# Unidad VII

## Integrales

**Objetivo**
Calcular el área comprendida entre diferentes curvas utilizando.

**Conceptos necesarios para alcanzar los objetivos**

Integral indefinida, primitivas o antiderivadas. Definición. Cálculo por integración directa. Propiedades. Cálculo de integración por método de sustitución. Cálculo de integración por método de integración por partes. Integrales combinadas. Integral definida: Teorema fundamental del cálculo. Regla de Barrow. Cálculo de áreas. Introducción a ecuaciones diferenciales. Introducción de integrales impropias.

**Ejercicio 1**
Dada $f'(x)$ hallar una $f(x)$ tal que:

1.1 $f'(x) = 6$ 1.2 $f'(x) = x^2$ 1.3 $f'(x) = e^x$ 1.4 $f'(x) = x^2 + 2$
1.5 $f'(x) = x^3$ 1.6 $f'(x) = 1 - \sqrt{x}$ 1.7 $f'(x) = x - \sqrt{x}$ 1.8 $f'(x) = e^x + sen(x)$

**Ejercicio 2**
Hallar una primitiva de $g(x)$:

2.1 $g(x) = 2cos(x)$ 2.2 $g(x) = 5x^2\sqrt{x}$
2.3 $g(x) = \frac{1}{x} - e^x$ 2.4 $g(x) = -x^2 + x$

**Ejercicio 3**
Hallar la función $f(x)$ donde:

3.1 $f'(x) = cos(x) - 5$ $y$ $f(\frac{\pi}{2}) = -\pi$
3.2 $f'(x) = \frac{1}{x} - e^x + e$ $y$ $f(1) = 5$
3.3 $f'(x) = \sqrt{x} - x^2 + 2$ $y$ $f(4) = 0$

**Ejercicio 4**
Calcular las siguientes integrales:

4.1 $\int x^2\,dx$ 4.2 $\int (x^2\ +2\ )dx$ 4.3 $\int x^{200}\ dx$

4.4 $\int (x^2\ + sen(x))dx$ 4.5 $\int (e^{x} - \sqrt{x})\ dx$ 4.6 $\int (x^2\ + \frac{2}{x}\ )dx$

4.7 $\int (3sen(x) - cos(x))\ dx$ 4.8 $\int x^2.(2 + \sqrt[3]{x})dx$ 4.9 $\int x^{\frac{3}{2}}.(2 + \sqrt[3]{x})dx$

**Ejercicio 5**
Utilizando el método de sustitución calcular las siguientes integrales:

5.1 $\int cos(5x)\ dx$ 5.2 $\int sen(6x)dx$ 5.3 $\int \frac{x}{x^2+2}dx$

5.4 $\int \frac{4x-1}{4x^2-2x}dx$ 5.5 $\int \frac{5}{x+4}\ dx$ 5.6 $\int \frac{7}{x-6}dx$

5.7 $\int x.\sqrt{x^2+10}\ dx$ 5.8 $\int (x+1)e^{x^2+2x}dx$ 5.9 $\int sen(x).sen(cos(x)+1)dx$

5.10 $\int \frac{6}{\sqrt{x}}.e^{\sqrt{x}}\ dx$ 5.11 $\int (2x^3+3x^2).e^{x^4+2x^3}dx$ 5.12 $\int (\frac{sen(ln(x))}{x} + 2x)\ dx$

5.13 $\int \frac{ln^5(x)}{4x}dx$ 5.14 $\int e^{sen(x)}.cos(x)\ \ dx$ 5.15 $\int \frac{x}{(x^2+2)ln(x^2+2)}dx$

**Ejercicio 6**
Determinar el valor de k que pertenece a reales de modo que se cumpla las siguientes igualdades:

i) $\int f(sen(5x)).cos(5x)\ dx\ =\ k.\int f(t)\ dt$

ii) $\int f(\sqrt{x^2-4x+4}\ \frac{(x-2)}{2\sqrt{x^2-4x+4}}\ dx\ =\ \frac{k}{3}.\int f(t)\ dt$

iii) $\int g(4t^2+2t).(4t+1)\ dx\ =\ 7k.\int f(z)\ dz$

**Ejercicio 7**
Utilizando el método de partes calcular las siguientes integrales:

7.1 $\int 4.ln(x)\ dx$ 7.2 $\int ln(x)dx$ 7.3 $\int x.e^{x}dx$

7.4 $\int x^7.ln(x)\ dx$ 7.5 $\int x.sen(x)dx$ 7.6 $\int x.cos(x)dx$

7.7 $\int x^2.sen(x)\, dx$

7.8 $\int (x^2+x).ln(x)dx$

7.9 $\int x.\sqrt{x+4}dx$

7.10 $\int 5ln(x)+\sqrt{3-x}\, dx$

7.11 $\int \frac{x}{[cos(x)]^2}dx$

7.12 $\int x^2.\sqrt{3-x}dx$

7.13 $\int arctg(x)\, dx$

7.14 $\int x^2.arctg(x)\, dx$

**Ejercicio 8**

Calcular las siguientes integrales:

8.1 $\int \frac{cos(ln(x))}{x}\, dx$

8.2 $\int ln(cos(x)).\frac{sen(x)}{cos(x)}\, dx$

8.3 $\int e^{3x}.sen(2x)dx$

8.4 $\int x.cos(x^2+7).(3x^2+21)dx$

8.5 $\int 8x.e^{5x-2}dx$

8.6 $\int \frac{(16x-32)}{15}.e^{x-2}dx$

**Ejercicio 9**

Dada $f'(x) = \frac{cos(x)}{sen^3(x)}$ hallar $f(x)$ de modo que tenga un cero en $\frac{\pi}{2}$.

