Recuperatorio 1° y 2° Parcial - Análisis Matemático I **6/12/2019**
Carrera: Bioquímica
Nombre del Alumno: ………………………………………………………………. Comisión: ..….

IMPORTANTE:
No se permite realizar consultas una vez comenzado el examen.
Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.
Las calificaciones se subirán a la página de la materia junto con la resolución

Ejercicio 1- Sea $f(x) = x^2 e^{x^2}$, se pide:

a)

- **i)** Dominio de $f(x)$
- **ii)** $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
- **iii)** C_0, C_+ y C_-

b) **Hallar** Intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de $f(x)$

Ejercicio 2- Sea $f(x) = ln(x+1)$ y $g(x) = x$, se pide:

- **a)** **Determinar** fog y $(fog)^{-1}$.
- **b)** **Hallar** la ecuación de la recta tangente a $(fog)^{-1}$ en x = 0.
- **c)** **Graficar** $(fog)^{-1}$y la recta tangente hallada en el ítem b) en un mismo sistema de referencia.

Ejercicio 3- Realizar una gráfica aproximada de $f(x)$ que cumpla con los siguientes requisitos, **indicando**, detalladamente sobre la gráfica, los puntos más relevantes:

- **i)** Dominio R - {4}
- **ii)** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$
- **iii)** Co={-4,0, 3} , C+ = $(-\infty, -4)\ U\ (0,3)\ U\ (4, +\infty)$, C- = $(-4,0)\ U\ (3,4)$
- **iv)** C´o={-2, 2, 6} , C´+ = $(-2, 2)\ U\ (6, +\infty)$, C ´- = $(-\infty, -2)\ U\ (2,4)\ U\ (4,6)$
- **v)** $f(-2) = -1$, $f(2) = \frac{1}{2}$; , $f(6) = \frac{3}{2}$

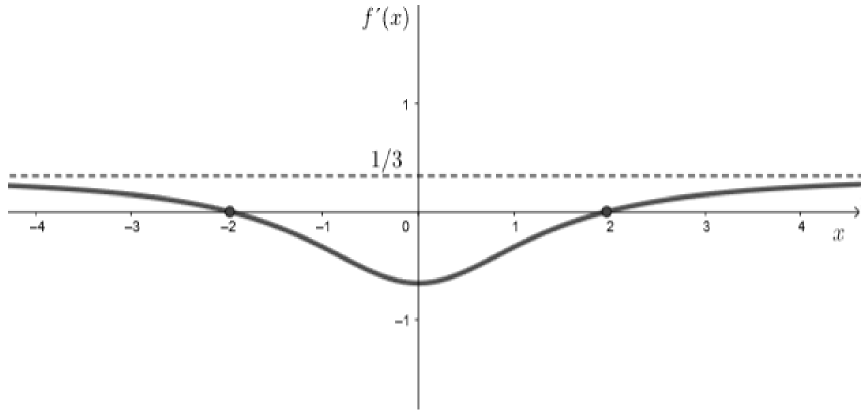
Ejercicio 4- Sea:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+16}-5}{2x-18} & x<9\\[2ex] \dfrac{1}{10} & x\geq 9\end{cases}$$

a) **<u>Determinar</u>** si *f(x)* resulta continua en x=9.

b) **<u>Determinar</u>** si *f(x)* resulta derivable en x= 9.

Ejercicio 5- Dada la siguiente gráfica correspondiente a *f ´(x)* (función derivada), se pide:



a) **<u>Calcular</u>** $\lim\limits_{x\to+\infty} f\,'(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f\,'(x)$.

b) **<u>Determinar</u>** los intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos y/o mínimos de *f(x)*.

c) **<u>Hallar</u>** la pendiente de la recta tangente a *f(x)* en x = -2.

Ej 1				Ej 2			Ej 3					Ej 4		Ej 5			Calificacíon
a			b	a	b	c	i	ii	iii	iv	v	a	b	a	b	c	
0.1	**0.4**	**0.5**	**1**	**1**	**0.5**	**0.5**	**0.2**	**0.4**	**0.4**	**0.5**	**0.5**	**1**	**1**	**1**	**0.5**	**0.5**	

Firma alumno **Firma docente**

Recuperatorio 2° Parcial - Análisis Matemático I **6/12/2019**
Carrera: Bioquímica
Nombre del Alumno: ……………………………………………………………. Comisión: …..

IMPORTANTE: No se permite realizar consultas una vez comenzado el examen.
Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.
Las calificaciones se subirán a la página de la materia junto con la resolución

Ejercicio 1- Sea $f(x) = x^2 e^{x^2}$, **hallar** los intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de $f(x)$.

