

Петар Бошњаковић

*Аналогна  
електроника*

Др Петар Бошњаковић  
Аналогна електроника

Рецензенти  
др Славица Маринковић,  
мр Борислав Хаџибабић.

Обрада и припрема текста  
др Петар Бошњаковић

Корице  
Ненад Толић

Издавач  
Висока школа електротехнике и рачунарства,  
Војводе Степе 283, Београд

Наставно веће Високе школе електротехнике и рачунарства, на својој седници одржаној 24.06.2012. године одобрило је издавање и коришћење овог уџбеника у настави.

ЦИП-Каталогизација у публикацији  
Народна библиотека Србије, Београд

621.38(075.8)  
БОШЊАКОВИЋ, Петар, 1945-  
Аналогна електроника / Петар Бошњаковић.  
—Београд : Висока школа електротехнике и  
рачунарства, 2012  
( Београд : МСТ Гајић ).  
-300 стр . : илустр . ; 24 cm

Тираж 50 . — Напомене уз текст. —  
Речник појмова: стр. 296-298. - Регистар

ISBN 978-86-7982-129-4

а) Електроника  
COBISS.SR - ID 193166860

## **ПРЕДГОВОР**

Материја обрађена у овој књизи организована је у складу са програмом предмета Аналогна електроника, који се, према наставним плановима акредитованих студијских програма изучава на другој години основних струковних студија на Високој школи електротехнике и рачунарства у Београду. Књига је намењена превасходно студентима и инжењерима који су као своје струковно опредељење избрали електронику, али и онима чија се основна делатност или област интересовања ослања на електронику.

28.06.2012.

Аутор

# ОЗНАКЕ

$a, A$	аналогна величина	$p(t)$	тренутна вредност електричне снаге
$A$	прикључак аноде	$P$	активна снага
$A$	појачање	$q, Q$	наелектрисање
$A_I$	појачање струје	$r, R$	електрична отпорност
$A_i$	појачање струје за мале сигнале	$Re$	реални део комплексног броја
$A_U$	појачање напона	$r_T$	отпорност нагиба линеаризоване карактеристике диода
$A_u$	појачање напона за мале сигнале	$r_Z$	отпорност нагиба линеаризоване карактеристике Ценер-диоде
$\arctg$	арктангенс	$s$	комплексна променљива
$b$	бинарна величина	$\operatorname{sgn}$	сигнум
$B$	прикључак базе	$\sin$	синус
$C$	капацитивност	$t$	време
$C$	прикључак колектора	$T$	период
$\cos$	косинус	$TC$	температурски кофицијент
$\operatorname{ctg}$	котангенс	$u$	тренутна вредност променљивог напона
$d$	дигитална величина,	$u_{\sim}$	наизменична компонента напона
$D$	прикључак дрејна	$U$	стални напон
$E$	јачина електричног поља	$U_{AV}$	средња вредност укупног напона
$E$	прикључак емитора	$U_F$	директни (пропусни) стални напон диоде PN-споја
$f$	учестаност	$u_F$	тренутни укупни директни напон диоде (PN-споја)
$g, G$	електрична проводност	$u_{IN}, u_I$	тренутна вредност укупног променљивог напона на улазу
$G$	прикључак гејта	$U_{IN}, U_I$	наизменична компонента напона на излазу
$g_m$	проводност преноса	$u_{OUT}, u_O$	стални напон на улазу
$h$	Хевисайдова одсочна функција	$u_{out}, u_o$	тренутна вредност укупног променљивог напона на улазу
$h$	хибридни матрични параметри четвропола	$U_{OUT}, U_O$	наизменична компонента напона на излазу
$H$	прикључак извора напона, који се налази на вишем потенцијалу; прикључак извора струје из којег струја истиче	$U_{(TO)}$	стални напон на излазу
$h_e$	појачање струје (за мале сигнале)	$U_{(ZO)}$	напон колена линеаризоване карактеристике диоде
$i$	транзистора у споју са заједничком базом	$W(j\omega)$	напон колена линеаризоване карактеристике Ценер-диоде
$I$	тренутна вредност променљиве електричне струје	$W(\omega)$	фреквенцијска карактеристика, модуо фреквенцијске карактеристике
$i_{IN}, i_I$	стална електрична струја	$W(s)$	функција преноса
$Im$	тренутна вредност променљиве улазне струје	$Z$	импеданса
$i_{OUT}, i_O$	имагинарни део комплексног броја	$Z(\omega)$	модуо импедансе
$i_o$	тренутна вредност променљиве излазне струје	$\alpha$	угао
$I_O$	наизменична компонента излазне струје	$\beta$	сачинилац преноса (појачања) у грани повратне спрете; појачање струје биполарног транзистора
$i_{\sim}$	стална излазна струја	$\delta$	промена
$j$	наизменична компонента променљиве струје	$\Delta$	прираштај, промена, одступање
$k, K$	имагинарна јединица	$\varphi$	угао, разлика фаза
$k$	појачање	$\omega$	угаона брзина (учестаност)
$L$	хибридни матрични параметри четвропола индуктивност	$\mathcal{O}$	оператор
$L$	прикључак извора напона, који се налази на нижем потенцијалу;		
	прикључак извора струје, у који струја утиче		
$m$	маса		
$N$	број		

# САДРЖАЈ

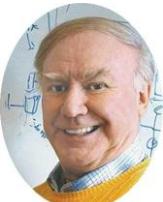
УВОД	1
1. СИГНАЛИ И СИСТЕМИ	5
1.1. ВЕЛИЧИНЕ 6	
1.1.1. Класификација величина 9	
1.2. СИГНАЛИ 10	
1.2.1. Врсте сигнала 14	
1.3. ЕЛЕКТРОНСКИ УРЕЂАЈИ И СИСТЕМИ 16	
1.3.1. Моделовање 17	
1.4. ЕЛЕМЕНТИ И СИСТЕМИ ТИПА УЛАЗ-ИЗЛАЗ 18	
1.4.1. Функције електронских елемената 21	
1.4.2. Линеарни елементи и системи 22	
1.4.3. Врсте система 26	
2. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛОГНИХ ЕЛЕКТРОНСКИХ КОЛА	29
2.1. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ 30	
2.2. ПАСИВНИ ЕЛЕМЕНТИ 34	
2.2.1. Резистивни елементи 34	
2.2.2. Капацитивни елемент 36	
2.2.3. Индуктивни елементи 37	
2.3. АКТИВНИ ЕЛЕМЕНТИ 38	
2.3.1. Извори напона 38	
2.3.2. Извори струје 41	
2.4. ПОЈАЧАВАЧКИ ЕЛЕМЕНТИ 42	
2.4.1. Моделовање електронских појачавачких елемената 45	
2.4.2. Спојеви појачавачких елемената 46	
2.4.3. Диференцијални пар 48	
2.4.4. Струјно огледало 51	
3. ЛИНЕАРНА АНАЛОГНА ЕЛЕКТРОНСКА КОЛА	53
3.1. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ 53	
3.2. ПОЈАЧАВАЧИ 55	
3.2.1. Својства електронских појачавача 57	
3.2.2. Појачавач напона 58	
3.2.3. Појачавач струје 60	
3.2.4. Транскондуктансни појачавач 61	
3.2.5. Транрезистансни појачавач 62	
3.2.6. Диференцијални појачавач 62	
3.3. ФИЛТРИ 66	
3.3.1. Класификација 66	
3.3.2. Пропусници ниских учестаности 68	
3.3.3. Пропусници високих учестаности 71	
4. НЕЛИНЕАРНА АНАЛОГНА ЕЛЕКТРОНСКА КОЛА	73
4.1. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ 73	

4.2.	УСМЕРАЧИ	74	
4.2.1.	Једнострани усмерач	75	
4.2.2.	Двострани усмерач	76	
4.3.	ОГРАНИЧАВАЧИ	77	
4.4.	ГЕНЕРАТОРИ ФУНКЦИЈЕ	79	
4.5.	КОМПАРАТОРИ	83	
4.6.	ПРЕКИДАЧИ	86	
5.	ПОВРАТНА СПРЕГА У ЕЛЕКТРОНСКИМ КОЛИМА		91
5.1.	ОСНОВНИ ПОЈМОВИ О ПОВРАТНОЈ СПРЕЗИ	91	
5.2.	ПОЈАЧАВАЧ СА ПОВРАТНОМ СПРЕГОМ	97	
5.2.1.	Улазна и излазна отпорност	101	
5.3.	ПОЈАЧАВАЧ НАПОНА СА НЕГАТИВНОМ ПОВРАТНОМ СПРЕГОМ	104	
5.3.1.	Параметарска осетљивост	106	
5.3.2.	Осетљивост на шум	107	
5.3.3.	Нелинеарност	109	
5.3.4.	Фреквенцијска карактеристика	111	
5.4.	ФУНКЦИЈА ПРЕНОСА СИСТЕМА СА ПОВРАТНОМ СПРЕГОМ	113	
6.	ОПЕРАЦИОНИ ПОЈАЧАВАЧИ		115
6.1	ОСНОВНИ ПОЈМОВИ	116	
6.1.1.	Савршени операциони појачавач	117	
6.1.2.	Структура операционог појачавача	117	
6.1.3.	Својства операционих појачавача	118	
6.2.	ОСНОВНЕ СТРУКТУРЕ КОЛА СА ОПЕРАЦИОНИМ ПОЈАЧАВАЧЕМ	119	
6.2.1.	Неинвертујући појачавач напона	121	
6.2.2.	Инвертујући појачавач напона	125	
6.3.	ИНТЕГРИСАНИ ОПЕРАЦИОНИ ПОЈАЧАВАЧИ И ЊИХОВА СВОЈСТВА	127	
6.3.1.	Статичке карактеристике	129	
6.3.2.	Динамичке карактеристике	134	
6.3.3.	Услови околине	136	
7.	ОСНОВНА ЛИНЕАРНА КОЛА СА ОПЕРАЦИОНИМ ПОЈАЧАВАЧИМА		137
7.1.	АНАЛИЗА КОЛА СА САВРШЕНИМ ОПЕРАЦИОНИМ ПОЈАЧАВАЧЕМ	138	
7.1.1.	Правило напона	138	
7.1.2.	Правило струја	139	
7.2.	НЕИНВЕРТУЈУЋА СТРУКТУРА	140	
7.3.	ИНВЕРТУЈУЋА СТРУКТУРА	140	
7.4.	МЕШОВИТА СТРУКТУРА	141	
7.5.	САБИРАЧ НАПОНА	142	
7.6.	ОДУЗИМАЧ НАПОНА	143	
7.6.1.	Сабирач-одузимач напона	147	

7.7.	ИНСТРУМЕНТАЦИОНИ ПОЈАЧАВАЧИ	148
7.8.	ДИФЕРЕНЦИЈАТОР	150
7.8.1.	Инвертујући диференцијатор	152
7.8.2.	Неинвертујући диференцијатор	153
7.8.3.	Диференцијални диференцијатор	155
7.9.	ПРОПОРЦИОНАЛНО ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ (PD) ЕЛЕМЕНТ	155
7.10.	ИНТЕГРАТОРИ	156
7.10.1.	Инвертујући интегратор	158
7.10.2.	Неинвертујући интегратор	163
7.10.3.	Диференцијални интегратори	165
7.11.	ПРОПОРЦИОНАЛНО ИНТЕГРАЦИОНИ (P) ЕЛЕМЕНТ	166
 8.	 ИЗВОРИ НАПОНА	 169
8.1	ОСНОВНИ ПОЈМОВИ	169
8.2	СТАБИЛИЗATORИ НАПОНА	171
8.2.1.	Својства стабилизатора напона	173
8.2.2.	Стабилизатори са паралелном регулацијом	174
8.2.3.	Стабилизатори са редном регулацијом	179
8.2.4.	Интегрисани стабилизатори напона	182
8.2.5.	Карактеристике интегрисаних стабилизатора напона	185
8.3	ИЗВОРИ РЕФЕРЕНТНОГ НАПОНА	187
8.3.1.	Извори референтног напона са Ценер-диодом	187
8.3.2.	Интегрисани извори референтног напона	187
 9.	 ИЗВОРИ СТРУЈЕ	 189
9.1.	ОСНОВНИ ПОЈМОВИ	189
9.1.1.	Извор напона као извор струје	191
9.2.	ИЗВОРИ СТАЛНЕ СТРУЈЕ СА ТРОПОЛНИМ ПОЈАЧАВАЧКИМ ЕЛЕМЕНТИМА	192
9.2.1.	Биполарни транзистор као извор струје	193
9.2.2.	Транзистор са ефектом поља као извор струје	195
9.3.	ИЗВОРИ СТАЛНЕ СТРУЈЕ СА ОПЕРАЦИОННИМ ПОЈАЧАВАЧИМА	196
9.4.	СТАБИЛИЗATOR НАПОНА КАО ИЗВОР СТРУЈЕ	198
9.5.	ИЗВОРИ СТРУЈЕ УПРАВЉАНИ НАПОНОМ	199
9.5.1.	<i>U/I</i> претварачи са негативном повратном спрегом	199
9.5.2.	<i>U/I</i> претварачи са позитивном повратном спрегом	201
 10.	 ФРЕКВЕНЦИЈСКИ СЕЛЕКТИВНА КОЛА	 205
10.1.	ОСНОВНИ ПОЈМОВИ	205
10.2.	ПРОПУСНИЦИ НИСКИХ УЧЕСТАНОСТИ	207
10.2.1.	Филтри првог реда	208
10.2.2.	Филтри вишег реда	210
10.3.	ПРОПУСНИЦИ ВИСОКИХ УЧЕСТАНОСТИ	213
10.3.1.	Филтри првог реда	214
10.3.2.	Филтри вишег реда	217
10.4.	ПРОПУСНИЦИ ОПСЕГА УЧЕСТАНОСТИ	220
10.5.	НЕПРОПУСНИЦИ ОПСЕГА УЧЕСТАНОСТИ	223

10.6. КОЛА ЗА ПОМЕРАЊЕ ФАЗЕ	225
10.6.1. Коло за померање фазе са инвертором	227
10.6.2. Коло за померање фазе у напред	228
10.6.3. Коло за кашњење	229
<b>11. НЕЛИНЕАРНА КОЛА СА ОПЕРАЦИОНИМ ПОЈАЧАВАЧИМА</b>	<b>231</b>
11.1 УСМЕРАЧИ	231
11.1.1. Једнострани усмерачи	232
11.1.2. Двострани усмерачи	236
11.2 ОГРАНИЧАВАЧИ	240
11.3. КОМПАРАТОРИ	242
11.3.1. Операциони појачавач као компаратор	243
11.3.2. Компаратори са хистерезисом	243
11.3.3. <i>Window</i> -компаратор	247
<b>12. ОСНОВИ АНАЛИЗЕ ЛИНЕАРНИХ АНАЛОГНИХ КОЛА И СИСТЕМА</b>	<b>249</b>
12.1. АНАЛИЗА У ВРЕМЕНСКОМ ДОМЕНУ	250
12.1.1. Редно <i>RC</i> -коло	251
12.1.2. Паралелно <i>RC</i> -коло	254
12.2. АНАЛИЗА У КОМПЛЕКСНОМ ДОМЕНУ	255
12.2.1. Пресликање из реалног у комплексни домен	255
12.3. АНАЛИЗА У ФРЕКВЕНЦИЈСКОМ ДОМЕНУ	258
12.3.1. Фреквенцијска карактеристика	259
12.3.2. Бодеови дијаграми	260
12.4. ФУНКЦИЈА ПРЕНОСА	262
12.4.1. Алгебра преноса	263
12.5. ОСНОВНИ ДИНАМИЧКИ ЕЛЕМЕНТИ	264
12.5.1. Диференцијатор	264
12.5.2. Пропорционално-диференцијални елемент	267
12.5.3. Интегратор	269
12.5.4. Инерцијални елемент првог реда	272
<b>ПРОБЛЕМИ</b>	<b>275</b>
<b>ОЗНАЧАВАЊЕ</b>	<b>291</b>
<b>РЕЧНИК ПОЖМОВА</b>	<b>296</b>
<b>ИНДЕКС</b>	<b>299</b>

"Вештина пројектовања и примене аналогних кола не показује знаке помирења са судбином птице Додо. Развој и сазревање производње интегрисаних аналогних кола можда мало заостаје за растом бинарних кола. Али, док је дигитална прецизност заувек везана битовима, не постоји граница у прихватујућим неограничене прецизности и функционалне разноликости једноставних аналогних кола."



Barrie Gilbert

## УВОД

Двадесети век је био доба електронике. Томе су у великој мери допринели напредак физике чврстог стања и развој технологије полупроводника. Бројна унапређења у области производње електронских компонената, а посебно појава минијатурних електронских кола, унела су велике измене у методологију пројектовања електронских направа и допринела ширењу поља њихове примене. Мање од пола века након остваривања првих монолитних<sup>1</sup> електронских кола, захваљујући управо њима, електроника је постала свеприсутна у животу савременог человека. "Употреба електронике" постала је свакодневна активност. У процесу производње, трговини и саобраћају лjudи се служе разноврсним електронским уређајима не размишљајући притом о начину на који они раде, а још мање о теоријским претпоставкама које су учиниле могућом њихову израду и коришћење. Лакоћа са којом се савремени електронски уређаји користе успешно прикрива њихову сложеност. Савремени лјуди свакодневно, путем радија, телевизије или интернета, примају разне извештаје о нечemu што се десило, обавештења о нечemu што се дешава или се очекује да ће се десити, упутства како треба поступити. Обични лјуди примају све те информације најчешће без праве представе о техничкој страни поступка којим су пренете, обрађене и представљене. У науци и техници, електроника је постала слушкиња која, дискретно, обавља мноштво разноврсних послова за друге, али и господарица из сенке, која неумољиво одређује како се нешто обавља, да би се најуспешнији остварио жељени циљ.

Електроника представља врло пространу мултидисциплинарну област људског знања. Она обухвата специфична подручја науке и многа подручја технике. У практичном смислу може да се дефинише као део електротехнике у којем се користи својство несиметричне проводности. У најопштијем смислу, електроника је део физике која се бави емисијом, понашањем и деловањем електрона, и електронским уређајима.

Развој електронике започео је открићем усмерачког елемента, "електронског вентила" – диоде. Проналазак појачавачког ефекта представљао је револуцију у електротехници која је, одјекнувши читавом планетом<sup>2</sup>, означила почетак освајања новог подручја људског знања: електронике. Електронски појачавач је елемент који помоћу енергије узете из

<sup>1</sup> Електронско коло израђено од једног кристала процесом уношења одговарајућих примеса. Назив потиче од грчких речи *topos* (један) и *lithos* (камен).

<sup>2</sup> Први електронски појачавач применењен је при радио-преносу наступа, у то време најчувенијег оперског певача, Енрика Карузу у Њујоршкој опери Метрополитен, 1910. године.

спољашњег извора, другачијег од извора улазног сигнала, производи излазни сигнал који представља његову "слику". Вакуумска електронска цев са три електроде (триода), коју је почетком двадесетог века конструисао Ли де Форест, омогућила је брзи развој телекомуникација, али и подстакла стварање једне нове привредне гране, која ће прерasti у највећу индустријску област савременог света.

Квалитативан скок у развоју технологије производње електронских уређаја представљало је откриће да се све функције ручно произведених електронских цеви, чије се димензије мере у центиметрима, могу да остваре помоћу минијатурног кристала полупроводника, образованог на одговарајући начин, потпуно аутоматизованим процесом производње. При томе се значајно добија на поузданости електронских елемената, смањењу њихове потрошње и осетљивости на вибрације и ударе. Смањивање димензија омогућило је модуларну структуру уређаја, а тиме и повећање сложености и разноврсности функција које електронски уређаји остварују. Суштинску предност представљала је погодност за масовну производњу, која је омогућила многоструко смањивање производних трошкова. Захваљујући томе подстакнуто је ширење области примене, што је повратно утицало на смањивање продајне цене и подстакло даљи развој.

Сагледавање да и читаво сложено електронско коло може да се произведе у облику компактне кристалне структуре, која делује као јединствена функционална целина, представљало је трећи револуционарни корак. Већ крајем шездесетих година, таква интегрална<sup>3</sup> кола су се појавила на отвореном тржишту, као компоненте намењене производњачима електронских уређаја. Највећи степен интеграције остварен је у рачунарској технички. Електронска кола, на којима се заснивају савремени рачунари, садрже више стотина милиона електронских елемената у једном кућишту запремине једног кубног центиметра.

Под називом интегрисано<sup>4</sup> коло подразумева се део електронског уређаја, израђен од полупроводничког материјала као компактна целина (монолитни кристал) и смештен у одговарајуће метално, керамичко или пластично кућиште, који је са "спољашњим светом" повезан преко својих прикључака. Одговарајућим технолошким поступком постигнуто је да поједине области кристала представљају не само електронске елементе, диоде, транзисторе и њихове везе, него и отпорнике, кондензаторе и калемове. Минијатурна (микро) електронска кола примењују се у свим областима производње материјалних добара, оруђа и оружја. Она не само да је омогућила поглед у свет микро- и макро-космоса, средствима као што су електронски микроскоп, електронски телескоп, космичке сонде..., него и допринела стварању нових појмова као што су телемедицина, мултимедија, електронско пословање, електронско трговинско право и електронски рат.

<sup>3</sup> Од лат. *integralis*, целински, који постоји сам за себе. У домаћој литератури преовлађује употреба назива "интегрисано коло", који потиче од енглеског језика: *integrated circuit - IC*.

<sup>4</sup> Уобичајено је да се под називом интегрисано коло подразумева коло образовано од једног кристала (монолитно). У литератури се користе и називи микроколо (*microcircuit*) и чип (*chip*).

Интегрисана кола су у потпуности изменила методологију пројектовања, развоја и одржавања електронских уређаја и система. Савремени инжењер електронике изузетно ретко има потребу да размишља о начину на који поједини елементи електронских уређаја остварују своју намену, а још ређе о теоријским претпоставкама које су омогућиле њихову израду и коришћење. Само изузетно, потребно је да се непосредно бави математичком анализом утицаја радних услова на својства појединих елемената, односно да прорачунава утицај несавршености дискретних полупроводничких елемената на својства електронског кола (система) у целини. За математичко решавање проблема анализе сложених електричних мрежа, које садржи пасивне и активне елементе чији су математички модели познати, стоје му на располагању бројни "програмски пакети". Његов задатак је да, користећи достигнућа савремене технологије, изврши синтезу решења које остварује жељене функције у дефинисаним условима рада, и притом постигне оптимум односа цена-перформанс (cost-performance) уређаја, при чему слободно тржиште представља оног "непристрасног судију" који оцењује квалитет понуђеног решења и потврђује вредност уgraђеног знања.

Микроелектроника је извршила снажан утицај на развој различитих облика технике пружајући економичнија решења проблема добијања информације о стању физичких објекта, омогућујући мерење низа специфичних физичких величина у разноврсним технолошким процесима, као и реализацију автоматизованих система разноврсне намене. Захваљујући њој, електроника је постала технолошка основа телекомуникација, енергетике, аутоматике, саобраћаја... Иницирала је и подстакла развој нанотехнологије<sup>5</sup>, од које се много очекује већ у блиској будућности.

Класична техника заснивала се превасходно на обради величина чија вредност може да се мења унутар неког опсега у неограничено малим корацима (аналогне величине). Полупроводничка технологија је посебно убрзала развој уређаја у којима се обрађују величине које могу да имају само неке дискретне вредности (дигиталне величине). Целокупна дигитална техника у основи може да се сведе на само две елементарне операције<sup>6</sup> што има огромну предност када се ради о обради великог броја података. Полупроводничке компоненте стварале су услове за сагледавање и дефинисање нових конструкција и концепција електронских уређаја и система. Дигитална електронска кола високог степена интеграције отворила су нове хоризонте и пружила неслучайне могућности.

Усавршавање производње дигиталних електронских кола допринело је интензивном увођењу рачунарске технологије у уређаје различите намене. Анализа стања савремене технике, тенденција развоја и нових поступака реализације уређаја показује да су микропроцесори постали инхерентно обележје технике уопште. Они су утицали на побољшање карактеристика разноврсних уређаја, приододали нова својства, открили нове путеве за решавање мноштва проблема. Технологија интеграције електронских

<sup>5</sup> Производња склопова чије су димензије и толеранције у опсегу од 0,1 nm до 100 nm.

<sup>6</sup> Полазећи од ставова математичке логике, следи да је за градњу било ког дигиталног уређаја (па и рачунара) довољна само једна врста логичког кола са два улаза: НИЛИ односно НИ.

компонената омогућила је, са једне стране, побољшање функционалности - појаву и експанзију вишнаменских уређаја, а са друге, потпуну аутоматизацију обраде разноврсних података.

Свет електронике је богат и разноврсан. Ова разноврсност отежава систематизацију области и њихово изучавање. Класична електроника се обично делила на линеарну, импулсну и дигиталну. У почетку је и дигитална електроника посматрана као посебно подручје импулсне електронике. Развој технологије учинио је да дигитална техника доминира у савременој електроници. Аналогна је та која омогућује њену спрегу са реалним светом.

Физика и математика чине, "по природи ствари", теоријску и практичну основу електронике. За развој савремених електронских уређаја и система, познавање рачунарске технике је од посебног интереса. Подржана развојем технологије интегрисаних електронских кола, аналогна техника је деценијама доминирала при решавању проблема израчунавања вредности посредно мерених електричних и неелектричних величина. Занемаријући свет микрофизике (корпускуларну структуру материје и квантне ефекте), величине које карактеришу стање физичких процеса, макроскопски гледано, представљају аналогне променљиве, па је било најприродније, а са становишта расположиве технологије и најекономичније, да се и обрада мрне информације врши у аналогном облику. У аналогној техници се операције сабирања, одузимања, диференцирања и интеграљења реализују са високом тачношћу. Остале математичке операције (множење, дељење, кореновање, логаритмовање и слично) остварују се знатно мање успешно. Одговарајућа аналогна кола су специфична, сложенија и скупља. Управо због тога, практично све до појаве микропроцесора, поступци који су обухватали сложенију математичку обраду коришћени су у сразмерно малом броју случајева.

Познавање својства средине у којој постоји кретање наелектрисања је несумњиво значајно за сагледавање процеса образовања електричне струје и правилну употребу елемената заснованих на појавама електричне проводности, развој и коришћење електронских елемената, компонената и склопова. Теоријска подлога електронике, међутим, знатно је шира. Њу, поред физике, чине и општа теорија система, анализа и синтеза електричних кола, прекидачка алгебра и математичка логика. Са техничке стране она се ослања на различите технологије производње електронских елемената, компонената и склопова, као и њиховог обједињавања у све сложеније уређаје, док њену практичну суштину обликује конкретно подручје употребе.

Улазак у област електронике подразумева обнављање и систематизовање неких знања стечених из физике, електротехнике и математике, њихово повезивање и обликовање у нешто што се може назвати "инжењерским начином размишљања". То се посебно односи на подручје аналогне електронике. Ова књига је намењена читаоцима са различитим предзнањем из области математике, физике и посебно електротехнике. Због тога су, у сажетом облику, разматрани и неки општи појмови који се иначе, са много више детаља и на вишем нивоу, обрађују у посебним курсевима.

“Лако је схватити све истине када се открију. Треба их открити”.

*Galileo Galilei*



1.

## СИГНАЛИ И СИСТЕМИ

Савремена електроника се превасходно бави информацијама и њиховом обрадом<sup>1</sup>. Чак и у оним случајевима када пренос информација представља основни задатак који електронски уређај треба да испуни, неизбежан је неки облик обраде у најширем смислу, са циљем прилагођења извора информације и предајника, предајника и линије преноса, пријемника и корисника. Ово прилагођење понекад подразумева промену носиоца или промену облика представљања информације. У електронским уређајима “носиоци” информације су електрични сигнали.

У најопштијем смислу, сигнал<sup>2</sup> је променљива физичка величина функција времена чије неко квантитативно обележје садржи информацију<sup>3</sup> о величини коју сигнал представља [1]. Са информационе тачке гледишта, физичка природа носиоца информације је неважна. Значајна је само математичка представа сигнала, као основа за анализу утицаја коју процеси преноса и обраде имају на његов информациони садржај. У практичном смислу, сигнал је физичка величина која се може детектовати<sup>4</sup>, помоћу које се преноси информација [2].

У електроници сигнали су електричне величине, функције времена. Један или више параметара сигнала садрже (“носе”) информацију о једној или више променљивих величинама. Ови параметри се називају информациони параметри [3]. У најједноставнијем случају, информациони параметар је тренутна вредност изабране електричне величине која представља физички носилац информације. У електротехници се често као носилац информације користи периодична величина чији информациони параметар може да буде амплитуда, средња или ефективна вредност изабране електричне величине. Ови параметри имају исту физичку природу као и величина која се користи да “носи” информацију. Податак који се обрађује (преноси) може да буде представљен и временским параметрима електричног сигнала, као што су период или трајање импулса, односно учестаност њиховог појављивања. Са становишта тачности обраде електронских сигнала, посебан значај имају информациони параметри који по својој природи представљају количник

<sup>1</sup> Енергетска електроника, релативно уска и специфична област која се бави проблемом ефикасности процеса претварања енергије из једног облика у други, односно проблемом ефикасности преношења енергије од извора до корисника (потрошача), за успешно извршавање постављеног задатка, такође подразумева одговарајућу обраду информација о стварном стању процеса, као и њихово коришћење за управљање радом енергетског претварача.

<sup>2</sup> Назив потиче од лат. *signum*, знак.

<sup>3</sup> У ширем значењу, под информацијом се подразумева знање, сазнање о неким новим, раније непознатим чињеницама, које може да се представи у облику погодном за пренос, чување или обраду. Информација може бити изражена помоћу знакова, слика или звука.

<sup>4</sup> Опазити, открити, од лат. *detectio*, откривање, изношење на видело.

трајања неких временских интервала, као што су ширина и период појављивања правоугаоних импулса, или релативно кашњење једног периодичног сигнала у односу на други сигнал исте учестаности.

Теорија система и сигнала заузима посебно место у савременој техници. Њено дубље разматрање превазилази оквире ове књиге. Постоји обиље литературе у којима се она, са много више детаља, обрађује на општем или посебном нивоу [4], [5]. Ово поглавље је посвећено разматрању појмова који се при проучавању, пројектовању и употреби електронских кола и уређаја користе за описивање њихових својстава и појава које се у њима дешавају. Објашњења су заснована на међународно усаглашеним дефиницијама<sup>5</sup>. Првенствено су коришћени речници које је објавила Међународна електротехничка комисија<sup>6</sup> [6], [7], [8] као и одговарајући документи на српском језику [1], [9]. Треба, притом, имати у виду да се објашњења стручних појмова, који се користе у различитим областима науке и технике, непрекидно усаглашавају, а сами речници допуњују новим терминима, док се неки стари напуштају.

Полазећи од величине, као једног од основних појмова природних наука, дата је основна класификација која је послужила за поделу електронике, па и читаве технике, на "аналогну" и "дигиталну". Приказана је класификација сигнала, заснована на подели по два критеријума:

- према својствима скупа могућих вредности физичке величине, носиоца информације; и
- према начину промене те величине у времену.

Анализирана су својства аналогних и дигиталних система. Дат је систематизован приказ основних функција које се помоћу електронских кола остварују.

## 1.1 ВЕЛИЧИНЕ

Под називом "величина" (*quantity*) у техници се подразумева својство појаве, тела или супстанције које може да се квалитативно разликује и квантитативно да одреди [10]. Величине у електротехници су, на пример, електрични напон (*voltage*), електрична струја (*current*), време (*time*), снага (*power*), енергија (*energy*), отпорност (*resistance*), импеданса (*impedance*)...

---

<sup>5</sup> Важност усаглашене стручне терминологије у међународним контактима, при размени идеја и производа, сагледана је веома давно. Први међународни електротехнички речник, у облику листе електротехничких термина са дефиницијама, објављен је још 1913. године. Седамдесет година касније објављено је прво издање Вишејезичког електротехничког речника. Друго, проширено издање, објављено је 1992. године, које обухвата 70 терминолошких стандарда са око 18 000 термина, преведено је на српски језик. Садржај појединачних речника, као и појединачне дефиниције, доступни су преко интернета.

<sup>6</sup> Међународна електротехничка комисија (*International Electrotechnical Commission - IEC*) основана је 1906. године. Задатак ове организације, коју чине национални комитети појединачних земаља чланица, је иницирање и унапређивање међународне сарадње по свим питањима која се односе на стандардизацију у области електротехнике и електронике. Речници које ова организација припрема означавају се заједничком ознаком *IEV* (*International Electrotechnical Vocabulary*).

Величина је генерички појам<sup>7</sup> који може да означава нешто опште, као што је на пример појам електричне струје, као основне величине која има своју физичку природу. Међутим, исти термин се користи и да означи посебне "појавне облике" ове физичке величине, као што су стална, наизменична и пулсирајућа струја. У још ужем смислу, термин "величина" се користи да означи појединачну величину као што је, на пример, највећа дозвољена струја оптерећења неког извора напона, наведена у декларацији коју произвођач даје уз овај уређај. У српском језику, реч "величина" се користи и да означи великост (интензитет<sup>8</sup>, магнитуду<sup>9</sup>) посматране величине (величина напона напајања електронског уређаја, величина улазне струје интегрисаног појачавача...). Појединачна величина се тада представља бројем, који представља њену меру, и јединицом мере која је у том, појединачном случају, примењена да би се посматрана појединачна величина квантитативно описала.

Величине се означавају малим и великим словима. Математички формулисаним физичким законом, којим је дефинисана нека физичка величина, одређена су њена својства (квалитет<sup>10</sup>) и великост (квантитет<sup>11</sup>), исказани преко других величина које су садржане у формулацији одређеног закона. На пример, у електротехници, уређено (усмерено) кретање носилаца наелектрисања, без обзира на узорак овог кретања и на врсту наелектрисања која учествују у овом кретању, назива се електрична струја. Квантитативни показатељ ове појаве је скаларна физичка величина која се назива јачина електричне струје. По својој природи представља брзину преношења наелектрисања кроз неку средину. Веза између јачине струје  $i$  и пренетог наелектрисања  $q$ , дефинисана је диференцијалном једначином првог реда:

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (1.1)$$

Квалитативно обележје физичке величине, које одражава њену природу, представља њену димензију<sup>12</sup>. Димензиони израз показује однос између различитих физичких величине. На основу једначине 1.1 следи да димензију електричне струје представља количник димензија наелектрисања и времена. Димензија величине  $i$  означава се ка  $\dim i$ . Димензије се пишу великим управним словима латинице. У посматраном случају важи:

$$\dim i = I = \frac{\dim q}{\dim t} = \frac{Q}{T}. \quad (1.2)$$

<sup>7</sup> Појам из којег се изводе сродни појмови.

<sup>8</sup> Од лат. *intensitas*, јачина, силина, жестина.

<sup>9</sup> Од лат. *magnus*, велик.

<sup>10</sup> Може се сматрати да физичка природа неке одређене величине представља њено основно обележје, "квалитет" који је повезује са сродним величинама, односно по којем се разликује од неких других физичких величине. Назив потиче од лат. *qualitas*, својство, каквоћа, (добра) особина, врлина, вредност.

<sup>11</sup> Од лат. *quantitas*, величина, количина, својство нечега што је велико.

<sup>12</sup> Термин "димензија" потиче од латинске речи *dimensio* (мерење, одмеравање) и има вишеструко значење у савременој науци. У најужем смислу, под називом димензија подразумева се величина којом се мери простор (дужина, ширина и висина).

У Међународном систему величина (*International System of Quantities, ISQ*) дефинисано је седам основних величина [11]. То су: дужина, маса, време, електрична струја, термодинамичка температура, јачина светlostи и количина супстанције. Димензије свих осталих физичких величина изражавају се преко димензија основних величина<sup>13</sup>. Димензија наелектрисања једнака је:

$$\dim_{\mathcal{I}} = Q = \dim i \cdot \dim r = IT. \quad (1.3)$$

Величине које могу да се међусобно пореде називају се величине исте врсте. Величине које су исте врсте имају исту димензију<sup>14</sup> и квалитативно се разликују од других величине, са којима не могу да се пореде. Величине исте врсте могу заједно да се групишу у категорије величина, на пример:

- струја провођења (*conduction current*), струја дифузије (*diffusion current*), струја цурења (*leakage current*);
- механички рад, електрична енергија, топлота.

Израз којим је представљен неки природни закон, у којем словне ознаке представљају (физичке) величине, назива се “величинска једначина”. Она симболички приказује везу између величине којима се описује посматрани процес (појава). Та је веза независна од начина на који се квантитативно представљају величине које се у једначини појављују. На пример: прираштај напона између крајева савршеног<sup>15</sup> кондензатора,  $du$ , сразмеран је прираштају наелектрисања које је у њега унето,  $dq$ , а обрнуто је сразмеран капацитивности  $C$ :

$$du = \frac{1}{C} dq, \quad (1.4)$$

односно:

$$du = \frac{i}{C} dt. \quad (1.5)$$

На основу једначине 1.5 следи да је тренутна вредност струје кроз кондензатор сразмерна брзини којом се, у посматраном тренутку, мења напон између његових крајева:

$$i = C \frac{du}{dt}. \quad (1.6)$$

Математички изрази којима се исказују природни закони, садрже величине које су заступљене својим димензијама и својом вредношћу. У њима постоји двострука једнакост леве и десне стране једначине: димензиона и бројна. Димензионални обрасци олакшавају проверу димензионе усаглашености једначина којима се описује нека појава, односно стање неког физичког система. Израз не може да буде тачан ако не постоји димензиона једнакост чланова једначине. Димензиона анализа се заснива на једноставним правилима:

<sup>13</sup> Све остале величине називају се “изведене величине”.

<sup>14</sup> Обрнуто не мора да важи. Величине које имају исту димензију не морају да представљају величине исте врсте. Момент силе и енергија, на пример, имају исту димензију, али и различиту природу.

<sup>15</sup> Савршени електронски елемент (*ideal element*) је апстрактна представа елемената чија је својствена (карактеристична) величина само један електрични параметар.

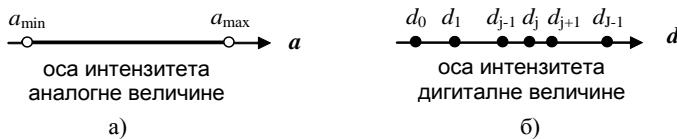
- димензија збира једнака је димензији сваког његовог сабирка;
- димензија производа једнака је производу димензија његових чинилаца.

### 1.1.1 КЛАСИФИКАЦИЈА ВЕЛИЧИНА

Основну категорију физичких величина представљају величине чији интензитет може да има било коју вредност која припада одређеном опсегу. То значи да њихова вредност може да се мења у неограничено малим корацима. Теоријски, такве величине могу да се представе са бесконачно фином резолуцијом<sup>16</sup>. Називају се аналогне величине<sup>17</sup>. Скуп  $\mathcal{A}$ , којим су дефинисане могуће вредности аналогне величине  $a$ , може да се представи као одсечак праве чије су границе  $a_{\min}$  и  $a_{\max}$  (слика 1.1.а.):

$$\mathcal{A} = \{a \mid a \in [a_{\min}, a_{\max}]\}. \quad (1.7)$$

Скуп  $\mathcal{A}$  је густ: између сваке две различите вредности аналогне величине постоји вредност која такође припада дефинисаном скупу могућих вредности.



Слика 1.1. Геометријска представа аналогне и дигиталне величине

У другу категорију спадају дигиталне<sup>18</sup> величине које могу да поприме само неке из низа одвојених (дискретних<sup>19</sup>) вредности. Скуп  $\mathcal{D}$  могућих вредности дигиталне величине  $d$  може да се представи низом неповезаних тачака на правој (слика 1.1.б.).

$$\mathcal{D} = \{d_j\}; j=0, \dots, J-1. \quad (1.8)$$

Са становишта електронике, посебан значај имају бинарне<sup>20</sup> величине: које могу да имају само једну од две вредности. Називају се и логичке величине, јер се вредност зависно променљиве бинарне величине може да одреди на основу правила формалне (математичке) логике. Спин<sup>21</sup> електрона

<sup>16</sup> Под резолуцијом се у технички подразумева способност разлагања (назив потиче од латинске речи *resolutio*, разлучивање). То је најмања промена посматране величине која може да се опази. Теоријски, вредност аналогне величине  $a$  може да се мења у неограничено малим корацима. Због несавршености техничких средстава и присуства различитих поремећаја, са информационе тачке гледишта, стварна резолуција, којом се одређује вредност неке аналогне величине, увек је ограничена.

<sup>17</sup> У физици постоји низ појава које се могу описати истим аналитичким изразима. Такве, међусобно различите појаве, се називају аналогним физичким појавама (од грч. *analogos*, сличан, сродан, истоврсан). Преношење наелектрисања кроз проводник слично је преношењу флуида кроз цев. Електричне величине електрични напон и електрична струја, сличне су механичким величинама као што су притисак и проток.

<sup>18</sup> У теорији информација, "дигит" је члан коначног скupa ненегативних целих бројева који се користи за представљање информација.

<sup>19</sup> Развојен, различит (од лат. *discernere*, раздвојити, одвојити).

<sup>20</sup> Двоцлани, двојни сигнали (од лат. *bini*, по два, *binarius* који садржи два, од два дела).

<sup>21</sup> Сопствени момент количине кретања микрочестице (енг. *spin*, обртање).

је бинарна величина [12]. Савремена рачунарска техника се заснива на бинарним величинама.

Аналогне величине одражавају непрекидност простора и времена. Потенцијал електричног поља, које постоји у околини неког наелектрисаног тела је аналогна величина, као и електрични напон који постоји између две тачке тог поља, односно електрична сила којом електрично поље делује на страно наелектрисано тело. Макроскопске електричне величине, као што су електрична струја и густина електричне струје су аналогне величине.

Величине које могу да се представе као умножак неке елементарне количине су дигиталне. На нивоу микрокосмоса, дигиталне физичке величине одражавају квантне законе. Укупно наелектрисање сваког тела (физичког система) представља целобројни умножак елементарне количине наелектрисања, која је једнака наелектрисању електрона. Тело може да зрачи енергију само у "порцијама" (квантима) чија је енергија сразмерна учестаности зрачења. Енергија електрона који круже око атомског јегра може да има само дискретне вредности.

## 1.2 СИГНАЛИ

У технички, сигнал је променљива физичка величина функција времена, која представља информацију. Са информационе тачке гледишта значајна је само математичка представа сигнала. Физичка природа носиоца информације је неважна. Посматрана као функција времена, физичка величина  $x(t)$  може да буде дефинисана у било којем тренутку унутар затвореног временског интервала (интервала посматрања). У том случају, скуп  $\mathcal{T}$ , којим је одређена област дефинисаности (домен) функције  $x(t)$ , представља одсечак на временској оси који започиње у почетном тренутку,  $t_p$ , а завршава се у крајњем тренутку интервала посматрања,  $t_k$ .

$$\mathcal{T} = \{t \mid t \in [t_p, t_k]\}. \quad (1.9)$$

Каже се да је област дефинисаности функције  $x(t)$  "повезана" (нема празнина). Све вредности између две тачке на временској оси (два тренутка) припадају области дефинисаности. Таква функција  $x(t)$  је непрекидна по времену као независно променљивој.

Функција, којом је одређена вредност посматране физичке величине, може да буде дефинисана само у одређеним, међусобно размакнутим тренуцима затвореног временског интервала. Ако скуп  $\mathcal{T}$ , којим је одређена област дефинисаности неке функције  $y(t)$ , представља низ неповезаних тачака на временској оси:

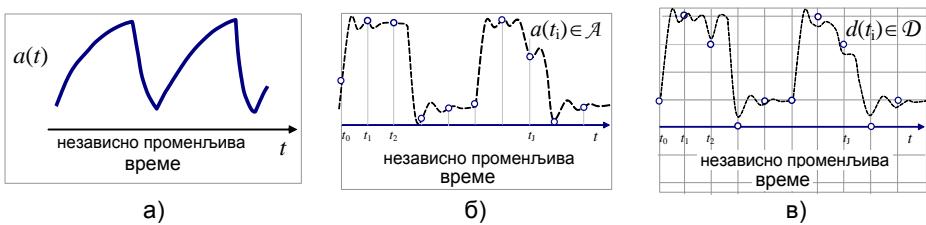
$$\mathcal{T} = \{t_j\}; j = 1, \dots, J, \quad (1.10)$$

функција  $y(t)$  је дискретна по времену. Унутар интервала  $(t_j, t_{j+1})$  функција  $y(t)$  није дефинисана.

Посматрани као функција времена, електрични сигнали сврставају се у две основне категорије:

- сигналы непрекидни по времену (*continuous-time signals*) и
  - сигналы дискретни по времену (*discrete-time signals*).

Графички приказ аналогне величине  $a(t)$ , непрекидне по времену дат је на слици 1.2.а. Слика 1.2.б приказује аналогну величину дискретну по времену,  $a(t_i)$ , која представља неку аналогну величину непрекидну по времену, чије су вредности посматране (очитане) у одабраним тренуцима времена. На слици 1.2.в приказана је дигитална величина дискретна по времену,  $d(t_i)$  добијена дискретизацијом вредности неке аналогне величине посматрањем њених вредности у дискретним тренуцима времена.



Слика 1.2. Временски дијаграми променљивих величина

Уобичајено је да се сигнал који може да буде представљен неком одређеном математичком функцијом времена назива детерминистички<sup>22</sup> сигнал. На основу познавања законитости промене информационог параметра могуће је одредити његову вредност у произвољном тренутку у будућности<sup>23</sup>. Сложенопериодични сигнал (приказан на слици 1.3.a) представља детерминистички сигнал.



Слика 1.3 Детерміністички и случаіни сигнал

Сигнал чије будуће вредности (промене) нису унапред познате назива се случајни сигнал. Може бити позната функција која описује тај сигнал у прошлости (слика 1.3.б), али не и у будућности. Сигнали чији је облик познат, али информациони параметар представља случајну величину представљају „квазидетерминистичке“ сигнале.

<sup>22</sup> Назив потиче од латинске речи *determinare*, ограничити, одредити, одређивати.

<sup>23</sup> Наслов потиче од латинској речи *constituta*, означавајући, одредити, одређивати.

Строго посматрано, може да се сматра да величина чија је вредност унапред позната није сигнал у информационом смислу. Са становишта мрнне технике, међутим, она може да представља "материјализовану меру" физичке величине која се мења по одређеном закону. Генератор таквог сигнала омогућује испитивање или проверавање метрополских и других својстава електронских уређаја.

Периодични сигнали се, као таласи<sup>24</sup>, понављају у времену:

$$a(t+T) = a(t), \quad (1.11)$$

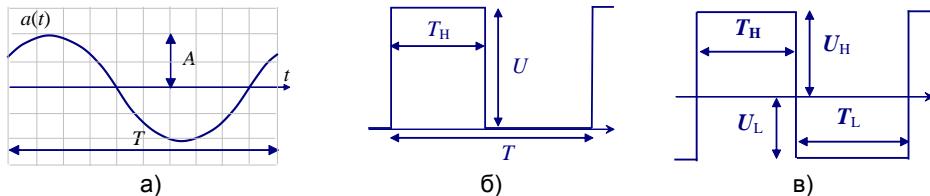
где је  $T$  период понављања, у општем случају произвољног облика функције  $a(t)$  којом је дефинисан талас. Посебан значај у техници има периодични сигнал који може да се представи синусном<sup>25</sup> функцијом ( слика 1.4.а):

$$a(t) = A \sin(2\pi ft + \varphi) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.12)$$

где је  $A$  амплитуда временски променљиве величине  $a(t)$ ,  $\varphi$  је фаза у почетном тренутку ( $t = 0$ ), а  $f$  представља учестаност (фреквенцију<sup>26</sup>) понављања таласног облика:

$$f = \frac{1}{T}. \quad (1.13)$$

Било који од параметара сигнала чији је математички модел синусна функција<sup>27</sup> (амплитуда, период, учестаност или почетна фаза) може да представља информациони параметар.



Слика 1.4 Електрични сигнали

Параметри сигнала који нису функционално повезани са мереном величином су неинформативни параметри. "Утискивање" информације у периодични сигнал назива се модулација<sup>28</sup>. Обрнути процес је демодулација<sup>29</sup>.

Када се као носилац информације користи периодични сигнал правоугаоног таласног облика (слика 1.4.б), информациони параметар може да буде вршна (темена) вредност величине, учестаност, период или трајање импулса. Са становишта тачности, предност имају информациони параметри који представљају бездимензионе величине. На пример, количник трајања импулса и периода њиховог понављања:

$$\theta = \frac{T_H}{T}, \quad (1.14)$$

користи се за представљање ненегативних величина ( $0 \leq \theta \leq 1$ ). За представљање величина чија вредност може да буде позитивна или негативна користи се параметар дефинисан изразом:

<sup>24</sup> У техници, талас (wave) се дефинише као промена физичког стања средине, која се у тој средини простира у функцији времена. Таласни облик (waveform) је приказ величине којом је дефинисан талас помоћу дијаграма, цртежа, једначина, табела или статистичких података.

<sup>25</sup> Назив потиче од лат. *sinus*, полуокругла површина, недра, груди.

<sup>26</sup> Назив потиче од лат. *frequentia*, чешће понављање.

<sup>27</sup> Функција синусног облика се у физици назива "хармонијска". Назив потиче од грч. *harmonikós* складан, благозвучан.

<sup>28</sup> Назив потиче од лат. *modulari*, мењати (глас, тон).

<sup>29</sup> Предметак *de-* (лат. *de*) у сложеницама има значење "укидање".

$$\psi = \frac{T_H - T_L}{T_H + T_L}, \quad (1.15)$$

чија вредност може да буде у опсегу од минус један до један (слика 1.4.в).

Периодична величина чија је средња вредност једнака нули назива се наизменична величина. Периодична величина чија средња вредност није једнака нули назива се пулсирајућа величина [13]. Таква величина може да се представи као збир:

$$a(t) = A + a_{\sim}(t), \quad (1.16)$$

где је  $A$  средња вредност периодичне величине  $a(t)$ .

$$A = \overline{a(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt. \quad (1.17)$$

Периодични сигнал произвољног таласног облика:

$$a(t+T) = a(t), \quad (1.18)$$

може, формално, математички, да се представи збиром простопериодичних сигнал - хармоника:

$$a^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n); \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.19)$$

Участаност хармоника представља умножак (мултипл) участаности посматраног сигнала. Десна страна ове једначине назива се **Фуријеов ред** функције  $a(t)$  [14].

Скуп амплитуда, участаности и фаза хармоника представља **спектар** посматраног сигнала. Непрекидна периодична функција  $a(t)$  једнозначно је одређена одговарајућим спектром, па приказ сигнала у временском домену може бити замењен приказом у домену участаности тј. приказом његовог спектра. Фуријеов ред сигнала симетричног троугаоног таласног облика, на пример (слика 1.5.б), има облик:

$$\frac{8U}{\pi^2} \left( \sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t + \dots \right). \quad (1.20)$$

Средња вредност овог сигнала је једнака нули. Посматрана функција  $a(t)$  је непарна, па у њеном спектру сигнала не постоје парни хармоници. Први хармоник (чији је период једнак периоду посматране функције) највише је изражен, а амплитуде виших хармоника опадају по квадратном закону.

Са становишта теоријске анализе техничких система посебно је значајна функција која је била једнака нули пре почетка посматрања, да би се у тренутку  $t = 0$  променила за неки коначан прираштај, а потом задржала нову вредност током читавог интервала посматрања. Назива се одскочна функција (*step*). Јединична (Хевисајдова) одскочна функција (*unit-step*) је дефинисана изразом:

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{за } t \geq 0 \\ 0 & \text{за } t < 0 \end{cases}, \quad (1.21)$$

Појам "спектар" увео је у физику енглески физичар и математичар Њутн (Isaac Newton, 1643-1727) при описивању појаве разлагања светlostи на компоненте различитих боја<sup>30</sup>. У техничкој литератури термин "спектар" се користи за означавање различитих скупова. Спектрална анализа има важно место у низу области науке и технике.

Покретан жељом да докучи законитости природе, Њутн је унапредио многе научне области. Сматра се да је закон о гравитацији, који је открио са непуних 24 година, "највећа генерализација коју је људски ум постигао". Син сељака, постао је први научник који је добио витешку титулу [15].



Њутн

### 1.2.1 ВРСТЕ СИГНАЛА

У електротехници, сигнали су електричне величине, функције времена. У најједноставнијем облику, сигнал је електрична "копија" посматране променљиве физичке величине. Тада је информациони параметар тренутна вредност изабране електричне величине, носиоца информације, која је одређена вредношћу посматране величине у датом тренутку. Уобичајено је да се сигнали сврставају у две основне групе, аналогни сигнали и дигитални сигнали. Њихове дефиниције, међутим, нису истоветне у свим областима електротехнике.

У области која се бави управљањем техничким системима (*control technology*), под називом "аналогни сигнал" (*analog signal*) подразумева се сигнал чији информациони параметар може да има било коју вредност унутар одређеног непрекидног интервала вредности [16]. У областима везаним за пренос података, овај термин се користи у ужем смислу, да означи аналогне величине непрекидне по времену<sup>31</sup> [17]. Вредност информационог параметра може да се промени у било ком тренутку. Такав аналогни сигнал може непрекидно да прати вредност друге физичке величине коју генерише извор информације.

Дигитални сигнал (*digital signal*) је величина чији информациони параметар може да поприми само неку од вредности из скupa унапред дефинисаних дискретних вредности [18]. Промена вредности информационог параметра је скоковита. У савременој дигиталној техници широку примену имају дигитални сигнали којима се представљају бинарне величине. Бинарни сигнал (*binary signal*) је дигитални сигнал чији информациони параметар може да има само једну од две дискретне вредности. У ужем смислу, под називом "дигитални сигнали" подразумевају се сигнали дискретни и по вредности и по времену [19], [20]. Промена вредности је скоковита, а може да се изврши само у неким одређеним тренуцима. Њихове могуће вредности и тренуци времена

<sup>30</sup> Назив потиче од лат. *spectrum*, визија, првиђење, утвара.

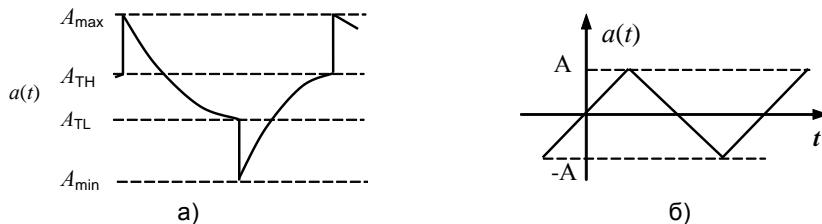
<sup>31</sup> Функција  $x(t)$  је непрекидна (континуална) у тачки  $t = \tau$  ако тачка  $\tau$  припада области дефинисаности функције  $x(t)$ , и ако је испуњен услов:  $\lim_{t \rightarrow \tau} x(t) = x(\tau)$ .

у којима су детерминисани могу да буду нумерисани и приказани бројевима коначне дужине.

У стручној литератури се често појам аналогног сигнала сужава на сигнал који је представљен непрекидном (континуалном<sup>32</sup>) функцијом времена<sup>33</sup>. Доследно спроведена класификација сигнала заснива се на два критеријума. То су својства скупа могућих вредности физичке величине која представља сигнал, и својства области дефинисаности независно променљиве (времена). Са тог становишта, постоје четири врсте сигнала:

- аналогне величине непрекидне по времену;
- аналогне величине дискретне по времену;
- дигиталне величине непрекидне по времену;
- дигиталне величине дискретне по времену.

Треба уочити да прва класа сигнала не обухвата само оне који могу да се представе као непрекидне функције времена. Дефиниција аналогне величине, подразумева да је скуп њених могућих вредности повезан (непрекидан), али не подразумева да је функција којом се описују њене промене у времену, непрекидна. Сигнал приказан на слици 1.5.a представља аналогну величину непрекидну по времену. У неком произвољном тренутку посматрања величина  $a(t)$  може да има било коју вредност у оквиру одређених граница затвореног интервала  $[A_{\min}, A_{\max}]$ . Функција  $a(t)$ , међутим, има прекиде прве врсте<sup>34</sup>. Скоковита промена, у начелу, може да се додги у било ком тренутку [21]. Функција  $a(t)$  представља “део по део” непрекидну функцију времена.



Слика 1.5. Аналогне величине непрекидне по времену

Аналогна електроника се бави сигналима који представљају величине чији интензитет може да има било коју вредност у задатом опсегу вредности, а чија је област дефинисаности, када се та величина посматра као функција времена, повезана. Такав сигнал представља аналогну физичку величину непрекидну по времену. Она у било ком тренутку може да поприми било коју вредност која се налази унутар непрекидног опсега могућих вредности.

<sup>32</sup> Назив потиче од лат. *continuare*, продужавати.

<sup>33</sup> Тиме се, неоправдано, занемарује да анализа сигнала у фреквенцијском домену обухвата и функције које имају прекиде [5]. Потребне услове за развој периодичке функције у Фуријеов ред (Дирихлеови услови) испуњава и функција која у границама једног периода понављања има ограничен број прекида прве врсте.

<sup>34</sup> Тачка  $t = \tau$  представља прекид прве врсте функције  $x(t)$  уколико постоје граничне вредности:  $\lim_{t \rightarrow \tau^-} x(t) = a$  и  $\lim_{t \rightarrow \tau^+} x(t) = b$ , и ако је  $a \neq b$ .

$$t \rightarrow \tau^- \quad t \rightarrow \tau^+$$

## 1.3 ЕЛЕКТРОНСКИ УРЕЂАЈИ И СИСТЕМИ

У највећем броју случајева, електронски уређај (*electronic device*) је направа помоћу које се остварује запис, обрада или пренос сигнала. Физички, то је скуп међусобно повезаних елемената у којем се електромагнетска енергија користи да би се обавила одређена функција. Елемент електронског уређаја је његов основни саставни део који обавља одређену функцију. Повезивањем електронских елемената образује се електронско коло (*electronic circuit*). У функционалном погледу, и сама електронска кола могу да се посматрају као елементи чијим се повезивањем израђују сложени електронски уређаји<sup>35</sup> и системи. При описивању техничке сложености артефаката<sup>36</sup> електронике користе се појмови:

- елемент (*element*),
- компонента (*component*),
- део (*part*),
- уређај (*device*),
- апарат (*apparatus*),
- опрема (*equipment*),
- систем (*system*),
- постројење (*installation*).

Листа је уређена према растућој сложености, али треба имати у виду да се поједини термини међусобно не искључују.

Својства електронских кола описују се, између остalog, појмовима преузетим из опште теорије система и сигнала, као што су: функционални блок, блок-дијаграм, побуда, одзив, статичка карактеристика, фреквенцијска карактеристика, функција преноса... У најопштијем смислу, под појмом "систем"<sup>37</sup> подразумева се скуп објекта са релацијама између тих објекта и њихових атрибута. Објекти<sup>38</sup> су делови (компоненте) система. Атрибути<sup>39</sup> су својства ("особине") система односно његових делова. Релације<sup>40</sup> су односи између објекта који повезују систем у целину. Објекти система могу бити материјални објекти, појмови, као и њихови резултати (облик организације, математички методи, програмски језици...).

У техници, под појмом "систем" подразумева се скуп међусобно повезаних елемената, посматран у одређеном контексту као целина, састављена са циљем да се оствари одређена функција. Сматра се да је систем издвојен од окружења и других система имагинарном површи која пресеца везе између њих и посматраног система [22]. Обележје система као

<sup>35</sup> У ширем смислу, и електронски уређај, посматран као целина, може се сматрати елементом једног сложенијег скupa (система).

<sup>36</sup> Рукотворина, вештачки производ (од лат. *artefactum*).

<sup>37</sup> Назив потиче од грчке речи *systēma*, оно што је састављено; уређена и од разноврсних делова састављена целина.

<sup>38</sup> Од лат. *objēctum*, предмет, ствар оно што се види или претпоставља.

<sup>39</sup> Од лат. *attributum*, својство, обележје.

<sup>40</sup> Од лат. *relatio*, однос, веза.

целине може да буде облик, структура, понашање<sup>41</sup>. Слично понашање се може уочити, под одређеним условима, код система који се разликују по облику, структури и природи процеса који се у њима одвијају. Стање система је скуп података који дају потпуну информацију о "предисторији" система, потребну за одређивање његовог понашања у будућности. Каже се да су два система еквивалентна, ако се понашају на исти начин, под дејством истих улаза.

### 1.3.1 МОДЕЛОВАЊЕ

Стање система је векторска величина. Може да се представи као тачка у  $n$ -димензионалном Еуклидовом простору чије су "димензије" величине којима се посматрани систем описује. У начелу, оне могу да имају различиту физичку природу. Свака тачка у овом "простору стања" одговара неком стању система. Број координата стања одређује димензионалност система. Графички приказ односа између две величине којима се описује стање система назива се карактеристика<sup>42</sup> система. Под појмом "математички модел" подразумева се опис система на неком формалном језику, који омогућује да се изводе закључци о неким својствима понашања система.

Ако је систем описан обичном диференцијалном једначином  $n$ -тог реда, онда је за налажење решења које приказује посматрану величину, осим познавања функција које описују спољашња деловања на систем, потребно познавање и вредности  $(n-1)$  извода посматране величине у почетном тренутку.

#### ПРИМЕР

Систем чији је математички модел диференцијална једначина:

$$\frac{d^2a}{dt^2} + \omega^2 a(t) = 0 \quad (1.22)$$

где је  $\omega$  константа, која има димензију учестаности, у физици се назива хармонијски осцилатор<sup>43</sup>. Решење ове једначине је функција синусног облика (1.12) чија је угаона учестаност  $\omega$ , а амплитуда и фаза су одређени почетним условима. Такав систем може да буде сачињен од механичких или електричних елемената (слика 1.6).



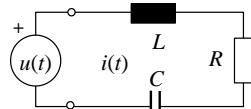
Слика 1.6. Механички и електрични хармонијски осцилатор

<sup>41</sup> У теорији система, под називом "понашање система" (*system behaviour*) подразумева се скуп атрибута којима се може задовољавајуће описати систем.

<sup>42</sup> Од грчке речи *character* - ознака, обележје, особина, оно чиме се нака ствар или човек нарочито одлукују, разликују од других ствари или људи. У најопштијем смислу, под називом "карактеристика елемента" подразумева се аналитички израз којим је приказан однос две величине.

<sup>43</sup> Назив потиче од лат. *oscillare*, клатити се, њихати се. Најједноставнији пример таквог система је механичко клатно. Ако је амплитуда мала, период осциловања зависи само од дужине клатна и убрзања земљине теже.

Електрични систем образован од савршених основних електричних елемената (отпорника, кондензатора, калема) и савршеног извора напона (слика 1.7), описује се линеарном диференцијалном једначином другог реда чији коефицијенти су одређени величинама које описују пасивне елементе у колу<sup>44</sup>.



$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{du}{dt}$$

Слика 1.7. Електрични систем другог реда

Такав систем, остварен помоћу елемената чија вредност може да се подешава (задаје), омогућује аутоматско решавање линеарних диференцијачних једначина и анализу понашања разноврсних физичких система чији математички модел има истоветан облик.

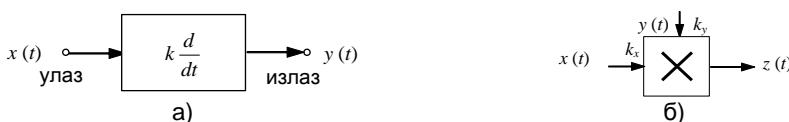
Са становишта теорије и праксе, у електротехници су најзначајнији системи са концентрисаним временски непроменљивим параметрима који се описују диференцијалним једначинама са константним коефицијентима. Највећи број електронских кола се може, са прихватљивом тачношћу, сврстати у такве системе.

## 1.4 ЕЛЕМЕНТИ И СИСТЕМИ ТИПА УЛАЗ-ИЗЛАЗ

Независно од тога да ли се неки елемент/систем користи за пренос енергије или сигнала, на њему се разликују улаз (*input*) и излаз<sup>45</sup> (*output*). Карактеристика преноса (*transfer characteristics*) приказује однос између улазне величине, која представља побуду<sup>46</sup> (стимулус), и излазне величине, која представља одзив<sup>47</sup> елемента (система). Такав елемент се графички приказује правоугаоником у којем је, на одговарајући начин, назначена функционална зависност улазне и излазне величине. Линије симболизују улаз и излаз, при чему стрелице показују смер деловања (преношења информације). Елемент приказан на слици 1.8.а представља диференцијатор (*derivative element*). Његова излазна величина,  $y$ , с сразмерна је изводу по времену улазне величине,  $x$ :

$$y(t) = k \frac{dx}{dt} \quad (1.23)$$

Величина  $k$  је сачинилац сразмере који обезбеђује димензиону једнакост леве и десне стране ове једначине<sup>48</sup>.



Слика 1.8. Елементи типа улаз-излаз

<sup>44</sup> Ова једначина проистиче из основних закони електротехнике (Омов закон и Фарадејев закон) Кирхофових правила и дефиниције капацитивности.

<sup>45</sup> У општем случају термини "улаз" и "излаз" се користе за величине (напон, струја, импеданса...) или делове (крајеви, проводници...) везане за пријем односно одавање енергије или сигнала.

<sup>46</sup> Од лат. *stimulus*, надражак, подстrek.

<sup>47</sup> Енг. *response* (од лат. *respondere*, одговорити, дати одговор).

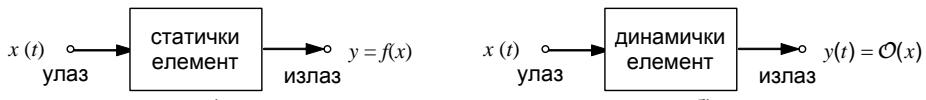
<sup>48</sup> Ако, у посматраном примеру, улазна и излазна величина имају исту физичку природу, сачинилац  $k$  има димензију времена.

Сматра се да не постоји повратно дејства излаза на улаз. У општем случају, елемент може да има више улаза и/или више излаза. Елемент приказан на слици 1.8.б представља множач<sup>49</sup>. Његова излазна величина,  $z$ , сразмерна је производу улазних величине,  $x$  и  $y$ :

$$z(t) = k_x x(t) \cdot k_y y(t). \quad (1.24)$$

Пресликање  $x \rightarrow y$ , које остварује елемент са једним улазом и једним излазом, може да буде дефинисано функцијом  $y(x)$ , као што је, на пример, множење константом (функција пропорционалности), степеновање или функција квадратног корена. У том случају, вредност излазне величине представља слику вредности улазне величине. Ако се улазна величина не мења, излазна величина је константна и једнака вредности која је одређена вредношћу улазне величине у тренутку посматрања. То су "статички" елементи<sup>50</sup>.

У општем случају, елемент са једним улазом и једним излазом може да представља физичко остварење неког оператора<sup>51</sup>  $\mathcal{O}$ , којим се улазна функција  $x(t)$  преслика на излазну функцију  $y(t)$ . Оператор диференцирања, на пример, преслика функцију  $x^3$  у квадратну функцију. Вредност излаза у сваком тренутку зависи од "предисторије". То су "динамички" елементи<sup>52</sup>.



Слика 1.9. Статички и динамички елемент

Оператор  $\mathcal{O}$  је линеаран ако има својства адитивности<sup>53</sup>:

$$\mathcal{O}(x_1 + x_2) = \mathcal{O}(x_1) + \mathcal{O}(x_2). \quad (1.25)$$

и хомогености<sup>54</sup>:

$$\mathcal{O}(cx) = c\mathcal{O}(x); c = const. \quad (1.26)$$

Оператори множења константом, диференцирања и интегралења су линеарни оператори. Елементи (системи) који се могу описати линеарним операторима су линеарни елементи (системи).

Под називом функционални дијаграм<sup>55</sup> (*functional diagram*) подразумева се симболички приказ међусобног деловања делова система остварен

<sup>49</sup> У целини посматрано, резултати настојања да се графички симболи елемената стандардизују, и прихвате, не могу да се сматрају задовољавајућим. У овој књизи користе се уобичајени симболи који својим изгледом указују на функцију елемента.

<sup>50</sup> Статика је део механике (физике) који проучава услове под којима механички систем остаје у миру (грч. *statiķē*).

<sup>51</sup> Од лат. *operatio*, делање, обављање, вршење.

<sup>52</sup> Динамика је део механике, односно физике који се бави силама и кретањима које те силе производе (грч. *dynamikē*, од *dynamis*, сила). Динамички елемент је интегратор. Његов излаз може да се мења и ако је улазна величина стална.

<sup>53</sup> Од лат. *additio*, додавање, сабирање, збрађање.

<sup>54</sup> Од грч. *homogenēs*, истоврсност у сваком делу.

<sup>55</sup> У аутоматици се користи и назив "блок дијаграм" (*block diagram*).

помоћу функционалних блокова и линија деловања [23]. Функционални блок система или елемента са једним или више улаза и једним или више излаза симболички се, првенствено, представља правоугаоником у којем је, на одговарајући начин, назначена функционална зависност улазне и излазне величине [24]. На слици 1.10 приказан је, као пример, функционални дијаграм система чији математички модел представља једначина 1.22.



Слика 1.10. Функционални дијаграм хармонијског осцилатора

У електроници је уобичајено да се величине које се односе на улаз означавају индексом “*i*” или “*I*” (од енглеске речи *input*, улаз), а величине које се односе на излаз индексом “*O*” или “*o*” (од *output*, излаз). Величине којима се симболизује пресликавање (пренос) улаза на излаз означавају се индексом “*F*” односно “*f*” (од *forward*, напред, проследити). Величине којима се симболизује повратно дејство излаза на улаз означавају се индексом “*R*” односно “*r*” (од *reverse*, обратан).

Анализа линеарних електронских елемената заснива се на општим законима електротехнике, теоремама<sup>56</sup> које су из њих произстакле, као и посебним поступцима који су развијени са циљем поједностављења алгоритма<sup>57</sup> одређивања вредности карактеристичних величина електричних мрежа. Струје и напони у једном електронском колу међусобно су повезани Кирхофовим правилима. На основу ових једначина, и једначина које повезују величине на приступима поједињих елемената, одређује се зависност излазне величине од улазне. У општем случају, та зависност је описана диференцијалном једначином.

Анализа нелинеарних електронских елемената је, у начелу, знатно сложенија. Због тога се користи метод линеаризације. Посматрају се мале промене напона и струје у околини изабране “мирне” радне тачке<sup>58</sup>. Применом Тейлорове формуле, нелинеарне карактеристике елемената се апроксимирају полиномима, чији ред представља компромис захтева у погледу тачности, ширине радног опсега и једноставности поступка анализе. Уместо вредности карактеристичних величина посматрају се односи који постоје између њихових (малих) промена. Такав математички модел, који важи само за мале сигнале, у значајној мери олакшава анализу. Грешке које због тога настају представљају грешке модела које се у метрологији сврставају у категорију систематских грешака. Уопштавање овог поступка омогућује да се било која нелинеарна функција представи “у деловима линеарном” функцијом која се састоји од коначног броја линеарних сегмената.

<sup>56</sup> Теорема (грч. *theōrēma*) је правило које се може доказати.

<sup>57</sup> Поступак решавања математичког проблема низом узастопних корака (операција), од којих се неки понављају (лат. *algorismus*). Сматра се да назив потиче од имена арапског математичара Мохамеда ибн Мусе Алхаризми (780-850).

<sup>58</sup> Радна тачка представља стање елемента (система) при одређеној сталној вредности улазних величине. Мирна радна тачка (*quiescent point*) приказује стање у одсуству побуде.

### 1.4.1 ФУНКЦИЈЕ ЕЛЕКТРОНСКИХ ЕЛЕМЕНТА

Електронски уређај, којим се остварује обрада, пренос или запис информација, представља мање или више сложен систем који се састоји из скупа функционалних делова – елемената којима се остварују одређене операције обраде електричних сигнала. Основне функције, које елементи електронских уређаја обављају могу да се групишу у неколико категорија:

- појачање (*amplification*),
- усмешавање (*rectification*),
- ограничавање (*limiting*),
- поређење (*comparison*),
- осциловање (*oscillation*),
- прекидање (*switching*),
- логичка обрада (*logic processing*) и
- математичка обрада (*mathematical processing*).

Ова подела, иако није строга<sup>59</sup>, олакшава изучавање својстава елемената којима се поједине функције (операције) остварују.

Математички, појачање је множење константом. Сврха ове операције је различита. У ужем смислу, она представља повећање величине физичке величине. У ширем смислу, појачање сигнала има за циљ, пре свега, да се даља обрада или пренос сигнала оствари са што је могуће већом тачношћу. Појачањем се, на пример, повећава снага сигнала који се преноси, али тако да његов информациони садржај остане сачуван. Ова операција се примењује и када је потребно раздвојити несавршени извор сигнала (велике унутрашње отпорности) од великог оптерећења (мале отпорности) које представља коло којем се сигнал прослеђује.

Усмешавање је нелинеарна операција која омогућује да се од наизменичног сигнала добије једносмерни сигнал. Примењује се, на пример, за напајање електронских кола енергијом преузетом из енергетске мреже система наизменичне струје. Користи се и за демодулацију амплитудски модулусаног сигнала, као и мерење наизменичног напона инструментима за једносмерни напон.

Ограничавање је такође нелинеарна операција која може да се примени за стабилизацију једносмерног напона (односно струје) или за уобличавање периодичних сигнала.

Квантитативно одређивање неке величине подразумева њено поређење са величином исте врсте, чија је вредност позната са прихватљивом мерном несигурношћу. Поређење два напона је основна операција електронске мере технике. Компаратор је, заправо, мешовити елемент. Улазне величине су аналогне, а излазна дигитална (бинарна). Примењује се и за уобличавање импулсних сигнала.

---

<sup>59</sup> Усмешавање, ограничавање и поређење описују се одговарајућим математичким функцијама. Под логичком обрадом се овде подразумева остваривање функција математичке логике.

Електронски осцилатори имају веома разноврсну примену у електронским уређајима. Посебно значајну улогу имају у телекомуникацијама, мерној техници и енергетској електроници. Хармонијски осцилатор је линеаран елемент. Много ширу примену имају осцилатори који на свом излазу дају сигнал несинусног облика. То су нелинеарни елементи.

Посебну групу чине електрични прекидачи. У функционално најједноставнијем облику, то су елементи помоћу којих се остварују операције математичке логике. Читава дигитална техника је заснована на примени електронских прекидача од којих се, у том случају, захтева што већа брзина и што мања сопствена потрошња. У аналогној електроници, то су елементи помоћу којих се мења структура неке електричне мреже, са циљем да се промени начин рада одређеног кола. Савршени електрични прекидач је елемент чија отпорност између улазних прикључака може да буде једнака нули или бесконачна.

Математичка обрада се односи на "сложене" операције као што су множење, кореновање, степеновање, логаритмовање, налажење првог извода, интеграција,...

### 1.4.2 ЛИНЕАРНИ ЕЛЕМЕНТИ И СИСТЕМИ

Посебну врсту представљају елементи који могу да се сврстају у категорију линераних елемената типа улаз-излаз. Њихово основно својство је исказано принципом суперпозиције<sup>60</sup> (*principle of superposition*). Одзив на побуду која представља збир више побуда, једнак је збиру независних одзива на појединачне побуде [25]. У општем случају, ако улазни сигнал може да се представи као алгебарски збир два пондерисана<sup>61</sup> сигнала:

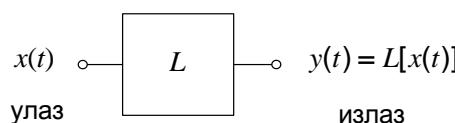
$$x(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t), \quad (1.27)$$

где су  $k_1$  и  $k_2$  тежински коефицијенти, одзив линеарног система је једнак:

$$y[x(t)] = k_1 y[x_1(t)] + k_2 y[x_2(t)]. \quad (1.28)$$

Линеарни елемент (слика 1.11) описан је линеарним оператором пресликавања функције  $x(t)$  на функцију  $y(t)$ :

$$L[k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)] = k_1 L[x_1(t)] + k_2 L[x_2(t)]. \quad (1.29)$$



Слика 1.11. Линеарни елемент

<sup>60</sup> Од лат. *superpositio*, стављање једног преко другог, продужавање.

<sup>61</sup> Од лат. *ponderabilis*, који се могу мерити (поредити) по тежини.

У најједноставнијем случају линеарно пресликавање се своди на множење константом (појачање). У сваком тренутку, вредност излазне величине сразмерна је вредности улазне. Такав елемент је статички.

Елемент чији математички модел може да се представи линеарном диференцијалном једначином са константним коефицијентима је линеаран. Одзив таквог елемента на побуду хармонијским сигналом<sup>62</sup>:

$$x(t) = X \cos \omega t, \quad (1.30)$$

где је  $X$  амплитуда,  $\Theta = \omega t$  фаза, а  $\omega$  кружна учестаност:

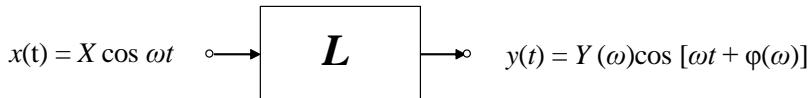
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad (1.31)$$

такође представља хармонијску функцију, исте учестаности:

$$y(t) = Y \cos(\omega t + \varphi). \quad (1.32)$$

У начелу, амплитуда и фаза сигнала на излазу линеарног елемента зависе од учестаности улазног сигнала:

$$y(t) = Y(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]. \quad (1.33)$$



Слика 1.12. Линеарни елемент побуђен хармонијским сигналом

Количник амплитуде улазног и излазног сигнала показује како посматрани елемент утиче на велиност сигнала, у зависности од његове учестаности. Разлика фаза излазног и улазног сигнала је други показатељ деловања. Ове две величине, заједно, представљају карактеристична обележја при описивању и анализи својства аналогних елемената и система. У сажетом облику, начин на који линеарни елемент пресликава улазни сигнал на свој излаз, описује се једном, комплексном величином  $W(j\omega)$ :

$$W(j\omega) = Re(\omega) + jIm(\omega); \quad j^2 = -1, \quad (1.34)$$

чији модул представља однос амплитуда:

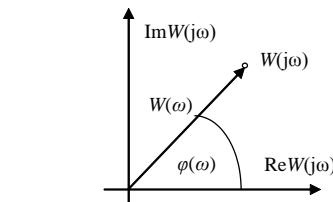
$$W(\omega) = \sqrt{Re^2 + Im^2} = \frac{Y(\omega)}{X}. \quad (1.35)$$

а аргумент разлику фаза излазног и улазног сигнала:

$$\arg \frac{Im(\omega)}{Re(\omega)} = \varphi(\omega), \quad (1.36)$$

<sup>62</sup> Информациони параметар оваквог улазног сигнала може да буде његова амплитуда, период, учестаност или фаза у односу на неки други, референтни сигнал исте учестаности.

Комплексна величина  $W(j\omega)$ , која се назива **фреквенцијски одзив** (*frequency response*), представља фреквенцијску карактеристику линеарног елемента. При хармонијској побуди она у потпуности описује одзив линеарног елемента. Графички приказ величине  $W(j\omega)$  у комплексној равни дат је на слици 1.13.



