Unidad VI

Aplicaciones de derivadas

Objetivo
- Resolver indeterminaciones mediante la regla de Guillaume de l'Hôpital.
- Poder realizar gráficas aproximadas de f(x).
-Optimizar funciones que modelizan problemas.

Conceptos necesarios para alcanzar los objetivos

Regla de L'Hôpital. Teorema del valor medio y sus aplicaciones. Aproximación lineal.
Teorema de Fermat. Teorema de Lagrange. Criterios de la primera derivada. Crecimiento y decrecimiento. Extremos. Punto de inflexión criterio de la segunda derivada. Trazado de curvas. Problemas de optimización.

Regla de l'Hôpital

Sean f y g dos funciones continuas definidas en el intervalo $[a,b]$, derivables en el abierto (a,b) y sea c perteneciente a (a,b) tal que $f(c)=g(c)=0$ y $g'(x)\neq 0$ si $x\neq c$.

Si existe el límite L de f'/g' en c, entonces existe el límite de f/g en c y es igual a L. En resumen,

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

Teorema del Valor Medio de Lagrange (TVM)

Si una función f es continua en [a,b] y derivable en (a,b), éxiste al menos un c que pertenece a (a,b) tal que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

Consecuencias del TVM

Teorema

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f'(x)>0$ en todo (a,b), entonces f es creciente en todo $[a,b]$.

Teorema

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f'(x)<0$ en todo (a,b), entonces f es decreciente en todo $[a,b]$.

Teorema de Fermat

Si una función f alcanza un máximo o mínimo local en c, y si la derivada $f'(c)$ existe en el punto c, entonces $f'(c) = 0$.

Ejercicio 1

Calcular los siguientes límites: $\frac{0}{0}$

1.1 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x.e^{x-2}-2}{x^2-4}$ 1.2 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-ln(x)-1}{x-1}$ 1.3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}$

1.4 $\lim\limits_{x\to 4} \frac{sen(x-4)}{x-4}$ 1.5 $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ 1.6 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-ln(x)-1}{x-1} + 2$

1.7 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(sen(x+\frac{\pi}{2}))}{cos(x)-1}$ 1.8 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{cos(2x+\frac{\pi}{2})+ln(x+1)}{sen(\frac{10x}{x-4})-2x}$ 1.9 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x.cos(x)}$

1.10 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{-x-ln(x)+1}{e^{1-x}+x-2}$ 1.11 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{5x} . sen(5x)$ 1.12 $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{e^{x-\pi}- cos(2x)}{sen(x)}$

Ejercicio 2

Determinar el valor de b ,que pertenece a reales, de modo que:

2.1 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{ln(x+b-bx^2)}{x-1} = \frac{1}{7}$

2.2 $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{e^{x-\pi}- cos(2x)}{3bsen(x)} = \frac{-1}{9}$

Ejercicio 3

Dada

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-\pi}-\cos(2x)}{sen(x)} & si\ x < \pi \\ 2b.\ln\left(e^{\frac{1}{\pi}x}\right)+5 & si\ x \geq \pi \end{cases}$$

Determinar b, que pertenece a reales, de modo que f(x) resulte continua en $x = \pi$.

Ejercicio 4

Calcular los siguientes límites: $\frac{\infty}{\infty}$

4.1 $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{-x}+x}{2x+1}$ 4.2 $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{ln(x)}{x^2-1}$ 4.3 $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x.sen(x)}{ln(-x+2)}$

4.4 $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x}. ln(x)$ 4.5 $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-x+4}{2x^2+1}$ 4.6 $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2}. ln(x)$

4.7 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{e^{-x}}$ 4.8 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{2e^{2x}+xe^{2x}}$ 4.9 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}+x}{2x+1}$

Ejercicio 5

Hallar el valor de b , que pertenece a reales, de modo que:

5.1) $\lim\limits_{x\to1} \frac{e^{bx^2-b}-1}{3x^2+x-4} = 6$

5.2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x.ln(x)+bx^2}{8x^2+2x-6} = \frac{1}{8}$