Ejercicio 2- Sea $f(x) = e^x - 1$ se pide:

a) **Hallar** la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$.

b) **Graficar** $f(x)$ y la recta tangente hallada en el ítem a) todo en un mismo sistema de referencia.

Ejercicio 3- **Realizar** una gráfica aproximada de $f(x)$ que cumpla con los siguientes requisitos, **indicando** detalladamente sobre la gráfica los puntos más relevantes:

i) Dominio R - {4}

ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x\to 4^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$

iii) Co={-4,0, 3} , C+ = $(-\infty,-4)\ U\ (0,3)\ U\ (4,+\infty)$, C- = $(-4,0)\ U\ (3,4)$

iv) C´o={-2, 2, 6} , C´+ = $(-2,2)\ U\ (6,+\infty)$, C ´- = $(-\infty,-2)\ U\ (2,4)\ U\ (4,6)$

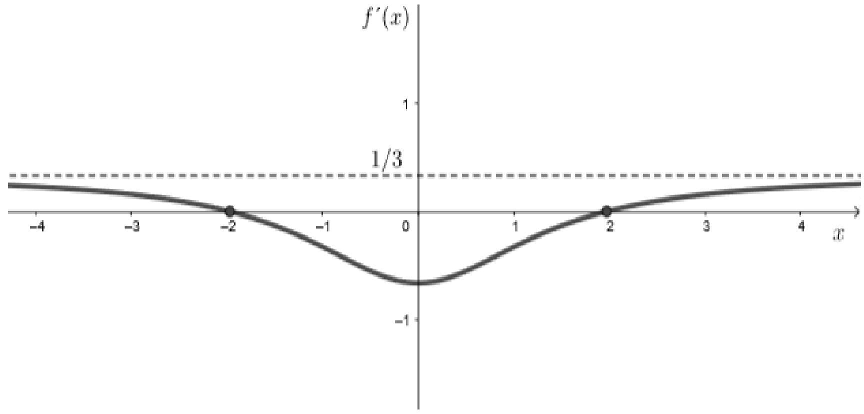
v) $f(-2) = -1$, $f(2) = \frac{1}{2}$; , $f(6) = \frac{3}{2}$

Ejercicio 4- Sea:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+16} - 5}{2x-18} & x < 9 \\ \dfrac{1}{10} & x \geq 9 \end{cases}$$

Determinar si *f(x)* resulta derivable en x= 9.

Ejercicio 5- Dada la siguiente gráfica correspondiente a *f ´(x)* (función derivada), se pide:



a) **<u>Determinar</u>** los intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos y/o mínimos de *f(x)*.

b) **<u>Hallar</u>** la pendiente de la recta tangente a *f(x)* en x = -2.

E1				**E 2**		**E3**					**E 4**	**E 5**		**Calificación**
Ic	Id	max	min	a	b	i	ii	iii	iv	v	--------------	a	b	
0.5	**0.5**	**0.5**	**0.5**	**1**	**1**	**0.1**	**0.2**	**0.2**	**1**	**0.5**	**2**	**1**	**1**	

Firma alumno **Firma docente**

Recuperatorio 1° Parcial - Análisis Matemático I 6/12/2019
Carrera: Bioquímica
Nombre del Alumno: …………………………………………………………. Comisión: ..….

IMPORTANTE: No se permite realizar consultas una vez comenzado el examen.   **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**   **Las calificaciones se subirán a la página de la materia junto con la resolución**

Ejercicio 1- Sea $f(x) = x^2 e^{x^2}$, **determinar**:

i) Dominio de $f(x)$

ii) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

iii) C_0, C_+ y C_-

Ejercicio 2- Sea $f(x) = ln(x+1)$ y $g(x) = x$, se pide:

a) fog y $(fog)^{-1}$.

b) Graficar fog y $(fog)^{-1}$ en un mismo sistema de referencia.

Ejercicio 3- **Realizar** una gráfica aproximada de $f(x)$ que cumpla con los siguientes requisitos, **indicando**, detalladamente sobre la gráfica los puntos más relevantes:

i) Dominio R - {4}

ii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$

iii) Co= {-4,0, 3}, C+ = $(-\infty, -4)\ U\ (0,3)\ U\ (4, +\infty)$, C- = $(-4,0)\ U\ (3,4)$