Слика 1.13. Фреквенцијски одзив

При теоријској анализи се обично усваја да улазна и излазна величина имају исту физичку природу, тако да  $W(j\omega)$  представља бездимензиону величину. Практични смисао пресликања из домена реалних у домен комплексних бројева огледа се у поједностављењу поступка анализе сложених система. Решавање диференцијалних једначина са реалним величинама замењује се решавањем алгебарских једначина у којима фигуришу комплексни представници реалних величине. Комплексни представник хармонијског сигнала  $x(t)$  (једначина 1.30), је комплексна величина  $X(j\omega)$  чији је модуло једнак амплитуди, а аргумент фази функције  $x(t)$ :

$$X(j\omega) = X e^{j\omega t}, \quad (1.37)$$

Комплексни представник одзива  $y(t)$  (једначина 1.33), је комплексна величина  $Y(j\omega)$  чији је модуло једнак амплитуди, а аргумент фази функције  $y(t)$ :

$$Y(j\omega) = Y(\omega) e^{j(\omega t + \varphi)}, \quad (1.38)$$

Математички, фреквенцијски одзив елемента је количник комплексних величине  $Y(j\omega)$  и  $X(j\omega)$  које представљају "ликове" улазног и излазног сигнала, приказане у комплексном домену [26]:

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{Y(\omega)}{X} e^{j\varphi(\omega)} = W(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (1.39)$$

Сам поступак анализе у комплексном домену заснива се на једноставним правилима. Математички модел линеарног елемента, представљен у временском домену<sup>63</sup> линеарном диференцијалном једначином са константним коефицијентима:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \quad (1.40)$$

у којој  $x(t)$  представља улазну, а  $y(t)$  излазну величину (сигнал), замењује се одговарајућом линеарном алгебарском једначином тако што се оператор диференцирања замењује комплексном променљивом  $j\omega$ , а зависно променљиве  $x(t)$  и  $y(t)$  њиховим комплексним представницима  $X(j\omega)$  и  $Y(j\omega)$ :

$$a_n \cdot (j\omega)^n \cdot Y(j\omega) + \dots + a_0 \cdot Y(j\omega) = b_m \cdot (j\omega)^m \cdot X(j\omega) + \dots + b_0 \cdot X(j\omega), \quad (1.41)$$

<sup>63</sup> У којем независно променљиву величину представља време.

На основу једначине 1.41 одређује се фреквенцијска карактеристика посматраног елемента као количник комплексних ликова побуде,  $X(j\omega)$ , и одзива,  $Y(j\omega)$ :

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{b_m \cdot (j\omega)^m + b_{m-1} \cdot (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 \cdot (j\omega) + b_0}{a_n \cdot (j\omega)^n + a_{n-1} \cdot (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 \cdot (j\omega) + a_0} = W(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \quad (1.42)$$

на основу које следи:

$$Y(j\omega) = W(\omega) e^{j\varphi(\omega)} X(j\omega) = X \cdot W(\omega) e^{j(\omega t + \varphi)} = Y(\omega) e^{j(\omega t + \varphi)}. \quad (1.43)$$

где је  $Y(\omega)$  реална величина која представља однос амплитуда одзива и побуде, а  $\varphi(\omega)$  разлику њихових фаза.

Описани поступак може да се примени и за одређивање одзива на побуду било којом периодичном функцијом која може да се представи Фуријеовим редом. Проширивање на непериодичне функције засновано је на пресликању функције  $x(t)$  у функцију  $X(j\omega)$ , реалне променљиве  $\omega$ , које је одређено интегралом:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.44)$$

Ово пресликање се назива **Фуријеова трансформација**. Применом описаног поступка налази се комплексни лик одзива  $Y(j\omega)$ , на основу којег се, обратним пресликањем, одређује функција  $y(t)$  која представља одзив елемента:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} dt. \quad (1.45)$$

Пресликање, којим се, на основу комплексног лика,  $Y(j\omega)$ , добија "оригинална" функција  $y(t)$  назива се инверзна Фуријеова трансформација. Потребан услов да Фуријеова трансформација може да се примени је да интеграл апсолутне вредности посматране функције  $x(t)$ , дуж целе осе  $t$ , има коначну вредност<sup>64</sup>:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (1.46)$$

Међутим, овај услов не испуњавају неке основне функције које се користе у истраживању линеарних система, као што је, на пример, јединична одсочна функција (1.21). Проблем се превазилази применом Лапласове трансформације, којом се функција времена  $x(t)$  трансформише у функцију  $X(s)$ , комплексне променљиве  $s = \sigma + j\omega$ , дате интегралом:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt; s = \sigma + j\omega. \quad (1.47)$$

где је  $\sigma$  реални део комплексне променљиве  $s$ , такав да је испуњен услов:

<sup>64</sup> Каже се да је функција  $x(t)$  "интеграбилна дуж целе осе"  $t$ .

$$\int_0^{+\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty. \quad (1.48)$$

Упркос сложеној математичкој основи, поступак анализе у комплексном домену заснива се на већ описаним једноставним правилима. Математички модел замењује се одговарајућом линеарном алгебарском једначином комплексне независне променљиве  $s$ :

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \dots b_0 X(s), \quad (1.49)$$

тако што се оператор диференцирања замењује комплексном променљивом  $s$ , а зависно променљиве  $x(t)$  и  $y(t)$  њиховим комплексним представницима  $X(s)$  и  $Y(s)$ . На основу једначине 1.49 одређује се однос комплексних ликовова побуде и одзива,  $X(s)$  и  $Y(s)$ . Тада овај однос је представљен количником:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (1.50)$$

који се назива **функција преноса** посматраног елемента. Сменом  $s = j\omega$ , добија се **фреквенцијска карактеристика**  $W(j\omega)$ :

$$W(j\omega) = W(s) \Big|_{s=j\omega}. \quad (1.51)$$

### 1.4.3 ВРСТЕ СИСТЕМА

Систем чије се стање у будућности може у потпуности да предвиди, ако су познати његово стање у неком тренутку и улази који на њега делују, назива се "детерминистички систем".

Систем чије се стање током времена не мења уколико не постоји промена спољашњег дејства назива се статички систем. Његово стање зависи само од вредности улаза у тренутку посматрања. Системи који су описани линеарним или нелинеарним алгебарским једначинама у којима се време не појављује експлицитно, спадају у статичке системе.

Систем чије се стање током времена мења и када није подвргнут променљивом спољашњем дејству назива се динамички систем. При промени стања долази до појава трансформације енергије, преноса енергије, материје или информације између поједињих делова система. Брзина промене стања реалних система је ограничена – систем не може тренутно да промени стање<sup>65</sup>. Промена се дешава под дејством неког поремећаја или управљања. Када узрок промена нестане, у систему се, после неког времена може да успостави равнотежно стање, које се не мења уколико се не појави нови узрок

---

<sup>65</sup> Тренутна промена стања система значи да се енергија неког његовог дела, или система у целини, може тренутно да промени. То, међутим значи да је снага система у том тренутку неограничена, што је физички немогуће остварити.

промене. Динамички системи непрекидни по времену описани су диференцијалним једначинама. Системи дискретни по времену описани су диференцним једначинама.

Систем који омогућује представљање посматраних величина помоћу дискретних вредности физичких величина назива се дигитални систем [27]. У савременим дигиталним уређајима и системима обрађују се бинарни сигнали: дигитални сигнали који могу да имају само једну од две вредности<sup>66</sup>. У дигиталном систему физичке и механичке појаве су искоришћене за конструкцију дискретних (цифарских) аутомата са коначним бројем стања<sup>67</sup> који се потом користе за моделовање проблема који треба решити. Алгоритам<sup>68</sup> рада таквог система чини коначни низ наредби (инструкција) помоћу којих се вредности излазне величине израчунају на основу вредности улазних величине.



Слика 1.14. Дигитални рачунари

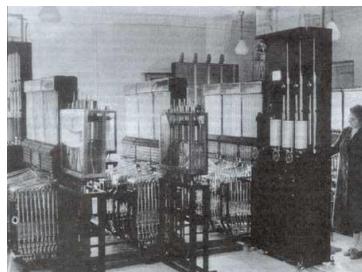
Систем који омогућује представљање посматраних величина помоћу непрекидно променљивих вредности физичких величина назива се аналогни систем [28]. Алгоритам рада аналогног система је дат или може да се изведе из математичких израза који повезују улазне и излазне величине. Пример аналогног система је аналогни рачунар који се заснива на коришћењу електричних и механичких појава за израду физичког модела математичког проблема који треба да се реши. Погодно одабране физичке величине користе се да представљају друге. Решавање се своди на испитивање аналогног електричног модела образованог одговарајућим повезивањем функционалних делова (модула) помоћу којих се остварују основне математичке операције. Решење проблема представља вредност посматране величине ("машинске променљиве") у одређеном тренутку<sup>69</sup>. У електронском аналогном рачунару математичке променљиве представљене су електричним напоном или струјом.

<sup>66</sup> Досадашња истраживања вршена у правцу развоја електронских система са три стања нису довела до ефикасних економичних решења.

<sup>67</sup> Такве направе називају се коначни аутомати (*finite-state machine*).

<sup>68</sup> Може бити представљен описом поступка (процедуре), математичким изразом (формулом) или графички (дијаграм тока).

<sup>69</sup> Решење постављеног задатка добијено помоћу аналогног рачунара може да буде у облику карактеристичних вредности, које се очитавају на мерним уређајима, или у облику континуалних кривих записаних на погодном медијуму. У доба другог светског рата, аналогни рачунари су представљали најефикасније средство за анализу динамичких система.



Слика 1.15. Аналогни рачунари

У посебним случајевима, пре свега у истраживачким лабораторијама, примењују се хибридни системи у којима се дигитални подсистем користи за управљање топологијом мреже сачињене од аналогних електронских кола.

## ЛИТЕРАТУРА

---

1. Појмови из области математике који се користе у електротехници, Термини и дефиниције, ЈУС Н. А0. 101, 101-02-01.
2. Webster Dictionary, Merriam-Webster OnLine.
3. IEV, IEC 60050: part 351-21, Control technology/General terms, variables and signals, 351-21-52
4. J.D. Sherrick, Concepts in Systems and Signals, Prentice Hall, 2005.
5. М. Стојић, Континуални системи аутоматског управљања, Грађевинска књига, 1973.
6. International Electrotechnical Commission, International Electrotechnical Vocabulary, 60050.
7. <http://stf.iec.ch/glossary>.
8. Electropedia, The World's Online Electrotechnical Vocabulary, <http://www.electropedia.org>.
9. Електрична и магнетска кола, Термини и дефиниције, ЈУС Н. А0. 131.
10. IEV, IEC 60050: part 112, Quantities and units.
11. The International System of Units (SI), BIPM, 8.th edition, 2006.
12. S. Glasston, Atomska energija, Naučna knjiga, 1960, s. 105.
13. Реф. 9, 131-03-06.
14. Реф. 3, 101-03-06.
15. М. Млађеновић, Развој физике. механика и гравитација, Грађевинска књига.
16. Реф. 3, 351-21-53
17. IEV, IEC 60050: part 702-04, Oscillations, signals and related devices/Signals, General terms, 702-04-02.
18. Реф. 3, 351-21-54.
19. Реф. 15, 702-04-05.
20. I.S.Gonorovsky, Radio circuits and signals, MIR Publishers, 1981, 21.
21. П.Бошњаковић, Нови конвертори напона у учестаност на бази интеграције, магистарски рад, 1978.
22. IEV, IEC 60050: part 151-11: Electrical and magnetic devices/General, 151-11-27.
23. IEV, IEC 60050: part 351-23, Control technology/Structures of control systems, 351-23-01.
24. Реф. 24, 351-23-02.
25. IEV, IEC 60050: part 351-24, Control technology / Behaviour and characteristics of transfer elements, 351-24-01.
26. IEV, IEC 60050: part 131-15, Circuit theory / Two-port and n-port networks, 131-15-21.
27. Реф. 1, 101-02-04.
28. Реф. 1, 101-02-03.

“Елементи су основна тела која, пошто нису састављена ни из каквих других тела, или једна од других, сама су саставни делови... од којих су непосредно сачињена сложена тела и на која се ова могу коначно раставити”. [1]

*Robert Boyle*



## 2. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛОГНИХ ЕЛЕКТРОНСКИХ КОЛА

Електромагнетски процеси у електронским уређајима и системима описују се помоћу појмова: напон, струја, снага и енергија. Напон представља разлику потенцијала<sup>1</sup> крајева неког елемента. Електрична струја описује брзину преношења наелектрисања кроз тај елемент. Електрична снага је брзина преношења енергије, односно брзина њеног претварања у други облик. Енергија је величина која изражава способност физичког система да врши рад. По својој природи све ове величине су дефинисане одговарајућим интегралима<sup>2</sup>. Напон између две тачке електричног поља, на пример, представља скаларну величину, која је једнака линијском интегралу вектора електричног поља  $E$ , од једне до друге тачке, дуж задате путање:

$$U_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.1)$$

У посебном, за практичну електротехнику најважнијем случају, вредност напона  $U_{AB}$  не зависи од путање и једнака је разлици потенцијала посматраних тачака<sup>3</sup>:

$$U_{AB} = V_A - V_B. \quad (2.2)$$

У овом поглављу разматрају се основни појмови који се при анализи и пројектовању аналогних електронских кола и система користе за описивање њихових својстава, као и појава које се у њима дешавају. Објашњења су заснована на дефиницијама које су дате у речницима Међународне електротехничке комисије [2]. Анализирана су својства савршених (идеалних) електричних елемената, као и својства неких основних кола, образованих од таквих елемената. Посебна пажња посвећена је опису стварних елемената. Објашњен је појам еквивалентног кола. У сажетом облику описаны су електронски трополни појачавачки елементи и њихови основни спојеви.

<sup>1</sup> Потенцијал електричног поља је скаларна величина која одражава енергијско стање простора. Електрички потенцијал бројно је једнак електростатичкој потенцијалној енергији коју поседује јединична количина наелектрисања у датој тачки поља.

<sup>2</sup> Интегралне електромагнетске величине (*integral quantity*) дефинисане су линијским, површинским или запреминским интегралом неке од величине придржаних електромагнетском пољу, као што су јачина електричног поља (*electric field strength*), јачина магнетског поља (*magnetic field strength*) и магнетска индукција (*magnetic induction, magnetic flux density*).

<sup>3</sup> Такво поље се назива “конзервативно поље”.

## 2.1 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

Област електротехнике, која се бави изучавањем система у којима су електричне и магнетске појаве описане величинама као што су електрични напон, електрична струја и магнетски флукс, назива се теорија кола (*circuit theory*) [3]. У посебном делу ове области проучава се топологија<sup>4</sup> електричних мрежа<sup>5</sup> [4].

У најопштијем смислу, под појмом “коло” (*circuit*) подразумева се скуп повезаних елемената<sup>6</sup> [5]. Електрично коло (*electric circuit*) представља скуп елемената (уређаја или средина) у којима могу да постоје електричне струје [6]. Са становишта теоријске анализе, елемент електромагнетског кола је модел који садржи једну или више релација између електричних величина [7]. Елемент електричног кола (*electric circuit element*) је такав елемент чији модел садржи само електричне величине, а електрично коло је коло које се састоји само од таквих, електричних елемената [8]. Елемент који је описан само једним параметром назива се савршени елемент. Елементи електричног кола имају најмање два краја намењена за спајање са другим елементима. Тачка одређена за повезивање (спајање) са другим елементима представља прикључак (*terminal*).

Елемент који има само два прикључка назива се двополни<sup>7</sup> елемент (*2-terminal circuit element*) [9]. Крајева може бити и више. Скуп од два краја, такав да су струје у њима једнаке по интензитету, а супротних смерова, представља приступ (*port*), преко којег се у електричном погледу приступа елементу. Елемент не може да има везе са другим елементима осим преко својих приступа, кроз које прима или одашиље сигнале или енергију [10].

У најопштијем случају, елемент са два прикључка графички се представља правоугаоником (слика 2.1.a). На прикључцима се посматрају две величине: електрични напон  $u$  и електрична струја  $i$ . На основу њих одређује се снага којом елемент разменjuје енергију са другим елементима, са којима је повезан:

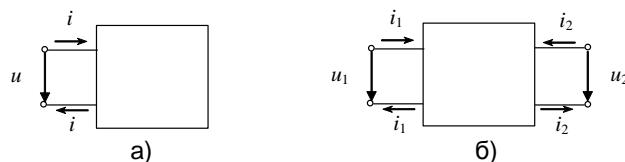
$$p = ui . \quad (2.3)$$

<sup>4</sup> Топологија мрежа (*network topology*) проучава распоред и међусобне везе савршених елемената који образују електричну мрежу. Назив потиче од грчких речи *tópos*, место, и *logia* наука.

<sup>5</sup> У теорији кола, мрежа (*network*) је скуп повезаних елемената посматран као целина која се може представити гранама и чворовима. Грана (*branche*) је део мреже, састављен од једног или више елемената, посматран као мрежа са два краја. Чвор (*node*) је крајња тачка мреже или тачка спајања две или више грана. Понекад се под називом “електрична мрежа” подразумева скуп тако повезаних елемената да се струја у елементима не може да успостави уколико се не изврши повезивање крајева мреже. Таква веза елемената не представља електрично коло.

<sup>6</sup> Под називом “елемент” у овој књизи се, у смислу “хемијске” дефиниције коју је дао ирски научник Роберт Бојл (*Robert Boyle*, 1627-1691), подразумева саставни део електронског уређаја (система) који не може да се подели на мање делове, а да не изгуби своја карактеристична својства. Назив потиче од лат. *elementum*, основни, прапочетни састојак.

<sup>7</sup> Назив двопол, који се у литератури на српском језику користи за елемент са два краја, преузет је из немачког језика (*elementarer Zweipol*). Пол (*Anschlußpunkt*, *Pol*) електричног елемента (кола) је тачка одређена за прикључивање (везу са другим елементима).



Слика 2.1. Елемент са једним и са два приступа

Електрични елементи са једним приступом су: извор напона, извор струје, отпорник, кондензатор, калем и диода. Електронске цеви са решетком (*electronic tube*), биполарни транзистори (*bipolar junction transistor, BJT*) и транзистори са ефектом поља (*field junction transistor, FET*) су елементи са два или више приступа.

Пасивни елемент електричног кола је елемент за који интеграл електричне снаге не може да буде негативан током било којег временског интервала који обухвата тренутак првог снабдевања енергијом [11]. Пасивно електрично коло садржи само пасивне елементе. Они могу да се представе помоћу три карактеристична параметра:

- отпорност (*resistance*) симболизује процес неповратног претварања електричне енергије у неки други облик<sup>8</sup>.
- индуктивност (*inductance*) симболизује процес нагомилавања магнетске енергије.
- капацитивност (*capacitance*) симболизује процес нагомилавања електростатичке енергије.

Пасивни електрични елементи су отпорник (*resistor*), кондензатор (*capacitor*) и калем (*induktor*). Елементи који поседују својство нагомилавања енергије и могу, касније, да је пренесу другим елементима са којима су повезани, називају се “реактивни елементи” (*reactive*<sup>9</sup>). Они утичу на динамичка својства електронских кола. Графички симболи, којима се у овој књизи представљају пасивни елементи са два краја приказани су на слици 2.2.



Слика 2.2. Пасивни елементи

Неки елементи могу да снабдевају енергијом друге елементе са којима су повезани. Елемент који има способност да неки други облик енергије претвара у електричну енергију назива се извор (*source*). У односу на коло са којим је повезан (у којем се налази), извор напона је активни елемент<sup>10</sup> са два крају карактеристичну величину представља разлика потенцијала његових krajeva. Извор струје је активни елемент код којег електрична струја представља карактеристичну величину.

<sup>8</sup> Елементи у којима се електрична енергија претвара у механичку, топлотну или светлосну представљају “оптерећење” (*load*).

<sup>9</sup> При синусној побуди реактивног елемента, интеграл електричне снаге током једног периода једнак је нули.

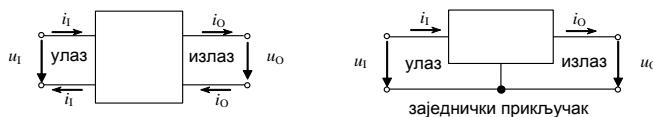
<sup>10</sup> У тероји кола, “активни елемент” се дефинише као елемент који није пасиван.

Основни графички симбол којим се у овој књизи представљају електрични извори је круг (слика 2.3). Додатне ознаке указују о ком извору је реч.

Савршени извор напона је такав (активни) елемент код којег напон између приступних крајева не зависи од струје која протиче кроз грану у којој се елемент налази. Савршени извор струје је активни елемент код којег струја, која кроз њега протиче, не зависи од напона између његових крајева.

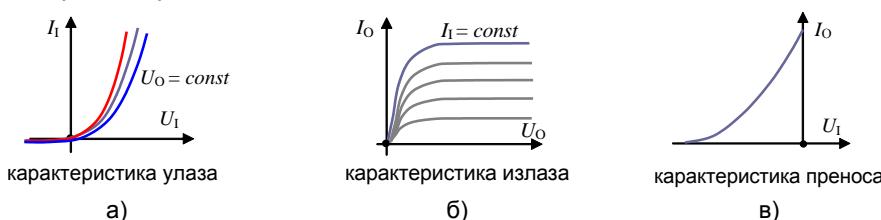
У електроници, елементи који могу да неком електричном колу, са којим су повезани, проследе енергију већу од енергије коју су преузели из кола које управља њиховим стањем називају се "активни елементи". Такви елементи имају најмање два приступа.

Графички приказ електричног елемента са два приступа типа улаз-излаз, са назначеним референтним смеровима за напоне и струје, дат је на слици 2.4.а. У највећем броју случајева улазни ( $i_1$ ) и излазни ( $i_0$ ) напон су дефинисани (или се могу дефинисати) у односу на заједничку референтну тачку. Тада елемент са два приступа може да има само три прикључка (слика 2.4.б).



Слика 2.4. Елемент са два приступа типа улаз-излаз

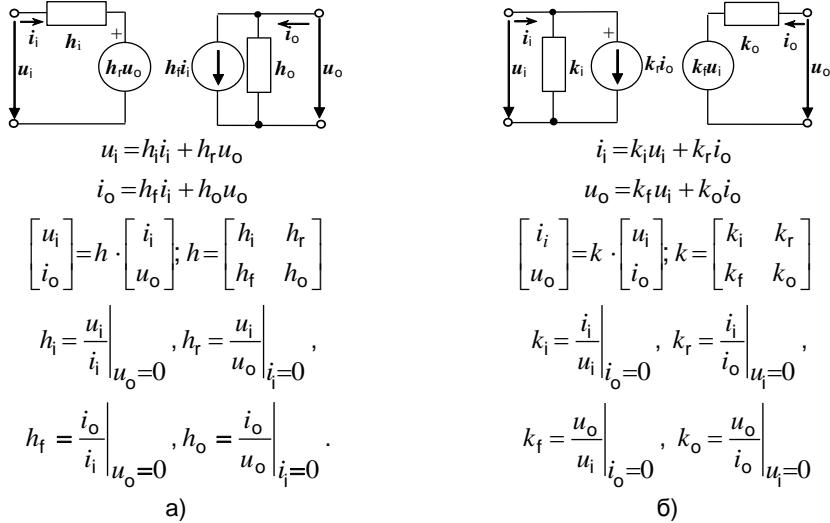
Графички приказ односа између две величине којима се описује стање електричног елемента типа улаз-излаз представља његову статичку карактеристику. Притом, једна од две преостале величине може да представља параметар. На слици 2.5.а и б приказане су, као пример, улазна и излазна карактеристика биполарног транзистора у споју са заједничким емитором. На слици 2.5.в приказана је карактеристика преноса спојног транзистора са ефектом поља.



Слика 2.5. Основне карактеристике елемента са два приступа

Статичка карактеристика електронских елемената је, по природи процеса који се у њима одвијају, нелинеарна. Само у посебном случају, у доволјно малој околини изабраног почетног стања система, образованог од таквих елемената, зависност између струја и напона се може представити линеарним једначинама чији је општи алгоритам решавања добро познат. Анализа одзива електронског кола на побуду малим сигналом (*small-signal response*) заснива се поступцима развијеним у оквирима теорије линеарних динамичких система.

Модел којим се описује понашање кола коришћењем савршених елемената назива се еквивалентно<sup>11</sup> коло [12]. У околини изабране радне тачке, нелинеарни електронски елементи представљају се линеаризованим моделима<sup>12</sup>. На слици 2.6. приказани су најчешће коришћени линеарни модели електричних елемената/кола са једним улазом и једним излазом. Ови модели се називају хибридни јер параметри модела имају различиту физичку природу.



Слика 2.6. Хибридни модели електронског кола типа улаз-излаз

На основу дефиниционих једначина  $k$ -параметара (слика 2.6.б) следи, на пример, да параметар  $k_f$  представља количник излазног и улазног напона при отвореним излазним крајевима:

$$k_f = \frac{u_o}{u_i} \Big|_{i_o=0}. \quad (2.4)$$

Уобичајено је да се количник излазног и улазног напона назива појачање напона (*voltage gain*), независно од његове вредности и знака [13].

На основу дефиниционих једначина  $h$ -параметара<sup>13</sup> (слика 2.6.а), следи да параметар  $h_f$  представља количник излазне и улазне струје при краткоспојеним излазним крајевима:

$$h_f = \frac{i_o}{i_i} \Big|_{R_L=0} = \frac{i_o}{i_i} \Big|_{u_o=0}. \quad (2.5)$$

Уобичајено је да се количник излазне и улазне струје назива појачање струје (*current gain*).

<sup>11</sup> Од лат. *aequi-valens*, једнаковредан, једнаке вредности.

<sup>12</sup> Уобичајено је да се таква апроксимација назива "модел за мале сигнале".

<sup>13</sup> Произвођачи биполарних транзистора користе хибридне параметре при описивању њихових система.

## 2.2 ПАСИВНИ ЕЛЕМЕНТИ

Савршени пасивни елементи са једним приступом могу да се сврстају у три категорије. Резистивни елемент са два прикључка (*resistive two-terminal element*) је пасивни елемент који може да се опише функционалном зависношћу која повезује напон између прикључака и струју кроз елемент. Електрична енергија абсорбована таквим елементом не може да се појави као енергија коју елемент враћа у коло [14]. Резистивни елементи су статички елементи.

Капацитивни елемент са два прикључка (*capacitive two-terminal element*) је пасивни елемент којим се остварује сакупљање електростатичке енергије. Индуктивни елемент са два прикључка (*inductive two-terminal element*) је пасивни елемент којим се остварује сакупљање магнетске енергије. Способност сакупљања енергије се испољава као својство инерције и утиче на динамичка својства кола у којем се налазе. Такви елементи су реактивни. Математички модел савршеног реактивног елемента је диференцијална једначина првог реда.

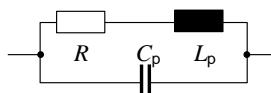
### 2.2.1 РЕЗИСТИВНИ ЕЛЕМЕНТИ

Електрична отпорност резистивног елемента са два прикључка је дефинисана као количник односа електричног напона и електричне струје:

$$R = \frac{u_{AB}(t)}{i(t)}, \quad (2.6)$$

при чему је референтни смер струје од прикључка А према прикључку В. Отпорност физичког елемента не може да буде негативна<sup>14</sup>. У најједноставнијем случају овај количник не зависи од вредности напона и струје. Израз 2.6 представља математички модел савршеног елемената који се назива отпорник<sup>15</sup>. Савршени отпорник је линеарни резистивни елемент.

У стварним условима, елементи са савршеним својствима не могу да се произведу. Модел којим се понашање стварног електронског елемента описује коришћењем савршених елемената представља његово еквивалентно коло. Стварни отпорник се представља еквивалентним електричним колом која садржи савршени отпорник и "паразитне" елементе. Калем у колу приказаном на слици 2.7 симболизује индуктивност проводника. Кондензатор симболизује појаве које могу да се представе као паразитна капацитивност.



Слика 2.7. Еквивалентно коло стварног отпорника

<sup>14</sup> Са становишта електронике, ово важи само за пасивне елементе (кола). Активно електронско коло, узимајући енергију из спољашњег извора са којим је повезано, може, у односу на одговарајући пар улазних прикључака, да се "понаша" као негативна отпорност.

<sup>15</sup> Савршени отпорник је дефинисан као елемент са два прикључка код којег је количник напона и струје позитиван и сталан [13]. У њему се електрична енергија претвара у топлоту, а нема нагомилавања електростатичке или магнетске енергије.

Нелинеарни резистивни елемент је диода. Диода је пасивни елемент са два краја (једним приступом) који се одликује изразито нелинеарном везом напона између крајева диоде и струје која кроз њу протиче. Независно од природе процеса преношења наелектрисања кроз диоду, њено основно својство је несиметрична проводност, зависна од смера струје. Савршена (идеална) диода је елемент са два краја чија је отпорност једнака нули, за смер струје од аноде према катоди (представља кратак спој), односно бесконачно велика, за супротан смер преношења наелектрисања (диода тада представља прекид) [15]. Другим речима, напон између прикључних крајева је једнак нули када струја тече од прикључка који се назива анода (A) ка прикључку који се назива катода (K), а струја кроз диоду је једнака нули када се анода налази на нижем потенцијалу од катоде. Математички модел савршене диоде представљају релације:

$$I_{AK} = 0 \text{ када је } i \geq 0, \quad (2.7)$$

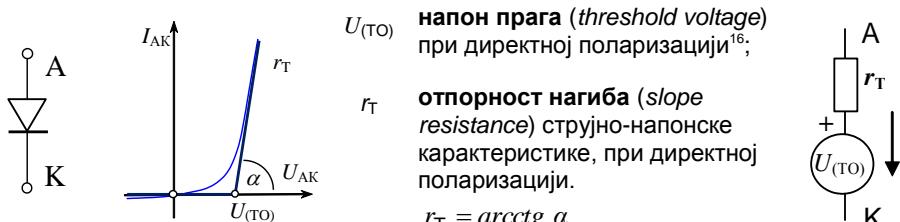
када диода води (*on-state*), и

$$i = 0 \text{ када је } u_{AK} \leq 0, \text{ када диода не води (*off-state*)}. \quad (2.8)$$

Референтни смер струје је од аноде ка катоди. На слици 2.8 приказани су графички симбол диоде,  $U$ - $I$  карактеристика и линеаризовани модел полуправничке диоде (*PN*-споја), који може да се представи релацијама:

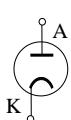
$$I_{AK} = 0 \text{ када је } U_{AK} \leq U_{(TO)}, \quad (2.9)$$

$$U_{AK} = U_{(TO)} + r_T I_{AK}; \text{ за } I_{AK} > 0. \quad (2.10)$$



Слика 2.8. Карактеристика и линеаризовани модел стварне диоде.

Са становишта математичке анализе, еквивалентно коло савршене диоде у проводном стању представља несавршени извор напона<sup>16</sup>  $U_{(TO)}$  чија је унутрашња отпорност  $r_T$  [16].



Енглески физичар Флеминг (*Sir John Ambrose Fleming*, 1849-1945) развио је и потом патентирао (1904), прву електронску цев (*thermionic valve, vacuum tube*) са две електроде која је имала усмртвачко својство (*Fleming diode valve, kenotron*). Примењена у бежичној телеграфији и телефонији означила је почетак ере телекомуникација.



Флеминг

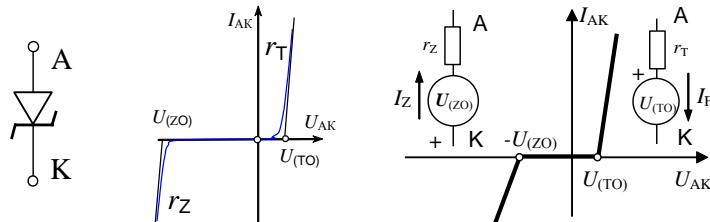
<sup>16</sup> Под поларизацијом се овде подразумева успостављање одговарајућег напона (*bias voltage*) тако да се радна тачка постави у одређеном делу радне карактеристике. Диода је директно поларисана ако је напон анода-катода позитиван.

<sup>17</sup> Математичку еквиваленцију не треба схватати као физичку. Диода је пасивни резистивни елемент.

При великим вредностима напона инверзне поларизације полупроводничке диоде функција  $I_{AK}(U_{AK})$  значајно одступа од аналитичког модела. Нагиб  $U-I$  карактеристике постаје веома велики (динамичка отпорност је мала). Ова појава се назива пробој (*breakdown*). Диоде намењене за рад у стању пробоја (*breakdown diode*) називају се Ценер-диоде (*Zener diode*). Њихова карактеристика и линеаризовани модел приказани су на слици 2.9.

$$U_{AK} = \begin{cases} U_{(TO)} + r_T I_{AK} & \text{за } I_{AK} > 0 \\ -U_{(ZO)} + r_Z I_{AK} & \text{за } I_{AK} < 0 \end{cases}, \quad (2.11)$$

$$I_{AK} = 0 \text{ за } -U_{(ZO)} \leq U_{AK} \leq U_{(TO)}.$$



Слика 2.9. Карактеристика и линеаризовани модел Ценер-диоде.

## 2.2.2 КАПАЦИТИВНИ ЕЛЕМЕНТ

Капацитивност елемента са два приклучка,  $A$  и  $B$ , дефинисана је као количник унетог наелектрисања и напона  $u_{AB}$  између приклучака:

$$C = \frac{q}{u_{AB}}. \quad (2.12)$$

Наелектрисање је позитивно, ако је унето струјом која тече у смеру од тачке  $A$  ка тачки  $B$ , односно негативно, у супротном случају [17]. Капацитивност не може да буде негативна. На основу дефиниционе једначине следи израз:

$$C = \frac{i_{AB}(t)}{\frac{du_{AB}}{dt}}, \quad (2.13)$$

који је у документима Међународне електротехничке комисије, неко време, служио као основ за дефиницију капацитивности [18].

Израз 2.13 представља математички модел савршеног елемента који се назива кондензатор<sup>18</sup>. Савршени кондензатор је линеарни капацитивни елемент. На основу дефиниције следи да је брзина промене напона између крајева савршеног кондензатора сразмерна струји која кроз њега пролази:

$$\frac{du_{AB}}{dt} = \frac{1}{C} i_{AB}(t). \quad (2.14)$$

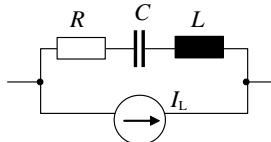
За напон између крајева кондензатора кроз који противе променљива струја  $i$  важи интегрални закон:

<sup>18</sup> Савршени кондензатор је елемент код којег је количник наелектрисања и напона позитиван и сталан. У њему се електрична енергија нагомилава у облику електростатичке енергије.

$$u_{AB}(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_{AB}(t) dt + U_0, \quad (2.15)$$

где је  $U_0$  вредност напона  $u$  у почетном тренутку  $t = 0$ . То значи да, у реалним условима, напон између крајева кондензатора не може тренутно да се промени<sup>19</sup>.

Еквивалентно коло стварног кондензатора садржи савршени кондензатор и “паразитне” елементе: индуктивност и отпорност (слика 2.10). Калем у овом колу симболизује ефекат индуктивности електрода и прикључака. Отпорност  $R$  потиче од Џулових губитака<sup>20</sup> у прикључцима. Појава да кроз кондензатор тече струја и када је напон између његових прикључака сталан, моделује се извором струје “цурења”  $I_L$ . Овај ефекат је нарочито изражен код електролитских кондензатора.



Слика 2.10. Еквивалентно коло стварног кондензатора

### 2.2.3 ИНДУКТИВНИ ЕЛЕМЕНТИ

Индуктивност елемента са два прикључка може да се дефинише на основу закона индукције. При протицању променљиве електричне струје кроз ваљкасто обликован проводник<sup>21</sup> између његових крајева појављује се напон који је сразмеран је брзини промене струје:

$$u_{AB}(t) = L \frac{di_{AB}}{dt}, \quad (2.16)$$

где је  $u_{AB}$  напон између прикључака, а  $i_{AB}$  струја која тече кроз елемент у смеру од тачке  $A$  ка тачки  $B$ . Сачинилац сразмере  $L$  је величина која се назива индуктивност, а зависи од броја навојака, димензија елемената, као и својства средине у којој се налази. На основу једначине 2.15 следи:

$$L = \frac{u_{AB}(t)}{\frac{di_{AB}}{dt}}. \quad (2.17)$$

Овај израз је, неко време, у документима Међународне електротехничке комисије служио као основ за дефиницију појма “индуктивност” [19]. Она не може да буде негативна. Једначина 2.15 представља математички модел савршеног елемената који се назива

<sup>19</sup> На основу једначине 2.14 следи да тренутна промена напона може да се оствари само ако је струја кроз кондензатор бесконечно велика, а то је физички немогуће. Овај закључак се у теорији електричних кола назива “Теорема о непрекидности напона између крајева кондензатора”.

<sup>20</sup> При протицању електричне струје кроз проводник електрична енергија се неповратно претвара у топлоту. Ова појава се назива “Џулов ефекат”, а губитак енергије дисипација (лат. *dissipatio*, разбазирање, расипање).

<sup>21</sup> Такав елемент назива се соленоид (грч. *sōlēn*, цев), IEC 151-12-32.

индуктивни калем<sup>22</sup> (*inductor*). Савршени калем<sup>23</sup> је линеарни елемент који симболизује појаву самоиндукције и има својство нагомилавања електромагнетске енергије [20].

Калем је индуктивни елемент са једним приступом. (*inductive two-terminal element*). Два магнетски спретнута калема образују елемент са два приступа који се назива трансформатор (*transformer*). Савршени трансформатор је пасивна мрежа без губитака, за коју је тренутна вредност напона (струје) на једном приступу сразмерна тренутној вредности напона (струје) на другом приступу [21]:

$$\frac{u_1}{u_2} = -\frac{i_2}{i_1} = m. \quad (2.18)$$

У општем случају, трансформатор може да има више приступа (*inductive m-terminal-pair element*).

Појаву која се данас назива “електромагнетска индукција” открио је Фарађеј (*Michael Faraday*, 1791-1867). Генијални експериментатор је посветио десет година истраживања да би решио задатак који је сам себи поставио: “Претворити магнетизам у електричност”. Успостављања електричне струје под дејством страног магнетског поља назвао је “индукција” (грч. *inductio*, увођење, изазивање).



Фарађеј

## 2.3 АКТИВНИ ЕЛЕМЕНТИ

Еквивалентно коло активних елемената садржи извор електричне енергије [22]. Снабдевање других елемената (кола) електричном енергијом није једини задатак који извори напона и струје обављају. У електронским уређајима за обраду електричних сигнала користе се извори референтног напона који представљају материјализовану меру јединице електричног напона. У општем случају, карактеристична величина извора може да буде функција времена. Тада извор представља генератор<sup>24</sup> напонског односно струјног сигнала (*signal generator*) [23].

Карактеристична величина извора може да зависи од неке друге, екстерно дефинисане величине. То су управљани извори (*controlled source*), за разлику од независних извора напона и струје (*independent source*) [24].

### 2.3.1 ИЗВОРИ НАПОНА

У ужем смислу, извор напона (*voltage source*) је активни елемент у којем се механичка, топлотна, светлосна или хемијска енергија, одговарајућим процесом који се одвија у извору као електричном генератору, претвара у

<sup>22</sup> Назив потиче од облика овог елемента: ваљак са спирално намотаним проводником (грч. *kálamos*, трска за писање). У употреби су и називи “завојница” и “индуктивитет”.

<sup>23</sup> Према важећој, међународно усаглашеној дефиницији, савршени калем (*ideal inductor*) је елемент код којег је количник магнетског флукса и електричне струје позитиван и сталан (IEV IEC 131-12-18). У њему се електрична енергија нагомилава у облику магнетске енергије, а нема губитака.

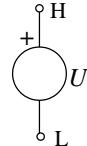
<sup>24</sup> Лат. *generator*, родилац, произвођач, стваралац, правилац.

електричну енергију, која се преноси елементима електричне мреже са којом је повезан. При анализи електронских кола, извор напона је елемент са једним приступом који остале елементе, у електричном колу у којем се налази, снабдева (напаја) електричном енергијом.

Карактеристичну величину извора напона представља разлика потенцијала између његових прикључака,  $H$  (high) и  $L$  (low), слика 2.11:

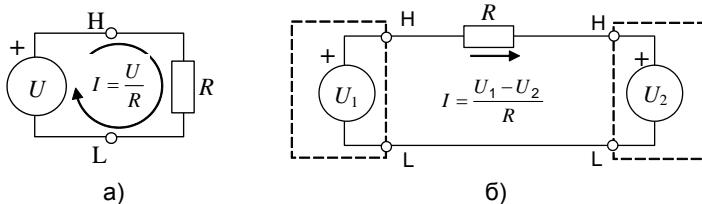
$$U = U_{HL} = V_H - V_L. \quad (2.19)$$

У општем случају, напон  $u_{HL}$  може бити променљив.



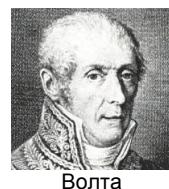
Слика 2.11. Графички симбол извора напона

Када извор сталног напона напаја енергијом неки потрошач<sup>25</sup>, са којим је повезан, струја кроз извор тече у смеру од прикључка означеног са  $L$  према прикључку означеном са  $H$  (слика 2.12.а). Када у колу постоји више извора, смер струје кроз неки извор одређен је стањем у којем се коло налази<sup>26</sup>. Ако је у колу приказаном на слици 2.12.б  $U_1$  веће од  $U_2$ , кроз извор напона  $U_1$  струја тече од прикључка  $L$  ка прикључку  $H$ , а кроз извор напона  $U_2$  од прикључка  $H$  ка прикључку  $L$ .



Слика 2.12. Извор напона

Италијански физичар Волта (*Alessandro Volta*, 1745-1827) је развио први трајни електрични извор електричног напона (Волтин стуб) што је убрзalo истраживања електричних појава. У знак признања за допринос развоју науке о електрицитету Наполеон га је прогласио за грофа (1810).



Волта

### 2.3.1.1 САВРШЕНИ ИЗВОР НАПОНА

Савршени (идеални) извор напона је активни елемент са једним приступом код којег напон између прикључака не зависи од струје у грани у којој се извор налази (слика 2.13.а):

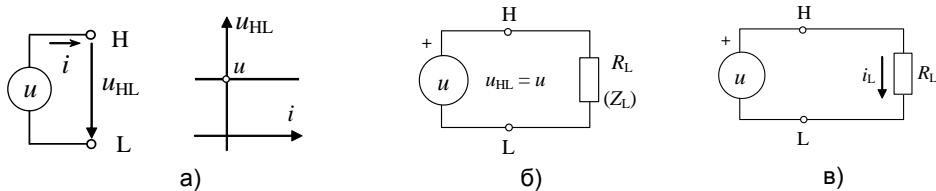
$$\frac{\partial u_{HL}}{\partial i} \equiv 0. \quad (2.20)$$

<sup>25</sup> Терет, оптерећење (*load*) којем се енергија преноси.

<sup>26</sup> Треба имати у виду да, зависно од конструкције стварног (физичког) извора, протицање струје кроз извор у смеру од прикључка  $H$  ка прикључку  $L$  може да има нежељене (штетне) последице.

Савршени извор напона је такав извор електричне енергије, код којег напон  $u_{HL}$  не зависи од вредности отпорности оптерећења,  $R_L$ , којем се та енергија преноси (слика 2.13.б):

$$\frac{\partial u_{HL}}{\partial R_L} = 0. \quad (2.21)$$



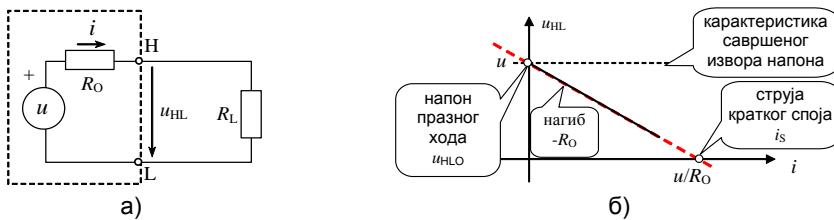
Слика 2.13. Савршени извор напона

Другим речима, напон  $u_{HL}$ , који постоји између прикључака савршеног извора напона, не зависи од вредности струје  $i_L$  која протиче кроз оптерећење које тај извор напаја (слика 2.13.в). Струја  $i$  је последица деловања напона  $u_{HL}$ . Ако оптерећење представља "чисту" отпорност  $R_L$  важи:

$$i = \frac{u_{HL}}{R_L}. \quad (2.22)$$

### 2.3.1.2 НЕСАВРШЕНИ ИЗВОР НАПОНА

Стварни извори напона су несавршени: напон између прикључака извора зависи од струје која кроз њега протиче. Они могу да се представе редном везом савршеног извора напона  $u$ , независног од свих струја и напона у колу у којем се налази, и једног отпорника.



Слика 2.14. Несавршени извор напона

Вредност напона  $U_{HL}$  на крајевима извора, зависи од односа унутрашње (излазне) отпорности  $R_O$  и отпорности прикљученог оптерећења  $R_L$ . Уколико је струја  $i$  коју извор даје, већа (отпорност  $R_L$  мања), одступање од "савршено" вредности  $u$  је веће:

$$u_{HL} = u - R_O i. \quad (2.23)$$

Унутрашња (сопствена) отпорност,  $R_O$ , представља основни показатељ квалитета извора напона. Она одређује нагиб статичке карактеристике извора напона (слика 2.14.б):

$$R_O = -\frac{\partial u_{HL}}{\partial i}. \quad (2.24)$$

У општем случају зависност излазног напона од излазне струје моделује се пасивним елементом који представља импедансу (излазна импеданса).

### 2.3.2 ИЗВОРИ СТРУЈЕ

Извор струје (*current source*) је активни елемент са једним приступом који електрично коло, у којем се налази, снабдева (напаја) електричном енергијом. Карактеристичну величину извора струје представља брзина преношења наелектрисања кроз грану у којој се извор налази. Уобичајен графички симбол овог елемента је круг са стрелицом која означава референтни смер струје (слика 2.15). У општем случају, струја  $i$  може бити променљива величина чија је зависност од времена одређена префинисаном функцијом. Струја коју извор даје истиче из прикључка који је означен са H (*high*), пролази кроз спољашње коло и враћа се кроз прикључак L (*low*).

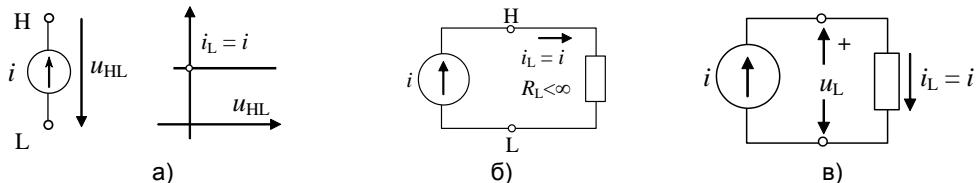


Слика 2.15. Графички симбол извора струје

#### 2.3.2.1 САВРШЕНИ ИЗВОР СТРУЈЕ

Сavrшени (идеални) извор струје је активни елемент са једним приступом код којег струја која кроз њега протиче, не зависи од напона  $u_{HL}$  између његових прикључака (слика 2.16.a):

$$\frac{\partial i}{\partial u_{HL}} = 0. \quad (2.25)$$



Слика 2.16. Савршени извор струје

Савршени извор струје је такав извор електричне енергије, код којег струја  $i_L$  коју даје не зависи од отпорности  $R_L$  оптерећења којем се та енергија преноси (слика 2.16.б):

$$\frac{\partial i_L}{\partial R_L} = 0. \quad (2.26)$$

Другим речима, савршени извор струје је такав извор електричне енергије, код којег струја коју даје,  $i_L$ , не зависи од напона  $u_L$  између крајева оптерећења које тај извор напаја енергијом (слика 2.16.в).

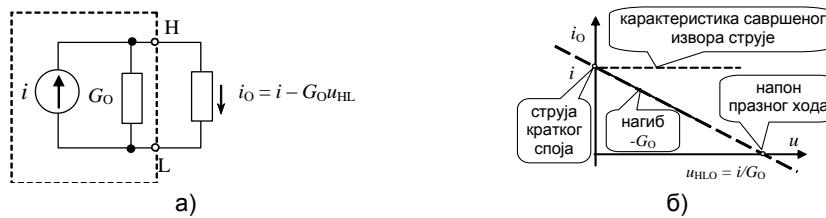
Напон је  $u_L$  последица деловања струје  $i_L$  који даје извор струје. Ако оптерећење представља "чисту" отпорност  $R_L$ , важи:

$$u_L = R_L i_L. \quad (2.27)$$

### 2.3.2.2 НЕСАВРШЕНИ ИЗВОР СТРУЈЕ

Стварни извори струје су несавршени: струја коју извор даје зависи, у мањој или већој мери, од разлике потенцијала прикључака *H* и *L*. Несавршени извор струје је активни елемент који може да се представи паралелном везом савшеног извора струје  $i$ , независног од свих струја и напона у колу у којем се налази, и једног пасивног елемента ( слика 2.17.а).

Вредност струје  $i_O$  коју извор даје, зависи од вредности унутрашње проводности извора,  $G_O$ , и напона између његових крајева,  $u_{HL}$ . Уколико је напон  $u_{HL}$  већи, (односно уколико је отпорност оптерећења већа) одступање од "идеалне" вредности  $i$  веће.



Слика 2.17. Несавршени извор струје

Унутрашња проводност извора струје,  $G_O$ , која одређује нагиб статичке карактеристике извора струје ( слика 2.17.б):

$$G_O = -\frac{\partial i_O}{\partial u_{HL}}, \quad (2.28)$$

обично се назива "излазна проводност" извора струје.

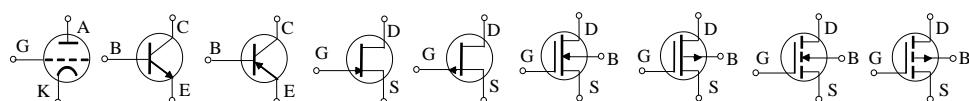
## 2.4 ПОЈАЧАВАЧКИ ЕЛЕМЕНТИ

Ефекат појачања у електроници је заснован на утицају који електрично поље има на својства средине кроз коју се остварује кретање носилаца наелектрисања. Деловањем улазног напона утиче се на вредност излазне струје тако да она представља слику улазне величине. То омогућује да се енергија која се преноси оптерећењу узима из неког другог извора, а не из извора сигнала који носи информацију.

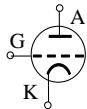
Основно обележје појачавачког елемента је карактеристика преноса, која описује како улазна величина (напон  $u_I$ ) утиче на вредност излазне величине (струје  $i_O$ ):

$$i_O = i_O(u_I). \quad (2.29)$$

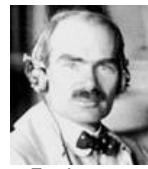
Носиоци наелектрисања у појачавачком елементу су електрони (електронске цеви, транзистори са ефектом поља *N*-типа), електрони и шупљине (биполарни транзистори) или само шупљине (транзистори са ефектом поља *P*-типа).



Слика 2.18. Основни појачавачки елементи

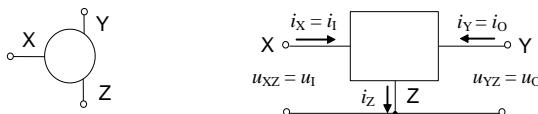


Први електронски трополни појачавачки елемент, вакуумску електронску цев са три електроде, конструисао је 1906. године америчанац Ли де Форест (*Lee de Forest, 1873-1961*). Његов проналазак (*audion*) је омогућио појачање радио сигнала, ширење и процват радиотехнике (подржан даљим развојем електронике).



Ли Форест

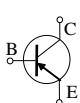
Независно од "механизма" рада, основни појачавачки елементи у електроници су елементи са три краја (слика 2.19). Улазни сигнал делује између управљачког прикључка (X) и једног од друга два прикључка (Y, Z). Другим речима, управљачка електрода (решетка, база, гејт) увек припада улазном колу. Под заједничким крајем (*common terminal*) подразумева се прикључак за чији потенцијал може да се сматра да не зависи од вредности улазне величине.



Слика 2.19. Трополни појачавачки елемент

У односу на назначене референтне смерове важи:

$$i_Z = i_X + i_Y. \quad (2.30)$$



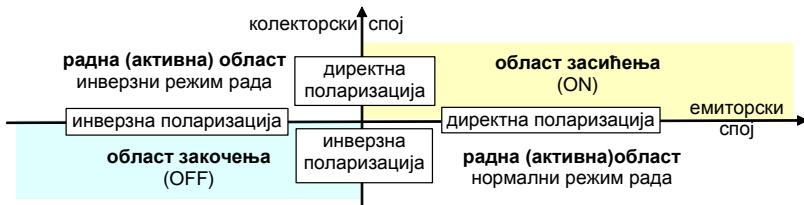
Американци Бардин (*J.Bardeen*), Бретен (*W.H.Brattain*) и Шокли (*W.Shockley*), након вишегодишњих истраживања својства полуправодника, дошли су до открића које им је донело Нобелову награду из физике (1956). Свој проналазак (*point-contact transistor*) заштитили су патентом 17. јуна 1948. године, претекавши притом, за непуна два месеца, немце Матареа и Велкера који су радили у истраживачким лабораторијама у Француској.



Да би електронски појачавачки елемент могао да оствари своју улогу потребно је да буду испуњени одређени услови. На пример, да би се постигао појачавачки ефекат помоћу спојног транзистора са ефектом поља (*JFET*), спој гејт-канал треба да буде инверзно поларисан<sup>27</sup> [25]. Да би биполарни транзистор (*BJT*) деловао као појачавачки елемент, спој база-емитор (емиторски спој) треба да буде поларисан у пропусном, а спој база-колектор (колекторски спој) у непропусном смеру (слика 2.20). Притом, напон база-емитор мора да буде већи од напона прага вођења емиторског споја. У таквим условима, вредност струје колектора одређена је првенствено напоном база-емитор.

Поларизација обезбеђује и жељене радне услове и енергију у излазном колу. Потребно је осигурати да се радна тачка елемента налази у одговарајућој области. Поларизација излаза је заправо напајање које треба да обезбеди потребну амплитуду и снагу сигнала на излазу. Појачавачки елемент се доводи у радне услове који омогућују жељени одзив на побуду која представља улазни (управљачки) сигнал.

<sup>27</sup> Под поларизацијом се, у општем смислу, подразумева додавање (суперпозиција) одређене вредности посматраној величини, са циљем промене односно остваривања одговарајућих радних услова.

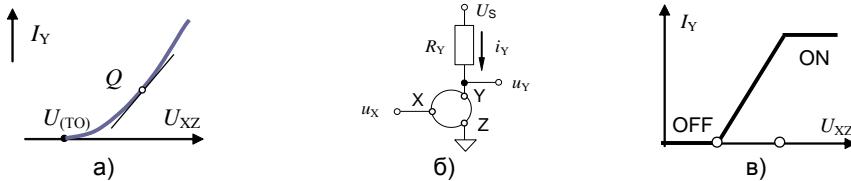


Слика 2.20. Области рада биполарног транзистора

На слици 2.21.а приказан је типичан облик карактеристике преноса трополног појачавачког елемента. Када је побудни напон мањи од неке граничне вредности  $U_{(TO)}$  (напона прага, *threshold voltage*) струја  $i_Y$  је занемарљиво мала. Да би се остварило линеарно пресликовање улаза на излаз потребно је да се мирна радна тачка налази на средини области у којој се може сматрати да је промена излазне струје,  $\Delta i_Y$ , сразмерна промени улазног напона,  $\Delta u_{XZ}$ , која ју је изазавала:

$$\Delta i_Y = g_m \Delta u_{XZ}, \quad (2.31)$$

где је  $g_m$  сачинилац сразмере, који представља својство појачавачког елемента, а назива се проводност преноса (транскондуктанса).



Слика 2.21. Карактеристика преноса

Као математички модел појачавачког елемента, за мале сигнале, користи се једначина:

$$i_Y = g_m u_{XZ}. \quad (2.32)$$

где је:

$$g_m = \frac{\partial i_Y}{\partial u_{XZ}}. \quad (2.33)$$

Уколико се радна тачка појачавачког елемента у колу приказаном на слици 2.21.б налази у линеарном делу карактеристике  $I_Y(U_{XZ})$ , промене улазног напона изазивају сразмерне промене излазног напона, али супротног знака:

$$u_Y = -R_Y i_Y = -g_m R_Y u_{XZ}, \quad (2.34)$$

Уколико је напон  $U_{XZ}$  мањи од граничне вредности која дефинише напон прага, струја  $I_Y$  је занемарљиво мала. Проводна веза између приклучака  $Y$  и  $Z$  је прекинута, појачавачки елемент је закочен (*OFF*). Напон  $U_Y$  је одређен стањем спољашњег кола. Са повећањем напона  $U_{XZ}$  струја  $I_Y$  се повећава, а напон  $U_Y$  смањује. Међутим, без обзира на вредност напона  $U_{XZ}$ , струја  $I_Y$  не може да буде већа од вредности  $U_S/R_S$ . Ако је напон  $U_{XZ}$  већи од неке граничне вредности напон  $U_Y$  је веома мали. Појачавачки елемент се понаша

као прекидач у проводном стању (OM). Линеаризована карактеристика кола приказана је на слици 2.21.в.

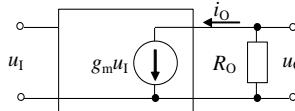
При квантификацији сложености електронских кола, некада су се бројали појачавачки елементи. Првобитно су то биле електронске цеви, а потом транзистори. На почетку технолошке револуције, комерцијално доступни интегрисани појачавачи су била скупи и због тога су примењивани у малом броју уређаја. Промене су, међутим, биле веома брзе. Током 1965. године на тржиште је пласирано око 600 000 интегрисаних кола по просечној ценам од 25 \$ по комаду (чипу). Следеће године продато је 2 300 000 интегрисаних кола, а просечна цена је смањена на 13 \$, да би већ 1970. године опала на 1,5 \$. У великому броју случајева, интегрисана кола су преузела улогу појачавачких елемената.

#### 2.4.1 МОДЕЛОВАЊЕ ЕЛЕКТРОНСКИХ ПОЈАЧАВАЧКИХ ЕЛЕМЕНТА

При анализи електронских кола активни (појачавачки) елементи се приказују помоћу линеаризованих модела елемента са два приступа. Улазну величину представља напон, а излазну струја. Савршени појачавачки елемент описан је само једном једначином (слика 2.22) :

$$i_O = g_m u_I . \quad (2.35)$$

у којој величина  $g_m$  (транскондуктанса) представља сачинилац преноса од улаза (напон  $u_I$  је напон  $u_{XY}$ ) до излаза (излазна струја  $i_O$  је струја  $i_Y$ ).



Слика 2.22. Савршени трополни појачавачки елемент као појачавач напона

Из једначине која важи за излазну петљу:

$$u_O = -i_O \cdot R_O = -g_m R_O u_I . \quad (2.36)$$

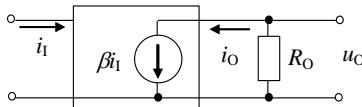
следи општи израз за појачање напона (*voltage gain*):

$$A_U = \frac{u_O}{u_I} = -g_m R_O \quad (2.37)$$

Величина  $A_U$  зависи од вредности сачиниоца  $g_m$ , који описује појачавачко својство елемента<sup>28</sup>, као и отпорности  $R_O$ .

Традиционално, савршени биполарни транзистори (BJT) моделују се као извори струје управљани струјом (слика 2.23). Овакав модел проистекао је из описа излазне карактеристике транзистора (слика 2.5.6). Излазни напон (напон колектор-емитор) у овом случају одређен је изразом:

$$u_O = -i_O \cdot R_O = -\beta R_O i_I . \quad (2.38)$$



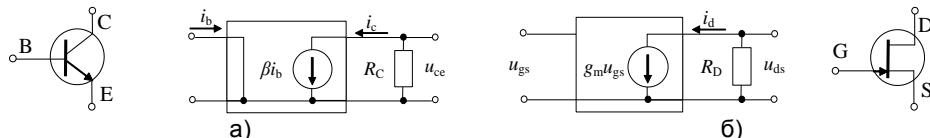
Слика 2.23. Трополни елемент – појачавач струје

<sup>28</sup> То је стрмина ( $\mu$ ) електронске цеви, односно проводност преноса ( $g_m$ ) транзистора са ефектом поља.

Сачинилац преноса овог кола одређен је изразом:

$$\frac{u_O}{i_i} = -\beta R_O. \quad (2.39)$$

Стварни појачавачки елементи могу да се описују једноставним моделом, са задовољавајућом тачношћу, само ако радна тачка активног елемента остаје у доволно малој околини изабране мирне радне тачке. Савршени модели транзистора, који важе за мале сигнале приказани су на слици 2.24.



Слика 2.24. Савршени транзистори

Еквивалентна кола стварних појачавачких елемената садржи и друге елементе. То су "несавршености" које утичу на тачност којом се улазна величина (сигнал) пресликава на излазну величину. Притом треба имати у виду да вредности ових параметара зависе од радних услова. На пример, улазна отпорност појачавачког елемента, којом он оптерећује извор сигнала, када су излазни крајеви елемента отворени (*open*):

$$R_{io} = \frac{u_i}{i_i} \Big|_{i_o = 0} = \frac{1}{k_i},$$

разликује се од вредности коју извор сигнала "види" када је излаз у кратком споју (*shorted*):

$$R_{is} = \frac{u_i}{i_i} \Big|_{u_o = 0} = h_i.$$

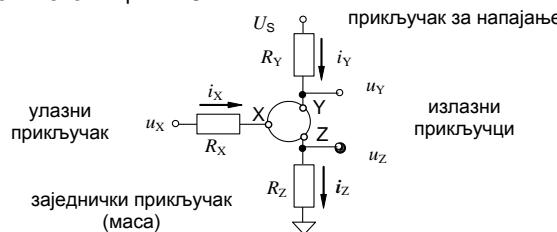
Прве полупроводничке трополне појачавачке елементе остварио је аустријски физичар Лилиенфелд (*Julius Edgar Lilienfeld, 1882 – 1963*) који своје патенте из 1925. (*Metal-semiconductor FET, MESFET*) и 1928. године (*metal-oxide-semiconductor FET, MOSFET*), није успео да комерцијализује. Немачки проналазач Хајл (*Oskar Heil*) патентирао је 1934. године своје решење (*FET*), али су тек десет година након другог светског рата развијени поступци који су омогућили почетак серијске производње. Теоријску раду транзистора са ефектом поља дао је Шокли.



Лилиенфелд

## 2.4.2 СПОЈЕВИ ПОЈАЧАВАЧКИХ ЕЛЕМЕНТА

Трополни појачавачки елемент се у највећем броју случајева повезује на начин приказан на слици 2.25.



Слика 2.25. Основни облик повезивања трополног појачавачког елемента

Прикључак  $X$  представља управљачку (улаznу) електроду. Ако се улаzна струја  $i_X$  (односно њене промене до којих долази услед деловања улаznог напона  $u_X$ ) може да занемари у односу на струје  $i_Y$  и  $i_Z$  (односно њихове променљиве компоненте  $i_y$  и  $i_z$ ), за назначене референтне смерове важи:

$$i_X \ll i_Z \Rightarrow i_Y \approx i_Z \Rightarrow \Delta i_Y = \Delta i_Z \Rightarrow i_y = i_z. \quad (2.40)$$

Са повећањем улаznог напона повећава се вредност струје  $i_Y$  што доводи до смањења напона на прикључку  $Y$ . Ако напон  $u_Y$  представља излаз, промена излазне величине има супротан знак од промене улаzне величине. Такав начин повезивања представља "инвертујући спој", јер се мења знак (обрће фаза) сигнала који се прослеђује.

Струја  $i_Z$  такође се повећава са повећањем улаznог напона, али то доводи до повећања напона на прикључку  $Z$ . Такав начин повезивања, код којег напон  $u_Z$  представља излаз, је "неинвертујући спој". Сигнал се прослеђује без промене знака.

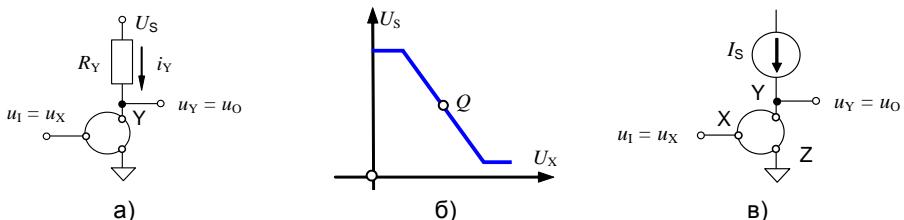
#### 2.4.2.1 ИНВЕРТУЈУЋИ СПОЈ

Када излазни сигнал појачавача представља променљива компонента напона на прикључку  $Y$ , прикључак  $Z$  је обично спојен са прикључком који дефинише референтни потенцијал у посматраном колу<sup>29</sup> (слика 2.26.a). Линеаризована карактеристика улаz-излаз приказана је на слици 2.26.б. У околини радне тачке  $Q$ , која се налази у средини области, појачање напона за мале сигнале једнако је:

$$A_u = \frac{du_{YZ}}{du_{XZ}} = \frac{u_o}{u_i} = -\frac{R_Y i_Y}{u_i} = -\frac{R_Y g_m u_i}{u_i} = -g_m R_Y, \quad (2.41)$$

где је:

$$g_m = \left. \frac{\partial i_Y}{\partial u_{XZ}} \right|_{u_{YZ} = const} = \frac{i_i}{u_i}. \quad (2.42)$$



Слика 2.26. Инвертујући спој трополног појачавачког елемента

Појачање  $A_u$  је негативно. То значи да је напон  $u_Y$  "у опозицији" са напоном<sup>30</sup>  $u_{XZ}$  [26]. Вредност појачања напона зависи од вредности отпорника

<sup>29</sup> Овај прикључак се назива "заједнички прикључак", а његов потенцијал се усваја за нулу (масу) система. У општем случају, заједнички прикључак је прикључак за који може да се сматра да се његов потенцијал не мења услед деловања побуде (улаznог сигнала).

<sup>30</sup> Израз "у опозицији" (*in opposition*) примењује се на две простопериодичне величине, исте учестаности, чија је разлика фаза једнака  $\pi$ . У стручној литератури на српском језику користи се назив "у противфази" (нем. *gegenphasig*, рус. *в противофазе*).

$R_Y$ , којим се дефинише положај мирне радне тачке. Да би се постигло што је могуће веће појачање, користи се извор сталне струје као "активно" оптерећење (слика 2.26.в) [27].

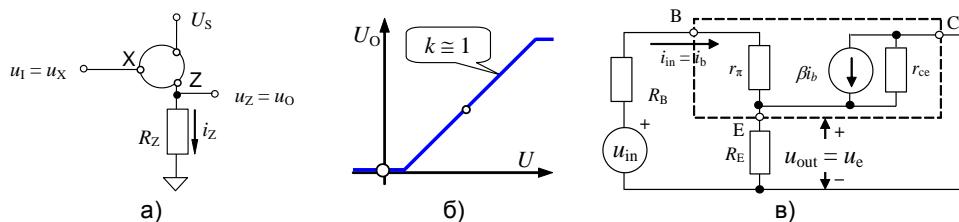
### 2.4.2.2 НЕИНВЕРТУЈУЋИ СПОЈ

Ако излазни сигнал појачавача представља променљива компонента напона на прикључку  $Z$ , прикључак  $Y$  је обично спојен са извором напона за напајање (заједнички прикључак). За усвојене референтне смерове приказане на слици 2.27 важи:

$$u_O = R_Z i_Z . \quad (2.43)$$

Независно од типа појачавачког елемента, појачање напона,  $A_u$ , је мање од 1:

$$A_u = \frac{g_m R_Z}{1 + g_m R_Z} . \quad (2.44)$$



Слика 2.27. Неинвертујући спој трополног појачавачког елемента

Појачање у овом случају је позитивно. То значи да је напон  $u_z$  "у фази" са напоном<sup>31</sup>  $u_x$  [28].

### 2.4.3 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ ПАР ПОЈАЧАВАЧКИХ ЕЛЕМЕНТА

Два трополна појачавачка елемента повезана на начин приказан на слици 2.28 образују сложен елемент код којег је, међусобном спрегом појачавачких елемената, постигнуто да излазни сигнали,  $u_{o1}$  и  $u_{o2}$ , зависе од оба узлана сигнала,  $u_{l1}$  и  $u_{l2}$ , односно од њихове разлике:

$$u_D = u_{l1} - u_{l2} . \quad (2.45)$$

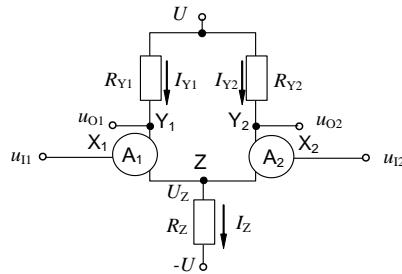
која се назива диференцијални улазни напон. Оваква спрела два појачавачка елемента се назива диференцијална спрела, а пар елемената који образује овакву спрелу назива се диференцијални пар (*differential pair, long-tailed pair*).

Разлика потенцијала  $Y$ -крајева појачавачких елемената:

$$u_O = u_{o1} - u_{o2} . \quad (2.46)$$

представља излазну величину  $u_O$  (диференцијални излазни напон).

<sup>31</sup> Израз "у фази" (*in phase*) примењије се на две простопериодичне величине, исте учестаности, чија је разлика фаза једнака нули.



Слика 2.28. Диференцијални пар појачавачких елемената

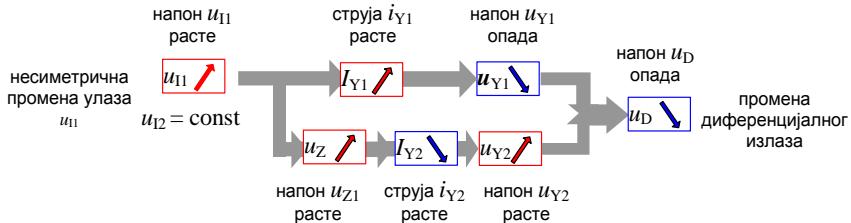
Одговарајућим подешавањем отпорности у колу може се постићи да напон  $u_O$  буде једнак нули када се улазни прикључци,  $X_1$  и  $X_2$ , налазе на нултом потенцијалу:

$$u_{II} = u_{I2} = 0 \Rightarrow u_{O1} = u_{O2} \Rightarrow u_O = 0. \quad (2.47)$$

Уколико појачавачки елементи у колу имају једнаке карактеристике, овакво уравнотежено стање се постиже ако су отпорности  $R_{Y1}$  и  $R_{Y2}$  једнаке. У том случају, и када су потенцијали улазних прикључака различити од нуле, али међусобно једнаки, и излазни прикључци су на истом потенцијалу.

$$u_{II} = u_{I2} \Rightarrow u_{O1} = u_{O2} \Rightarrow u_O = 0. \quad (2.48)$$

Уколико у оваквом симетричном (балансираном) систему дође до релативне промене потенцијала једног од улазних прикључака у односу на други улазни прикључак, равнотежа се нарушава (слика 2.29).

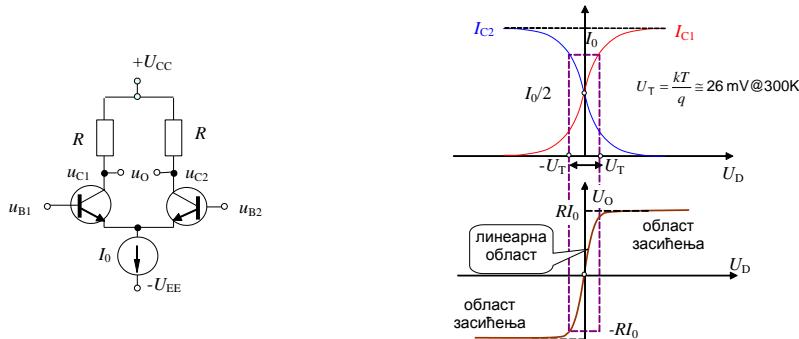
Слика 2.29. Промена величина у колу при повећању напона  $u_{X1}$ 

Повећање напона  $u_{II}$  при сталном напону  $u_{I2}$  доводи до повећања струје  $i_{Y1}$  и смањивања напона  $u_{Y1}$ . Повећања струје  $i_{Y1}$  такође доводи до повећања напона  $u_Z$ , због чега се смањује напон  $u_{X2}$ , што доводи до смањивања струје  $i_{Y_a}$ , а тиме и до повећања напона  $u_{Y2}$ . Збирни ефекат промене напона  $u_{II}$  при сталном напону  $u_{I2}$  је опадање излазног напона  $u_O$ . Табела приказана на слици 2.30 приказује да се напон  $u_O$  мења "у фази" са напоном  $u_{I2}$ , односно у "у опозицији" са напоном  $u_{II}$ .

$\Delta u_{II}$	$\Delta u_{I2}$	$\Delta u_I$	$\Delta i_{Y1}$	$\Delta i_{Y2}$	$\Delta u_O$
+	0	+	+	-	-
-	0	-	-	+	+
0	+	-	-	+	+
0	-	+	+	-	-
+	+	0	+	+	0
-	-	0	-	-	0

Слика 2.30. Одзив диференцијалног пара на побуду малим сигналима

Ако се напон  $u_D$  посматра као улазни, а напон  $u_O$  као излазни сигнал, може се предпоставити да ће при малим променама улазног напона излазна величина бити сразмерна улазној. Диференцијални пар делује као појачавач разлике два напона. Карактеристика преноса диференцијалног пара биполарних транзистора, када се у заједничком колу, уместо отпорника  $R_Z$ , налази извор сталне струје  $I_0$ , приказана је на слици 2.31.



Слика 2.31. Карактеристика преноса диференцијалног пара

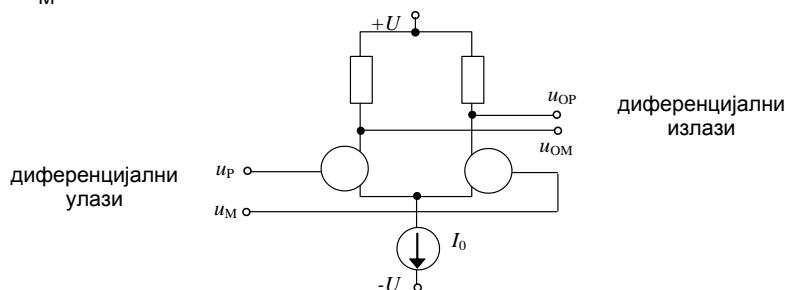
Зависност  $u_O(u_D)$  је веома сложена [29], [30]. Карактеристика  $u_O(u_D)$  може да се сматра линеарном само за мале вредности напона  $u_D$  јер диференцијални пар има изражено својство ограничавача. За границе линеарног опсега може да се усвоји вредност напона :

$$-U_T \leq u_D \leq U_T . \quad (2.49)$$

где је  $U_T$  тзв. термички напон<sup>32</sup>. Ако је диференцијални улазни напон по модулу већи од  $4 U_T$ , напон  $u_O$  практично не зависи од вредности улазног напона.

Диференцијални пар је најзначајнији облик спајања трополних појачавачких елемената у линеарним интегрисаним колима. Омогућује постизање великог појачања, директну спрегу и велику температурску стабилност. Сама структура обезбеђује два комплементарна излаза (слика 2.32). Напони  $u_{OP}$  и  $u_{OM}$  сразмерни су диференцијалном улазном напону:

$$u_D = u_P - u_M . \quad (2.50)$$



Слика 2.32. Диференцијални појачавач

<sup>32</sup> Величина  $U_T$  се назива "електрични еквивалент температуре".

Излазни напон  $u_{OP}$  је је у фази са улазним напоном  $u_P$ , а у противфази са улазним напоном  $u_M$ . Излазни напон  $u_{OM}$  је је у фази са улазним напоном  $u_M$ , а у противфази са улазним напоном  $u_P$ . Диференцијални излазни напон сразмеран је диференцијалном улазном напону:

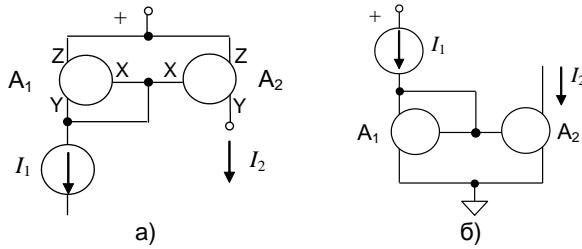
$$u_O = u_{OP} - u_{OM} = Au_D. \quad (2.51)$$

#### 2.4.4 СТРУЈНО ОГЛЕДАЛО

Излазна струја трополног појачавачког елемента одређена је напоном између XY приклjučака:

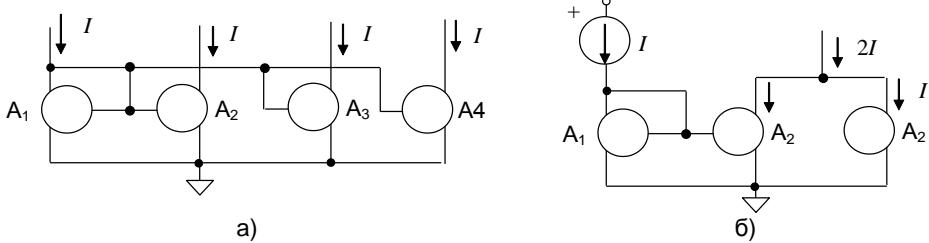
$$i_y = g_m u_{xz}. \quad (2.52)$$

Ако два идентична елемента имају једнаке напоне  $u_{xz}$ , њихове струје Y-приклjučака биће једнаке. На овом закључку заснован је рад једне класе извора струје која се назива "струјно огледало" (*current mirror*). Коло приказано на слици 2.33.а представља извор струје управљан струјом (*current controlled current source*). Коло приказано на слици 2.33.б представља управљани "понор" струје (*current sink*).



Слика 2.33. Струјна огледала

Струјна огледала имају важну и разноврсну улогу у интегрисаној електроници. Коло представљено на слици 2.34.а представља вишеструког огледала, које може да буде примењено као "струјни мултипликатор" (слика 2.34.б.).



Слика 2.34. Вишеструког огледала

## ЛИТЕРАТУРА

- 
- 1 S. Glasston, Atomska energija, Naučna knjiga, 1960, s. 3.
  - 2 Electropedia, *The World's Online Electrotechnical Vocabulary*, <http://stf.iec/iec60050>.
  - 3 IEC, IEC 60050: part 131-11, *Circuit theory/General*, 131-11-02.
  - 4 IEC, IEC 60050: part 131-13, *Circuit theory/Network topology*, 131-13-01.
  - 5 Реф. 3, 131-11-06.
  - 6 Електрична и магнетска кола, Термини и дефиниције, ЈУС Н. А0. 131, 1990, 131-01-01.
  - 7 Реф. 3, 131-11-03.
  - 8 Реф. 3, 131-11-04, 131-11-07.
  - 9 Реф. 6, 131-01-08.
  - 10 IEC, IEC 60050, Part 131-12, *Circuit theory/Circuit elements and their characteristics*, 131-12-04.
  - 11 Реф. 3, 131-11-34
  - 12 Реф. 6, 131-01-33 (131-15-06).
  - 13 IEC, IEC 60050: part 351, *Control technology / Behaviour and characteristics of transfer elements*, 351-24-34.
  - 14 Реф. 10, 131-12-02.
  - 15 Реф. 10, 131-12-08.
  - 16 IEC, IEC 60050: part .
  - 17 Реф. 10, 131-12-13.
  - 18 Реф. 6, 131-01-17.
  - 19 Реф. 6, 131-01-18.
  - 20 Реф. 10, 131-12-18.
  - 21 Реф. 10, 131-12-78.
  - 22 Реф. 6, 131-01-34.
  23. IEC, IEC 60050, Part 351-32, *Control technology/Specific functional units in control technology*, 351-32-04.
  - 24 Реф. 6, 131-01-39, 131-01-41.
  - 25 П. Бошњаковић, Основи електронике, ВЕТШ, 2006.
  - 26 Појмови из области математике који се користе у електротехници, Термини и дефиниције, ЈУС. Н.А0.101, 101-04-32.
  - 27 С. Марјановић, Електроника 1, Академска мисао, 2004, стр. 9.26.
  - 28 Појмови из области математике који се користе у електротехници, Термини и дефиниције, ЈУС. Н.А0.101, 101-04-30.
  - 29 С. Тешић, Д. Васиљевић, Основи електронике, Грађевинска књига, 2000, стр. 102.
  - 30 С. Марјановић, Електроника, Научна књига, 1984, стр. 283.