Ejercicio 6

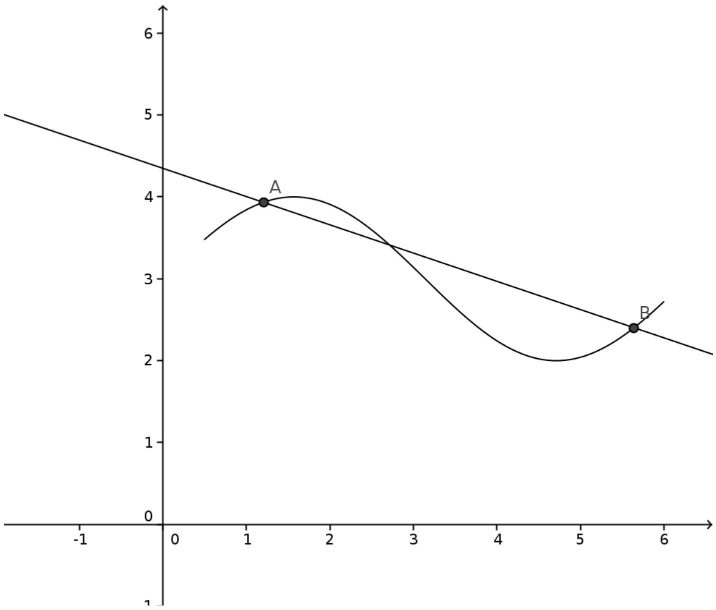
Hallar, si existen:

6.1) Asintotas horizontales de $f(x) = \frac{x.ln(x)+3\,x^2}{-x^2+5}$

6.2) Asintotas verticales de $f(x) = \frac{x}{1-cos(3x)+6x}$

Ejercicio 7

Trazar todas las rectas tangentes a la gráfica dada que tengan igual pendiente a la recta secante que pasa por los puntos A y B :



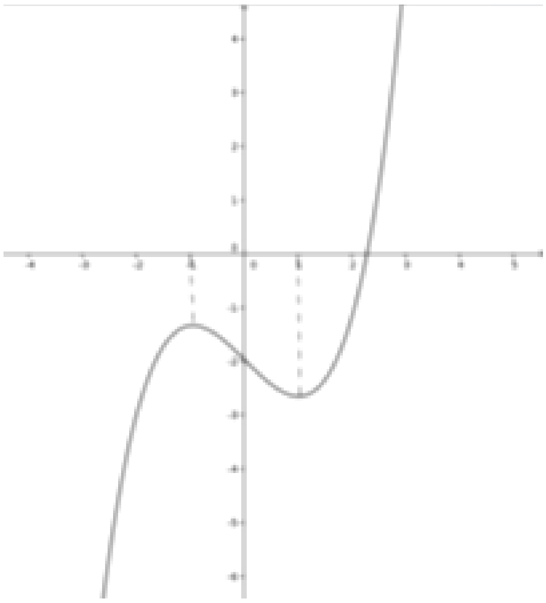
Ejercicio 8

De acuerdo al siguiente gráfico de f(x), determine todos los valores de x en los cuales:

i) $f(x)$ crece

ii) $f(x)$ decrece

iii) $f(x)$ tiene máximo y/o tiene mínimo



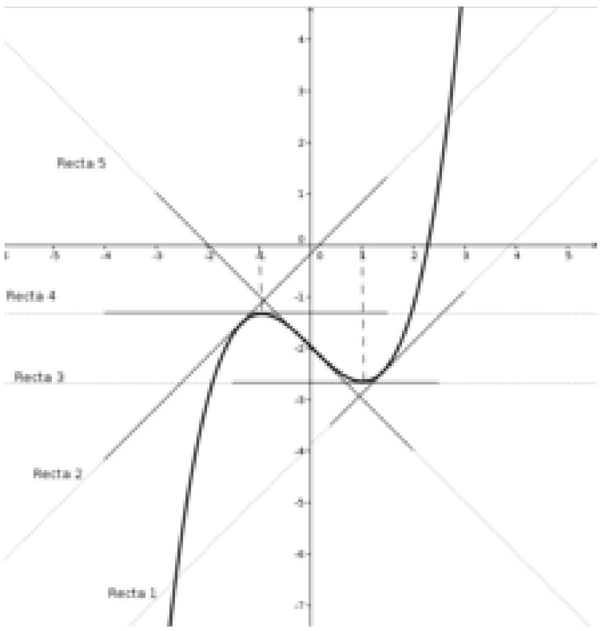
Ejercicio 9

De acuerdo al siguiente gráfico de f(x) y al signo de las pendientes de cada recta tangente, determine todos los valores de x en los cuales:

i) $f'(x) > 0$

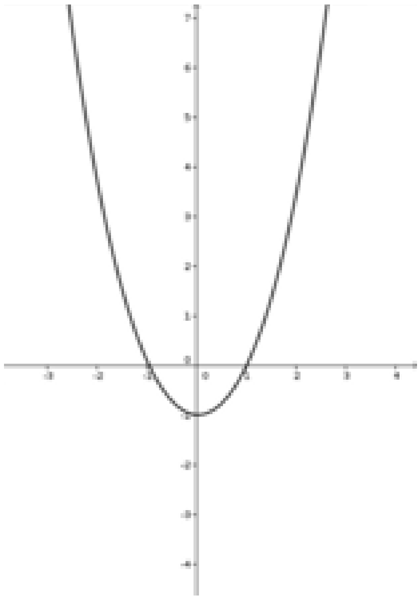
ii) $f'(x) < 0$

iii) $f'(x) = 0$



Ejercicio 10

De acuerdo al siguiente gráfico de f '(x) (derivada de f(x)), determine los intervalos de crecimiento, decrecimiento, valores máximos y mínimos de f(x).