iv) $f(-2) = -1$, $f(2) = \frac{1}{2}$; , $f(6) = \frac{3}{2}$

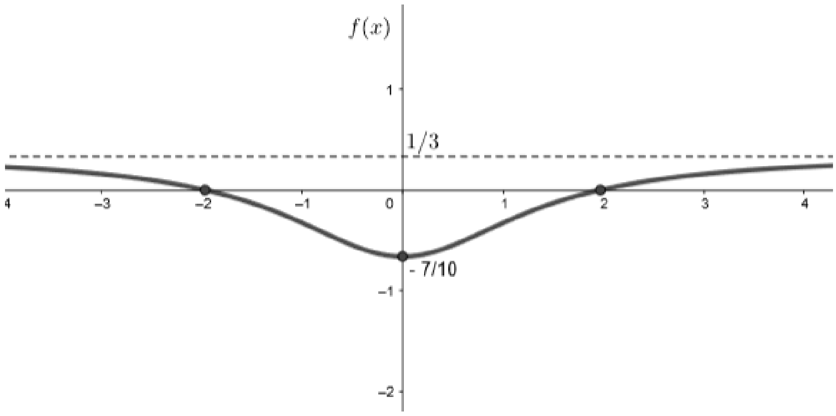
Ejercicio 4- Sea:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+16} - 5}{2x-18} & x < 9 \\ \dfrac{1}{10} & x \geq 9 \end{cases}$$

Determinar si *f(x)* resulta continua en x=9.

Ejercicio 5-

Dada la siguiente gráfica correspondiente a *f(x)* ,



se pide:

a) Dominio e imagen de $f(x)$

b) Conjunto de ceros, de negatividad y positividad de $f(x)$

c) **<u>Calcular</u>** $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

E 1				E 2		E 3				E 4	E 5			Calificacíon
a			b	a	b	i	ii	iii	iv	--------------	a	b	c	
0.1	**0.4**	**0.5**	**1**	**1**	**1**	**0.2**	**0.8**	**0.6**	**0.4**	**2**	**0.6**	**0.7**	**0.7**	

Firma alumno **Firma docente**

1 Resolución del Recuperatorio del primero y segundo parcial, segundo cuatrimestre de 2019.

1. Ejercicio 1

   (a) (i)

   $$\mathrm{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} \tag{1}$$

   (ii)

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{x^2} = +\infty \tag{2}$$

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{x^2} = +\infty \tag{3}$$

   Notar que el límite en ambos caso da '$\infty \cdot \infty$'.

   (iii) Aplicamos el teorema de Bolzano porque es una función continua. Calculamos las raices,

   $$f(x) = x^2 e^{x^2} = 0 \tag{4}$$

   y obtenemos $x^2 = 0 \to x = 0$ (recordar que la función exponencial no se anula). El conjunto $C_0 = \{0\}$.
   Para el C_+ y C_- aplicamos teorema de bolzano (ver tabla 1) y obtenemos los siguentes resultados,

   $$C_+ = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \tag{5}$$

   $$C_- = \emptyset \tag{6}$$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f(x)$	$f(-1) > 0$	0	$f(1) > 0$
$f(x)$	$+$	0	$+$

   Table 1: Análisis de C_+ y C_- aplicando teorema de Bolzano

   (b) Para analizar el crecimiento y extremos analizamos el signo de la derivada.

   $$f'(x) = (x^2 e^{x^2})' = (x^2)' e^{x^2} + x^2 (e^{x^2})' = 2x e^{x^2} + x^2 e^{x^2} 2x \tag{7}$$

   $$= 2x e^{x^2}(1 + x^2) \tag{8}$$

   Obtenemos c_0' calculando las raices de la derivada $f'(x) = 2xe^{x^2}(1 + x^2) = 0$.

   La exponencial no se anula y $1 + x^2 > 0$, por lo tanto tiene una sola raiz en $x = 0$.

   El conjunto de ceros de la derivada es $c_0' = \{0\}$. Aplicamos Bolzano y obtenemos información del crecimiento de la función (ver tabla 2). Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son $\mathrm{I}^+ = \{(0, +\infty)\}$ y $\mathrm{I}^- = \{(-\infty, 0)\}$. Tiene un un mínimo local en $x = 0$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$f'(-1) < 0$	0	$f'(1) > 0$
$f(x)$	$\searrow$	Mín	$\nearrow$

Table 2: Análisis de C'_+ y C'_- aplicando teorema de Bolzano

2. Ejercicio 2

   (a) Calculemos $fog(x)$

$$fog(x) = f(g(x)) = \ln(x+1) \tag{9}$$

   Calculamos la inversa

$$y = \ln(x+1) \tag{10}$$
$$e^y = e^{\ln(x+1)} = x+1 \tag{11}$$
$$e^y - 1 = x \tag{12}$$

   por lo tanto $(fog)^{-1} = e^x - 1$.

