Segundo Parcial -Análisis Matemático I C2 29/10/2019 Carrera: Bioquímica

Nombre del Alumno:……………………………………………………………...Comisión:………..

IMPORTANTE: Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas y no se permite que el estudiante realice consultas sobre la resolución del examen una vez comenzado el mismo.

Ejercicio 1-

a) **<u>Hallar</u>** "a" que pertenece a reales, tal que la recta tangente al gráfico de $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + 16}$ en $x_o = 0$ sea paralela a la recta cuya ecuación es y = 2x -16.

b) Para el valor de "a" encontrado en el ítem a) **<u>hallar</u>** la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x_o = 0$.

Ejercicio 2-

a) **<u>Determinar</u>** "b" ,que pertenece a reales, de modo que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x.ln(x) + bx^2}{8x^2+2x-6} = \frac{1}{8}$$

b) **Calcular** $\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x^2 - 1}$ y **<u>determinar</u>**, si existe, la ecuación de la asíntota horizontal correspondiente.

Ejercicio 3-

Sabiendo que $f(x)$ cumple con las siguientes condiciones:

i) $\lim_{x\to5^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to5^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty$;

ii) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

iii) $Co = \{3, 4\}$; $C_+ = (-\infty, 2)\ U\ (3, 4)\ U\ (5, +\infty)$; $C_- = (2, 3)\ U\ (4, 5)$

iv) $C'o = \{\frac{7}{2}\}$; $C'_+ = (-\infty, 2)\ U\ (2, \frac{7}{2})$; $C'_- = (\frac{7}{2}, 5)\ U\ (5, +\infty)$

a) **<u>Hacer</u>** un gráfico aproximado de $f(x)$.

b) **<u>Determine</u>** dónde $f(x)$ alcanza su valor máximo y/o mínimo. **<u>Justificar.</u>**

Ejercicio 4-

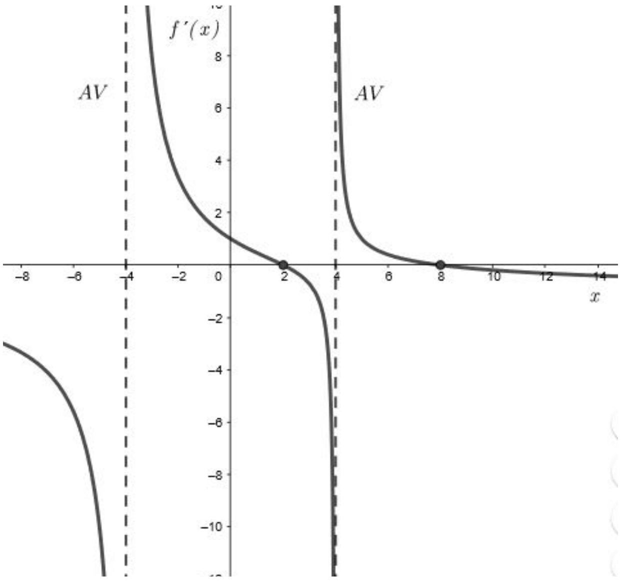
Dada

$$f(x)=\begin{cases} e^{x}-m & si\ x\geq 0 \\ x.e^{-x^2} & si\ x<0 \end{cases}$$

a) **<u>Determinar</u>** el valor de “m” que pertenece a reales de modo que $f(x)$ resulte continua en x=0.
b) Para el valor de “m” hallado en el ítem a) **<u>determine</u>** si $f(x)$ resulta derivable en x=0. **<u>Justificar.</u>**

Ejercicio 5-

Sea el dominio de $f(x)$: $R-\{-4,4\}$ y sea el gráfico de $f\,'(x)$ **(función derivada)** el siguiente:



Determinar:

- **a)** Intervalo/s de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- **b)** Máximo/s y/o mínimo/s de $f(x)$ **.** **<u>Justificar.</u>**