Ejercicio 11

Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, valores máximos y mínimos relativos de:

11.1 $x - \frac{5}{2}.ln(x^2+4)$ 11.2 $f(x) = (x^2 - 10).e^{x^2}$ 11.3 $f(x) = x^2.\,e^{x^2}$

Ejercicio 12

Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, valores máximos y mínimos relativos y hacer un gráfico aproximado de f(x):

12.1 $f(x) = x^2 - 4x$

12.2 $f(x) = 3x^2 - 12x - 15$

12.3 $f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x$

12.4 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6$

12.5 $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$

12.6 $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 5x$

Ejercicio 13

De acuerdo a las siguientes funciones hallar dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos locales, asíntotas verticales y horizontales y un gráfico aproximado de f(x).

13.1 $f(x) = \frac{x^2}{2x-2}$

13.2 $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$

13.3 $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

13.4 $f(x) = 2x - \frac{200}{x^2}$

13.5 $f(x) = \frac{4x^2}{x+3} + 20$

13.6 $f(x) = 2 + [sen(x)]^2$ en $[0,2\pi]$

Ejercicio 14

14.1) Hallar k que pertenece a reales de modo que $f(x) = \frac{x}{x^2+k}$ tenga extremos en x=-2 y en $x_0 = 2$.

14.2) Hallar k que pertenece a reales de modo que $f(x) = 2xe^x + xe^x - ke^x$ tenga extremo en $x_0 = 0$.

Ejercicio 15

Sabiendo que f(x) cumple con las siguientes condiciones hacer un gráfico aproximado:

15.1

- $Dominio:\ R - \{2, 5\}$
- $\lim_{x \to 5^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 5^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$;
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$
- $Co = \{3, 4\}$; $C_+ = (-\infty, 2)\ U\ (3, 4)\ U\ (5, +\infty)$; $C_- = (2, 3)\ U\ (4, 5)$
- $C'o = \{\frac{7}{2}\}$; $C'_+ = (-\infty, 2)\ U\ (2, \frac{7}{2})$; $C'_- = (\frac{7}{2}, 5)\ U\ (5, +\infty)$

15.2

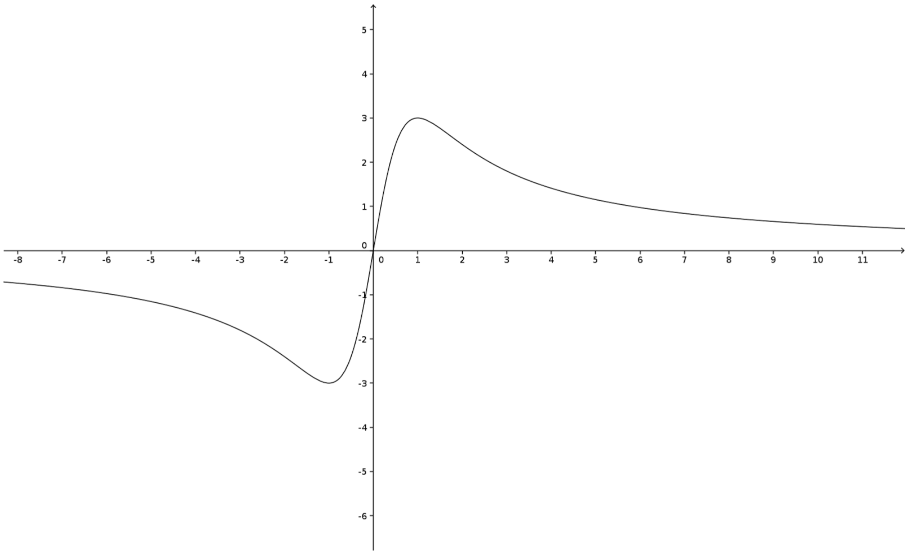
- $Dominio:\ R$
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$
- $Co = \emptyset$
- $C'o = \{-3, 0, 3\}$; $C'_+ = (-\infty, -3)\ U\ (0,\ 3)$; $C'_- = (-3, 0)\ U\ (3, +\infty)$
- $f(-3) = f(3) = 4$; $f(0) = \frac{3}{2}$