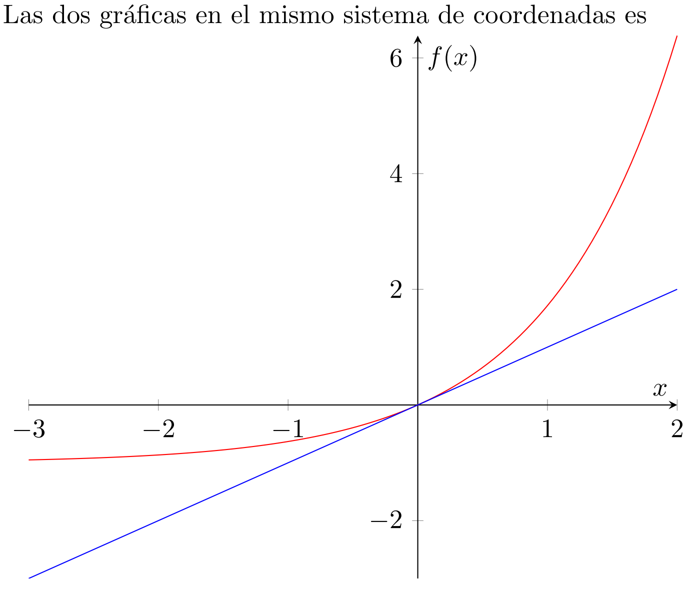
   (b) La recta tangente al punto de absisa $x_0 = 0$ tiene la forma $y = m_T x + b$.

   Se puede obtener la pendiente m_T evaluando la derivada $((fog)^{-1})' = e^x$ en $x_0 = 0$, $m = f'(0) = e^0 = 1$. La ordenada al origen b se obtiene del punto de la gráfica $P = (0, (fog)^{-1}(0)) = (0, 0)$.

$$0 = 1 * 0 + b \tag{13}$$
$$0 = b \tag{14}$$

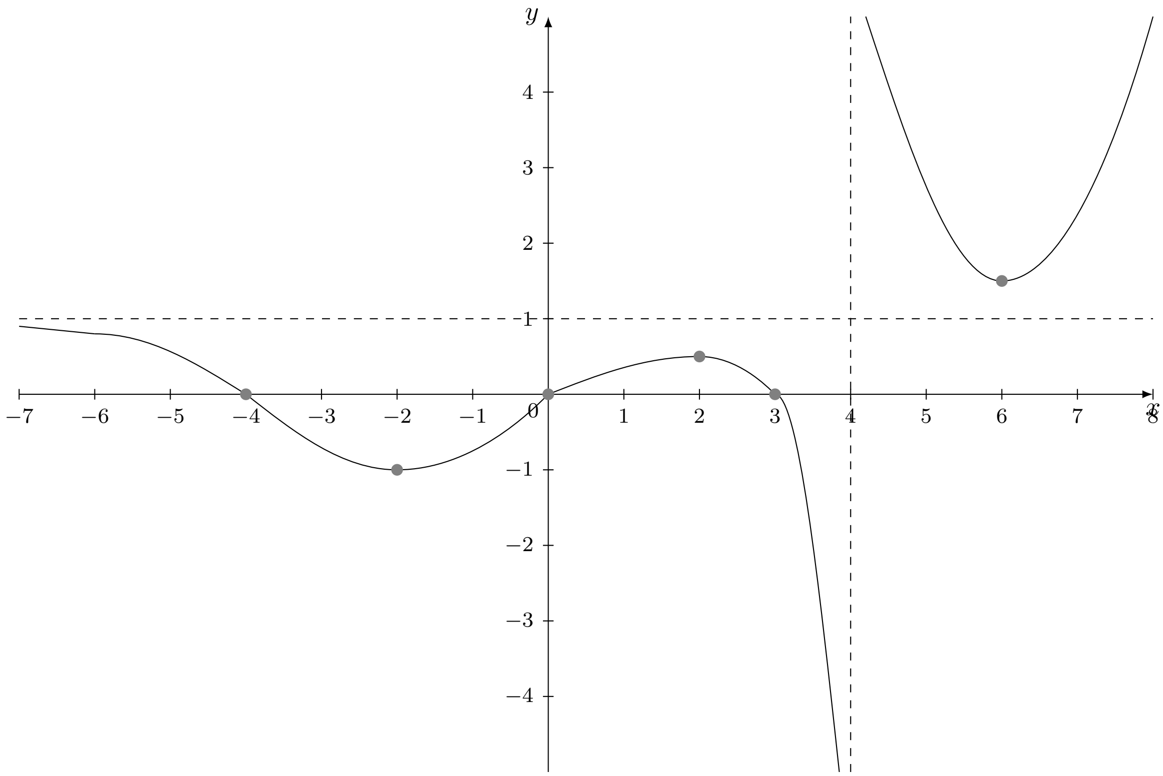
   La recta tangente tiene ecuación $y = x$.