“Еуклиду, Декарту, Гаусу, Ајнштајну...  
односно свима онима на чијим су  
раменима ови стајали, дугујемо  
захвалност. Они су искосили радост  
откривања. Нама осталима омогућили  
су подједнаку радост – радост  
разумевања” [1]

*Leonard Mlodinow*



## 3. ЛИНЕАРНА АНАЛОГНА ЕЛЕКТРОНСКА КОЛА

Процеси који се одвијају у електронским елементима предмет су изучавања физике уопште, а физике чврстих тела (*solid-state physics*) посебно. “Физичка електроника” развија технолошку основу електронике као области људског знања. Теоријски основи електронике обрађују се у посебним (“базичним”) уџбеницима, у којима се, додатно, разматра и технологија израде различитих електронских елемената [2], [3], [4]. “Практична електроника” се бави употребом ових научних и технолошких достигнућа у уређајима које људи користе у свом свакодневном животу. У одговарајућим уџбеницима разматрају се својства поједињих електронских елемената, посматраних као функционалне целине. Такав приступ омогућује анализу и пројектовање електронских кола, без упуштања у особености физичких процеса који се одвијају у елементима од којих се коло састоји.

У овом поглављу разматрају се појмови на којима је заснована анализа линеарних електронских кола, независно од технологије примењене за њихову израду. Описана су општа својства основних линеарних аналогних електронских кола која, при пројектовању, представљају елементе помоћу којих се образују сложени системи.

### 3.1 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

При анализи електронских кола користе се општи закони електротехнике, теореме које из њих произистичу, као и посебни поступци решавања електричних мрежа.

Струје и напони у једном електронском колу међусобно су повезани Кирхофовим правилима. **Прво Кирхофово правило**, засновано на закону о одржању наелектрисања (*conservation of electric charge*), односи се на струје у гранама једног чвора.

Алгебарски збир свих струја у гранама једног чвора једнак је нули.

**Друго Кирхофово правило**, засновано на закону о одржању енергије (*conservation of energy*), односи се на затворено струјно коло у коме постоји један или више извора напона.

Алгебарски збир напона извора и падова напона<sup>1</sup> на појединим елементима дуж сваке затворене путање (петље) у неком разгранатом колу једнак је нули.

На основу једначина добијених применом Кирхофових правила, и математичких модела појединих елемената<sup>2</sup> одређују се напони и струје грана посматраног кола.

Електрична мрежа која садржи само савршене електричне елементе (отпорнике, калемове, кондензаторе, изворе напона и изворе струје) може да се опише линеарним алгебарским и диференцијалним једначинама са константним коефицијентима. Таква мрежа се назива линеарна електрична мрежа, јер за њу важи теорема која проистиче из принципа суперпозиције [5].

Струја која, у било којој грани линеарне електричне мреже, настаје као резултат истовременог деловања више извора напона или струје, распоређених на било који начин унутар те мреже, једнака је алгебарском збиру струја<sup>3</sup>, од којих свака представља резултат појединачног деловања сваког од извора енергије у посматраној мрежи. Еквивалентан закључак важи за напон између било које две тачке у таквој мрежи.

Стање линеарне електричне мреже може, математички, да се представи као збир свих могућих "појединачних" стања. При томе се под "појединачним" стањем подразумева стање када у колу делује само један од извора енергије, а остали су искључени<sup>4</sup>. Теорема суперпозиције има посебан значај за анализу електронских кола. Њеном применом се значајно поједностављује поступак одређивања величина које дефинишу стање електричног система у којем постоји више елемената који, у односу на пасивне елементе са којима су повезани делују као извори енергије.

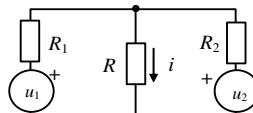
#### Пример

Ако се у колу приказаном на слици, посматра струја  $i$  која тече кроз грану у којој се налази отпорник  $R$ , према теореми суперпозиције важи:

$$i(u_1, u_2) = i(u_1) \Big|_{u_2=0} + i(u_2) \Big|_{u_1=0},$$

где је:

$$i(u_1) \Big|_{u_2=0} = \frac{u_1}{R_1 + R \parallel R_2} - \frac{R \parallel R_2}{R} \quad \text{и} \quad i(u_2) \Big|_{u_1=0} = \frac{u_2}{R_2 + R \parallel R_1} - \frac{R \parallel R_1}{R}.$$



Симбол  $R \parallel R_1$  означава паралелну везу отпорника  $R$  и  $R_1$ :

$$R \parallel R_1 = \frac{RR_1}{R + R_1}.$$

<sup>1</sup> Под називом "пад напона" (*voltage drop*) у анализи електронских кола подразумева се напон који постоји између две тачке као последица протицања струје кроз елемент чије приклучке те тачке представљају.

<sup>2</sup> Једначине које повезују величине на приступима појединих елемената.

<sup>3</sup> Рачунатих у односу на исти референтни смер.

<sup>4</sup> При анализи, извор напона се "искључује" тако што се поништава његово дејство, што је еквивалентно краткоспајању. Извор струје се "искључује" прекидањем гране у којој се налази.

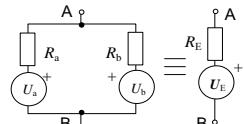
При анализи сложених електричних кола погодно је да неки њихов део, који се завршава са два краја, буде замењен еквивалентним колом са једним приступом. **Тевененова теорема** омогућује да се такав део представи једном граном, која је састављена од редне везе савршеног извора напона и отпорника.

У односу на било која своја два краја, активна линеарна електрична мрежа може да се представи као несавршени извор напона, чији је напон једнак напону на тим прикључцима, када су ови отворени, а унутрашња отпорност је једнака еквивалентној отпорности мреже између тих прикључака, гледане са стране улазних прикључака, када су сви извори енергије у посматраној мрежи искључени.

#### Пример

За мрежу приказану на слици важи:

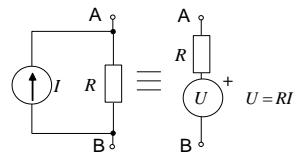
$$U_E = \frac{U_a R_b}{R_a + R_b} + \frac{U_b R_a}{R_a + R_b}, \quad R_E = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b}.$$



Напон  $U_E$  еквивалентног (Тевененовог) извора једнак је напону који постоји на отвореним крајевима посматране мреже. Отпорност еквивалентног отпорника једнака је отпорности која се "види" између крајева А и В, када су напони  $U_a$  и  $U_b$  једнаки нули.

**Теорема еквиваленције** омогућује замену извора напона и струје при (математичкој) анализи, са циљем олакшаног сагледавања својства електронских кола.

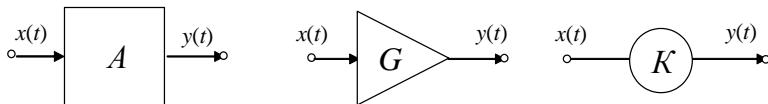
Несавршени независни извор напона, чија је унутрашња отпорност позната, може да се представи несавршеним независним извором струје. Важи и обрнуто.



## 3.2 ПОЈАЧАВАЧИ

У најопштијем смислу **појачавач** (*amplifier*) је елемент (компонента, уређај) који појачава велиност неке величине [6]. У теорији електричних кола, појачавач се дефинише као активни елемент са два приступа, типа улаз-излаз, чија је излазна снага већа од улазне снаге, и за који је однос вредности напона или струја на излазу и улазу сталан [7]. У електроници, појачавач је елемент који помоћу енергије узете из спољашњег извора, другачијег од извора улазног сигнала, производи излазни сигнал који представља "слику" улаза. Електронски појачавач је активни елемент, управљани извор код којег излазна снага може да буде већа од улазне<sup>5</sup>. Може да се каже да појачавач повећава снагу сигнала, користећи помоћни извор енергије (снаге) [8]. Графички симболи појачавача приказани су на слици 3.1.

<sup>5</sup> Механички појачавачи силе су полуза и хидростатичка преса (просте машине). Треба, међутим, имати у виду да код ових појачавача излазни (извршени) рад никада не може да буде већи од улазног (уложеног) њихов електрични еквиваленти су напонски и струјни трансформатор. То су пасивни елементи. Излазна снага не може да буде већа од улазне.



Слика 3.1. Електронски појачавач

Појачавач је **савршен** ако је однос вредности излазне и улазне величине сталан, независно од побуде и радних услова појачавача. У општем случају, бројна вредност ове константе представља позитиван или негативан реалан број, различит од нуле. Њена димензија зависи од физичке природе улазног и излазног сигнала.

Физички, електронски појачавач, као елемент електричног кола, има два улаза и један излаз (слика 3.2.а). Информациони улаз омогућује спрезање са извором сигнала који треба да се појача. Други улаз омогућује пријем енергије која се прослеђује на излаз да би се обезбедило да излазни сигнал представља копију улаза и када приклучено оптерећење "захтева" већу снагу од снаге коју даје извор сигнала. Када се приказују принципске електричне шеме уобичајено је да се приказују само "информативни прикључци": улаз и излаз (слика 3.2.б).



Слика 3.2. Појачавач као множач константом

Као елемент сложених система, појачавач се посматра као множач константом. Његова је намена да оствари потребно прилагођење у погледу величине (интензитета) и/или снаге сигнала [9]. Сачинилац сразмере излаза и улаза представља "**појачање**" (gain) овог елемента [10]:

$$y = Ax. \quad (3.1)$$

При побуди сигналом који представља хармонијску функцију времена:

$$x = X \sin \omega t, \quad (3.2)$$

појачање<sup>6</sup> представља количник амплитуде излазне величине, у устаљеном стању, и амплитуде одговарајуће улазне величине. У општем случају, тако дефинисано појачање је функција угаоне учестаности  $\omega$ :

$$A(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X}, \quad (3.3)$$

Понекад се појачање за учестаност различиту од нуле назива "динамичко појачање" (*dynamic gain*), за разлику од "статичког појачања" (*static gain*) када је учестаност једнака нули.

Појачавач који на свом излазу даје сигнал чија се фаза разликује од фазе улазног сигнала за угао  $\pi$ , назива се инвертујући појачавач (*inverting amplifier, Umkehrverstärker*). Појачавач који не мења фазу, је неинвертујући појачавач (*noninverting amplifier*).

<sup>6</sup> У општем случају, појачање временски непроменљивог (*time-invariant*) елемента је модуо (апсолутна вредност) фреквенцијског одзива (*frequency response*) за дату угаону учестаност..

У општем случају, појачавач остварује пресликање  $y \rightarrow x$  такво да су промене излаза сразмерне променама улаза. Математички модел појачавача је диференцијална једначина:

$$dy = Adx; A = \text{const}, \quad (3.4)$$

у којој сачинилац  $A$  (појачање) не зависи од вредности  $x$ .

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 0. \quad (3.5)$$

На основу једначине 3.4 следи:

$$y = Ax + Y_0, \quad (3.6)$$

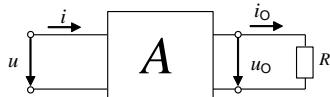
где је  $Y_0$  померај нуле на излазу појачавача:  $Y_0 = y(0)$ .

### 3.2.1 СВОЈСТВА ЕЛЕКТРОНСКИХ ПОЈАЧАВАЧА

Електронски појачавач је елемент са два приступа на којима се посматрају напони и струје ( слика 3.2). Однос излазног напона и излазне струје дефинисан је Омовим законом<sup>7</sup>:

$$u_O = R_L i_O, \quad (3.7)$$

где је  $R_L$  отпорност којом је излаз појачавача оптерећен.



Слика 3.3. Електронски појачавач

Значајна обележја електронских елемената типа улаз-излаз представљају улазна и излазна отпорност. **Улазна отпорност** је дефинисана као количник улазног напона и улазне струје.

$$R_I = \frac{u}{i}. \quad (3.8)$$

Другим речима, то је отпорност којом посматрани елемент (коло) оптерећује извор сигнала. С обзиром да вредност ове величине зависи од отпорности којом је тај елемент оптерећен на излазу, неопходно је да буду прецизирани и услови рада при којима се одређује. На пример, улазна отпорност може да буде дефинисана када су излазни крајеви елемента отворени (*open*):

$$R_{IO} = \left. \frac{u}{i} \right|_{i_O = 0}, \quad (3.9)$$

краткоспојени (*shorted*):

$$R_{IS} = \left. \frac{u}{i} \right|_{u_O = 0}, \quad (3.10)$$

или отпорност оптерећења има изабрану (типичну) вредност:

$$R_I = \left. \frac{u}{i} \right|_{R_L}. \quad (3.11)$$

<sup>7</sup> На слици је назначен референтни смер излазне струје који је у складу са наменом појачавача да "преноси" улазну величину на излаз. У теорији електричних кола уобичајено је да су референтни смерови струја на приступима окренути ка елементу.

**Излазна отпорност** појачавача је еквивалентна отпорност којом се излазно коло појачавача моделује као активни елемент који представља несавршени управљани извор напона или струје<sup>8</sup> (слика 3.3).



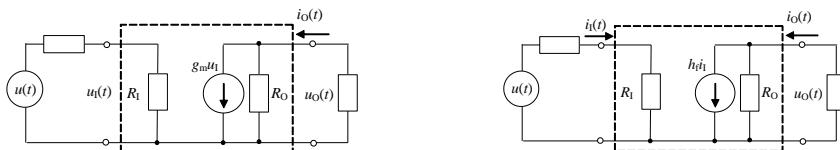
Слика 3.4. Излазна отпорност појачавача

Вредност излазне отпорности одређена је изразом:

$$R_O = \frac{u_{OO}}{i_{OS}}, \quad (3.12)$$

у којем  $u_{OO}$  представља излазни напон када су излазни крајеви отворени ("напон празног хода"), а  $i_{OS}$  излазну струју када су излазни крајеви краткоспојени ("струја кратког споја").

Срезање појачавача треба да омогући што тачније преношење сигнала (информације). При анализи, у еквивалентном колу потребно је узети у обзор улазну и излазну отпорност појачавачког елемента.

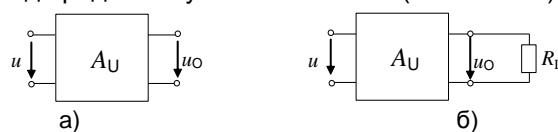


Слика 3.5 Срезање

На улазу се захтева да је грешка која настаје због утицаја оптерећења, које у односу на извор сигнала представља улазна отпорност појачавача, што је могуће мања. Улазно коло појачавача које приhvата напонски сигнал треба да што је могуће мање оптерећује извор сигнала. Улазно коло које приhvата струјни сигнал треба да се понаша као кратак спој. Захтеви на излазу су обрнути. Унутрашња излазна отпорност појачавача са напонским излазом треба да је што је могуће мања, односно, излазна отпорност појачавача са струјним излазом треба да је што је могуће већа.

### 3.2.2 ПОЈАЧАВАЧ НАПОНА

У ужем смислу, под називом "појачавач напона" (*voltage amplifier*) подразумева се активни елемент (коло) који на свом излазу даје напон  $u_O$  чија је вредност већа од вредности улазног напона  $u$  (слика 3.5.a).



Слика 3.6. Појачавач напона

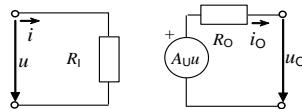
<sup>8</sup> Према теореми о еквиваленцији, ова два приказа су равноправна [2].

Појачавач напона може да се посматра као извор напона управљан напоном (*voltage controlled voltage source - VCVS*). Количник излазног и улазног напона је **појачање напона** (*voltage gain*):

$$A_U = \frac{u_O}{u}. \quad (3.13)$$

Појачавач напона је савршен ако величина  $A_U$  представља константу која не зависи од улазног напона и отпорности оптерећења. У општем случају, појачање је позитиван или негативан реалан број, различит од нуле. Димензија величине  $A_U$  једнака је један.

Ако појачавач није савршен, вредност излазног напона, а то значи и стварна вредност појачања  $A_U$ , зависи од вредности излазне струје. То је резултат чињенице да излазна отпорност појачавача није једнака нули. Због тога се при спецификацији обавезно наводи вредност отпорности којом је појачавач оптерећен (слика 3.5.б). На слици 3.6 приказано је еквивалентно коло које се најчешће користи као основни модел при анализи сложених електронских мрежа, када се повратно дејство излаза на улаз може да занемари<sup>9</sup>.

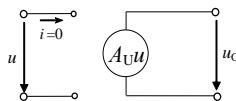


Слика 3.7. Еквивалентно коло појачавача напона

$R_1$  је улазна, а  $R_O$  излазна отпорност елемента са два приступа. Величина  $A_U$  представља појачање напона при отвореним излазним крајевима:

$$A_U = \left. \frac{u_O}{u} \right|_{i_O = 0}. \quad (3.14)$$

Савршени појачавач напона је савршени извор напона управљан напоном. Улазна отпорност је бесконачно велика, а излазна отпорност једнака нули. Улазна струја је једнака нули (слика 3.7) без обзира на вредност улазног напона. Излазна струја одређена је вредношћу импедансе оптерећења. Када су улазни крајеви краткоспојени, излазни напон је једнак нули. При побуди хармонијским сигналом, амплитуда и фаза излазног сигнала не зависе од учестаности. Пропусни опсег се протеже од нуле до бесконачности.



Слика 3.8. Савршени појачавач напона

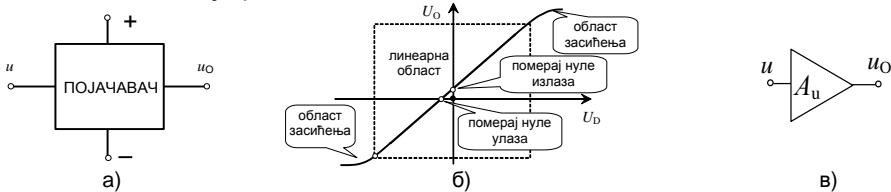
Вредност излазног напона  $u_{\text{OUT}}$  не може да буде изван граница које одређује напон напајања појачавача. Да би се омогућило да излазни напон може да буде било позитиван или негативан, напајање мора да буде биполарно (слика 3.8.а). У околини координатног почетка, карактеристика улаз-излаз представља праву линију чији је нагиб одређен вредношћу

<sup>9</sup> На слици је назначен референтни смер излазне струје који је у складу са функцијом појачавача напона: ако је улазни напон позитиван а појачање представља позитиван број, излазни напон је позитиван и даје струју која тече кроз потрошач (слика 3.5.б).

појачања. Када се вредност излазног напона приближава напону напајања, појачање се смањује и карактеристика прелази у засићење (слика 3.8.б). Појачање за мале сигнале (*small signal voltage gain*),  $A_u$ , дефинисано изразом:

$$A_u = \frac{\partial u_O}{\partial u}, \quad (3.15)$$

зависи од положаја радне тачке.



Слика 3.9. Карактеристика улаз-излаз појачавача напона

Статичка карактеристика стварног појачавача не пролази кроз координатни почетак:

$$U_O = A_u U + U_{O0}. \quad (3.16)$$

Величина  $U_{O0}$ , представља напон помераја нуле на излазу (*voltage offset*).

$$U_{O0} = U_O(0). \quad (3.17)$$

Једначина може да се представи и у облику:

$$U_O = A_u(U - U_0). \quad (3.18)$$

где је  $U_0$  напон помераја нуле сведен на улаз (*input voltage offset*).

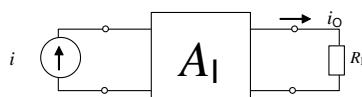
$$U_O(U_0) = 0. \quad (3.19)$$

У аналогној електроници се појачавач напона обично графички приказује у облику троугла (слика 3.8.в). Уколико није посебно назначено, подразумева се биполарно напајање.

### 3.2.3 ПОЈАЧАВАЧ СТРУЈЕ

Појачавач струје (*current amplifier*) на свом излазу даје струју која је сразмерна улазној струји. У најопштијем смислу, појачавач струје може да се посматра као извор струје управљан струјом (*current controlled current source - CCCS*). Количник излазне и улазне струје представља **појачање струје** (*current gain*)<sup>10</sup>:

$$A_I = \frac{i_O}{i}. \quad (3.20)$$



Слика 3.10. Појачавач струје

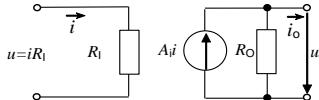
Вредност излазне струје, а то значи и вредност појачања стварног појачавача, зависи од вредности излазног напона, односно од отпорности оптерећења. Због тога се при спецификацији наводи и вредност отпорности

<sup>10</sup> Савршени биполарни транзистор (*BJT*) моделује се као појачавач струје.

којом је појачавач оптерећен. Обично се специфицира вредност појачања струје при краткоспојеним излазним крајевима:

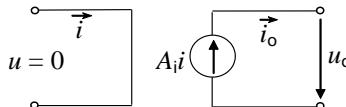
$$A_i = \left. \frac{i_o}{i} \right|_{R_L=0} = \left. \frac{i_o}{i} \right|_{u_o=0}. \quad (3.21)$$

На слици 3.10 приказано је еквивалентно коло које се најчешће користи као основни модел појачавача струје при анализи сложених структура, када се повратно дејство излаза на улаз може да занемари<sup>11</sup>. Улазна отпорност треба да је што мања. Излазна отпорност треба да је што већа.



Слика 3.11. Еквивалентно коло појачавача струје

Савршени појачавач струје је савршени извор струје управљан струјом. Улазна отпорност једнака је нули, а излазна отпорност бесконачно велика. Улазни напон је једнак нули, без обзира на вредност побудне струје (слика 3.11). Излазни напон зависи од вредности отпорности прикључене на излаз.



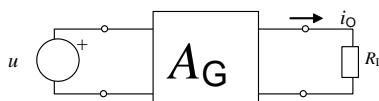
Слика 3.12. Еквивалентно коло савршеног појачавача струје

### 3.2.4 ТРАНСКОНДУКТАНСНИ ПОЈАЧАВАЧ

Транскондуктански појачавач (*transconductance amplifier*) је активни елемент (коло) са два приступа типа улаз-излаз, код којег је излазна струја сразмерна вредности улазног напона. Сачинилац преноса овог кола представља количник излазне струје и улазног напона:

$$A_G = \frac{i_o}{u}. \quad (3.22)$$

Може да се посматра као извор струје управљан напоном (*voltage controlled current source - VCCS*), односно “претварач напона у струју” (*U/I претварач, voltage-to-current converter*). Величина  $A_G$  има димензију електричне проводности. Ова “првидна” проводност се обично назива **проводност преноса**<sup>12</sup> и означава са  $G_m$  или  $g_m$ .



Слика 3.13. Транскондуктански појачавач (*U/I претварач*)

<sup>11</sup> На слици је назначен референтни смер излазне струје који је у складу са функцијом појачавача струје: струја коју треба појачати улази, а појачана струја излази из елемента.

<sup>12</sup> Међусобна (узајамна) проводност, транскондуктанса (*transconductance*). Транзистор са ефектом поља (*FET*) моделује се као транскондуктански појачавач.

### 3.2.5 ТРАНСРЕЗИСТАНСНИ ПОЈАЧАВАЧ

Трансрезистансни појачавач (*transresistance amplifier*) је елемент са два приступа код којег је излазни напон с сразмеран вредности улазне струје. Сачинилац преноса овог кола представља количник излазног напона и улазне струје:

$$A_R = \frac{u_O}{i}. \quad (3.23)$$

Може да се посматра као извор напона управљан струјом (*current controlled voltage source - CCVS*), односно “претварач струје у напон” ( $\text{//}U$  претварач, *current-to-voltage converter*). Величина  $A_R$  има димензију електричне отпорности. Ова “привидна” отпорност се у литератури назива **отпорност преноса**<sup>13</sup>.



Слика 3.14. Трансрезистансни појачавач ( $\text{//}U$  претварач)

### 3.2.6 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ ПОЈАЧАВАЧ

Диференцијални појачавач (*differential amplifier*) је елемент који појачава разлику два сигнала представљена величином исте врсте. У савременој техници најчешће се користе електронски појачавачи разлике два напона. Излазни напон је сразмеран разлици потенцијала његових улазних крајева:

$$u_O = A u_D, \quad (3.24)$$

где је  $A$  појачање појачавача, а  $u_D$  представља сигнал који треба да се појача.

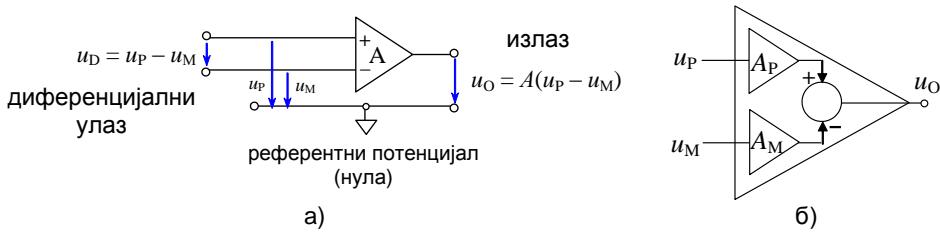
У електроници је уобичајено да се диференцијални појачавач графички представља троуглом, као што је то приказано на слици 3.15.a. Напон  $u_O$  мења се “у фази” са напоном  $u_P$ , односно “у опозицији” са напоном  $u_M$ . Улаз који је у фази са излазом означава се као “инвертујући улаз” (*inverting input*), и обележава симболом “+” (плус), док се улаз који је у противфази са излазним сигналом означава као “инвертујући улаз” (*non-inverting input*), и обележава симболом “-” (минус). Диференцијални улазни напон,  $u_D$ , је разлика напона  $u_P$  и  $u_M$ :

$$u_D = u_P - u_M. \quad (3.25)$$

$$u_O = A(u_P - u_M) = A u_D. \quad (3.26)$$

Ако су оба улазна приклучка на истом потенцијалу ( $u_P = u_M$ ), диференцијални улазни напон је једнак нули ( $u_D = 0$ ). Излазни напон савршеног диференцијалног појачавача је тада једнак нули, независно од потенцијала улазних приклучака.

<sup>13</sup> Међусобна проводност преноса, трансрезистанца (*transresistance*).



Слика 3.15. Диференцијални појачавач

Појачање разлике два напона постиже се одговарајућом спрегом два трополна појачавачка елемента<sup>14</sup>. Као елемент са два улаза и једним излазом, такав систем може да се моделује еквивалентним колом приказаним на слици 3.15.б. Излазни сигнал представља комбинацију одзива на два улаза:

$$u_O = A_P u_P - A_M u_M , \quad (3.27)$$

где је  $A_P$  појачање од неинвертујућег улаза до излаза, када је напон на инвертујућем улазу једнак нули, а  $A_M$  појачање од инвертујућег улаза до излаза, када је напон на неинвертујућем улазу једнак нули. Да би важила једначина 3.24 потребно је да су сачиниоци  $A_P$  и  $A_M$  једнаки. Уколико тај захтев није испуњен, напон на излазу зависи не само од диференцијалног напона  $u_D$ , већ и од вредности напона  $u_P$  и  $u_M$ . Применом једнакости:

$$u_P = \frac{u_P + u_M + u_P - u_M}{2} , \text{ и} \quad (3.28)$$

$$u_M = \frac{u_P + u_M - u_P + u_M}{2} , \quad (3.29)$$

једначина 3.25 може да се представи у облику:

$$u_O = \frac{A_P + A_M}{2} (u_P - u_M) + (A_P - A_M) \frac{u_P + u_M}{2} = \frac{A_P + A_M}{2} u_D + (A_P - A_M) u_{CM} . \quad (3.30)$$

којом је излазни напон  $u_O$  приказан као збир два члана. Први члан је резултат жељеног деловања диференцијалног појачавача: појачање диференцијалног напона  $u_D$ , који представља "информативни" део који носи пар улазних сигнална  $u_P$  и  $u_M$ . Други члан потиче од "неинформативног" дела који је "заједнички" за оба улазна сигнала. Овај заједнички напон (*common mode voltage*), који је једнак аритметичкој средини напона  $u_P$  и  $u_M$ :

$$u_{CM} = \frac{u_P + u_M}{2} , \quad (3.31)$$

такође се пресликова на излаз кола, иако то није "задатак" који диференцијални појачавач треба да оствари. Једначина 3.30 показује да је ово нежељено пресликовање резултат неједнакости сачиниоца  $A_P$  и  $A_M$ .

<sup>14</sup> Диференцијални пар трополних појачавачких елемената описан је у одељку 2.4.3.

До истоветног закључка долази се применом принципа суперпозиције. У довољно малој околини мирне радне тачке диференцијални пар појачавачких елемената може да се посматра као линеаран систем. Излазни напон  $u_O$  представља суперпозицију два напона, од којих један зависи од диференцијалног напона  $u_D$ , а други од заједничког напона  $u_{CM}$ :

$$u_O = u_O(u_D) \Big|_{u_{CM}=0} + u_O(u_{CM}) \Big|_{u_D=0} = A_D u_D + A_{CM} u_{CM}, \quad (3.32)$$

Симбол  $A_{CM}$  представља сачинилац преноса заједничког напона (пресликавање заједничког напона на излаз појачавача). Савршени диференцијални појачавач у потпуности потискује заједнички напон ( $A_{CM} = 0$ ).

Једначином 3.30 дефинисана су два основна обележја диференцијалног појачавача. **Појачање заједничког напона**,  $A_{CM}$  је величина која описује како се заједнички улазни напон,  $u_{CM}$ , пресликава на излаз појачавача. **Диференцијално појачање**,  $A_D$ , је појачање диференцијалног напона  $u_D$  које описује однос диференцијалних напона на излазу и улазу. На основу једначина 3.28 и 3.30 следи:

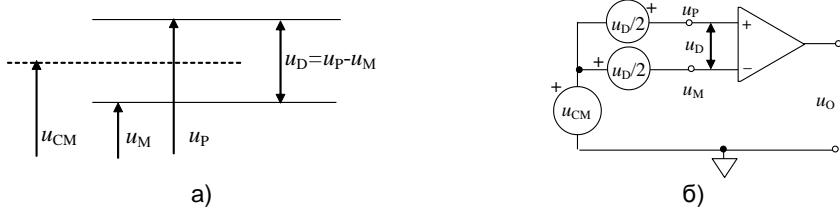
$$A_D = A = \frac{A_P + A_M}{2}, \text{ и} \quad (3.33)$$

$$A_{CM} = A_P - A_M. \quad (3.34)$$

За напоне на неинвертујућем и инвертујућем улазу важи (слика 3.15):

$$u_P = u_{CM} + \frac{1}{2} u_D, \text{ и} \quad (3.35)$$

$$u_M = u_{CM} - \frac{1}{2} u_D. \quad (3.36)$$



Слика 3.16. Улазне величине диференцијалног појачавача

Количник величина  $A$  и  $A_{CM}$  је показатељ потискивања заједничког сигнала<sup>15</sup> (*common mode rejection ratio - CMRR*):

$$CMRR = \frac{A}{A_{CM}}. \quad (3.37)$$

Ова величина представља важну карактеристику диференцијалног појачавача, којом се квантитативно исказује његово својство да појачава разлику улазних напона, независно од њиховог заједничког напона  $u_{CM}$ .

<sup>15</sup> У литератури на српском језику, ова величина се назива и "фактор дискриминације" ( $\eta$ ) или "фактор потискивања" ( $\rho$ ) [3], [4].

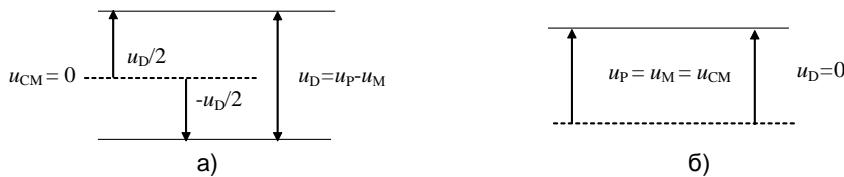
Обично се изражава у децибелима<sup>16</sup> (dB) према формулама: [11], [12]

$$CMRR = 20 \log_{10} \frac{A}{A_{CM}} \text{ dB.} \quad (3.38)$$

Диференцијални појачавач утолико боље обавља свој задатак уколико је сачинилац  $CMRR$  већи. Код савршеног диференцијалног појачавача, потискивање заједничког сигнала је бесконачно велико. Улазне отпорности савршеног појачавача су бесконачно велике, а излазна отпорност је једнака нули. Пропусни опсег протеже се од нуле до бесконачности.

При симетричној побуди ( $u_{CM} = 0$ ,  $u_P = u_M = u_D/2$ , слика 3.17.а) важи:

$$u_O = A_D u_D. \quad (3.39)$$



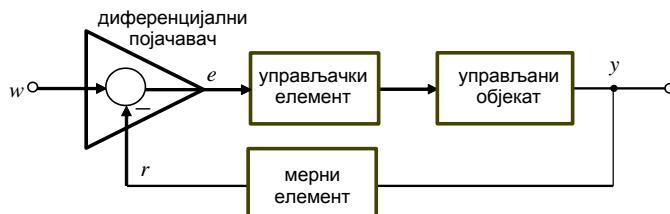
Слика 3.17. Симетрична и несиметрична побуда

При несиметричној побуди ( $u_{IP} = u_{IN} = u_{CM}$ , слика 3.17.б):

$$u_O = A_{CM} u_{CM}. \quad (3.40)$$

Да би диференцијални појачавач појачавао само разлику два напона, независно од њихове средње вредности потребно је да појачања  $A_P$  и  $A_N$  буду међусобно једнака.

У системима аутоматског управљања (слика 3.18), диференцијални појачавач има улогу елемента помоћу којег се пореде улазни управљачки сигнал,  $w$ , и сигнал повратне спреге,  $r$ . Његов излаз представља сигнал грешке,  $e$ , на основу којег управљачки елемент делује на објекат управљања. У теорији система са повратном спрегом овај део се назива "компараторски елемент" јер омогућује поређење референтне величине и величине повратне спреге<sup>17</sup> [13].



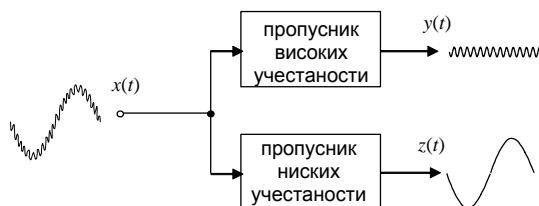
Слика 3.18. Систем аутоматског управљања

<sup>16</sup> Децибел је десети део бела, јединице којом се однос две величине, које имају природу снаге, приказује декадним логаритмом броја који представља њихов количник [11], [12].

<sup>17</sup> У литератури старијег датума користи се назив "дискриминатор" (од лат. *discriminare*, правити разлику).

### 3.3 ФИЛТРИ

Електрични сигнал је резултат суперпозиције мноштва дејстава која се одражавају на вредност информационог параметра. Задатак електронике је да “извуче” информацију из њеног носиоца, да открије и квантификује промене које су резултат информативног садржаја сигнала. Овај задатак у аналогној електроници се решава помоћу кола која различито реагују на споре и брзе промене величине која представљају сигнал тако што “потискују” промене које нису својствене извору информације. То се постиже применом фреквенцијски-селективног елемента које пропушта хармонијски сигнал чија је учестаност у одређеном опсегу, а потискују сигнале свих других учестаности. Такво коло се назива филтер<sup>18</sup> (*filter*) [14], [15].



Слика 3.19. Фреквенцијски селективна кола

Филтер је елемент са два приступа, намењен да преноси спектралне компоненте улазне величине у складу са одређеним законом. У општем случају филтер не утиче на компоненте које припадају одређеним опсезима учестаности, а слаби<sup>19</sup> све оне које припадају другим опсезима.

При хармонијској побуди линеарних елемената и кола, веза улазног и излазног сигнала описује се комплексном величином  $W(j\omega)$  која је дефинисана као количник комплексних представника улаза и излаза [16].

$$W(j\omega) = \frac{U_O(j\omega)}{U(j\omega)} = W(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (3.41)$$

и представља фреквенцијску карактеристику елемента (*frequency response*). Моду ове величине,  $W(\omega)$ , показује како се амплитуда сигнала мења при пролазу кроз филтер. Аргумент фреквенцијске карактеристике,  $\varphi(\omega)$ , представља разлику фаза<sup>20</sup> сигнала на излазу и сигнала на улазу елемента.

#### 3.3.1 КЛАСИФИКАЦИЈА

Аналогни филтер може да се дефинише као линеаран елемент типа улаз-излаз која преноси сигнале без слабљења за све учестаности унутар

<sup>18</sup> Назив, преузет из енглеског (*filter*) и немачког језика (*Filter*), потиче од лат. *filtrum*, цедило, цедиљка.

<sup>19</sup> При описивању својства фреквенцијски селективних кола користи се појам “слабљење” (*attenuation*).

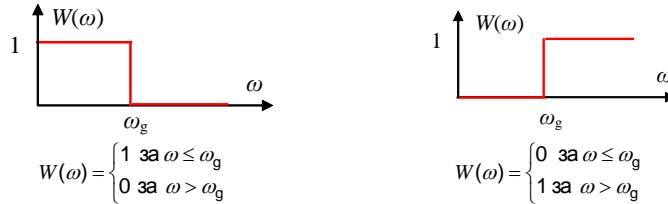
<sup>20</sup> У литератури на српском језику користи се и називи “фазна разлика” (од енг. *phase difference*) и “фазни померај” (од енг. *phase shift*).

одређеног опсега, а са слабљењем које није нула за остале учестаности. Пропусни (непропусни) опсег<sup>21</sup> је опсег учестаности у коме слабљење остаје мање (веће) од задате вредности [17].

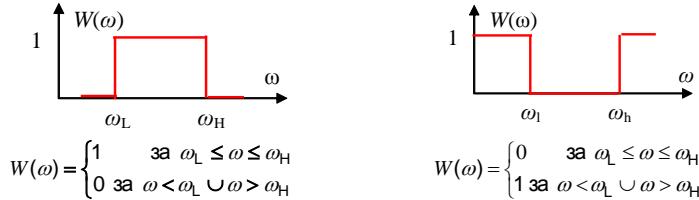
Практично, филтер је фреквенцијски-селективно коло пројектовано да обезбеди жељено слабљење сигнала у одређеном опсегу учестаности. Амплитудска фреквенцијска карактеристика филтра треба да има сталну вредност за сигнале чија је учестаност у опсегу од интереса, док за сигнале који се желе потиснути вредност  $W(\omega)$  треба да је што је могуће мања. Притом, у непропусном опсегу слабљење не сме да буде мање од неке задате минималне вредности која је потребна да се нежељене спектралне компоненте доволно потисну. У пропусном опсегу слабљење не сме да буде веће од неке максималне допуштене вредности како не би дошло до нежељеног "гушења" информативног дела спектра сигнала.

Филтер пропусник ниских учестаности (*low-pass filter, LPF*) има само један пропусни опсег који се протеже од нуле до неке граничне учестаности  $\omega_g$  [18]. Филтер пропусник високих учестаности (*high-pass filter, HPF*) има само један пропусни опсег који обухвата све учестаности веће од граничне учестаности. Филтер пропусник опсега учестаности (*band-pass filter, BPF*) има само један пропусни опсег ограничен са две коначне учестаности које нису нула или бесконачне. Филтер непропусник опсега учестаности (*band-stop filter, BSF, band reject, notch*) има само један непропусни опсег ограничен са две коначне учестаности које нису нула или бесконачне.

Филтер пропусник ниских учестаности      Филтер пропусник високих учестаности



Филтер пропусник опсега учестаности      Филтер непропусник опсега учестаности



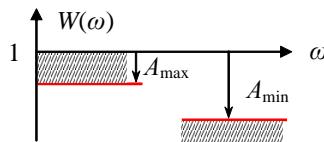
Слика 3.20. Фреквенцијске карактеристике савршених филтера

**Гранична учестаност** (*breakpoint frequency, cut-off frequency*) је учестаност пропусног или непропусног опсега при којој слабљење достиже задату вредност. Обично се гранична учестаност дефинише формулом:

<sup>21</sup> Енг. *pass (stop) band*, нем. *Durchlasband (Sperrband)*, рус. *полоса пропускания (затухания)*.

$$W(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707. \quad (3.42)$$

**Савршени филтер** (*ideal filter*) је елемент са два приступа за који је модуо функције преноса једнак јединици унутар једног или више фреквенцијских опсега, а једнак нули за све остале учестаности [19]. У пропусном опсегу савршени филтер преноси сигнал без слабљења. Изван пропусног опсега слабљење је бесконачно велико. Физички је немогуће реализовати електричну мрежу која би се одликовала скоковитим прелазом из непропусног у пропусни опсег. При пројектовању филтера настоји се да амплитудска фреквенцијска карактеристика има сталну вредност за сигнале чија је учестаност у опсегу од интереса, док за сигнале који се желе потиснути вредност  $W(\omega)$  треба да буде што је могуће мања. С обзиром на толеранције вредности елемената, при пројектовању филтера постављају се захтеви да у пропусном опсегу слабљење није веће од задате вредности, а у непропусном опсегу слабљење није мање од задате вредности.



Слика 3.21. Дефинисање пропусног и непропусног опсега филтра

Другим речима, модуо фреквенцијске карактеристике,  $W(\omega)$ , у пропусном опсегу не сме да буде мањи од неке задате вредности која одговара максималном дозвољеном слабљењу  $A_{max}$  у пропусном опсегу филтра (слика 3.21). У непропусном опсегу модуо фреквенцијске карактеристике,  $W(\omega)$ , не сме да буде већи од неке задате вредности која одговара минималном потребном слабљењу  $A_{min}$  у непропусном опсегу. Притом се настоји и да ширина “прелаза” између пропусног и непропусног опсега буде што је могуће мања.

### 3.3.2 ПРОПУСНИЦИ НИСКИХ УЧЕСТАНОСТИ

Филтер пропусник ниских учестаности (*LPF*) остварује слабљење (потискивање) наизменичне<sup>22</sup> компоненте пулсирајуће<sup>23</sup> величине. Његов излаз “упорено” реагује на промене улазне величине. Елементи са оваквим својствима називају се инерцијални елементи [20]. Таква својства има елемент који се може описати линеарном диференцијалном једначином са константним коефицијентима чији је облик:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t), \quad (3.43)$$

<sup>22</sup> Наизменични напон,  $u_-$ , је периодични напон чија је средња вредност  $U_0$  једнака нули или занемарљиво мала.

<sup>23</sup> Пулсирајући напон је периодични напон  $u(t)$  чија је средња вредност  $U_0$  различита од нуле,  $u(t) = U_0 + u_-$ .

у којој  $x(t)$  представља улазну, а  $y(t)$  излазну величину (сигнал). Ред једначине је ред филтра. Овом моделу одговара алгебарска једначина у комплексном домену:

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots Y(s) = X(s), \quad (3.44)$$

у којој  $X(s)$  и  $Y(s)$  представљају комплексне ликове величина  $x(t)$  и  $y(t)$ . Функција преноса посматраног елемента одређена је изразом:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1}, \quad (3.45)$$

на основу којег се, сменом  $s = j\omega$ , добија фреквенцијска карактеристика  $W(j\omega)$ .

### 3.3.2.1 ФИЛТЕР ПРВОГ РЕДА, ПРОПУСНИК НИСКИХ УЧЕСТАНОСТИ

Математички модел динамичког елемента првог реда који пригушује фреквенцијске компоненте високе учестаности, а пропушта компоненте ниске учестаности дат је једначином:

$$T \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t), \quad (3.46)$$

$T$  је константа која има димензију времена. Овом моделу одговара алгебарска једначина у комплексном домену:

$$Ts Y(s) + Y(s) = X(s), \quad (3.47)$$

у којој  $X(s)$  и  $Y(s)$  представљају комплексне ликове улаза и излаза. Сређивањем, добијају се функција преноса:

$$W(s) = \frac{1}{1 + sT}, \quad (3.48)$$

и фреквенцијски одзив:

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}, \quad (3.49)$$

чији је нормализовани облик:

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{\omega_0 + j\omega}, \quad \omega_0 = \frac{1}{T}.$$

Амплитудска фреквенцијска карактеристика одређена је изразом:

$$W(\omega) = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}, \quad (3.50)$$

из којег следи да се сигнали ниских учестаности преносе без слабљења:

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow (W(\omega) \equiv W(0) = 1) \wedge (\varphi(\omega) \equiv \varphi(0) = 0).$$

Амплитуда сигнала високе учестаности смањује се сразмерно учестаности:

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \left( W(\omega) \equiv \frac{\omega_0}{\omega} \rightarrow 0 \right) \wedge \left( \varphi(\omega) \equiv -\frac{\pi}{2} \right).$$

Величина  $\omega_0$  представља граничну учестаност која раздваја пропусни и непропусни опсег (према дефиницији, то је учестаност при којој амплитудска фреквенцијска карактеристика опадне на вредност која је  $\sqrt{2}$  пута мања од вредности у пропусном опсегу).

Излазни сигнал (одзив) "фазно заостаје" (касни) за улазним сигналом (побудом). Фазна фреквенцијска карактеристика одређена је изразом:

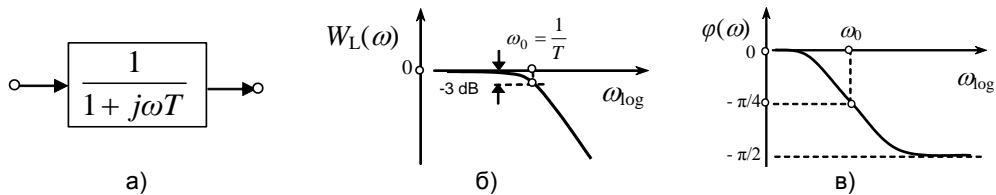
$$\varphi(\omega_g) = -\arctg \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (3.51)$$

На учестаности  $\omega_0$  померај фазе је  $-\pi/4$ .

Логаритамска амплитудска фреквенцијска карактеристика филтра првог реда, пропусника ниских учестаности приказана је на слици 3.22.a.

$$W_L(\omega) = 20 \log_{10} W(\omega). \quad (3.52)$$

Са повећањем учестаности, за  $\omega >> \omega_g$ , функција  $W_L(\omega)$  опада са нагибом -20 децибела по декади<sup>24</sup> (слика 3.22.б). На слици 3.22.в приказана је фазна фреквенцијска карактеристика.



Слика 3.22. Филтер првог реда, пропусник ниских учестаности

### 3.3.2.2 ФИЛТРИ ВИШЕГ РЕДА, ПРОПУСНИЦИ НИСКИХ УЧЕСТАНОСТИ

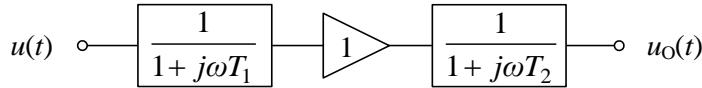
Филтер вишег реда може да се добије редном везом више елементарних ћелија првог реда. Ако се две филтерске ћелије повежу редно, тако да буду раздвојене јединичним појачавачем (слика 3.23), добија се филтер другог реда чија је фреквенцијска карактеристика:

$$W(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T_1} \cdot \frac{1}{1+j\omega T_2} = \frac{1}{T_1 T_2 (j\omega)^2 + (T_1 + T_2) j\omega + 1}. \quad (3.53)$$

Асимптотска амплитудска фреквенцијска карактеристика таквог филтра може да се сагледа на основу граничних вредности  $W(0) = 1$  и  $W(\infty) = 0$ . При

<sup>24</sup> На логаритамској скали, једнаки интервали представљају одређени умножак. На пример, повећање вредности за један подељак представља множење са десет. Такав интервал назива се декада (грч. *dékádos*, десетина, десеторица). Интервал који представља множење са два назива се октава (лат. *octo*, осам). Назив потиче из теорије музичких скала, а означава групу од осам тонова. Физички, осми тон, почевши од основног има два пута већу учестаност.

високим учестаностима први члан у имениоцу израза за фреквенцијску карактеристику постаје доминантан, па у логаритамском дијаграму асимптота има нагиб од -40 dB/dec.



Слика 3.23. Филтер другог реда

Ако су ћелије идентичне ( $T_1 = T_2 = T$ ) фреквенцијска карактеристика је одређена једначином:

$$W(j\omega) = \left( \frac{1}{1 + j\omega T} \right)^2. \quad (3.54)$$

У општем случају, функција преноса филтра другог реда обично се приказује у облику:

$$W(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}. \quad (3.55)$$

За  $\zeta > 1$  једначина 3.53 може да сведе на израз:

$$W(s) = \frac{1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{1}{T_2 s + 1}, \quad (3.56)$$

који одговара редној вези две ћелије првог реда чије су граничне учестаности  $1/T_1$  и  $1/T_2$ .

### 3.3.3 ПРОПУСНИЦИ ВИСОКИХ УЧЕСТАНОСТИ

Филтер пропусник високих учестаности остварује слабљење (потискивање) сталне<sup>25</sup> компоненте пулсирајуће величине. Када се улазна величина не мења, његов излаз је једнак нули. Само наизменична компонента улазне величине пролази на излаз.

Елемент чија функција преноса има облик:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{bs^n}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1}, \quad (3.57)$$

представља филтер пропусник високих учестаности  $n$ -тог реда.

#### 3.3.3.1 ФИЛТЕР ПРВОГ РЕДА, ПРОПУСНИК ВИСОКИХ УЧЕСТАНОСТИ

Математички модел елемента првог реда који пригушује ниско-, а пропушта високо-фреквентне компоненте спектра улазног сигнала дат је једначином:

<sup>25</sup> Сталне (константна) компонента пулсирајуће величине једнака је средњој вредности те величине, посматрана за један период (IEV IEC 131-03-08).

$$T \frac{dy}{dt} + y(t) = T \frac{dx}{dt}, \quad (3.58)$$

у којој  $x(t)$  представља улазну, а  $y(t)$  излазну величину.  $T$  је константа која има димензију времена. Овој једначини одговара фреквенцијска карактеристика:

$$W(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T}. \quad (3.59)$$

Амплитудска и фазна фреквенцијска карактеристика одређене су изразима:

$$W(\omega) = \frac{\omega T}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}, \text{ и } \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega T. \quad (3.60)$$

Логаритамска амплитудска карактеристика је приказана на слици 3.24.



Слика 3.24. Фреквенцијска карактеристика  
филтра првог реда, пропусника високих учестаности

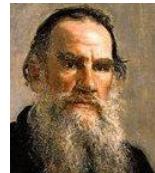
Граница учестаност,  $\omega_g$ , при којој слабљење сигнала износи  $\sqrt{2}$ , једнака је  $1/T$ . Померај фазе при граничној учестаности једнак је  $\pi/4$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 S. Glasston, *Atomska energija*, Naučna knjiga, 1960, s. 3.
- 2 П.Бошњаковић, *Основи електронике*, ВЕТШ, 2006.
- 3 S. Tešić, D. Vasiljević, *Osnovi elektronike*, Građevinska knjiga, 2000, s. 104.
- 4 S. Marjanović, *Elektronika, Diskretna i integrisana analogna kola*, Naučna knjiga, 1984, s. 286.
- 5 IEV, IEC 60050: part 131-15, *Circuit theory / Two-port and n-port networks*, 131-15-12.
- 6 Електрични и магнетски уређаји, Термини и дефиниције, ЈУС. Н.А0.151, 151-01-62
- 7 IEV, IEC 60050: part 131-12, *Circuit theory / Circuit elements and their characteristics*, 131-12-81
- 8 IEV, IEC 60050: part 351-32, *Control technology / Specific functional units in control technology*, 351-32-45.
- 9 IEV, IEC 60050: part 151-13, *Electric and magnetic circuits, Particular electric devices*, 151-13-50.
- 10 IEV, IEC 60050: part 351-24, *Control technology / Behaviour and characteristics of transfer elements*, 351-24-34.
- 11 П. Башњаковић, *Умеће мерења*, ВИШЕР, 2012, с. 324.
- 12 IEV, IEC 60050: part 702-07, *Oscillations, signals and related devices/Transmission characteristics and performance*, 702-07-02.
- 13 IEV, IEC 60050: part 351-28, *Control technology / Functional units of control systems*, 351-28-03.
- 14 Електрична и магнетска кола, Термини и дефиниције, ЈУС. Н.А0.131, 131-02-35
- 15 Реф. 9, 151-13-55.
- 16 П. Башњаковић, *Аналогна електроника, збирка решених испитних задатака*, ВЕТШ, 2005.
- 17 Реф. 6, 151-01-64
- 18 Реф. 9, 151-13-56.
- 19 Реф. 5, 131-15-38.
- 20 Д. Јовановић, *Основи електронике и телекомуникација*, Научна књига 1989, с. 197.

“Знање  
је тек онда знање  
кад је стечено напором  
властите мисли,  
а не памћењем.”

Лав Николајевич Толстој



## 4. НЕЛИНЕАРНА АНАЛОГНА ЕЛЕКТРОНСКА КОЛА

Линеарни модели електронских елемената су само апроксимација стварних односа који постоје између улазних и излазних величина. Модел се обликује тако да олакша сагледавање односа улаз-излаз, поједностави примена, односно пројектовање и прорачун сложених система. У сваком појединачном случају, изабрани модел представља компромис између сложености и тачности представљања. У довољно малој околини изабране радне тачке нелинеарна функција се може, применом Тейлорове формуле, са жељеном тачношћу представити линеарном функцијом. При већим одступањима, међутим, нелинеарност карактеристике долази до изражаја, због чега грешка апроксимације може да постане неприхватљиво велика. Да би се остварио пренос велике снаге потребно је да струја и напон имају што веће вредности. Са тим циљем се радни опсег појачавачких елемената проширује изван линеарног подручја, али тада излазни сигнал представља изобличену слику улазног сигнала<sup>1</sup>.

Међутим, нелинеарност није увек непожељна. Нелинеарни електронски елементи и кола имају широку и разноврсну примену у електронским уређајима. Заправо, линеарна електронска кола, иако имају посебан значај, представљају само мали део мноштва електронских кола која се у савременим уређајима користе за обраду сигнала. Обрада аналогних сигнала обухвата низ разнородних операција, које се не одликују својствима адитивности и хомогености. У овом поглављу разматрају се општа својства основних нелинеарних електронских кола.

### 4.1 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

При обради аналогних сигнала користе се и елементи чија се карактеристика преноса описује, на пример, квадратном функцијом:

$$u_K(t) = k_K u^2(t), \quad (4.1)$$

где је  $k_K$  сачинилац преноса “квадратора”, или логаритамском функцијом:

$$u_L(t) = k_L \ln \frac{u(t)}{U_{REF}}, \quad (4.2)$$

где је  $k_L$  сачинилац преноса “логаритамског појачавача”, који има димензију напона, а  $U_{REF}$  је референтни напон, са којим се улазни напон  $u(t)$  пореди, да

<sup>1</sup> И тако изобличен сигнал садржи информацију коју треба пренети.

би се логаритам бројне вредности овог количника представио напоном  $u_L(t)$ . Овде спада и генератор експоненцијалне функције:

$$u_E(t) = k_E e^{\frac{u(t)}{U_{\text{REF}}}}, \quad (4.3)$$

где је  $k_E$  сачинилац преноса, који има димензију напона, а  $U_{\text{REF}}$  је референтни напон, са којим се улазни напон  $u(t)$  пореди, да би бројна вредност овог количника представљала независно променљиву експоненцијалне функције  $e^x$ , која одређује вредност напона  $u_E(t)$ .

Примери нелинеарних елемената са два улаза и једним излазом су множач (*multiplier*):

$$u_M(t) = k_M u_1(t) \cdot u_2(t), \quad (4.4)$$

и делитељ (*divider*):

$$u_D(t) = k_D \frac{u_1(t)}{u_2(t)}. \quad (4.5)$$

Уобичајено је да се елементи чија је карактеристика улаз-излаз описана неком "типичном" нелинеарном функцијом називају "генератори функције" [1], [2]. На пример:

$$u_O(t) = k u_y(t) \left( \frac{u_y(t)}{u_z(t)} \right)^m, \quad (4.6)$$

или генератор синусне функције:

$$u_O(t) = k_S \sin \frac{u(t)}{u_{\text{REF}}}. \quad (4.7)$$

У групу нелинеарних елемената са једним улазом спадају и усмерач (*rectifier*), који на излаз "прослеђује" улазни сигнал само ако је већи, или само ако је мањи од нуле, и ограничавач (*limiter*), који "не дозвољава" да вредност сигнала на његовом излазу буде изван задатих граница. Њихова карактеристика се састоји из одговарајућег броја праволинијских сегмената.

## 4.2 УСМЕРАЧИ

Усмерач је елемент који на излаз "пропушта" само сигнал једног одређеног поларитета, позитивног или негативног, тако да излазна величина може да има само један знак. Разликују се два типа усмерача, једнострани<sup>2</sup> и двострани<sup>3</sup>.

При побуди наизменичним сигналом, једнострани усмерач пропушта на излаз само једну његову "страну", позитивну или негативну. Такав елемент је описан карактеристиком:

<sup>2</sup> У стручној литератури на српском језику користи се и назив "полуталасни усмерач" (од енг. *half-wave rectifier*).

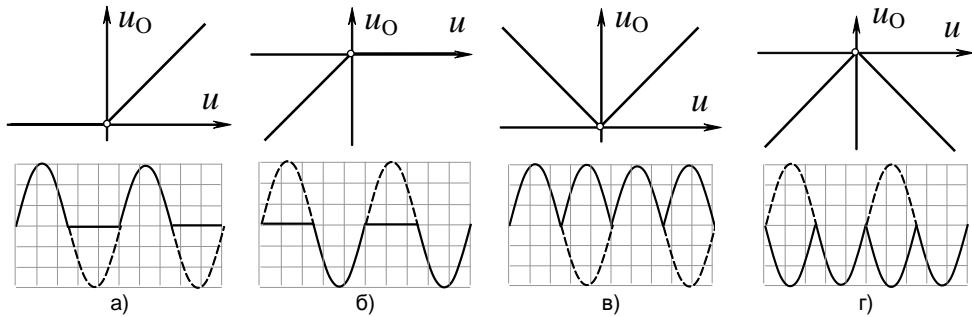
<sup>3</sup> Назив "пуноталасни усмерач" потиче из енглеског језика (*full-wave rectifier*).

$$u_O(t) = \begin{cases} u(t) & \text{ако је } u(t) \geq 0 \\ 0 & \text{ако је } u(t) < 0 \end{cases}, \quad (4.8)$$

ако пропушта само позитиван сигнал (слика 4.1.а), односно:

$$u_O(t) = \begin{cases} 0 & \text{ако је } u(t) \geq 0 \\ u(t) & \text{ако је } u(t) < 0 \end{cases}, \quad (4.9)$$

ако пропушта само негативан сигнал (слика 4.1.б).



Слика 4.1. Основни облици карактеристика преноса усмречача

Двострани (пуноталасни) усмречач остварује операцују одређивања апсолутне вредности улазне величине (модуо-коло). За елемент чија је карактеристика приказана на слици 4.1.в важи:

$$u_O(t) = |u(t)|. \quad (4.10)$$

На слици 4.1.г приказана је карактеристика инвертујећег модуо-кола, које на свом излазу даје непозитивни напон:

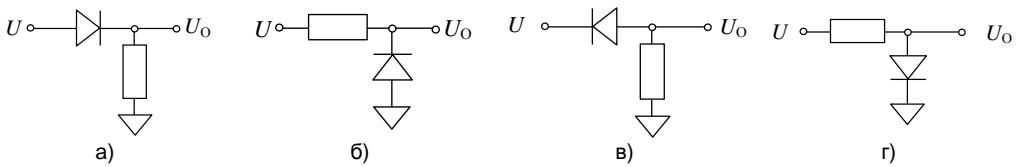
$$u_O(t) = -|u(t)|. \quad (4.11)$$

У основи ефекта усмречавања електричног сигнала је несиметрична проводност неког резистивног елемента. Управо таква својства има елемент који се назива диода. Савршена диода је "струјни усмречач". Она делује као електрични вентил (valve) који пропушта струју само у једном смеру<sup>4</sup>. Ово својство се користи за остваривање усмречача и ограничавача напона.

#### 4.2.1 ЈЕДНОСТРАНИ УСМЕРАЧ

Једнострани усмречач напона је најједноставније нелинеарно електронско коло. Ако је диода савршена, карактеристика улаз-излаз кола приказаних на слици 4.2.а и 4.2.б одређена је једначином 4.8. Излазни напон не може да буде негативан. За кола приказана на слици 4.2.в. и 4.2.г. важи једначина 4.9. Излазни напон не може да буде позитиван.

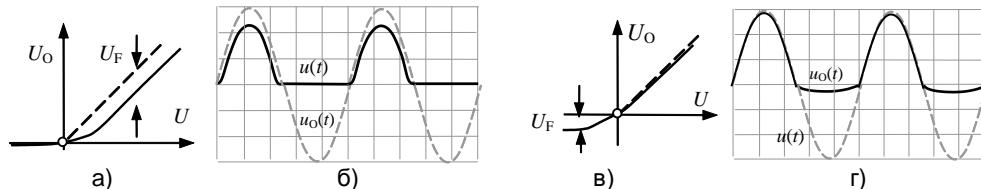
<sup>4</sup> Графички симбол диоде је, заправо, симбол вентила.



Основни недостатак ових једноставних кола је несавршеност диоде као усмерачког елемента. Зависност струје од напона код полуправдничке диоде описује се експоненцијалном функцијом (слика 2.8). Стварна статичка карактеристика "позитивног" диодног усмерача са слике 4.2.а има облик приказан на слици 4.3.а:

$$U_O = \begin{cases} U - U_F(U) & \text{ако је } U > 0 \\ 0 & \text{ако је } U = 0 \\ -RI_R(U) & \text{ако је } U < 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

где је  $U_F$  напон на диоди при директној поларизацији ( $U > 0$ ), а  $I_R$  струја која тече кроз диоду при инверзној поларизацији ( $U < 0$ ). Струја  $I_R$  је веома мала и, у великом броју случајева примене, може да се занемари. Пад напона на диоди, изближује излазни сигнал и смањује његову амплитуду. Одзив овог кола на побуду синусним напоном приказана је на слици 4.3.б.



Слика 4.3. Карактеристика диодног усмерача

На слици 4.3.в приказана је карактеристика улаз-излаз кола са слике 4.2.б:

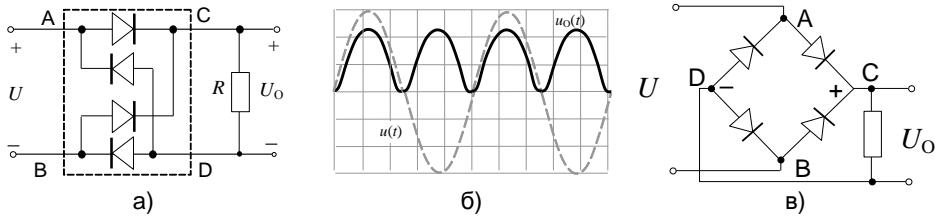
$$U_O = \begin{cases} U - RI_R(U) & \text{ако је } U > 0 \\ 0 & \text{ако је } U = 0 \\ -U_F(U) & \text{ако је } U < 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

Током позитивног полу периода улаз се скоро у потпуности преноси на излаз, што је у складу са наменом кола. Међутим, и током негативног полу периода нешто од улаза "процури" на излаз, што смањује тачност остваривања жељене операције. Одзив на побуду наизменичним напоном приказан је на слици 4.3.г.

## 4.2.2 ДВОСТРАНИ УСМЕРАЧ

Двострано усмеравање се најједноставније остварује помоћу четири диоде повезане на начин приказан на слици 4.4.а. Треба уочити да у овом

случају улазни и излазни приступ немају заједнички прикључак. На слици 4.4.б приказан је одзив двостраног усмерача на побуду наизменичним напоном. Амплитуда излазног напона је за пад напона на двема диодама мања од амплитуде улазног напона. Инвертујуће модуло-коло се добија укруштањем излазних прикључака C и D.



Слика 4.4. Диодни двострани усмерач

Четири усмерачке диоде у овој мрежи образују мост<sup>5</sup> (слика 4.4.в) тако да се извор улазног сигнала прикључује на “главну” (улазну) дијагоналу AB, а излаз узима са “мерне” (излазне) дијагонале CD. Струја кроз спољашње коло (оптерећење  $R$ ) може да протиче само у смjeru од прикључка C ка прикључку D. Карактеристика улаз-излаз кола овог кола описана је изразом:

$$U_O = \begin{cases} U - 2U_F(U) & \text{ако је } U > 0 \\ 0 & \text{ако је } U = 0 . \\ -U - 2U_F(U) & \text{ако је } U < 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

### 4.3 ОГРАНИЧАВАЧИ

У основном облику, ограничавач је елемент који “не дозвољава” да вредност сигнала, који прослеђује на свој излаз, буде већа од неке граничне вредности  $U_T$ . Математички модел таквог елемента је израз:

$$u_O(t) = \begin{cases} U_T & \text{за } u(t) \geq U_T \\ u(t) & \text{за } -U_T < u(t) < U_T \\ -U_T & \text{за } u(t) \leq -U_T \end{cases} . \quad (4.15)$$

Графички приказ карактеристике улаз-излаз и одзив на побуду синусним напоном чија је амплитуда већа од  $U_T$  приказани су на слици 4.5.



Слика 4.5. Симетрични ограничавач

<sup>5</sup> Електрична мрежа са два приступа која се састоји од четири елемената са два прикључка, повезана редно, назива се мост (bridge). Има широку примену у електротехници, а посебно у мерној техничци. Оваква структура, када је сачињена од диода, назива се Гречов мост.

У општем случају, ограничавањем се обезбеђује да вредност сигнала не буде изван неких задатих граница, које не морају да буду симетричне (слика 4.6). Тада важи:

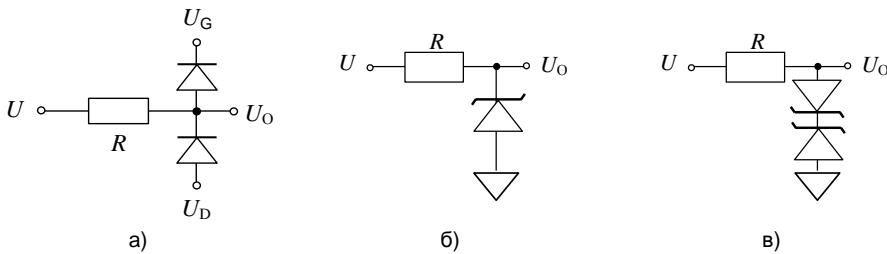
$$U_O = \begin{cases} U_G ; U \geq U_G \\ U ; U_D < U < U_G \\ U_D ; U \leq U_D \end{cases}, \quad (4.16)$$

где је  $U_D$  доња, а  $U_G$  горња гранична вредност "пропусног опсега". Претходно описані једнострані усміроч може да се посматра као ограничавач код којег је једна гранична вредност једнака нули, а друга бесконачна (позитивна или негативна).



Слика 4.6. Несиметрични ограничавач

Најједноставнији ограничавачи остварују се помоћу диода. Ако су диоде савршене, коло на слици 4.7.а остварује карактеристику 4.15. У колу на слици 4.7.б је  $U_D = 0$  и  $U_G = U_Z$ , где је  $U_Z$  напон инверзног пробоја Ценер-диоде. Коло које је приказано на слици 4.7.в има симетричне границе,  $U_Z$  и  $-U_Z$ .



Слика 4.7. Диодни ограничавачи

Основни недостатак ових једноставних кола потиче од диоде чији је математички модел глатка функција, тако да је на овај начин немогуће остварити "прелом" који захтева карактеристика прецизног ограничавача. При директној поларизацији, пад напона на диоди зависи од вредности струје. Стварна карактеристика улаз-излаз симетричног ограничавача са слике 4.7.в може да се моделује у деловима линеарном функцијом (слика 4.8):

$$U_O = \begin{cases} U_{(ZZO)} + r_{ZZ} \frac{U - U_{(ZZO)}}{R} & \text{ако је } U > U_{(ZZO)} \\ U & \text{ако је } |U| \leq U_{(ZZO)} \\ -U_{(ZZO)} + r_{ZZ} \frac{U + U_{(ZZO)}}{R} & \text{ако је } U < -U_{(ZZO)} \end{cases}, \quad (4.17)$$

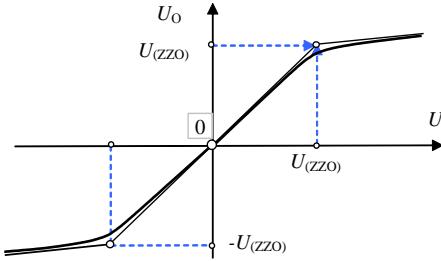
где је  $U_{(ZZO)}$  напон колена (инверзног пробоја) симетричне (двојне) Ценер-диоде:

$$U_{(ZZO)} = U_{(ZO)} + U_{(TO)}, \quad (4.18)$$

а  $r_{ZZ}$  отпорност нагиба њене  $U$ - $I$  карактеристике у области пробоја;

$$r_{ZZ} = r_Z + r_T . \quad (4.19)$$

Отпорност  $r_T$  представља отпорност нагиба Ценер-диоде при директној поларизацији, а отпорност  $r_Z$  нагиб њене  $U$ - $I$  карактеристике у области пробоја.



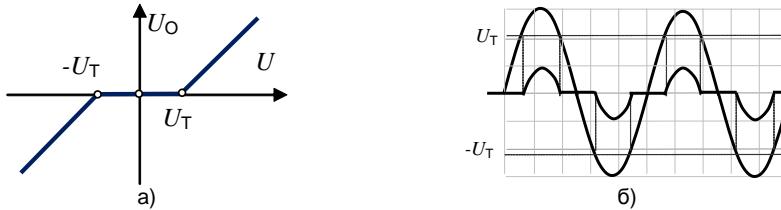
Слика 4.8. Карактеристика диодног ограничавача

#### 4.4 ГЕНЕРАТОРИ ФУНКЦИЈЕ

У техничким системима понекад је потребно да управљачки подсистем не делује на процес уколико се вредност посматране величине, која представља меру одступања од жељеног стања, налази унутар одређених граница. За такав систем постоји "мртва зона" (*dead band*), када је одзив једнак нули без обзира на вредност побуде. Такво понашање система омогућује елемент који улазни сигнал не прослеђује на свој излаз уколико је његова вредност мања од неке граничне вредности  $U_T$ . Када је апсолутна вредност улазне величине већа од задате граничне вредности, промене излаза сразмерне су променама улаза:

$$u_O(t) = \begin{cases} 0 & \text{ако је } |u(t)| \leq U_T \\ u(t) - U_T & \text{ако је } |u(t)| > U_T \end{cases}, \quad (4.20)$$

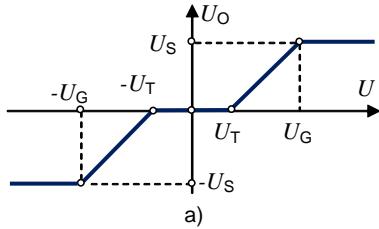
где је  $U_T$  "праг осетљивости" (*discrimination threshold*). Карактеристика таквог елемента приказана је на слици 4.9.а. На слици 4.9.б. приказан је одзив елемента на побуду хармонијским сигналом чија је амплитуда већа од  $U_T$ .



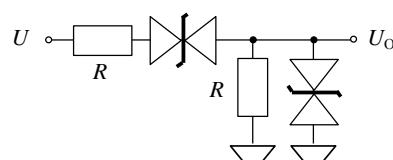
Слика 4.9. Мртва зона

У општем случају карактеристика улаз-излаз нелинеарног елемента може да представља у деловима линеарну функцију, као што је, на пример, функција приказана на слици 4.10 чији је математички модел:

$$U_O = \begin{cases} U_S & \text{за } U > U_G \\ k(U - U_T) & \text{за } U_T \leq U \leq U_G \\ 0 & \text{за } |U| \leq U_T \\ k(U + U_T) & \text{за } -U_G \leq U \leq -U_T \\ -U_2 & \text{за } U < -U_G \end{cases}, \quad k = \frac{U_S}{U_G - U_T}. \quad (4.21)$$



a)



б)

Слика 4.10. Генератор у деловима линеарне функције

На слици 4.10.б приказана је пасивна мрежа, која, ако су диоде савршене, представља електрични еквивалент елемента са карактеристиком 4.21, за коју важи:

$$U_T = U_S = U_{ZZ}, \quad (4.22)$$

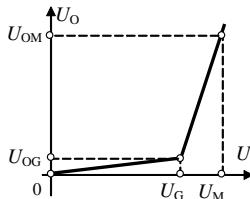
$$U_G = 3U_{ZZ} \text{ и} \quad (4.23)$$

$$k = \frac{1}{2}, \quad (4.24)$$

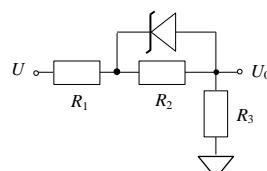
где је  $U_{ZZ}$  напон инверзног пробоја симетричне (двојне) Ценер-диоде.

Од мерних претварача, који се користе за надзор стања различитих индустријских процеса, често се захтева да карактеристика преноса буде "изломљена", тако да постоји више опсега, са различитим константама преноса. На овај начин се, у одређеном делу радног опсега, обезбеђује мерење са већом осетљивошћу. На слици 4.11.а. приказана је "изломљена" карактеристика, која се састоји из два линеарна сегмента, која омогућује да се већи део радног опсега вредности излазне величине (од  $U_{OG}$  до  $U_{OM}$ ) користи тако да одражава "мерни опсег од интереса" (од  $U_G$  до  $U_M$ ). Тако се постиче боља резолуција мерења у том подопсегу. На слици 4.11.б. приказан је електрични еквивалент елемента са таквом карактеристиком. Математички модел оваквог елемента је израз:

$$U_O = \begin{cases} k_1 U & \text{за } U < U_G \\ U_{OG} + k_2(U - U_G) & \text{за } U \geq U_G \end{cases}; \quad U_{OG} = k_1 U_G.$$



a)



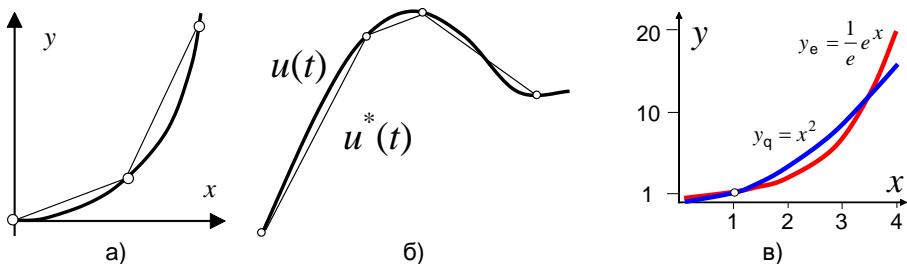
б)

Слика 4.11. Карактеристика мерног претварача

У начелу, било која функција може приближно да се представи "у деловима линеарном" функцијом<sup>6</sup>, као што је то приказано на слици 4.12.а [3].

<sup>6</sup> Математичку основу овоаквог поступка (*piecewise-linear approximation*) представља Тейлорова формула.

Грешка апраксимације је утолико мања уколико је број сегмената већи. У сваком појединачном случају, број сегмената и њихова ширина представљају компромис опречних захтева у погледу смањивања грешке апраксимације и остваривања што економичијег практичног решења (слика 4.12.б). У неким случајевима апраксимација може да буде заснована на нелинеарној карактеристици неког стварног елемента. На слици 4.12.в је приказана апраксимација квадратне функције нормализованом експоненцијалном функцијом, која представља карактеристику *PN*-споја (полупроводничке диоде).



Слика 4.12. Моделовање нелинеарне функције

Квадратна функција:

$$y(x) = x^2 ; 0 \leq x \leq X ,$$

може да се представи у деловима линеарном функцијом  $y^*(x)$  која има  $n$  сегмената једнаке ширине  $\Delta x$ :

$$\Delta x = \frac{X}{n} .$$

На слици 4.13 приказана је двосегментна апраксимација функцијом која има идентичне вредности у тачкама које одговарају границама сегмената. Унутр сваког  $k$ -тог сегмента функција  $y(x) = kx$  замењује се линеарном функцијом:

$$y_k^*(x) = x(x_k + x_{k+1}) - x_k x_{k+1}; \quad x_k \leq x \leq x_{k+1} .$$

Грешка апраксимације:

$$e = \delta y = y_k^*(x) - y(x) ,$$

је у овом случају увек позитивна. Највећу вредност има на средини сегмента:

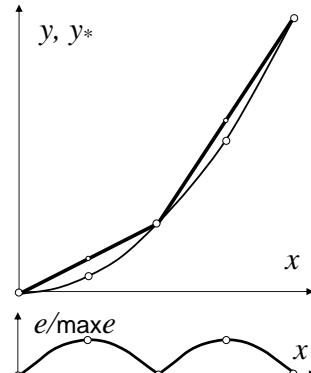
$$\max e = \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 .$$

На основу израза за максималну релативну грешку  $\varepsilon$ :

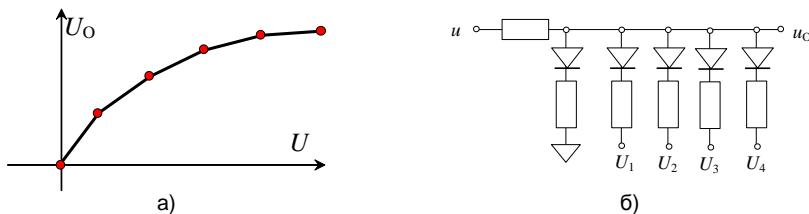
$$\max \varepsilon = \left( \frac{1}{2n} \right)^2 ,$$

може да се одреди потребан број сегмената тако да релативна грешка буде мања од задате вредности. Померањем преломних тачака  $y^*(x_k)$  може се постићи да грешка  $\varepsilon$  представља биполарну величину чиме се смањује њена апсолутна вредност.

Постоји више начина да се реализује функција која представља сегментну апраксимацију коришћењем диодно-отпорничких мрежа (слика 4.14.).



