(0) < 0$	0	$f'(3) > 0$	$\nexists$	$f'(6) > 0$	0	$f'(10) < 0$
$f(x)$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	Mín	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Table 2: Análisis de C'_+ y C'_- aplicando teorema de Bolzano

Respuesta: La función crece en $\mathrm{I}^+ = \{(2, 4), (4, 8)\}$ y decrece en $\mathrm{I}^- = \{(-\infty, -4), (-4, 2), (8, +\infty)\}$.

(b) Analizando positivadad y negatividad podemos observar que en $x = 2$ es un mínimo local, porque la función decrece a la izquierda y crece a la derecha. El punto $x = 8$ es un máximo porque la función crece a la izquierda y decrece a la derecha.