   Las dos gráficas en el mismo sistema de coordenadas es



3. Ejercicio 3

   (a) La gráfica se observa a continuación marcando los puntos importantes y las asíntotas.



4. Ejercicio 4

   Para que $f(x)$ sea derivable en x_0, primero debemos verificar que se continua y luego que los límites laterales de las derivadas existan y coincidan. Para que sea continua en x_0 se debe satisfacer que exista $f(x_0)$ y tome el mismo valor que los límites laterales L_+ y L_-.

$$\begin{aligned} L_- &= \lim_{x\to 9^-} f(x) = \lim_{x\to 9^-} \frac{\sqrt{x+16}-5}{2(x-9)} = \lim_{x\to 9^-} \frac{\sqrt{x+16}-5}{2(x-9)} \frac{\sqrt{x+16}+5}{\sqrt{x+16}+5} && (15)\\ &= \lim_{x\to 9^-} \frac{x-9}{2(x-9)(\sqrt{x+16}+5)} = \lim_{x\to 9^-} \frac{1}{2(\sqrt{x+16}+5)} = \frac{1}{20} && (16)\\ L_+ &= \lim_{x\to 9^+} f(x) = \lim_{x\to 9^+} \frac{1}{10} = \frac{1}{10} && (17)\\ f(9) &= \frac{1}{10} && (18) \end{aligned}$$

   imponemos la condición de continuidad en $x_0 = 9$.

$$f(9) = L_+ = \frac{1}{10} \neq 1/20 = L_- \tag{19}$$

   No es continua en x_0 y por lo tanto tampoco derivable en $x_0 = 9$.

5. Ejercicio 5

   (a)

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \frac{1}{3} \tag{20}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \frac{1}{3} \tag{21}$$

   (b) Analizamos los conjuntos de positividad, negatividad y raices de las derivadas y obtenemos información del crecimiento y extremos de la función (ver tabla 3).

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	Mín	$\nearrow$

Table 3: Análisis de C'_+ y C'_- aplicando teorema de Bolzano

$$I^+ = \{(-\infty,-2);(2,\infty)\} \tag{22}$$

$$I^- = \{(-2,2)\} \tag{23}$$

   Tiene un máximo local en $x=-2$ y un mínimo local en $x=2$.

   (c) La derivada evaluada en $x=-2$ vale 0 y por lo tanto la pendiente de la recta tangente $m=0$.

2 Resolución del Recuperatorio del segundo parcial, segundo cuatrimestre de 2019.

1. Ejercicio 1 Para analizar el crecimiento y extremos analizamos el signo de la derivada.

$$f'(x) = (x^2e^{x^2})' = (x^2)'e^{x^2} + x^2(e^{x^2})' = 2xe^{x^2} + x^2e^{x^2}2x \tag{24}$$

$$= 2xe^{x^2}(1+x^2) \tag{25}$$

   Obtenemos c'_0 calculando las raices de la derivada $f'(x) = 2xe^{x^2}(1+x^2) = 0$.

   La exponencial no se anula y $1+x^2>0$, por lo tanto tiene una sola raiz en $x=0$.

   El conjunto de ceros de la derivada es $c'_0 = \{0\}$. Aplicamos Bolzano y obtenemos información del crecimiento de la función (ver tabla 4). Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son $\mathrm{I}^+ = \{(0,+\infty)\}$ y $\mathrm{I}^- = \{(-\infty,0)\}$. Tiene un un mínimo local en $x=0$ y no tiene máximos.

	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$f'(-1)<0$	0	$f'(1)>0$
$f(x)$	$\searrow$	Mín	$\nearrow$

Table 4: Análisis de C'_+ y C'_- aplicando teorema de Bolzano

2. Ejercicio 2

   (a) La recta tangente al punto de absisa $x_0 = 0$ tiene la forma $y = m_T x + b$.

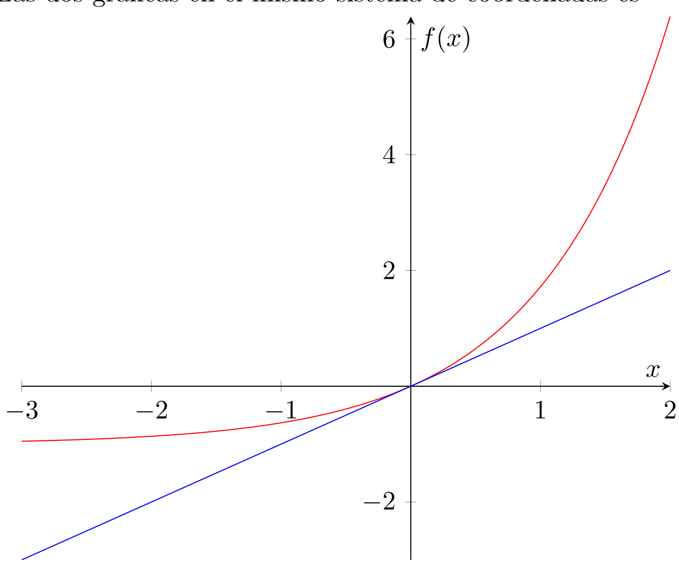
   Se puede obtener la pendiente m_T evaluando la derivada $f(x)' = (e^x - 1)' = e^x$ en $x_0 = 0$, $m = f'(0) = e^0 = 1$. La ordenada al origen b se obtiene del punto de la gráfica $P = (0, f(0)) = (0, 0)$.