Слика 4.13. Линеарна сегментна апраксимација квадратне функције

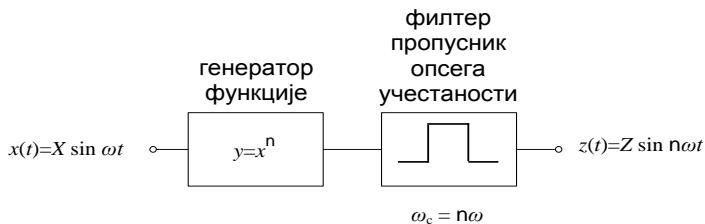


Слика 4.14. Диодни генератор функције

Генератори функција имају веома разноврсну примену у технички. Помоћу квадратора се, на пример, одређује (мери) електрична снага пасивног резистивног потрошача:

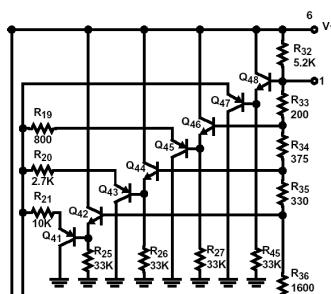
$$P = \frac{u^2}{R}.$$

Елемент којим се остварује степеновање може да се примени за остваривање множења учестаности хармонијског сигнала (слика 4.15).



Слика 4.15. Множач учестаности

Уобличавање сигнала симетричног троугаоног таласног облика у сигнал синусног облика може да се оствари помоћу филтра пропусника ниских учестаности (*low-pass filter, LPF*), али је тада амплитуда излазног сигнала зависна од учестаности. Овај проблем се успешно решава сегментном апроксимацијом. Алгоритам рада је такав да амплитуда не зависи од учестаности. На слици 4.16 приказан је генератор синусне функције, остварен поможу транзистора и одговарајуће отпорничке мреже, примењен у интегрисаним напонским контролисаним осцилаторима и генераторима сигнала правоугаоног, троугаоног и синусног облика *ICL8038* [4].



Слика 4.16. Уобличавач троугаоног сигнала у сигнал синусног облика

Постоје и друге могућности. Синусна функција, на пример, може да се представи редом:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad (4.25)$$

за чије електронско остварење је потребан сабирач и одговарајући број множача. При апроксимацији полиномом другог реда:

$$\sin x \approx 1,155x - 0,33x^2, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad (4.26)$$

грешка апроксимације је у границама  $\pm 2,1\%$ . Повећање тачности захтева већи број чланова. Примена генератора функција  $x'''$  (једначина 4.6) омогућује остваривање боље тачности помоћу компактних решења [5]. На пример функција:

$$y \approx x - \frac{x^{2.83}}{2\pi}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad (4.27)$$

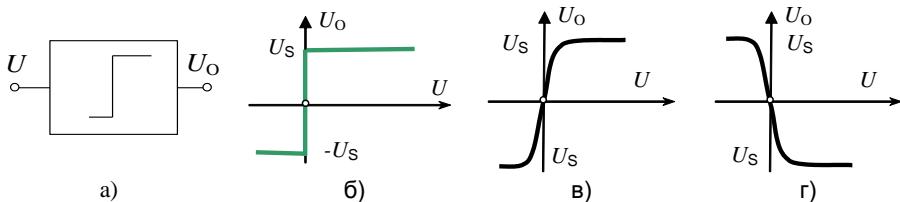
апроксимира функцију  $\sin x$  са грешком мањом од  $0,25\%$ .

## 4.5 КОМПАРАТОРИ

Елемент чија излазна величина може да заузме само једну од две дискретне вредности (*two-position element*), у зависности од вредности улазне величине, у електроници се назива компаратор. Са становишта обраде сигнала, компаратор је мешовити (хиbridни, аналогно-дигитални) елемент на чијем улазу делује аналогни сигнал, док излазни сигнал представља дигиталну (бинарну) величину<sup>7</sup>. У основном облику, компаратор остварује функцију знака (*signum function*). Вредност улазне величине пореди се са нулом<sup>8</sup>. Карактеристика напонског компаратора дефинисана је изразом:

$$U_O(U) = U_S \operatorname{sgn} U, \quad \operatorname{sgn} U = \begin{cases} 1 & \text{за } U > 0 \\ -1 & \text{за } U < 0 \end{cases}, \quad (4.28)$$

где је  $U_S$  константа која има димензију напона. Позитиван напон ( $+U_S$ ) на излазу компаратора означава да је улазни напон већи од нуле. Излаз компаратора је негативан ( $-U_S$ ), ако је напон на улазу мањи од нуле. На структурном блок дијаграму компаратор се обично приказује правоугаоником у којем је назначена сигнум-функција (слика 4.17.а).



<sup>7</sup> Компаратор је елементарни једнобитни аналогно-дигитални претварач.

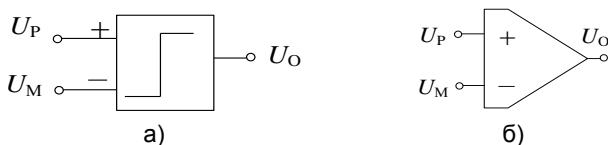
<sup>8</sup> У мерној техници, компаратор је елемент који омогућује поређење две величине (лат. *comparator*, сравњивач).

Функционално, компаратор је појачавач великог појачања, са израђеним ефектом засићења. Појачање може да буде позитивно (слика 4.17.в) или негативно<sup>9</sup> (слика 4.17.г). При биполарном напајању, позитиван напон на излазу неинвертујућег компаратора означава да је улазни напон већи од нуле. Инвертујући компаратор даје на свом излазу позитиван напон када је улазни напон мањи од нуле:

$$U_O(U) = \begin{cases} U_H \text{ за } U > 0 \\ U_L \text{ за } U < 0 \end{cases}. \quad (4.29)$$

Излаз напонског компаратора представља податак о знаку (поларитету) напона на његовом улазу. Добија се поређењем улазног напона са нулом. Диференцијални компаратор омогућује поређење два сигнала (слика 4.18.а):

$$U_O(U_D) = \begin{cases} U_H \text{ за } U_D > 0 \\ U_L \text{ за } U_D < 0 \end{cases}; \quad U_D = U_P - U_M. \quad (4.30)$$



Слика 4.18. Диференцијални компаратор

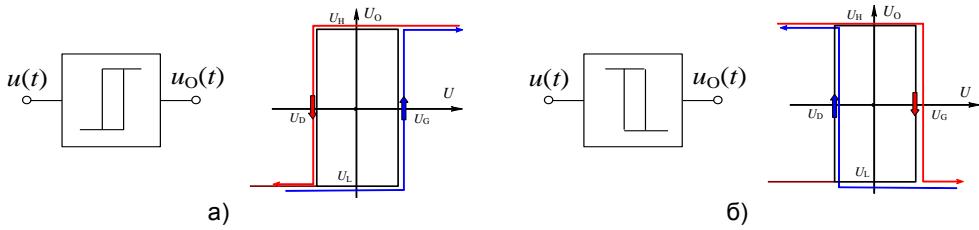
Функционално, диференцијални компаратор је диференцијални појачавач великог појачања. На слици 4.18.б дат је симбол којим се, у овој књизи, графички приказује диференцијални компаратор.

Диференцијални компаратори се производе као интегрисана кола. Излазни нивои одговарају вредностима којима су у дигиталном систему представљена логичка нула и логичка јединица.

У општем случају, промена излазне величине може да наступи при различитим вредностима улазне величине, зависно од смера промене улазне величине [6]. Карактеристика таквог двоположајног елемента приказана је на слици 4.19. У електроници, такав елемент се назива компаратор са хистерезисом<sup>10</sup>. На слици 4.19.а приказани су графички симбол и статичка карактеристика неинвертујућег компаратора са хистерезисом. Прелазак са нижег на виши напонски ниво на излазу остварује се када улазни напон порасте до горње граничне вредности  $U_G$ . Прелазак са вишег на нижи напонски ново на излазу остварује се када улазни напон опадне до доње граничне вредности  $U_D$ .

<sup>9</sup> Инвертујући појачавач.

<sup>10</sup> Хистерезис је својство система чије излазне величине не зависе само од улазних величине, већ и од "предисторије" система. На карактеристици улаз-излаз исказује се постојањем одвојених грана за растуће и опадајуће вредности улазне величине. Будуће стање система зависи од "пута промене". Назив потиче од грч. *chystereo*, закашњавање, заостајање.



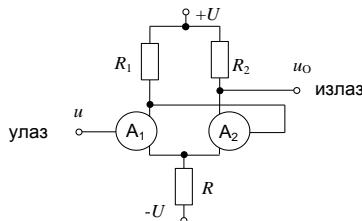
Слика 4.19. Компаратор са хистерезисом

Када се вредност улазне величине налази изван опсега  $[U_D, U_G]$ , стање на излазу је једнозначно одређено тренутном вредношћу улазног сигнала. Када се вредност улазне величине налази унутар опсега  $[U_D, U_G]$ , вредност на излазу кола једнака је оној која је успостављена приликом последње промене стања. Праг поређења зависи од стања излаза. Математички модел таквог елемента је израз:

$$u_O(t) = \begin{cases} U_H & \text{за } u(t) \geq U_G \\ u_O(t-0) & \text{за } U_D < u(t) < U_G \\ 0 & \text{за } u(t) \leq U_D \end{cases} \quad (4.31)$$

На слици 4.19.б приказани су графички симбол и статичка карактеристика инвертујућег компаратора са хистерезисом. У овом случају, прелазак са вишег на нижи напонски ново на излазу остварује се када улазни напон порасте до горње граничне вредности  $U_G$ . Прелазак са нижег на виши напонски ниво на излазу остварује се када улазни напон опадне до доње граничне вредности  $U_D$ .

Карактеристика компаратора са хистерезисом може да се добије применом диференцијалног паре појачавачких елемената, повезивањем излаза једног од елемената са улазом другог. На слици 4.20 је приказан неинвертујући компаратор са хистерезисом. Уобичајено је да се оваква структура назива "Шмитово коло" или "Шмитов тригер".



Слика 4.20. Шмитов тригер

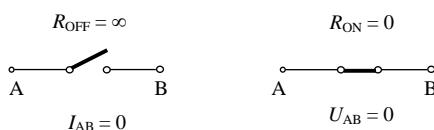
Постоје два стационарна стања једнозначно одређена стањем појачавачких елемената  $A_1$  и  $A_2$  који раде у прекидачком режиму. Када је  $A_1$  у проводном стању, елемент  $A_2$  је закочен, и обрнуто. Промена стања настаје када улазни напон достигне одговарајућу вредност. Измена се одвија веома брзо, јер започети процес има регенеративан карактер<sup>11</sup>.

<sup>11</sup> Регенеративан је процес који, када је подстакнут, сам себе одржава (као што су, на пример процеси "паљења" и "гашења" тиристора).

Компаратори са хистерезисом примењују се за уобличавање сигнала и као елементи регулационог дела система за вођење разноврсних индустријских процеса.

## 4.6 ПРЕКИДАЧИ

У нелинеарне електронске елементе могу да се сврстају и електрични прекидачи помоћу којих се мења структура неке електричне мреже, а тиме и начин рада, односно стање одређеног кола. Савршени електрични прекидач (*switch*) је елемент чија унутрашња отпорност, између крајева A и B, који представљају његове прикључке, може да буде једнака нули или бесконачна (слика 4.21).

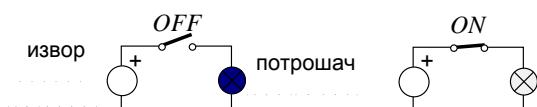


Слика 4.21. Електрични прекидач

Каже се да је прекидач “искључен” (*off*), када је отпорност између његових крајева (прикључака) бесконачно велика (чиме је прекинуто струјно коло гране у којој се налази). Напон  $U_{AB}$  између крајева A и B прекидача када је он отворен одређен је стањем спољашњег кола. Струја кроз савршен прекидач који се налази у стању “искључен” једнака је нули без обзира на вредност овог напона. Када је прекидач “укључен” (*on*), струјно коло је затворено, отпорност између његових крајева једнака је нули. Струја кроз прекидач одређена је стањем спољашњег кола. Напон између крајева затвореног прекидача једнак је нули без обзира на вредност струје која кроз њега протиче. Са становишта статичке тачности, најближи физички еквивалент савршеног електричног прекидача је склоп којим се, механички, успоставља или прекида проводна веза између две тачке електричног кола.

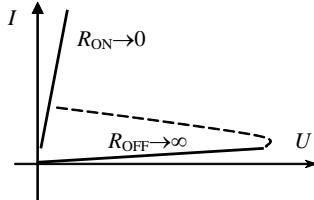
Отпорност савршеног прекидача је једнака нули, када је прекидач “затворен”, односно бесконачно велика, када је прекидач “отворен”.

Стање прекидача (отворен, затворен) представља бинарну променљиву. Уобичајено је да се ова стања означавају са “*OFF*” и “*ON*”.



Начином рада, електрични прекидач може да буде аутоматски или управљани. Аутоматски прекидач је елемент са једним приступом (два прикључка) који се активира када контролисана величина (струја кроз затворени прекидач, или напон између крајева отвореног прекидача) прекорачи неку вредност. Тиристорски диодни прекидач (*diac*), на пример, укључује се када напон између прикључака отвореног прекидача достигне вредност при којој започиње процес који елемент преводи у проводно стање,

којем одговара мала унутрашња отпорност (слика 4.22). Прекидач се искључује када струја кроз њега опадне испод вредности при којој се проводно стање одржава (*holding current*).



Слика 4.22. Тиристорска карактеристика

Многоструко ширу примену имају прекидачи код којих је стање укључен/искључен одређено вредношћу бинарне управљачке променљиве  $s$  (слика 4.23). Када је прекидач отворен ( $s = 0$ ), струјно коло је прекинуто ( $G = 0$ ). Када је прекидач затворен ( $s = 1$ ), струјно коло је затворено ( $G = \infty$ ):

$$R_{AB} = \begin{cases} 0; s = 1 \\ \infty; s = 0 \end{cases}. \quad (4.32)$$



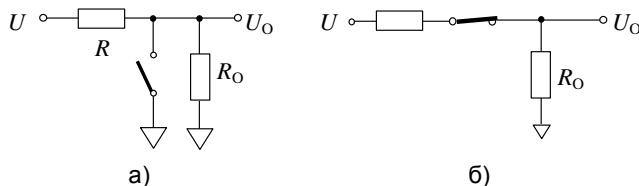
Слика 4.23. Управљани прекидач

Помоћу управљаних прекидача се мења конфигурација аналогних електронских кола и остварују све функције обраде сигнала у дигиталној електроници. Такав прекидач је основни елемент на којем се заснива рад дигиталних кола, уређаја и система. Управљани електрични прекидач има два приступа. Начином рада, такав прекидач може да буде електромеханички (реле) или електронски.

Електромеханички склоп који обавља функцију електрички управљаног прекидача којим се укључују и искључују делови електричних кола односно мрежа, назива се реле (*relay*). Рад овог елемента заснован је на магнетском дејству електричне струје. Магнетско коло релеа се састоји од феромагнетног језгра на којем је смештено тело калема (*coil*) са намотајем, наспрам којег се налази покретна котва која омогућује механичко спајање контаката. Магнетско коло није затворено, између језгра и покретне котве постоји ваздушни процеп (зазор, *gap*). Када се калем електромагнета приклучи на извор побудног напона, услед протицања струје кроз намотаје ствара се магнетско поље које на котву делује силом која тежи да је привуче. Померање котве се преноси на контакте, изазивајући њихово спајање или раздвајање, зависно од конструкције. Котва је у свом лежишту учвршћена еластичном опругом (плочицом) која је враћа у мирни положај када реле није побуђено ("енергизовано"). Унутрашња отпорност таквог прекидача је мања од ома, када је прекидач укључен ( $R_{ON}$ ), односно већа од тераома, када је прекидач искључен ( $R_{OFF}$ ).

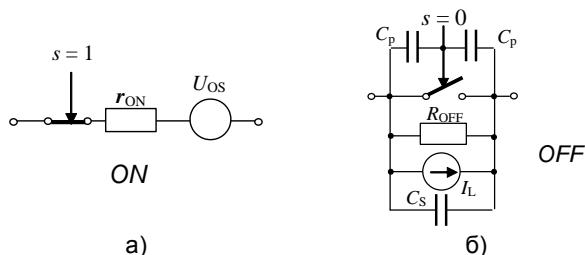
Основни недостаци електромеханичким прекидача су спорост и сразмерно велика снага потребна за њихову побуду. Трополни појачавачки елементи представљају управљање електронске прекидаче, ако је деловање управљачког сигнала такво да радну тачку елемента "држи" у одређеној области  $U-I$  равни, независно од напона између његових крајева, када је закочен, односно од струје коју пропушта када је у проводном стању<sup>12</sup>. Електронски прекидачи су неупоредиво бржи, али и мање савршени када је упитању статичка тачност. Отпорност  $R_{ON}$  је за више од два реда величине већа, а отпорност  $R_{OFF}$  за више од три реда величине мања. Њихово време одзива, међутим, је за више од четири реда величине краће.

Разликују се два начина везивања прекидача у колу: паралелно и редно. У првом случају (слика 4.24.а), улазни сигнал се прослеђује на излаз када је прекидач отворен. Затварањем прекидача, излаз се "баца на нулу". У другом случају (слика 4.24.б), улазни сигнал се прослеђује на излаз када је прекидач затворен. Отварањем прекидача раскида се веза улаз-излаз.



Слика 4.24. Паралелни и редни спој прекидача

При пројектовању прекидачких кола треба имати у виду да стварни прекидач у затвореном стању ( $ON$ ) има сопствену унутрашњу отпорност,  $r_{ON}$  која није једнака нули. Осим тога, између крајњих тачака (прикључака) затвореног прекидача може да постоји разлика потенцијала (напон помераја, офсет,  $U_{OS}$ ) и када је струја кроз прекидач једнака нули<sup>13</sup> (слика 4.25.а).



Слика 4.25. Еквивалентно коло отвореног и затвореног прекидача

<sup>12</sup> Када се биполарни транзистор користи као појачавач, спој база-емитор се поларише у пропусном, а спој база-колектор у непропусном смеру. Да би се постигао појачавачки ефекат помоћу спојног транзистора са ефектом поља, спој гејт-канал треба да буде инверзно поларисан. Међутим, када се исти активни елемент користи као прекидач, који има само два стања (води – не води), услови рада су другачији. Радна тачка биполарног транзистора, када се користи као прекидач, налази се или у области засићења, или у области закочења, зависно од вредности напона база-емитор.

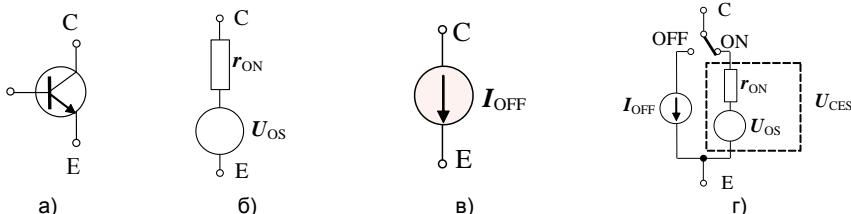
<sup>13</sup> Код електромеханичког прекидача то је разлика потенцијала која се јавља на његовим контактима (*contact potential*). Код биполарних транзистора то је напон засићења колектор-емитор.

Када је прекидач отворен (*OFF*) треба узимати у обзир коначну паралелну отпорност,  $R_{OFF}$ , паразитне капацитивности,  $C_p$ , као и струју цурења (одвода)  $I_L$ , коју код полуправодничких елемената одређује инверзна струја  $PN$ -споја (слика 4.25.б).

#### 4.6.1 БИПОЛАРНИ ТРАНЗИСТОР КАО ПРЕКИДАЧ

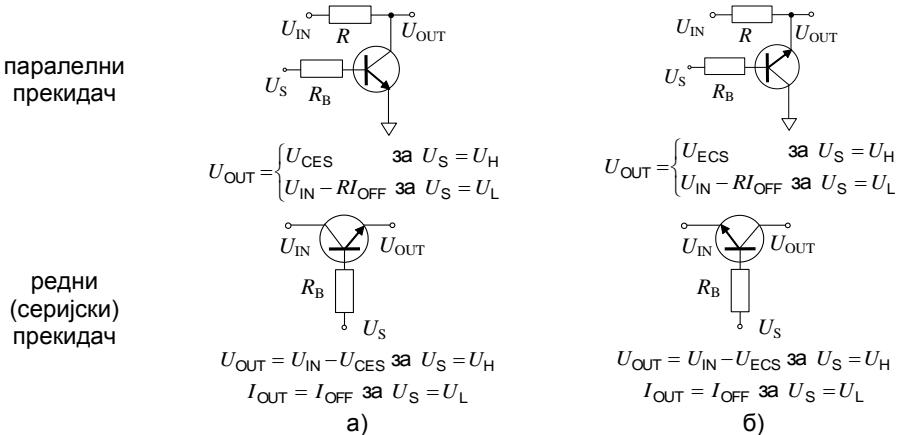
Биполарни транзистор може да се посматра као елемент чијом се унутрашњом отпорношћу (отпорност између колектора и емитора) управља помоћу сигнала који се доводи на његову базу (слика 4.26.а). Карактеристике биполарног транзистора у засићењу и закочењу одговарају стањима затвореног и отвореног несавршеног прекидача. Када се налази у засићењу, биполарни транзистор се може моделовати редном везом извора напона  $U_{OS}$  и отпорника  $r_{ON}$  који представља унутрашњу отпорност затвореног прекидача (слика 4.26.б). Закочен транзистор се може представити као извор струје "цурења"  $I_{OFF}$  (слика 4.26.в). Еквивалентно коло транзисторског прекидача, приказано на слици 4.26.г, садржи савршени прекидач и изворе несавршености које представљају извор струје цурења,  $I_{OFF}$ , и извор напона засићења,  $U_{CES}$ :

$$U_{CES} = U_{ON} + r_{ON} I_C. \quad (4.33)$$



Слика 4.26. Еквивалентно коло биполарног транзистора као прекидача

Основни облици везивања биполарног транзистора, када се примењује као прекидач, приказани су на слици 4.27. У инверзном режиму рада транзистора (колона б), појачање струје је много мање, али је и напон засићења  $U_{ECS}$  мањи од напона  $U_{CES}$  [7].



Слика 4.27. Основни облици везивања прекидача

## ЛИТЕРАТУРА

- 
- 1 Y.Y. Wong, W.E.Ott, *Function Circuits*, McGraw-Hill, 1975.
  - 2 P.R. Gray, *Analysis and Design of Analog Integrated Circuits*, John Wiley, 2001.
  - 3 D.S. Sheingold, *Nonlinear circuits Handbook*, Analog Devices, 1976.
  - 4 ICL8038, *Precision Waveform Generator/Voltage controlled Oscillator*, Harris semiconductors.
  - 5 J.G. Graeme, *Designing with Operational Amplifiers*, Burr-Brown, 1977.
  - 6 IEV, IEC 60050: part 351-28, *Control technology / Functional units of control systems*, 351-28-34.
  - 7 H. Taub, D. Schilling, *Digital Integrated Electronics*, Mc Graw Hill, 1977, p.465.

“Учење без размишљања  
бескорисно је,  
али је и размишљање  
без учења  
опасно”  
*Konfucije*



## 5. ПОВРАТНА СПРЕГА У ЕЛЕКТРОНСКИМ КОЛИМА

Појам повратне спреге заузима значајно место у општој теорији система. Настанак ове области, као посебне научне дисциплине, обично се повезује са објављивањем књиге Норберта Винера “Кибернетика<sup>1</sup>”, или управљање и комуникација код живих бића и машина” [1]. Поникao у машинству, метод управљања заснован на идеји о повратном деловању постао је саставни део опште културе образованог човека<sup>2</sup>. Рад мноштва савремених аутоматизованих техничких система почива на примени повратне спреге. Посебан значај она има у електроници, не само при реализацији појединих операција обраде сигнала, [2], већ и као фундаменталан концепт при изради сложених целина. Повратна спрега омогућује побољшање својства појединих функционалних јединица, па се методологија анализе и синтезе система са повратном спрегом користи као општа теоријска основа за развој електронских уређаја. У појачавачима, на пример, она омогућује стабилизацију појачања, побољшање фреквенцијског одзива и смањивање изобличења. Позитивна повратна спрега се користи у осцилаторима, *U/I* претварачима и претварачима импедансе, компараторима и уобличавачима сигнална.

У овом поглављу приказани су основи теорије система са повратном спрегом, посматране пре свега са становишта њене примене при анализи и синтези електронских система. Дате су дефиниције најзначајнијих појмова и називи који су усвојени на међународном нивоу [3]. Посебна пажња посвећена је појмовима и терминима који су својствени електроници [4]. Разматрају се општа својства система са повратном спрегом и анализира утицај који она има на својства електронских појачавача.

### 5.1. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ О ПОВРАТНОЈ СПРЕЗИ

Електронски појачавач у најопштијем смислу, независно од врсте појачавачких елемената који су коришћени за његову израду, делује као

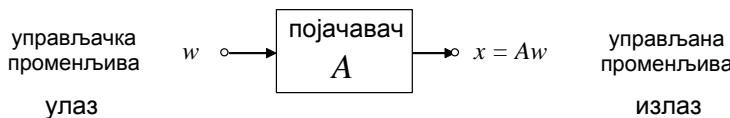
<sup>1</sup> Кибернетика је област науке која се бави теоријским и практичним аспектима комуникација и управљања системима живих бића и машина. По својој природи она представља мултидисциплинарну област која доприноси премошћивању јаза створеног уским специјализацијама појединих дисциплина науке и технике. Назив, у смислу “вештина управљања”, потиче од грчке речи *kibernaō* (χιβερνάω), управљам.

<sup>2</sup> Повратна спрега је инхерентно својство многих процеса. У савременој неурологији, на пример, појам повратне спреге (*feedback*) користи се за описивања процеса који се одвијају у нервном систему живих бића.

систем чији је задатак да оствари “праћење” временски променљиве улазне величине. Излазни сигнал треба да представља слику улазног сигнала. Промена улазне величине (*input variable*) савршеног појачавача треба да се преслика у сразмерну промену величине на његовом излазу (*output variable*). Електронски појачавач може да се посматра као регулатор<sup>3</sup> који аутоматски управља излазном величином  $x$ , на основу вредности улазне величине  $w$ , при чему је алгоритам управљања дат линеарном једначином (слика 5.1):

$$x = Aw, \quad (5.1)$$

где је  $A$  сачинилац чија вредност у општем случају зависи од појачавачких својства активних елемената<sup>4</sup>, као и вредности отпорности неких резистивних елемената примењених у колу појачавача.



Слика 5.1. Појачавач као систем аутоматског управљања

При пројектовању електронских кола се настоји да се осигура тачност коју захтева одређена обрада сигнала, али и да буде испуњено и мноштво других критеријума, на основу којих се вреднује квалитет исхода пројекта. На избор структуре решења и вредности елемената у колу утичу још и ограничења у погледу вредности напона и струје, електрична снага којом се електрична енергија претвара у топлоту, димензије уређаја, погодност за одржавање, као и други техно-економски показатељи. Свако остварено решење представља резултат низа компромиса. Стварни системи (као и њихови делови) поједиње постављене пројектне захтеве испуњавају, мање или више успешно, само у одређеним радним условима. Бројна ограничења при пројектовању и спрезању функционалних делова често имају, као резултат, потребу да се изврши додатна “поправка” (корекција<sup>5</sup>) да би се побољшала карактеристика улаз-излаз система или испунили неки посебни захтеви. У начелу, то може да се постигне увођењем “коректора” тако да се излазу основног кола (којим се остварује задата операција обраде сигнала) додаје сигнал поправке, која зависи од вредности улазне величине. На слици 5.2.a приказана је примена оваквог поступка на примеру појачавача<sup>6</sup> чија се карактеристика улаз-излаз може да представи изразом:

$$x = kw + \Delta x(w), \quad (5.2)$$

где је  $\Delta x$  одступање стварне карактеристике  $x(w)$  од оне савршене, која представља праву линију која пролази кроз координатни почетак<sup>7</sup>. Величина  $\Delta x$  зависи од вредности улазне величине  $w$  (слика 5.2.b). Излаз кола,  $z$ , у овом

<sup>3</sup> Назив потиче од лат. *regulare*, уређивање, довођење у ред.

<sup>4</sup> Појачавачка својства електронске цеви описује сачинилац који се назива стрмина ( $\mu$ ), Код биполарног транзистора то је појачање струје ( $\beta$ ), а код транзистора са ефектом погља проводност преноса ( $g_m$ ).

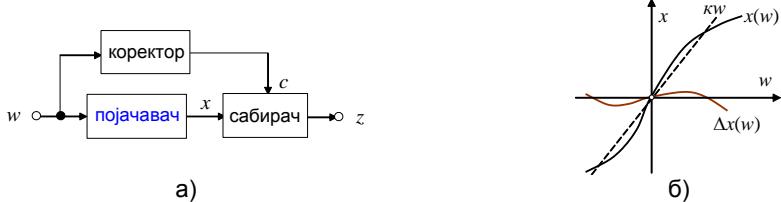
<sup>5</sup> Од лат. *correctio*, исправка, исправљање.

<sup>6</sup> Под називом “појачавач” овде се, у најопштијем смислу, подразумева елемент који производи излазни сигнал који представља неизобличени “лик” улаза. Промене излаза ( $y$ ) сразмерне су променама улаза ( $x$ ). Сачинилац сразмере је “појачање” овог елемента.

<sup>7</sup> Ово одступање назива се “грешка нелинеарности”.

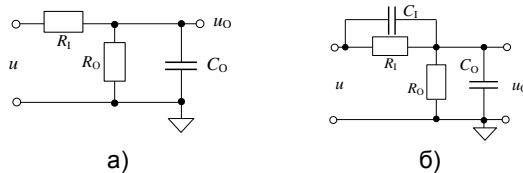
случају представља збир појачаног сигнала,  $x$ , и поправке,  $c$ , коју одређује коректор чија карактеристика преноса одговара нелинеарности појачавача:

$$c = -\Delta x(w) \quad (5.3)$$



Слика 5.2. Поправка карактеристике преноса појачавача

Ово је универзални и често најједноставнији начин да се побољшају карактеристике улаз-излаз неког система (елемента). Отпорнички делитељ напона, приказан на слици 5.3.а, може да послужи као пример једноставне примене метода "поправке". Кондензатор  $C_O$  представља укупну капацитивност којом је делитељ напона, који чине отпорници  $R_I$  и  $R_O$ , оптерећен на свом излазу. Њу чине паразитна капацитивност проводника за спајање и сопствена капацитивност улаза кола на који се сигнал води. Ова мрежа делује као пасивни елемент који утиче и на амплитуду и на фазу сигнала који треба да проследи.



Слика 5.3. Поправка фреквенцијске карактеристике делитеља напона

Утицај капацитивности  $C_O$  може да се одстрани помоћу кондензатора  $C_I$ , који је прикључен паралелно улазном отпорнику  $R_I$  (слика 5.3.б). Фреквенцијска карактеристика овог кола одређена је изразом:

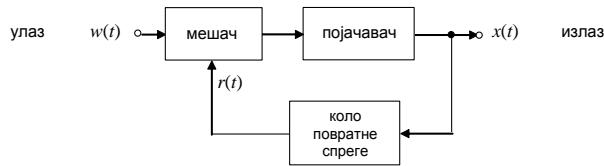
$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{R_I}{R_O} \frac{1 + j\omega R_O C_O}{1 + j\omega R_I C_I}} \quad (5.4)$$

Уколико је испуњен услов  $R_I C_I = R_O C_O$ , фреквенцијска карактеристика кола не зависи од учестаности. То значи да такав делитељ напона утиче само на амплитуду сигнала који преноси, а не и на његов облик:

$$\frac{u_O}{u} = \frac{R_O}{R_I + R_O}, \quad (5.5)$$

Метод поправке, приказан на слици 5.2.б, заснива се на увођењу нове путање сигнала којом се он додатно "вуче" на излаз (*feedforward*), обрађен са циљем да се поништи ефекат несавршености основног кола. Сигнал поправке се одређује "паралелном" обрадом улазног сигнала.

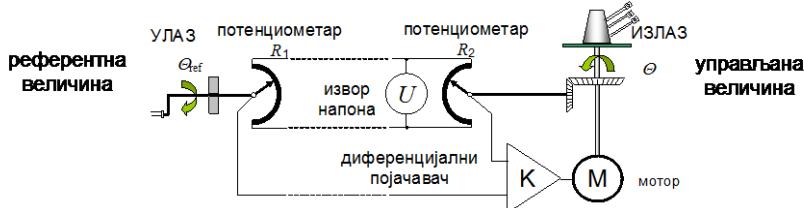
Промена карактеристике улаз-излаз може да се оствари и на други начин: посредним “враћањем” излазног сигнала на улаз појачавача. Такав систем је приказан на слици 5.4.



Слика 5.4. Метод повратне спреге

Појачава се сигнал  $e(t)$  добијен комбиновањем улазног сигнала  $w(t)$  и сигнала  $r(t)$ , који у себи садржи информацију о стварној вредности излазне (управљање) величине  $x(t)$ . Погодним “мешањем” сигнала улаза и излаза система остварује се повратно дејство излаза на улаз појачавача [5]. Одзив појачавача код којег је уведена повратна спрега (*feedback*)<sup>8</sup> разликује се од одзива појачавача без повратне спреге. У основном облику, “мешање” сигнала се своди на формирање њиховог збира или разлике.

Телемеханички<sup>9</sup> позициони сервосистем<sup>10</sup>, приказан на слици 5.5, представља класичан пример примене повратне спреге за остваривање даљинског управљања. Управљана величина, угаони положај осовине удаљене платформе (артиљеријског оружја или радарске антене) мери се помоћу потенциометра<sup>11</sup>  $R_2$ , чији клизач је круто спрегнут са осовином чијим се положајем управља.



Слика 5.5. Даљинско управљање положајем

Електрични напон добијен на клизачу потенциометра  $R_2$  пореди се са напоном добијеним на клизачу потенциометра  $R_1$ , помоћу којег се мери референтни (задати) угао  $\theta_{\text{ref}}$ . Разлика ова два напона, који представљају сигнал грешке, доводи се на улаз појачавача  $K$  који преко мотора  $M$  окреће платформу у смеру у којем се вредност диференцијалног напона на улазу

<sup>8</sup> У стручној литератури на српском језику, за означавање повратног дејства са излаза на улаз система (елемента) користи се и термин “реакција”.

<sup>9</sup> Телемеханика (*telemechanic*) је област технике која се бави управљањем машинама на даљину, посебно радио путем. Нагли развој ове дисциплине, половином двадесетог века, био је подстакнут другим светским ратом.

<sup>10</sup> Затворен систем у коме је управљана величина механички положај.

<sup>11</sup> Потенциометар је подесиви отпорник, електромеханички склоп који представља пасивни резистивни елемент са три краја, од којих је један клизни контакт. Омогућује механичко подешавање отпорности у електричном колу. У мерној технички, потенциометар је направа која омогућује мерење разлике потенцијала (“мерни потенциометар”). Напон који се мери уравнотежава се познатим напоном добијеним пропуштањем константне струје кроз подесиви отпорник, или подесиве струје кроз отпорник сталне отпорности (поглавље 11).

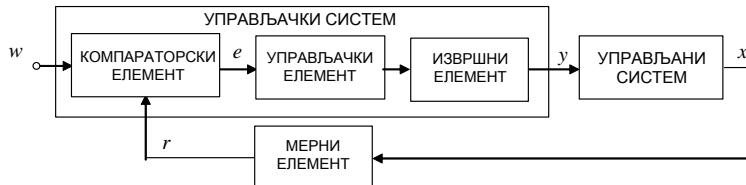
појачавача смањује. Систем је у равнотежи, ако је напон на улазу појачавача једнак нули, односно, ако је угао излазне осовине  $\theta$  једнак референтном углу  $\theta_{ref}$ , задатом на командном месту. Излазна величина прати<sup>12</sup> улазну величину, која одређује жељени правац [6]. У савременим системима, вредност референтне величине (угла) може да буде податак који генерише рачунарски систем, на основу предефинисаног програма управљања или наредбе коју је руковаоц издао преко тастатуре, екрана осетљивог на додир или гласом, а информација се од командног центра до управљаног објекта преноси у дигиталном облику.

Још у старом Риму повратна спрега се примењивала за регулацију нивоа воде у аквадуктима. Научни развој теорије управљања техничким системима започео је, заправо, у доба индустријске револуције. Шкотски инжењер и проналазач Ват (James Watt, 1736-1819) развио је центрифугални регулатор брзине парне машине (1769). Век касније, његов земљак Максвел (James Clerk Maxwell, 1831-1879) извршио је математичку анализу повратне спреге и проблема стабилности на примеру Ватовог регулатора.



Максвел

У општем случају, улазна и излазна величина система са повратном спрегом не морају да имају исту физичку природу. У грани повратне спреге тада се налази одговарајући мерни претварач<sup>13</sup> [7]. Мерењем се добија информација о величини величине која представља излаз система [8], [9]. Принцип деловања, међутим, исти је као и у описаном систему управљања положајем, и може да се представи функционалним дијаграмом приказаним на слици 5.6.



Слика 5.6. Систем аутоматског управљања

Управљачки систем (*controlling system*) делује на систем којим управља (*controlled system*), тако да, и у присуству поремећаја, управљана величина (*controlled variable*)  $x(t)$  прати, што је могуће брже и што је могуће тачније, референтну величину (*reference variable*)  $w(t)$ . То се постиже тако што се, помоћу одговарајућег мерног елемента (*measuring element*) генерише сигнал  $r(t)$ , који садржи информацију о стварној вредности управљане величине (*feedback variable*), да би се, на основу њега и сигнала  $w(t)$ , којим је дефинисано жељено стање управљаног система, формирало дејство (*action*) којим се систем доводи у жељено стање.

У теорији управљања процесима, део система који омогућује да се добије информација о одступању управљане величине  $x$  од жељене вредности, назива се компаратор (*comparing element*) [10]. Помоћу њега се

<sup>12</sup> Праћење је један од основних типова задатака у системима управљања [5].

<sup>13</sup> Под називом "мерни претварач" (*measuring transducer*) овде се, у најопштијем смислу, подразумева мерни уређај који на свом излазу даје величину која је у одређеном односу према улазној величини.

остварује поређење референтне величине  $w$  са величином  $r$  која показује стање система. У аналогној електроници, овај задатак обавља диференцијални појачавач (појачавач разлике два сигнала). Компаратор (лат. *comparator*, сравњивач) је елемент помоћу којег се остварује поређење величине две величине исте физичке природе. На његовом излазу добија се бинарни (логички) сигнал који садржи информацију која је од улазних величина већа. Са циљем да се избегне могућност забуне, у овој књизи се елемент помоћу којег се формира сигнал  $e$  (*error variable*), који се води на управљачки елемент, назива "дискриминатор".

Управљачки систем обухвата дискриминатор, управљачки и извршни елемент. Управљачки елемент (*controlling element*), на основу сигнала који представља излаз дискриминатора, побуђује извршни елемент који делује на управљани систем тако да се смањује разлика између жељене и стварне вредности управљање величине. Компараторски и управљачки елемент заједно чине контролер<sup>14</sup> (*controller*) [11]. Извршни елемент (актуатор<sup>15</sup>) непосредно делује на систем којим се управља [12].

Општи блок-дијаграм система са повратном спрегом приказан је на слици 5.7. Обичајени симбол, којим се на функционалном дијаграму система са повратном спрегом приказује место (тачка) на којем се сигнали алгебарски сабирају (*summing point*, точка сумирања), је круг. Алгебарски знак, када је то потребно, поставља се са десне стране улазне линије [13].



Слика 5.7. Систем са повратном спрегом

Управљање у затвореној петљи (*closed-loop control*, *feedback control*) је процес којим се управљана величина мери и пореди са другом (референтном) величином, на основу чега се генерише дејство, такво да се управљана величина подеси према референтној величини. На тај начин, управљана величина, кроз затворену петљу, делује сама на себе [14]. При описивању система управљања, заснованих на повратној спрежи, користе се неки специфични појмови:

- директна путања,
- путања повратне спреге и
- петља управљања.

Директна путања (*forward path*) повезује излаз дискриминатора (компаратора) са излазом система. Путања повратне спреге (*feedback path*) повезује излаз система са једним од улаза дискриминатора. Она пролази кроз мерни елемент помоћу којег се добија сигнал повратне спреге. Петља управљања (*control loop*) је скуп елемената повезаних са циљем остваривања управљања у затвореној петљи.

<sup>14</sup> У литератури старијег датума користи се назив "регулатор".

<sup>15</sup> Назив потиче из доба када је аутоматско управљање "припадало" машинству.

У општем случају, величине  $w$  и  $x$  не морају да имају исту димензију. Димензија сачиниоца  $A$  одређена је димензијама излазне и улазне величине:

$$\dim A = \frac{\dim x}{\dim w}. \quad (5.6)$$

Да би могле да се алгебарски сабирају, величине  $w$  и  $r$  морају да имају исту димензију:

$$\dim r = \dim w. \quad (5.7)$$

Према томе, за димензију сачиниоца  $\beta$  важи:

$$\dim \beta = \frac{\dim r}{\dim x} = \frac{\dim w}{\dim x} = \frac{1}{\dim A}. \quad (5.8)$$

Другим речима, мора увек да буде испуњен димензиони однос:

$$\dim A \cdot \dim \beta = 1. \quad (5.9)$$

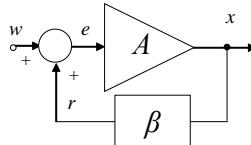
За време другог светског рата, амерички математичар Винер (*Norbert Wiener*, 1894-1964), бавећи се разрадом и применом електронских рачунских машина за балистичке прорачуне, повезао је задатак усмешавања противавионске ватре са теоријом аутоматског управљања. Сагледавајући општост принципа повратне спреге, поставио је принципе нове науке, кибернетике.



Винер

## 5.2. ПОЈАЧАВАЧ СА ПОВРАТНОМ СПРЕГОМ

У свом најједноставнијем, а са становишта електронике, најзначајнијем облику, систем са повратном спрегом састоји се од појачавача, који омогућује жељено пресликовање  $w \rightarrow x$ , и мрног елемента који има задатак да омогући добијање информације о стварној вредности излазне (управљање) величине (слика 5.8). Величина  $A$  је сачинилац преноса сигнала дуж директне путање. Величина  $\beta$  представља укупан сачинилац преноса путање повратне спреге<sup>16</sup>.



Слика 5.8. Појачавач са повратном спрегом

Математички модел овог система чине једначине:

$$e(t) = w(t) + r(t), \quad (5.10)$$

$$r(t) = \beta x(t) \text{ и} \quad (5.11)$$

$$x(t) = Ae(t). \quad (5.12)$$

<sup>16</sup> Ознаке  $A$  и  $\beta$  су традиционалне. Иако нису обухваћене стандардима Међународне електротехничке комисије, примењују се још увек, нарочито у електроници, при разматрању општих својстава појачавача са повратном спрегом.

на основу којих следи:

$$x = A(w + r) = A(w + \beta x). \quad (5.13)$$

Сређивањем последњег израза добија се:

$$x(1 - \beta A) = Aw. \quad (5.14)$$

Уколико је задовољен услов:

$$1 - \beta A \neq 0 \quad (5.15)$$

сигнал на излазу система са повратном спрегом одређен је једначином:

$$x(t) = \frac{A}{1 - \beta A} w(t), \quad (5.16)$$

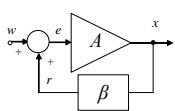
на основу које следи израз за карактеристику преноса<sup>17</sup>  $A_F$ :

$$A_F = \frac{x}{w} = \frac{A}{1 - \beta A}. \quad (5.17)$$

Са становишта појачања сигнала, значајан је модуо величине  $A_F$ :

$$|A_F| = \frac{|A|}{|1 - \beta A|}. \quad (5.18)$$

У том погледу, системи са повратном спрегом се деле у две групе (табела 5.1). Позитивна повратна спрега повећава појачање (*positive feedback, regenerative feedback*) [15], [16]. Негативном повратном спрегом појачање се смањује (*negative feedback*) [17]. Именилац у изразу 5.17, представља "сачинилац дејства" који показује "кличину" деловања повратне спреге (*amount of feedback*). Њиме је одређен карактер повратне спреге у колу појачавача<sup>18</sup>.



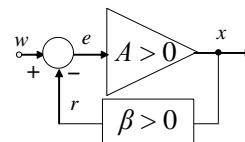
укупно појачање	сачинилац дејства	повратна спрега
$ A_F  >  A $	$ 1 - \beta A  < 1$	позитивна
$ A_F  <  A $	$ 1 - \beta A  > 1$	негативна

Табела 5.1 Врсте повратне спреге

Ако су сачиниоци преноса  $A$  и  $\beta$ , реални позитивни бројеви, за остваривање негативне повратне спреге<sup>19</sup> потребно је да на његов улаз делује разлика улазног сигнала и сигнала повратне спреге:

$$e(t) = w(t) - r(t).$$

$$(5.19) \quad \text{негативном повратном спрегом}$$



Слика 5.9. Појачавач са

<sup>17</sup> У стручној литератури на енглеском језику, уобичајено је да се ова величина назива "појачање са затвореном петљом" (*closed-loop gain*) и означава са  $A_{CL}$ . Сачинилац  $A$  се тада назива "појачање са отвореном петљом" (*open-loop gain*).

<sup>18</sup> У литератури старијег датума, величина  $1 - \beta A$ , која показује утицај повратне спреге на деловање система, назива се, понекад, "функција реакције".

<sup>19</sup> Оваква повратна спрега назива се "негативна" (нем. *negative Rückkopplung*, рус. отрицательная обратная связь), или "дегеративна" (*degenerative feedback*), јер смањује сигнал на улазу појачавача, иако се одликује низом "позитивних" својстава и има најшири примену у техничким системима аутоматског управљања.

Тада важи:

$$A_F = \frac{x}{w} = \frac{A}{1 + \beta A}. \quad (5.20)$$

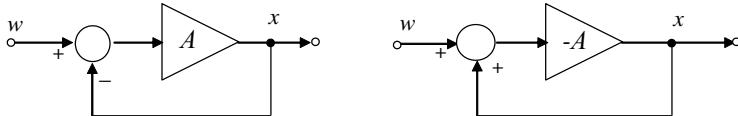
Негативна повратна спрега смањује укупно појачање сигнала, јер смањује сигнал  $e$  који делује на улазу појачавача:

$$e = \frac{x}{A} = \frac{1}{1 + \beta A} w. \quad (5.21)$$

Ако је  $\beta A \gg 1$  биће  $e \approx 0$ ,  $r \approx w$ . Појачање  $A_F$  тада зависи само од својства мрног елемента, који генерише сигнал повратне спреге<sup>20</sup>: [18]

$$A_F = \frac{1}{\beta}. \quad (5.22)$$

Вредност укупног појачања  $A_F$  задаје се избором вредности сачиниоца  $\beta$ . Да би појачање  $A_F$  било веће од један потребно је да  $\beta$  буде мање од један. Када улаз и излаз система представљају величине исте природе, повратна спрега може да буде остварена "враћањем" излаза на улаз. Ако је  $\beta = 1$ , негативном повратном спрегом добија се "пратећи систем" (слика 5.10). За  $A \gg 1$  следи  $x \approx w$ . Вредност излазне величине не зависи од вредности појачања  $A$ .



Слика 5.10. Пратећи систем

У општем случају, елемент у грани повратне спреге може да буде нелинеаран:

$$r = F(x). \quad (5.23)$$

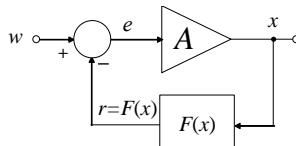
Ако сигнал  $e$ , који делује на улазу појачавача, представља разлику улазног сигнала и сигнала повратне спреге (слика 5.11):

$$e(t) = w(t) - r(t), \quad (5.24)$$

излазна величина  $x$  одређена је изразом:

$$x = F^{-1}\left(w - \frac{r}{A}\right). \quad (5.25)$$

у којем  $F^{-1}$  означава инверзну функцију функције  $F$ .



Слика 5.11. Систем са нелинеарном повратном спрегом

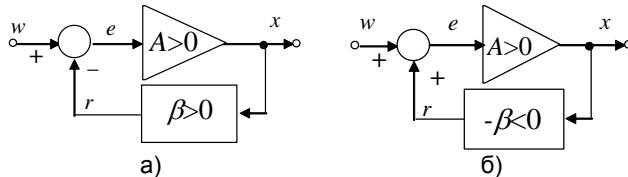
<sup>20</sup> Производ  $\beta A$  је "појачање петље" (loop gain) [18]. У стручној литератури на српском језику користи се и назив "кружно појачање".

У систему са јаком негативном повратном спрегом ( $e \ll w$ ), излазна величина одређена је изразом:

$$x = F^{-1}(w). \quad (5.26)$$

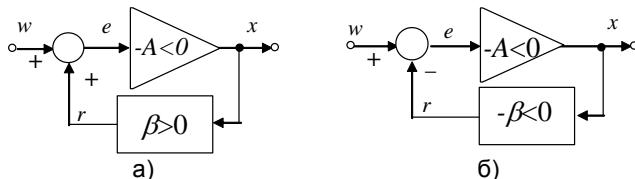
Ово је веома важан закључак са становишта практичне реализације разноврсних техничких система, посебно у електроници. Задатак остваривања жељеног пресликавања  $w \rightarrow x$ , може да се замени задатком остваривања инверзног пресликавања, што, у неким случајевима, омогућује једноставније или тачније решење постављеног проблема. Операција кореновања, на пример, може да се оствари применом операције множења.

Појачање појачавача у директној грани система са повратном спрегом може да буде позитивно или негативно. У начелу, то важи и за сачинилац преноса путање повратне спрете. Негативна повратна спрега у колу неинвертујућег појачавача може да буде остварена помоћу дискриминатора (слика 5.12.a) или сабирача (слика 5.12.b), ако елемент у грани повратне спрете мења знак. У оба случаја, излазни сигнал има исти знак (поларитет) као и улазни сигнал.



Слика 5.12. Неинвертујући појачавач са негативном повратном спрегом

Негативна повратна спрега у колу инвертујућег појачавача може да буде остварена помоћу сабирача (слика 5.13.a), ако је сачинилац преноса елемента у грани повратне позитиван, или помоћу дискриминатора (слика 5.13.b), ако елемент у грани повратне спрете мења знак.



Слика 5.13. Инвертујући појачавач са негативном повратном спрегом

Негативна повратна спрега смањује укупно појачање сигнала, јер смањује сигнал  $e$  који делује на улазу појачавача. За систем са неинвертујућим појачавачем у директној грани, слика 5.12, важи:

$$e = \frac{x}{A} = \frac{1}{1 + \beta A} w < w, \quad (5.27)$$

$$A_F = \frac{A}{1 + \beta A}. \quad (5.28)$$

За систем са инвертујућим појачавачем, слика 5.13, важи:

$$A_F = \frac{-A}{1 + \beta A}. \quad (5.29)$$

Ако је испуњен услов  $\beta A \gg 1$ , за систем са неинвертујућим појачавачем следи:

$$A_F \approx \frac{1}{\beta}, \quad (5.30)$$

односно, за систем са инвертујућим појачавачем у директној грани:

$$A_F \approx -\frac{1}{\beta}. \quad (5.31)$$

Јака негативна повратна спрега ( $\beta A \gg 1$ ) чини да појачање система не зависи од вредности појачања појачавача у директној грани. Сигнал грешке смањује се на нулу ( $e \approx 0, r \approx w$ ).

### 5.2.1 УЛАЗНА И ИЗЛАЗНА ОТПОРНОСТ

Начин извођења повратне спрете у електричним колима зависи од типа појачавача, односно од физичке природе (димензије) улазне и излазне величине. У зависности од тога која величина представља носилац информације на улазној страни, коло повратне спрете се приклjučuje редно (серијски), када је управљачка величина напон (појачавач напона или транскондуктансни појачавач), или паралелно, када је управљачка променљива струја (појачавач струје или трансрезистансни појачавач). На слици 5.14. приказана је електрична шема спајања појачавача напона са негативном повратном спрегом.



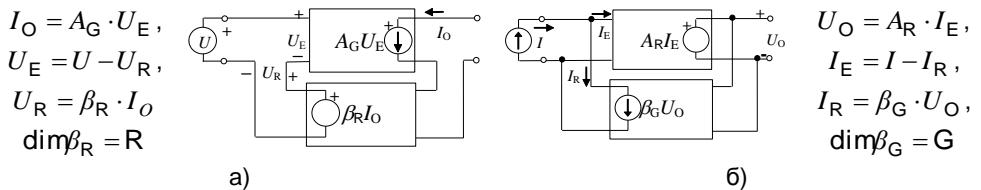
Слика 5.14. Појачавач напона са негативном повратном спрегом

Слика 5.15. приказује начин спајања појачавача струје са негативном повратном спрегом.



Слика 5.15. Појачавач струје са негативном повратном спрегом

На слици 5.16 приказане су везе када улазна и излазна величина немају исту физичку природу.



Слика 5.16. Транскондуктансни и трансрезистансни појачавач са негативном повратном спрегом

У литератури се користе два различита приступа сврставању облика повратне спреге у електронским колима. У електротехници, најприродније је да се подела заснива на физичкој природи величине која је носилац информације о стању система (управљана променљива). Са тог становишта разликују се напонска и струјна повратна спрега [19]. Даља подела може да се изврши према начину прикључивања повратне спреге на улазној страни (табела 5.2, колона 2). “Тополошки” приступ заснован је на означавању начина спрезања на улазу и излазу система (табела 5.2, колона 3) [20].

тип појачавача	врста спреге	слика
појачавач напона	напонско-редна	редно-паралелна <sup>21</sup>
трансрезистансни појачавач	напонско-паралелна	паралелно-паралелна
појачавач струје	струјно-паралелна	паралелно-редна
транскондуктански појачавач	струјно-редна	редно-редна

Табела 5.2 Врсте повратне спреге у електронским колима

Обе поделе су, у основи, формалне. Прва је заснована на опису излаз-улаз, а друга улаз-излаз, што, не ретко, доведи у недоумицу. Са становишта функционалне анализе и синтезе електронских кола, полазни податак је физичка природа величине којом се управља (*manipulated variable*), односно која се користи да се оствари повратно дејство на улаз система. Оно што може, сасвим оправдано, да се усвоји да се у електротехници подразумева, је да се електрични напон мери паралелним прикључивањем одговарајућег мерног средства (волтметра) на излаз електричног кола. Традиционални начин мерења електричне струје остварује се уметањем одговарајућег мерног средства (амперметра) у грану кроз коју противче струја која се мери. На улазу појачавача, код којег напон представља улазну величину (појачавач напона и транскондуктански појачавач), сабирање се, природно, остварује редном везом (слике 5.14 и 5.16.а). На улазу појачавача, код којег струја представља улазну величину (појачавач струје и трансрезистансни појачавач), сабирање се остварује паралелном везом (слике 5.15 и 5.16.б). Одговарајућим повезивањем излазних прикључака елемената повратне спреге постиже се да повратна спрега буде позитивна или негативна<sup>22</sup>.

### 5.2.1.1. УЛАЗНА ОТПОРНОСТ ПОЈАЧАВАЧА СА НЕГАТИВНОМ ПОВРАТНОМ СПРЕГОМ

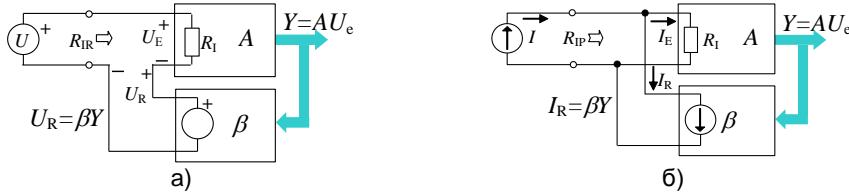
Деловање повратне спреге на улазну отпорност појачавача са повратном спрегом зависи од тога која величина представља носилац информације на улазној страни. У систему са редном везом на улазу (слика 5.17.а), повећање улазне струје при повећању улазног напона, мање је него у одсуству повратне спреге. То значи да, при појачању напонског сигнала, негативна повратна спрега повећава улазну отпорност,  $R_{IF}$ , система као целине:

<sup>21</sup> Енг. “series-shunt feedback”.

<sup>22</sup> Ако је у директној грани примењен неинвертујући појачавач, извори напона  $U_I$  и  $U_F$  се везују “у опозицију”, а извори струја  $I_I$  и  $I_F$  “антиспаралелно”.

$$R_{IF} = \frac{U}{I} = \frac{U_R + U_E}{I} = \frac{\beta A \cdot U_E + U_E}{I} = (1 + \beta A) \frac{U_E}{I_E} = (1 + \beta A) R_I, \quad (5.32)$$

где је  $R_I$  улазна отпорност појачавача напона у директној грани.



Слика 5.17. Утицај негативне повратне спреге на улазну отпорност

У систему са паралелном везом на улазу (слика 5.17.б), повећање улазног напона при повећању улазне струје, мање је него у одсуству повратне спреге. Улазна отпорност система са повратном спрегом,  $R_{IF}$ , једнака је:

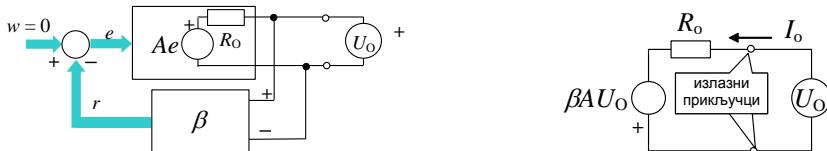
$$R_{IF} = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_E + I_R} = \frac{U}{I_E + \beta A I_E} = \frac{1}{(1 + \beta A)} \frac{U}{I_E} = \frac{R_I}{(1 + \beta A)}, \quad (5.33)$$

где је  $R_I$  улазна отпорност појачавача струје у директној грани. То значи да при појачању струјног сигнала, негативна повратна спрела смањује улазну отпорност.

Увођењем негативне повратне спреге побољшавају се својства појачавача, посматраног са улазне стране. Ако је референтна величина напонски сигнал, улазна отпорност се повећава. При струјној побуди, улазна отпорност се смањује.

### 5.2.1.2. ИЗЛАЗНА ОТПОРНОСТ ПОЈАЧАВАЧА СА ПОВРАТНОМ СПРЕГОМ

Излазна отпорност система са напонском повратном спрегом може, математички, да се одреди анализом стања које би се успоставило у систему када би, у одсуству побуде на улазу ( $w = 0$ ), на излазне крајеве система био прикључен спољашни извор напона  $U_O$  (слика 5.18).



Слика 5.18. Утицај напонске негативне повратне спреге на излазну отпорност

На основу једначина које, независно од физичке природе улазне величине, важе у овим условима:

$$e = -r = -\beta U_O, \text{ и} \quad (5.34)$$

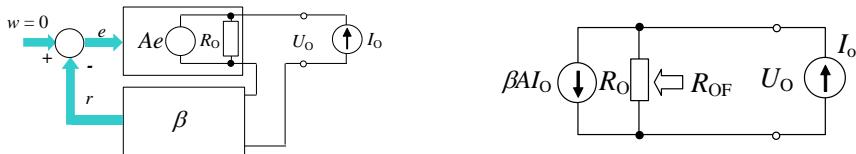
$$I_O = \frac{U_O - Ae}{R_O} = \frac{U_O (1 + \beta A)}{R_O}, \quad (5.35)$$

излазна отпорност појачавача са напонском повратном спрегом једнака је:

$$R_{OF} = \left. \frac{U_O}{I_O} \right|_{w=0} = \frac{R_O}{1 + \beta A}. \quad (5.36)$$

Напонска негативна повратна спрела смањује излазну отпорност.

Излазна отпорност система са струјном повратном спрегом може да се одреди анализом стања у одсуству побуде на улазу, када је на излазне крајеве система прикључен спољашни извор струје  $I_O$  (слика 5.19).



Слика 5.19. Утицај струјне негативне повратне спреле на излазну отпорност

На основу једначине која важи у овим условима:

$$U_O = R_O(I_O - Ae) = R_O I_O (1 + \beta A). \quad (5.37)$$

добија се израз за излазну отпорност појачавача са струјном повратном спрегом:

$$R_{OF} = R_O(1 + \beta A). \quad (5.38)$$

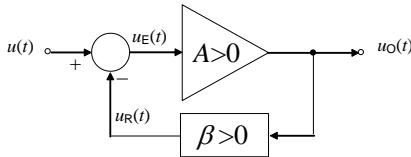
на основу којег се закључује да струјна негативна повратна спрела повећава излазну отпорност појачавача са струјним излазом.

Увођењем негативне повратне спреле побољшавају се својства појачавача, посматраног са излазне стране. Ако је управљана величина напон, излазна отпорност се смањује. Ако је управљана величина струја, излазна отпорност се повећава.

### 5.3. ПОЈАЧАВАЧ НАПОНА СА НЕГАТИВНОМ ПОВРАТНОМ СПРЕГОМ

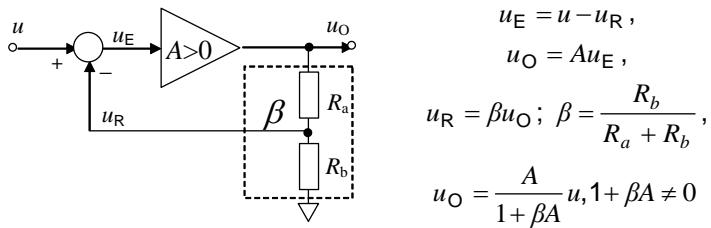
Концепт повратне спреле примењује се у електроници независно од врсте појачавача у директној грани система. Ипак, повратна спрела се најчешће изводи "око" појачавача напона, па је најподесније да се на примеру такве структуре анализирају нека заједничка обележја система са повратном спрегом. На слици 5.20. приказан је општи структурни блок-дијаграм неинвертујућег појачавача напона са негативном повратном спрелом. Уколико је задовољен услов  $\beta A \neq -1$ , укупно појачање,  $A_F$ , једнако је:

$$A_F = \frac{U_O}{U} = \frac{A}{1 + \beta A}. \quad (5.39)$$



Слика 5.20. Појачавач напона са негативном повратном спрегом

Ако је  $\beta A \gg 1$  укупно појачање  $A_F$  зависи само од својства елемента који одређује сигнал повратне спреге (једначине 5.30 и 5.31). Вредност  $A_F$  задаје се избором вредности сачиниоца  $\beta$ . Да би појачање  $A_F$  било веће од један потребно је да  $\beta$  буде мање од један (на улаз се враћа део излазног напона). Повратна спрела се враћа преко делитеља напона (слика 5.21).



Слика 5.21. Неинвертујући појачавач напона са негативном повратном спрегом

Појачање целопуног система,  $A_F$ , једнако је:

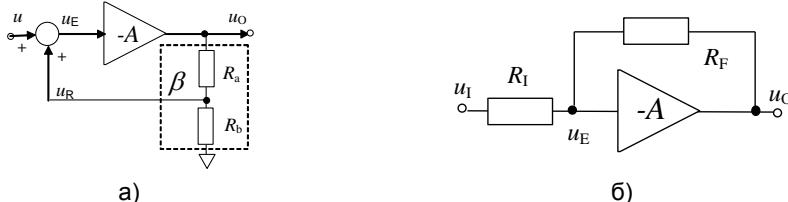
$$A_F = \frac{A}{1 + \beta A} = \frac{A \left(1 + \frac{R_b}{R_a}\right)}{1 + \frac{R_b}{R_a} (1 + A)} = \frac{A(R_a + R_b)}{R_a + R_b(1 + A)}. \quad (5.40)$$

Ако је појачање  $A$  веома велико:

$$A_F \approx \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{R_a}{R_b}. \quad (5.41)$$

Појачање  $A_F$  је мање од  $A$ , али не може да буде мање од један. Ако је  $A \gg 1$  и  $R_a/R_b = 0$ , добија се јединични појачавач (*unity-gain amplifier*) чији сачинилац преноса не зависи од величине  $A$ .

За систем са инвертујућим појачавачем (слика 5.22.a) напон на улазу појачавача треба да представља збир улазног и излазног напона. Ако улазна струја појачавача може да се занемари, напон  $u_E$  добија се једноставно, помоћу пасивне мреже коју чине отпорници  $R_I$  и  $R_F$  (слика 5.22.б).



Слика 5.22. Инвертујући појачавач напона са негативном повратном спрегом

На основу принципа суперпозиције следи:

$$u_O = -A \left( u_I \frac{R_F}{R_I + R_F} + u_O \frac{R_I}{R_I + R_F} \right), \quad (5.42)$$

односно:

$$A_F = \frac{u_O}{u_I} = -A \frac{R_F}{R_F + (1+A)R_I}. \quad (5.43)$$

Излазни напон има супротак знак од улазног напона (инвертујући појачавач). Модуло  $A_F$  је увек мањи од модула  $A$ . Ако је појачање  $A$  веома велико, важи:

$$A_F \approx -\frac{R_F}{R_I}. \quad (5.44)$$

Чекајући трајект, на свакодневном путу до свог радног места, млади амерички инжењер Харолд Блек (*Harold Black, 1898-1983*) дошао је на идеју како да, применом повратне спреге, побољша својства појачавача сигнала у телефонији. Био је то револуционарни корак у електроници, иако његова суштина и вредност нису одмах сагледани. Тек након скоро десет година је његов патентни захтев прихваћен. Појачавач лико сам себе поправља "био је третиран на исти начин као и нека *perpetuum-mobile* машина", "признао" је Блек, много година касније.

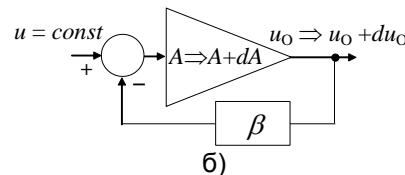
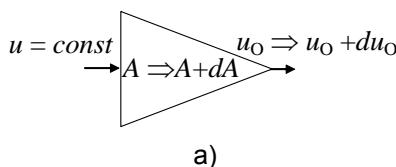


Блек

### 5.3.1 ПАРАМЕТАРСКА ОСЕТЉИВОСТ

Промене појачања појачавача без повратне спреге, до којих долази услед утицаја старења и промена услова околине на својства елемената, доводе до сразмерних промена излазне величине и када се вредност улазне величине не мења (слика 5.23.а). Релативна промена вредности излазног сигнала једнака је релативној промени појачања појачавача:

$$\frac{du_O}{u_O} = \frac{dA}{A} \quad (5.45)$$



Слика 5.23. Анализа осетљивости на промене појачања

На основу израза за укупно појачање система са негативном повратном спрегом (једначина 5.20), следи:

$$\frac{dA_F}{dA} = \frac{1}{1+\beta A} - \frac{\beta A}{(1+\beta A)^2} = \frac{1}{(1+\beta A)^2} = \frac{dA_F}{(1+\beta A)}, \quad (5.46)$$

односно:

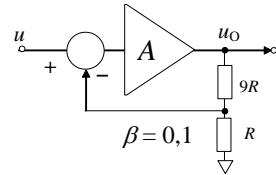
$$\frac{dA_F}{A_F} = \frac{1}{1+\beta A} \frac{dA}{A}. \quad (5.47)$$

Релативна промена сачиниоца преноса кола са повратном спрегом је мања него у колу без повратне спреге. Негативна повратна спрега смањује осетљивост укупног појачања система на промене појачања појачавача.

### ПРИМЕР

Ако је појачање  $A$ , појачавача у колу приказаном на слици, једнако 1000, укупно појачање кола,  $A_F$ , је за 1 % мање од вредности која одговара прорачуну када је  $A$  бесконачно велико (што се може компензовать одговарајућим подешавањем делитеља напона у грани повратне спреге).

Ако се појачање  $A$  промени за 10 %, одговарајућа промена укупног појачања биће мања од 1 %. Чак и ако се појачање  $A$  удвостручи (100 % повећа) промена укупног појачања биће мања од 1 %.



### 5.3.2 ОСЕТЉИВОСТ НА ШУМ

У ужем смислу, појам "шум" (*noise*) у електроници се користи за описивање нежељених сигнала који се појављују унутар електронског кола који се испољавају као "лажни" излаз [4]. У ширем смислу, под овим називом подразумева се сметња (*perturbation*) суперпонирана сигналу чији неки информациони параметар представља носилац информације. Извор сметњи може да се налази у самом уређају (сопствене сметње, шум у ужем смислу) или ван њега [21], [22].

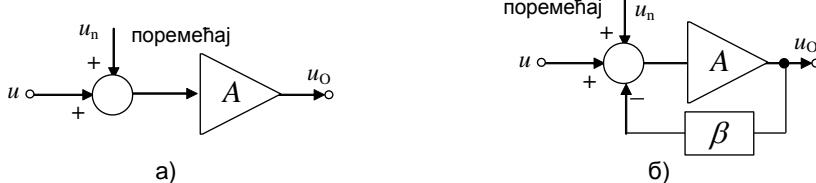
Ако сметња делује на улазу појачавача (слика 5.24.a) одзив може да се представи као збир одзыва на две побуде<sup>23</sup>. Једну представља улазна величина  $u$ , а другу сигнал шума  $u_n$ :

$$u_O = A(u + u_n) = u_O|_u + u_O|_{u_n}, \quad (5.48)$$

где је  $u_O|_u$  компонента излазног напона  $u_O$  која потиче од улазног напона  $u$ , а  $u_O|_{u_n}$  компонента која потиче од шума. На основу једначине 5.48 следи израз за однос сигнал/шум:

$$\frac{S}{N} = \frac{u_O|_u}{u_O|_{u_n}} = \frac{u}{u_n}. \quad (5.49)$$

Дакле, ако сметња делује на улазу појачавача, однос корисног сигнала и шума на улазу и излазу је исти.



Слика 5.24. Деловање шума на улазу појачавача

<sup>23</sup> Појачавач је линеарни елемент за који важи принцип суперпозиције.

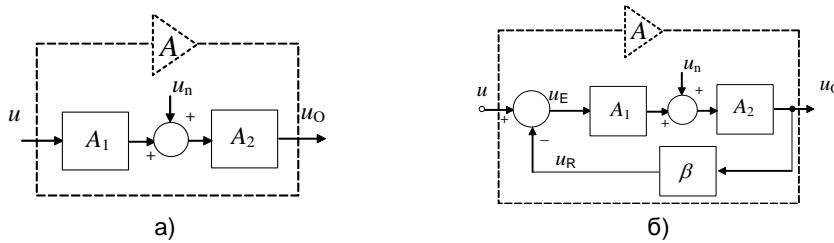
Истоветна ситуација постоји и у колу са негативном повратном спрегом, (слика 5.24.б). Ниво сметње на излазу је мањи, јер је укупно појачање смањено, али однос сигнала и сметње је исти. Појачавач "не разликује" улазни шум од корисног сигнала. Међутим, коло са негативном повратном спрегом је мање осетљиво у односу на сметње које настају унутар самог појачавача или на његовом излазу. За појачавач без повратне спреге (слика 5.25.а) важи:

$$u_O = A_1 A_2 u + A_2 u_n = Au + A_2 u_n, \quad (5.50)$$

одакле следи израз за однос сигнал/шум:

$$n = \frac{S}{N} = \frac{u_O|_u}{u_O|_{u_n}} = A_1 \frac{u}{u_n} = \frac{A}{A_2} \frac{u}{u_n} = A_1 \frac{u}{u_n}, \quad (5.51)$$

где је  $A$  потребна вредност појачања која се појачавачем остварује<sup>24</sup>.



Слика 5.25. Деловање шума унутар појачавача

Математички модел система са повратном спрегом (слика 5.25.б), у овом случају, чине једначине:

$$u_O = A_1 \cdot A_2 u_E + A_2 u_n \quad (5.52)$$

$$u_E = u - \beta \cdot u_O \quad (5.53)$$

на основу којих следи:

$$u_O = \frac{A_1 A_2}{1 + \beta A_1 A_2} \left( u + \frac{u_n}{A_1} \right) = A(u + \frac{u_n}{A_1}) = u_O|_u + u_O|_{u_n}, \quad (5.54)$$

где је  $A$  захтевано појачање:

$$A = \frac{\partial u_O}{\partial u} = \frac{A_1 A_2}{1 + \beta A_1 A_2}. \quad (5.55)$$

Израз за однос сигнал/шум на излазу појачавача са повратном спрегом има исти облик као и за појачавач без повратне спреге:

$$n = \frac{S}{N} = \frac{u_O|_u}{u_O|_{u_n}} = A_1 \frac{u}{u_n}. \quad (5.56)$$

Треба, међутим, уочити да појачавач у колу са повратном спрегом има укупно појачање директне путање,  $A_1 A_2$ , много веће од појачања  $A$  које остварује са повратном спрегом. Примена појачавача великог појачања у колу са негативном повратном спрегом смањује осетљивост система на сметње које настају унутар појачавача:

<sup>24</sup> У овом случају је  $A = A_1 A_2$ .

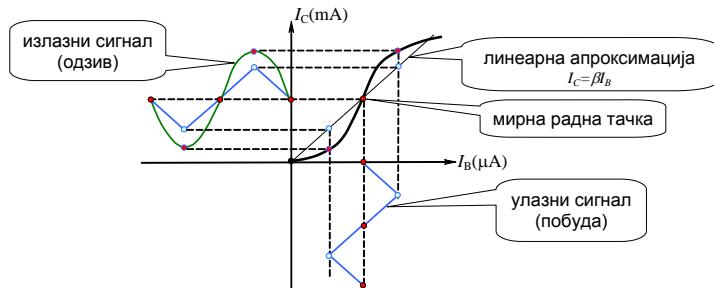
$$\frac{u_O|_u}{u_O|_{u_n}} = (1 + \beta A_1 A_2) \frac{A}{A_2} \frac{u}{u_n}. \quad (5.57)$$

За једнаке вредности појачања  $A$  појачавач са негативном повратном спрегом има  $1 + \beta A_1 A_2$  пута бољи однос сигнал/шум од појачавача без повратне спреге.

### 5.3.3 НЕЛИНЕАРНОСТ

Линеарни модели електронских елемената су само апроксимација стварних односа који постоје између улазних и излазних величина. Модел се обликује тако да олакша сагледавање односа улаз-излаз, поједностави примена, односно пројектовање и прорачун система у којима се посматрани елемент користи. У сваком конкретном случају, изабрани модел представља компромис између сложености и тачности представљања. У доволјно малој околини изабране радне тачке нелинеарна функција се може, применом Тейлорове формуле, представити, са жељеном тачношћу, линеарном функцијом. При већим одступањима, међутим, нелинеарност карактеристике долази до изражaja и грешка апроксимације може да постане неприхватљиво велика. Да би се остварио пренос што веће снаге потребно је да струја и напон имају што веће вредности. Радни опсег појачавачких елемената се проширије изван линеарног подручја, због чега излазни сигнал представља изобличену слику улазног сигнала.

За описивање биполарних транзистора, на пример, користи се једноставан модел у којем је струја колектора сразмерна струји базе, па се савршени транзистор описује само једним параметром који представља појачање струје од базе до колектора. Чињеница је, међутим, да вредност овог параметра зависи од вредности струје колектора. Карактеристика преноса  $I_C(I_B) @ U_{CE} = \text{const}$  има облик приказан на слици 5.26.



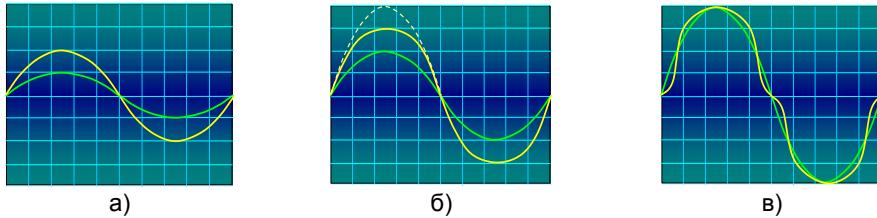
Слика 5.26. Нелинеарно пресликавање

При малим амплитудама побудног сигнала, када се радна тачка само мало „удаљава“ од изабране мирне радне тачке, излазни сигнал је верна копија улазног сигнала (слика 5.27.а). Нелинеарност долази до изражaja у широком опсегу промене улазног сигнала. При побуди великим сигналом изобличење зависи од облика карактеристике преноса и амплитуде улазног сигнала (слике 5.27.б и 5.27.в).

У општем случају нелинеарност карактеристике преноса појачавачког елемента,  $x(w)$ , може да се представи полономом:

$$x(w) \cong x^*(w) = X_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \dots + a_n w^n, \quad (5.58)$$

чији је степен  $n$  одређен потребном тачношћу аналитичког представљања стварне карактеристике.



Слика 5.27. Изобличење таласног облика сигнала

Одзив нелинеарног елемента на побуду хармонијским сигналом:

$$w(t) = W \cos \omega t \quad (5.59)$$

је сложенопериодична функција времена:

$$x(t) = X_0 + a_1 W \cos \omega t + a_2 W^2 \cos^2 \omega t + \dots + a_n W^n \cos^n \omega t \quad (5.60)$$

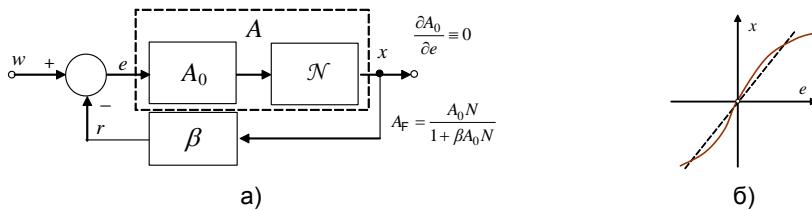
која се, применом тригонометријских формулa, може приказати у облику.

$$x(t) = X_0 + X_1 \cos \omega t + X_2 \cos 2\omega t + \dots + X_n \cos n\omega t \quad (5.61)$$

Нелинеарност карактеристике се испољава као промена спектра сигнала.

Нелинеарни појачавач може да се представи редном везом линеарног појачавача, чије појачање  $A_0$  не зависи од вредности сигнала на улазу, и нелинеарног елемента, чија је карактеристика улаз-излаз описана неком нелинеарном функцијом  $\mathcal{N}$  (слика 5.28.б) тако да важи:

$$A = A_0 \mathcal{N}; |\mathcal{N}| < 1. \quad (5.62)$$



Слика 5.28. Систем са нелинеарним елементом у директној грани

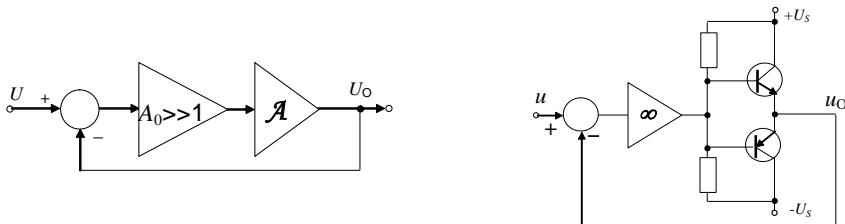
За систем са повратном спрегом, приказан на слици 5.28.а, важи:

$$x = \frac{A_0 \mathcal{N}}{1 + \beta A_0 \mathcal{N}} w. \quad (5.63)$$

Ако је испуњен услов  $\beta A_0 \mathcal{N} \gg 1$  нелинеарност  $\mathcal{N}$  не утиче на излазни сигнал:

$$x \cong \frac{1}{\beta} w. \quad (5.64)$$

Овај закључак је веома важан за реализацију снажних појачавача (*power amplifier*), чији је примарни задатак да омогући велику излазну снагу. Као што је већ истакнуто, линеарни модели електронских појачавачких елемената могу се применити само за мале сигнале, када се радна тачка налази у некој ограниченој околини изабране мирне радне тачке. Да би се остварио ефикасан пренос енергије потрошачу, електронски појачавачки елементи раде у широком опсегу излазне струје, због чега је карактеристика улаз-излаз изразито нелинеарна. Овај проблем се успешно решава додавањем појачавача мање снаге, али великог појачања, и увођењем негативне повратне спреге, као што је приказано на слици 5.29.



