Universidad Nacional ARTURO JAURETCHE

Segundo Parcial -Análisis Matemático I C3 1/11/2019 Carrera: Bioquímica

Nombre del Alumno:………………………………………………………………….Comisión:…..

IMPORTANTE: Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas y no se permite que el estudiante realice consultas sobre la resolución del examen una vez comenzado el mismo.

Ejercicio 1.-

a) **Hallar** k, que pertenece a reales, de modo que la recta tangente a la gráfica de $f(t) = 2kt\,cos(t+\pi)$ en $t_0 = \pi$ tenga pendiente igual a 6.

b) Para el valor de k encontrado en el ítem a) **hallar** la ecuación de la recta tangente en $t_0 = \pi$.

Ejercicio 2.-

a) **Determinar** "b" ,que pertenece a reales, de modo que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{e^{x-\pi} - cos(2x)}{3b\,sen(x)} = \frac{-1}{9}$$

b) **Calcular** $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}+x}{2x+1}$ y **determinar**, si existe, la ecuación de la asíntota horizontal correspondiente.

Ejercicio 3.-

Dada $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$

a) **Hallar** dominio, C_0, AV y AH de $f(x)$.

b) **Hallar** los intervalos de crecimiento, decrecimiento y donde se localizan los valores máximos y/o mínimos y **hacer** un gráfico aproximado de $f(x)$.

Ejercicio 4.-

Dada

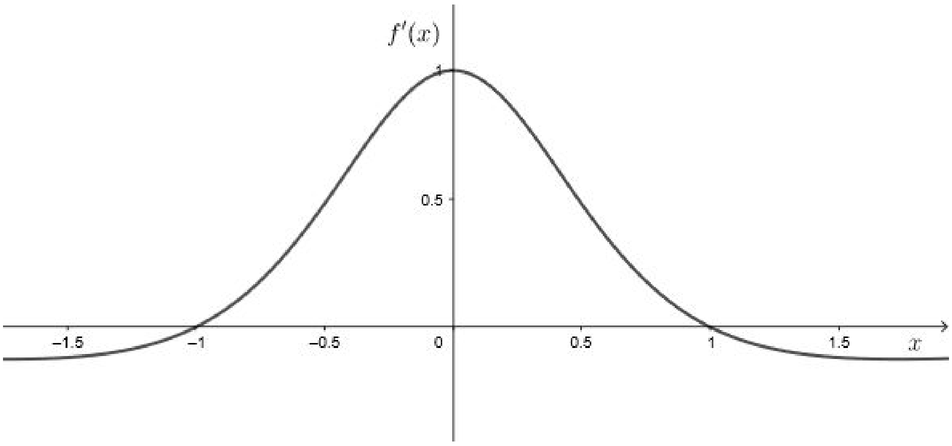
$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 2 & si\ x < 2 \\ (x-3)^2 + 2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

a) **Determinar** si $f(x)$ resulta continua en x= 2

b) **Determinar** si $f(x)$ resulta derivable en x=2

Ejercicio 5.-

Sea $f(x)$ una función continua y sea $f\,'(x)$ su **<u>función derivada</u>** cuyo gráfico es el siguiente:



Determinar:

a) Intervalo/s de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) Máximo/s y/o mínimo/s de $f(x)$**. <u>Justificar.</u>**

<table>
<tr><th rowspan="2">Ítem</th><th colspan="2">Ejercicio 1</th><th colspan="2">Ejercicio 2</th><th colspan="2">Ejercicio 3</th><th colspan="2">Ejercicio 4</th><th colspan="2">Ejercicio 5</th><th>Total</th></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td>a</td><td>b</td><td>a</td><td>b</td><td>a</td><td>b</td><td>a</td><td>b</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Puntaje</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0.5</td><td>1.5</td><td>0.5</td><td>1.5</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Firma alumno **Firma docente**

1 Resolución Segundo parcial comisión 3, segundo cuatrimestre de 2019.

1. Ejercicio 1

   (a) La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ que pasa por el punto con $t_0 = \pi$ se puede obtener evaluando la función derivada en $t = \pi$. Calculamos la funcíon derivada,

   $$f'(t) = 2k\cos(t+\pi) - 2kt\sin(t+\pi) \quad (1)$$

   Luego se impone que la pendiente vale 6 y se despeja k,

   $$m_T = f'(\pi) = 2k = 6 \quad (2)$$
   $$k = 3 \quad (3)$$

   Respuesta: El valor de $k = 3$.

