

Nombre del Alumno:.....DNI:.....Comisión:.....

IMPORTANTE: Uno de los requisitos para aprobar el presente examen es resolver correctamente, al menos, uno de los ejercicios referidos al cálculo de áreas (Ej.4 o Ej.5).

No se permite realizar consultas una vez comenzado el examen.

Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Ejercicio 1- Hallar los valores de A, B y C que pertenecen a reales de modo que se verifique la siguiente igualdad:

$$\int_{x=\pi/2}^{x=\pi} f(\cos(x-\pi)) \frac{\sin(x-\pi)}{\cos(x-\pi)} dx = 2A \int_{z=C}^{z=B} \frac{f(z)}{z} dz$$

Ejercicio 2- Hallar una función $F(x)$ que verifique las siguientes condiciones:

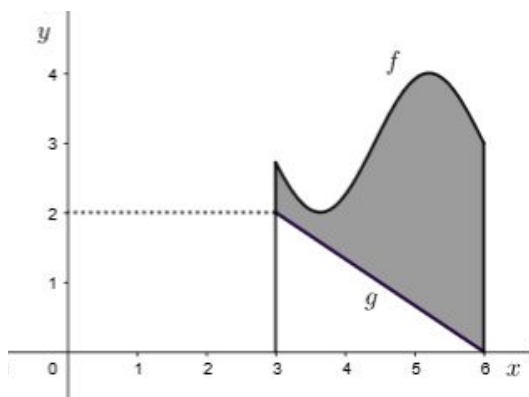
a) $F'(x) = 4 \ln(x)$

b) $F(1) = -7$

Ejercicio 3- Calcular $\int (\frac{\cos(\ln(x))}{x} - 16) dx$

Ejercicio 4-

Se sabe que $\int_3^6 f(x) dx = 3 + \int_0^3 2 dx$



- a) **Plantear** la integral que determinaría el cálculo del área sombreada referida a la figura anterior.
- b) **Calcular** el valor del área de la región sombreada del inciso a) **Justificando** su respuesta.

Ejercicio 5.-

a) **Graficar** la región comprendida entre:

$f(x) = \sqrt{x}$, la recta $y = -\frac{1}{2}x + 4$ y el *eje y*

b) **Calcular** el área de la región del ítem a)

Ejercicio 1			Ejercicio 2		Ejercicio 3		Ejercicio 4		Ejercicio 5		Calificación
A	B	C	a	b	Método	Respuesta	a	b	a	b	
0.4	0.8	0.8	1.5	0.5	0.5	1.5	0.5	1.5	0.5	1.5	

Firma Alumno

Firma Docente

1 Resolución Tercer parcial comisión 1, segundo cuatrimestre de 2019.

1. Ejercicio 1

- (a) Para llegar a la expresión final realizamos una sustitución con el siguiente cambio de variables y su respectivo diferencial:

$$z = \cos(x - \pi) \quad (1)$$

$$dz = z' dx = -\sin(x - \pi)dx \quad (2)$$

$$-dz = \sin(x - \pi)dx \quad (3)$$

Los límites de integración en la nueva variable se obtienen evaluando en $z(x)$:

$$z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (4)$$

$$z(\pi) = \cos(\pi - \pi) = \cos(0) = 1 \quad (5)$$

Escribimos la integral en la nueva variable obteniendo y la igualamos al resultado que presenta el problema en términos de las constantes A, B y C:

$$\int_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} f(\cos(x - \pi))dx = - \int_{z=0}^{z=1} \frac{f(z)}{z} dz = 2A \int_{z=C}^{z=B} \frac{f(z)}{z} dz \quad (6)$$

Para que se verifique la igualdad, planteamos las siguientes condiciones

$$2A = -1 \rightarrow A = -\frac{1}{2} \quad (7)$$

$$B = 1 \quad (8)$$

$$C = 0 \quad (9)$$

2. Ejercicio 2

- (a) La función $F(x)$ satisface la condición $F'(x) = 4 \ln(x)$ y por lo tanto es una primitiva de $4 \ln(x)$. Calculemos la integral indefinida para obtener la función $F(x)$ a menos de una constante que luego se puede calcular de la segunda condición.

$$\int 4 \ln(x) dx = 4 \int \ln(x) dx = 4(x \ln(x) - x) + c \quad (10)$$

Se integró el logaritmo por método de partes,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \quad (11)$$

Aplicado al logaritmo obtenemos

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x + c \quad (12)$$

$$f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = 1/x \quad (13)$$

$$g'(x) = 1 \rightarrow g(x) = x \quad (14)$$

La función $F(x)$ es de la forma $F(x) = 4(x \ln(x) - x) + C$, en donde esta constante no es arbitraria como en la integral indefinida sino que la podemos calcular de la segunda condición $F(1) = -7$.