Слика 5.29. Линеаризација карактеристике преноса појачавача

Ако је појачање  $A_0$  додатног појачавача доволно велико, важи:

$$U_O = \frac{A_0 A}{1 + A A} U \approx U \quad (5.65)$$

Јака негативна повратна спрега "присиљава" појачавач  $A_0$  да изобличи сигнал на свом излазу, супротно изобличењу које уноси нелинеарни појачавач  $A$ . На тај начин смањује се изобличење сигнала које уноси нелинеарност карактеристике преноса појачавача који генерише излазни сигнал<sup>25</sup>.

### 5.3.4 ФРЕКВЕНЦИЈСКА КАРАКТЕРИСТИКА

Статичко појачање електронског појачавача зависи од вредности сачиниоца који описују појачавачка својства активних елемената<sup>26</sup>, као и отпорности неких резистивних елемената, примењених при његовој изради.

Појачавачки ефекат електронских цеви и транзистора резултат је процеса који имају извесна инерцијална својства, која се испољавају као кашњење одзива елемента у односу на побуду. Због тога се сачинилац који представља појачање трополног појачавачког елемента моделује комплексном величином која описује зависност амплитуде и фазе излазног сигнала од учестаности сигнала који представља побуду. Фреквенцијска карактеристика електронског појачавача у целини зависи и од капацитивности и индуктивности садржаних у колу. Фреквенцијска карактеристика појачавача без повратне спреге (*open loop*),  $A_{OL}$ , се обично, у првој апроксимацији, моделује изразом:

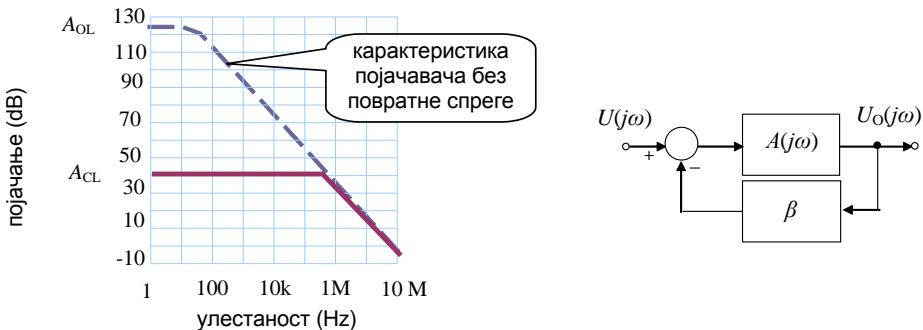
<sup>25</sup> Одступање излазног напона које настаје као последица нелинеарности може да се посматра као промена појачања. Закључак је истоветан.

<sup>26</sup> То су стрмина карактеристике електронске цеви, појачање струје биполарног транзистора, односно проводност преноса транзистора са ефектом поља.

$$A_{OL} = A(j\omega) = \frac{A_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}}. \quad (5.66)$$

Фреквенцијска карактеристика појачавача са негативном повратном спрегом (*closed loop*) одређена је изразом:

$$W(j\omega) = \frac{U_O(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{A(j\omega)}{1 + \beta A(j\omega)}. \quad (5.67)$$



Слика 5.30. Амплитудска фреквенцијска карактеристика појачавача са негативном повратном спрегом

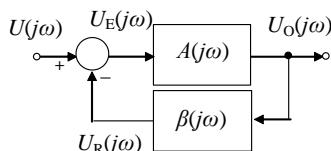
На основу једначина 5.66 и 5.67 добија се израз:

$$W(j\omega) = \frac{A}{1 + \beta A} = \frac{\frac{A_0}{1 + \beta A_0}}{1 + j \frac{\omega}{(1 + \beta A_0)\omega_g}} = \frac{A_{F0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{Fg}}} \quad (5.68)$$

где је:

$$A_{F0} = \frac{A_0}{1 + \beta A_0}; \quad \omega_{Fg} = (1 + \beta A) \omega_g \quad (5.69)$$

Дејство негативне повратне спреле искazuје се смањивањем појачања система. Притом, колико пута се смањи појачање, толико пута се прошири пропусни опсег. Графички прикази логаритамске амплитудске карактеристике (Бодеов дијаграм) дат је на слици 5.30. У начелу, у систему са повратном спрелом може да постоји и фреквенцијска зависност одзива елемената који се налазе на путањи повратне спреле (слика 5.31).



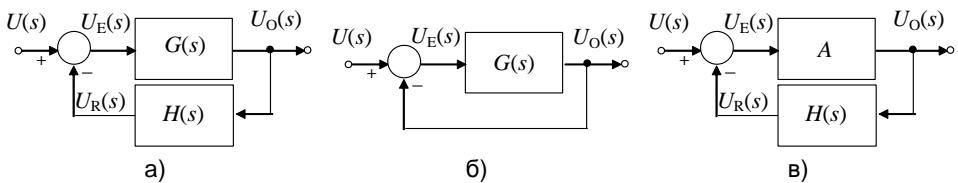
Слика 5.31. Општи структурни блок-дијаграм појачавача напона са негативном повратном спрелом

Фреквенцијска карактеристика таквог система одређена је изразом:

$$W(j\omega) = \frac{U_O(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{A(j\omega)}{1 + A(j\omega)\beta(j\omega)}. \quad (5.70)$$

## 5.4. ФУКЦИЈА ПРЕНОСА СИСТЕМА СА ПОВРАТНОМ СПРЕГОМ

Електронски појачавач у најопштијем смислу, независно од врсте појачавачких елемената који су коришћени за његову изградњу, делује као систем са одређеним динамичким својствима. У општем случају, то се односи и на друге елементе који се налазе на директној путањи, као и путањи повратне спреге. Општи структурни блок-дијаграм линеарног система са негативном повратном спрегом приказан је на слици 5.32.а.



Слика 5.32. Систем са негативном повратном спрегом

Функција преноса система у целини,  $W(s)$ , одређена је изразом:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)}. \quad (5.71)$$

Као показатељ "квалитета" система посматра се однос промене неког својства система у зависности од промене одређеног параметра (*parameter sensitivity*) [23]. За систем са повратном спрегом обично се као показатељ осетљивости система на промене параметара његових елемената користи количник релативне промене функције преноса система са повратном спрегом,  $S_W$ , и релативне промене функције преноса у директној грани  $S_G$  [24], [25]:

$$S = \frac{S_W}{S_G} = \frac{\frac{\partial W(s)}{W(s)}}{\frac{\partial G(s)}{G(s)}} = \frac{1}{1 + H(s)G(s)}. \quad (5.72)$$

Ако је  $H(s) = 1$  (слика 5.32.б) израз за функцију преноса има облик:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}. \quad (5.73)$$

Када се у директној грани налази појачавач (слика 5.32.в), важи:

$$W(s) = \frac{A}{1 + AH(s)}. \quad (5.74)$$

Ако је појачање  $A$  доволјно велико, тако да је испуњен услов  $|AH(s)|>>1$ , добија се:

$$W(s) \approx \frac{1}{H(s)}. \quad (5.75)$$

Негативна повратна спрега смањује осетљивост функције преноса система на промене функције преноса у директној грани.

## ЛИТЕРАТУРА

- 
1. N. Viner, *Kibernetika, ili upravljanje i komunikacija kod živih bića i mašina*, ICS, 1972.
  2. H. Black, *Stabilized Feedback Amplifiers*, *The Bell System Technical Journal*, 1934, <http://www.alcatel-lucent.com/bstj/vol13-1934/articles/bstj/13-1-1.pdf>.
  3. IEC 60050, *International Electrotechnical Vocabulary*.
  4. E.C. Young Dictionary of electronics, Penguin books, 1979, 1988.
  5. J. Millman, C. Halkias, *Integrated electronics: analog and digital circuits and systems*, McGraw-Hill, 1972, p.408.
  6. A.J. Lerner, *Principi kibernetike*, ICS, 1975.
  7. IEV, IEC 60050, Part 351-32, *Control technology/Specific functional units in control technology*, 351-32-41.
  8. *International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM)*, 2007, <http://www1.bipm.org/en/publications/guide/vim.html>.
  9. П. Бошњаковић, Умеће мерења, ВИШЕР, 2011.
  10. IEV, IEC 60050, Part 351-28, *Control technology / Functional units of control systems*, 351-28-03.
  11. Реф 10, 351-28-11.
  12. Реф 10, 351-28-07.
  13. IEV, IEC 60050, Part 351-23, *Control technology / Structures of control systems*, 351-23-06.
  14. IEV, IEC 60050, Part 351-26, *Control technology / Types of control*, 351-26-01.
  15. IEV, IEC 60050, Part 702, *Oscillations, signals and related devices / Transmission characteristics and performance; Distortion*, 702-07-71.
  16. A. Sedra and K. Smith, *Microelectronic Circuits*, Oxford University Press, 2004, p.667.
  17. Реф. 15, 702-07-72.
  18. Реф. 16, p.669.
  19. В. Раковић, *Elektronika*, s. 371.
  20. S. Тешић, D. Василjević, *Osnovi elektronike*, Грађевинска књига, 2000, s.139.
  21. Реф 19, s.138.
  22. И. Стојановић, Основи телекомуникација, Грађевинска књига, 1985, с.302.
  23. IEV, IEC 60050, Part 351-26, *Control technology / Types of control*, 351-26-01.
  24. W.M. Siebert, *Circuits, Signals and Systems*, MIT Press (Цепи, сигналы системы 1, Мир, 1988, с.160).
  25. Д. Јовановић, *Основи електронике и телекомуникација*, Научна књига 1989, с.226.

“Добро свуда и на сваком месту  
зависи од испуњења два услова:  
1) правилног утврђивања коначног циља, и  
2) проналажења одговарајућих средстава,  
која воде коначном циљу.”

Aristotel



## 6. ОПЕРАЦИОНИ ПОЈАЧАВАЧИ

Операциони појачавачи су посебна врста појачавача, намењена за примену у електронским колима којима се, при обради аналогних сигнала, остварују разноврсне математичке операције као што су сабирање више величина, одузимање, интеграљење и диференцирање. Отуда потиче и назив за ову врсту аналогних електронских кола<sup>1</sup>. Концепт повратне спреге омогућио је да се обрада сигнала у аналогном облику оствари са високом тачношћу. Функционално, операциони појачавачи су најзначајнији елементи у савременој аналогној електроници.

Основна обележја операционог појачавача су веома велико појачање и велика улазна отпорност [1]. Његова превасходна намена је рад са повратном спрегом, која се успоставља додавањем одговарајућих екстерних елемената. Функција преноса таквог система, посматраног као целине, одређена је елементима у колу повратне спреге. Захваљујући томе, диференцијални појачавач великог појачања постао је основно и веома делотворно средство аналогне електронике. Предности примене структуре засноване на повратној спрези дошли су до пуног изражaja са применом интегрисане технологије. Преузевши улогу коју су до тада имали трополни (дискретни) појачавачки елементи, интегрисани операциони појачавачи су омогућили бољу, тачнију и разноврснију обраду електричних сигнала [2], [3], [4].

Операциони појачавач, пре свега, омогућује да се појачање “слабих” електричних сигнала оствари са тачношћу која практично не зависи од тачности којом је одређено појачање појачавачког елемента. Ако је појачање појачавача доволно велико, сачинилац преноса улаз-излаз система са повратном спрегом зависи само од односа отпорности посредством којих се та спрела остварује. Погодним избором ових отпорности постиже се жељено појачање, тако да даља обрада сигнала може да се обавља са максималном тачношћу. Употребом реактивних елемената у колу повратне спреге остварују се разноврсна кола са фреквенцијским зависном карактеристиком улаз-излаз.

---

<sup>1</sup> Назив “операциони појачавач” први пут је употребљен у аналогној рачунарској технички 1947. године [4]. Некада је коришћен и назив “рачунски појачавач” (*computing amplifier*, решавајући усилитељ).

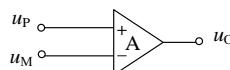
У овом поглављу дефинисан је појам савршеног операционог појачавача, који се примењује при функционалној анализи електричних мрежа са операционим појачавачима. Описано је еквивалентно коло стварног операционог појачавача и анализирана су његова општа својства. Разматране су две основне структуре кола са операционим појачавачем посматраног као елемент типа улаз-излаз: неинвертујућа и инвертујућа. Познавање њихових својстава неопходно је за разумевање рада сложених електронских система којима се обрађују информације представљене у аналогном облику.

## 6.1 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

Под називом “операциони појачавач” (*operational amplifier, OpAmp, OA*) у електроници се подразумева активни електронски елемент који појачава разлику<sup>2</sup> два напона<sup>3</sup>. Излазни напон  $u_O$  сразмеран је разлици потенцијала улазних крајева (слика 6.1):

$$u_O = A(u_P - u_M), \quad (6.1)$$

где је  $A$  појачање операционог појачавача, а  $u_D$  напон који треба да се појача. Симболи “+” (плус) и “-” (минус) означавају улазе од којих први делује у фази, а други у опозицији са излазом. Диференцијални улазни напон,  $u_D$ , је разлика напона неинвертујућег,  $u_P$ , и инвертујућег улаза,  $u_M$ .



Слика 6.1. Операциони појачавач

Први диференцијални појачавачи засновани на технологији електронских цеви, развијени су тридесетих година двадесетог века за потребе прихватања сигнала који се генеришу у живом ткиву (*biological amplifier*). У годинама пред други светски рат, појачавачи примењивани у системима за аутоматско усмеравање артиљеријског оружја, имали су само један (инвертујући) улаз. Млади инжењер Loebie Julie, који је радио у лабораторији за електронику универзитета у Колумбији, реализовао је компактни, модуларни операциони појачавач са диференцијалним улазима и, за то време, широким пропусним опсегом [5], [6]. Успешно је примењен за управљање паљбом противавионске одбране британских војске (*M-9 Gun Director*). Након рата, фирма *Philbrick Researches* унапредила је ово решење и започела серијску производњу модуларних операционих појачавача.



K2-W  
први комерцијално  
доступни операциони  
појачавач

<sup>2</sup> Строго посматрано, да би појачавач могао да се примени као операциони појачавач, доволно је да има велико појачање. Није неопходно да буде диференцијални појачавач. Трополни појачавачки елементи пружају највеће појачање у инвертујућем споју. Први “рачунски” појачавачи су били инвертујући појачавачи великог појачања.

<sup>3</sup> У начелу, излазна величина операционог појачавача не мора да буде напон. Ипак, интегрисани транскондуктанси појачавачи (*operational transconductance amplifier, OTA*), су знатно мање заступљени у савременој електроници.

### 6.1.1 САВРШЕНИ ОПЕРАЦИОНИ ПОЈАЧАВАЧ

У систему са повратном спрегом, савршени (идеални) појачавач је појачавач чије је појачање бесконачно велико. У претходном поглављу је показано да су својства таквог система, посматраног у целини, одређена само својствима елемената кроз које пролази путања повратне спреге.

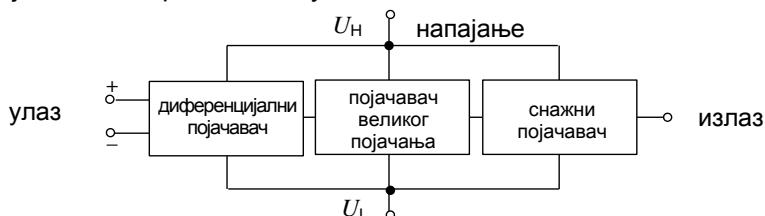
То је потребан, али не и довољан услов за "савршено деловање" операционог појачавача у електронским колима. Да би заиста био савршен, потребно је да његов утицај на извор улазног сигнала буде занемарљив. То, између осталог, значи да улазне струје савршеног појачавача треба да буду једнаке нули. Осим тога, када се неинвертујући и инвертујући улаз налазе на истом потенцијалу, напон на излазу појачавача треба да буде једнак нули. У динамичком систему, савршени операциони појачавач треба да има тренутан одзив.

Савршени операциони појачавач је појачавач који:

- има бесконачно велико појачање,
- не оптерећује извор сигнала,
- нема померај нуле,
- има пропусни опсег од нуле до бесконачности.

### 6.1.2 СТРУКТУРА ОПЕРАЦИОНОГ ПОЈАЧАВАЧА

Савремени операциони појачавач представља сложену структуру која може да се посматра као систем који се састоји од три директно спречнута дела, везана на ред (слика 6.2). На улазу се налази диференцијални појачавач који обезбеђује велико потискивање заједничког напона, велику улазну отпорност, мале улазне струје и мали померај нуле. Потребно велико појачање постиже се помоћу другог дела. Да би се остварило што веће појачање, радне струје су веома мале. Због тога се на излазу читавог кола налази снажни појачавач, који обезбеђује струју потребну за побуђивање кола којима је излаз операционог појачавача повезан.



Слика 6.2. Блок-дијаграм операционог појачавача

У уобичајеним условима рада, операциони појачавач се напаја позитивним и негативним напоном (типично, напајање је "симетрично",  $U_H = +U_N$  и  $U_L = -U_N$ ). Тиме се омогућује рад са позитивним и негативним напонима на улазним приклучцима, као и да излазни сигнал представља биполарну величину. Вредност излазног напона не може да буде изван граница које одређују напони напајања појачавача.

### 6.1.3 СВОЈСТВА ОПЕРАЦИОНИХ ПОЈАЧАВАЧА

#### 6.1.3.1 СТАТИЧКА КАРАКТЕРИСТИКА УЛАЗ-ИЗЛАЗ

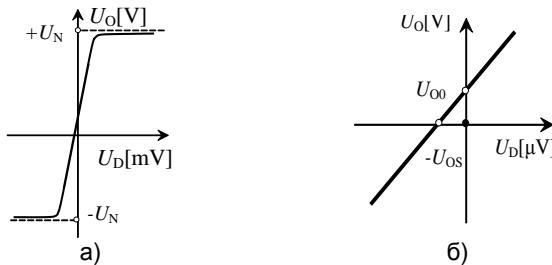
За мале вредности улазног диференцијалног напона карактеристика улаз-излаз представља праву линију чији је нагиб одређен вредношћу појачања (једначина 6.1). Када се, са повећањем улазног напона, излазни напон приближава напону напајања, нагиб карактеристике се смањује и она прелази у засићење (слика 6.3.а).

Карактеристика стварног појачавача не пролази кроз координатни почетак (слика 6.3.б). Линеарни део карактеристике моделује се једначином:

$$U_O = A(U + U_{OS}), \quad (6.2)$$

у којој величина  $U_{OS}$ , представља напон помераја нуле сведен на улаз (*input offset voltage*):

$$U_{OS} = \frac{U_{O0}}{A}. \quad (6.3)$$

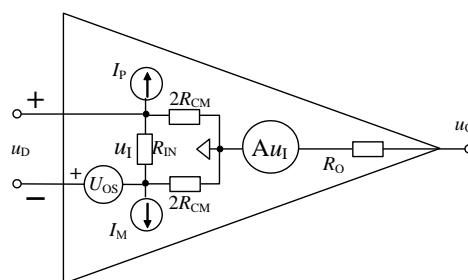


Слика 6.3. Статичка карактеристика операционог појачавача

Величина  $U_{O0}$  представља напон помераја нуле на излазу.

#### 6.1.3.2 ЕКВИВАЛЕНТНО КОЛО

На слици 6.4, приказано је еквивалентно коло које се примењује када се излазни напон операционог појачавача налази унутар линеарног дела карактеристике улаз-излаз (слика 6.3.а). Оно садржи активне и пасивне елементе којима се симболички представљају различити ефекти који се испољавају као несавршеност појачавача.



Слика 6.4. Еквивалентно коло операционог појачавача

Померај нуле карактеристике улаз-излаз моделује се извором еквивалентног напона  $U_{OS}$ , који представља померај (*offset*) сведен на улаз, а алгебарски<sup>4</sup> се сабира са напоном  $U_D$  који делује између улазних прикључака. Напон који се појачава је напон  $U_I$ :

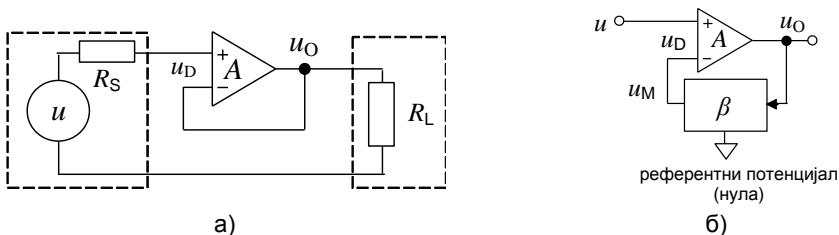
$$u_I = u_D + U_{OS}. \quad (6.4)$$

Извори струје  $I_P$  и  $I_M$  симболизују струје неинвертујућег (плус) и инвертујућег (минус) улаза. То су струје поларизације (*input bias current*) диференцијалног пара на улазу операционог појачавача<sup>5</sup> (слика 6.2).

Отпорник  $R_{IN}$  симболизује еквивалентну улазну отпорност између прикључака који представљају улазни приступ (*differential input resistance*). Отпорници  $2R_{CM}$  симболизују паразитну отпорност између улазних прикључака и масе (*common-mode input resistance*). Излазна отпорност (*output resistance*),  $R_O$ , је сопствена (унутрашња) отпорност снажног појачавача на излазу (слика 6.4).

## 6.2 ОСНОВНЕ СТРУКТУРЕ КОЛА СА ОПЕРАЦИОНИМ ПОЈАЧАВАЧЕМ

Операциони појачавач је првенствено намењен за примену са повратном спрегом. Повратно дејства излаза може, посредством одговарајуће мреже, да буде остварено на један, или оба улаза. У петљи повратне спреге могу да се налазе и сложена електронска кола. Најједноставнији пример примене операционог појачавача је раздавање несавршеног извора напонског сигнала од електричне мреже која, у односу на тај извор, представља потрошач чија је улазна отпорност променљива и мала. У колу приказаном на слици 6.5.а, операциони појачавач омогућује остваривање функције таквог "одвојног" појачавача.



Слика 6.5. Неинвертујућа структура кола са операционим појачавачем

Ако је струја неинвертујућег ("плус") улаза операционог појачавача довољно мала, да пад напона, који она прави на отпорнику отпорности  $R_S$ , може да се занемари, математички модел овог кола чине једначине:

$$u_O = A u_D \text{ и } u_D = u - u_O, \quad (6.5)$$

<sup>4</sup> Напон  $U_{OS}$  може да буде позитиван или негативан.

<sup>5</sup> Интензитет ових струја зависи од технологије, као и успешности поступака који се примењују да би се оне смањиле. У начелу ове струје могу да буду позитивне или негативне.

где је  $u_D$  диференцијални улазни, а  $u_O$  излазни напон операционог појачавача чије је појачање  $A$ . На основу ових једначина следи:

$$u_O(1+A) = Au , \quad (6.6)$$

односно:

$$u_O = \frac{A}{1+A} u , \text{ и} \quad (6.7)$$

$$u_D = \frac{u_O}{A} = \frac{A}{1+A} u . \quad (6.8)$$

Ако је појачање  $A$  много веће од један, диференцијални напон на улазу операционог појачавача,  $u_D$ , приближно је једнак нули, а вредност излазног напона,  $u_O$ , незнатно се разликује од вредности улазног напона  $u$ . Коло делује као **јединични појачавач** (*unity gain noninverting amplifier, buffer amplifier, voltage follower*). Његов задатак је да обезбеди струју потребну за остваривање следеће операције у ланцу обраде аналогног сигнала, а притом да има занемарљив утицај на извор улазног сигнала (односно вредност напона који се даље прослеђује).

Када путања повратне спрете садржи елемент типа улаз-излаз чији је сачинилац преноса  $\beta$  (слика 6.5.6), напон  $u_M$  на инвертујућем (“минус”) улазу операционог појачавача једнак је:

$$u_M = \beta u_O ; \beta > 0 . \quad (6.9)$$

Укупно појачање система са повратном спрегом одређено је изразом:

$$A_F = \frac{u_O}{u} = \frac{A}{1+\beta A} , 1+\beta A \neq 0 . \quad (6.10)$$

У оба случаја, улазни напон делује преко неинвертујућег улаза операционог појачавача, па излазни напон има исти знак (поларитет) као и улазни напон. Овакав начин повезивања представља неинвертујућу спрегу. При побуди наизменичним сигналом, улазни и излазни напон су “у фази”.

Другу могућност пружа структура приказана на слици 6.6. Повратна спрела остварена је преко пасивне мреже са два улаза и једним излазом, за коју важи:

$$u_M = \alpha u + \beta u_O ; \alpha > 0, \beta > 0 , \quad (6.11)$$

где су  $\alpha$  и  $\beta$  сачиниоци преноса од одговарајућег улаза до излаза мреже.

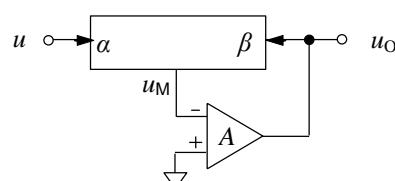
Напон  $u_O$  на излазу појачавача једнак је:

$$u_O = -Au_M . \quad (6.12)$$

На основу једначина 6.11 и 6.12 следи:

$$A_F = \frac{u_O}{u} = -\frac{\alpha A}{1+\beta A} , 1+\beta A \neq 0 , \text{ и} \quad (6.13)$$

$$u_M = \frac{u_O}{A} = \frac{\alpha}{1+A} u . \quad (6.14)$$



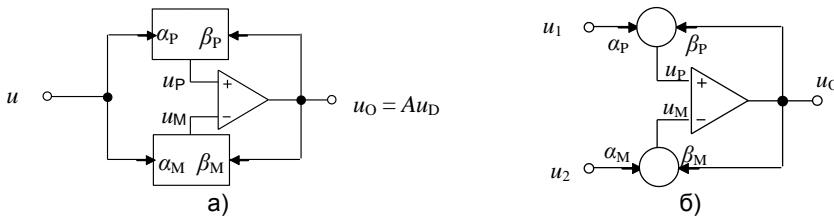
Слика 6.6. Инвертујућа структура

Ако је појачање  $A$  много веће од један, напон  $u_M$  је приближно једнак нули. Улазни напон  $u$  делује преко инвертујућег (“минус”) улаза операционог појачавача, због чега, када мрежа не садржи реактивне елементе, излазни напон има супротан поларитет у односу на улазни (повећање улазног напона доводи до смањивања излазног). При побуди наизменичним сигналом, улазни и излазни напон су “у опозицији”.

Улазно, односно повратно дејство, може да буде остварено преко оба улаза операционог појачавача, као што је то приказано на слици 6.7.а:

$$u_P = \alpha_P u + \beta_P u_O, \quad (6.15)$$

$$u_M = \alpha_M u + \beta_M u_O. \quad (6.16)$$



Слика 6.7. Мешовита структура

У општем случају, сачиниоци  $\alpha$  и  $\beta$  могу да буду позитивни или негативни<sup>6</sup>. Карактер повратне спрке (позитивна или негативна) одређује се анализом односа промене напона на излазу операционог појачавача,  $\Delta u_O$ , и одговарајуће промене диференцијалног улазног напона<sup>7</sup>.

На слици 6.7.б приказан је систем са два независна улаза. Притом је елемент са више улаза и једним излазом (који представља линеарну комбинацију улаза) представљен кругом. Ако су тежински сачиниоци улаза овог елемента реални ненегативни бројеви, излазни напон  $u_O$  представља разлику улазних напона, пондерисаних сачиниоцима  $A_1$  и  $A_2$  који су, у општем случају, различити:

$$u_O = A_1 u_1 - A_2 u_2. \quad (6.17)$$

## 6.2.1 НЕИНВЕРТУЈУЋИ ПОЈАЧАВАЧ НАПОНА

Коло са операционим појачавачем приказано на слици 6.8.а омогућује појачање напонског сигнала, зависно од односа отпорности  $R_A$  и  $R_B$  у мрежи посредством које је остварена повратна спрека. Излазни напон има исти поларитет као и улазни напон (*noninverting amplifier*).

Ако је операциони појачавач савршен, негативна повратна спрека обезбеђује да се инвертујући и неинвертујући улаз налазе на истом потенцијалу (односно, једнакост улазног напона  $u$  и напона повратне спреке  $u_M$ ), тако да важи једначина:

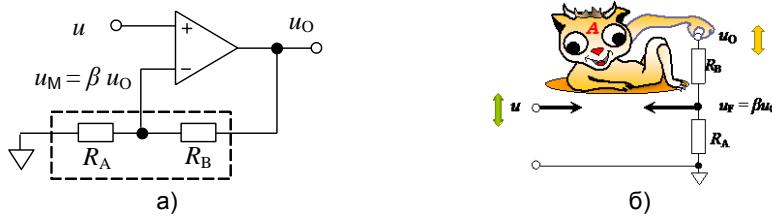
<sup>6</sup> Негативан сачинилац преноса подразумева да мрежа садржи трансформатор или инвертујући елемент.

<sup>7</sup> Повратна спрека је негативна ако се са повећањем појачања диференцијални напон на улазу појачавача смањује.

$$\beta u_O = u, \quad (6.18)$$

у којој  $\beta$  представља сачинилац преноса путање повратне спреге:

$$\beta = \frac{R_A}{R_A + R_B}. \quad (6.19)$$



Слика 6.8. Неинвертујући појачавач напона

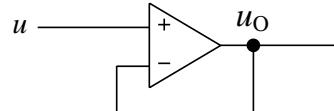
На основу једначина 6.18 и 6.19 следи:

$$u_O = \left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right)u; R_A \neq 0, \text{ односно} \quad (6.20)$$

$$A_F = \frac{u_O}{u} = 1 + \frac{R_B}{R_A}; R_A \neq 0. \quad (6.21)$$

Неинвертујући појачавач делује као аутоматски пратећи систем. Повратна спрега обезбеђује једнакост улазног напона  $u$  и напона повратне спреге. То се постаже "подешавањем" излазног напона  $u_O$  тако да буде остварен услов 6.18 (слика 6.8.б).

Појачање  $A_F$  не може да буде мање од један. Посебан случај неинвертујућег кола са операционим појачавачем је јединични појачавач (*unity-gain follower*), који се добија када је  $\beta = 1$  (слика 6.9).



Слика 6.9. Јединични појачавач

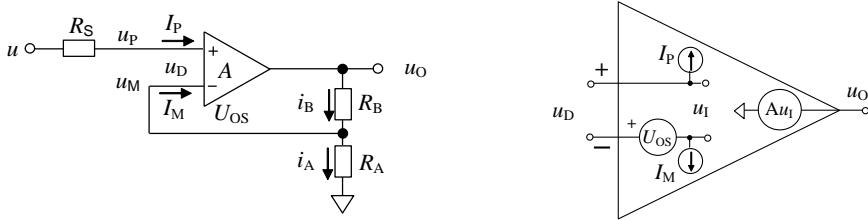
Улазна отпорност неинвертујућег појачавача са савршеним операционим појачавачем бесконачно је велика (струја поларизације неинвертујућег улаза је једнака нули). Вредност појачања зависи само од односа отпорности у колу повратне спреге.

### 6.2.1.1 АНАЛИЗА СТАТИЧКЕ ТАЧНОСТИ

Несавршености елемената у колу одражавају се на одступање вредности излазног напона у односу на ону која одговара једначини 6.20. У овом разматрању узимају се у обзир само несавршености операционог појачавача: коначно појачање  $A$ , напон помераја нуле  $U_{OS}$  и улазне струје,  $I_P$  и  $I_M$ . У линеарним колима са негативном повратном спрегом није потребно да се узима у обзир утицај диференцијалне улазне отпорности, јер је диференцијални улазни напон веома мали. Оправдано је изоставити и утицај излазне отпорности појачавача, јер је у претходном поглављу показано да се у систему са јаком негативном повратном спрегом она може да занемари.

У колу приказаном на слици 6.10. назначене су величине које утичу на статичку тачност неинвертујућег појачавача напона оствареног помоћу

операционог појачавача<sup>8</sup>. Отпорност  $R_S$  симболизује излазну отпорност извора улазног напона.



Слика 6.10. Неинвертујући појачавач са несавршеним операционим појачавачем

Математички модел овог система чине једначине;

$$\begin{aligned} u_P &= u - R_S I_P, \quad u_D = u_P - u_M, \quad u_O = A u_I, \quad u_I = U_{OS} + u_D, \\ u_M &= R_A i_A, \quad i_A = i_B - i_M \text{ и } u_O = u_M + R_B i_B. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Решавањем овог система једначина добија се општи израз,  $u_O(u, R_A, R_B, R_S, A, U_{OS}, I_M, I_P)$ , који представља карактеристику улаз-излаз. Посматрани систем је линеаран, тако да се, и без решавања једначина, може закључити да решење има облик:

$$u_O = A_F u + U_{O0}. \quad (6.23)$$

Где је  $U_{O0}$  напон помераја нуле на излазу. У складу са тим, погодније је да се изврши "декомпозиција проблема", и појединачно анализира утицај поједињих несавршености, узимајући у обзир само релевантне елементе.

## УТИЦАЈ КОНАЧНОГ ПОЈАЧАЊА

Ако се занемаре улазне струје,  $I_P$  и  $I_M$ , напон  $u_P$  на неинвертујућем улазу операционог појачавача једнак је улазном напону, а струја  $i_A$  која тече кроз отпорник  $R_A$  једнака је струји  $i_B$  која тече кроз отпорник  $R_B$ . Ако се и померај нуле операционог појачавача занемари ( $U_{OS} = 0$ ), математички модел се своди на једначине:

$$\begin{aligned} i_A &= i_B = i = \frac{u_O}{R_A + R_B}, \\ u_O &= A u_D = A(u - u_M), \text{ и} \\ u_M &= R_A i, \end{aligned} \quad (6.24)$$

на основу којих следи:

$$\begin{aligned} u_M &= \frac{R_A A}{R_B + R_A(1+A)} u, \quad \text{и} \\ u_O &= \frac{(R_A + R_B)A}{R_B + R_A(1+A)} u. \end{aligned} \quad (6.25)$$

<sup>8</sup> Анализа статичке тачности важи и када улазни напон представља споро променљиву величину.

Појачање посматраног кола једнако је:

$$A_F = \frac{u_O}{u} = \left(1 + \frac{R_B}{R_{AI}}\right) \frac{R_A A}{R_B + R_A (1+A)} . \quad (6.26)$$

Ако је испуњен услов  $A >> (R_A + R_B)/R_A$ , напон  $u_M$  је приближно једнак нули (инвертујући и неинвертујући улаз се налазе на истом потенцијалу) и важи једначина 6.21.

До истоветног резултата долази се и ако се коло посматра као систем са повратном спрегом (слика 6.5.б) за који, у овом случају, важи:

$$A_F = \frac{A}{1 + \beta A}, \quad \beta = \frac{R_A}{R_A + R_B} . \quad (6.27)$$

### УТИЦАЈ ПОМЕРАЈА НУЛЕ

Ако је појачање  $A$  довољно велико, може да се сматра да је напон који се појачава,  $u_I = u_O/A$ , једнак нули. Занемарујући улазне струје, а узимајући у обзир само напон помераја нуле операционог појачавача  $U_{OS} = 0$ , добија се математички модел:

$$u = u_M - U_{OS}, \\ u_M = \beta u_O, \text{ и} \quad (6.28)$$

$$\beta = \frac{R_A}{R_A + R_B},$$

на основу којег следи:

$$u_O = \left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right)(u + U_{OS}) . \quad (6.29)$$

Напон помераја нуле на улазу операционог појачавача,  $U_{OS}$ , појачава се сразмерно укупном појачању појачавача са повратном спрегом.

### УТИЦАЈ УЛАЗНИХ СТРУЈА

Деловање улазних струја,  $I_P$  и  $I_M$ , сагледава се анализом посматраног кола са појачавачем који има бесконечно велико појачање и занемарљиво мали напон помераја нуле. Са циљем поједностављења, може се посматрати стање у колу када је улазни напон једнак нули.

У складу са ознакама на слици 6.11, математички модел представљају једначине:

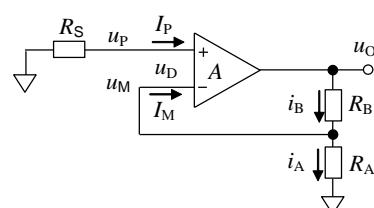
$$u_P = -R_S I_P,$$

$$u_P = u_M,$$

$$u_M = R_A i_A,$$

$$i_A = i_B - i_M \text{ и}$$

$$u_O = u_M + R_B i_B .$$



Слика 6.11. Утицај улазних струја

Напон на излазу једнак је:

$$u_O = R_B I_M - R_S I_P \left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right). \quad (6.30)$$

Ако је испуњен услов:

$$R_S = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B} = R_A \| R_B , \quad (6.31)$$

вредност напона помераја нуле на излазу неинвертујуће структуре, проузрокован улазним струјама операционог појачавача, одређен је изразом:

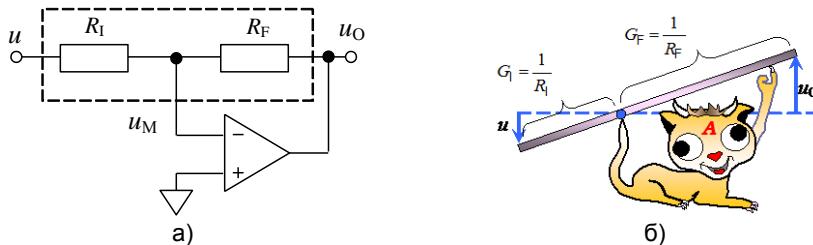
$$u_O = R_B (I_M - I_P) = R_B I_{OS} , \quad (6.32)$$

у којем  $I_{OS}$  представља разлику улазних струја инвертујућег и неинвертујућег улаза (*input offset current, I<sub>os</sub>*).

## 6.2.2 ИНВЕРТУЈУЋИ ПОЈАЧАВАЧ НАПОНА

У колу приказаном на слици 6.12.а, отпорници  $R_I$  и  $R_F$  образују пасивну мрежу са два улаза ( $u_O$  и  $u$ ) и једним излазом ( $u_M$ ), посредством које се остварује повратна спрега. Ако је операциони појачавач савршен ( $I_M = 0$ ), на основу теореме о суперпозицији важи:

$$u_M = \frac{R_F}{R_I + R_F} u + \frac{R_I}{R_I + R_F} u_O = \frac{R_F u - R_I u_O}{R_I + R_F} . \quad (6.33)$$



Слика 6.12. Инвертујући појачавач

Јака негативна повратна спрега обезбеђује да је напон  $u_M$  једнак нули (**привидна нула, virtual zero**), независно од вредности улазног напона. На основу једначине 6.33, следи:

$$\begin{aligned} \frac{u}{R_I} &= -\frac{u_O}{R_F}; R_I \neq 0, \text{ односно:} \\ u_O &= -\frac{R_F}{R_I} u . \end{aligned} \quad (6.34)$$

Инвертујући појачавач делује слично као и механички појачавач – полуга (слика 6.12.б). Операциони појачавач “подешава” вредност излазног напона  $u_O$  тако да је струја кроз отпорник  $R_F$ , преко којег је остварена негативна повратна спрега, једнака струји кроз улазни отпорник  $R_I$ . Излазни напон има супротан знак у односу на улазни напон, при чему вредност (модуло) појачања може да буде већа, једнака или мања од јединице, зависно

од односа отпорности  $R_F$  и  $R_I$ :

$$A_F = \frac{u_O}{u} = -\frac{R_F}{R_I}. \quad (6.35)$$

Улазна отпорност инвертујућег појачавача (којом је оптерећен извор напона  $u$ ), једнака је отпорности  $R_I$ .

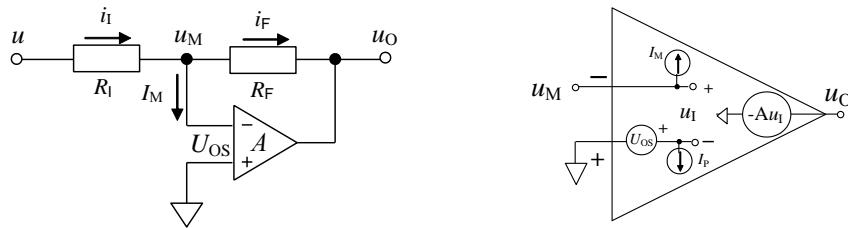
### 6.2.2.1 АНАЛИЗА СТАТИЧКЕ ТАЧНОСТИ

У колу приказаном на слици 6.13. назначене су величине које утичу на статичку тачност инвертујућег појачавача.

Математички модел овог система чине једначине:

$$i_I = \frac{u - u_M}{R_I}, \quad i_F = i_I - I_M, \quad u_O = -Au_I, \quad u_I = u_M + U_{OS} \text{ и } u_O = u_M - R_F i_F. \quad (6.36)$$

Струју  $I_P$  појачавач “узима” из тачке која је на референтном потенцијалу, па она, у овом колу, нема утицај на вредност излазног напона.



Слика 6.13. Анализа инвертујућег појачавача

### УТИЦАЈ КОНАЧНОГ ПОЈАЧАЊА

Ако се занемаре улазна струја операционог појачавача,  $I_M$ , и напон помераја нуле  $U_{OS}$ , струја  $i_I$ , која тече кроз отпорник  $R_I$ , једнака је струји  $i_F$ , која тече кроз отпорник  $R_F$ . Математички модел кола се тада своди на једначине:

$$i = \frac{u - u_M}{R_I}, \quad u_O = -Au_M, \quad \text{и} \quad u_O = u_M - R_F i, \quad (6.37)$$

на основу којих следи:

$$u_M = \frac{R_F}{R_F + R_I(1+A)} u, \quad \text{и} \quad u_O = -\frac{AR_F}{R_F + R_I(1+A)} u.$$

Појачање посматраног кола одређено је једначином:

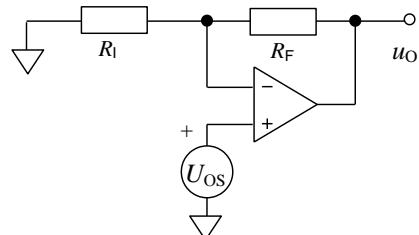
$$A_F = \frac{u_O}{u} = -\frac{R_F}{R_I} \frac{A}{1 + \frac{R_F}{R_I} + A}; \quad R_I \neq 0. \quad (6.38)$$

Ако је испуњен услов  $A \gg (R_I + R_F)/R_I$ , напон  $u_M$  је приближно једнак нули (инвертујући и неинвертујући улаз се налазе на истом потенцијалу) и важи једначина 6.34.

### УТИЦАЈ ПОМЕРАЈА НУЛЕ

Деловање помераја нуле операционог појачавача еквивалентно је деловању извора напона  $U_{OS}$  прикљученог на неинвертујући улаз савршеног појачавача (слика 6.14). У односу на овај сигнал коло се "поноша" као неинвертујући појачавач:

$$u_O = \left(1 + \frac{R_F}{R_I}\right) U_{OS}. \quad (6.39)$$



Слика 6.14. Утицај помераја нуле

### УТИЦАЈ УЛАЗНИХ СТРУЈА

Ако улазне струје представљају једину статичку несавршеност операционог појачавача, анализа њиховог утицаја може да се сведе на одређивање излазног напона када је улазни напон једнак нули. За коло приказано на слици 6.15 важе једначине:

$$\begin{aligned} u_P &= -R_K I_P, \\ u_M &= u_P, \\ u_M &= R_I i_I, \\ i_F &= i_I + i_M \text{ и} \\ u_O &= u_M + R_F i_F. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Решавањем овог система једначина добија се:

$$u_O = R_F I_M + \left(1 + \frac{R_F}{R_I}\right) U_P = R_F I_M - \left(1 + \frac{R_F}{R_I}\right) R_K I_P. \quad (6.41)$$

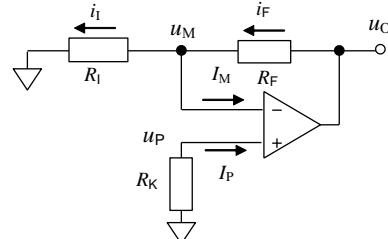
Ако је отпорност  $R_K$  једнака нули, померај нуле на излазу кола једнак је паду напона који струја  $I_M$  прави на отпорнику  $R_F$ . Међутим, ако је отпорност  $R_K$  подешена тако да важи:

$$R_K = \frac{R_I R_F}{R_I + R_F} = R_I \| R_F, \quad (6.42)$$

вредност напона помераја нуле на излазу инвертујуће структуре, проузрокован улазним струјама операционог појачавача,  $I_M$  и  $I_P$ , једнак је:

$$u_O = R_F (I_M - I_P) = R_F I_{OS}, \quad (6.43)$$

где је  $I_{OS}$  разлика улазних струја инвертујућег и неинвертујућег улаза операционог појачавача. Додатни отпорник ( $R_K$ ) омогућује смањивање утицаја улазних струја.



Слика 6.15. Утицај улазних струја

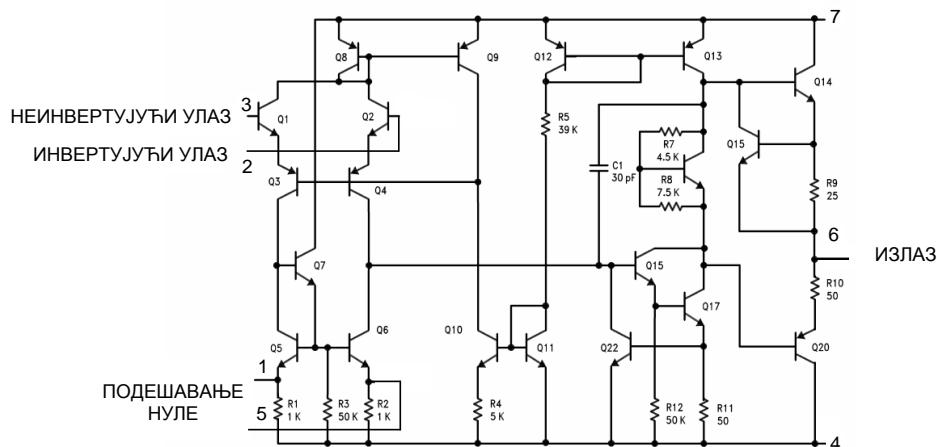
## 6.3 ИНТЕГРИСАНИ ОПЕРАЦИОНИ ПОЈАЧАВАЧИ И ЊИХОВА СВОЈСТВА

У савременој аналогној електроници операциони појачавачи представљају најзначајнији "градивни елемент". Идеја о примени појачавача веома великог појачања појавила се још у доба електронских цеви, али је тек

полупроводничка технологија омогућила да он, са становишта пројектовања, постане елемент разноврсних електронских кола. Први комерцијални интегрисани операциони појачавачи појавили су се почетком шездесетих година двадесетог века. Њихова је структура детаљно описана у литератури која је пратила развој технологије [7], [8], [9]. Електричне шеме интегрисаних операционих појачавача анализиране су и у уџбеницима на српском језику [10], [11], [12], [13].

Са становишта технологије, интегрисани операциони појачавачи могу да се сврстају у три групе. Први су се појавили операциони појачавачи засновани на технологији производње биполарних транзистора. Она и данас преовлађује у примени, када динамичка својства појачавача имају примарни значај. Коло које је развила фирма *Fairchild*,  $\mu A709$  представља први, комерцијално успешни интегрисани операциони појачавач.

Стварни почетак револуције у аналогној електроници означава појава интегрисаног кола  $\mu A741$  (1968), које се, и данас, налази у производном програму више производњача. На слици 6.16 приказана је шема овог, *de facto* првог интегрисаног операционог појачавача намењеног за примену у индустријској електроници. Кондензатор  $30\text{ pF}$  у његовом излазном делу је први "интегрисани кондензатор" којим је остварена "интерна компензација" фреквенцијске карактеристике, којом је обезбеђен стабилан рад кола, без додатних елемената, који су били неопходни код појачавача  $\mu A709$ .

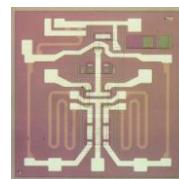


Слика 6.16. Електрична шема операционог појачавача  $\mu A741$

Технологија заснована на транзисторима са ефектом поља омогућила је смањивање улазне струје. CMOS операциони појачавачи одликују се веома малом сопственом потрошњом, али и споријим одзивом. Код BiMOS операционих појачавача комбиноване су предности MOSFET и биполарних транзистора: веома велика улазна отпорност, веома мале улазне струје и велика брзина.

Први интегрисани операциони појачавачи садржали су невелик број елемената (девет транзистора) и имали скромне перформансе. Типичне вредности биле су [14], [15]:

појачање	2800
померај нуле	2 mV
уласна струја	0,7 μA
уласна отпорност	25 kΩ
излазна отпорност	200 Ω



μA 702 Fairchild  
први комерцијални интегрисани операциони појачавач (1964)

У начелу, операциони појачавачи могу да се сврстају у четири групе.

**Појачавачи опште намене** (*general purpose amplifier*) су најраспрострањенији јер, у великом броју случајева, представљају оптимум односа перформанс-цена. Другу групу чине **широкопојасни појачавачи** (*wideband amplifier*). Они имају лошије статичке карактеристике (велике уласне струје и велики померај нуле, зависан од температуре), јер су пројектовани тако да омогуће много већу брзину одзива<sup>9</sup>. Због "склоности" осциловању, примена ових кола подразумева предузимање посебних мера, у складу са упутствима производчика, да би се осигурао стабилан рад. **Прецизни појачавачи** (*precision amplifier*) имају најбоље статичке карактеристике, низак ниво сопственог шума, али и малу брзину. У четврту групу сврставају се **појачавачи посебне намене**, чија су својства оптимизирана са становишта посебних захтева у одређеној области примене. То су, на пример, појачавачи који за свој рад захтевају веома малу снагу (*micro-power amplifier*), аудиопојачавачи, снажни појачавачи који омогућују велику излазну струју, појачавачи који се напајају високим напоном,...

### 6.3.1 СТАТИЧКЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ

Сavrшени (идеални) операциони појачавач има бесконачно велико појачање. Његова карактеристика улаз-излаз пролази кроз координатни почетак, а уласна струја (струја поларизације) инвертујућег односно неинвертујућег улаза једнака је нули. Када је улазни диференцијални напон једнак нули, напон на излазу савршеног појачавача је такође једнак нули.

Својства операционих појачавача описују се низом показатеља који омогућују сагледавање њиховог "понашања" у одређеним условима рада. Подаци које производачи интегрисаних операционих појачавача наводе у својим спецификацијама, могу да се групишу у неколико категорија<sup>10</sup>:

- карактеристике улаза,
- карактеристике излаза,
- карактеристике преноса,
- напајање,
- услови околине.

<sup>9</sup> Посебну врсту представљају појачавачи засновани на примени струјне повратне спрете.

<sup>10</sup> Треба имати у виду да различити производачи користе различиту терминологију, различите дефиниције термина којима се описују својства интегрисаних кола, као и различите поступке којима се њихове вредности одређују.

Њихово је познавање неопходно за успешну примену операционих појачавача при пројектовању, као и при одржавању електронских уређаја у којима се електрични сигнали обрађују у аналогном облику.

### 6.3.1.1 КАРАКТЕРИСТИКЕ УЛАЗА

Опсег улазног напона (*input voltage range*) је опсег вредности напона на улазним прикључцима за који појачавач има декларисана својства. У спецификацијама произвођача наводи се гарантована вредност при називној вредности напона напајања. Посебно се исказују максимална и минимална дозвољена вредност напона на улазним прикључцима (*absolute maximum ratings, input voltage*).

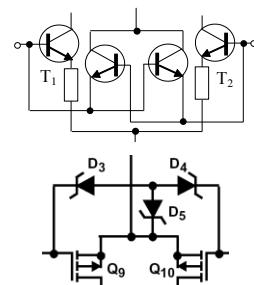
Опсег заједничког улазног напона (*input common-mode voltage range*) дефинише опсег вредности заједничког улазног напона  $u_{CM}$ :

$$u_{CM} = \frac{u_P + u_M}{2}. \quad (6.44)$$

унутар којег се појачавач „добро понаша“. За већину интегрисаних операционих појачавача при напајању  $\pm 15$  V, гарантује се опсег улазног напона од -12 V до 12 V.

У колу са негативном повратном спрегом, у регуларним условима рада, диференцијални улазни напон је једнак нули. Међутим, у одсуству деловања јаке негативне повратне спрете, потенцијали инвертујућег и неинвертујућег улаза могу знатно да се разликују. Да би се заштитило улазно коло, декларише се и највећи дозвољени диференцијални напон на улазу појачавача (*maximum input differential voltage*).

Диференцијални пар,  $T_1$  и  $T_2$ , на улазу операционог појачавача LM108, садржи додатне транзисторе које имају улогу заштитних диода [16].



Улазно коло BiMOS операционог појачавача CA3140 садржи Ценер-диоде којима се штите MOSFET (PMOS) транзистори улазног диференцијалног пара.

Струја поларизације улаза (*input bias current*) је струја неопходна за рад (побуду) појачавачког елемента (транзистора) на одговарајућем улазу. Обично се под овим називом подразумева аритметичка средина улазних струја, када је напон на излазу појачавача без повратне спрете једнак нули:

$$I_B = \frac{I_P + I_M}{2} \Big|_{U_O = 0}. \quad (6.45)$$

У начелу, ова вредност може да буде позитивна или негативна, а опсег вредности зависи од врсте појачавача. У спецификацији се обично наводе типична и максимална вредност. Струја поларизације зависи од температуре, што се описује одговарајућим температурским сачиниоцем који показује како

се струја  $I_B$  мења са променом температуре (*input bias current drift vs temperature, average temperature coefficient of input bias current, TClos*).

Диференцијална улазна струја (*input offset current,  $I_{OS}$* ) је разлика улазних струја инвертујућег и неинвертујућег улаза:

$$I_{OS} = I_M - I_P . \quad (6.46)$$

Обично је скоро за ред величине мања од вредности улазне струје, а зависи од низа величина као што су напон напајања, температура, заједнички улазни напон. Промене струје  $I_{OS}$  у зависности од промена температуре квантитативно се описују одговарајућим температурским сачиниоцем који је дефинисан количником промене струје  $I_{OS}$  и одговарајуће промене температуре (*input offset current drift vs temperature,  $TClos = \Delta I_{OS}/\Delta T$* ).

Померај нуле карактеристике  $U_O(U_D)$  резултат је несиметрије својства елемената који образују диференцијални пар на улазу појачавача. Због тога, и када се улазни прикључци налазе на истом потенцијалу, на излазу може да постоји напон различит од нуле. За описивање овог ефекта, користи се напон помераја нуле сведен на улаз (*input offset voltage*),  $U_{OS}$ , који се дефинише као диференцијални напон који треба да делује на улазу операционог појачавача без повратне спрече, да би напон  $U_O$  на његовом излазу био једнак нули.

Вредност напона  $U_{OS}$  зависи од температуре па се у спецификацијама кола наводи и одговарајући температурски сачинилац (*input offset voltage drift vs temperature*):

$$TC_{UOS} = \frac{\Delta U_{OS}}{\Delta T} . \quad (6.47)$$

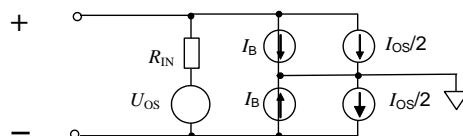
Најчешће се изражава у микроволтима по степену Целзијуса.

У основи, напон помераја нуле је случајна величина, па се његова вредност мења и независно од температуре. Дуговремена стабилност напона помераја нуле (*long term stability*) описује се променама еквивалентног напона помераја нуле (*long term input offset voltage drift*) током временског интервала одређеног трајања (обично месец дана).

Улазна отпорност (*input resistance*),  $R_{IN}$ , је отпорност “виђена” између улазних прикључака појачавача без повратне спрече (*open loop input resistance differential-mode*). Код савремених интегрисаних операционих појачавача вредност  $R_{IN}$  је, обично, већа од мегаома<sup>11</sup>. Улазна отпорност појачавача са негативном повратном спречом је за износ кружног појачања већа (једначина 5.32). Тада до изражаваја долази само заједничка улазна отпорност (*input resistance common-mode*), која је, обично, већа од 100 МΩ. На

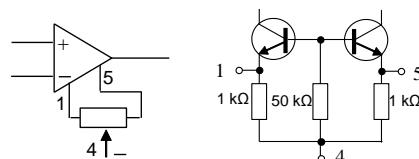
<sup>11</sup> Код чоперских појачавача (*chopper-stabilized amplifier*), [19], и појачавача код којих се на улазу налазе транзистори са ефектом польја, диференцијална улазна отпорност је реда величине тераома. Притом треба имати у виду да заштита диференцијалног пара на улазу, која ограничава вредност диференцијалног напона на улазу појачавача, када “проради”, драстично смањује инкременталну улазну отпорност.

слици 6.17 приказане су величине о којима треба водити рачуна када се разматра статичка тачност кола са операционим појачавачем.



Слика 6.17. Улазне величине операционог појачавача

Да би се олакшао проблем помераја нуле, произвођачи интегрисаних операционих појачавача нуде могућност подешавања претполаризације улазног кола тако да се компензује укупни еквивалентни напон помераја нуле појачавача (слика 6.18). Треба имати у виду да начин повезивања није стандардизован.



Слика 6.18. Подешавање нуле операционог појачавача μA741

### 6.3.1.2 КАРАКТЕРИСТИКЕ ИЗЛАЗА

Опсег вредности сигнала на излазу активних електронских кола неизбежно је ограничен величином напона којим се напајају. При доволно великој вредности диференцијалног напона појачање опада и долази до појаве засићења. Опсег излазног напона, излазни напонски размах (*output voltage swing*) зависи од отпорности оптерећења,  $R_L$ , и напона напајања.

Излазна отпорност (*output resistance*),  $R_O$ , је доволично мала да може да се занемари у колима са негативном повратном спрегом. Њена је вредност повезана са проблемом заштите излазног појачавача од кратког споја. У том смислу, у спецификацијама неких интегрисаних појачавача специфицира се дозвољено трајање кратког споја на излазу (*output short-circuit duration*). Код савремених појачавача ово ограничење више не постоји. Треба имати у виду да, код неких појачавача, највећа вредност излазне струје (*peak output current*) зависи од њеног смера.

### 6.3.1.3 КАРАКТЕРИСТИКЕ ПРЕНОСА

Појачање напона,  $A$ , представља основну карактеристику операционог појачавача. Појачање се дефинише као однос излазног и улазног напона појачавача без повратне спреге, при специфицираним вредностима отпорности извора сигнала,  $R_S$ , и оптерећења излаза,  $R_L$ . При сталној вредности отпорности оптерећења,  $R_L$ , појачање  $A$  расте са повећањем напона напајања.

Појачање великих сигнала (*large-signal voltage gain*) се дефинише као однос највеће вредности излазног напона, мерене у односу на референтни (нулти) потенцијал, која се може постићи (*output voltage swing*) и улазног напона потребног да се тај напон достигне. Показатељ потискивања заједничког напона (*common-mode rejection ratio*),  $CMRR$  је дефинисан односом диференцијалног појачања,  $A$ , и појачања заједничког сигнала,  $A_{CM}$ :

$$\text{CMRR [dB]} = 20 \log_{10} \frac{A}{A_{\text{CM}}} = 20 \log_{10} \left| \frac{\frac{u_O}{u_D}}{\frac{u_O}{u_{\text{CM}}}} \right|_{u_{\text{CM}}=0} \quad (6.48)$$

Спецификације *CMRR* које дају произвођачи интегрисаних кола често су засноване на нешто изменљеној дефиницији ове величине. Посматрају се промена еквивалентног напона помераја нуле, сведеног на улаз, и заједнички улазни напон, који је довео до те промене [17]. Код интегрисаних операционих појачавача *CMRR* је, типично, већи од 90 децибела.

### 6.3.1.4 НАПАЈАЊЕ

Операциони појачавач се снабдева енергијом из извора једносмерног напона напајања (*supply voltage*). Биполарно напајање, позитивним ( $U_H$ ) и негативним ( $U_L$ ) напоном, омогућује обраду напона оба поларитета.

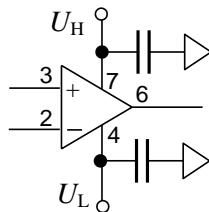
Уобичајено је да се операциони појачавачи напајају симетричним напонима, на пример:  $\pm 6$  V или  $\pm 15$  V. Могуће је и несиметрично напајање, из једног извора напона напајања, на пример: +6 V. Тада је “-” приклучак за напајање операционог појачавача повезан на нулу (масу) извора из којег се појачавач напаја енергијом.

Радни опсег напона напајања (*operating supply range*) може да буде дефинисан експлицитно, или посредно, при спецификацији параметара који зависе од напона напајања (као што је појачање). Декларишу се називна вредност напона напајања (на пример,  $\pm 15$  V), као и највећа дозвољена вредност напона напајања (*absolute maximum ratings, input voltage, supply voltage*).

У спецификацијама се приказује и струја коју појединачно интегрисано коло узима из напајања током рада, када је неоптерећено (*supply current*). Посебно се специфицира максимална дисипација кола која не сме да буде прекорачена (*absolute maximum ratings, power dissipation*).

Осетљивост на промене напона напајања исказује се сачиниоцем потискивања промена напона напајања (*supply voltage rejection ratio - SVRR, power supply rejection ratio - PSRR*), који може да буде дефинисан количником промене напона напајања и одговарајуће промене излазног напона, или односом еквивалентног напона помераја нуле на улазу и промене напона напајања који ју је узроковао [18]. Понекад се исказује у микроволтима по волту.

У табели 6.1 су упоредно приказане основне статичке карактеристике операционих појачавача типа OP77 (PMI), CA3140 (RCA), и OPA827(BB), на основу података декларисаних од стране произвођача.



Слика 6.19. Напајање операционог појачавача  $\mu A741$

### 6.3.2 ДИНАМИЧКЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ

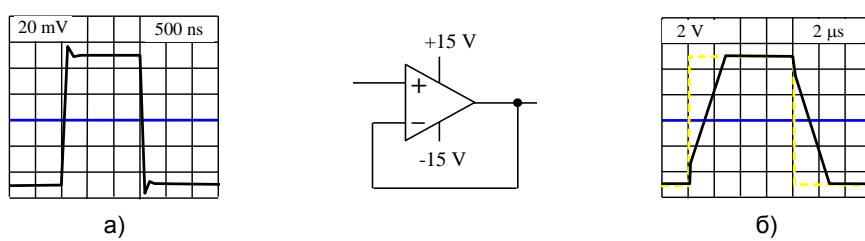
У динамичком погледу, савршени (идеални) операциони појачавач је диференцијални појачавач који има тренутни одзив. Динамичка својства операционог појачавача описују се ширином фреквенцијског опсега у затвореној петљи при јединичном појачању (*unity-gain bandwidth*) и највећом могућом брзином промене напона на излазу појачавача (*slew rate*).

параметар	символ	јединица	OP 77A		CA 3140		OPA 827	
			min	max	min	max	min	max
Напон напајања	$U_S$	V		$\pm 22$	$\pm 2$	$\pm 18$	$\pm 4$	$\pm 18$
Струја напајања	$I_S$	mA		2 2,5	4 6			4,5
Радни опсег напона на улазу, $U_S = \pm 15$ V	$IVR$	V	$\pm 13$	$\pm 14$		-15,5 +12,5		
Појачање великих сигнална, $R_L \geq 2$ kΩ	$A_{UO}$	V/mV	5000	12000	20	100	1000	
Напон помераја нуле на улазу, $R_L \geq 2$ kΩ	$U_{OS}$	µV		4 10	2000	15000		250
Дуговремена стабилност напона помераја нуле		µV/мес.		0,2				
Температурски коефицијент напона помераја нуле	$TC_{UOS}$	µV/°C		0,03 0,1	5			
Улазна струја	$I_B$	nA	-0,2	1,5	0,01 0,05	0,05		$\pm 0,003$
Диференцијална улазна струја	$I_{OS}$	nA	0,3	1	0,005 0,03	0,03		$\pm 0,003$
Диференцијална улазна отпорност	$R_{IN}$	MΩ	26	45				
Улазна отпорност	$R_{INCM}$	GΩ		200	1500			
Опсег промене напона на излазу, $U_S = \pm 15$ V, $R_L \geq 2$ kΩ	$U_O$	V	$\pm 12,5$	$\pm 13$		-14,4 +13	17	-17
Највећа струја на излазу	$I_{OM}$	mA			+10/-1			
Потискивање заједничког напона на улазу	$CMRR$	dB	130	140	70 90	108		

Трајање кратког споја на излазу: неограничено

Табела 6.1. Основне карактеристике типичних операционих појачавача

Брзина промене напона на излазу стварног појачавача је ограничена, а овај податак се наводи у спецификацији произвођача. Дају се дијаграми који приказују одзив на побуду сигналом који представља правоугаоне импулсе. На слици 6.20. је приказан одзив једног BiFET операционог појачавача, повезаног као неинвертујући појачавач јединичног појачања, на побуду симетричним правоугаоним импулсом. При побуди импулсом амплитуде 50 mV (слика 6.20.a) излаз појачавача прилично верно прати промене улаза. При побуди импулсом амплитуде 5 V долази до изражена ограничења у погледу брзине промене напона на излазу појачавача (слика 6.20.b).



Слика 6.20. Одзив на побуду правоугаоним импулсима

У табели 6.2 су упоредно приказане најзначајније динамичке карактеристике операционих појачавача OP77, CA3140 и OPA827.

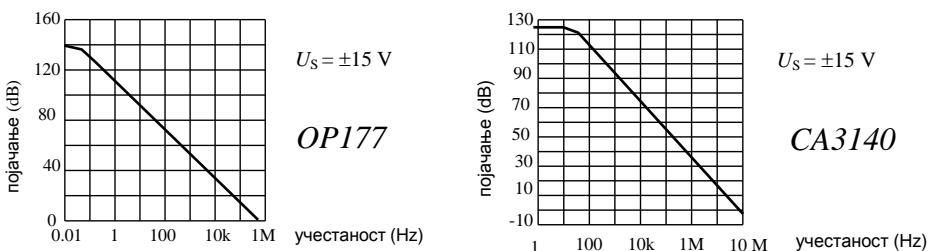
параметар	символ	јед.	OP77A		CA3140		OPA827	
			min	typ	min	typ	min	typ
Појачање великих сигналса, $R_L \geq 2 \text{ k}\Omega$	$A_{UO}$	V/mV	5000	12000	20	100		1000
Највећа брзина промене напона на излазу $R_L \geq 2 \text{ k}\Omega$	$SR$	V/ $\mu$ s	0,1	0,3		9		22
Фреквенцијски опсег у затвореној петљи, $A_{UCL}=1$	$BW$	MHz	0,4	0,6		4,5		18

Табела 6.2. Основне динамичке карактеристике операционих појачавача

Савршени (идеални) операциони појачавач је диференцијални појачавач који има бесконачно широк пропусни опсег. Када улазни сигнал представља променљиву величину, стварни операциони појачавачи се моделују функцијом преноса која одговара динамичком елементу првог реда. При побуди наизменичним напоном, однос амплитуда и фаза излазног и улазног сигнала представља се комплексном величином која зависи од учестаности. У првој апроксимацији користи се израз који одговара филtru пропуснику нискних учестаности:

$$A(j2\pi f) = \frac{A_0}{1 + j \frac{f}{f_g}} . \quad (6.49)$$

Параметар  $f_g$  је учестаност при којој је појачање  $\sqrt{2}$  пута мање од вредности појачања једносмерног сигнала,  $A_0$ . У спецификацијама производијача амплитудска фреквенцијска карактеристика приказује се графички, а податак о ширини фреквенцијског опсега у затвореној петљи при појачању једнаком један наводи се посебно (табела 6.2). На слици 6.21 приказане су амплитудске фреквенцијске карактеристике операционих појачавача OP177 и CA3140.



Слика 6.21. Амплитудска фреквенцијска карактеристика операционих појачавача

Као основни показатељ динамичких својстава често се користи производ појачања и пропусног опсега (*gain-bandwidth product*). Код савремених појачавача оште намене вредност ове величине је у опсегу од 1 до 10 MHz. Код прецизних операционих појачавача је испод 1 MHz, а код

брзих (широкопојасних) појачавача може да буде и неколико стотина мегахерца. [19]

### 6.3.3 УСЛОВИ ОКОЛИНЕ

Под овим називом се подразумевају, пре свега, услови у погледу температуре.

У начелу разликују се три опсега радне температуре:

- војни (*military temperature range*), од -55 °C до +125 (150)°C,
- индустријски (*industrial temperature range*), од -25 °C до +120°C, и
- комерцијални (*commercial temperature range*), од 0 °C до +85 (125) °C.

Посебно се специфицирају температурски опсег складиштења (*storage temperature range*) и температура лемљења (*lead temperature range, soldering*). У начелу, допуштен опсег температуре складиштења је шири од радног опсега. Температура лемљења може да буде до 300 °C, али не дуже од 10 s.

## ЛИТЕРАТУРА

---

1. IEC 60050-351, *International Electrotechnical Vocabulary, Part 351-32, Control technolog / Specific functional units in control technology*, 351-32-46.
2. Beneteau P., Blaser L., Lane R. *Transistor Operational Amplifiers*, SGS, BAS 29, 1962.
3. B. Baker, *Operational Amplifier Topologies and DC Specifications*, Microchip, AN722, 1999.
4. G.E.Tobey, J.G.Graeme, L.P. Huelsman, *Operational amplifiers, Design and application*, McGraw-Hill, 1971.
5. G. Rostky, "Unsung Hero Pioneered Op Amp," *EE Times*, March 24, 1997,  
<http://www.eetonline.com/anniversary/designclassics/opamp.html>.
6. *Operational amplifier, Historical timeline*, Wikipedia.
7. Smith I.J., *Modern Operational Circuit Design*, Wiley&Sons, 1971.
8. Millman J., Halkias C., *Integrated electronics, analog and digital circuits and systems*, McGraw-Hill, 1972, pp 572.
9. Sheingold D.H., *Nonlinear circuits handbook*, Analog Devices, 1974, 1976 (руски превод Справочник по нелинейным схемам, Мир, 1977, с 146).
10. S. Marjanović, *Elektronika, Diskretna i integrirana analogna kola*, Naučna knjiga, 1984, s. 286.
11. V. Stojanović, *Analogna elektronika*, Univerzitet u Nišu, 1994.
12. S. Tešić, D. Vasiljević, *Osnovi elektronike*, Građevinska knjiga, 2000, s. 139.
13. S. Marjanović, *Elektronika 1, Komponente i kola*, Akademска мисао, 2004.
14. Widlar J. R, *A Monolithic Operational Amplifier*, SGS-Fairchild Application Report, AR-129, April 1964.
15. I.Joung, *A History of the continuously Innovative Analog Integrated Circuits*, IEEE SSCS News, Vol 12, No 4, 2007.
16. Widlar J. R, *IC op amp beats FETs on input current*, National Semiconductor, AN-129, December 1969.
17. -, *Integrated operational amplifier theory*, AN165, Philips semiconductors, 1988.
18. M. Tomac, *Proizvodnja i primena linearnih integriranih sklopova*, Elektrotehnika, br. 3, ss 263-294, 1971.
19. H. Taub, D. Schilling, *Digital Integrated Electronics*, Mc Graw Hill, 1977, p 465.

Њаписано је: "На почетку бејаше реч!"  
 Ёво, већ запех ту, на првом ретку!"  
 Јер реч толико не могу да ценим,  
 морам то другим да заменим  
 ако се збила духу мене слио.  
 Нек пише: "На почетку ум је био!"  
 О првом реду размишља лепо,  
 не дај да перо похита слепо!  
 Дах збила ум све ствараше и ткаше?  
 "Снага у самом почетку бејаше!"  
 Ах' већ док ово пишем, свест ме прати  
 да не смем ни на том решењу стати!  
 Дух помаже ми!  
 Видим! Пиши мирно и смело:  
 "На почетку бејаше дело!"



*Faust*  
 (Johann Wolfgang von Goethe)

## 7.

# ОСНОВНА КОЛА СА ОПЕРАЦИОНИМ ПОЈАЧАВАЧИМА

Аналогна електроника је првобитно била усмерена на решавање проблема телекомуникационе технике. Идеја да се повратним деловањем излаза на улаз електронског појачавача побољшају његова својства, представљала је зачетак, клизу која је израсла у аналогну рачунарску технику, да би, након развоја полупроводничке технологије, раскошно процветала. Интегрисани операциони појачавач, сам по себи, представља помало необично, релативно сложено, али не баш много интересантно коло које остварује елементарну функцију - увећање напона. Оно што му даје значај, то је чињеница да се помоћу њега, и одговарајуће вештине пројектовања, решава мноштво најразноврсних проблема обраде сигнала. Оно што оставља посебан утисак, то је да се анализа рада основних електронских кола са операционим појачавачима своди на два једноставна "златна правила" која се разматрају у овом поглављу. То су правило напона и правило струја.

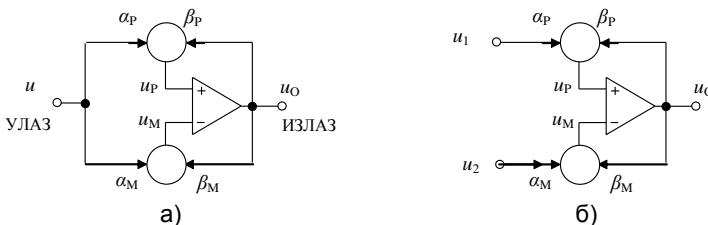
Према дефиницији, савршени операциони појачавач има бесконачно велико појачање, а улазне струје су једнаке нули. Када је улазни диференцијални напон једнак нули (односно, када се неинвертујући и инвертујући улаз налазе на истом потенцијалу), напон на излазу савршеног појачавача је такође једнак нули. Развој технологије аналогних интегрисаних кола је омогућио да се, за највећи број примена, интегрисани операциони појачавачи могу да сматрају савршеним. У предвиђеним условима рада, појачање комерцијално доступних операционих појачавача је реда величине  $10^6$ , а померај нуле мањи од  $10^{-4}$  V. Улазне струје су мање од  $10^{-6}$  A, а улазна отпорност већа од  $10^6$  Ω. Захваљујући томе функционална анализа кола са операционим појачавачима је веома олакшана.

Линеарна обрада аналогног сигнала, поред основних алгебарских опарација (множење константом, сабирање и одузимање), подразумева и

операције више математике – диференцирање и интеграљење. У овом поглављу разматрају се кола којима се оне остварују. При пројектовању електронских уређаја, таква кола имају улогу елемената помоћу којих се реализују сложени системи.

## 7.1 АНАЛИЗА КОЛА СА САВРШЕНИМ ОПЕРАЦИОННИМ ПОЈАЧАВАЧЕМ

Операциони појачавач је првенствено намењен да се користи као део сложеног система у којем се, помоћу једне или више грана повратне спреге, остварује жељена обрада аналогног сигнала. Повратно дејства излаза може, посредством одговарајућих мрежа, да буде остварено на један, или оба улаза појачавача. На слици 7.1.а приказан је општи структурни блок-дијаграм кола са једним улазом и једним излазом. С обзиром на веома велико појачање операционог појачавача, када се његов излаз налази унутар линеарног дела карактеристике, негативна повратна спрега тежи да разлику потенцијала неинвертујућег и инвертујућег улаза смањи до нуле. Истоветна структура омогућује и обраду два сигнала (слика 7.1.б).



Слика 7.1. Операциони појачавач са повратном спрегом

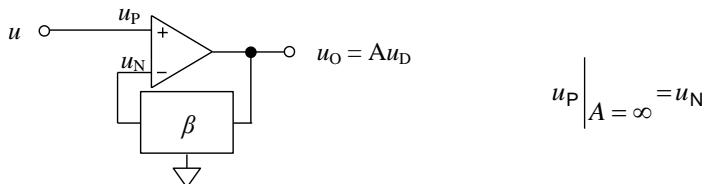
Анализа кола са операционим појачавачима се може, у великом броју случајева, значајно да поједностави применом општих правила која произишу из основних закона електротехнике и својства савршеног операционог појачавача. Полазећи од тога, могу да се формулишу једноставна правила чија примена веома олакшава функционалну анализу кола са операционим појачавачима. Када се ради о електронским колима која се примењују у индустрији, савремени интегрисани операциони појачавачи могу да се сматрају савршеним. Анализа линеарних кола се у великој мери своди на примену ових “златних правила”.

### 7.1.1 ПРАВИЛО НАПОНА

Операциони појачавач се првенствено користи са негативном повратном спрегом, која се, у најједноставнијем облику, остварује прослеђивањем сигнала од излаза до инвертујућег улаза појачавача (слика 7.2). Излазни напон  $u_O$ , када се налази у границама линеарне области рада појачавача (слика 6.3), сразмеран је диференцијалном улазном напону  $u_D$ :

$$u_O = A(u_P - u_M) = Au_D, \quad (7.1)$$

где је  $A$  појачање појачавача.



Слика 7.2. Правило напона

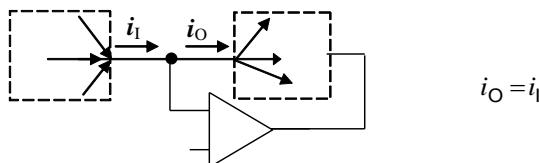
С обзиром на велико појачање, диференцијални напон је веома мали, па улазни крајеви операционог појачавача имају приближно једнаке потенцијале:

$$u_D = \frac{u_O}{A} \Big|_{A \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \Rightarrow u_P \rightarrow u_M \Big|_{A \rightarrow \infty}. \quad (7.2)$$

Ако се излаз операционог појачавача не налази у области засићења, негативна повратна спрега обезбеђује једнаке потенцијале инвертујућег и неинвертујућег улаза савршеног операционог појачавача.

### 7.1.2 ПРАВИЛО СТРУЈА

Улазне струје савршеног операционог појачавача су занемарљиво мале. То значи да се за одговарајуће чврлове, са којима су повезани улазни прикључци појачавача, може да примени прво Кирхофово правило као да тај појачавач не постоји. У колу приказаном на слици 7.3, алгебарски збир свих струја које, као резултат деловања спољашњих побуда, утичу у чвр са којим је улаз савршеног операционог појачавача повезан, једнак је укупној струји  $i_O$  која из њега истиче услед деловања повратне спреге.



Слика 7.3. Правило струја

У уобичајеним условима рада<sup>1</sup>, укупна струја која утиче у чвр, са којим је улаз савршеног операционог појачавача повезан, једнака је укупној струји која из њега истиче.

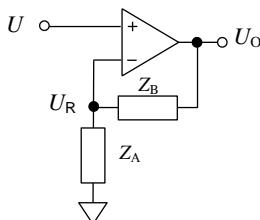
Последица ових правила је да, ако су улазне струје и напон помераја нуле операционог појачавача занемарљиво мали, а појачање доволно велико,

<sup>1</sup> Када се појачавач налази у стању када његова улазна струја може да се занемари.