   (b) La ecuación de la recta tangente tiene la forma $y = 6x + b$ (reemplazamos la pendiente por 6). El valor de la ordenada al origen lo podemos hallar imponiendo que la recta pasa por el punto $(\pi, f(\pi)) = (0, 6\pi)$:

   $$6\pi = 6\pi + b \quad (4)$$
   $$0 = b \quad (5)$$

   Respuesta: La ecuación de la recta tangente es $y = 6x$.

2. Ejercicio 2

   (a) Se debe calcular el límite tomando a b como una constante, para luego ese resultado igualarlo a $-1/9$ y despejar b.

   $$\lim_{x\to\pi} \frac{e^{x-\pi} - \cos(2x)}{3b\sin(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{(e^{x-\pi} - \cos(2x))'}{(3b\sin(x))'} = \lim_{x\to\pi} \frac{e^{x-\pi} + 2\sin(2x)}{3b\cos(x)} = \frac{1}{-3b} \quad (6)$$

   El límite no se puede calcular directamente porque posee una indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos teorema de l' Hopital y obtenemos el tercer término de la ecuación (6) que no presenta indeterminación. Se obtiene el límite en términos del parámetro b.

   Para despejar b igualamos a $-1/9$,

   $$\frac{1}{-3b} = -\frac{1}{9} \quad (7)$$
   $$b = 3 \quad (8)$$

   Respuesta: $b = 3$.

(b)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x+x)'}{(2x+1)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-e^x+1}{2} = \frac{1}{2} \tag{9}$$

El límite presenta una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ que se puede resolver mediante el teorema de L ' Hopital derivando el numerador y denominador. La función posee una asíntota horizontal por derecha de ecuación $y = \frac{1}{2}$

3. Ejercicio 3

(a) El denominador es mayor o igual a 4 y por lo tanto

$$\mathrm{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} \tag{10}$$

Esto implica que no tiene asíntotas verticales. Para analizar las asíntotas horizontales tomamos el límite de $x \to \pm\infty$,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2+4} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x'}{(x^2+4)'} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2x} = 0 \tag{11}$$

Aplicamos l 'Hopital para resolver la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Se concluye que tiene asíntota horizontal por derecha e izquierda de ecuación $y = 0$.

Igualamos la función a cero para obtener las raices

$$f(x) = 0 \tag{12}$$
$$\frac{x}{x^2+4} = 0 \tag{13}$$
$$x = 0 \tag{14}$$

Tiene una raiz en $x = 0$.

$$c_0 = \{0\} \tag{15}$$

(b) Para estudiar el crecimiento y extremos analizamos el signo de la derivada $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2} \tag{16}$$

El dominio de la derivada es todos los reales y los puntos críticos se obtienen de las raices de la derivada.

$$f'(x) = 0 \tag{17}$$
$$\frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2} = 0 \tag{18}$$
$$x^2 = 4 \tag{19}$$

La derivada tiene dos raices, en $x = -2$ y $x = 2$. Analizamos el signo de la derivada aplicando Bolzano en la tabla 1 y obtenemos los intervalos de creciemiento y decrecimiento que nos permiten analizar si los puntos críticos son extremos.

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	Mín	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Table 1: Análisis de C'_+ y C'_- aplicando teorema de Bolzano

Respuesta: La función crece en $\mathrm{I}^+ = \{(-2,2)\}$ y decrece en $\mathrm{I}^- = \{(-\infty,-2),(2,+\infty)\}$.