$$0 = 1 * 0 + b \tag{26}$$

$$0 = b \tag{27}$$

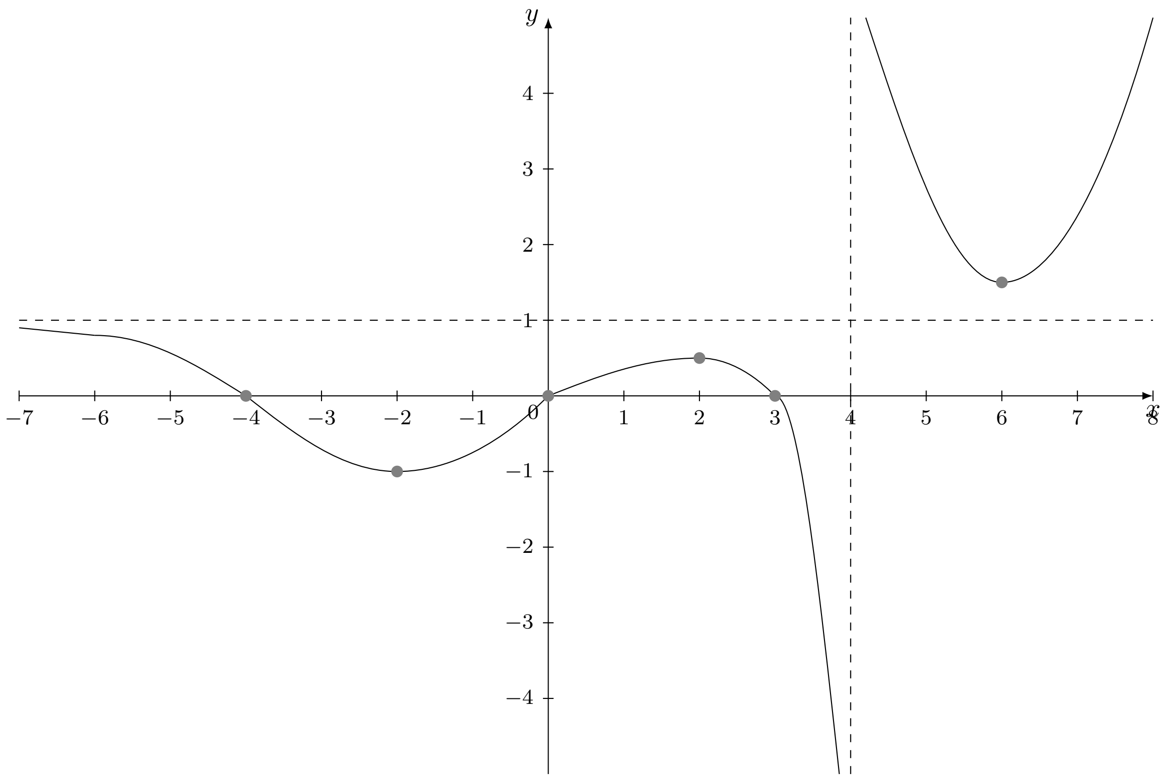
   La recta tangente tiene ecuación $y = x$.

   (b) Las dos gráficas en el mismo sistema de coordenadas es



3. Ejercicio 3

   (a) La gráfica se observa a continuación marcando los puntos importantes y las asíntotas.



