Recuperatorio Tercer Parcial -Análisis Matemático I 29/11/2019 Carrera: Bioquímica

Nombre de Alumno:…………………………………….DNI:.............................Comisión:……

IMPORTANTE: <u>Uno de los requisitos para aprobar el presente examen es resolver correctamente, al menos, uno de los ejercicios referidos al cálculo de áreas (Ej.4 o Ej.5).</u>
No se permite realizar consultas una vez comenzado el examen.
Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Ejercicio 1- Sea $h(x) = cos(x - \pi)$, **hallar** los valores de A, B y C que pertenecen a reales de modo que se verifique la siguiente igualdad:

$$\int_{x=\pi/2}^{x=\pi} f(h(x))\,\frac{sen(x-\pi)}{h(x)}\,dx = 2A\int_{z=C}^{z=B} \frac{1}{z}.f(z)\,dz$$

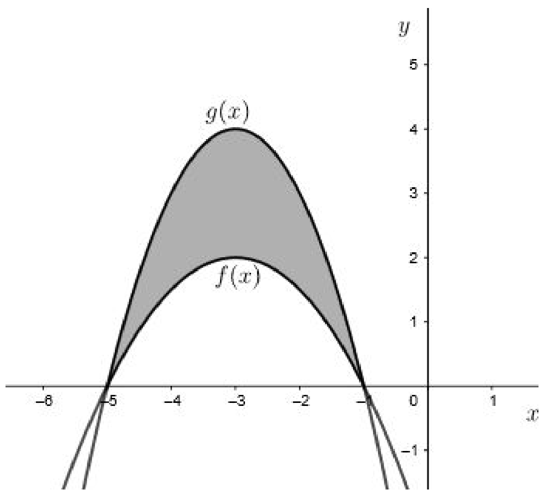
Ejercicio 2- Hallar la función $F(x)$ que verifique las siguientes condiciones:

a) $F'(x) = 5.sen(x-\pi).sen(x-\pi).\,cos(x-\pi)$

b) $F(\frac{3}{2}\pi) = \frac{4}{3}$

Ejercicio 3- Calcular $\int (x.sen(x) + 2x)\,dx$

Ejercicio 4- Sabiendo que $\int_{-5}^{-1} f(x)\,dx = 6$, que $2.\int_{-5}^{-1} g(x)\,dx = 23$ y la siguiente región sombreada representa el área comprendida entre ambas funciones:



Se pide:

a) Plantear la integral que determinaría el cálculo del área de la región sombreada.

b) <u>Determinar</u> el valor del área de la región sombreada **<u>justificando</u>** la respuesta mediante el planteo de las integrales correspondientes.

Ejercicio 5.-

a) <u>Graficar</u> la región comprendida entre:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \ , \ g(x) = -\tfrac{1}{2}x + 4 \quad \text{para } x \geq 0$$

b) <u>Calcular</u> el área de la región del ítem **a)**

Ejercicio 1			Ejercicio 2		Ejercicio 3		Ejercicio 4		Ejercicio 5		Calificación
A	B	C	a	b	Método	Respuesta	a	b	a	b	
0.4	0.8	0.8	1.5	0.5	0.5	1.5	0.5	1.5	0.5	1.5	

Firma Alumno **Firma Docente**

1 Resolución del Recuperatorio del Tercer parcial, segundo cuatrimestre de 2019.

1. Ejercicio 1

   (a) Para llegar a la expresión final realizamos una sustitucíon con el siguiente cambio de variables y su respectivo diferencial:

$$\begin{aligned} z &= \cos(x-\pi) && (1)\\ dz &= z'\ dx = -\sin(x-\pi)dx && (2)\\ -dz &= \sin(x-\pi)dx && (3) \end{aligned}$$

   Los límites de integración en la nueva variable se obtienen evaluando en $z(x)$:

$$\begin{aligned} z\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\frac{\pi}{2}-\pi) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0 && (4)\\ z(\pi) &= \cos(\pi-\pi) = \cos(0) = 1 && (5) \end{aligned}$$

   Escribimos la integral en la nueva variable obteniendo y la igualamos al resultado que presenta el problema en términos de las constantes A, B y C:

$$\int_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} f(h(x))\frac{\sin(x-\pi)}{h(x)}dx = -\int_{z=0}^{z=1}\frac{f(z)}{z}dz = 2A\int_{z=C}^{z=B}\frac{f(z)}{z}dz \qquad (6)$$

   Para que se verifique la igualdad, planteamos las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} 2A &= -1 \to A = -\frac{1}{2} && (7)\\ B &= 1 && (8)\\ C &= 0 && (9) \end{aligned}$$

2. Ejercicio 2

   (a) La función $F(x)$ satisface la condición $F'(x) = (\sin(x-\pi))^2\, 5\cos(x-\pi)$ y por lo tanto es una primitiva de $(\sin(x-\pi))^2\, 5\cos(x-\pi)$. Calculemos la integral indefinida para obtener la función $F(x)$ a menos de una constante que luego se puede calcular de la segunda condición.

$$\begin{aligned} \int(\sin(x-\pi))^2\, 5\cos(x-\pi)dx &= 5\int t^2dt = 5\frac{t^3}{3}+c = \frac{5}{3}(\sin(x-\pi))^3+c && (10)\\ t = \sin(x-\pi) & && (11)\\ dt = \cos(x-\pi)dx & && (12) \end{aligned}$$

   Aplicamos el método de sustitución para resolver la integral.