карактеристика преноса улаз-излаз практично не зависи од тачности којом је остварено појачање самог појачавача, већ само од својства кола повратне спреге.

## 7.2 НЕИНВЕРТУЈУЋА СТРУКТУРА

Неинвертујућа структура кола са операционим појачавачем приказана је на слици 7.4. Негативна напонска повратна спрега остварена је са излаза на инвертујући (минус) улаз појачавача помоћу делитеља напона, који образују импедансе  $Z_A$  и  $Z_B$ .



Слика 7.4. Неинвертујућа структура

Ако је појачавач савршен, напон  $U_R$  је једнак улазном напону  $U$  (инвертујући и неинвертујући улаз се налазе на истом потенцијалу):

$$U(s) = U_R(s) = \beta(s)U_O(s) = \frac{Z_A(s)}{Z_A(s) + Z_B(s)}U_O(s), \quad (7.3)$$

За напон  $U_O$  на излазу кола важи:

$$U_O(s) = \left(1 + \frac{Z_B(s)}{Z_A(s)}\right)U(s). \quad (7.4)$$

Фреквенцијска карактеристика посматраног кола дефинисана је изразом:

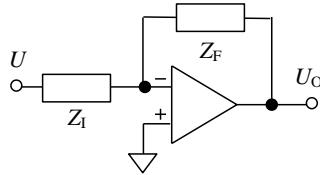
$$W(j\omega) = \frac{U_O(j\omega)}{U(j\omega)} = 1 + \frac{Z_B(j\omega)}{Z_A(j\omega)}. \quad (7.5)$$

Оваква структура обезбеђује велику улазну отпорност (импедансу). Математички, ако су импедансе  $Z_A$  и  $Z_B$  исте физичке природе, неинвертујућа структура са савршеним операционим појачавачем остварује множење сачиниоцем који не зависи од учестаности, већ представља реалан број који је већи од један ( $0 < \omega < \infty$ ). У општем случају, на местима импеданси  $Z_A$  и  $Z_B$  могу да се налазе и сложене пасивне или активне мреже.

## 7.3 ИНВЕРТУЈУЋА СТРУКТУРА

Инвертујућа структура кола са операционим појачавачем приказана је на слици 7.5.а. У колу са савршеним операционим појачавачем, негативна повратна спрега, остварена преко импеданса  $Z_F$ , који повезује излаз појачава са његовим инвертујућим улазом, обезбеђује да се, са довољном тачношћу,

може сматрати да је потенцијал инвертујућег улаза једнак нули (привидна, виртуелна нула). Струја кроз импедансу  $Z_F$  једнака је струји кроз импедансу  $Z_I$ .



Слика 7.5. Инвертујућа структура

У општем случају, ако је појачање појачавача доволно велико, функција преноса овог кола (однос комплексних ликових излазног и улазног напона) зависи само од односа импеданси,  $Z_F$  и  $Z_I$ , а не зависи од вредности појачања самог појачавача. За напон  $U_O$  на излазу кола важи:

$$U_O(s) = -\frac{Z_F(s)}{Z_I(s)} U(s). \quad (7.6)$$

Фреквенцијска карактеристика овог кола,  $W(j\omega)$ , одређена је изразом:

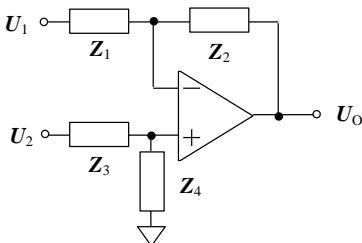
$$W(j\omega) = \frac{U_O(j\omega)}{U(j\omega)} = -\frac{Z_F(j\omega)}{Z_I(j\omega)}, \quad (7.7)$$

у којем  $U_O(j\omega)$  и  $U(j\omega)$  представљају комплексне ликове улазног и излазног напона, а  $Z_F(j\omega)$  и  $Z_I(j\omega)$  су импедансе мреже посредством које је остварена повратна спрега. Избором импеданси  $Z_I$  и  $Z_F$  добијају се одговарајуће карактеристике система у целини. Математички, ако су импедансе  $Z_I$  и  $Z_F$  исте природе, инвертујућа структура са савршеним операционим појачавачем остварује множење негативним реалним бројем ( $0 < \omega < \infty$ ).

Значајно својство ове структуре огледа се у могућности сабирања више улазних сигнална.

## 7.4 МЕШОВИТА СТРУКТУРА

Улазно, односно повратно дејство може да буде остварено преко оба улаза операционог појачавача. Таква, "мешовита" структура приказана је на слици 7.6.

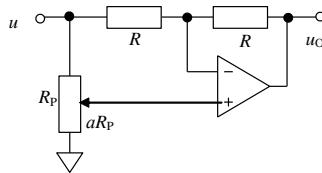


Слика 7.6. Мешовита структура

Фреквенцијска карактеристика овог кола,  $W(j\omega)$ , одређена је изразом:

$$W(j\omega) = \frac{U_O(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} \left( 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \right) - \frac{Z_2}{Z_1}. \quad (7.8)$$

Применом овакве структуре остварује се појачавач чије појачање може да се мења у границама од -1 до +1 (слика 7.7) [1].



Слика 7.7. Појачавач подесивог појачања

## 7.5 САБИРАЧ НАПОНА

Када је неинвертујући улаз операционог појачавача на нултом потенцијалу, могуће је остварити операцију суперпозиције два напона (слици 7.8.a):

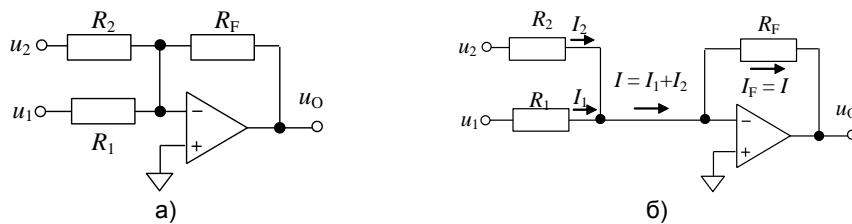
$$u_O = k_1 u_1 + k_2 u_2, \quad (7.9)$$

где су  $k_1$  и  $k_2$  сачиниоци "тежине" сабирача. Њихова је вредност одређена вредностима отпорности у колу. У складу са ознакама назначеним на слици 7.8.б, за посматрано коло важи:

$$u_O = -R_F I_F = -R_F (I_1 + I_2) = -R_F \left( \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} \right) = -\left( \frac{R_F}{R_1} u_1 + \frac{R_F}{R_2} u_2 \right). \quad (7.10)$$

Ако је  $R_1 = R_2 = R_F$ , коло представља инвертујући сабирач два напона:

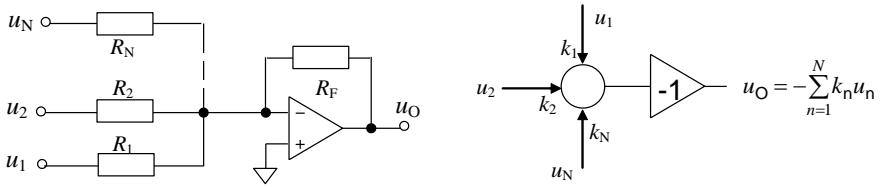
$$u_O = -(u_1 + u_2). \quad (7.11)$$



Слика 7.8. Сабирање два напона помоћу операционог појачавача

Првидна нула коју операциони појачавач, помоћу негативне повратне спрече, одржава на свом инвертујућем улазу, омогућује сабирање више улазних струја чије су вредности одређене независним изворима напона. На основу принципа суперпозиције, за коло приказано на слици 7.9 важи:

$$u_O = \sum_{n=1}^N u_{On} = \sum_{n=1}^N \left( -\frac{R_F}{R_n} u_n \right) = -\sum_{n=1}^N k_n u_n. \quad (7.12)$$

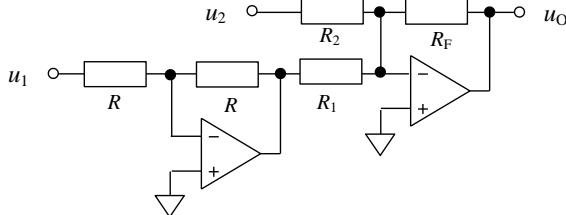


Слика 7.9. Инвертуји сабирач

## 7.6 ОДУЗИМАЧ НАПОНА

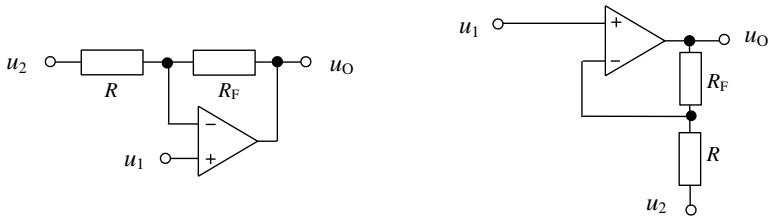
Операција одузимања два напона може да се оствари са два операциона појачавача на начин приказан на слици 7.10. Вредност излазног напона одређена је изразом:

$$u_O = -R_F \left( \frac{u_1}{R_1} - \frac{u_2}{R_2} \right). \quad (7.13)$$



Слика 7.10. Одузимање напона

Инвертуји појачавач омогућује остваривање одузимања два напона ако се и неинвертуји (плус) улаз операционог појачавача користи за повезивање са извором напонског сигнала, као што је то у колу приказаном на слици 7.11.a.



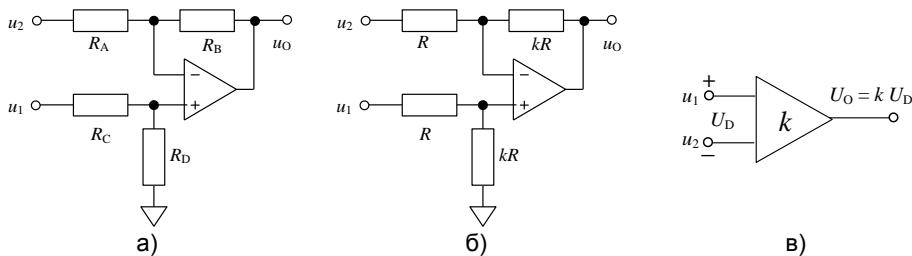
Слика 7.11. Поларисани појачавач

На основу принципа суперпозиције, за овакав, поларисани инвертуји појачавач, важи:

$$u_O = u_O(u_1) \Big|_{u_2=0} + u_O(u_2) \Big|_{u_1=0} = \left( 1 + \frac{R_F}{R} \right) u_1 - \frac{R_F}{R} u_2. \quad (7.14)$$

До истоветног резултата се долази ако се ово коло посматра као поларисани неинвертујући појачавач<sup>2</sup> (слика 7.11.б). У оба случаја, оно остварује операцију одузимања два напона,  $u_1$  и  $u_2$ , при чему су сачиниоци "тежине" првог и другог члана у овом изразу различити. Да би се изједначили, потребно је смањити, у одговарајућој мери, напон  $u_1$  који се доводи на неинвертујући улаз појачавача, као што је то урађено у колу приказаном на слици 7.12.а. Излазни напон је тада одређен изразом:

$$u_O = \frac{R_D}{R_C + R_D} \left( 1 + \frac{R_B}{R_A} \right) u_1 - \frac{R_B}{R_A} u_2. \quad (7.15)$$



Слика 7.12. Остваривање операције одузимања

Уколико су вредности отпорности у колу такве да је испуњен услов:

$$\frac{R_B}{R_A} = \frac{R_D}{R_C} = k, \quad (7.16)$$

ово коло представља **појачавач разлике** два напона (слика 7.12.б):

$$u_O = k(u_1 - u_2), \quad (7.17)$$

односно, остварује појачање напона  $u_D = u_1 - u_2$ , који није дефинисан према нултом потенцијалу (маси) система<sup>3</sup>. Ако су оба улазна приклучка на истом потенцијалу ( $u_P = u_N$ ,  $u_D = 0$ ) излазни напон је једнак нули.

Због несавршености појачавача, као и неизбежног одступања у стварним вредностима отпорности у колу, напон на излазу зависи не само од разлике улазних напона, већ и од њихове вредности. Израз 7.15 може да се прикаже у облику:

$$u_O = \frac{R_B}{R_A} (u_1 - u_2) + \frac{R_A R_D - R_B R_C}{(R_C + R_D) R_A} u_1. \quad (7.18)$$

Напон на излазу кола представља алгебарски збир два члана. Први члан је резултат жељеног деловања овог кола: појачање разлике напона:

<sup>2</sup> Електрони, а самим тим и електронски појачавачи, не разликују "лево" и "десно", "горе" и "доле". Електронске шеме треба цртати тако да се олакша праћење основног "тока обраде" сигнала. Коло приказано на слици 7.11.а инвертује и појачава сигнал  $u_2$ , при чему је неинвертујући улаз раздвојен од нуле и поларисан напоном  $u_1$ . Коло приказано на слици 7.11.б је неинвертујући појачавач сигнала  $u_1$ , при чему је референтна тачка кола повратне спрете, на коју се "ослања" отпорник  $R$ , одвојена од нуле и поларисана напоном  $u_2$ .

<sup>3</sup> Каže се да је напон  $u_D$  "пливајући" (floating).

$$u_D = u_1 - u_2 . \quad (7.19)$$

Величина  $u_D$  се назива "диференцијални напон" (*differential voltage*).

Ако се напон  $u_D$  посматра као основна величина, напони  $u_1$  и  $u_2$  могу да се представе једначинама (слика 7.13):

$$u_1 = u_{CM} + \frac{u_D}{2} , \text{ и} \quad (7.20)$$

$$u_2 = u_{CM} - \frac{u_D}{2} , \quad (7.21)$$

у којима  $u_{CM}$  представља "заједнички део" улазних напона  $u_1$  и  $u_2$  (*common mode voltage*, заједнички напон):

$$u_{CM} = \frac{u_1 + u_2}{2} . \quad (7.22)$$

Сређивањем једначине 7.18 добија се израз који показује како излазни напон посматраног кола,  $u_O$ , зависи од диференцијалног напона  $u_D$ , као улазне величине, и заједничког напона  $u_{CM}$ :

$$u_O = \frac{R_A R_D + R_B (R_C + 2R_D)}{2R_A (R_C + R_D)} u_D + \frac{R_A R_D - R_B R_C}{(R_C + R_D) R_A} u_{CM} . \quad (7.23)$$

Ова зависност може да се представи у облику:

$$u_O = A_D u_D + A_{CM} u_{CM} , \quad (7.24)$$

где је  $A_D$  појачање диференцијалног напона, а  $A_{CM}$  представља појачање заједничког напона.

Сavrшени одузимач (*subtractor*) у потпуности потискује заједнички напон ( $A_{CM} = 0$ ). Да би се то постигло, у колу са слике 7.12.а треба да буде остварен услов:

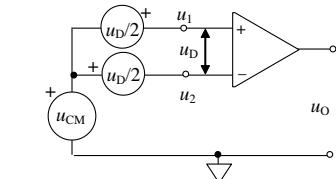
$$R_A R_D - R_B R_C = 0 . \quad (7.25)$$

У том случају је:

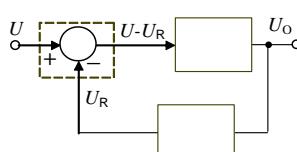
$$A_D = \frac{R_B}{R_A} = \frac{R_D}{R_C} . \quad (7.26)$$

Ако су све отпорности у колу међусобно једнаке добија се јединични појачавач разлике два напона.

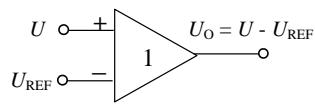
У системима са повратном спрегом, појачавач разлике два напона има улогу елемента помоћу којег се формира разлика улазног сигнала и сигнала повратне спреге.



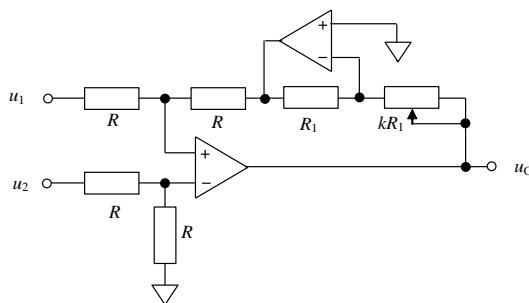
Слика 7.13. Појачавач разлике два напона



У мерној техници, појачавач разлике два напона омогућује мерење одступања посматране величине у односу на задату референтну вредност (диференцијално мерење).



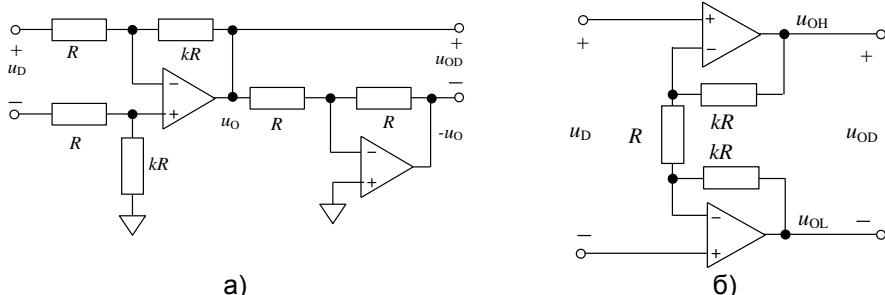
У електроници је уобичајено да се појачавач разлике назива "диференцијални појачавач" (*differential amplifier*). Коло приказано на слици је једноставно, али има системски недостатак: не омогућује подешавање појачања једним елементом (потенциометром). На слици 7.14 приказано је једно решење овог проблема [2].



Слика 7.14. Појачавач разлике два напона са подесивим појачањем

Диференцијални појачавач остварује појачање напона  $u_D$  који није дефинисан према нултом потенцијалу у односу на који се посматра излазни напон. Некада је потребно да и излазна величина буде представљена диференцијалним напоном. То се може постићи додавањем инвертора (инвертујућег појачавача јединичног појачања) као што је то приказано на слици 7.15.а. Помоћу додатног појачавача добија се напон супротног знака у односу на излаз операционог појачавача којим је остварена операција одузимања. Излазни сигнал представља напон  $u_{OD}$ :

$$u_{OD} = -2ku_D. \quad (7.27)$$



Слика 7.15. Појачавач разлике са диференцијалним излазима

Недостатак таквог решења је "додатни пут", који треба да пређе сигнал да би се добио напон  $-u_O$ , што уноси кашњење, односно померај фазе. Овај проблем је превазиђен у колу приказаном на слици 7.15.б, за које важи:

$$u_{OD} = (1+2k)Ri, \quad (7.28)$$

где је  $i$  струја која тече кроз отпорник  $R$ :

$$i = \frac{u_D}{R}, \quad (7.29)$$

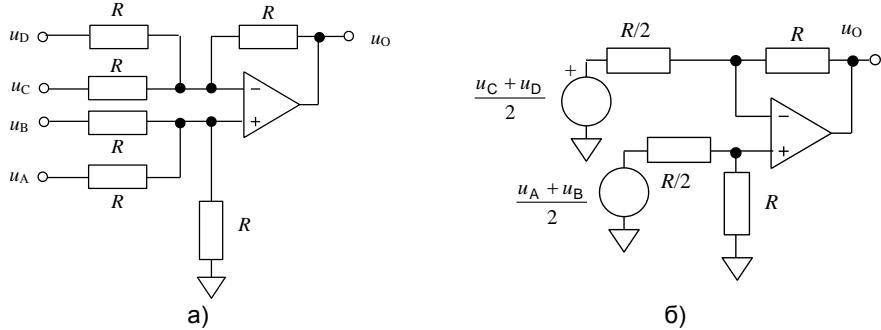
одакле следи:

$$u_{OD} = (1+2k)u_D. \quad (7.30)$$

Притом, излазни сигнали  $u_{OH}$  и  $u_{OL}$  пролазе једнаким путањама. Предност овакве структуре су и велика улазна отпорност, као и могућност једноставног подешавања појачања једним потенциометром.

### 7.6.1 САБИРАЧ-ОДУЗИМАЧ НАПОНА

Мешовита структура кола са операционим појачавачем омогућује "повезивање" операција сабирања и одузимања у једном колу, на начин приказан на слици 7.16.а.



Слика 7.16. Сабирач - одузимач

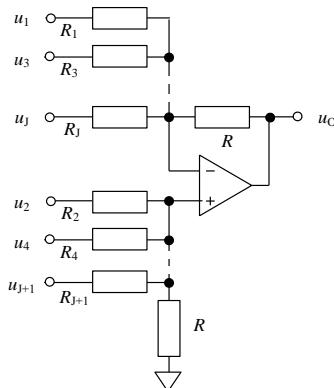
Применом Тевененове теореме (слика 7.16.б) посматрано коло своди се на већ разматрану структуру одузимача напона (слика 7.12.а). На основу принципа суперпозиције следи:

$$u_O = \frac{u_A + u_B}{2} \frac{R}{R + \frac{R}{2}} \left(1 + \frac{R}{\frac{R}{2}}\right) - \frac{u_C + u_D}{2} \frac{R}{\frac{R}{2}} = u_A + u_B - u_C - u_D. \quad (7.31)$$

Уопштавањем ове структуре могуће је остварити "универзални сабирач-одузимач", чија је принципска шема приказана на слици 7.17. Излазни напон,  $u_O$ , одређен је изразом:

$$u_O = \sum_{j=1}^J k_{j+1} u_{j+1} - \sum_{j=1}^J k_j u_j, \quad (7.32)$$

у којем тежински сачиниоци зависе од вредности улазних отпорности [3].

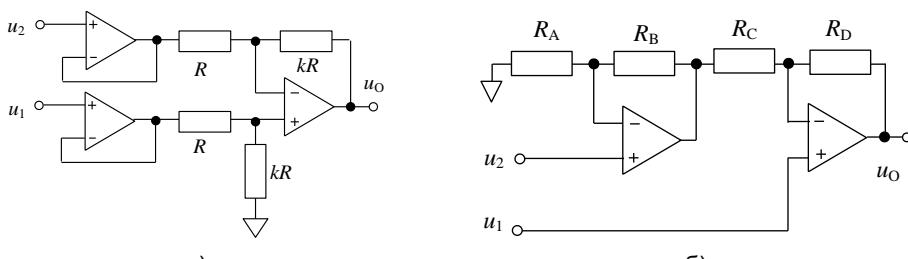


Слика 7.17. Остваривање операција сабирања и одузимања напона са различитим сачиниоцима тежине

## 7.7 ИНСТРУМЕНТАЦИОНИ ПОЈАЧАВАЧИ

Под називом инструментациони појачавач (*instrumentation amplifier*) подразумева се елемент који омогућује појачање разлике два напона, а чија је основна намена да омогући спрезање извора мере информације и електронског система за прикупљање мерних података тако да не оптерећује извор напона који представља улазни сигнал. Примена инструментационих појачавача је практично неизбежна у свим случајевима када је мери сигнал напон, реда величине миливолта, дефинисан у односу на референтни потенцијал у објекту чије се стање посматра<sup>4</sup>.

У основи структуре инструментационог појачавача налази се операциони појачавач са негативном повратном спрегом. У најједноставнијем облику садржи само један појачавач у функцији одузимача напона, као што је то приказано на слици 7.12.б. Основни недостатак таквог кола је коначна улазна отпорност која оптерећује извор сигнала. Решење овог проблема се постиже додавањем неинвертујућих јединичних појачавача на сваком од улаза, као што је то приказано на слици 7.18.а.



Слика 7.18. Инструментациони појачавачи

<sup>4</sup> Референтни потенцијал (маса) уређаја у индустријском постројењу се, најчешће, не може са сигурношћу и задовољавајућом тачношћу сматрати једнаким са потенцијалом референтног прикључка мernog система.

На слици 7.18.б приказано је коло које садржи само два операциона појачавача. На основу принципа суперпозиције следи да је напон на излазу једнак:

$$u_O = u_O(u_1) \Big|_{u_2=0} + u_O(u_2) \Big|_{u_1=0} = u_1 \left(1 + \frac{R_D}{R_C}\right) - u_2 \left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right) \frac{R_D}{R_C}. \quad (7.33)$$

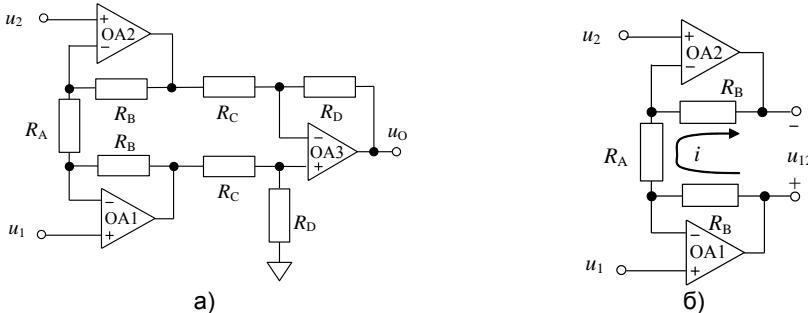
Да би ово коло обављало функцију инструментационог појачавача потребно је да буде задовољен услов:

$$\frac{R_B R_D}{R_A R_C} = 1. \quad (7.34)$$

Оба кола приказана на слици 7.18 имају истоветан недостатак. Да би се са довољном тачношћу подесило жељено појачање диференцијалног напона  $u_D = u_2 - u_1$  потребно је да се усагласе вредности два парса отпорника. У колу приказаном на слици 7.19.а подешавање појачања може да се оствари подешавањем вредности само једног отпорника. Излазни део овог кола (појачавач OA3) представља диференцијални појачавач за који важи:

$$u_O = \frac{R_D}{R_C} u_{12}, \quad (7.35)$$

где је  $u_{12}$  разлика потенцијала на излазима појачавача OA1 и OA2 у улазном делу кола (слика 7.19.б).



Слика 7.19. Инструментациони појачавач са подесивим појачањем

У складу са ознакама на слици 7.19.б важе једначине:

$$u_{12} = i(R_A + 2R_B), \text{ и} \quad (7.36)$$

$$i = \frac{u_1 - u_2}{R_A}, \quad (7.37)$$

на основу којих се добија:

$$u_O = \left(1 + 2 \frac{R_B}{R_A}\right) \frac{R_D}{R_C} (u_1 - u_2). \quad (7.38)$$

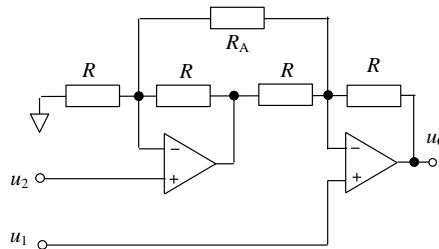
За разлику од отпорности  $R_B$ ,  $R_C$  и  $R_D$ , које се у колу са слике 7.19.а појављују у паровима, отпорност  $R_A$  је јединствена и омогућује подешавање вредности диференцијалног појачања. Ако је  $R_B = R_C = R_D$  диференцијално појачање  $A_D$  одређено је изразом:

$$A_D = \left(1 + 2 \frac{R}{R_A}\right) (u_1 - u_2). \quad (7.39)$$

Вредност  $A_D$  се подешава отпорником  $R_A$ .

На слици 7.20 приказана је структура инструментационог појачавача са два операциона појачавача, која омогућује подешавање вредности појачања подешавањем вредности само једног отпорника:

$$u_O = 2 \left(1 + \frac{R}{R_A}\right) (u_1 - u_2). \quad (7.40)$$



Слика 7.20. Инструментациони појачавач са подесивим појачањем

Недостатак таквог решења је, као и у колу са слике 7.18.б, неједнакост “путања” које пролазе сигнали неинвертујућег и инвертујућег улаза које уносе различита кашњења, што се одражава на фреквенцијски одзив кола.

## 7.8 ДИФЕРЕНЦИЈАТОР

Диференцијатор (*derivative element, D-element*) је линеаран динамички елемент којим се остварује операција диференцирања (одређивања првог извода) по времену улазне променљиве  $x(t)$  (слика 7.21):

$$y(t) = K_D \frac{dx}{dt}, \quad (7.41)$$

где је  $y(t)$  излазна променљива, а  $K_D$  сачинилац деловања (*derivative action coefficient*), који може да буде позитиван (неинвертујући диференцијатор) или негативан (инвертујући диференцијатор).



Слика 7.21. Диференцијатор

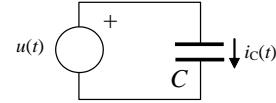
Ако улазни,  $x(t)$ , и излазни сигнал,  $y(t)$ , имају исту физичку природу (на пример, представљени су вредношћу напона између улазних, односно излазних приклучака елемента), сачинилац преноса савршеног диференцијатора,  $K_D$ , има димензију времена, и обично се означава са  $T_D$  (временска константа диференцијатора). Једначини 7.41. одговара функција преноса:

$$W_{PD}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K_D s. \quad (7.42)$$

Када сачинилац преноса  $K_D$  не зависи од времена, овај елемент омогућује мерење брзине промене величине  $x(t)$ . Ако улазна величина представља функцију која се линеарно мења са временом, брзином  $v$ , тада излаз има сталну вредност, једнаку  $v T_D$ .

Ако је улазна величина представљена напоном  $u(t)$ , савршен кондензатор је диференцијатор кроз који протиче струја  $i_C(t)$ :

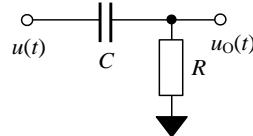
$$i_C(t) = C \frac{du}{dt}.$$



Када је улазни напон сталан (непроменљив), у стационарном стању струја кроз кондензатор је једнака нули. Ако напон  $u(t)$  представља пулсирајућу величину, средња вредност струје  $i_C(t)$  једнака је нули. Када се напон мења сталном брзином, струја кроз кондензатор је константна, сразмерна брзини промене напона. При побуди хармонијским напоном, струја  $i_C(t)$  је хармонијски сигнал исте учестаности, који "претходи" напону за четвртину периода, (фазно "предњачи" у односу на улазни сигнал за угао  $\pi/2$ ), независно од учестаности напона.

Математички модел редног  $CR$ -кола, приказаног на слици 7.22, је диференцијална једначина првог реда:

$$RC \frac{du_O}{dt} + u_O(t) = RC \frac{du}{dt}. \quad (7.43)$$



Слика 7.22.  $RC$ -диференцијатор

Ако је улазни напон много већи од напона на отпорнику, који представља излазни напон, струја  $i_C(t)$ , која тече кроз кондензатор, сразмерна је брзини промене улазног напона:

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt} (u - u_O) \approx C \frac{du}{dt}.$$

Математички модел овог кола се тада своди на једначину:

$$u_O(t) = R i_C(t) = RC \frac{du}{dt}, \quad (7.44)$$

односно:

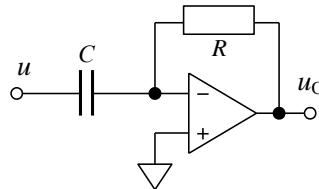
$$U_O(s) = sRC U(s), \quad (7.45)$$

која одговара неинвертујућем диференцијатору чија је временска константа једнака  $RC$ . Недостатак овог једноставног, пасивног диференцијатора, осим захтева да излазни напон буде довољно мали, је и околност да оптерећење приклучено на његов излаз утиче на функцију преноса кола:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{sRC}{1 + sRC} \approx sRC \left| \frac{1}{sRC} \right| \ll 1. \quad (7.46)$$

### 7.8.1 ИНВЕРТУЈУЋИ ДИФЕРЕНЦИЈАТОР

Карактеристику диференцијатора има електронско коло са операционим појачавачем у чијој је директној грани кондензатор, а у повратној грани повратне спреге отпорник (слика 7.23).



Слика 7.23. Инвертујући диференцијатор са операционим појачавачем

У складу са ознакама на слици, математички модел кола са савршеним операционим појачавачем чине једначине:

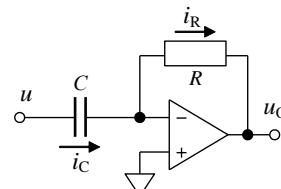
$$u_O(t) = -R i_R(t),$$

$$i_R(t) = i_C(t), \text{ и}$$

$$i_C(t) = C \frac{du}{dt},$$

на основу којих се добија:

$$u_O(t) = -RC \frac{du}{dt}.$$



Посматрано коло представља инвертујући диференцијатор. Излазни напон сразмеран је првом изводу по времену функције  $u(t)$ . Функција преноса овог елемента једнака је:

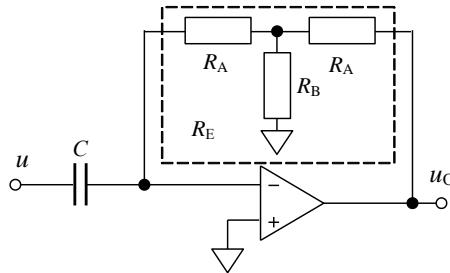
$$W_D(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = -\frac{R}{\frac{1}{sC}} = -sRC. \quad (7.47)$$

Фреквенцијска карактеристика одређена је изразом:

$$W_D(j\omega) = \frac{U_O(j\omega)}{U_I(j\omega)} = -\frac{R}{\frac{1}{j\omega C}} = -j\omega RC. \quad (7.48)$$

Остваривање диференцијатора са екстремно великом временском константом  $T_D = RC$  наилази на тешкоће с обзиром на својства отпорника и кондензатора. Отпорници веома велике отпорности су мање прецизни и мање стабилни. Кондензатори великих капацитивности имају, по правилу, велике димензије, широке толеранције, велике губитке и лошу стабилност. У колу приказаном на слици 7.24. у грани повратне спреге операционог појачавача налази се мрежа која се састоји од три отпорника. Ако је отпорност  $R_B$  много мања од отпорности  $R_A$ , еквивалентна отпорност грани повратне спреге,  $R_E$ , много је већа од појединачних отпорности:

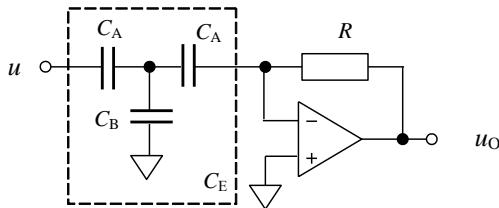
$$R_E = 2R_A + \frac{R_A^2}{R_B}. \quad (7.49)$$



Слика 7.24. Диференцијатор са великим временском константом

Примена  $T$ -мреже омогућује и решавање проблема остваривања диференцијатора са веома малом временском константом. За коло приказано на слици 7.25 важи:

$$C_E = \frac{C_A^2}{2C_A + C_B}. \quad (7.50)$$



Слика 7.25. Диференцијатор са малом временском константом

## 7.8.2 НЕИНВЕРТУЈУЋИ ДИФЕРЕНЦИЈАТОР

Пасивно  $CR$ -коло (слика 7.26.а) представља диференцијатор утолико боље уколико је отпорност излазног отпорника мања. Наиме, информација о брзини промене улазног напона садржана је у вредности струје  $i_C(t)$  кроз улазни кондензатор. Ова струја једнака је струји кроз излазни отпорник:

$$i_C(t) = i_R(t), \quad (7.51)$$

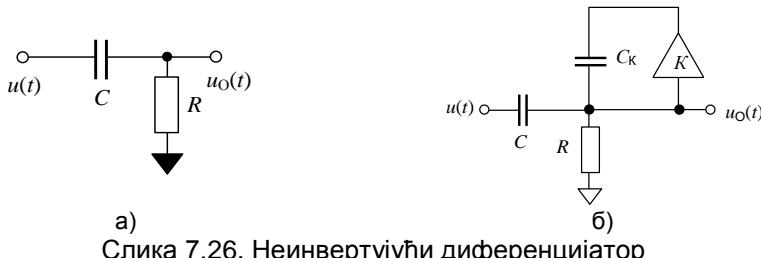
на којем прави пад напона који представља излазну величину  $u_O(t)$ :

$$u_O(t) = u_R(t) = R i_R(t). \quad (7.52)$$

Струја  $i_C(t)$ , међутим, зависи и од вредности излазног напона:

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = C \left( \frac{du}{dt} - \frac{du_O}{dt} \right), \quad (7.53)$$

због чега функција преноса пасивног  $CR$ -кола одступа од функције преноса савршеног диференцијатора (једначина 7.42). Поништавање овог ефекта постиже се тако што се, помоћу додатног појачавача, струја кроз излазни отпорник увећа за струју која је сразмерна брзини промене напона  $u_O(t)$ , као што је то приказано на слици 7.26.б.



Слика 7.26. Неинвертујући диференцијатор

У складу са ознакама на слици, математички модел кола чине једначине:  
 $u_O(t) = R i_R(t)$ ,

$$i_R(t) = i_C(t) + i_K(t),$$

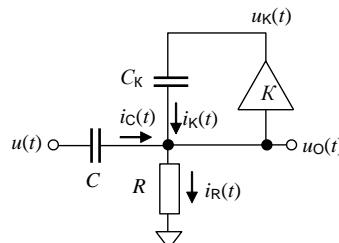
$$i_C(t) = C \frac{d}{dt}(u - u_O),$$

$$i_K(t) = C_K \frac{d}{dt}(u_K - u_O),$$

$$u_K(t) = K u_O(t),$$

на основу којих се добија:

$$u_O(t) = RC \frac{du}{dt} - RC \frac{du_O}{dt} + RC_K(K-1) \frac{du_O}{dt}.$$



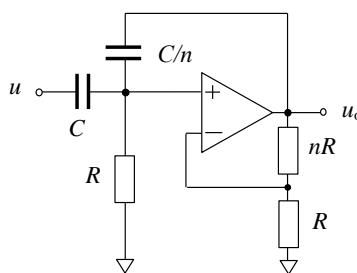
Уколико је испуњен услов:

$$(K-1)C_K = C, \quad (7.54)$$

излазни напон је одређен изразом:

$$u_O(t) = RC \frac{du}{dt}. \quad (7.55)$$

Пасивни *CR*-диференцијатор “поправљен” применом позитивне повратне спрке представља *bootstrap*-диференцијатор<sup>5</sup> [4]. На слици 7.25. приказана је електрична шема овог кола, оствареног помоћу операционог појачавача.

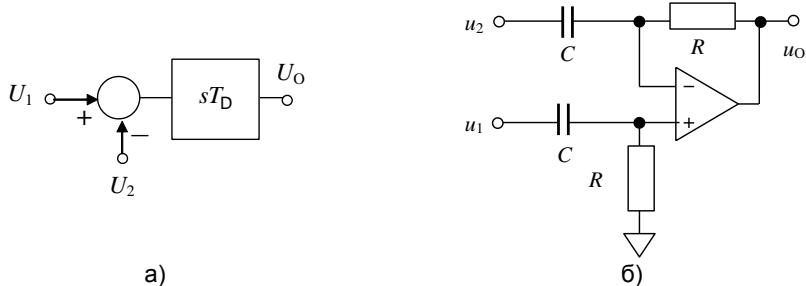
Слика 7.27. *Bootstrap*-диференцијатор

<sup>5</sup> Термин *bootstraping* се користи у електроници да, у општем смислу, означи поступак којим се побољшава функционисање система [2]. У посматраном случају, излаз појачавача “вуче” други крај кондензатора у грани позитивне повратне спреке, тако да струја  $i_K(t)$ , која кроз њега дотиче, компензује промене улазне струје до којих долази због промене напона на излазном отпорнику (енг. *bootstrap*, петља на чизми која олакшава обување; *boots*, погурати, подићи).

### 7.8.3 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ ДИФЕРЕНЦИЈАТОР

Диференцирање разлике два напона може, у начелу, да се оствари применом одузимача и диференцијатора (слика 7.28.а). Коло приказано на слици 7.28.б омогућује да се овај задатак реши помоћу само једног операционог појачавача [5]:

$$u_O(t) = RC \left( \frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt} \right). \quad (7.56)$$



Слика 7.28. Диференцијални диференцијатор

При пројектовању активних диференцијатора неопходно је водити рачуна о фреквенцијској карактеристици операционог појачавача. Обично се склоност ка самоосциловању предупређује додавањем отпорника на ред са кондензатором. Тиме се, међутим, унеколико квари функција преноса [6].

### 7.9 ПРОПОРЦИОНАЛНО ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ (PD) ЕЛЕМЕНТ

У системима аутоматског управљања диференцијатор представља управљачки елемент који на управљани објекат делује сразмерно брзини којом се мења референтна величина (диференцијални регулатор). Пропорционално-диференцијални елемент (PD-елемент) на свом излазу даје сигнал чија вредност зависи и од тренутне вредности и од брзине промене улазног сигнала. Елемент првог реда се образује комбинацијом диференцијатора и појачавача. Савршени PD-елемент првог реда је описан диференцијалном једначином:

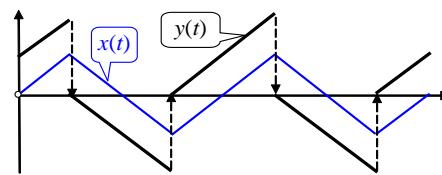
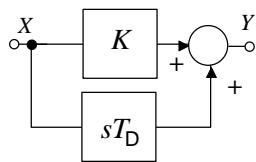
$$y(t) = K_P x(t) + T_D \frac{dx}{dt}, \quad (7.57)$$

где је  $K_P$  сачинилац пропорционалног деловања (*proportional action coefficient*), а  $T_D$  временска константа диференцијалног деловања PD-елемента. Једначини 7.57. одговара функција преноса:

$$W_{PD}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K_P + sT_D. \quad (7.58)$$

На слици 7.29 приказани су одговарајући структурни блок-дијаграм и одзив на побуду периодичним сигналом симетричног троугаоног облика.

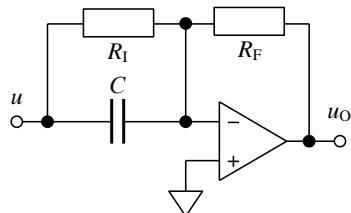
Промена нагиба функције  $x(t)$  испољава се на излазу PD-елемента као скоковита промена функције  $y(t)$ .



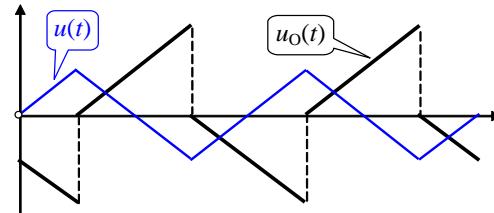
Слика 7.29. PD-елемент

На слици 7.30.а приказан је инвертујући PD-елемент, остварен помоћу једног операционог појачавача. У складу са ознакама на слици, важи:

$$u_O(t) = -\frac{R_F}{R_I} u(t) - R_F C \frac{du}{dt}. \quad (7.59)$$



a)



б)

Слика 7.30. Инвертујући PD-елемент са операцијним појачавачем

Функција преноса овог кола је:

$$W_I(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = -\frac{\frac{1}{sC}}{R} = -\frac{1}{sRC}. \quad (7.60)$$

Одзив овог кола на побуду наизменичним напоном троугаоног таласног облика, под претпоставком да је операцијни појачавач савршен, приказан је на слици 7.30.б

## 7.10 ИНТЕГРАТОРИ

Интегратор (*integral element*) је линеаран динамички елемент којим се остварује операција интеграљења по времену улазне променљиве  $x(t)$  (слика 7.31):

$$y(t) = K_I \int x(t) dt, \quad (7.61)$$

где је  $y(t)$  излазна променљива, а  $K_I$  сачинилац деловања (*integral action coefficient*), који може да буде позитиван (неинвертујући интегратор) или негативан (инвертујући интегратор) [7].



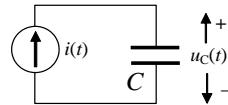
Слика 7.31. Интегратор

Ако улазни,  $x(t)$ , и излазни сигнал,  $y(t)$ , имају исту физичку природу (на пример, представљени су вредношћу напона између улазних, односно излазних прикључака елемента), константа преноса савршеног интегратора,  $K_I$ , има димензију учестаности.

Ако је улазна величина представљена струјом  $i(t)$ , савршен кондензатор може да се примени као интегратор који на свом излазу даје напон:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + U_{C0},$$

где је  $U_{C0}$  почетна вредност напона  $u_C(t)$ .

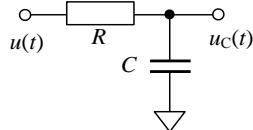


Ако струја  $i(t)$  представља пулсирајућу величину,  $\overline{i(t)} \neq 0$ , напон на кондензатору неограничено расте, ако је средња вредност струје  $i(t)$  позитивна, односно неограничено опада ако је средња вредност негативна.

При побуди хармонијским сигналом, напон  $u_C(t)$  је хармонијски сигнал исте учестаности, који "каси" за побудом за четвртину периода, (фазно "заостаје" у односу на улазни сигнал за угао  $\pi/2$ ), независно од учестаности струје.

Математички модел редног  $RC$ -кола, приказаног на слици 7.32, је диференцијална једначина првог реда:

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C(t) = u(t). \quad (7.62)$$

Слика 7.32.  $RC$ -интегратор

Ово коло може да се примени као интегратор, ако је улазни напон много већи од напона на кондензатору који представља излазни напон. Тада важи:

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{u(t) - u_C(t)}{R} \approx \frac{u(t)}{R}, \quad (7.63)$$

па се математички модел своди на једначину:

$$RC \frac{du_C}{dt} = u(t), \quad (7.64)$$

односно:

$$sRCU(s) = U_O(s), \quad (7.65)$$

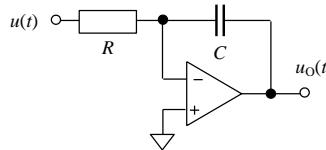
која одговара неинвертујем интегратору чија је временска константа једнака  $RC$ . Недостатак овог једноставног пасивног интегратора, осим захтева да излазни напон буде доволно мали, представља и околност да оптерећење прикључено на његов излаз утиче на функцију преноса кола:

$$W(s) = \frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + sRC} \approx \frac{1}{sRC} \quad |sRC| \gg 1. \quad (7.66)$$

Да би се реализовало коло чији математички модел што више личи на модел савршеног интегратора неопходан је појачавач.

### 7.10.1 ИНВЕРТУЈУЋИ ИНТЕГРАТОР

На слици 7.33 приказана је инвертујућа спрега операционог појачавача којом се остварује операција интеграљења сигнала представљеног напоном.



Слика 7.33. Инвертујући интегратор

Операциони појачавач “одржава”, посредством повратне спрете, свој неинвертујући улаз на референтном потенцијалу кола (првидна нула). Струја која тече кроз кондензатор једнака је струји коју даје извор улазног напона кроз отпорник чији је други крај на потенцијалу нуле. Пуњењем се напон на кондензатору мења, због чега се излаз појачавача мења тако да “измиче” други крај кондензатора, како би инвертујући улаз одржао на потенцијалу неинвертујућег улаза.

У складу са ознакама на слици, математички модел инвертујућег интегратора са савршеним операционим појачавачем чине једначине:

$$u_O(t) = -\frac{1}{C} \int i_C(t) dt,$$

$$i_R(t) = i_C(t), \text{ и}$$

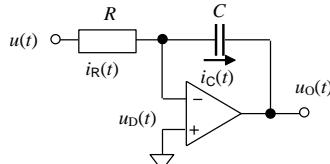
$$i_R(t) = \frac{u}{R},$$

на основу којих следи:

$$u_O(t) = -\frac{1}{RC} \int u(t) dt,$$

односно:

$$U_O(s) = -\frac{1}{sRC} U(s).$$



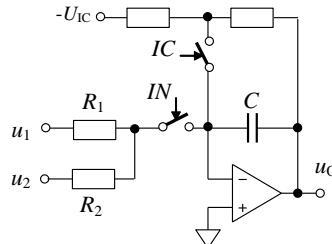
Посматрано коло представља инвертујући интегратор чија је функција преноса:

$$W(s) = -\frac{1}{sRC}. \quad (7.67)$$

У аналогној рачунарској техници, решавање интегро-диференцијалних једначина захтева успостављање одговарајућег почетног стања (*initial condition, IC*). На слици 7.34 приказана је принципска шема таквог, “рачунарског” интегратора са два улаза [8], [9]. Прекидачи омогућују дефинисање три начина рада (*mode*). Када је прекидач */N* отворен, а

прекидач  $IC$  затворен, врши се успостављање почетног стања напона на кондензатору (*initialization*). Када је прекидач  $IN$  затворен, а прекидач  $IC$  отворен, остварује се операција интеграције (*operate*) линеарне комбинације улазних напона. За излазни напон важи:

$$U_O(s) = -\frac{U_1(s)}{sR_1C} - \frac{U_2(s)}{sR_2C}. \quad (7.68)$$



Слика 7.34. Рачунарски сабирач-интегратор

Када су оба прекидача отворена, струја кроз интеграциони кондензатор је једнака нули. Коло остварује операцију "памти" (*hold*). Излазни напон задржава вредност коју је имао у тренутку отварања прекидача  $IN$ .

### 7.10.1.1 АНАЛИЗА ТАЧНОСТИ

Несавршености операционог појачавача не само да се директно одражавају на функцију преноса овог кола већ могу да онемогуће његову примену. Због коначног појачања појачавача функција преноса одступа од савршене (једначина 7.67). Томе доприноси и ограничен пропусни опсег самог појачавача. Његова улазна струја и напон померај нуле доводе до промене излазног напона и када је улазна величина једнака нули. Са циљем једноставности, погодније је да се поједине "утицајне величине" разматрају појединачно. Тиме се ни мало не губи на општости закључака.

#### УТИЦАЈ КОНАЧНОГ ПОЈАЧАЊА

Под претпоставком да се улазне струје и померај нуле операционог појачавача могу да занемаре, математички модел кола чине једначине (слика 7.35.a) :

$$U_D = -\frac{U_O}{A}, \quad (7.69)$$

$$I = \frac{U - U_D}{R}, \text{ и} \quad (7.70)$$

$$U_O = U_D - \frac{I}{Z_C}, \quad (7.71)$$

где је  $A$  појачање појачавача, а  $Z_C$  импеданса кондензатора. На основу ових једначина важи:

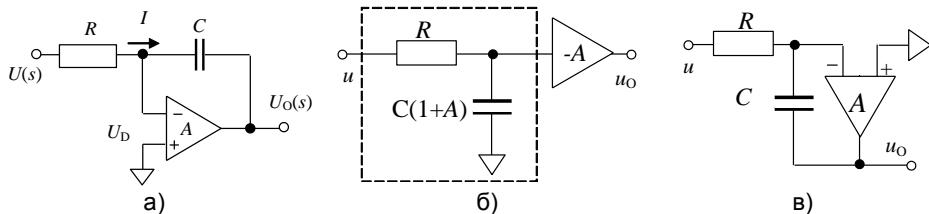
$$U_O = U_D - \frac{1}{sC} \frac{U - U_D}{R}, \quad (7.72)$$

односно:

$$U_O = -\frac{U_O}{A} \left(1 + \frac{1}{sRC}\right) - \frac{1}{sRC} U, \quad (7.73)$$

одакле следи:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = -A \frac{1}{1 + sRC(1+A)}. \quad (7.74)$$



Слика 7.35. Утицај коначног појачања

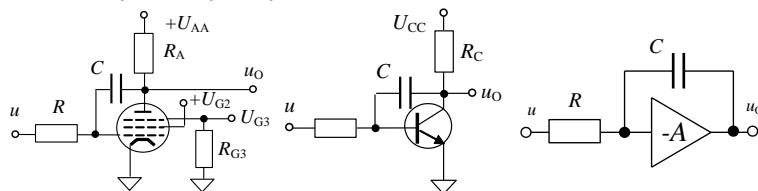
Ако појачање  $A$  не зависи од учестаности, коло делује као систем који се добија редном везом пасивног  $RC$ -интегратора, чија је временска константа једнака  $RC(1+A)$ , и инвертујућег појачавача појачања  $A$  (слика 7.35.б). Захваљујући повратној спрези, којом операциони појачавач одржава инвертујући улаз на потенцијалу близком потенцијалу неинвертујућег улаза, струја која тече кроз кондензатор веома мало зависи од напона на кондензатору. Током пуњења, операциони појачавач "измиче" други крај кондензатора да би потенцијал инвертујућег улаза остао на нули (слика 7.35.в). Резултат тог деловања је истоветан као да је повећана капацитивност кондензатора. Ако је појачање појачавача бесконачно велико, првидна нула на другом крају отпорника обезбеђује да је струја која тече кроз кондензатор сразмерна улазном напону, независно од разлике потенцијала између крајева кондензатора. Првидно, капацитивност кондензатора је бесконачно велика.

Амерички инжењер Милер (John Milton Miller, 1882-1962) применио је повратну спреку да би решио проблем генерирања напона чија вредност линеарно расте са временом [10].

Уобичајено је да се инвертујући интегратор, заснован на примени негативне повратне спреке, назива Милеров интегратор, а ефекат повратне спреке, којим се постиже првидно повећање капацитивности интеграционог кондензатора, Милеров ефекат.



Џон Милер



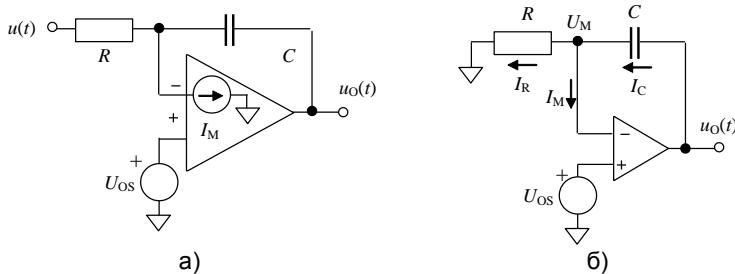
Слика 7.36. Три генерације Милеровог интегратора

## УТИЦАЈ НАПОНА ПОМЕРАЈА НУЛЕ И УЛАЗНЕ СТРУЈЕ

Према природи операције интеграције, ако је средња вредност подинтегралне величине различита од нуле, излаз интегратора неограничено расте са временом. Напон на излазу операционог појачавача не може да буде

изван граница које су одређене напонима којима се напаја. Када се излазни напон приближи напону напајања појачање се смањује и карактеристика прелази у област засићења (слика 6.3.а).

Да вредност напона између крајева кондензатора не би неограничено расла током времена, средња вредност струје која кроз њега протиче мора да буде једнака нули. У колу са стварним операционим појачавачем подинтегрална величина (струја кроз кондензатор) је разултет суперпозиције дејства улазне величине и величина које представљају различите ефекте који се испољавају као статичке несавршености појачавача (слика 6.4.а). У колу Милеровог интегратора, приказаном на слици 7.37.а, то су еквивалентни напон помераја нуле,  $U_{OS}$ , и улазна струја инвертујућег улаза,  $I_M$ . Њихов утицај је лакше сагледати посматрањем излаза када је улазни напон једнак нули (слика 7.37.б).



Слика 7.37. Анализа инвертујућег интегратора

У складу са ознакама на слици, математички модел овог кола чине једначине:

$$U_M = U_{OS} . \quad (7.75)$$

$$u_O(t) = U_M + u_C(t) = U_M + \frac{1}{C} \int I_C dt , \quad (7.76)$$

$$I_C = I_R + I_M , \text{ и} \quad (7.77)$$

$$I_R = \frac{U_M}{R} . \quad (7.78)$$

на основу којих следи, за  $u_O(0)=0$ :

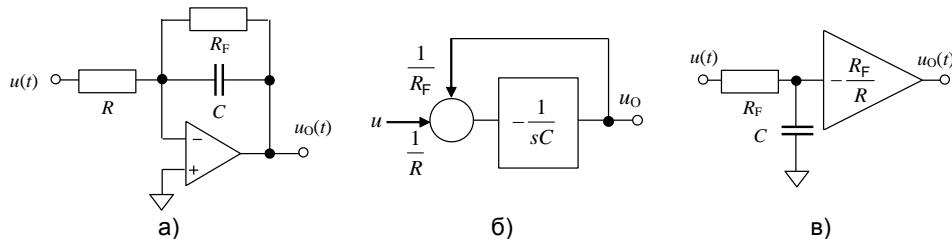
$$u_O(t) = U_{OS} + \frac{1}{C} (I_R + I_M) t = U_{OS} + \frac{1}{C} \left( \frac{U_{OS}}{R} + I_M \right) t . \quad (7.79)$$

Колико год биле мале вредности напона  $U_{OS}$  и струје  $I_M$ , после довољно дугог временског интервала излаз операционог појачавача ће доспети у област засићења и интегратор ће престати да обавља своју функцију.

У неким случајевима решење овог проблема се тражи у додавању отпорника паралелно са интеграционим кондензатором (слика 7.38.а). Треба притом имати у виду да се на тај начин уводи повратна спрега<sup>6</sup> (слика 7.38.б), која мења (у овом случају, квари) функцију преноса кола:

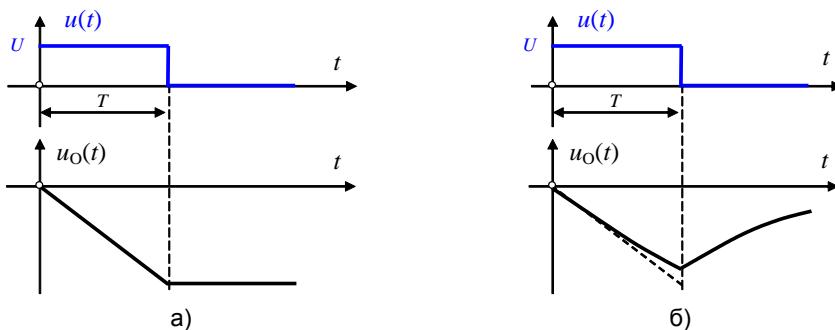
<sup>6</sup> Отпорник  $R_F$ , који затвара коло повратне спрске за једносмерни сигнал, смањује појачање.

$$W(s) = -\frac{R_F}{R} \frac{1}{1 + sR_F C} \quad (7.80)$$



Слика 7.38. Спремање засићења

Ако је излазна отпорност (импеданса) извора улазног напона занемарљиво мала, такво коло је динамички истоветно са пасивним  $RC$ -интегратором, чија је временска константа  $R_F C$  (слика 7.38.в), за којим следи инвертујући појачавач чије је појачање одређено односом отпорности  $R_F$  и  $R$ . На слици 7.39.а приказан је одзив савршеног Милеровог интегратора на побуду импулсом правоугаоног таласног облика, ако је почетна вредност напона на његовом излазу била једнака нули.



Слика 7.39. Импулсни одзив интегратора

За време трајања импулса, кроз интеграциони кондензатор протиче стална струја, па напон на излазу интегратора расте сразмерно протеклом времену:

$$u_O(t) = \frac{1}{RC} U t. \quad (7.81)$$

Након престанка импулса, струја кроз кондензатор је једнака нули, напон између његових крајева се више не мења. Излазни напон задржава вредност коју је достигао.

На слици 7.39.б приказан је одзив (на исту побуду) квази-интегратора са слике 7.38.а. Током трајања импулса, струја кроз кондензатор је мања од улазне струје за део који пролази кроз отпорник  $R_F$ . Излазни напон се мења експоненцијално ка вредности која је одређена амплитудом импулса и односом отпорности  $R_F$  и  $R$ :

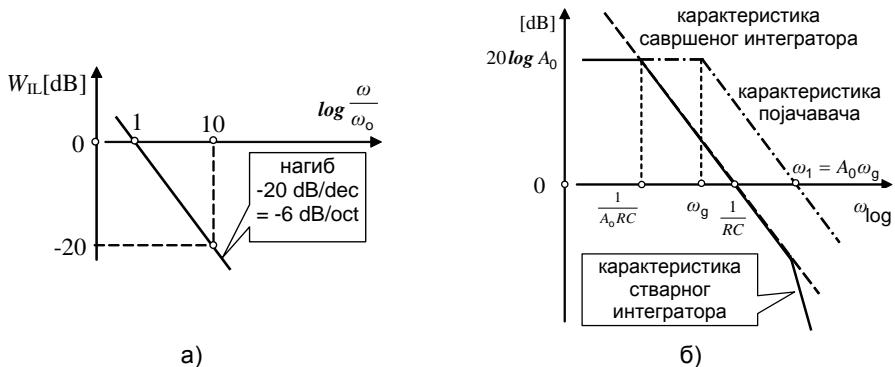
$$u_O(t) = -\frac{R_F}{R} U \left(1 - e^{-\frac{t}{R_F C}}\right), \quad t \leq T. \quad (7.82)$$

Након престанка импулса, улазна струја је једнака нули, а интеграциони кондензатор се празни кроз отпорник  $R_F$ :

$$u_O(t) = U(T) e^{-\frac{t}{R_F C}}, \quad t > T. \quad (7.83)$$

## ФРЕКВЕНЦИЈСКА КАРАКТЕРИСТИКА ИНТЕГРАТОРА

Логаритамска амплитудска фреквенцијска карактеристика савшеног интегратора је права линија чији је нагиб  $-20 \text{ dB/dec}$  (слика 7.40.а).



Слика 7.40. Фреквенцијска карактеристика интегратора

Ограничени пропусни опсег операционог појачавача:

$$A(j\omega) = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}}, \quad (7.84)$$

одражава се на фреквенцијски одзив посматраног кола:

$$W(j\omega) = -A(j\omega) \frac{1}{1 + j\omega RC[1 + A(j\omega)]}. \quad (7.85)$$

Ако је  $A_0 \gg 1$  и  $A_0 \omega_g RC \gg 1$ , функција преноса може да се представи у облику [11]:

$$W(s) \approx -\frac{A_0}{(s \frac{1}{A_0 \omega_g} + 1)(s R C A_0 + 1)}. \quad (7.86)$$

Амплитудска фреквенцијска карактеристика система у целини приказана је на слици 7.40.б. За високе учестаности, нагиб карактеристици је  $-40 \text{ децибела по декади}$ .

### 7.10.2 НЕИНВЕРТУЈУЋИ ИНТЕГРАТОР

Пасивно  $RC$ -коло може да се примени као интегратор ако је напон на кондензатору занемарљиво мали у односу на побудни (улазни) напон (слика

7.41.a):

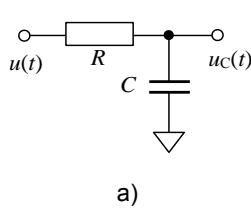
$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{u(t) - u_C(t)}{R}, \quad (7.87)$$

Уколико је услов  $u_C(t) \ll u(t)$  испуњен, струја  $i_C(t)$  не зависи само од излазног напона:

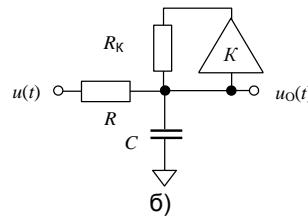
$$i_C(t) \approx \frac{u(t)}{R}, \quad (7.88)$$

одакле следи:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt = \frac{1}{RC} \int u(t) dt. \quad (7.89)$$



a)



б)

Слика 7.41. Неинвертујући интегратор

Зависност улазне струје од напона  $u_C(t)$  не може да се избегне, али се применом повратне спрече (слика 7.41.б) може постићи да је струја кроз интеграциони кондензатор сразмерна улазном напону, независно од вредности напона на кондензатору.

У складу са ознакама на слици, математички модел кола чине једначине:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt$$

$$i_C(t) = i(t) + i_K(t),$$

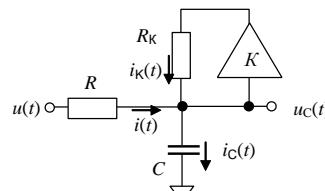
$$i(t) = \frac{u - u_O}{R},$$

$$i_K(t) = \frac{u_K - u_C}{R_K}, \text{ и}$$

$$u_K(t) = Ku_C(t),$$

на основу којих се добија:

$$i_C(t) = \frac{u}{R} - \frac{u_C}{R} + (K - 1) \frac{u_C}{R_K}.$$



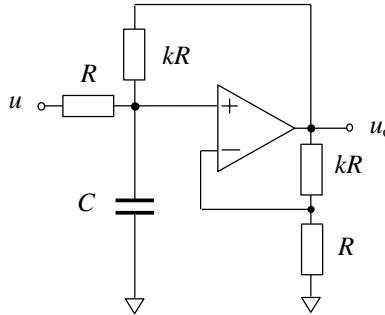
Уколико је испуњен услов:

$$(K - 1)R = R_K, \quad (7.90)$$

напон  $u_C(t)$  је одређен изразом 7.89.

Применом *bootstrap*-технике извршена је “поправка” пасивног  $RC$ -кола тако да се операција интеграције оствари без систематске грешке [12]. На слици 7.42. приказана је електрична шема овог кола, оствареног помоћу операционог појачавача. Ако је операциони појачавач савршен важи:

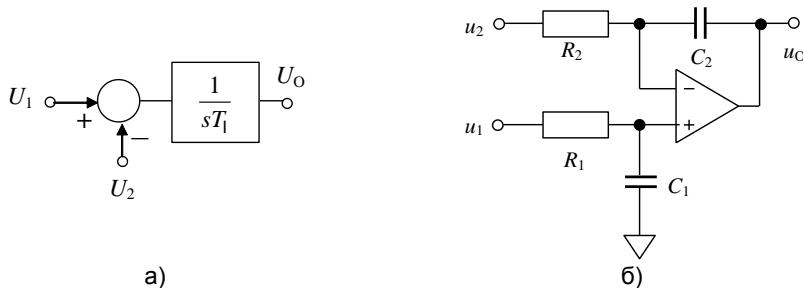
$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = (1+k) \frac{1}{sRC} . \quad (7.91)$$



Слика 7.42. Bootstrap-интегратор

### 7.10.3 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ ИНТЕГРАТОРИ

Интеграљење разлике два напона може, у начелу, да се оствари применом одузимача и интегратора (слика 7.43.а). Коло приказано на слици 7.43.б омогућује да се овај задатак реши помоћу само једног операционог појачавача [13].



Слика 7.43. Диференцијални интегратор

У складу са принципом суперпозиције, однос излазног и улазних напона одређен је једначином:

$$U_O(s) = \frac{Z_{C1}}{R_1 + Z_{C1}} \left( 1 + \frac{Z_{C2}}{R_2} \right) U_1(s) - \frac{Z_{C2}}{R_2} U_2(s) . \quad (7.92)$$

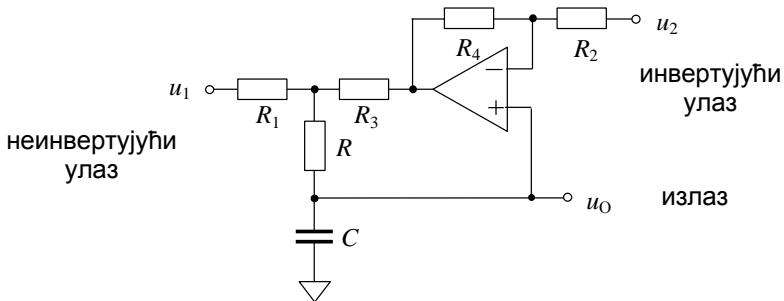
Уколико је испуњен услов:

$$R_1 C_1 = R_2 C_2 = T_l , \quad (7.93)$$

важи:

$$U_C(s) = \frac{U_1(s) - U_2(s)}{sT_l} . \quad (7.94)$$

Коло приказано на слици 7.44 представља диференцијални интегратор који садржи само један интеграциони елемент, чиме се елиминише проблем упаривања временских константи [14].



Слика 7.44. Диференцијални интегратор са једним кондензатором

У складу са ознакама на слици, математички модел овог кола чине једначине:

$$I_C = I_1 + I_3,$$

$$U_C = I_C Z_C = \frac{I_C}{sC},$$

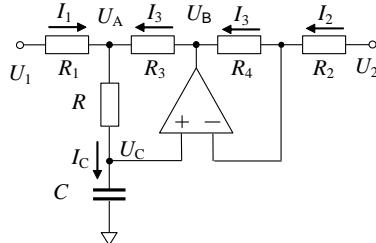
$$I_1 = \frac{U_1 - U_A}{R_1},$$

$$I_3 = \frac{U_B - U_A}{R_3} \text{ и}$$

$$U_A = U_C \frac{R + Z_C}{Z_C} = U_C \left(1 + \frac{R}{Z_C}\right),$$

$$U_O = U_C - R_4 I_4 \text{ и}$$

$$I_4 = \frac{U_2 - U_C}{R_2}.$$



Уколико је испуњен услов:

$$R_1 = R_3; R_2 = R_4, \quad (7.95)$$

излазни напон је одређен изразом:

$$U_O(s) = \frac{U_1(s) - U_2(s)}{3sRC}. \quad (7.96)$$

## 7.11 ПРОПОРЦИОНАЛНО ИНТЕГРАЦИОНИ (PI) ЕЛЕМЕНТ

У системима аутоматског управљања пропорционално-интеграциони регулатор је елемент који на свом излазу даје сигнал чија вредност зависи од тренутне вредности улаза али и од његове "предисторије". PI-елемент првог реда се образује обједињавањем интеграционог и пропорционалног елемента (појачавача). Савршени PI-елемент првог реда је описан диференцијалном једначином:

$$y(t) = K_P x(t) + \frac{1}{T_I} \int x(t) dt, \quad (7.97)$$

где је  $K_P$  сачинилац пропорционалног деловања (*proportional action coefficient*), а  $T_I$  временска константа интеграционог деловања PI-елемента.

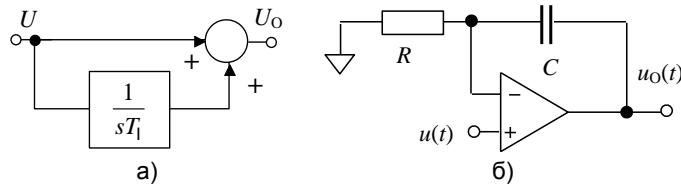
Диференцирањем леве и десне стране добија се диференцијална једначина првог реда:

$$\frac{dy}{dt} = K_P \frac{dx}{dt} + \frac{1}{T_l} x(t), \quad (7.98)$$

којој одговара функција преноса:

$$W_{PI}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K_P + \frac{1}{sT_l}. \quad (7.99)$$

На слици 7.45 приказани су структурни блок-дијаграм *PI*-елемента првог реда и његово остваривање применом неинвертујућег појачавача [15].



Слика 7.45. *PI*-елемент првог реда

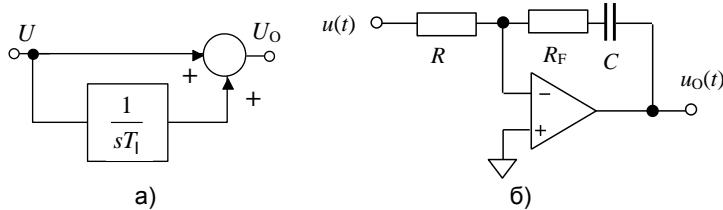
Промене излазног напона у функцији времена и улазног напона описане су једначином:

$$u_O(t) = u(t) + \frac{1}{C} \int \frac{u(t)}{R} dt = u(t) + \frac{1}{RC} \int u(t) dt, \quad (7.100)$$

на основу које следи израз за функцију преноса:

$$W_{PI}(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = 1 + \frac{1}{sRC}. \quad (7.101)$$

На слици 7.46 приказан је структурни блок-дијаграм инвертујућег *PI*-елемента првог реда, оствареног помоћу инвертујућег појачавача.



Слика 7.46. Инвертујући *PI*-елемент првог реда

За ово коло важи:

$$U_O(s) = -R_F \frac{U(s)}{R} - \frac{1}{sC} \frac{U(s)}{R} = -\left(\frac{R_F}{R} + \frac{1}{sRC}\right) U(s), \quad (7.102)$$

односно:

$$W_{PI}(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = -\left(\frac{R_F}{R} + \frac{1}{sRC}\right). \quad (7.103)$$

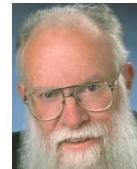
## ЛИТЕРАТУРА

---

1. В.Н.Шило, *Линейные интегральные схемы в радиоэлектронной спирсттуре*, Советское радио, 1974, с.157.
2. J.G.Graeme, *Designing with Operational Amplifiers, Applications Alternatives*, BB electronics services, 1977, p.22.
3. J.I.Smith, *Modern Operational Circuit Design*, John Wiley&Sons, 1973, p.33.
4. Реч. 2, p 185.
5. J.G.Graeme, *Applications of Operational Amplifiers, Third-generation Techniques*, McGraw-Hill, 1973, p 184.
6. Реч. 2, p 184.
7. W.M.Siebert, *Circuits, Signals and Systems*, MIT Press (Цепи, сигналы системы 1, Мир, 1988, с. 26).
8. G.E.Tobey, J.G.Graeme, L.P. Huelsman, *Operational amplifiers, Design and application*, McGraw-Hill, 1971, p. 217.
9. D. Simić, *Elektronski analogni računar, uvod u tehniku programiranja*, Tehnička knjiga, 1970, s. 28.
10. Miller, J. M.: *Dependence of the Input impedance of a Three-electrode Vacuum Tube upon the Load in the Plate circuit*, Nat. Bur.Std. (U.S.) Res. Papers, vol. 15,no 351, pp 367-385, 1919.
11. G.E.Tobey, J.G.Graeme, L.P. Huelsman, *Operational amplifiers, Design and application*, McGraw-Hill, 1971, p. 215.
12. A. Sedra and K. Smith, *Microelectronic Circuits*, Oxford University Press, 2004.
13. Реч.5, p 71.
14. S.K.Sanyal, U.C. Sarker, R. Nandi, "Increased Time-Constant Dual-Input Integrators", *IEEE Trans. Instrum Meas. Vol IM-39*, pp. 672/673, 1990.
15. Реч. 2, p 178.

“Мој најдражи  
атлат за програмирање  
је лемилица.”

*Robert Peace*  
National Semiconductor



## 8. ИЗВОРИ НАПОНА

Савремена електроника се превасходно бави обрадом информација представљених електричним сигналима. Исправан рад електронских кола подразумева да се напајају напоном чија вредност налази у одређеним границама. Због тога извори напона, намењени за снабдевање енергијом (*power supply*) електричних потрошача, заузимају посебно место у електроници.

Савршени извор напона (*ideal voltage source*) је такав извор електричне енергије, код којег напон између његових прикључака не зависи од вредности струје кроз грану у којој се тај извор налази, нити од вредности осталих величина у колима са којим је повезан. У електронским колима извор напона се користи не само да снабдева енергијом остале елементе кола, већ и да прецизно дефинише вредност напона између две тачке електричне мреже. Такав елемент представља извор референтног напона. За ову врсту извора, енергијска способност, која се исказује кроз највећу (дозвољену) снагу оптерећења, има, у начелу, мањи значај од својстава као што су тачност, стабилност и сопствени шум.

Ово поглавље је посвећено разматрању основних појмова који се при проучавању, пројектовању и употреби извора напона за напајање и извора референтног напона користе за описивање њихових својстава. Детаљније разматрање извора напона за напајање превазилази оквире књиге. Спада у енергетску електронику, која се обраћају у посебним књигама и специјализованим стручним часописима.

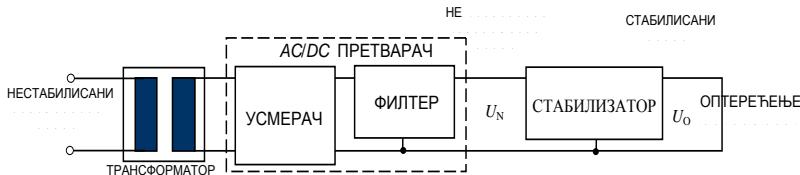
### 8.1 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

Са становишта теорије електричних кола, извор напона (*voltage source*, *Spannungs Quelle*) је активни елемент са једном приступом који електричну мрежу, у којој се налази, снабдева (напаја) електричном енергијом. Извор једносмерног електричног напона за напајање електронских кола је,



практично, неизбежни део електронског уређаја, али се производи и као самостална функционална целина која на свом излазу (излазним прикључцима) даје један или више једносмерних напона чија вредност налази у задатим границама при дефинисаним условима рада, а служи за напајање једног или више модула или уређаја.

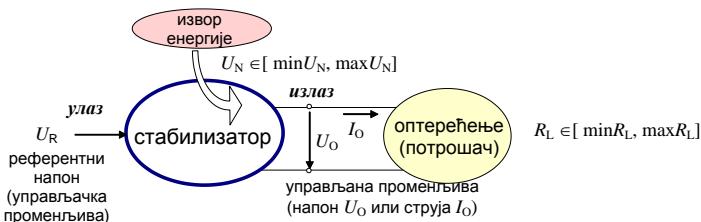
Структурни блок-дијаграм извора једносмерног напона, намењеног за напајање електронских кола енергијом узетом из енергетске мреже наизменичног напона, приказан је на слици 8.1.



Слика 8.1. Извор за напајање електронских кола

Трансформатор омогућује прилагођење нивоа напона и једносмерно (галванско) раздвајање извора (енергетске мреже) и потрошача. Усмерач<sup>1</sup> претвара наизменични напон у једносмерни<sup>2</sup> пулсирајући<sup>3</sup> напон. Филтер остварује слабљење (потискивање) наизменичне компоненте<sup>4</sup> пулсирајућег напона на излазу усмерача. Усмерач и филтер заједно чине (енергетски) претварач наизменичног у једносмерни напон (*AC/DC converter*) чија је средња вредност сразмерна амплитуди улазног напона. Стабилизатор<sup>5</sup> омогућује добијање сталног излазног напона, независно од величине улазног наизменичног напона, заостале наизменичне компоненте на излазу филтра, струје оптерећења и услова околине.

У односу на потрошаче, са којима је излаз стабилизатора повезан, он делује као извор енергије од којег се захтева да карактеристична величина<sup>6</sup> на његовом излазу не зависи од промена оптерећења. Стабилизатор треба да обезбеди да излазна величина има задату вредност, која је одређена вредношћу референтног напона  $U_R$ , слика 8.2, за све вредности напона извора енергије и отпорности оптерећења које се налазе у утврђеним границама.



Слика 8.2. Принцип стабилизације напајања потрошача

<sup>1</sup> У енергетској електроници усмерач (*rectifier*, *выпрямитель*, *Gleichrichter*) се дефинише као претварач електричне енергије који претвара наизменичну струју у једносмерну струју (ЈУС Н.А0.151-01-57).

<sup>2</sup> Једносмерни напон је напон код којег је константна компонента од примарне важности (ЈУС Н.А0.131-01-10).

<sup>3</sup> Пулсирајући напон је периодични напон који има средњу вредност различиту од нуле (ЈУС Н.А0.131-03-06).

<sup>4</sup> Наизменична компонента пулсирајућег напона  $u(t)$  је напон  $u_{ac}(t)$  добијен одузимањем од напона  $u(t)$  његове константне компоненте  $U_0$ , која је једнака средњој вредности напона  $u(t)$  рачунајући за један период (ЈУС Н.А0.131-03-08/09).

<sup>5</sup> Лат. *stabilitas*, постојаност, сталност.

<sup>6</sup> У општем случају, излазну, стабилисану величину извора енергије може да представља струја којом се потрошач напаја.

Ако се референтна величина посматра као улаз, а управљана величина као излаз, стабилизатор је линеаран активни елемент који остварује функцију пратећег система. Ако се стабилизатор посматра као функционална јединица која на свом излазу даје напон  $U_O$  који не зависи од вредности улазног напона  $U_N$ , такав елемент је нелинеаран.