4. Ejercicio 4

   Para que $f(x)$ sea derivable en x_0, primero debemos verificar que se continua y luego que los límites laterales de las derivadas existan y coincidan. Para que sea continua en x_0 se debe satisfacer que exista $f(x_0)$ y tome el mismo valor que los límites laterales L_+ y L_-.

$$L_- = \lim_{x\to 9^-} f(x) = \lim_{x\to 9^-} \frac{\sqrt{x+16}-5}{2(x-9)} = \lim_{x\to 9^-} \frac{\sqrt{x+16}-5}{2(x-9)} \frac{\sqrt{x+16}+5}{\sqrt{x+16}+5} \quad (28)$$

$$= \lim_{x\to 9^-} \frac{x-9}{2(x-9)(\sqrt{x+16}+5)} = \lim_{x\to 9^-} \frac{1}{2(\sqrt{x+16}+5)} = \frac{1}{20} \quad (29)$$

$$L_+ = \lim_{x\to 9^+} f(x) = \lim_{x\to 9^+} \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \quad (30)$$

$$f(9) = \frac{1}{10} \quad (31)$$

   imponemos la condición de continuidad en $x_0 = 9$.

$$f(9) = L_+ = \frac{1}{10} \neq 1/20 = L_- \quad (32)$$

   No es continua en x_0 y por lo tanto tampoco derivable en $x_0 = 9$.

5. Ejercicio 5

(a) Analizamos los conjuntos de positividad, negatividad y raices de las derivadas y obtenemos información del crecimiento y extremos de la función (ver tabla 5).

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	Mín	$\nearrow$

Table 5: Análisis de C'_+ y C'_- aplicando teorema de Bolzano

$$I^+ = \{(-\infty,-2);(2,\infty)\} \tag{33}$$
$$I^- = \{(-2,2)\} \tag{34}$$

Tiene un máximo local en $x=-2$ y un mínimo local en $x=2$.

(b) La derivada evaluada en $x=-2$ vale 0 y por lo tanto la pendiente de la recta tangente $m=0$.

3 Resolución del Recuperatorio del primer parcial, segundo cuatrimestre de 2019.

1. Ejercicio 1

(i)

$$\mathrm{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} \tag{35}$$

(ii)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2e^{x^2} = +\infty \tag{36}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2e^{x^2} = +\infty \tag{37}$$

Notar que el límite en ambos caso da '$\infty\cdot\infty$'.

(iii) Aplicamos el teorema de Bolzano porque es una función continua. Calculamos las raices,

$$f(x) = x^2e^{x^2} = 0 \tag{38}$$

y obtenemos $x^2 = 0 \to x = 0$ (recordar que la función exponencial no se anula). El conjunto $C_0 = \{0\}$

Para el C_+ y C_- aplicamos teorema de bolzano(ver tabla 6) y obtenemos los siguentes resultados,

$$C_+ = (-\infty,0)\cup(0,+\infty) \tag{39}$$
$$C_- = \emptyset \tag{40}$$

	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f(x)$	$f(-1)>0$	0	$f(1)>0$
$f(x)$	$+$	0	$+$

Table 6: Análisis de C_+ y C_- aplicando teorema de Bolzano

2. Ejercicio 2

(a) Calculemos $fog(x)$

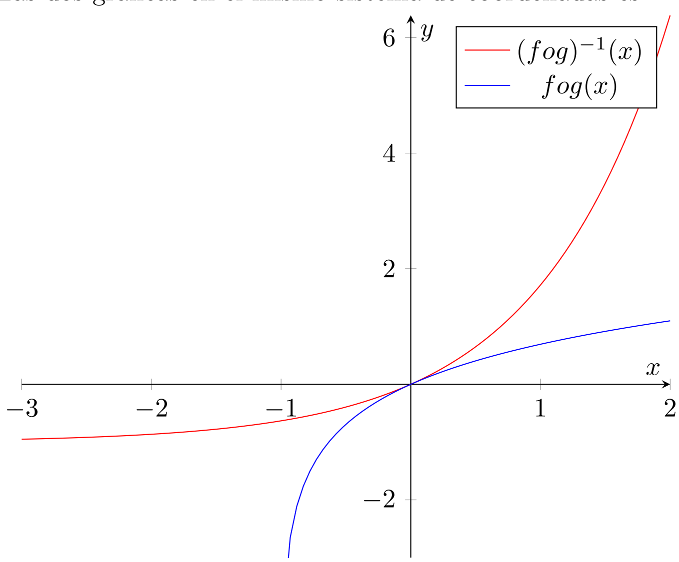
$$fog(x) = f(g(x)) = \ln(x+1) \tag{41}$$

Calculamos la inversa

$$y = \ln(x+1) \tag{42}$$
$$e^y = e^{\ln(x+1)} = x+1 \tag{43}$$
$$e^y - 1 = x \tag{44}$$