Ítem	**Ejercicio 1**		**Ejercicio 2**		**Ejercicio 3**					**Ejercicio 4**		**Ejercicio 5**		**Total**
	a	**b**	**a**	**b**	**i**	**ii**	**iii**	**iv**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	
Puntaje	1	1	1	1	0.2	0.2	0.2	1	0.4	0.5	1.5	1	1	

Firma alumno **Firma docente**

1 Resolución Segundo parcial comisión 2, segundo cuatrimestre de 2019.

1. Ejercicio 1

   (a) Recordemos que dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente. Entonces la condición que sea paralela a la recta de ecuación $y = 2x - 16$ corresponde a que la recta tangente tenga pendiente $m_T = 2$. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ que pasa por el punto con $x = 0$ se puede obtener evaluando la función derivada en $x = 0$.
   Primero calculamos la funcíon derivada,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sqrt{x^2+ax+16}\right)' &(1)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2+ax+16}}\left(\sqrt{x^2+ax+16}\right)' &(2)\\
&= \frac{2x+a}{2\sqrt{x^2+ax+16}} &(3)
\end{aligned}$$

   Luego imponemos la condición de paralelismo que nos permite despejar a,

$$\begin{aligned}
f'(0) &= 2 &(4)\\
\frac{a}{2\sqrt{16}} &= 2 &(5)\\
a &= 16 &(6)
\end{aligned}$$

   Respuesta: El valor de $a = 16$.

   (b) La ecuación de la recta tangente tiene la forma $y = 2x + b$ (reemplazamos la pendiente por 2). El valor de la ordenada al origen lo podemos hallar imponiendo que la recta para po el punto $(0, f(0)) = (0, 4)$:

$$\begin{aligned}
4 &= 2*0+b &(7)\\
4 &= b &(8)
\end{aligned}$$

   Respuesta: La ecuación de la recta tangente es $y = 2x + 4$.

2. Ejercicio 2

   (a) Se debe calcular el límite tomando a b como una constante, para luego ese resultado igualarlo a $1/8$ y despejar b.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x+bx^2}{8x^2+2x-6} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x\ln x+bx)'}{(8x^2+2x-6)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x+2bx}{16x+2} &(9)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x+2bx^2)'}{(16x+2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x+2b}{16} = \frac{2b}{16} &(10)
\end{aligned}$$

   El límite no se puede calcular directamente porque posee una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicamos teorema de l'Hopital y obtenemos el tercer término de la ecuacion (9) que presenta nuevamente una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Finalmente aplicando l 'Hopital por segunda vez se resuelva le indeterminación y se obtiene el límite en términos del parametro b.

Para despejar b igualamos el límite a 1/8,

$$\frac{2b}{16} = \frac{1}{8} \tag{11}$$

$$b = 1 \tag{12}$$

Respuesta: $b = 1$.

(b)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2-1)'} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{2x} = 0 \tag{13}$$

El límite presenta una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ que se puede resolver mediante el teorema de L ' Hopital derivando el numerador y denominador. La función posee una asíntota horizontal por derecha de ecuación $y = 0$

3. Ejercicio 3

(a) La gráfica de f(x):