   La función $F(x)$ es de la forma $F(x) = \frac{5}{3}(\sin(x-\pi))^3 + C$, en donde esta constante no es arbitraria como en la integral indefinida sino que la podemos calcular de la segunda condición

$F(3/2\pi) = 4/3$.

$$F(\frac{3}{2}\pi) = \frac{5}{3}(\sin(\frac{3}{2}\pi - \pi))^3 + C = \frac{5}{3}1^3 + C = \frac{4}{3} \tag{13}$$

$$\frac{5}{3} + C = \frac{4}{3} \tag{14}$$

$$C = -\frac{1}{3} \tag{15}$$

Respuesta : $F(x) = \frac{5}{3}(\sin(x-\pi))^3 - \frac{1}{3}$

3. Ejercicio 3

   (a) Separamos la integral utilizando propiedades de linealidad y luego resolvemos,

$$\int (x\sin(x) + 2x)\, dx = \int x\sin(x)dx + 2\int xdx \tag{16}$$

$$= -x\cos(x) + \sin(x) + 2\frac{x^2}{2} + c \tag{17}$$

La segunda integral se obtiene de tabla y la primera se resuelve aplicando el método de partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \tag{18}$$

Aplicado a la integral obtenemos

$$\int x\sin(x)dx = -x\cos(x) - \int(-)\cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x) + c \tag{19}$$

$$f(x) = x \longrightarrow f'(x) = 1 \tag{20}$$

$$g'(x) = \sin(x) \longrightarrow g(x) = -\cos(x) \tag{21}$$

4. Ejercicio 4

   (a)

$$\text{Área} = \int_{-5}^{-1} (g(x) - f(x))\, dx \tag{22}$$

   (b)

$$\text{Área} = \int_{-5}^{-1} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{-5}^{-1} g(x)dx - \int_{-5}^{-1} f(x)dx = 11.5 - 6 = 5.5 \tag{23}$$

La segunda integral definida $\int_{-5}^{-1} f(x)dx = 6$ la daba el enunciado del problema y la segunda se puede obtener despejando de la otra condición

$$2\int_{-5}^{-1} g(x)dx = 23 \tag{24}$$

$$\int_{-5}^{-1} g(x)dx = \frac{23}{2} = 11.5 \tag{25}$$

.

5. Ejercicio 5

   (a) La recta de ecuación $x = 0$ corresponde al eje y. Llamamos $g(x) = -0.5x - 4$ a la función asociada a la segunda recta del enunciado.

   Calculamos la intersección de $f(x)$ y la recta $g(x)$,

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= -\frac{1}{2}x + 4 && (26) \\ x &= (4 - 1/2x)^2 && (27) \\ 0 &= \frac{1}{4}x^2 - 5x + 16 && (28) \end{aligned}$$

   Elevamos al cuadrado para utilizar la resolvente cuadrática obteniendo $x_1 = 4$ y $x_2 = 16$. Antes de elevar al cuadrado vemos que hay dos restricciones sobre las soluciones de la ecuación, $x > 0$ (dominio de $\sqrt{x}$) y $-\frac{1}{2}x + 4 > 0$ (imagen $\sqrt{x}$). Esto restrige la solución a $x_1 = 4$. Se puede verificar que x_2 no corresponde a la coordenada x de un punto de interserción. Luego la coordenada y de la intersección con el eje y se obtiene evaluando en $x = 0$. Obtenemos que $f(0) = 0$ y la recta $g(x)$ se corta en $y = 4$ (ordenada al origen). Realizamos el gráfico y marcamos la región:

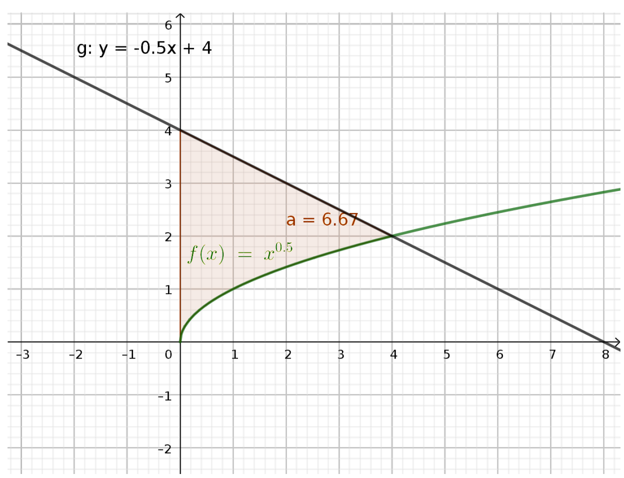


Figure 1: La gráfica del área sombreada.

   (b) El área de la región sombrada se puede calcular en términos de la integral definida. El techo es la recta $g(x) = 4 - 0.5x$ y el piso el $f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{área} &= \int_0^4 (g(x) - f(x))dx = \int_0^4 (4 - 0.5x - x^{1/2})dx = (4x - \frac{1}{4}(x)^2 - \frac{2}{3}x^{3/2})\Big|_2^{11} && (29) \\ &= \left((4*4 - \frac{1}{4}(4)^2 - \frac{2}{3}4^{3/2}) - (4*0 - \frac{1}{4}(0)^2 - \frac{2}{3}0^{3/2})\right) = \frac{20}{3} && (30) \end{aligned}$$

   Respuesta: El área vale $\frac{20}{3}$.