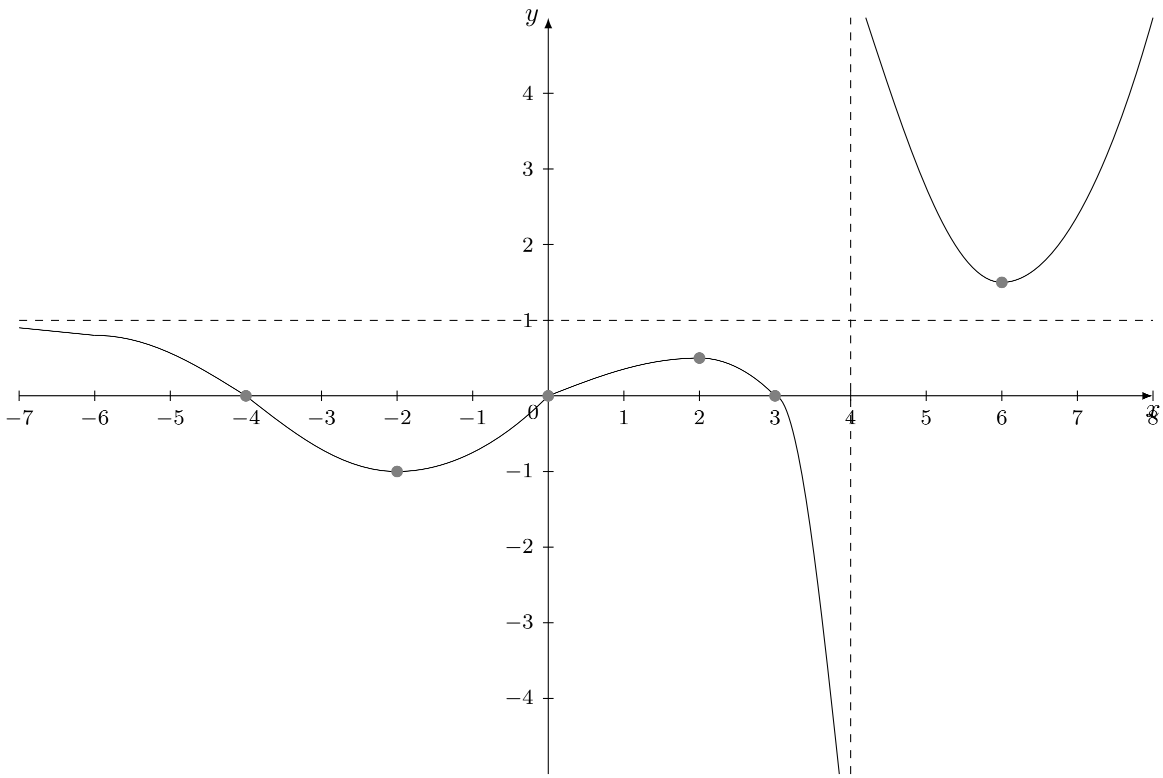
por lo tanto $(fog)^{-1} = e^x - 1$.

(b) Las dos gráficas en el mismo sistema de coordenadas es



3. Ejercicio 3

(a) La gráfica se observa a continuación marcando los puntos importantes y las asíntotas.



4. Ejercicio 4

   Para que $f(x)$ sea derivable en x_0, primero debemos verificar que se continua y luego que los límites laterales de las derivadas existan y coincidan. Para que sea continua en x_0 se debe satisfacer que exista $f(x_0)$ y tome el mismo valor que los límites laterales L_+ y L_-.

$$L_- = \lim_{x\to 9^-} f(x) = \lim_{x\to 9^-} \frac{\sqrt{x+16}-5}{2(x-9)} = \lim_{x\to 9^-} \frac{\sqrt{x+16}-5}{2(x-9)} \frac{\sqrt{x+16}+5}{\sqrt{x+16}+5} \tag{45}$$

$$= \lim_{x\to 9^-} \frac{x-9}{2(x-9)(\sqrt{x+16}+5)} = \lim_{x\to 9^-} \frac{1}{2(\sqrt{x+16}+5)} = \frac{1}{20} \tag{46}$$

$$L_+ = \lim_{x\to 9^+} f(x) = \lim_{x\to 9^+} \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \tag{47}$$

$$f(9) = \frac{1}{10} \tag{48}$$

   analizamos la condición de continuidad en $x_0 = 9$.

$$f(9) = L_+ = \frac{1}{10} \neq 1/20 = L_- \tag{49}$$

   No es continua en $x_0 = 9$.

5. Ejercicio 5

(a)

$$\mathrm{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} \tag{50}$$
$$\mathrm{Im}(f(x)) = [-\frac{7}{10}, \frac{1}{3}) \tag{51}$$

(b)

$$C_0 \quad = \quad \{-2, 2\} \tag{52}$$
$$C_- \quad = \quad (-2, 2) \tag{53}$$
$$C_+ \quad = \quad (-\infty, -2) \cup (2, \infty) \tag{54}$$

(c)

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) \quad = \quad \frac{1}{3} \tag{55}$$
$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) \quad = \quad \frac{1}{3} \tag{56}$$