Tercer Parcial Análisis Matemático I C2 22/11/2019 Carrera: Bioquímica

Nombre del Alumno:………………………………………….........DNI:.............................Comisión:……

IMPORTANTE: Uno de los requisitos para aprobar el presente examen es resolver correctamente, al menos, uno de los ejercicios referidos al cálculo de áreas (Ej.4 o Ej.5).
No se permite realizar consultas una vez comenzado el examen.
Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Ejercicio 1-

Sea $g(x) = sen\,(x+\pi)$, **hallar** los valores de A, B y C de modo que se verifique la siguiente igualdad:

$$\int_{x=-\pi}^{x=\pi} f\,(g(x))\,\frac{cos\,(x+\pi)}{sen\,(x+\pi)}\,dx = 3A\int_{u=B-1}^{u=C-3}\frac{f(u)}{u}\,du$$

Ejercicio 2-

Hallar la función $F\,(x)$ que verifique las siguientes condiciones:

a) $F\,'(x) = [sen(x-\ \pi)]^2 .\ 5cos(x-\ \pi)$

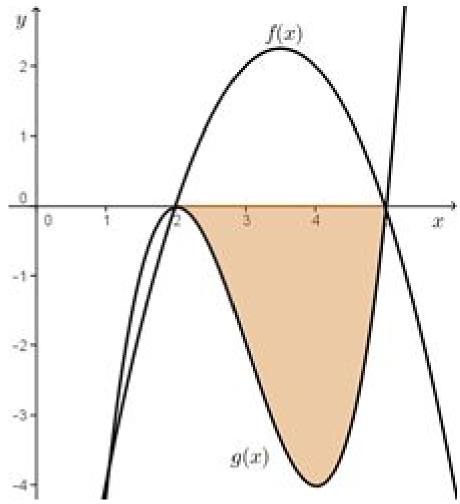
b) $F(\frac{3}{2}\,\pi)\ = \frac{4}{3}$

Ejercicio 3-

Calcular $\int\,(x.sen(x) + 2x\ )\ dx$

Ejercicio 4.-

a) **Plantear** la integral que determinaría el cálculo del área sombreada de la siguiente región: .



b) Calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ sabiendo que el área de la región sombreada es igual a 12 y que $\int_{x=2}^{x=5} f(x)\,dx = \int_{x=2}^{x=5} \frac{3}{2}\,dx$. **Justificar**

Ejercicio 5.-

a) Graficar la región comprendida entre la gráficas de:

$$f(x) = \sqrt{x-2} \text{ y } h(x) = 3$$

b) Hallar el área encerrada entre las gráficas de dichas funciones para $2 \leq x \leq 11$

<table>
<tr><td colspan="3">Ejercicio 1</td><td colspan="2">Ejercicio 2</td><td colspan="2">Ejercicio 3</td><td colspan="2">Ejercicio 4</td><td colspan="2">Ejercicio 5</td><td>Calificación</td></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>a</td><td>b</td><td>Método</td><td>Respuesta</td><td>a</td><td>b</td><td>a</td><td>b</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>0.4</td><td>0.8</td><td>0.8</td><td>1.5</td><td>0.5</td><td>0.5</td><td>1.5</td><td>0.5</td><td>1.5</td><td>0.5</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Firma Alumno **Firma Docente**

1 Resolución Tercer parcial comisión 2, segundo cuatrimestre de 2019.

1. Ejercicio 1

   (a) Para llegar a la expresión final realizamos una sustitucíon con el siguiente cambio de variables y su respectivo diferencial:

$$
\begin{aligned}
u &= \sin(x+\pi) & (1)\\
du &= u'\,dx = \cos(x+\pi)dx & (2)\\
& & (3)
\end{aligned}
$$

   Los límites de integración en la nueva variable se obtienen evaluando en $u(x)$:

$$
\begin{aligned}
u(-\pi) &= \sin(-\pi+\pi) = \sin(0) = 0 & (4)\\
u(\pi) &= \sin(\pi+\pi) = \sin(2\pi) = 0 & (5)
\end{aligned}
$$

   Escribimos la integral en la nueva variable y la igualamos al resultado que presenta el problema en términos de las constantes A, B y C:

$$
\int_{x=\pi}^{x=-\pi} f(g(x))\frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)}dx = \int_{u=0}^{u=0}\frac{f(u)}{u}du = 3A\int_{z=C-3}^{z=B-1}\frac{f(u)}{u}du \qquad (6)
$$

   Para que se verifique la igualdad, planteamos las siguientes condiciones

$$
\begin{aligned}
3A &= 1 \to A = \frac{1}{3} & (7)\\
B-1 &= 0 \to B = 1 & (8)\\
C-3 &= 0 \to C = 3 & (9)
\end{aligned}
$$

2. Ejercicio 2

   (a) La función $F(x)$ satisface la condición $F'(x) = (\sin(x-\pi))^2\, 5\cos(x-\pi)$ y por lo tanto es una primitiva de $(\sin(x-\pi))^2\, 5\cos(x-\pi)$. Calculemos la integral indefinida para obtener la función $F(x)$ a menos de una constante que luego se puede calcular de la segunda condición.

$$
\begin{aligned}
\int (\sin(x-\pi))^2\, 5\cos(x-\pi)dx &= 5\int t^2 dt = 5\frac{t^3}{3} + c = \frac{5}{3}(\sin(x-\pi))^3 + c & (10)\\
t = \sin(x-\pi) & & (11)\\
dt = \cos(x-\pi)dx & & (12)
\end{aligned}
$$

   Aplicamos el método de sustitución para resolver la integral.