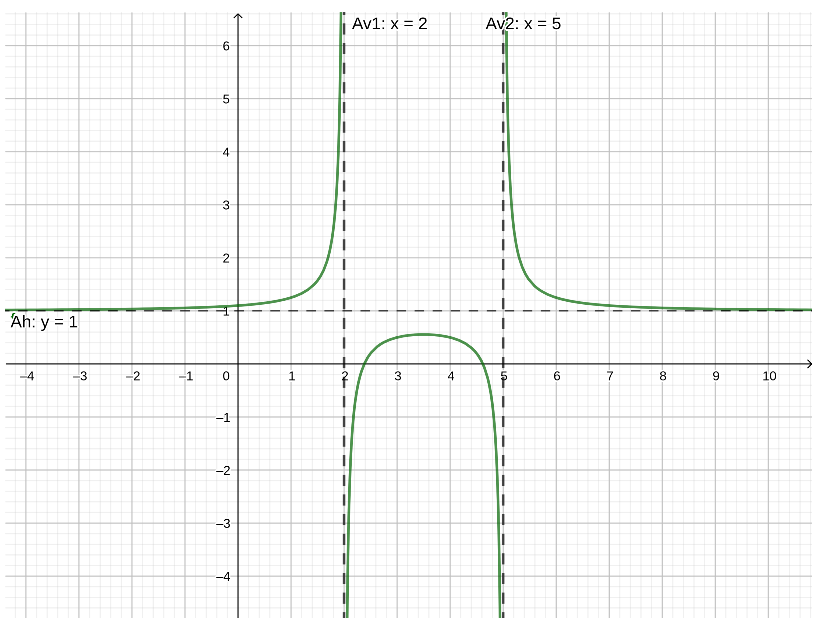


Figure 1: La gráfica aproximada de $f(x)$.

(b) Podemos determinar donde alcanza extremos locales (máximos y/o mínimos), analizando el crecimiento de la función cerca de los puntos críticos.

	$(-\infty,2)$	-2	$(2,7/2)$	$7/2$	$(7/2,5)$	5	$(5,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

Table 1: Análisis de C'_+ y C'_- aplicando teorema de Bolzano

La tabla 1 nos permite inferir que el único extremo local se alcana en $x = 7/2$ y es un máximo. Esto es compatible con el gráfico realizado.

4. Ejercicio 4

   (a) Para que $f(x)$ sea continua en $x_0 = 0$ se debe satisfacer que exista $f(x_0)$ y tome el mismo valor que los límites laterales L_+ y L_-.

$$L_- = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} xe^{-x^2} = 0e^0 = 0 \tag{14}$$
$$L_+ = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x - m = e^0 - m = 1 - m \tag{15}$$
$$f(0) = e^0 - m = 1 - m \tag{16}$$

   Para que sea continua se debe satisfacer

$$f(0) = L_+ = 1 - m = 0 = L_- \tag{17}$$

   Respuesta: la condición implica que $m = 1$.

   (b) Para $m = 1$, sabemos que la función es continua en $x = 0$. Entonces la función es derivable en $x = 0$ si los límites laterales de la derivada coinciden.

$$L'_- = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}) = e^0 - 0 = 1 \tag{18}$$
$$L'_+ = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = e^0 = 1 \tag{19}$$

   Respuesta: Los liímites laterales de las derivadas coinciden $L'_- = 1 = L'_+$ y por lo tanto la función es derivale en $x = 0$.

.

5. Ejercicio 5

   (a) El dominio de la derivada coincide con el de la función y vale $\mathrm{Dom} f'(x) = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$.Se pueden analizar el crecimiento a partir del signo de la derivada. Los puntos críticos, que son los candidatos a extremos, corresponden a los ceros de la derivada. Estos puntos críticos, juntos con los puntos que excluimos del dominio, nos permiten plantear la tabla 2 y calcular el conjunto de postividad y negatividad de la derivada.

	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,2)$	2	$(2,4)$	4	$(4,8)$	8	$(8,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nexists$	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	$\nexists$	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Table 2: Análisis de C'_+ y C'_- aplicando teorema de Bolzano

De la tabla podemos obtener los intervalos de crecimeinto y decrecimeinto de la función $f(x)$. Respuesta: La función crece en $\mathrm{I}^+ = \{(-4,2),(4,8)\}$ y decrece en $\mathrm{I}^- = \{(-\infty,-4),(2,4),(8,+\infty)\}$.

(b) De la tabla de positivada y negativodad podemos observar que en $x = 2$ y$x = 8$ son un máximos local, porque la función crece a la izquierda y decrece a la derecha.