Слика 8.3. Стабилизација напона

Најефикаснији начин за остваривање задатка стабилизације је примена повратне спрече. Стабилизатор заправо представља "пратећи систем" који вредност референтног напона  $U_{REF}$ , који представља управљачку променљиву<sup>7</sup>, преспикава на излаз, који представља управљану променљиву, независно од промена услова рада као што су: напон на излазу извора енергије (из којег се уређај напаја), струја коју оптерећење "вуче", или температура околине. У стручној литератури на српском језику се користи и назив регулатор<sup>8</sup> напона (*voltage regulator*).

Посебан облик стабилизатора напона представљају извори референтног напона који имају улогу електронске "материјализоване мере" при квантитативном одређивању величине неке величине помоћу електронског мерног уређаја. Мерење непознате отпорности, на пример, заснива се на мерењу струје коју извор референтног напона даје кроз ту отпорност. Као напонска референца у електронским уређајима се користи *PN*-спој. Да би се максимално смањио утицај напона напајања енергијом,  $U_N$ , на вредност референтног напона  $U_{REF}$  примењује се посебан стабилизатор, који стабилише напајање извора референтног напона (слика 8.4). Температурска стабилност се постиже одговарајућим компензацијама, као и контролом температуре непосредног окружења у којем се референца налази.



Слика 8.4. Извор референтног напона

## 8.2 СТАБИЛИЗATORИ НАПОНА

Стабилизација једносмерног напона, којим се напајају поједини електронски склопови, спада у најчешће постављене захтеве при реализацији електронских уређаја. За решавање овог проблема развијен је низ електронских кола која остварују овај задатак. Велика разноврсност има за

<sup>7</sup> Такав стабилизатор, заправо, представља систем аутоматског управљања.

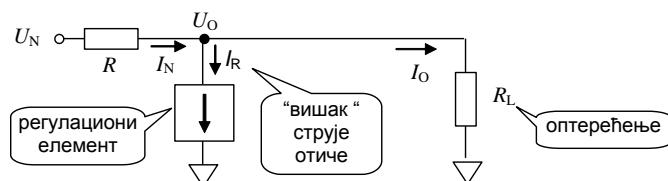
<sup>8</sup> Лат. *regulator*, уредилац, удешавач.

циљ да омогући налажење што погоднијег решења с обзиром на специфичне услове одређене примене. Њихово заједничко обележје је постојање регулационог елемента посредством којег се управља струјом која се прослеђује на излаз тако да напон, који она ствара на отпорности оптерећења, буде једнак задатој вредности, без обзира на отпорност оптерећења (односно струју коју извор даје).

Начином рада, разликују се две основне групе извора стабилног напона:

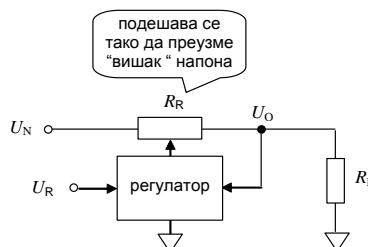
- стабилизатори код којих је регулациони елемент везан паралелно са оптерећењем: паралелни (оточни, шант<sup>9</sup>) стабилизатори;
- стабилизатори код којих је регулациони елемент везан на ред са оптерећењем: редни стабилизатори.

Прву групу чине кола у којима се управљање (регулација) остварује променом пада напона на редном отпорнику сталне отпорности. Регулациони елемент делује као "напонски управљани отпорник" (*voltage-controlled resistance*) који "преузима вишак" струје коју даје извор нестабилног напона  $U_N$ , и тако обезбеђује да излазни напон увек има исту вредност, без обзира на вредност нестабилисаног напона и отпорност оптерећења (слика 8.5).



Слика 8.5. Принципска шема стабилизације напона са паралелном регулацијом

Другу групу чине стабилизатори у којима регулациони елемент обавља улогу подесивог отпорника кроз који се "спроводи" струја којом се електрична енергија "испоручује" потрошачу. Стабилизација излазног напона се остварује променом отпорности регулационог елемента<sup>10</sup> тако да вредност излазног напона буде сразмерна вредности референтног напона.



Слика 8.6. Принципска шема редног стабилизатора напона

<sup>9</sup> Елемент који се умете у коло са циљем мерења (енг. *shunt*, скретница).

<sup>10</sup> Заправо, мења се пад напона (*voltage drop*) који на регулационом елементу ствара струја која кроз њега протиче.

### 8.2.1 СВОЈСТВА СТАБИЛИЗАТОРА НАПОНА

Напон на излазу извора за напајање (*supply voltage, напражение питания, Speise Spannung*) треба да буде неосетљив на поремећаје које представљају промене на његовом улазу и промене оптерећења на његовом излазу. Квалитет рада стабилизатора, независно од начина на који се стабилизација остварује, описује се сачиниоцима који приказују утицај:

- улазног напона  $U_N$  на вредност излазног напона  $U_O$ ,
- струје оптерећења  $I_O$  на вредност излазног напона  $U_O$ .

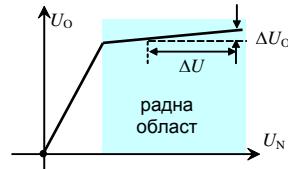
Утицај промена нестабилисаног напона  $U_N$  (који извор енергије даје на свом излазу) приказује се одговарајућим показатељем осетљивости  $S_U$ :

$$S_U = \frac{\partial U_O}{\partial U_N}, \quad (8.1)$$

који, геометријски, представља нагиб карактеристике  $U_O(U_N)$  у радном опсегу стабилизатора напона (слика 8.7). Обично се исказује у V/V или, чешће, у mV/V.

Експериментално се осетљивост  $S_U$  одређује као количник промене излазног напона  $\Delta U_O$  и одговарајуће промене улазног напона,  $\Delta U_N$ , при задатој вредности струје (отпорности) оптерећења:

$$S_U = \left. \frac{\Delta U_O}{\Delta U_N} \right|_{I_L}. \quad (8.2)$$

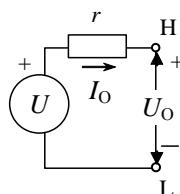


Слика 8.7. Дефиниција осетљивости  $S_U$

Друга несавршеност стварних извора напона огледа се у зависности напона између излазних прикључака извора,  $U_{HL}$ , од струје коју извор даје. Ова несавршеност се моделује редном везом савршеног извора напона  $U$ , независног од свих струја и напона у колу у којем се налази, и једног пасивног елемента који, у општем случају, представља импедансу (слика 8.8).

Унутрашња отпорност представља основни параметар перформанси извора напона. Математички, вредност излазне отпорности је бројно једнака количнику напона празног хода,  $U_{OO}$ , и струје кратког споја,  $I_{OS}$  (слика 8.8):

$$r = \frac{U_{OO}}{I_{OS}}, \quad (8.3)$$



Слика 8.8. Излазна отпорност

$$U_{OO} = U_{HL} \Big|_{I_O = 0} = U, \quad (8.4)$$

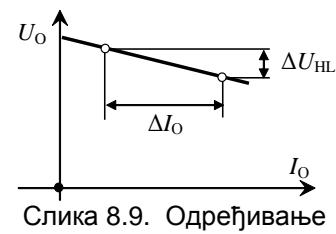
$$I_{OS} = I_O \Big|_{U_O = 0}. \quad (8.5)$$

Кратак спој на излазу извора напона доводи до преотерећења (које може да проузрокује оштећење) и нерегуларног рада стабилизатора. Због

тога се вредност излазне отпорности у радним условима одређује као нагиб  $I-U$  карактеристике извора у његовој радној области.

Експериментално се излазна отпорност одређује као количник промене излазног напона,  $\Delta U_{HL}$ , и одговарајуће промене излазне струје,  $\Delta I_O$ , настале услед промене отпорности оптерећења које извор напаја (слика 8.9):

$$r = \left| \frac{\Delta U_{HL}}{\Delta I_O} \right| \quad U = \text{const} \quad (8.6)$$



Слика 8.9. Одређивање излазне отпорности

Електрична снага којом стабилизатор преноси енергију потрошачу (излазна снага):

$$P_O = U_O I_O, \quad (8.7)$$

увек је мања од снаге којом се преузима енергија из извора нестабилног напона:

$$P_N = U_N I_N. \quad (8.8)$$

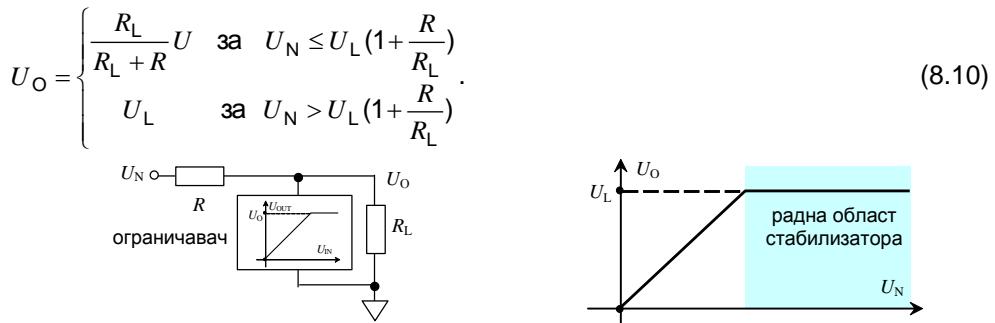
Разлика уложене и добијене (корисне) снаге је снага губитака којом се електрична енергија претвара у топлоту (троши) у самом регулационом елементу. Као показатељ “успешности остваривања функције стабилизације” користи се величина која описује енергетску ефикасност извора, дефинисана изразом:

$$\eta = \frac{\text{"испоручена снага}}{\text{преузетаснага}} = \frac{P_{OUT}}{P_{IN}}. \quad (8.9)$$

Стабилизатор једносмерног напона, посматран као део сложеног система је пасивни елемент. Излазна (“испоручена”) снага не може да буде већа од улазне снаге којом стабилизатор “извлачи” енергију из извора нестабилног напона. У аналогој технички, стабилисан напон на излазу не може да буде већи од стабилисаног једносмерног напона на улазу. Да би регулациони елемент могао да обавља своју функцију потребно је да разлика улазног и излазног напона буде већа од неке вредности. Ова вредност назива се “минимални регулациони пад напона” (*dropout voltage*).

## 8.2.2 СТАБИЛИЗATORI СА ПАРАЛЕЛНОМ РЕГУЛАЦИЈОМ

У најједноставнијем облику, стабилизатор је ограничавач напона (*voltage limiter*) који се везује паралелно са потрошачем који се напаја енергијом из извора нестабилног напона  $U_N$ . Ограничавач “не дозвољава” да напон  $U_O$  на крајевима потрошача  $R_L$  буде већи од одређене граничне вредности која представља жељену (стабилисану) вредност излазног напона,  $U_L$  (слика 8.10):



Слика 8.10. Стабилизација ограничавањем

Да би ограничавач деловао потребно је да струја која протиче кроз њега буде већа од неке минималне вредности. Ефект стабилизације се остварује тиме што ограничавач “преузима вишак” струје, коју даје извор напона  $U_N$ , тако да излазна струја  $I_O$  прави на прикљученом оптерећењу  $R_L$  пад напона једнак  $U_L$ :

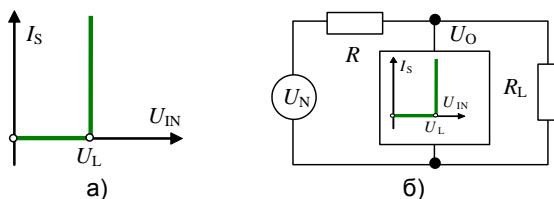
$$U_O = I_O R_L = U_L \quad (8.11)$$

Ако оптерећење није прикључено, кроз ограничавач тече максимална струја:

$$I_{\max} = \frac{U_N - U_L}{R} \quad (8.12)$$

која је једнака највећој струји коју оптерећење може да “преузме” од паралелног стабилизатора, а да излазни напон не опадне испод вредности  $U_L$ .

Ограничавач напона је елемент који се одликује веома великом отпорношћу, када је напон  $U_N$  између његових прикључака мањи од  $U_L$ , а веома малом динамичком отпорношћу, када је тај напон већи од  $U_L$ . Статичка  $U-I$  карактеристика савршеног ограничавача напона приказана је на слици 8.11.a.



Слика 8.11. Карактеристика савршеног ограничавача

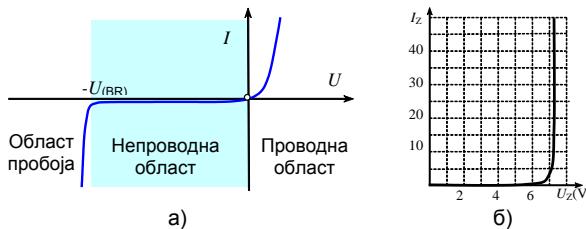
Да би ограничавач у колу стабилизатора могао да одржава напон  $U_O$  на потрошачу потребно је да, без обзира на вредност напона  $U_N$  (унутар одређеног радног опсега) и отпорност оптерећења  $R_L$  (унутар дозвољног опсега вредности), кроз њега тече нека струја. Другим речима, струја коју даје извор напона  $U_N$  мора да буде већа од струје коју узима оптерећење када је прикључено на напон  $U_L$ .

$$\frac{U_N - U_L}{R} \geq \frac{U_L}{R_L}. \quad (8.13)$$

Отпорност  $R$  се бира тако да, у граничном случају, излазни напон при највећем оптерећењу ( $\min R_L$ ) буде једнак  $U_L$ , када је вредност нестабилног напона једнака доњој (најнижој) вредности ( $\min U_N$ ). Тада је струја коју "даје" извор енергије једнака струји коју потрошач "узима" (струја кроз ограничавач је једнака нули).

У елементарном облику, као ограничавач напона у електроници се користи поларисани  $PN$ -спој у стању пробоја<sup>11</sup>. Такав полупроводнички елемент назива се Ценер-диода [1].

"Пробој"  $PN$ -споја се испољава наглим повећањем нагиба  $U$ - $I$  карактеристике које настаје при довољно великим вредностима напона инверзне поларизације (слика 8.12.а). Настанак пробоја може бити заснован на лавинском или Ценеровом ефекту. Пробој лавинским ефектом (*avalanche*) проузрокован је повећавањем броја носилаца наелектрисања услед деловања јаког спољашњег електричног поља. Тада, при судару електрона са атомима полупроводника у кристалној решетки, долази до ослобађања нових носиоца наелектрисања који могу да се усмерено крећу под дејством електричног поља. При довољно јаком електричном пољу, ослобођени електрони могу да добију довољно велику енергију да, ударном јонизацијом, ослободе нове. На тај начин се број носилаца наелектрисања вишеструко повећава (*avalanche multiplication*) што доводи до повећања струје. Ценеров пробој (*Zener breakdown*) настаје при великој концентрацији примеса, због чега у прелазној области  $PN$ -споја постоји јако електрично поље. Пробој је проузрокован преласком електрона из валентног опсега у проводни опсег тунелским ефектом<sup>12</sup>.



Слика 8.12.  $U$ - $I$  карактеристика  $PN$ -споја

Посматрано у  $U$ - $I$  равни, прелазак из области велике отпорности у област пробоја може бити веома оштар, а сама карактеристика врло стрма (слика 8.12.б). То значи да у таквим условима рада напон  $U$  веома мало зависи од величине струје  $I$  кроз спој. Ово својство користи се за стабилизацију једносмерног напона у електронским колима. Уобичајено је да се диоде намењене за рад у условима пробоја (*breakdown diodes*) називају "Ценер-диоде", независно од принципа њиховог рада. Нагиб  $I_z(U_z)$  карактеристике у области инверзног пробоја (динамичка отпорност):

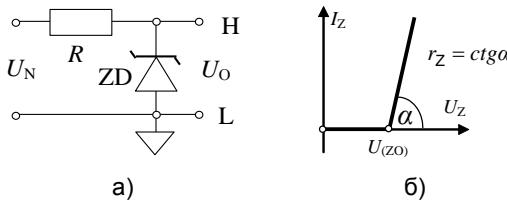
<sup>11</sup> Назив "пробој" (*breakdown*) се овде користи да означи прелазак из стања високе динамичке отпорности у стање знатно ниже динамичке отпорности (услед повећања величине инверзне струје) који, сам по себи, не представља разарање структуре  $PN$ -споја.

<sup>12</sup> Тунелским ефектом се назива појава да честица може да савлада енергиску препреку (*potential barrier*) иако нема доволјну кинетичку енергију да је "прескочи". Овакав пролазак, "испод врха" препреке, немогућ је у класичној физици. У таласној механици вероватноћа овог догађаја није нула, ако је дебљина "потенцијалног брега" доволјно мала.

$$r_Z = \frac{\partial U_Z}{\partial I_Z} \Big|_{U_Z > U_{(ZO)}} = \text{ctg}\alpha, \quad (8.14)$$

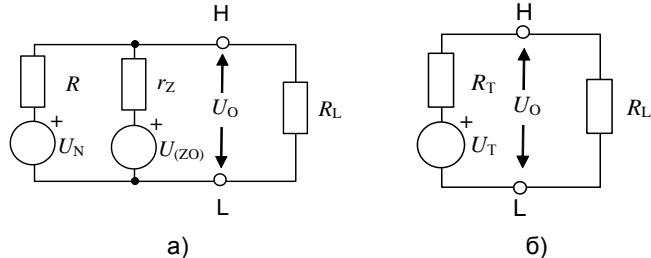
представља унутрашњу отпорност Ценер-диоде као ограничавача. Најстрмију карактеристику у области пробоја имају Ценер-диоде чији је називни напон 7,5 V.

На слици 8.13.a приказан је стабилизатор напона остварен помоћу Ценер-диоде, чија је линеаризована карактеристика представљена дијаграмом приказаном на слици 8.13.b. Напон колена (тачка прелома) означен је са  $U_{(ZO)}$ . Нагиб карактеристике  $I_Z(U_Z)$  када је  $U_Z > U_{(ZO)}$  одређен је динамичком отпорношћу  $r_Z$ .



Слика 8.13. Ценер диода као стабилизатор напона

Еквивалентно коло стабилизатора којим се постиже да се потрошач чија је отпорност  $R_L$ , напаја стабилним напоном, приказано је на слици 8.14.a. Претпоставка је да је вредност нестабилног напона  $U_N$  доволно висока да обезбеди да се Ценер-диода налази у стању инверзног пробоја<sup>13</sup>.



Слика 8.14. Анализа стабилизатора са Ценер-диодом

Применом Тевененове теореме посматрани стабилизатор може да се представи као несавршени извор напона  $U_T$  (слика 8.14.b):

$$U_T = \frac{R}{R + r_Z} U_{(ZO)} + \frac{r_Z}{R + r_Z} U_N, \quad (8.15)$$

чија је унутрашња отпорност једнака:

$$R_T = r_Z \| R = \frac{r_Z R}{R + r_Z}. \quad (8.16)$$

Сачинилац осетљивости излазног напона  $U_O$  у односу на промене улазног (nestabilnog) напона  $U_N$ , за неоптерећен стабилизатор, једнак је:

<sup>13</sup> То подразумева не само да је улазни нестабилни напон  $U_N$  већи од напона  $U_{(ZO)}$ , него и да су вредности отпорности у колу такве да кроз Ценер-диоду тече нека струја у смjeru катоде према аноди ( $U_O \geq U_{(ZO)}$ ).

$$S_U = \frac{\partial U_T}{\partial U} = \frac{r_Z}{R + r_Z} . \quad (8.17)$$

Ако је  $r_Z \ll R$ , осетљивост на промене улазног напона  $U$  приближно је једнака односу отпорности  $r_Z$  и  $R$ .

$$S_U \cong \frac{r_Z}{R} . \quad (8.18)$$

Осетљивост на промене улазног напона може да се одреди непосредно, на основу полазног еквивалентног кола стабилизатора (слика 8.14.a) следећим разматрањем. При промени улазног напона  $U$ , промена излазног напона  $U_O$  резултат је промене пада напона на отпорнику  $r_Z$ , до које долази услед промене струје кроз Ценер-диоду:

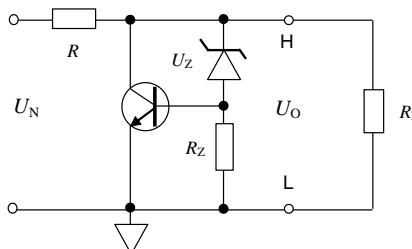
$$\Delta U_O = \Delta I \cdot r_Z = \frac{\Delta U}{R + r_Z} r_Z .$$

На основу овог закључка следи:

$$S_U = \frac{\Delta U_O}{\Delta U} = \frac{r_Z}{R + r_Z} .$$

Основни недостатак једноставног стабилизатора са Ценер-диодом је сразмерно велика динамичка отпорност саме диоде. Промене улазног (нестабилног) напона  $U$ , као и промене отпорности оптерећења  $R_L$ , одражавају се на промене струје кроз диоду, а самим тим и на вредност напона између излазних прикључака. У колу приказаном на слици 8.15, Ценер-диода је растерећена улоге регулационог елемента који одводи сав "вишак" струје коју даје извор нестабилног напона. Тај задатак преузео је биполарни транзистор. Промене струје кроз диоду су смањене, па су и промене напона на Ценер-диоди,  $U_Z$ , смањене у одговарајућој размери. Излазни напон  $U_O$  је једнак:

$$U_O = U_Z + U_{BE} . \quad (8.19)$$



Слика 8.15. Паралелни стабилизатор са биполарним транзистором

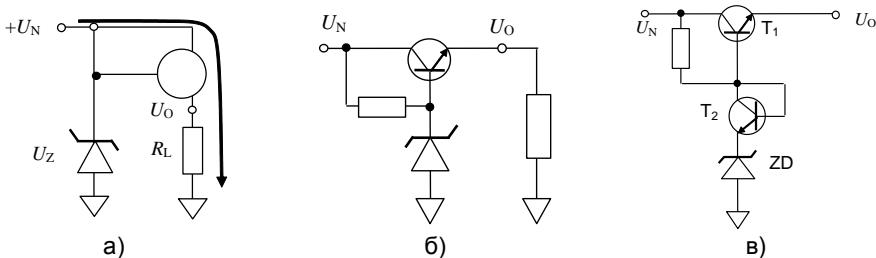
Промене улазног напона и отпорности оптерећења се одражавају на промене струје кроз транзистор, али су одговарајуће промене струје кроз диоду за сачинилац појачања струје од базе до колектора транзистора мање, па је и излазни напон боље стабилисан него у колу са слике 8.13.a.

Промена напона  $U_N$  одражава се превасходно на промену струје кроз транзистор. Одговарајућа промена напона база-емитор је мала, па је струја кроз Ценер-диоду практично константна. Повећање излазне струје изазива смањивање струје кроз транзистор што се остварује малим смањивањем излазног напона. Другим речима напон  $U_O$  се веома мало мења са променама струје кроз транзистор, без обзира на њихов узрок.

На овај начин може да се оствари стабилизатор напона 6,9 V који се одликује веома добром температурском стабилношћу. Наиме, Ценер-диода, чији је напон пробоја једнак 6,2 V, има позитиван температурски коефицијент, по величини приближно једнак температурском коефицијенту напона база-емитор, који је негативан. Захваљујући компензационом ефекту, ово коло се одликује малим температурским сачиниоцем.

### 8.2.3 СТАБИЛИЗATORI СА РЕДНОМ РЕГУЛАЦИЈОМ

Стабилизатор са паралелном регулацијом је једноставан, али не и подесан за примену када се захтева да извор напона напајања може да обезбеди велику струју на свом излазу. Регулациони елемент мора да буде дововољно снажан да преузме сву расположиву струју када оптерећење није приклучено. Овај проблем се решава тако што се функција дефинисања жељене вредности излазног напона раздвоји од функције регулације која обезбеђује да се та вредност преслика на излаз стабилизатора. У колу приказаном на слици 8.16.а, трополни појачавачки елемент одржава на оптерећењу  $R_L$  напон који је одређен напоном Ценер-диоде, узимајући потребну струју из извора нестабилног напона  $U_N$ .



Слика 8.16. Редни стабилизатор са транзистором

У колу приказаном на слици 8.16.б, улогу одвојног, снажног појачавача (*power amplifier*) обавља биполарни транзистор у споју са заједничким колектором (*emitter follower*). Излазни напон  $U_O$  је једнак:

$$U_O = U_Z - U_{BE}. \quad (8.20)$$

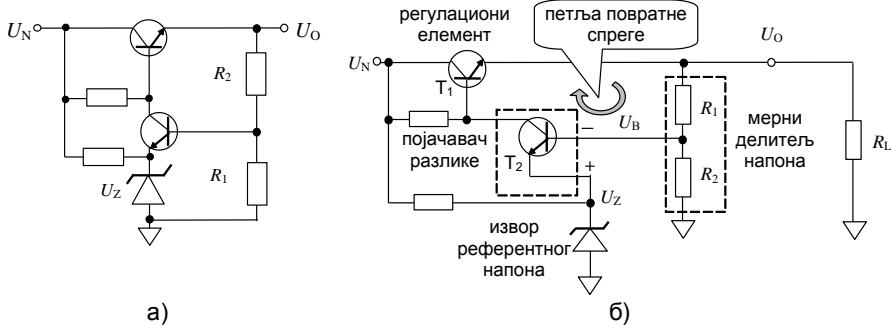
Транзистор  $T_2$  у колу приказаном на слици 8.16.в омогућује компензацију пада напона на споју база-емитор регулационог транзистора  $T_1$ :

$$U_O = U_Z + U_{BE2} - U_{BE1}. \quad (8.21)$$

Притом, температурске промене напона  $U_{BE2}$  компензују температурске промене напона  $U_{BE1}$ , па се на овај начин може да постигне и боља температурска стабилност.

У недостатке описаних стабилизатора са Ценер-диодом може да се сврста и одсуство могућности подешавања вредности стабилног напона. Овај захтев се једноставно решава увођењем додатног трополног појачавачког елемента у узорци диференцијалног појачавача посредством којег се остварује повратна спрега која делује на "редни" регулациони елемент. На слици 8.17.а приказан је такав стабилизатор остварен са биполарним транзисторима. Јака

негативна повратна спрега<sup>14</sup> у овом колу настоји да “поништи” одступање излазног напона  $U_O$  од референтне вредности, која је одређена напоном  $U_Z$  и односом отпорности  $R_1$  и  $R_2$ .



Слика 8.17. Стабилизатор са повратном спрегом

Начин рада овог стабилизатора може да се сагледа на основу следећег једноставног разматрања. Ако се, из неког разлога, вредност излазног напона повећа, повећаће се и напон на бази транзистора  $T_2$ . Због тога ће се повећати струја базе (напон емитора је једнак напону Ценер диода, за који се у првој апроксимацији може да сматра да је непроменљив), а самим тим и струја колектора, коју овај транзистор узима из чвора кроз који пролази струја поларизације редног транзистора  $T_1$ . Због смањивања струје базе, транзистора  $T_1$  смањује се струја емитора којом се напаја оптерећење, па се излазни напон смањује.

Важи и обратно, ако се излазни напон смањи, струја емитора се повећа како би се промена поништила и систем вратио у почетно стање.

Математички модел овог система чине једначине:

$$U_B = U_Z + U_{BE2}, \quad (8.22)$$

$$U_O = U_B + R_1 I_1, \quad (8.23)$$

$$I_1 = I_{B2} + I_2 \text{ и} \quad (8.24)$$

$$I_2 = \frac{U_B}{R_2}, \quad (8.25)$$

на основу којих следи:

$$U_O = (U_Z + U_{BE2})\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + R_1 I_{B2}. \quad (8.26)$$

Под предпоставком да су у колу примењени транзистори чије је појачање струје од базе до колектора довољно велико, тако да се струја базе транзистора  $T_2$  може да занемари, важи:

<sup>14</sup> Овакав облик деловања представља напонско-паралелну повратну спрегу. Контролисана величина је излазни напон. Повратно дејство се остварује смањивањем струје побуде регулационог елемента.

$$U_O \Rightarrow U_O + \Delta U_O \uparrow$$

$$U_{BE1} \Rightarrow U_{BE1} + \Delta U_{BE} \uparrow$$

$$I_{C1} \Rightarrow I_{C1} + \Delta I_{C1} \uparrow$$

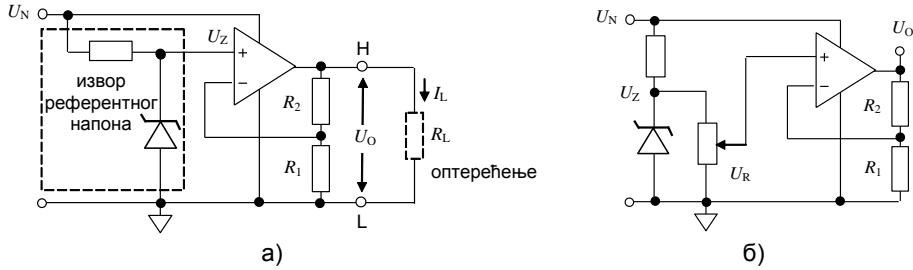
$$I_{B2} \Rightarrow I_{B2} + \Delta I_{B2} \downarrow$$

$$I_{E2} \Rightarrow I_{E2} + \Delta I_{E2} \downarrow$$

$$U_O \Rightarrow U_O + \Delta U_O \downarrow$$

$$U_O \approx (U_Z + U_{BE2}) \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right). \quad (8.27)$$

У основи, ово коло представља спој Ценер-стабилизатора и неинвертујућег појачавача заснованог на примени негативне повратне спрете. Одговарајуће коло, остварено помоћу операционог појачавача, приказано је на слици 18.8.а.



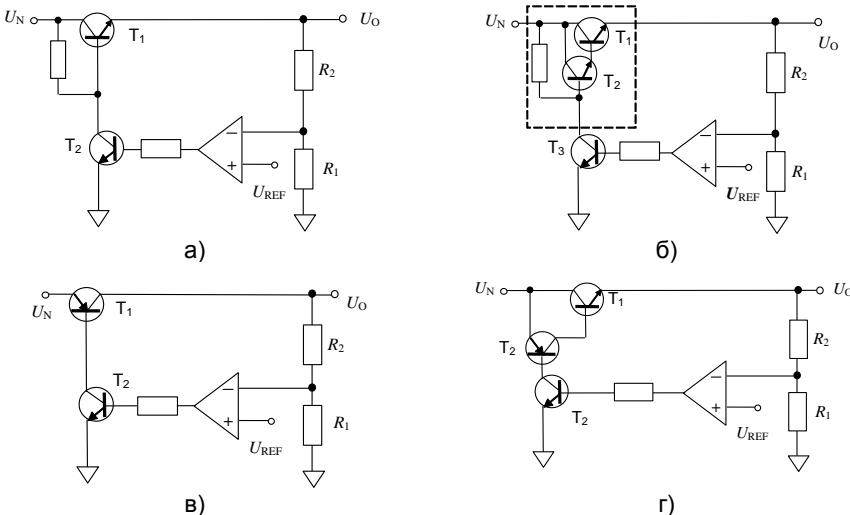
Слика 8.18. Стабилизатор са операционим појачавачем

Ако је операциони појачавач савршен, излазни напон  $U_O$  одређен је изразом:

$$U_O = U_Z \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right). \quad (8.28)$$

Излазни напон овог стабилизатора не може да буде мањи од напона  $U_Z$ . Коло приказано на слици 8.18.б омогућује подешавање излазног напона у опсегу од нуле до максималне вредности која је одређена једначином 8.26.

На слици 8.19 приказане су принципске електричне шеме основних облика стабилизатора са операционим појачавачем [2], [3]. Транзистори омогућују рад са већом струјом од оне коју може да да операциони појачавач.



Слика 8.19. Стабилизатори са операционим појачавачем

У колу са слике 8.19.а транзистор  $T_1$  не може да буде у засићењу. Минимални регулациони пад напона (*dropout voltage*) не може да буде мањи од напона засићења споја база-емитор транзистора  $T_1$ .

$$U_D > U_{BE1sat}. \quad (8.29)$$

Транзистори  $T_1$  и  $T_2$  у колу са слике 8.19.б образују Дарлингтонов пар који обезбеђује велико појачање струје. У овом случају је:

$$U_D > U_{BE1sat} + U_{BE2sat}. \quad (8.30)$$

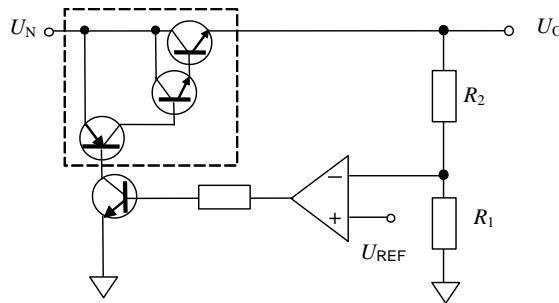
На слици 8.19.в приказан је *LDO*-стабилизатор (*low dropout*) који обезбеђује најмањи минимални регулациони пад напона јер транзистор  $T_1$  може да буде у засићењу:

$$U_D = U_{ECsat}. \quad (8.31)$$

У колу приказаном на слици 8.19.г примењен је спој комплементарних транзистора<sup>15</sup> чиме се омогућује већа излазна струја и смањује минимални регулациони пад напона (*QUASI-LDO*), у поређењу са колом у којем је примењен Дарлингтонов спој:

$$U_D = U_{BE} + U_{ECsat}. \quad (8.32)$$

Типична структура стабилизатора за велике струје приказана је на слици 8.20.



Слика 8.20. Типични стабилизатор

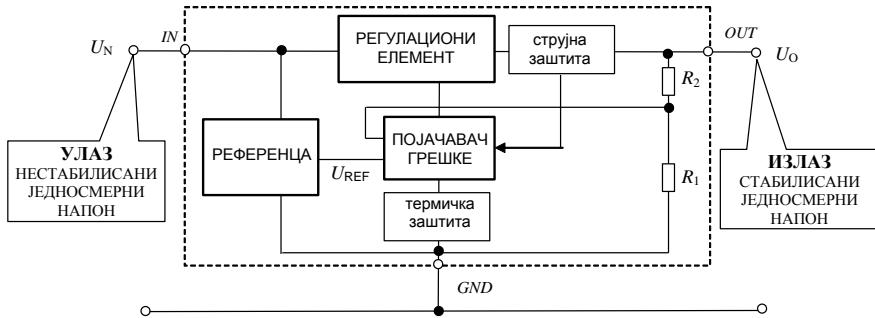
## 8.2.4 ИНТЕГРИСАНИ СТАБИЛИЗATORИ НАПОНА

Са ширењем области примене интегрисаних електронских кола као елемената електронских модула и уређаја све већи значај добијао је задатак њиховог напајања. За већину интегрисаних кола потребни су стабилни извори

<sup>15</sup> Уобичајено је да се овакав спој два транзистора назива "Дарлингтонов комплементарни пар". Исправно је "Sciklai-ев спој" [4].

напона потребног за њихов рад. Развој интегрисаних стабилизатора напона наметнуо се сам по себи. Први такав интегрисани стабилизатор представљало је интегрисано коло  $\mu A723$  фирмe *Fairchild* [4], [5]. У садашње време, на тржишту електронских компонената постоји мноштво разноврсних интегрисаних стабилизатора различитих називних вредности излазног напона, различите снаге и различите структуре.

Интегрисани стабилизатор напона, намењен да даје стабилисани напон унапред одређене (фабрички дефинисане) вредности, има само три прикључка: по један улазни и излазни прикључак и један заједнички прикључак који дефинише референтни потенцијал у односу на који се одређује потенцијал излаза. Општи структурни блок-дијаграм таквог стабилизатора приказан је на слици 8.21.



Слика 8.21. Принципска шема интегрисаног стабилизатора напона

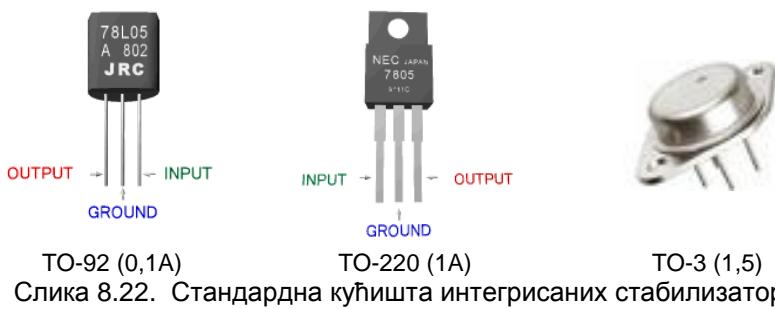
Вредност излазног напона дефинисана је интерном напонском референцом и отпорничким делитељем напона:

$$U_O = U_{REF} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right). \quad (8.33)$$

Заштита од преоптерећења регулационог елемента остварује се ограничавањем излазне струје. Додатна термичка заштита, која штити читаво интегрисано коло, чини оваква кола веома поузданим. Струја коју стабилизатор "узима" за обављање своје функције (*quiescent current, I\_Q*) је, у начелу, за више од два реда величине мања од називне вредности излазне струје.

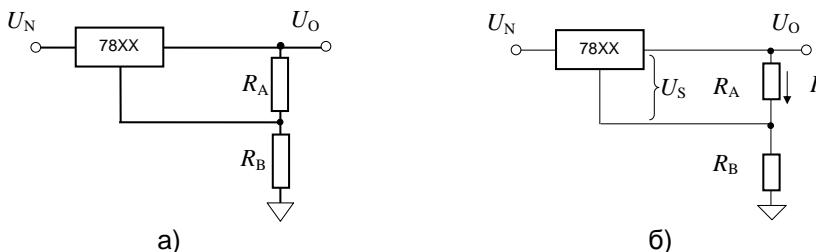
Интегрисани трополни стабилизатори напона серије 78XX фабрички су подешени тако да, под одређеним условима, на излазу дају позитивни напон чија је вредност једнака, унутар декларисаних граница, назначеној (називној) вредности (*Three terminal Fixed Output Regulator*). Типичне вредности су 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18 и 24 V [6]. Интегрисана кола серије 79XX предвиђена су за стабилисање негативног напона.

Стабилизатори напона серије 78XX и 79XX се налазе у програму већег броја производа. Осим њих, на тржишту електронских компонената постоји и мноштво других. Облик и величина кућишта се разликују у зависности од вредности максималне излазне струје (слика 8.22).



Слика 8.22. Стандардна кушија интегрисаних стабилизатора

Интегрисани стабилизатори фиксног напона могу да се примене и за остваривање извора сталног напона  $U_O$ , већег од називног излазног напона интегрисаног стабилизатора. Одговарајуће коло је приказано на слици 8.23.а.



Слика 8.23. Повећање излазног напона

Ако се занемари мирна струја стабилизатора, математички модел овог кола чине једначине (слика 8.23.б):

$$I = \frac{U_S}{R_A}, \quad (8.34)$$

$$U_O = I(R_A + R_B),$$

на основу којих следи:

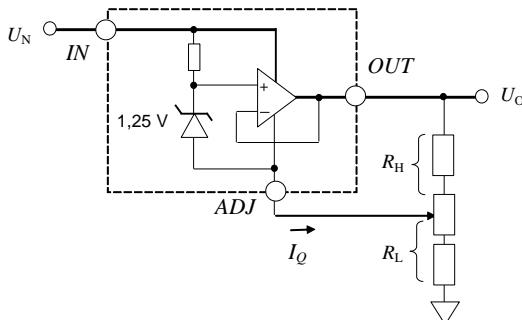
$$U_O = U_S \left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right). \quad (8.36)$$

Вредност излазног напона задаје се отпорницима  $R_A$  и  $R_B$ .

Да би се омогућила реализација извора стабилисаног напона чија се вредност мења у широким границама, развијени су интегрисани подесиви стабилизатори напона (*adjustable regulator*) чији је сопствени референтни напон реда величине 1.2 V (слика 8.24). Вредност излазног напона је одређена формулом:

$$U_O = U_R \left(1 + \frac{R_L}{R_H}\right) + I_Q R_L, \quad (8.37)$$

у којој  $I_Q$  представља "мирну радну струју" стабилизатора (*adjustment pin current*). На овај начин могуће је остварити опсег подешавања излазног напона до 37 V [7].



Слика 8.24. Подесиви извор напона

### 8.2.5 КАРАКТЕРИСТИКЕ ИНТЕГРИСАНИХ СТАБИЛИЗАТОРА НАПОНА

Својства интегрисаних стабилизатора описују се низом показатеља који омогућују сагледавање њиховог "понашања" у одређеним условима рада. Подаци које произвођачи наводе у својим спецификацијама, могу да се групишу у неколико категорија:

- карактеристике улаза,
- карактеристике излаза,
- карактеристике регулатора,
- услови околине.

Њихово је познавање неопходно за успешну примену при пројектовању, као и при одржавању електронских уређаја.

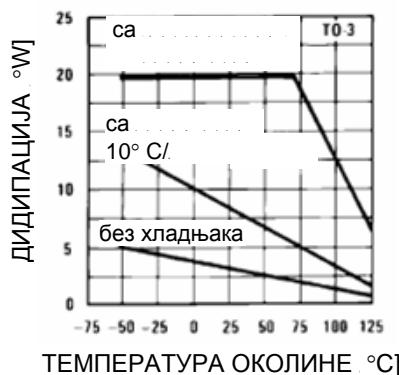
**Опсег улазног напона** (*input voltage range*) је опсег вредности напона за који стабилизатор има декларисана својства. У спецификацијама производијача наводи се гарантована вредност при називној вредности напона напајања. Посебно се исказују максимална, односно минимална дозвољена вредност напона на улазним прикључцима (*absolute maximum ratings, input voltage*).

**Одступање од називне вредности** се декларише најмањом и највећом вредношћу излазног напона (типично  $\pm 4\%$  називне вредности).

Мирна струја (*quiescent current*) неопходна за рад стабилизатора је типично неколико милиампера.

**Излазна отпорност** (*output resistance*),  $R_O$ , је мала. Њена је вредност повезана са проблемом заштите излазног појачавача од кратког споја.

**Највећа укупна дисипација** интегрисаног кола, при којој оно обавља своју функцију у складу са спецификацијама (*maxim power dissipation*), зависи од температуре околине (слика 8.25).



Слика 8.25. Допуштена снага дисипације у зависности од температуре

Да би регулациони елемент редног стабилизатора могао да обавља своју функцију потребно је да разлика потенцијала између његових крајева (диференцијални напон улаз-излаз) буде већа од неке вредности. **Минимални регулациони пад напона** (*droopout voltage*) за стабилизаторе серије 78XX је реда 2 V.

**Осетљивост на промене улазног напона** (*line regulation*) се обично приказује променом излазног напона при промени улазног напона, на референтној температури и при дефинисаном оптерећењу. Ова величина показује и потискивање наизменичне компоненте нестабилног напона која се пресликава на излаз као "таласање" (*ripple*) излазног напона.

**Осетљивост на промене оптерећења** излаза (*load regulation*) се обично приказује променом излазног напона при промени струје оптерећења, при константној температури.

Под условима околине се подразумевају, пре свега, услови у погледу температуре споја (*junction temperature,  $T_J$* ). Обично се дефинишу три различита температурска опсега:

$$\begin{aligned} -55^{\circ}\text{C} &\leq T_J \leq +150^{\circ}\text{C}, \\ -40^{\circ}\text{C} &\leq T_J \leq +125^{\circ}\text{C} \text{ и} \\ 0^{\circ}\text{C} &\leq T_J \leq +125^{\circ}\text{C}. \end{aligned}$$

Опсег температуре у којем се може вршити складиштење (*storage temperature range*) је типично  $-65^{\circ}\text{C}$  до  $+150^{\circ}\text{C}$ . Температура лемљења (*lead temperature range, soldering*) зависи од кућишта. За метална кућишта је до  $300^{\circ}\text{C}$ , али не дуже од 10 s. За стабилизаторе у пластичном кућишту ове границе су ниже (на пример, до  $260^{\circ}\text{C}$ , не дуже од 4 s).

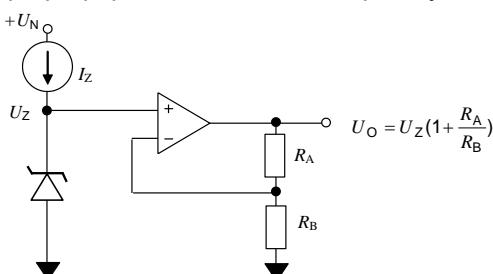
## 8.3 ИЗВОРИ РЕФЕРЕНТНОГ НАПОНА

Неки, комерцијално доступни извори референтног напона имају додатно батеријско напајање. То их чини погодним за примену као преносивих еталон-мера (трансфер-еталони<sup>16</sup>), чије се напајање не прекида због транспорта од једне метролошке лабораторије до друге. Интерне батерије омогућују и да се, током мernог експеримента, искључи напајање из мреже наизменичног напона које, најчешће, представља најзначајнији извор шума на излазу [8].

### 8.3.1 ИЗВОРИ РЕФЕРЕНТНОГ НАПОНА СА ЦЕНЕР-ДИОДОМ

Развој полупроводничке технологије у електроници имао је велики утицај на развој еталонских мерних средстава практично у свим областима мрне технике. Пре свега, омогућио је израду електронских (*solid-state*) еталона напона, једноставних за примену, економичних, практично неосетљивих на потресе. Такви извори референтног напона, засновани на својствима полуправодника, представљају основну еталон-меру у бројним електронским мерним уређајима [9].

Принципска електрична шема извора референтног напона оствареног помоћу Ценер-диоде приказана је на слици 8.26. Извор сталне струје  $I_Z$  смањује утицај промена напона напајања  $U_N$  на вредност напона  $U_Z$ . Неинвертујући појачавач омогућује подешавање вредности напона на излазу, као и одвајање извора референтног напона од прикљученог оптерећења.



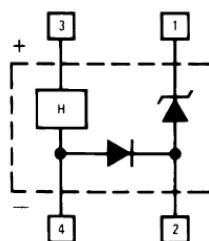
Слика 8.26. Извор референтног напона са Ценер-диодом

### 8.3.2 ИНТЕГРИСАНИ ИЗВОРИ РЕФЕРЕНТНОГ НАПОНА

За потребе остваривања еталон-мере у електронским мерним уређајима високе тачности, развијена су посебна интегрисана електронска кола која остварују улогу извора референтног напона. Доградњом система за

<sup>16</sup> Еталон (*measurement standard*) је остварење, у најопштијем смислу, дефиниције одређене величине, које се користи као референца у односу на коју се резултати мерења исказују. За такво мерно средство се подразумева да има назначену вредност са придруженом мерном несигурношћу. Еталон може да буде материјализована мера, мерило или мерни систем. Може да остварује једну или више вредности једне или више величине. Трансфер-уређај (*transfer measurement device*) је уређај који се користи као посредник при поређењу еталона.

одржавање сталне температуре унутар интегрисаног кола смањује се утицај температуре околине (слика 8.27). На овај начин постиже се да температурски сачинилац напона  $U_O$  буде мањи од 1 ppm/ $^{\circ}\text{C}$  [10]. Једноставније, али мање ефикасно решење, је увођење елемената којима се компензује температурска зависност напона  $U_Z$  [11]. У комбинацији, ова два поступка омогућују остваривање извора референтног напона 10 V, чији је температурски сачинилац промене у зависности од температуре мањи од 0,1 ppm/ $^{\circ}\text{C}$  [12].



Слика 8.27. Интегрисани извор референтног напона са грејачем

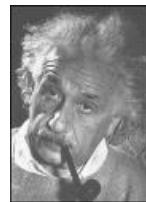
Дуговремена постојаност (*long term stability*) извора референтног напона са Ценер-диодом је лошија него код електрохемијског Вестоновог елемента. Током временског размака од 1000 сати, промене су типично пет до двадесет  $\mu\text{V/V}$ . Паралелним везивањем великог броја елемената остварује се ефекат усредњавања, чиме се стабилност повећава. Системом који садржи 140 интегрисаних напонских референци, постигнуто је да, током три године, стандардно одступање буде мање 0,2  $\mu\text{V/V}$  [13].

## ЛИТЕРАТУРА

1. П. Бошњаковић, *Основи електронике*, ВЕТШ, 2006.
2. C. Simpson, *Linear and Switching Voltage Regulator Fundamentals*, National Semiconductor, 1997.
3. *Linear & Switching Voltage Regulator Handbook*, ON Semiconductors, 2002, <http://onsemi.com>.
4. P. Horowitz, W. Hill, *The Art of Electronics*, Cambridge University Press.
5. M. Tomac, Proizvodnja i primena linearnih integriranih sklopova, Elektrotehnika, br. 3, ss 263-294, 1971.
6. Fairchild Semiconductor Corporation, MC78XX/LM78XX/MC78XXA, 3-Terminal Positive Voltage Regulator, [www.fairchildsemi.com](http://www.fairchildsemi.com).
7. National Semiconductor Corporation, LM117/LM317A/LM317, 3-Terminal Adjustable Regulator, [www.national.com](http://www.national.com).
8. П. Бошњаковић, *Умеће мерења*, ВИШЕР, 2011.
9. B. Razavi, *Design of Analog CMOS Integrated Circuits*, Mc Graw-Hill, 2001, p.377.
10. National Instruments, LM399, Precision reference.
11. Burr-Brown, REF 102, Precision voltage reference.
12. FLUKE 734A, DC Reference Standard.
13. D. Slomowitz et all, *Long term behavior of a multi-Zener 10 V standard*, Conference on Precision Electromagnetic Measurements, CPEM, 2010, p 211.

“Ствари треба чинити  
што једноставнијим,  
али не више од тога”

A.Einstein



9.

## ИЗВОРИ СТРУЈЕ

Извор струје (*current source*) је активни елемент са једним приступом за који електрична струја (која кроз њега протиче) представља карактеристичну величину. У општем случају, интензитет струје, коју извор даје, може да буде функција времена. Такав елемент представља генератор (струјног) сигнала.

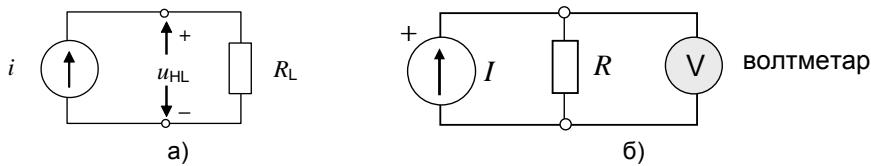
Сavrшени (идеални) извор струје је активни елемент са једним приступом код којег струја, кроз грану у којој се такав елемент налази, не зависи од напона између крајева гране. Другим речима, савршени извор струје је такав извор електричне енергије који “даје” струју чији интензитет не зависи од вредности отпорности оптерећења, које тај извор напаја.

Извори струје имају разноврсну примену у електроници и, посебно, у мernoј технички. Ако је вредност посматране величине представљена вредношћу струје, за остваривање операције интеграције довољан је један кондензатор. Коришћењем извора сталне струје и кондензатора као интеграционог елемента генерише се напон који линеарно расте са временом. Помоћу извора познате струје може да се одреди вредност непознате отпорности (импеданс), мерењем пада напона који тај извор струје ствара на мереној отпорности.

У овом поглављу разматрају се извори сталне струје и извори струје управљани напоном. У сажетом обиму приказани су извори струје остварени помоћу дискретних трополних активних елемената. У центру пажње су кола остварена помоћу операционих појачавача.

### 9.1 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

Са становишта теорије електричних кола, извор струје (*current source*) је активни елемент са једним приступом који електричну мрежу, у којој се налази, снабдева (напаја) електричном енергијом. Карактеристичну величину извора струје представља брзина преношења наелектрисања кроз грану у којој се извор струје налази. Струја коју извор даје истиче из прикључка који је означен са H (*high*), пролази кроз спољашње коло (слика 9.1) и враћа се кроз прикључак L (*low*). У општем случају, она може да представља величину променљиву у времену.



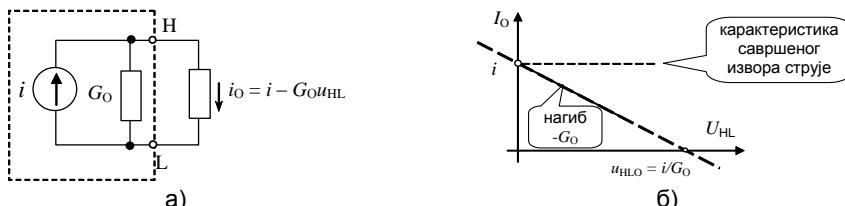
Напон  $u_{HL}$  је последица деловања струје који извор даје. Ако оптерећење представља отпорност<sup>1</sup>  $R_L$ , важи (слика 9.1.а):

$$u_{HL}(t) = R_L i(t). \quad (9.1)$$

То омогућује да се непозната отпорност  $R$  одреди мерењем напона  $U$ , који на тој отпорности ствара позната струја  $I$  (слика 9.1.б):

$$R = \frac{U}{I}. \quad (9.2)$$

Савршени извор струје је такав извор електричне енергије, код којег струја коју даје не зависи од вредности напона  $u_{HL}$  између његових прикључака. Стварни извори струје су несавршени: струја кроз оптерећење (грану у којој се извор налази) зависи од напона између крајева извора. Несавршени извор струје може да се представи паралелном везом савршеног извора струје  $i$ , независног од свих струја и напона у колу у којем се налази, и једног пасивног елемента (слика 9.2.а). Вредност струје  $i_O$  зависи од струје  $i$ , али и од вредности унутрашње (излазне) проводности извора,  $G_O$ , као и од разлике потенцијала прикључака  $H$  и  $L$ . Уколико је напон  $u_{HL}$  већи, (односно уколико је отпорност оптерећења већа) одступање струје  $i_O$  од “идеалне” вредности  $i$  је веће.



Слика 9.2. Несавршени извор струје

Струја  $i$  представља струју кратког споја несавршеног извора струје (слика 9.2.б). Унутрашња проводност извора струје:

$$G_O = -\frac{\partial i_O}{\partial u_{HL}}, \quad (9.3)$$

одређује нагиб статичке карактеристике на дијаграму  $U_{HL}$ -  $I_O$ . Често се уместо унутрашње проводности посматра унутрашња отпорност:

$$R_O = \frac{1}{G_O} = \frac{\partial u_{HL}}{\partial i_O}. \quad (9.4)$$

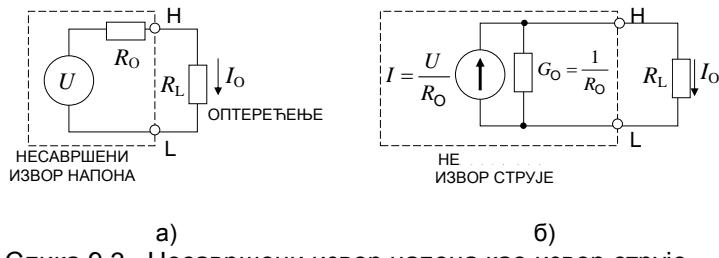
<sup>1</sup> Резистивни елемент чије је еквивалентно коле не садржи реактивне елементе. Уобичајено је да се такав елемент назива “термогена отпорност”.

### 9.1.1 ИЗВОР НАПОНА КАО ИЗВОР СТРУЈЕ

Несавршени извор напона  $U$ , чија је излазна (унутрашња) отпорност  $R_O$ , делује као извор струје  $I$ :

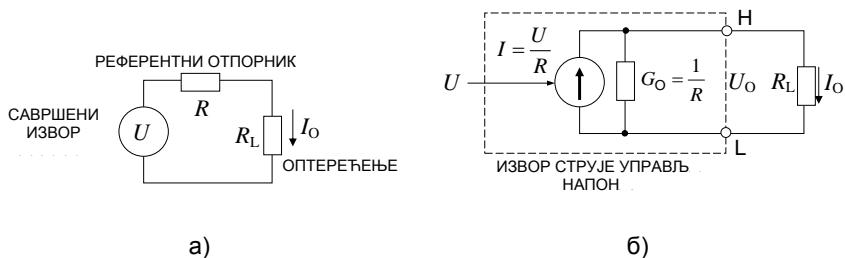
$$I_O = \frac{U}{R_O + R_L} \cong \frac{U}{R_O}, \quad (9.5)$$

уколико је отпорност оптерећења  $R_L$  занемарљиво мала у односу на унутрашњу отпорност извора напона (слика 9.3.а). Струја  $I = U/R_O$  једнака је струји кратког споја извора напона. Према теореми о еквиваленцији, величина  $I$  представља параметар еквивалентног извора струје којим се, при анализи електричних кола, извор напона може да замени извором струје (слика 9.3.б).



Слика 9.3. Несавршени извор напона као извор струје

Помоћу савршеног извора напона може да се оствари извор струје чија је вредност одређена вредношћу отпорности која је везана на ред са извором напона (слика 9.4.а). У складу са поменутом теоремом, независни извор напона  $U$ , чија је унутрашња отпорност  $R$ , делује као извор струје управљан напоном, чија је унутрашња проводност  $G_O = 1/R$  једнака  $1/R$  (слика 9.4.б). Ако се напон  $U$  мења, мења се и струја  $I_O$ . Ако је отпорност оптерећења стална, промена излазне струје,  $\Delta I_O$ , сразмерна је промени напона  $\Delta U$ , која ју је изазвала.



Слика 9.4.  $U/I$  претварач

Може да се сматра да струја  $I_O$  не зависи од вредности отпорности оптерећења,  $R_L$ , ако је напон  $U_{HL}$ , између крајева оптерећења, довољно мали у односу на вредност напона  $U$ . Другим речима, извор напона може да се примени као извор струје управљан напоном (*voltage controlled current source*, VCCS) ако је отпорност,  $R_L$ , оптерећења које се "снабдева" струјом, довољно мала у односу на отпорност  $R$ , отпорника који је повезан на ред са оптерећењем са циљем дефинисања вредности струје у колу.

Струја коју извор напона даје кроз отпорник  $R_L$  одређена је Омовим законом:

$$I_O = \frac{U}{R+R_L} = \frac{U}{R} \frac{1}{1 + \frac{R_L}{R}} = I \frac{1}{1 + \frac{R_L}{R}} = GU . \quad (9.6)$$

Сачинилац преноса,  $G$ , одређен је изразом:

$$G = \frac{I_O}{U} = \frac{1}{R+R_L} , \quad (9.7)$$

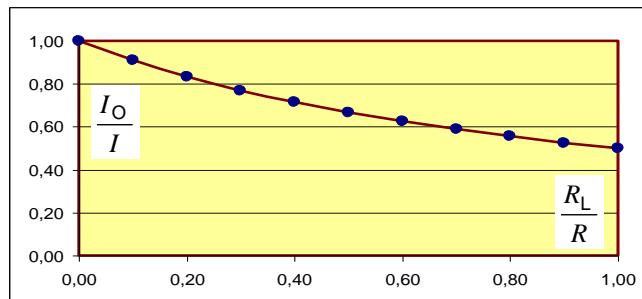
који може да се представи у облику:

$$G = \frac{1}{R} (1 - \Delta) . \quad (9.8)$$

Величина  $\Delta$  представља релативну грешку која настаје када се стварна вредност сачиниоца преноса, која зависи од (непознате) вредности отпорности оптерећења  $R_L$ , замени вредношћу  $1/R$ :

$$\Delta = \frac{R_L}{R+R_L} . \quad (9.9)$$

Карактеристика напонски управљаног извора струје, оствареног помоћу извора напона и референтног отпорника  $R$ , приказана је на слици 9.5.

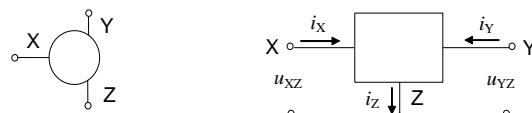


Слика 9.5. Карактеристика извора струје оствареног помоћу извора напона

## 9.2 ИЗВОРИ СТАЛНЕ СТРУЈЕ СА ТРОПОЛНИМ ПОЈАЧАВАЧКИМ ЕЛЕМЕНТИМА

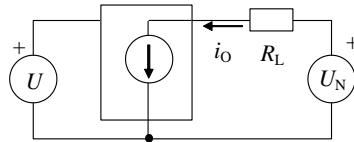
Физичку основу појачавачког ефекта у електроници представља зависност струје кроз излазни прикључак трополног елемента (слика 9.6) од напона између друга два прикључка:

$$i_Y = i_Y(u_{XY}) . \quad (9.10)$$



Слика 9.6. Трополни појачавачки елемент

Функционално, активни трополни појачавачки елементи (електронске цеви и транзистори) делују, при одређеним условима, као извори струје (слика 9.7).



Слика 9.7. Трополни појачавачки елемент као извор струје

Као математички модел савршеног појачавачког елемента, за мале сигнале, користи се једначина:

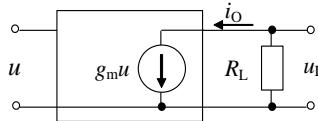
$$i_Y = g_m u_{XZ}, \quad (9.11)$$

у којој величина  $g_m$  (транскондуктанса) представља сачинилац преноса од улаза (напон  $u_{XZ}$ ) до излаза (струја  $i_Y$ ):

$$g_m = \frac{\partial i_Y}{\partial u_{XZ}}. \quad (9.12)$$

Такав елемент заправо представља извор струје управљан напоном, односно претварач напона у струју (*voltage-to-current converter, U/I converter*):

$$I_L = g_m U. \quad (9.13)$$



Слика 9.8. Савршени трополни појачавачки елемент као управљани извор струје

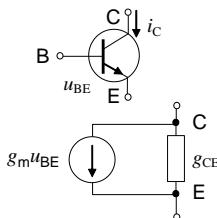
### 9.2.1 БИПОЛАРНИ ТРАНЗИСТОР КАО ИЗВОР СТРУЈЕ

Биполарни транзистор (*Bipolar Junction Transistor, BJT*) је несавршен извор струје: напон колектор-емитор утиче на вредност струје колектора<sup>2</sup> [1]. Ова зависност се моделује величином која представља динамичку излазну проводност транзистора у споју са заједничким емитором:

$$g_{CE} = \frac{\partial i_C}{\partial u_{CE}} = \frac{1}{r_{CE}} = h_{22e} = h_{oe}.$$

У односу на мале промене напона база-емитор, биполарни транзистор, чији је емиторски спој транзистора поларисан директно, а колекторски инверзно делује као транскондуктански појачавач (*transconductance amplifier*):

$$A_G = \frac{\partial i_C}{\partial u_{BE}} = g_m = \frac{i_C}{U_T}.$$



<sup>2</sup> Ова појава се назива “Ерлијев ефекат”.

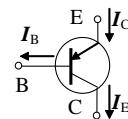
Под наведеним условима транзистор може да се посматра и као извор струје управљан струјом (*current controlled current source, CCCS*). Струја колектора је одређена струјом базе. Када је емиторски спој поларисан у директном, а колекторски у инверзном смеру, однос ових величина се моделује једначином:

$$i_C = \beta i_B + (\beta + 1)I_{CBO},$$

где је  $\beta$  појачање струје од базе до колектора;

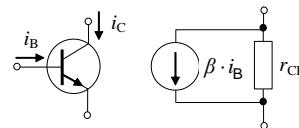
$$\beta = \frac{\partial i_C}{\partial i_B} = h_{22e} = h_{fe},$$

а  $I_{CBO}$  инверзна струја колекторског споја при  $I_E = 0$ .



У односу на мале промене струје базе, биполарни транзистор делује као линеарни појачавач струје (*current amplifier*):

$$A_i = \frac{\partial i_C}{\partial i_B} = \beta.$$



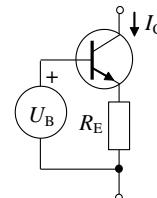
Ако је сачинилац  $\beta$  доволно велики, струја колектора је приближно једнака струји емитора:

$$I_C = I_E - I_B \approx I_E.$$

То омогућује да се вредност струје колектора одреди (зада) помоћу вредности напона поларизације базе,  $U_B$ , и отпорности отпорника у колу емитора  $R_E$ :

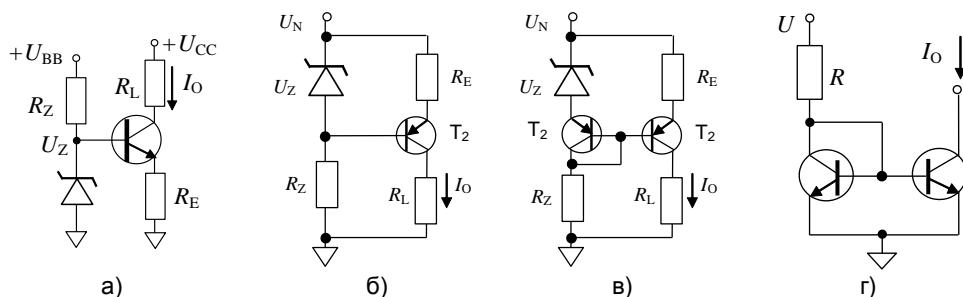
$$I_C \approx I_E = \frac{U_B - U_{BE}}{R_E},$$

где је  $U_{BE}$  напон споја база-емитор.



На слици 9.9 приказани су извори сталне струје остварени са биполарним транзисторима. Коло приказано на слици 9.9.а представља "понор" струје (*current sink*) коју извор напона  $U_{CC}$  "даје" оптерећењу. Вредност ове струје одређена је напоном Ценер-диоде,  $U_Z$ , и отпорношћу  $R_E$ :

$$I_O = I_C \approx I_E = \frac{U_Z - U_{BE}}{R_E}. \quad (9.14)$$



Слика 9.9. Извори струје са биполарним транзисторима

Коло приказано на слици 9.9.б је извор струје (*current source*) коју, из извора нестабилног напона  $U_N$ , прослеђује оптерећењу  $R_L$ , чији је други крај уземљен (*grounded load*). Уколико транзистор није у засићењу, вредност

струје  $I_O$  одређена је изразом 9.14. Вредност отпорности оптерећења  $R_L$  мора да буде мања од граничне вредности  $\max R_L$ :

$$\max R_{LX} = \frac{U_N - U_Z}{I_O}. \quad (9.15)$$

Помоћу транзистора  $T_2$  у колу приказаном на слици 9.9.в остварена је компензација утицаја који пад напона на споју база-емитор транзистора  $T_1$  има на вредност излазне струје  $I_O$ :

$$I_O \approx \frac{U_Z + U_{EB1} - U_{EB2}}{R_E} \approx \frac{U_Z}{R_E}. \quad (9.16)$$

Два истоветна транзистора у колу приказаном на слици 9.9.г образују струјно огледало (*current mirror*) које пресликава вредност струје кроз отпорник  $R$  на вредност излазне струје  $I_O$ :

$$I_O \approx \frac{\beta}{\beta + 2} \frac{U - U_{BE}}{R}. \quad (9.17)$$

На овај начин може да се добије више ликова, односно оствари мултиплицирање струје [2].

### 9.2.2 ТРАНЗИСТОР СА ЕФЕКТОМ ПОЉА КАО ИЗВОР СТРУЈЕ

Транзистор са ефектом поља (*Field Effect Transistor, FET*), поларисан тако да се његова радна тачка налази у области засићења, делује као извор струје управљан напоном. Вредност струје кроз канал,  $I_{DS}$ , веома мало зависи од разлике потенцијала на крајевима канала,  $U_{DS}$ .

Зависност струје  $I_{DS}$  од напона између гејта и корпа,  $U_{GS}$ , описује се једначином:

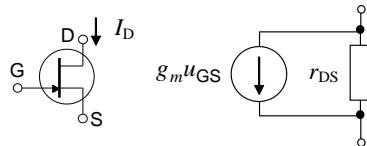
$$I_{DS} = I_{DSS} \left( 1 - \frac{U_{GS}}{U_{GS(OFF)}} \right)^k,$$

где је:

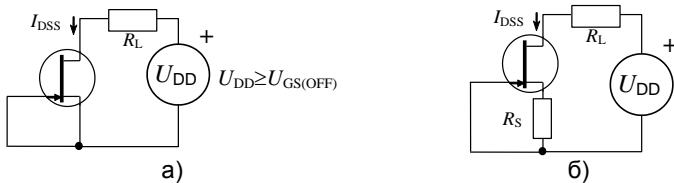
$U_{GS(OFF)}$  напон прекида (напон прага вођења);

$I_{DSS}$  струја засићења кад је напон између гејта и корпа једнак нули;

$k$  константа чија је вредност између 1,7 до 2,0.



При кратком споју између гејта и корпа  $N$ -каналног транзистора (слика 9.10.а), када је напон  $U_{DS}$  већи од напона прекида  $U_{GS(OFF)}$ , струја кроз канал једнака је струји засићења,  $I_{DSS}$ , независно од вредности напона  $U_{DD}$ , односно од отпорности оптерећења  $R_L$  у петљи дрејна. Увођењем отпорника у коло дрејна, као што је приказано на слици 9.10.б постиже се да је струја кроз транзистор мања од  $I_{DSS}$ .



Слика 9.10. Извори струје са спојним транзистором

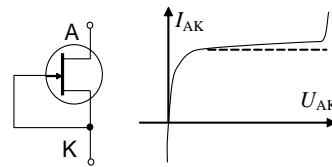
Напон  $U_{GS}$ , при којем струја засићења има жељену вредност једнаку  $I_{DS}$  ( $I_{DS} \leq I_{DSS}$ ), израчунава се на основу једначине [3]:

$$U_{GS} = U_{GS(OFF)} \left[ 1 - \left( \frac{I_{DS}}{I_{DSS}} \right)^{\frac{1}{k}} \right]. \quad (9.18)$$

На основу израчунате вредности напона  $U_{GS}$  одређује се вредност отпорника  $R_S$ , помоћу којег се остварује жељена поларизација:

$$R_S = -\frac{U_{GS}}{I_{DS}}. \quad (9.19)$$

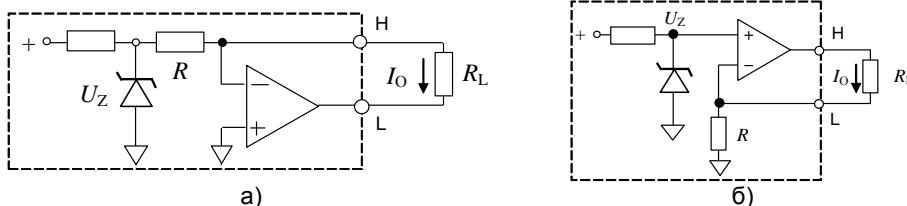
Транзистори са ефектом поља, поларисани тако да у стању засићења пропуштају струју одређене вредности, производе се као диоде за стабилизацију струје (current regulator diode). Статичка карактеристика ове врсте елемената приказана је на слици.



### 9.3 ИЗВОРИ СТАЛНЕ СТРУЈЕ СА ОПЕРАЦИОНИМ ПОЈАЧАВАЧИМА

У складу са правилом струја, операциони појачавач у инвертујућој спрези, посматран у односу на мражу која повезује његов излаз и инвертујући улаз, делује као извор струје чија је вредност одређена елементима у његовом улазном колу. У колу приказаном на слици 9.11.а струја  $I_O$  кроз оптерећење  $R_L$  је задата помоћу извора познатог напона  $U_Z$  и отпорника познате отпорности  $R$ :

$$I_O = \frac{U_Z}{R}. \quad (9.20)$$



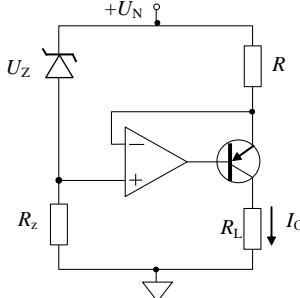
Слика 9.11. Извори сталне струје са операционим појачавачем

Потрошач  $R_L$  је са оба своја краја повезан са приклучцима H и L кола које делује као извор струје (слика 9.11.б). Такво оптерећење се назива "лебдеће", односно "пливајуће" (floating load). У низу случајева, један крај оптерећења је (конструкционо) повезан са референтном тачком у колу, за коју је усвојено да се налази на потенцијалу нуле. Оптерећење са једним крајем спојеним на нулу обично се назива "уземљено оптерећење" (grounded load).

Коло приказано на слици 9.12 представља извор сталне струје са уземљеним оптерећењем. То је, заправо, побољшано коло са слике 9.9.б. Операциони појачавач елиминише утицај напона база-емитор на вредност излазне струје  $I_O$ . Јака негативна повратна спрега обезбеђује да је пад напона

који емиторска струја прави на отпорнику  $R$  једнак напону  $U_Z$ . Ако је појачање транзистора довољно велико да струја базе може да се занемари, важи:

$$I_O = I_C \cong I_E = \frac{U_Z}{R}. \quad (9.21)$$



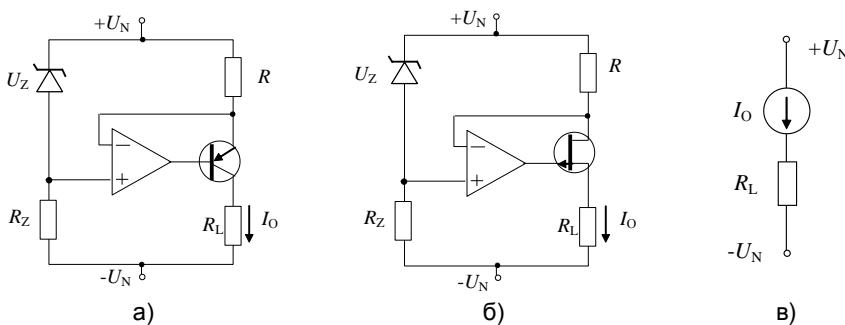
Слика 9.12. Извор сталне струје са уземљеним оптерећењем

Да би коло обаљало своју функцију, радна тачка транзистора треба да се налази у нормалној радној (активној) области: емиторски спој транзистора треба да буде поларисан директно ( $U_{EB} > 0$ ), а колекторски инверзно ( $U_{CB} < 0$ ). На основу граничног услова  $\max U_{CB} = 0$  следи:

$$R_L \leq \frac{U_N - U_Z - U_{EBsat}}{I_O}, \quad (9.22)$$

где је  $U_{EBsat}$  напон засићења емиторског споја.

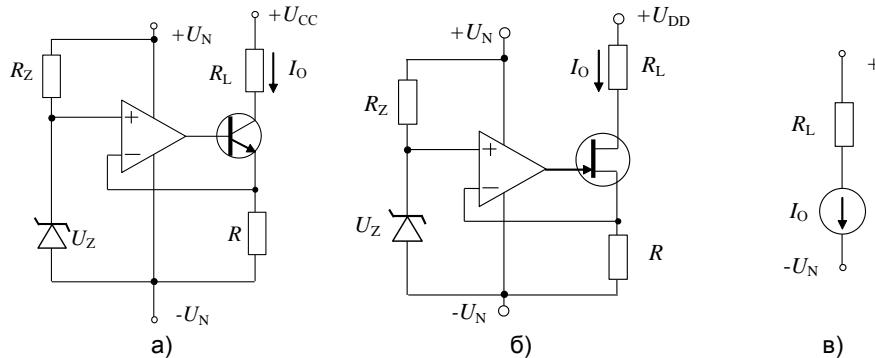
Треба уочити да други крај оптерећења не мора да буде на нултом потенцијалу<sup>3</sup>. Уколико радна тачка транзистора није у области засићења, излазна (колекторска) струја не зависи од потенцијала колектора (слика 9.13.а). На слици 9.13.б приказан је извор струје са  $P$ -каналним спојним транзистором са ефектом поља. Струја гејта транзистора са ефектом поља је занемарљиво мала, па је излазна струја  $I_O$  једнака струји кроз референтни отпорник  $R$ . На слици 9.13.б дато је еквивалентно коло.



Слика 9.13. Извори сталне струје са транзисторима

<sup>3</sup> Термин "уземљен" (*grounded*) се користи у преносном смислу, да означи да је оптерећење једним својим крајем повезано са "заједничким приклучком", који не мора да представља нулу (масу) системе. У општем случају, то је приклучак за који може да се сматра да се његов потенцијал не мења при промени стања у колу.

На слици 9.14 приказана су одговарајућа кола која узимају сталну струју из извора напона  $U_{CC}$  односно  $U_{DD}$ , независно од вредности тог напона, напона  $U_N$  и отпорности оптерећења  $R_L$ .

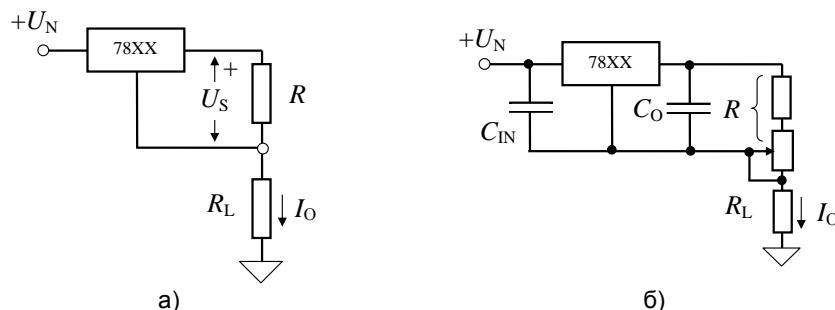


Слика 9.14. Струјни "понори"

## 9.4 СТАБИЛИЗАТОР НАПОНА КАО ИЗВОР СТАЛНЕ СТРУЈЕ

Интегрисани трополни стабилизатори напона, као што су стабилизатори серије 78XX, могу да се примене за израду подесивих извора сталне струје. Одговарајуће коло је приказано на слици 9.15.а. Ако се занемари мирна радна струја стабилизатора (*quiescent current*), вредност излазне струје  $I_O$  одређена је односом излазног напона стабилизатора  $U_S$  и отпорности  $R$ :

$$I_O = \frac{U_S}{R}. \quad (9.23)$$



Слика 9.15. Извор струје са стабилизатором напона

С обзиром на широке толеранције вредности напона  $U_S$ , потребно је да постоји могућност подешавања вредности отпорности  $R$ , као што је приказано на слици 9.15.б. Кондензатор  $C_{IN}$  је неопходан ако је стабилизатор удаљен од извора напона  $U_N$ . Кондензатор  $C_o$  побољшава стабилност и брзину одзива [4].

## 9.5 ИЗВОРИ СТРУЈЕ УПРАВЉАНИ НАПОНОМ

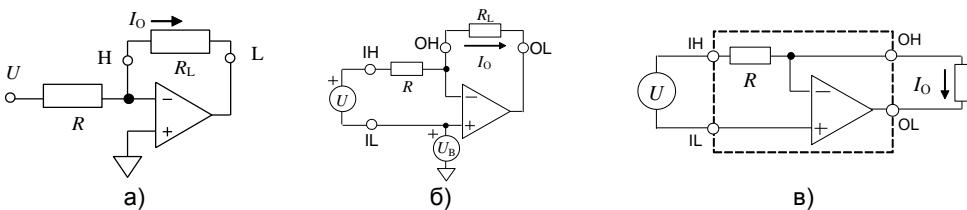
### 9.5.1 U/I ПРЕТВАРАЧИ СА НЕГАТИВНОМ ПОВРАТНОМ СПРЕГЕМ

Извор струје управљан напоном (*voltage controlled current source*, VCCS) је претварач који вредност улазног напона  $U$  пресликава на вредност излазне струје  $I_O$ :

$$I_O = G_m U. \quad (9.24)$$

Сачинилац преноса  $G_m$  се назива проводност преноса или транскондуктанс (*transconductance*)<sup>4</sup>.

Када се оптерећењу, које има само два краја, може да приступи преко оба његова прикључка (*floating load*), извор струје управљан напоном може да се оствари помоћу операционог појачавача и негативне повратне спреге. У колу приказаном на слици 9.16.a, један крај оптерећења  $R_L$  је на сталном потенцијалу (привидна нула инвертујућег појачавача). Струју кроз оптерећење “даје” извор напона  $U$ , а “прима” операциони појачавач. Улазна отпорност овог кола, у односу на извор напона  $U$ , једнака је отпорности референтног отпорника  $R$ . Смер струје  $I_O$  одређен је поларитетом улазног напона  $U$  (*bipolar current source*).