La tabla 1 nos permite inferir que $x=-2$ es un mínimo y $x=2$ es un máximo. A continuación se detalla la gráfica de $f(x)$,

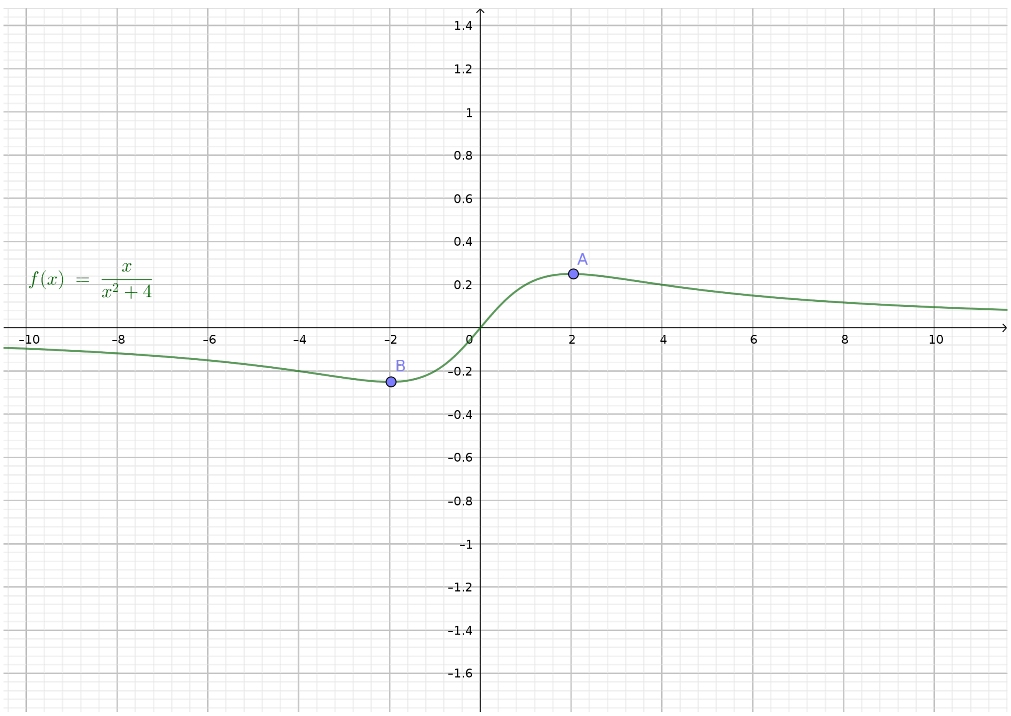


Figure 1: Gráfica de la función $f(x)$.

4. Ejercicio 4

   (a) Para que $f(x)$ sea continua en $x_0 = 2$ se debe satisfacer que exista $f(x_0)$ y tome el mismo valor que los límites laterales L_+ y L_-.

$$L_- = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x-1)^2 + 2 = 3 \tag{20}$$

$$L_+ = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x-3)^2 + 2 = 3 \tag{21}$$

$$f(0) = (2-3)^3 + 2 = 3 \tag{22}$$

Se satisface la siguiente relación

$$f(0) = L_+ = 3 = L_- \tag{23}$$

y por lo tanto la función es continua en $x = 2$

(b) Se verificó que la función es continua en $x = 2$. Luego la función es derivable en $x = 2$ si los límites laterales de la derivada coinciden.

$$L'_- = \lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} 2(x-1) = 2 \tag{24}$$

$$L'_+ = \lim_{x \to 2^+} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} 2(x-3) = -2 \tag{25}$$

Respuesta: Los límites laterales de las derivadas no coinciden $L'_- \neq L'_+$ y por lo tanto la función no es derivale en $x = 2$.

.

5. Ejercicio 5

(a) El dominio de la derivada coincide con el de la función y vale Dom$f'(x) = \mathbb{R}$. Se pueden analizar el crecimiento a partir del signo de la derivada. Los puntos críticos, que son los candidatos a extremos, corresponden a los ceros de la derivada ($c'_0 = \{-1, 1\}$). Estos puntos críticos, nos permiten plantear la tabla 2 y calcular el conjunto de positividad y negatividad de la derivada.

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	Mín	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Table 2: Análisis de C'_+ y C'_- aplicando teorema de Bolzano

De la tabla podemos obtener los intervalos de crecimeinto y decrecimeinto de la función $f(x)$.

Respuesta: La función crece en $\mathrm{I}^+ = \{(-1, 1)\}$ y decrece en $\mathrm{I}^- = \{(-\infty, -1)(1, +\infty)\}$.

(b) De la tabla de positivadad y negatividad podemos observar que $x = -1$ es un mínimo local (decrece a la izquierda y crece a la derecha) y $x = 1$ es un máximo local (crece a la izquierda y decrece a la derecha).