$$F(1) = 4(\ln(1) - 1) + C = -7 \quad (15)$$

$$-4 + C = -7 \quad (16)$$

$$C = -3 \quad (17)$$

Respuesta : $F(x) = 4(x \ln(x) - x) - 3$

3. Ejercicio 3

(a) Separamos la integral utilizando propiedades de linealidad y luego resolvemos,

$$\int \left(\frac{\cos(\ln(x))}{x} - 16 \right) dx = \int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx - 16 \int 1 dx \quad (18)$$

$$= \sin(\ln(x)) - 16x + c \quad (19)$$

La segunda integral se obtiene de tabla y la primera se resuelve aplicando el método de sustitución

$$\int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx = \int \cos(t) dt = \sin(t) + c = \sin(\ln(x)) + c \quad (20)$$

$$t = \ln(x) \quad (21)$$

$$dt = \frac{1}{x} dx \quad (22)$$

4. Ejercicio 4

(a)

$$\text{Área} = \int_3^6 (f(x) - g(x)) dx \quad (23)$$

(b)

$$\text{Área} = \int_3^6 (f(x) - g(x)) dx = \int_3^6 f(x) dx - \int_3^6 g(x) dx = 10 - \frac{b * h}{2} = 7 \quad (24)$$

La primera integral definida $\int_3^6 f(x) dx$ la daba el enunciado del problema y la segunda se puede obtener del área del triángulo formado entre la gráfica de $g(x)$ y el eje x.

$$\int_3^6 g(x) dx = \int_3^6 (g(x) - 0) dx = \frac{b * h}{2} = \frac{3 * 2}{2} = 3 \quad (25)$$

donde b es la base y h la altura del triángulo.

5. Ejercicio 5

(a) Calculamos la intersección de $f(x)$ y la recta,

$$\sqrt{x} = -\frac{1}{2}x + 4 \quad (26)$$

$$x = (4 - 1/2x)^2 \quad (27)$$

$$0 = \frac{1}{4}x^2 - 5x + 16 \quad (28)$$

Elevamos al cuadrado para utilizar la resolvente cuadrática obteniendo $x_1 = 4$ y $x_2 = 16$. Antes de elevar al cuadrado vemos que hay dos restricciones sobre las soluciones de la ecuación, $x > 0$ (dominio de \sqrt{x}) y $-\frac{1}{2}x + 4 > 0$ (imagen \sqrt{x}). Esto restringe la solución a $x_1 = 4$. Se puede verificar que x_2 no corresponde a la coordenada x de un punto de intersección. Luego la coordenada y de la intersección con el eje y se obtiene evaluando en $x = 0$. Obtenemos que $f(x) = 0$ y la recta se corta en $y = 4$ (ordenada al origen). Realizamos el gráfico y marcamos la región:

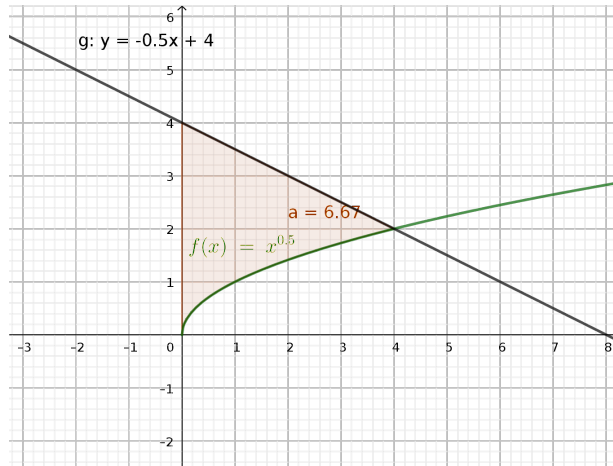


Figure 1: La gráfica del área sombreada.

(b) El área de la región sombreada se puede calcular en términos de la integral definida. El techo es la recta $g(x) = 4 - 0.5x$ y el piso el $f(x)$.

$$\text{área} = \int_0^4 (g(x) - f(x))dx = \int_0^4 (4 - 0.5x - x^{1/2})dx = \left(4x - \frac{1}{4}(x)^2 - \frac{2}{3}x^{3/2}\right) \Big|_0^4 \quad (29)$$

$$= \left(4 * 4 - \frac{1}{4}(4)^2 - \frac{2}{3}4^{3/2}\right) - \left(4 * 0 - \frac{1}{4}(0)^2 - \frac{2}{3}0^{3/2}\right) = \frac{20}{3} \quad (30)$$

Respuesta: El área vale $\frac{20}{3}$.