15.3

- $Dominio:\ (-8, +\infty)$
- $AV\ \ en\ x = -8$
- $Co = \{-7, 1\}$; $C'_+ = (-8, -7)\ U\ (1, +\infty)$ $C'_- = (-7, 1)$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$
- $x_{mínimo} = -3$; $y_{mínimo} = -2$
- $x_{máximo} = 4$; $y_{máximo} = 5$
- $f'(4) =\ No\ existe$

Ejercicio 16

Marcar sobre la gráfica de f(x) y de manera aproximada los puntos de inflexión:



Ejercicio 17

Hallar los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

17.1 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ 17.2 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 14$ 17.3 $f(x) = x^4 - 6x^2 - 8$

Ejercicio 18

Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 16x - 12$ en su punto de inflexión.

Ejercicio 19

Sabiendo que f(x) cumple con las siguientes condiciones hacer un gráfico aproximado:

- $Dominio: R$
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$
- $Co = \{0\}$; $C_+ = (0, +\infty)$; $C_- = (-\infty, 0)$
- $C'o = \{-1, 1\}$; $C'_+ = (-1, 1)$; $C'_- = (-\infty, -1)\ U\ (1, +\infty)$
- $C''o = \{-2, 0, 2\}$; $C''_+ = (-2, 0) U (2, +\infty)$; $C''_- = (-\infty, -2)\ U\ (0, 2)$
- $f(-1) = -3$
- $f(1) = 3$

Ejercicio 20 (Problema)

Una pulga desea saltar arriba del lomo de un perro de 0,5 metros de altura. El salto describe una trayectoria que está dada por la siguiente expresión matemática **h(x)** $= -\frac{4}{3}x^3 + 2x^2$ en la cual "x" representa el largo del salto y "h" la altura del mismo.

Determinar si la pulga llegará a cumplir su objetivo. (Sugerencia: determine el "y máximo" y saque conclusiones)

Ejercicio 21 (Problema)

Se desea construir con alambre una cerca rectangular de área igual a 100 m^2. Determinar la cantidad de alambre necesario tal que el perímetro sea mínimo.

Ejercicio 22 (Problema)

Un cocinero desea hacer un pastel con forma rectangular y para tal propósito primero debe construir un molde con cartón del cual dispone una tira de 1,6 metros. Hallar las dimensiones del molde de modo que el pastel tenga área máxima.

Ejercicio 23 (Problema) La concentración de un fármaco en el torrente sanguíneo t minutos después de ser inyectado está dado por

$C(t) = \frac{6t+4}{2t^2+\frac{1}{2}}$. Determinar cuando la concentración aumenta, cuando disminuye y cuando es máxima.

Ejercicio 24 (Problema)

Hallar el punto del gráfico de $f(x) = 2x + 3$ que está a menor distancia del punto (5,3).

Ejercicio 25 (Problema)

La tapa de un libro debe contener texto cuya área debe abarcar solo 16 cm² , dejando un margen superior e inferior de 2 cm y 1 cm de margen izquierdo y derecho respectivamente . Calcular las dimensiones de la tapa de modo que el costo sea mínimo.

Ejercicio 26 (Problema)

El departamentos de ventas de una empresa observó lo siguiente: si la cantidad era de 100 empleados o menor cada uno generaba una ganancia promedio de $20.000 mensuales sobre ventas concretadas, pero por cada empleado nuevo que se incorporaba a la empresa las ganancias promedio generadas por cada empleado disminuía en $100, (es decir, si se incorpora un empleado nuevo, la empresa constará de 101 empleados y cada uno aportará ganancias promedio de $19.900, pero si se incorporan 2 empleados nuevos la empresa tendrá 102 empleados y el promedio de ganancias promedio será de $19.800, y así sucesivamente. Calcular el número máximo de empleados nuevos a incorporar para que la empresa tenga máxima ganancia.

Integrador

Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales son falsas. En el caso que resulten falsas justifique el por qué.

1) En los intervalos en los cuales la derivada resulta ser positiva f(x) está ………………...
2) Los puntos en los cuales hay un extremo de f(x) existe un máximo o un ……………….
3) La pendiente de un recta tangente vale cero en los puntos……………………………….

Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales son falsas. En el caso que resulten falsas justifique el por qué.

i) Todo punto crítico es un extremo de f(x)

ii) Si x_0 pertenece al dominio de f(x) pero no al dominio de f '(x) entonces x_0 es un punto crítico de f(x).

iii) El máximo de una función coincide con el punto de inflexión.