   La función $F(x)$ es de la forma $F(x) = \frac{5}{3}(\sin(x-\pi))^3 + C$, en donde esta constante no es arbitraria como en la integral indefinida sino que la podemos calcular de la segunda condición

$F(3/2\pi) = 4/3$.

$$\begin{aligned}
F(\frac{3}{2}\pi) &= \frac{5}{3}(\sin(\frac{3}{2}\pi - \pi))^3 + C = \frac{5}{3}1^3 + C = \frac{4}{3} && (13)\\
\frac{5}{3} + C &= \frac{4}{3} && (14)\\
C &= -\frac{1}{3} && (15)
\end{aligned}$$

Respuesta : $F(x) = \frac{5}{3}(\sin(x-\pi))^3 - \frac{1}{3}$

3. Ejercicio 3

   (a) Separamos la integral utilizando propiedades de linealidad y luego resolvemos,

$$\begin{aligned}
\int (x\sin(x) + 2x)\, dx &= \int x\sin(x)dx + 2\int xdx && (16)\\
&= -x\cos(x) + \sin(x) + 2\frac{x^2}{2} + c && (17)
\end{aligned}$$

   La segunda integral se obtiene de tabla y la primera se resuelve aplicando el método de partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \qquad (18)$$

   Aplicado a la integral obtenemos

$$\begin{aligned}
\int x\sin(x)dx &= -x\cos(x) - \int(-)\cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x) + c && (19)\\
f(x) &= x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 1 && (20)\\
g'(x) &= \sin(x) \quad \longrightarrow \quad g(x) = -\cos(x) && (21)
\end{aligned}$$

4. Ejercicio 4

   (a)

$$\text{Área} = \int_2^5 (0 - g(x))\, dx \qquad (22)$$

   (b) La siguiente integral definida la calculamos aplicando regla de Barrow

$$\int_2^5 f(x)dx = \int_2^5 \frac{3}{2}dx = \frac{3}{2}x\Big|_2^5 = \frac{3}{2}(5-2) = \frac{9}{2} \qquad (23)$$

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_2^5 (f(x) - g(x))\, dx = \int_2^5 f(x)dx - \int_2^5 g(x)dx = \int_2^5 f(x)dx + \int_2^5 -g(x)dx && (24)\\
&= \int_2^5 f(x)dx + \int_2^5 (0 - g(x))\, dx = 9/2 + 12 = \frac{33}{2} && (25)
\end{aligned}$$

   La última integral representa el área dato (región sombreada) la cual es igual a 12.

.

5. Ejercicio 5

(a) Calculamos la intersección de $f(x)$ y la recta $h(x) = 3$,

$$\sqrt{x-2} = 3 \tag{26}$$

$$x - 2 = 9 \tag{27}$$

$$x = 11 \tag{28}$$

Elevamos al cuadrado y despejamos.Podemos verificar que $f(11) = h(11) = 3$ Realizamos el graáfico y marcamos la región sobreada que indica el problema:

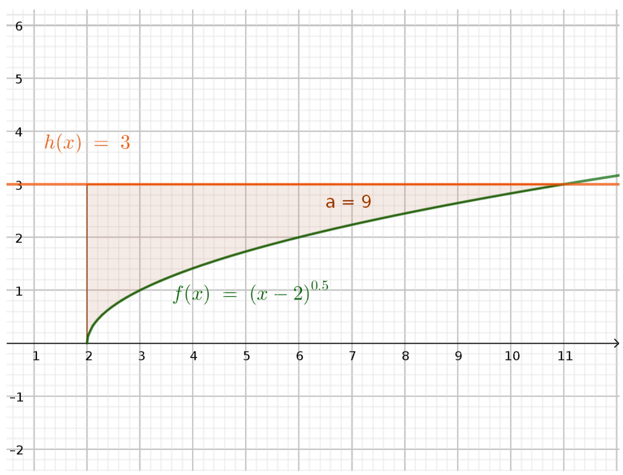


Figure 1: La gráfica del área sombreada.

(b) El área de la región sombrada se puede calcular en términos de la integral definida. El techo en el intervalo de integración corresponde a la función $h(x)$ y el piso $f(x)$

$$\text{área} = \int_2^{11} (h(x) - f(x))dx = \int_2^{11} (3 - \sqrt{x-2})dx = (3x - \frac{2}{3}(x-2)^{3/2}\Big|_2^{11} \tag{29}$$

$$= \left((3*11 - \frac{2}{3}(11-2)^{3/2}) - (3*2 - \frac{2}{3}0^{3/2})\right) = 9 \tag{30}$$

Se obtiene la primitiva de la segunda integral por sustición,

$$\int \sqrt{x-2}dx = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}(t)^{3/2} + c = \frac{2}{3}(x-2)^{3/2} + c \tag{31}$$

$$t = x - 2 \tag{32}$$

$$dt = dx \tag{33}$$

Respuesta: El área vale 9.