**Ejercicio 10**

i) Hallar $f(x)$ de modo que $f'(x) = 4.ln(x)$ y $f(1) = -8$

ii) Hallar $f(x)$ de modo que $f'(x) = \frac{ln^2(x-2)+ln(x-2)}{x-2}$ y $f(3) = 9$

iii) Hallar $f(x)$ de modo que $f'(x) = \frac{sen(x)}{[cos(x)]^4}$ y $f(\pi) = 3$

**Ejercicio 11**

Calcular las siguientes integrales definidas:

11.1 $\int_{-2}^{4} 6\, dx$

11.2 $\int_{1}^{3} \sqrt{x}\, dx$

11.3 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sen(x)\, dx$

11.4 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} cos(u)du$

11.5 $\int_{1}^{2} e^{-u+2}du$

**Ejercicio 12**

i) Se sabe que $\int_{2}^{4} f(x)\, dx = 5$, calcular $\int_{2}^{4} [f(x) + 3x]\, dx$

ii) Se sabe que $\int_{1}^{3} [2f(t)+4]dt = 16$, calcular $\int_{1}^{3} [f(t)]\, dt$

**Ejercicio 13**

Hallar b que pertenece a reales de modo que se cumplan las siguientes igualdades:

13.1) $\int_{1}^{b} (x-2)\, dx = \frac{3}{2}$

13.3) $\int_0^1 (bx - x^2)\, dx = \frac{2}{3}$

**Ejercicio 14**

Hallar A,B y C que pertenecen a reales , de modo que se verifique la siguientes igualdades :

14.1 $\displaystyle\int_{x=1}^{x=2} (2x+1).f(ln(x^2+x)).\frac{1}{x^2+x}\, dx = \frac{5}{A}\int_{t=C}^{t=B} f(t)\, dt$

14.2 $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} f(e^{\,2x^2+2}).x.e^{\,2x^2+2}\, dx = \frac{1}{A}\int_{t=C}^{t=B} f(t)\, dt$

14.3 $\displaystyle\int_{x=3}^{x=5} g(\sqrt{x^2-4x+4}).\frac{x-2}{2\sqrt{x^2-4x+4}}\, dx = \frac{A}{3}\int_{t=C}^{t=B} f(t)\, dt$

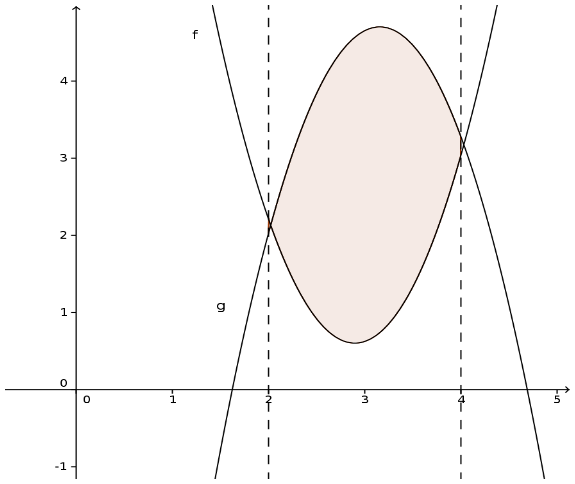
14.4 $\displaystyle\int_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} f(cos(x+\pi).\frac{sen(x+\pi)}{cos(x+\pi)}\, dx = \frac{A}{2}\int_{z=C}^{z=B} \frac{f(z)}{z}\, dz$

14.5 $\displaystyle\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} h(e^{\,sen(t)}).(e^{\,sen(t)}.cos(t))\, dt = 2A.\int_{z=C}^{z=B} f(z)\, dz$

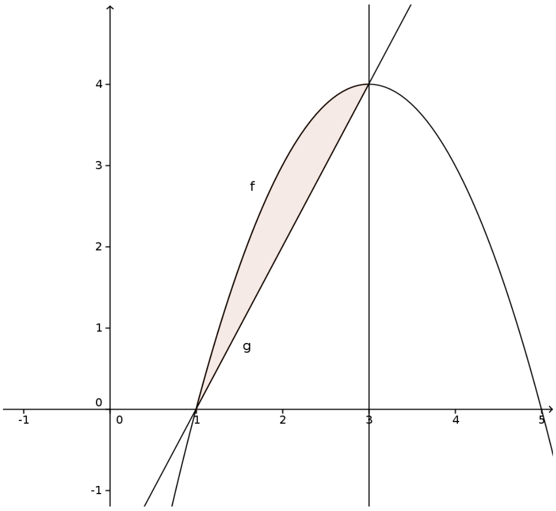
**Ejercicio 15**

Expresar, mediantes integrales definidas, el área de las regiones sombreadas:

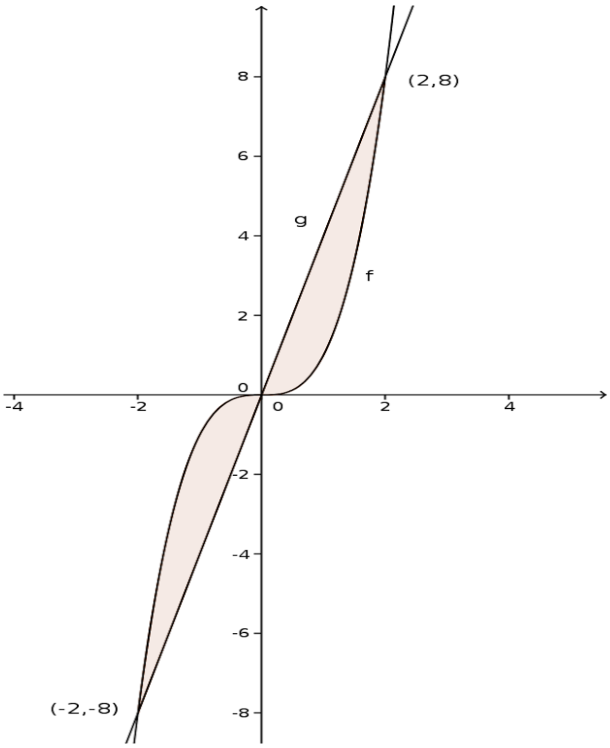
15.1



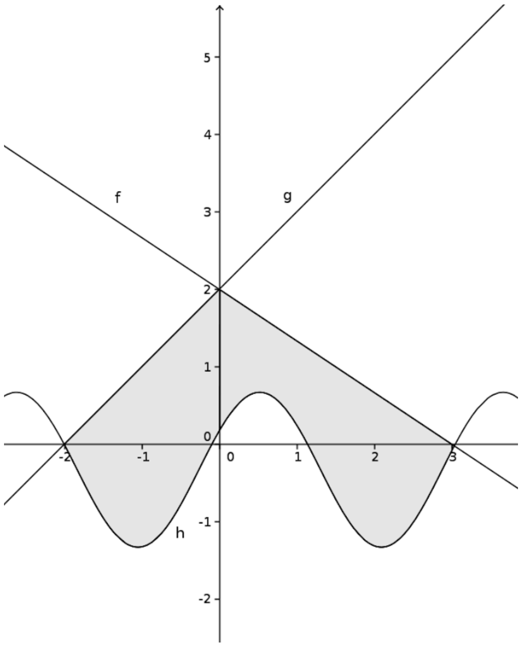
15.2




15.3



15.4




**Ejercicio 16**

Graficar y calcular el área de la región encerrada entre los gráficos de las siguientes funciones:

16.1 $f(x) = -2x^2 + 16x - 30$ y el eje x.

16.2 $f(x) = -x^2 + 4$ y $g(x) = x + 2$

16.3 $f(x) = -x^2 - x + 2$ y $g(x) = 3x^2 - 5x - 6$

16.4 $f(x) = -(x-3)^2 + 2$ y $g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

16.5 $f(x) = x^3$ y $g(x) = 4x$

16.6 $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = -x + 6$ y el eje x

16.7 $f(x) = \sqrt{x + 16}$ y $g(x) = 5$ entre $0 \leq x \leq 9$

16.8 $f(x) = \sqrt{x + 16}$ y $g(x) = 5$ entre $-16 \leq x \leq 0$

16.9 $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$ entre $-1 \leq x \leq 1$

16.10 $f(x) = cos(x)$ y $g(x) = 1$ entre $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

16.11 $f(x) = -sen(x)$ y $g(x) = -1$ entre $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

16.12 $f(x) = ln(x)$ y $g(x) = 1$ entre $1 \leq x \leq e^2$

# Integrador

**Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales son falsas. En el caso que resulten falsas justifique el por qué.**

1) Se usaron dos métodos para el cálculo de integrales cuando las mismas no se resuelven de manera directa , ellos son método de sustitución y método de ……………
2) La integral de una suma es igual a ……………………………..
3) El teorema fundamental del cálculo nos demuestra que la integral y la derivada son operaciones……………...

**Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales son falsas. En el caso que resulten falsas justifique el por qué.**

i) El área puede ser negativa sólo en casos especiales.
ii) Si la región encerrada entre las gráficas resulta estar por debajo del eje x el área es negativa.
iii) El área representada en la siguiente figura resulta ser menor a 2.