Слика 9.16.  $U/I$  претварач са “пливајућим” оптерећењем

Треба имати у виду да вредност излазне струје  $I_O$  не зависи од потенцијала неинвертујућег улаза операционог појачавача, већ од разлике потенцијала улазног (IH) и референтног прикључка (IL) (слика 9.16.b). Операциони појачавач “измиче” други крај оптерећења  $R_L$ , тако да потенцијали прикључака OH и IL буду једнаки, без обзира на вредност отпорности  $R_L$ . Ако је операциони појачавач савршен, струја  $I_O$  једнака је:

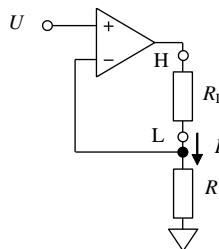
$$I_O = \frac{U}{R}. \quad (9.25)$$

У односу на пливајући извор напона  $U$ , ово коло делује као диференцијални  $U/I$  претварач (слика 9.16.c). Притом, да излаз операционог појачавача не би доспео у стање засићења неопходно је да буде испуњен услов:

<sup>4</sup> Савршени  $U/I$  претварач остварује линеарно пресликање. По својој физичкој природи величина  $G_m$  представља проводност (*conductance*). Са становишта теоријске анализе електричних кола, извор струје управљан напоном представља транскондуктансни појачавач (*transconductance amplifier*).

$$R_L \leq R \frac{U_{\text{sat}}}{U}. \quad (9.26)$$

У колу приказаном на слици 9.17, струју кроз потрошач  $R_L$ , као и у претходном случају, даје операционо појачавач. Улазна отпорност, која оптерећује извор сигнала, је веома велика. Напон на једном крају оптерећења  $R_L$  једнак је улазном напону. Смер струје  $I_O$  одређен је поларитетом улазног напона  $U$ .



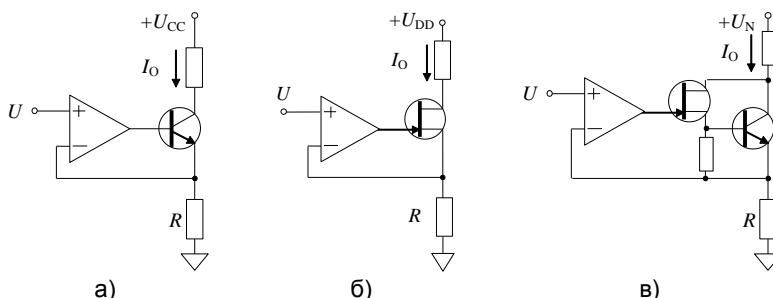
Слика 9.17.  $U/I$  претварач са великим улазном отпорношћу

За исправан рад кола неопходно је да буде испуњен услов:

$$R_L \leq R \frac{U_{\text{sat}} - U}{U}. \quad (9.27)$$

Додавањем  $NPN$  биполарног транзистора, као што је то приказано на слици 9.18.а, операционо појачавач и даље обавља функцију регулатора (управља струјом емитора), али је ослобођен улоге извора струје која противиче кроз потрошач. Струја  $I_O$  не може да мења смер. Она је мања од (регулисана) струје емитора за вредност струје базе. У колу на слици 9.18.б, у којем је примењен  $N$ -канални спојни транзистор са ефектом поља ( $JFET$ ), струја  $I_O$  се занемарљиво мало разликује од вредности регулисана струје кроз референтни отпорник  $R$ . Јака негативна повратна спрела обезбеђује да је пад напона на референтном отпорнику, који на њему прави струја кроз транзистор, једнак улазном напону:

$$I_O = \frac{U}{R}. \quad (9.28)$$

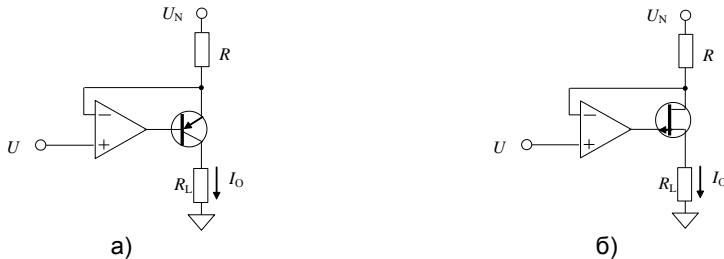


Слика 9.18.  $U/I$  претварачи са транзисторима

Коло приказано на слици 9.18.в објединjuје добра својства оба решења. Помоћу ФЕТ-а постиже се да струја базе биполарног транзистора не уноси грешку, без ограничења да излазна струја не може да буде већа од  $I_{DSS}$  [5].

Претходно описани струјни понори, приказани на слици 9.14, могу да се посматрају као посебан случај  $U/I$  претварача. Извори сталне струје са уземљењим оптерећењем (слика 9.13), могу да се примене у својству извора струје управљаних напоном, али треба имати у виду да тада вредност излазне струје није сразмерна вредности улазног напона, већ зависи од разлике напона извора који обезбеђује излазну струју,  $U_N$ , и управљачког напона  $U$  (слика 9.19):

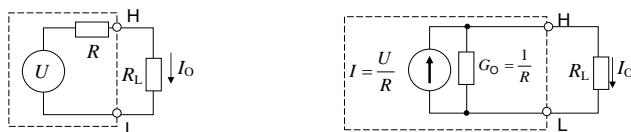
$$I_O = \frac{U_N - U}{R}. \quad (9.29)$$



Слика 9.19.  $U/I$  претварачи са уземљеним оптерећењем

### 9.5.2 $U/I$ ПРЕТВАРАЧИ СА ПОЗИТИВНОМ ПОВРАТНОМ СПРЕГОМ

У складу са Теоремом о еквиваленцији, несавршени извор напона  $U$ , чија је унутрашња отпорност  $R$ , може да се представи као несавршени извор струје чија је вредност одређена напоном  $U$ , а унутрашња проводност једнака  $1/R$  (слика 9.20).



Слика 9.20. Еквиваленција извора напона и извора струје

Као што је већ истакнуто, посматрано са стране оптерећења, редна веза извора напона и отпорника сталне отпорности делује као "претварач напона у струју" (*voltage to current converter, U/I converter*). Карактеристика преноса одређена је изразом:

$$I_O = GU(1 - \Delta), \quad (9.30)$$

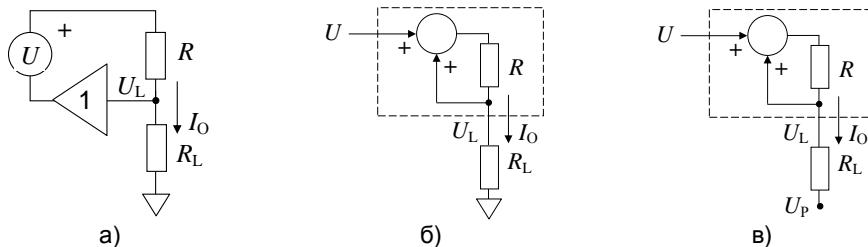
где је  $G$  проводност преноса, а  $\Delta$  показатељ несавршености овог претварача. Вредност излазне струје зависи од вредности напона  $U_{HL}$  између крајева оптерећења:

$$I_O = \frac{U}{R} - \frac{U_{HL}}{R}. \quad (9.31)$$

Одступање вредности излазне струје  $I_O$  од вредности  $I$ , која одговара савршеном  $U/I$  претварачу:

$$I = \frac{U}{R}, \quad (9.32)$$

представља систематску грешку која се може отклонити применом повратне спреге. Једначина 9.31 указује да се жељени циљ може да оствари ако се грана која се састоји од референтне отпорности  $R$  и оптерећења  $R_L$  напаја напоном који је једнак збире управљачког напона  $U$  и пада напона који на оптерећењу прави излазна струја. Ако је извор напона  $U$  пливајући, то се постиже помоћу одвојног појачавача јединичног појачања (слика 9.21.а).



Слика 9.21.  $U/I$  претварач са позитивном повратном спрегом

Када то није случај, потребан је сабирач, као што је то приказано на слици 9.21.б. Коло које је на слици уоквирено испрекиданом линијом, на свом излазу даје струју  $I_O$  која је сразмерна вредности напона  $U$  на његовом улазу. Вредност сачиниоца преноса овог претварача одређена је вредношћу отпорности отпорника  $R$ , а не зависи од вредности отпорности  $R_L$ .

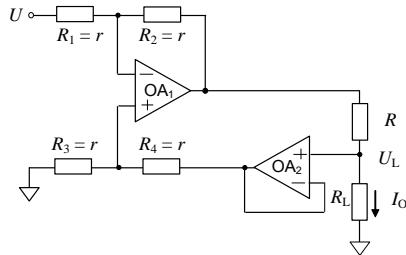
Позитивном повратном спрегом подешава се вредност напона којим се, преко референтног отпорника  $R$ , потрошач напаја струјом, тако да се поништава утицај напона  $U_L$  на вредност ове струје. Ако је улазна отпорност сабирача бесконачно велика, струја  $I_O$  не зависи од вредности отпорности оптерећења,  $R_L$ :

$$I_O = \frac{(U + U_L) - U_L}{R} = \frac{U}{R}. \quad (9.33)$$

Треба уочити да повратна спрела исправно делује и ако други прикључак оптерећења није уземљен, већ је на неком потенцијалу (слика 9.21.в). Применом позитивне напонске повратне спреге постигнуто је да вредност струје  $I_O$  која противе кроз оптерећење  $R_L$  буде одређена вредношћу напона  $U$ , али не зависи од вредности отпорности оптерећења, односно, од напона на крајевима тог оптерећења.

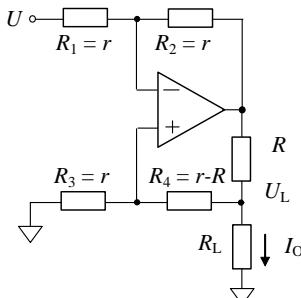
Једно решење, засновано на описаном поступку, приказано је на слици 9.22. Операциони појачавач  $OA_2$  остварује улогу дискриминатора са чијег излаза се напаја мрежа коју чине референтни отпорник  $R$  и оптерећење  $R_L$ . Операциони појачавач  $OA_2$  има задатак да одвоји неинвертујући улаз дискриминатора од оптерећења, тако да грана коју чине отпорници  $R_3$  и  $R_4$  не утиче на вредност излазне струје  $I_O$ . У односу на референтни смер струје назначен на слици, важи:

$$I_O = -\frac{U}{R}. \quad (9.34)$$

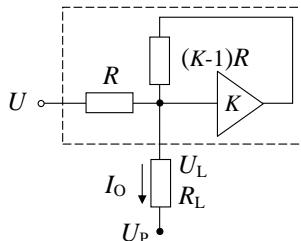


Слика 9.22. Биполарни извор струје управљан напоном

Коло приказано на слици садржи само један појачавач, јер је одливање струје кроз отпорнике  $R_3$  и  $R_4$  компензовано одговарајућом променом отпорности  $R_4$ . Образац 9.33 важи, али је “цена” овог поједностављења нарушавање “симетрије отпорности” у колу, као и усложњавање поступка његове калибрације.

Слика 9.23.  $U/I$  претварач са једним операционим појачавачем

На слици 9.24 приказан је нешто другачији облик  $U/I$  претварача са позитивном повратном спрегом, остварен применом неинвертујућег појачавача чије је појачање једнако  $K$ . Струји, коју даје извор улазног напона, додаје се струја која је сразмерна излазном напону,  $U_L$ . На тај начин се поништава (компензује) грешка која настаје због утицаја напона  $U_L$  на вредност струје коју даје извор напона  $U$  (овакав облик повратне спреле назива се “напонско-паралелна” или “паралелно-паралелна” повратна спрела)<sup>5</sup>.

Слика 9.24. Модификована структура  $U/I$  претварача са позитивном повратном спрегом

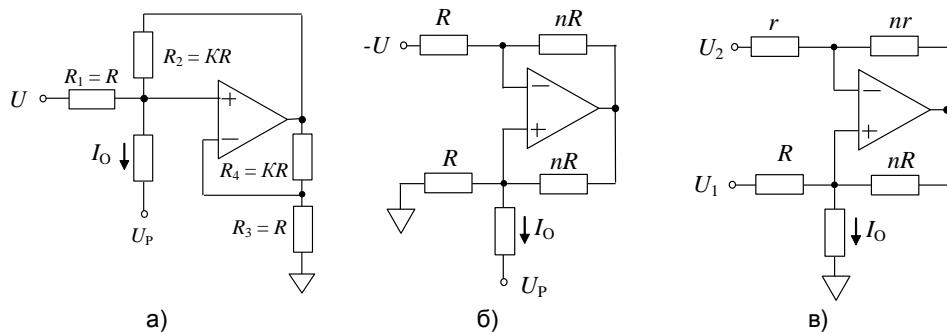
<sup>5</sup> Линеарно коло са оваквом позитивном повратном спрегом назива се “бутстреп” коло (*bootstrap circuit*).

Посматрано коло представља још један пример примене “бутстреп технике”, о којој је било речи у седмом поглављу. За излазну струју  $I_O$  важи:

$$I_O = \frac{U - U_L}{R} + \frac{KU_L - U_L}{(K-1)R} = \frac{U}{R}. \quad (9.35)$$

На слици 9.25.а приказано је одговарајуће коло са операционим појачавачем. За исправан рад неопходно је да буде испуњен услов:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3} = K. \quad (9.36)$$



Слика 9.25. Извор струје управљан напоном

На слици 9.25.б приказано је модификовано решење, код којег је оптерећење извора улазног напона смањено. Излазну струју  $I_O$  у потпуности даје операционо појачавач.

У оба случаја, излазна струја  $I_O$  не зависи од напона  $U_P$  на којем се налази други крај оптерећења. Треба уочити да оба кола имају идентичну структуру, само су замењена места прикључивања улазног и референтног напона који представља нулу. Коло на слици 9.25.в може да се посматра и као посебан случај кола са слике 9.23 када је  $r = R$ . Ово коло (*Howland circuit*) заправо представља диференцијални  $U/I$  претварач [6].

$$I_O = -\frac{U_1 - U_2}{R}. \quad (9.37)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. П. Бошњаковић. Основи електронике, ВЕТШ, 2010, с.106.
2. П. Бошњаковић. Основи електронике, збирка решених задатака, ВИШЕР, 2010, с.263.
3. *The FET Constant Current Source, DI71-1, Siliconix, Fet Design Catalog*.
4. *Fairchild Semiconductor Corporation, MC78XX/LM78XX/MC78XXA, 3-Terminal Positive Voltage Regulator, www.fairchildsemi.com*.
5. *P. Horowitz, W. Hill, The Art of Electronics, sec.ed, Cambridge University Press, 1989. p.181.*
6. *Smith I.J, Modern Operational Circuit Design, John Wiley&Sons, 1971, p.157.*

“Ако људи не верују да је математика једноставна, то је због тога што не схватају колико је живот компликован.”

] John von Neumann



## 10. ФРЕКВЕНЦИЈСКИ СЕЛЕКТИВНА КОЛА

У најопштијем смислу, сврха операције филтрирања<sup>1</sup> може бити двојака: да се омогући пропуштање (*pass*) или да се обезбеди непропуштање (*rejection*) неког физичког објекта, у зависности од одређеног својства тог објекта, као што је маса, величина или боја. У области телекомуникација филтрирање спада у основне операције обраде сигнала којом се постиже екстракција сигнала односно његових спектралних компонената из електричног синала који је резултат суперпозиције више утицаја.

Примена фреквенцијски селективних елемената у мерној техници је често неизбежна, посебно када се ради о индустриским мерењима, мерењима у истраживачким лабораторијама, као и при мерењима код којих се захтева велика прецизност. У свим овим случајевима, прикупљање мерних информација подразумева потискивање (слабљење) неинформативног дела спектра мерног синала. Одговарајућа обрада остварује се уношењем у мерни ланац таквог елемента који преноси (пропушта) хармонијске синале чија је учестаност у одређеном опсегу, а потискује (не пропушта) синале свих других учестаности.

Филтер је елемент типа улаз-излаз намењен да преноси спектралне компоненте улазне величине у складу са одређеним законом. У општем случају филтер не утиче на компоненте које припадају одређеним опсезима учестаности, а слаби све оне које припадају другим опсезима. Класична теорија бавила се анализом и синтезом пасивних мрежа са концентрисаним параметрима, које се одликују одређеном фреквенцијском селективношћу, пре свега са аспекта примене у радиотехници [1]. Тридесетих година двадесетог века развијена је методологија анализе која се заснивала на описивању филтера помоћу функције преноса. Иницијални недостатак таквог приступа, сложеност прорачуна, превазиђен је развојем и применом дигиталних рачунара опште намене при решавању задатака математике са комплексним величинама.

Активни филтри су фреквенцијски селективна електрична кола, која садрже дискретне трополне појачавачке елементе или интегрисане операционе појачаваче. У овом поглављу разматрају се основни облици аналогних филтера првог, другог и трећег реда.

### 10.1 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

Електрична мрежа са карактеристикама савршеног филтра физички не може да се оствари. Линеарна електрична кола са савршеним елементима описују

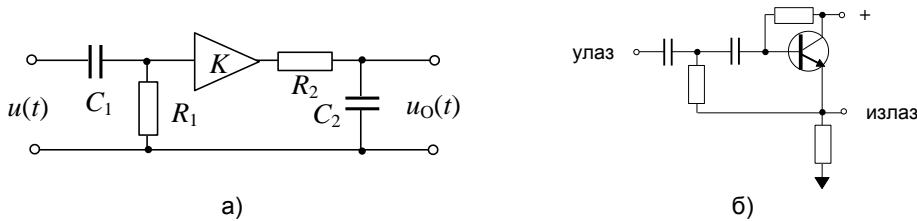
<sup>1</sup> Од лат. *filtrare*, цедити, процедити, пречистити цеђењем.

се линеарним диференцијалним једначинама са константним коефицијентима. Фреквенцијска карактеристика таквих кола има облик рационалне функције по  $\omega$ :

$$W(j\omega) = \frac{P_n(j\omega)}{Q_m(j\omega)}, \quad (10.1)$$

где је  $P_n(j\omega)$  полином степена  $n$ , а  $Q_m(j\omega)$  полином степена  $m$  по променљивој  $j\omega$ . Ред филтра одређен је редом диференцијалне једначине која га описује. Овакав облик функције  $W(j\omega)$  подразумева да њен модуло, функција  $W(\omega) = |W(\omega)|$ , не може да има прекиде, неопходне за прецизно дефинисање границе и скоковит прелаз између пропусне и непропусне области савршеног филтра (слика 3.20). Стварна филтерска кола се одликују постојањем прелазног опсега (*transition band*). Заправо, карактеристика стварног фреквенцијски селективног кола увек представља само апроксимацију карактеристике савршеног филтра. Зависно од услова које намећу циљеви обраде сигнала, пажња може бити усредсређена на амплитудску (селективност) или фазну (изобличење) карактеристику филтра.

Пасивни филтри представљају основни облик фреквенцијски селективних кола. То су електричне мреже са два приступа које садрже само отпорнике и реактивне елементе (кондензаторе односно индуктивне калемове). Активни филтри поред основних електричних елемената садрже и трополне појачавачке елементе или операционе појачаваче. Индуктивни елементи се обично не користе при реализацији активних филтера, пре свега због димензија и цене, али и сразмерно велике резистивне компоненте (сопствене отпорности индуктивних намотаја). У најједноставнијем облику, појачавачи омогућују раздвајање поједињих пасивних филтерских ћелија, тако да се њихови параметри могу независно да подешавају (слика 10.1.a). На слици 10.1.b приказан је активни филтер другог реда, пропусник високих учестаности, остварен помоћу биполарног транзистора у функцији неинвертујућег појачавача.



Слика 10.1. Активни RC-филтри

Помоћу активних (појачавачких) елемената могуће је постићи жељену фреквенцијску карактеристику применом само отпорника и кондензатора. Електронски појачавачи омогућују остваривање веома ниских граничних учестаности (реда величине mHz) коришћењем елемената прихватљивих вредности и димензија.

Потенцијалне недостатке активних филтера представљају:

- несиметричан (*single ended input*) улаз (у начелу немају пливајући улаз),
- ограничен опсег напона (+/- 10 V),
- ограничено могућности у погледу излазне струје,
- једносмерна компонента (померај нуле) на излазу.

## 10.2 ПРОПУСНИЦИ НИСКИХ УЧЕСТАНОСТИ

Елемент чији математички модел је линеарна диференцијална једначина са константним коефицијентима:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + y(t) = Kx(t), \quad (10.2)$$

где је  $x(t)$  улазна, а  $y(t)$  излазна величина, представља филтер  $n$ -тог реда пропусник ниских учестаности. На основу једначине 10.2 следи израз за функцију преноса<sup>2</sup> таквог елемента:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1}, \quad (10.3)$$

и фреквенцијску карактеристику:

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{K}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + 1}. \quad (10.4)$$

Сачинилац  $K$  је бездимензиони величини која је једнака појачању сталне компоненте улазног напона:

$$W(0) = K. \quad (10.5)$$

Када учестаност тежи бесконачности функција  $W(\omega)$  тежи нули. У том делу је нагиб логаритамске амплитудске фреквенцијске карактеристике  $-20n$  децибела по декади.

Филтри непропусници високих учестаности имају широку примену у мерној техници. Од фреквенцијски селективних кола у мерном ланцу се често захтева максимално глатка амплитудска карактеристика. Такво својство имају филтри типа Батерворт (*Butterworth*) чија амплитудска фреквенцијска карактеристика има облик:

$$W(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^{2n}}}, \quad (10.6)$$

где је  $n$  ред филтра, а  $\omega_g$  представља граничну учестаност пропусног опсега:

$$W(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (10.7)$$

Функција  $W(\omega)$  монотоно опада од максималне вредности једнаке јединици при  $\omega = 0$ . За  $\omega >> \omega_g$  важи апроксимација:

$$W(\omega) \approx \left( \frac{\omega_g}{\omega} \right)^n. \quad (10.8)$$

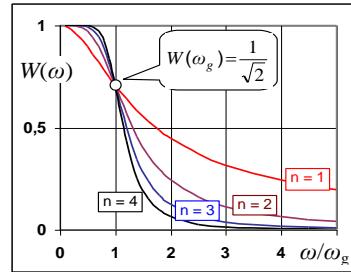
Фреквенцијска карактеристика Батервортовог филтра  $n$ -тог реда нема нула, а обично се представља у облику:

<sup>2</sup> У теорији филтера користи се и назив "функција мреже" (*network function*).

$$W(j\omega) = \frac{1}{B_n(j\omega)}, \quad (10.9)$$

где је  $B_n(j\omega)$  полином по  $j\omega$ . Коефицијенти прва четири полинома дати су табеларно на слици 10.2.

$n$	$B(j\omega)$
1	$j\omega T + 1$
2	$(j\omega T)^2 + \sqrt{2} j\omega T + 1$
3	$(j\omega T)^3 + 2(j\omega T)^2 + 2j\omega T + 1$
4	$(j\omega T)^4 + 2,613(j\omega T)^3 + 3,414(j\omega T)^2 + 2,613 j\omega T + 1$



Слика 10.2. Фреквенцијска карактеристика Батервортових филтера

### 10.2.1 ФИЛТРИ ПРВОГ РЕДА

Активни филтер првог реда, пропусник ниских учестаности, представља динамички елемент описан диференцијалном једначином:

$$T \frac{dy}{dt} + y(t) = Kx(t), \quad (10.10)$$

где је  $x(t)$  улазна, а  $y(t)$  излазна величина. Сачинилац  $T$  има димензију времена (временска константа филтра). Сачинилац  $K$  је бездимензиона величина која одређује однос сталне компоненте излазног и улазног напона. На основу једначине 10.10 следе функција преноса:

$$W(s) = \frac{K}{Ts+1}, \text{ и} \quad (10.11)$$

фреквенцијска карактеристика овог елемента, која се обично приказује у облику:

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}}, \quad (10.12)$$

где је  $\omega_g$  гранична учестаност, дефинисана формулом 10.7:

$$\omega_g = \frac{1}{T}. \quad (10.13)$$

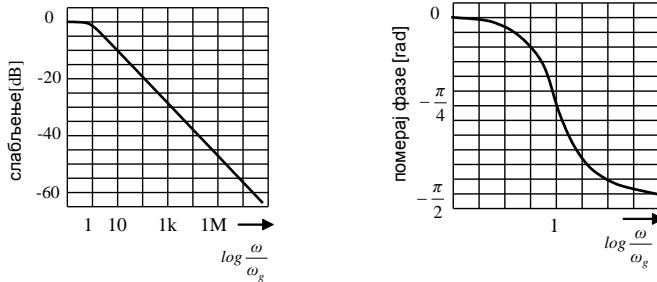
Однос амплитуде излазног и улазног сигнала одређен је изразом:

$$W(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_g})^2}}. \quad (10.14)$$

Излазни сигнал заостаје у односу на улазни за угао  $\phi$  који је по модулу мањи од  $\pi$ :

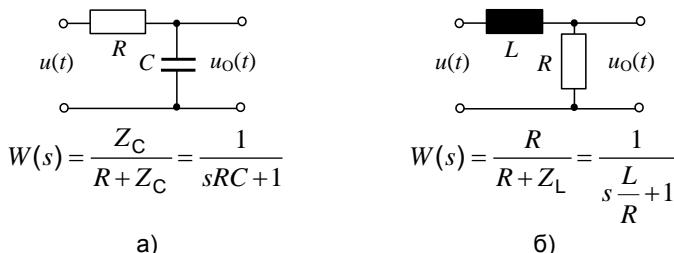
$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\omega}{\omega_g}. \quad (10.15)$$

За сигнале чија је учестаност много већа од граничне учестаности  $\omega_g$ , однос амплитуда излазног и улазног сигнала је обрнуто сразмеран учестаности. Нагиб асимптотске логаритамске амплитудске карактеристике у непропусном опсегу је -20 децибела по декади. За учестаности много веће од граничне учестаности  $\omega_g$  излаз заостаје за улазом за угао  $\pi/2$ . На слици 10.3 приказане су, за  $K = 1$ , амплитудска и фазна фреквенцијска карактеристика филтра првог реда.



Слика 10.3. Амплитудска и фазна карактеристика филтра првог реда

Редно  $RC$ -коло, код којег је напон на кондензатору излазни сигнал, представља најједноставнији (пасивни) филтер првог реда, пропусник ниских учестаности (слика 10.4.a). Спада у категорију Батервортових филтера. Истоветну, по облику, функцију преноса има и  $LR$ -мрежа приказана на слици 10.4.b.



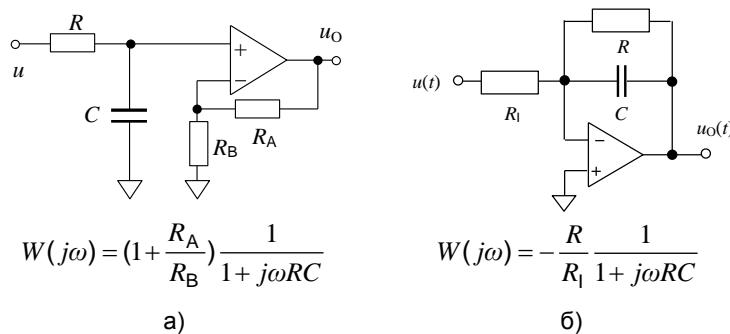
a)

б)

Слика 10.4. Пасивни филтри првог реда

На слици 10.5 приказани су неинвертујући и инвертујући активни  $RC$ -филтер првог реда. У оба случаја гранична учестаност  $f_g$  одређена је изразом:

$$f_g = \frac{1}{2\pi RC}. \quad (10.16)$$



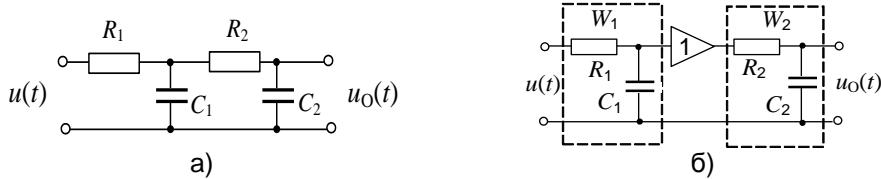
a)

б)

Слика 10.5. Активни филтри првог реда

### 10.2.2 ФИЛТРИ ВИШЕГ РЕДА

Филтер вишег реда може да се добије редном везом више елементарних ћелија првог реда. Ако се две  $RC$ -ћелије, које представљају филтер пропусник ниских учестаности (слика 10.6.а) повежу редно, добија се филтер другог реда.



Слика 10.6. Филтри другог реда, пропусници ниских учестаности

Ако су ћелије идентичне ( $R_1 = R_2 = R$ ,  $C_1 = C_2 = C$ ), функција преноса пасивне мреже одређена је једначином:

$$W(s) = \frac{1}{(sRC)^2 + 3sRC + 1}. \quad (10.17)$$

Када су филтерске ћелије раздвојене јединичним појачавачем (слика 10.6.б), функција преноса има облик:

$$W(s) = \frac{1}{sR_1C_1 + 1} \cdot \frac{1}{sR_2C_2 + 1}. \quad (10.18)$$

Ако су елементи ћелија једнаки ( $C_1 = C_2 = C$ ,  $R_1 = R_2 = R$ ) важи једначина:

$$W(s) = \left( \frac{1}{sRC + 1} \right)^2, \quad (10.19)$$

на основу које следи израз за амплитудску фреквенцијску карактеристику  $W(\omega)$ :

$$W(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2}, \quad (10.20)$$

и фазну фреквенцијску карактеристику  $\varphi(\omega)$ :

$$\varphi(\omega) = -2\arctg\omega RC. \quad (10.21)$$

Граница учестаност овог филтра једнака је:

$$\omega_g \cong \frac{0,64}{RC}, \quad (10.22)$$

а одговарајући померај фазе:

$$\varphi(\omega_g) \cong -65^\circ. \quad (10.23)$$

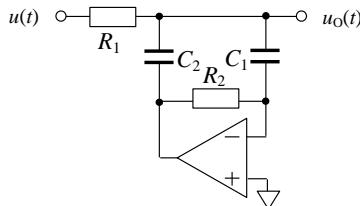
Треба уочити да коло приказано на слици 10.6.а не представља филтер типа Батерворт, иако филтерске ћелије, од којих је сачињен, то јесу. Њихова гранична учестаност једнака је  $1/RC$ . На тој учестаности је:

$$W\left(\frac{1}{RC}\right) = \frac{1}{2}, \quad (10.24)$$

а одговарајући померај фазе:

$$\varphi\left(\frac{1}{RC}\right) = -90^\circ. \quad (10.25)$$

Активни филтри другог реда најчешће се остварују применом фреквенцијски селективне повратне спрете, као што је приказано на слици 10.7.



Слика 10.7. Активни филтер другог реда, пропусник ниских учестаности

Функција преноса овог кола дата је изразом:

$$W(s) = \frac{1}{s^2 R_1 C_1 R_2 C_2 + s R_1 (C_1 + C_2) + 1}. \quad (10.26)$$

Ако је  $C_1 = C_2 = C$ ,  $R_1 = R_2 = R$  важи израз 10.19. Ако је:

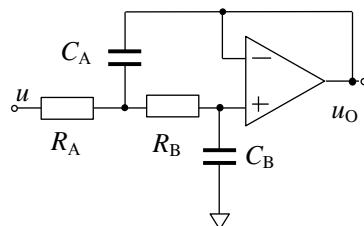
$$R_2 = R = 2R_1, \quad C_1 = C_2 = \sqrt{2} C \quad (10.27)$$

коло представља филтер типа Батерворт. Границна учестаност је тада одређена изразом:

$$f_g = \frac{1}{2\pi R C}. \quad (10.28)$$

Недостатак овог кола је утицај који импеданса оптерећења, прикљученог на излаз, има на функцију преноса кола. У колу приказаном на слици 10.8. појачавач јединичног појачања обезбеђује нулту импедансу на излазу. Функција преноса овог кола дата је изразом:

$$W(s) = \frac{1}{s^2 R_A C_A R_B C_B + s C_B (R_A + R_B) + 1}. \quad (10.29)$$

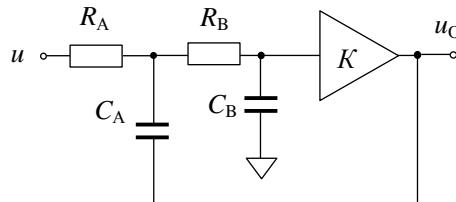


Слика 10.8. Филтер другог реда пропусник ниских учестаности,

Ако су елементи ћелија једнаки ( $C_A = C_B = C$  и  $R_A = R_B = R$ ) важи једначина 10.19. Да би посматрано коло представљало филтер типа Батерворт треба да буду испуњени услови:

$$C_A = C = 2C_B, \quad R_A = R_B = \sqrt{2} R. \quad (10.30)$$

На слици 10.9 приказано је коло које може да се посматра као општи модел једне класе активних филтера другог реда, пропусника ниских учестаности<sup>3</sup> [2], [3].



Слика 10.9. Општи модел филтра другог реда пропусника ниских учестаности

Функција преноса овог кола дата је изразом:

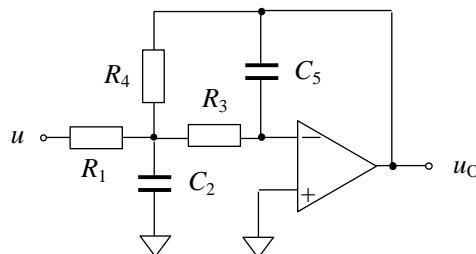
$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^2 R_A C_A R_B C_B + s[R_A C_A (1-K) + C_B (R_A + R_B)] + 1}, \quad (10.31)$$

који се, за  $C_A = C_B = C$ ,  $R_A = R_B = R$ , и  $K = 2$ , своди на:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{2}{(s RC)^2 + s RC + 1}. \quad (10.32)$$

Постоје и другачије структуре, као што је на пример коло са вишеструком повратном спрегом (*multiple-feedback circuit*) приказано на слици 10.10 [4]. Функција преноса овог кола дата је изразом:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = -\frac{R_4}{R_1} \frac{1}{s^2 R_4 R_3 C_2 C_5 + s \frac{R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_3 R_4}{R_1} C_2 + 1}. \quad (10.33)$$



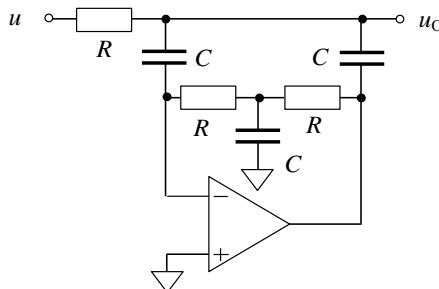
Слика 10.10. Операциони појачавач са вишеструком повратном спрегом

Коло приказано на слици 10.11, чија је функција преноса одређена изразом:

$$W(j\omega) = \frac{1}{(s RC + 1) \cdot [(s RC)^2 + s RC + 1]}, \quad (10.34)$$

представља Батервортов филтер трећег реда. Границна учестаност је одређена изразом 10.28.

<sup>3</sup> У теорији кола појачавач напона се посматра као извор напона управљан напоном (*voltage controlled voltage source - VCVS*). Уобичајено је да се одговарајуће фреквенцијски селективни коло, у којем се примењује, назива *VCVS-мрежа* (*VCVS network*) [3].



Слика 10.11. Батервортов филтер трећег реда

Нагиб асимптотске логаритамске амплитудске карактеристике у непропусном опсегу је -60 dB/dec.

### 10.3 ПРОПУСНИЦИ ВИСОКИХ УЧЕСТАНОСТИ

Елемент чија је функција преноса:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ks^n}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + 1}, \quad (10.35)$$

представља филтер пропусник високих учестаности  $n$ -тог реда. Сачинилац  $K$  је бездимензиона величина која је једнака појачању амплитуде високофрејквентних компоненти улазног сигнала.

Када учестаност тежи нули амплитудска фреквенцијска карактеристика  $W(\omega)$  такође тежи нули:

$$W(0) = 0. \quad (10.36)$$

Када учестаност тежи бесконачности функција  $W(\omega)$  тежи вредности коју има сачинилац  $K$ . У том делу је нагиб логаритамске амплитудске фреквенцијске карактеристике  $+20n$  децибела по декади.

У мерној техници посебан значај имају филтри типа Батерворт, чија амплитудска фреквенцијска карактеристика има облик:

$$W(\omega) = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^n}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^{2n}}}, \quad (10.37)$$

где је  $n$  ред филтра, а  $\omega_g$  представља граничну учестаност пропусног опсега:

$$W(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (10.38)$$

При смањивању учестаности функција  $W(\omega)$  монотоно опада од максималне вредности једнаке јединици при  $\omega = \infty$ . Филтри овог типа се одликују максимално глатком амплитудском карактеристиком у околини  $\omega = \omega_g$ . За  $\omega \gg \omega_g$  је  $W(\omega) \approx 1$ .

Фреквенцијска карактеристика (*frequency response*) филтра  $n$ -тог реда, пропусника високих учестаности, типа Батерворт, обично се представља у облику:

$$W(j\omega) = \frac{(j\omega)^n}{B_n(j\omega)}, \quad (10.39)$$

где је  $B_n(j\omega)$  полином по  $j\omega$ . Коефицијенти прва четири полинома дати су табеларно на слици 10.2.

### 10.3.1 ФИЛТРИ ПРВОГ РЕДА

#### СВОЈСТВА

Активни филтер пропусник високих учестаности, првог реда, је динамички елемент описан диференцијалном једначином:

$$T \frac{dy}{dt} + y(t) = KT \frac{dx}{dt}, \quad (10.40)$$

где је  $x(t)$  улазна, а  $y(t)$  излазна величина. Сачинилац  $T$  има димензију времена (временска константа филтра). Сачинилац  $K$  је бездимензиона величина која је једнака појачању сигнала високе учестаности. На основу једначине 10.40 следе функција преноса:

$$W(s) = K \frac{sT}{sT + 1}, \quad (10.41)$$

фрејквенцијска карактеристика:

$$W(j\omega) = K \frac{j \frac{\omega}{\omega_g}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_g}}. \quad (10.42)$$

Амплитудска и фазна фрејквенцијска карактеристика таквог елемента одређене су изразима:

$$W(\omega) = K \frac{\frac{\omega}{\omega_g}}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_g})^2}}, \quad (10.43)$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\omega_g}. \quad (10.44)$$

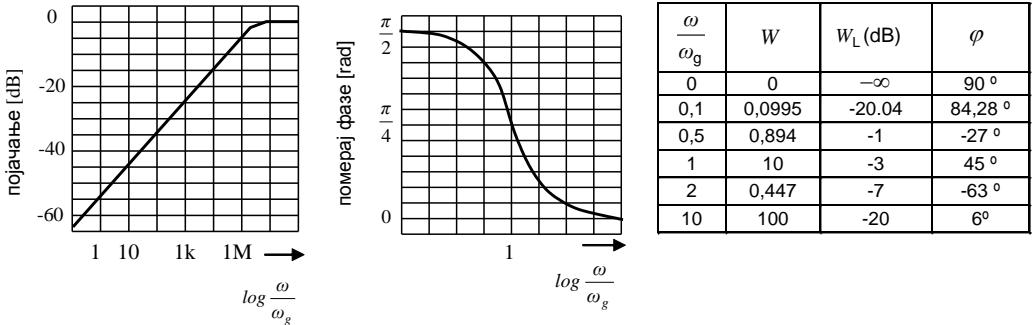
Померај фазе излаза у односу на улаз је позитиван, у границама од нула до  $90^\circ$ . Излазни сигнал је фазно померен унапред (предњачи) у односу на улазни сигнал. На граничној учестаности  $\omega_g$ , излазни сигнал предњачи у односу на улазни сигнал за четвртину периода:

$$\varphi(\omega_g) = \frac{\pi}{4}. \quad (10.45)$$

Када учестаност  $\omega$  тежи бесконачности, функција  $W(\omega)$  тежи  $K$ , а померај фазе  $\varphi(\omega)$  тежи нули. Када  $\omega$  тежи нули,  $W(\omega)$  тежи нули, а померај фазе тежи  $90^\circ$ .

На слици 10.12 дати су графички прикази логаритамске амплитудске фреквенцијске карактеристике,  $W_L(\omega)$  за  $K = 1$ , логаритамске фазне фреквенцијске карактеристике, као и табела њихових вредности за изабране, карактеристичне вредности аргумента  $\omega T$ .

За сигнале чија је учестаност много мања од граничне учестаности  $\omega_g$ , однос амплитуда излазног и улазног сигнала је обрнуто сразмеран учестаности. Нагиб логаритамске амплитудске карактеристике је 20 децибела по декади.



Слика 10.12. Амплитудска и фазна карактеристика филтра првог реда

Разлагање фреквенцијске карактеристике посматраног система на елементарне облике омогућује једноставно одређивање асимптотске логаритамске фреквенцијске карактеристике. Еквивалентно може да се представи као редна веза три основна елемента: појачавача, диференцијатора и филтера пропусника нискних учестаности (слика 10.13.a). Функцији преноса таквог система:

$$W(s) = Ks \frac{1}{sT + 1} = K \cdot W_1 \cdot W_2, \quad (10.46)$$

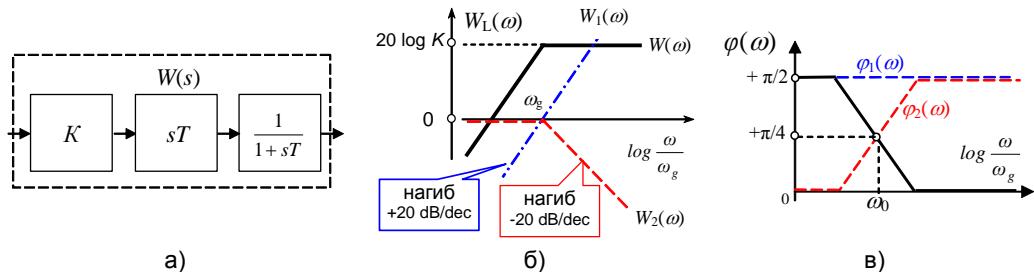
одговарају логаритамска амплитудска фреквенцијска карактеристика:

$$W_L(\omega) = 20 \log K + W_{1L}(\omega) + W_{2L}(\omega), \quad (10.47)$$

и фазна фреквенцијска карактеристика:

$$\varphi(\omega) = 0 + \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega). \quad (10.48)$$

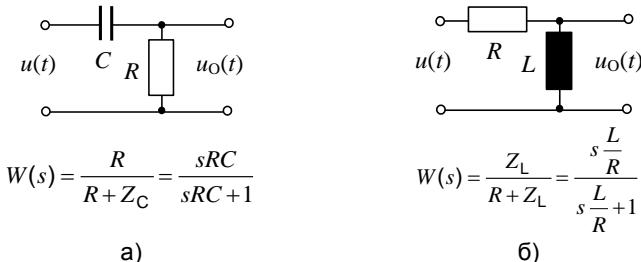
Бодеов дијаграм функције  $W_L(\omega)$  добија се сабирањем дијаграма поједињих елемената (слика 10.13.б).



Слика 10.13. Конструисање Бодеових дијаграма

## ОСНОВНА КОЛА

Редно  $RC$ -коло побуђено напоном, такво да је напон на отпорнику излазни сигнал, представља најједноставнији (пасивни) филтер првог реда, пропусник високих учестаности (слика 10.14.а). Спада у категорију Батервортових филтера. Истоветну функцију преноса има и  $LR$ -мрежа приказана на слици 10.14.б.

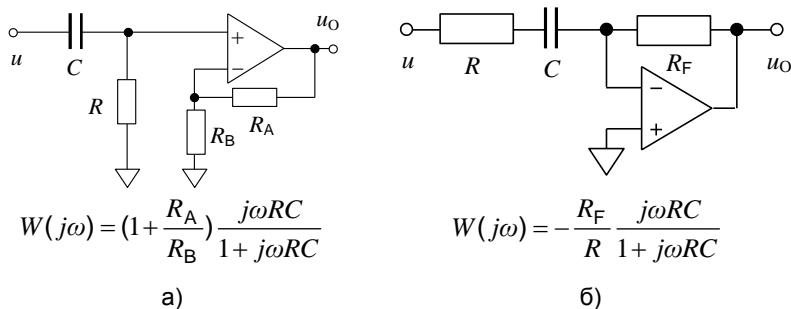


Слика 10.14. Пасивни филтри првог реда

На слици 10.15. приказане су принципске електричне шеме активних филтера пропусника високих учестаности остварених са једним операционим појачавачем, заснованих на  $RC$ -мрежки. У оба случаја гранична учестаност  $f_g$ , при којој слабљење сигнала износи  $\sqrt{2}$ , одређена је изразом:

$$f_g = \frac{1}{2\pi RC}. \quad (10.49)$$

Неинвертујући филтер (слика 10.15.а) представља редну везу пасивног  $RC$ -филтера пропусника високих учестаности и неинвертујућег појачавача, који одваја филтерску ћелију од оптерећења које представља улазна импеданса кола на чији се улаз води филтрирани сигнал.



Слика 10.15. Активни филтри првог реда типа Батерворт

Филтер приказан на слици 10.15.б заснован је на инвертујућој структури кола са операционим појачавачем. Улазну импедансу представља редна  $RC$ -мрежа. Математички модел овог кола чине једначине:

$$W(j\omega) = -\frac{Z_F(j\omega)}{Z_I(j\omega)}, \quad (10.50)$$

$$Z_F(j\omega) = R_F, \quad (10.51)$$

$$Z_I(j\omega) = \frac{1 + j\omega RC}{j\omega C}, \quad (10.52)$$

на основу којих следи:

$$W(j\omega) = -\frac{R_F}{R} \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}, \quad (10.53)$$

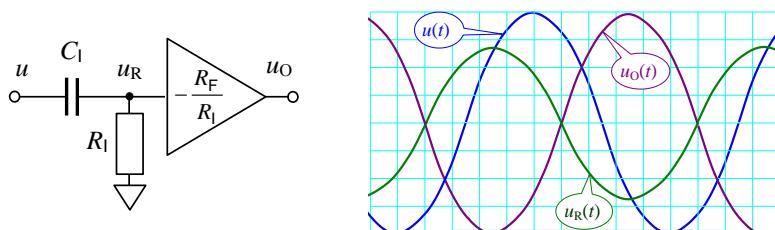
$$W(\omega) = \frac{\omega R_F C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \text{ и} \quad (10.54)$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega RC. \quad (10.55)$$

За веома високе учестаности, реактанса кондензатора представља кратак спој. Коло дејује као "обичан" инвертор.

$$W(\infty) = \frac{R_F}{R}. \quad (10.56)$$

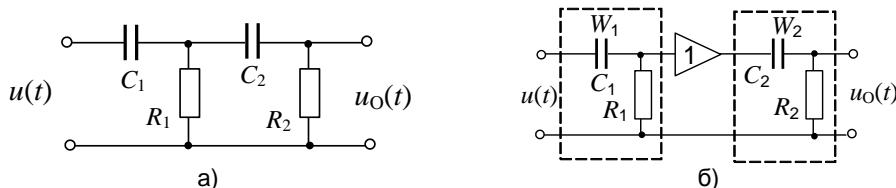
Смањивањем учестаности реактанса кондензатора се повећава, због чега се амплитуда излазног сигнала смањује. На граничној учестаности, померај фазе је  $-135^\circ$ . У функционалном погледу овај филтер ( $R > 0$ ) еквивалентан је редној вези пасивног филтра пропусника високих учестаности и инвертујућег појачавача (слика 10.16). Излазни сигнал заостаје у односу на улазни сигнал. Померај фазе је негативан, у границама од  $-90^\circ$  до  $-180^\circ$ .



Слика 10.16. Еквивалентно коло инвертујућег филтра

### 10.3.2 ФИЛТРИ ВИШЕГ РЕДА

Најједноставнији пасивни филтер другог реда добија се редном везом две  $RC$ -ћелије, од којих, свака за себе, представља филтер првог реда, пропусник високих учестаности (слика 10.17.a).



Слика 10.17. Филтри другог реда, пропусници високих учестаности

Ако су ћелије идентичне ( $R_1 = R_2 = R$ ,  $C_1 = C_2 = C$ ), функција преноса приказана мреже одређена је једначином:

$$W(s) = \frac{(sRC)^2}{(sRC)^2 + 3sRC + 1}. \quad (10.57)$$

Када су филтерске ћелије раздвојене јединичним појачавачем (слика 10.17.б), функција преноса има облик:

$$W(s) = \frac{sR_1C_1}{sR_1C_1 + 1} \cdot \frac{sR_2C_2}{sR_2C_2 + 1}. \quad (10.58)$$

Ако су елементи ћелија једнаки ( $C_1 = C_2 = C$ ,  $R_1 = R_2 = R$ ) важи једначина:

$$W(s) = \left( \frac{sRC}{sRC + 1} \right)^2, \quad (10.59)$$

на основу које следи израз за амплитудску фреквенцијску карактеристику  $W(\omega)$ :

$$W(\omega) = \frac{(\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2}, \quad (10.60)$$

и фазну фреквенцијску карактеристику  $\phi(\omega)$ :

$$\phi(\omega) = \pi - 2\arctg\omega RC. \quad (10.61)$$

Граница учестаност овог филтра једнака је:

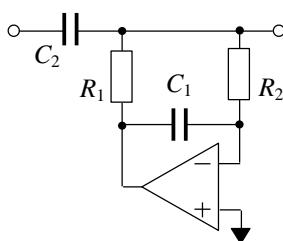
$$\omega_g \equiv \frac{0,64}{RC}, \quad (10.62)$$

а одговарајући померај фазе:

$$\phi(\omega_g) \equiv 65^\circ. \quad (10.63)$$

Погоднији начин да се оствари активни филтер другог реда је примена фреквенцијски селективне повратне спрече, као што је приказано на слици 10.18. Функција преноса овог кола дата је изразом:

$$W(s) = \frac{sR_1C_1sR_2C_2}{sC_1R_1sC_2R_2 + sC_1(R_1 + R_2) + 1}. \quad (10.64)$$



Слика 10.18. Активни филтер другог реда, пропусник високих учестаности

Ако је  $C_1 = C_2 = C$ ,  $R_1 = R_2 = R$  важи израз 10.61. Ако је:

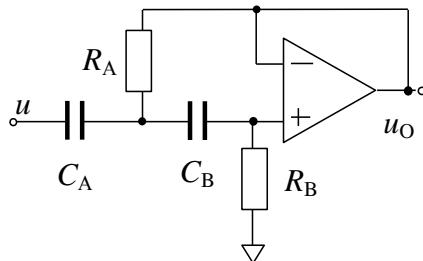
$$R_2 = R = 2R_1, \quad C_1 = C_2 = \sqrt{2} C \quad (10.65)$$

коло представља филтер типа Батерворт чија је гранична учестаност одређена изразом:

$$f_g = \frac{1}{2\pi RC} . \quad (10.66)$$

Недостатак овог кола је утицај који импеданса оптерећења (прикљученог на излаз) има на функцију преноса. Јединични појачавач на слици 10.19. обезбеђује нулту импедансу на излазу. Функција преноса овог кола је дата изразом:

$$W(s) = \frac{s^2 R_A C_A R_B C_B}{s^2 R_A C_A R_B C_B + s R_A (C_A + C_B) + 1} . \quad (10.67)$$



Слика 10.19. VCVS-филтер другог реда

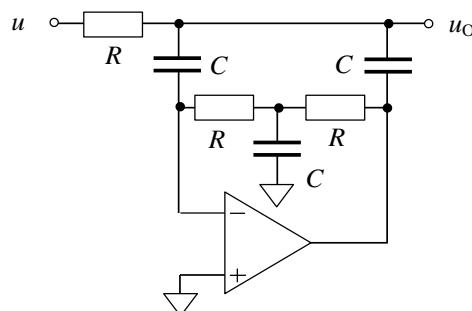
Ако је  $C_A = C_B = C$ ,  $R_A = R_B = R$  важи израз 10.59. Да би посматрано коло представљало филтер типа Батерворт треба да буду испуњени услови:

$$C_A = C_B, \quad R_A = R / 2, \quad R_B = 2R . \quad (10.68)$$

На слици 10.20, приказано је коло чија је фреквенцијска карактеристика одређена изразом:

$$W(j\omega) = \frac{(sRC)^3}{(sRC+1) \cdot [(sRC)^2 + sRC + 1]} , \quad (10.69)$$

које представља филтер трећег реда, пропусник високих учестаности типа Батерворт. Границна учестаност је одређена изразом 10.66. Нагиб асимптотске логаритамске амплитудске карактеристике у непропусном опсегу је +60 dB/dec. Да би се обезбедило да импеданса којом је излаз оптерећен не утиче на функцију преноса кола, додаје се јединични појачавач на излазу.

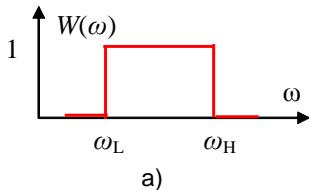


Слика 10.20. Батервортов филтер трећег реда

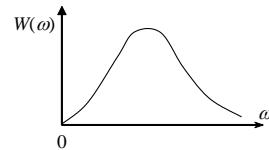
## 10.4 ПРОПУСНИЦИ ОПСЕГА УЧЕСТАНОСТИ

Према дефиницији, филтер пропусник опсега учестаности (*band-pass filter, BPF*) има само један пропусни опсег ограничен са две коначне учестаности које нису нула или бесконачне [5]. Фреквенцијска карактеристика савршеног пропусника учестаности одређена је изразом (слика 10.21.а):

$$W(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{за } \omega_L \leq \omega \leq \omega_H \\ 0 & \text{за } \omega < \omega_L \cup \omega > \omega_H \end{cases} . \quad (10.70)$$



a)



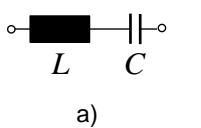
б)

Слика 10.21. Савршени филтер пропусник опсега учестаности

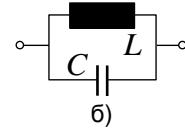
Таква карактеристика физички не може да се оствари. Стварна електрична кола су само мање или више успешна апроксимација функције 10.70 (слика 10.21.б.).

### ОСНОВНА КОЛА

Електричне мреже чија фреквенцијска карактеристика има облик приказан на слици 10.21.б може да се оствари применом редне или паралелне везе калема и кондензатора (слика 10.22). Наиме, такав спој делује као "пропусник" односно "непропусник" сигнала чија је учестаност унутар одређеног опсега.



а)



б)

Слика 10.22. Редна и паралелна *LC*-мрежа

Импеданса редне везе савршеног калема  $L$  и савршеног кондензатора  $C$  (слика 10.22.а) одређена је једначином:

$$Z_{L+C}(j\omega) = Z_L(j\omega) + Z_C(j\omega) = \frac{1 - \omega^2 LC}{j\omega C}. \quad (10.71)$$

На веома ниским и веома високим учестаностима овај спој, посматран као динамички елемент другог реда, представља прекид:

$$Z_{L+C}(0) = \infty, \text{ и } Z_{L+C}(\infty) = \infty; \quad (10.72)$$

док на учестаности  $\omega_0$ :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad (10.73)$$

представља кратак спој:

$$Z_{L+C}(\omega_0) = 0. \quad (10.74)$$

Импеданса паралелне  $LC$ -мреже (слика 10.22.б) одређена је једначином:

$$Z_{L\parallel C}(j\omega) = Z_L(j\omega) \parallel Z_C(j\omega) = \frac{j\omega L \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}. \quad (10.75)$$

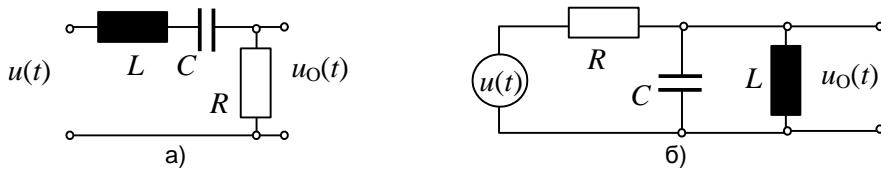
На веома ниским и веома високим учестаностима импеданса  $Z_{L\parallel C}$  представља кратак спој:

$$Z_{L\parallel C}(0) = 0, \text{ и } Z_{L\parallel C}(\infty) = 0; \quad (10.76)$$

док на учестаности  $\omega_0$  (10.73) представља прекид:

$$Z_{L\parallel C}(\omega_0) = \infty. \quad (10.77)$$

На основу претходног разматрања следи да редна  $RLC$ -мрежа, побуђена из извора напона (слика 10.23.а), делује као филтер пропусник опсега учестаности.



Слика 10.23. Пасивни пропусници опсега учестаности

Функција преноса ове мреже једнака је:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{R}{Z_{L+C}(s) + R} = \frac{s RC}{s^2 LC + s RC + 1}. \quad (10.78)$$

Одговарајућа фреквенцијска карактеристика има облик:

$$W(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}, \quad (10.79)$$

за који важи:

$$W(0) = 0, \quad W(\omega_0) = 1 \text{ и } W(\infty) = 0, \quad (10.80)$$

где је  $\omega_0$  централна учестаност пропусног опсега, одређена формулом 10.73.

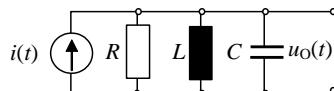
Мрежа приказана на слици 10.23.б има истоветан облик функције преноса као и редна  $RLC$ -мрежа:

$$W(s) = \frac{Z_{L\parallel C}(s)}{Z_{L\parallel C}(s) + R} = \frac{s \frac{L}{R}}{s^2 LC + s \frac{L}{R} + 1}. \quad (10.81)$$

и истоветан израз за централну учестаност пропусног опсега.

Паралелна  $RLC$ -мрежа, побуђена из извора струје, такође делује као пропусник опсега учестаности. Ако напон  $u_0(t)$  представља излазну величину, функција преноса одређена је изразом:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{I(s)} = Z_{R\parallel L\parallel C}(s) = \frac{sL}{s^2LC + s\frac{L}{R} + 1}.$$



Карактеристика која одговара пропуснику опсега учестаности може да се добије редном везом пропусника ниских учестаности и пропусника високих учестаности (слика 10.24).



Слика 10.24. Редна веза филтерских ћелија

Функцију преноса таквог система, сачињеног од одговарајућих елемената првог реда, представља једначина:

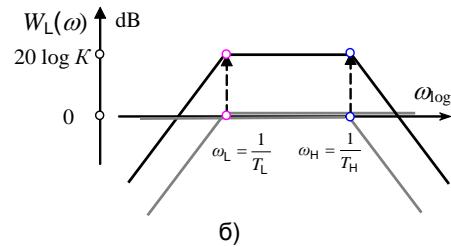
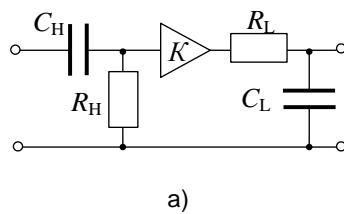
$$W(s) = k_L \frac{1}{sT_L + 1} \cdot k_H \frac{sT_H}{sT_H + 1} = k \frac{sT_H}{s^2T_H T_L + s(T_H + T) + 1}, \quad (10.82)$$

у којој  $k_L$  и  $k_H$  представљају сачиниоце преноса, а  $T_L$  и  $T_H$  временске константе које одговарају учестаностима  $\omega_L$  и  $\omega_H$  респективно. Функцији преноса 10.82 одговара фреквенцијска карактеристика:

$$W(j\omega) = K \cdot \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_L}} \cdot \frac{j\frac{\omega}{\omega_H}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_H}}. \quad (10.83)$$

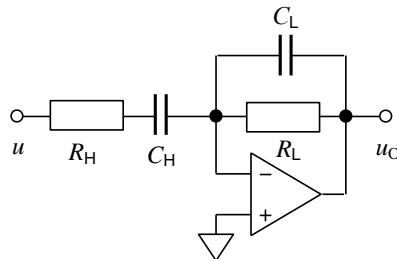
На слици 10.25 приказани су еквивалентно коло и логаритамска амплитудска фреквенцијска карактеристика филтра образованог помоћу пасивних филтерских  $RC$ -ћелија раздвојених неинвертујућим појачавачем чије је појачање једнако  $K$ . За ово коло важи:

$$\omega_H = \frac{1}{R_H C_H}, \quad \omega_L = \frac{1}{R_L C_L}. \quad (10.84)$$



Слика 10.25. Логаритамска амплитудска фреквенцијска карактеристика пропусника опсега учестаности

Коло приказано на слици 10.26 обезбеђује малу (нулту) излазну отпорност тако да функција преноса не зависи од импедансе оптерећења. Филтерске ћелије су раздвојене првидном нулом, тако да не утичу једна на другу.



Слика 10.26. Инвертујући пропусник опсега учестаности

Фреквенцијска карактеристика овог кола одређена је изразом:

$$W(j\omega) = -\frac{R_L}{R_H} \frac{j\omega R_H C_H}{1 + j\omega R_H C_H} \frac{1}{1 + j\omega R_L C_L}. \quad (10.85)$$

## 10.5 НЕПРОПУСНИЦИ ОПСЕГА УЧЕСТАНОСТИ

Према дефиницији, филтер непропусник опсега учестаности (*band-stop filter, BSF*) има само један непропусни опсег ограничен са две коначне учестаности које нису нула или бесконачне [6]. Фреквенцијска карактеристика савршеног непропусника учестаности одређена је изразом (слика 10.27.а):

$$W(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{за } \omega_L \leq \omega \leq \omega_H \\ 1 & \text{за } \omega < \omega_L \cup \omega > \omega_H \end{cases}. \quad (10.86)$$

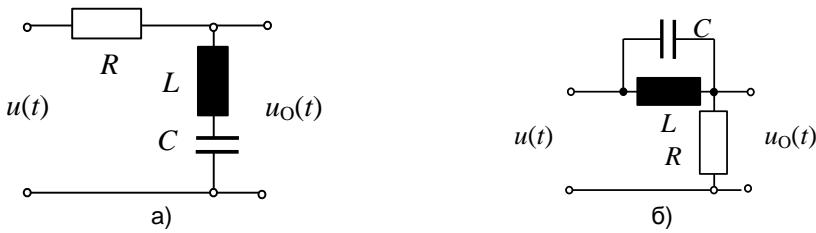
Стварна карактеристика електричних кола, која остварују улогу непропусника учестаности има облик приказан на слици 10.27.б.



Слика 10.27. Савршени филтер пропусник опсега учестаности

## ОСНОВНА КОЛА

Пасивна електрична мрежа која делује као непропусник опсега учестаности може да се добије из мреже која представља пропусник опсега учестаности заменом места отпорника и *LC*-мреже (слика 10.28).



Слика 10.28. Пасивни пропусници опсега учестаности

Функција преноса  $RLC$ -мреже са слике 10.28.a једнака је:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{Z_{L+C}(s)}{Z_{L+C}(s) + R} = \frac{s^2 LC + 1}{s^2 LC + s RC + 1}. \quad (10.87)$$

Одговарајућа фреквенцијска карактеристика има облик:

$$W(j\omega) = \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}, \quad (10.88)$$

за који важи:

$$W(0) = 1, \quad W(\omega_0) = 0 \text{ и } W(\infty) = 1, \quad (10.89)$$

где је  $\omega_0$  централна учестаност непропусног опсега, одређена формулом:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (10.90)$$

Функција преноса мреже са слике 10.28.б једнака је:

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{R}{Z_{L||C}(s) + R} = \frac{s^2 LC + 1}{s^2 LC + s \frac{L}{R} + 1}. \quad (10.91)$$

На основу одговарајућих парова једначина 10.78 и 10.87, односно 10.81 и 10.91, закључује се да за функцију преноса пропусника,  $W_{BP}(s)$ , и функцију преноса непропусника,  $W_{BS}(s)$ , важи:

$$W_{BP}(s) + W_{BS}(s) = 1. \quad (10.92)$$

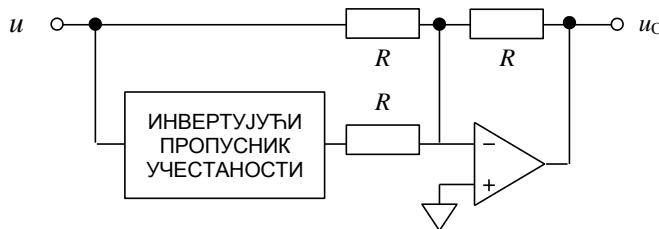
У теорији електричних кола, функција преноса пропусника и непропусника учестаности се приказују у облику [7], [8]:

$$W_{BP}(s) = \frac{\alpha \omega_0 s}{s^2 + \alpha \omega_0 s + \omega_0^2}, \quad (10.93)$$

и

$$W_{BS}(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \alpha \omega_0 s + \omega_0^2}. \quad (10.94)$$

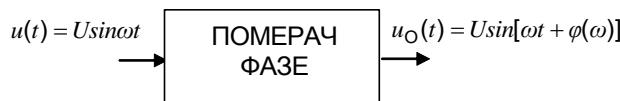
На слици 10.29 приказан је активни филтер непропусник опсега учестаности, заснован на примени формуле 10.92.



Слика 10.29. Активни непропусник опсега учестаности

## 10.6 КОЛА ЗА ПОМЕРАЊЕ ФАЗЕ

Посебну врсту линеарних елемената типа улаз-излаз представљају фреквенцијски-селективни елементи који не утичу на амплитуду хармонијског сигнала који "пропуштају", али мењају његову фазу, зависно од учестаности, (*phase-shift circuit, phase shifter*). Филтер "све-пропусник" пропушта, без слабљења, хармонијски сигнал било које учестаности, али утиче на временски однос излазног и улазног сигнала [9].



Слика 10.30. Коло за померање фазе

Такво својство има елемент чија фреквенцијска карактеристика може да се представи изразом:

$$W(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T}. \quad (10.95)$$

У том случају, важи:

$$W(\omega) = |W(j\omega)| = 1, \text{ и} \quad (10.96)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = -2 \arctg \omega T. \quad (10.97)$$

Однос амплитуда излазног и улазног сигнала не зависи од учестаности, па се ова врста кола назива и "all-pass" филтер [10]. На учестаности:

$$\omega_0 = \frac{1}{T}, \quad (10.98)$$

излазни сигнал "заостаје" у односу на улазни сигнал за угао од  $90^\circ$  (*phase-lag circuit*):

$$\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ. \quad (10.99)$$

Такво коло представља коло за кашњење (*delay circuit*).

Слична својства има и коло чија је фреквенцијска карактеристика:

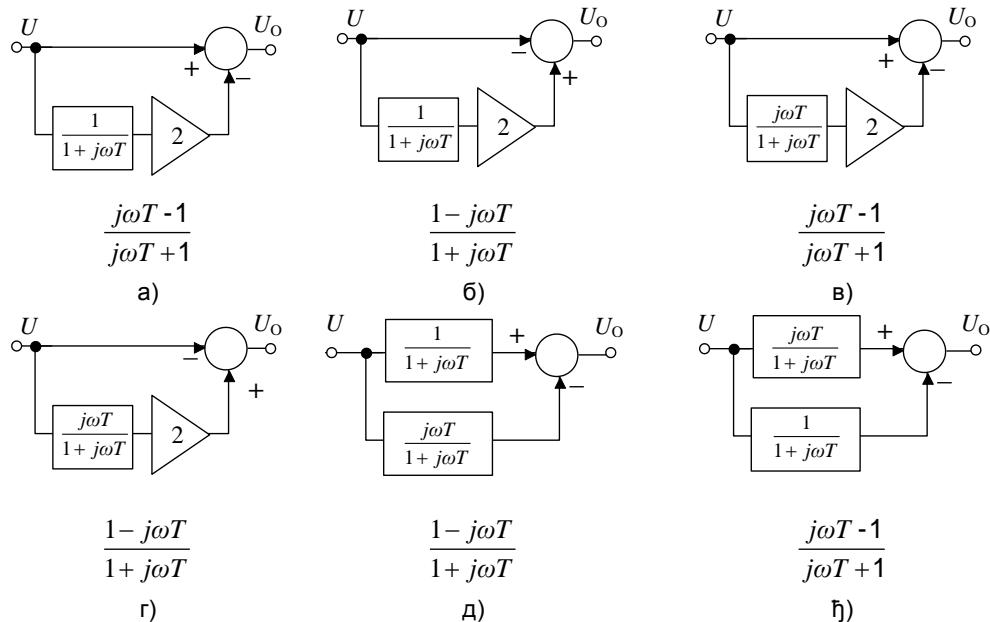
$$W(j\omega) = \frac{j\omega T - 1}{j\omega T + 1} = -\frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T}. \quad (10.100)$$

У том случају важи:

$$\varphi(\omega) = \pi - 2\arctg\omega T. \quad (10.101)$$

На учестаности  $\omega_0$  померај фазе је  $+90^\circ$ .

Кола (системи) за померање фазе могу да се остваре коришћењем само пасивних елемената. У електроници се првенствено примењују активна кола. Основни облици структурних блок дијаграма система првог реда, чија фреквенцијска карактеристика одговара all-pass филтру, приказани су на слици 10.31. Сигнал чија је фаза померена, а амплитуда не зависи од учестаности, добија се одговарајућом комбинацијом улазног сигнала и сигнала који је пропуштен кроз филтер првог реда, који може бити пропусник ниских (слике а и б) или високих учестаности (слике в и г). Сигнал чија је фаза померена, а амплитуда не зависи од учестаности, може се добити и комбинацијом сигнала са излаза филтра пропусника ниских и филтра пропусника високих учестаности (слике 10.31. д и Ј).



Слика 10.31. All-pass филтри првог реда

На слици 10.32. приказано је коло за померање фазе остварено помоћу пасивних елемената. Уобичајено је да се оваква структура назива "мост". Дијагонала LM представља улазни, а дијагонала JK излазни приступ. Математички модел ове мреже, посматране као елемент са два приступа, чине једначине:

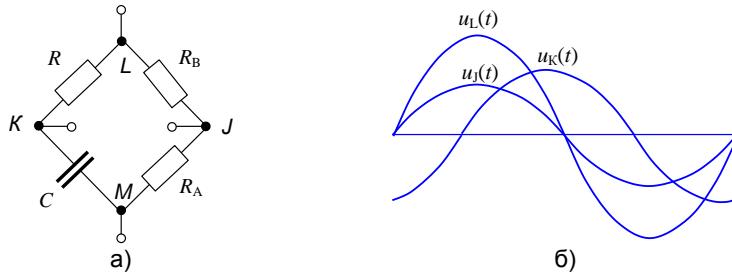
$$U_{JK}(j\omega) = U_{JM}(j\omega) - U_{KM}(j\omega), \quad (10.102)$$

$$U_{KM}(j\omega) = U_{LM}(j\omega) \frac{1}{1 + j\omega RC} , \text{ и} \quad (10.103)$$

$$U_{JM} = U_{LM} \frac{R_A}{R_A + R_B} , \quad (10.104)$$

на основу којих следи:

$$W(j\omega) = \frac{U_{JK}(j\omega)}{U_{LM}(j\omega)} = - \frac{R_A}{R_A + R_B} \frac{1 - j\omega RC \frac{R_B}{R_A}}{1 + j\omega RC} . \quad (10.105)$$



Слика 10.32. Пасивно коло за померање фазе

Ако су отпорности  $R_A$  и  $R_B$  једнаке, амплитуда  $U_{JK}$ , диференцијалног напона  $u_{JK}(t)$ , једнака је половини амплитуде улазног сигнала (напона  $u_{LM}(t)$  прикљученог на "главну" дијагоналу моста,  $LM$ ) независно од његове учестаности. Померај фазе на одређеној учестаности остварује се подешавањем временске константе  $RC$ .

$$\varphi(\omega) = -2 \operatorname{arctg} \omega RC . \quad (10.106)$$

Излазни напон  $u_{JK} = u_J - u_K$  "фазно предњачи" у односу на улазни (побудни) напон  $u_{LM}$  (слика 10.32.б). На учестаности:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} , \quad (10.107)$$

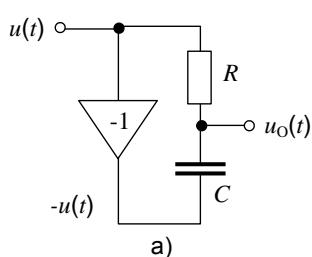
померај фазе је  $90^\circ$ .

У односу на побудни сигнал (напон  $u_{LM}$  доведен на прикључак  $L$  посматране мреже), напон на кондензатору,  $u_K(t)$ , представља излаз филтера првог реда, пропусника ниских учестаности. На учестаности  $f_0$  амплитуда овог напона је  $\sqrt{2}$  пута мања од амплитуде улазног напона.

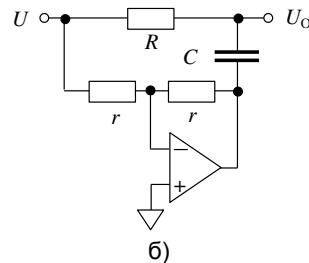
### 10.6.1 КОЛО ЗА ПОМЕРАЊЕ ФАЗЕ СА ИНВЕРТОРОМ

Пасивна  $RC$ -мрежа, образована редном везом отпорника и кондензатора, може да се примени за померање фазе хармонијског сигнала, ако се на један њен крај доведе улазни напон,  $u(t)$ , а на други напон  $-u(t)$  (слика 10.33.а). Амплитуда напона  $u_O(t)$ , посматраног у тачки спајања кондензатора и отпорника не зависи од учестаности побуде. За коло са операционим појачавачем, приказано на слици

10.33.б, фаза излазног сигнала је померена уназад (*phase-lag circuit*). Важи формулa 10.106.



a)



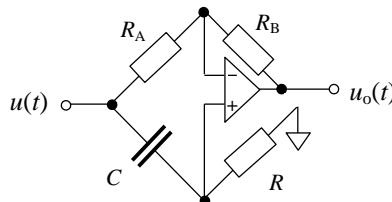
б)

Слика 10.33. Коло за померање фазе са инвертором

Основна предност овог кола у односу на претходно анализирало пасивно коло огледа се у томе да је излазни сигнал дефинисан у односу на нулти референтни потенцијал

## 10.6.2 КОЛО ЗА ПОМЕРАЊЕ ФАЗЕ У НАПРЕД

На слици 10.34 приказано је коло за померање фазе остварено према структурном блок дијаграму са слике 10.31.г. Три отпорника и кондензатор образују мост чија је излазна дијагонала прикњучена на улазе операционог појачавача. На један крај улазне дијагонале прикључен је побудни напон  $u(t)$ . Други крај је раскинут тако да је једна грана моста прикључена на излаз операционог појачавача, а друга на масу. На овај начин образован је “активни мост” који омогућује померање фазе.



Слика 10.34. Коло за померање фазе у напред

У складу са ознакама на слици, за коло са савршеним операционим појачавачем важе једначине:

$$U_J = U_K, \quad I_B = I_A, \quad I_R = I_C,$$

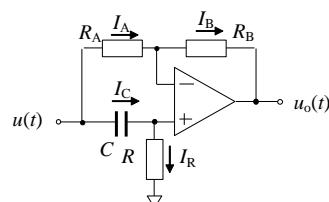
$$U_K(j\omega) = U(j\omega) \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC},$$

$$U_O(j\omega) = U_J(j\omega) - R_B I_B(j\omega) \text{ и}$$

$$I_A(j\omega) = \frac{U(j\omega) - U_J(j\omega)}{R_A}$$

на основу којих следи:

$$W(j\omega) = -\frac{R_B}{R_A} \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC} \frac{R_A}{R_B}.$$



Ако су отпорности  $R_A$  и  $R_B$  једнаке, фреквенцијска карактеристика кола одговара *all-pass* филтру првог реда:

$$W(j\omega) = -\frac{1-j\omega RC}{1+j\omega RC}, \quad (10.108)$$

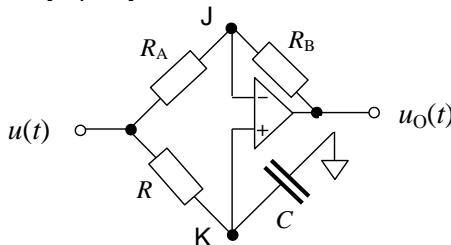
који помера фазу у напред (*phase-lead circuit*):

$$\varphi(\omega) = \pi - 2\arctg\omega T \geq 0. \quad (10.109)$$

У поређењу са колом са слике 10.33, структура приказана на слици 10.34 се одликује значајном предношћу: излазни сигнал се узима са излаза операционог појачавача. Ако је операционо појачавач савршен, излазна отпорност је једнака нули. То значи да импеданса, којом је оптерећен излаз овог кола, не утиче на његову карактеристику преноса.

### 10.6.3 КОЛО ЗА КАШЊЕЊЕ

На слици 10.35 приказано је коло за кашњење (*phase-lag circuit*) остварено према структурном блок дијаграму са слике 10.31.а.



Слика 10.35. Коло за кашњење

У складу са ознакама на слици, за коло са савршеним операционим појачавачем важе једначине:

$$U_J = U_K, \quad I_B = I_A, \quad I_R = I_C,$$

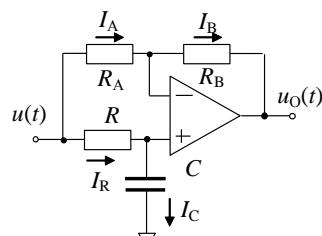
$$U_K(j\omega) = U(j\omega) \frac{1}{1 + j\omega RC},$$

$$U_O(j\omega) = U_J(j\omega) - R_B I_B(j\omega) \text{ и}$$

$$I_A(j\omega) = \frac{U(j\omega) - U_J(j\omega)}{R_A}$$

на основу којих следи:

$$W(j\omega) = \frac{1 - j\omega RC \frac{R_B}{R_A}}{1 + j\omega RC}.$$



Ако су отпорности једнаке, фреквенцијска карактеристика кола одговара *all-pass* филтру првог реда:

$$W(j\omega) = \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC}, \quad (10.110)$$

који помера фазу у назад (*phase-lag circuit*):

$$\varphi(\omega) = -2\arctg\omega RC \leq 0. \quad (10.111)$$

## ЛИТЕРАТУРА

- 
1. D.E.Johnson, *Introduction to Filter Theory*, Prentice-Hall, 1976.
  2. J. Millman and C. Halkias, *Integrated electronix, Analog and Digital Systems*, McGraw Hill, 1972.
  3. G.E.Tobey, J.G.Graeme, L.P. Huelsman, *Operational amplifiers, Design and application*, McGraw-Hill, 1971, p. 295.
  4. Реф. 2, р. 288.
  5. Електрични и магнетски уређаји, Термини и дефиниције, ЈУС. Н.А0.151, 151-01-69.
  6. Реф. 5, 151-01-70.
  7. Реф 3., р.286.
  8. A. Sedra and K. Smith, *Microelectronic Circuits*, Oxford University Press, 2004.
  9. U. Kamšek, Lj. Milić, Razvoj i realizacija aktivnih filtera i korektora, Institut Mihailo Pupin, 1975.
  - 10 Електрични и магнетски уређаји, Термини и дефиниције, ЈУС. Н.А0.151, 151-01-69

“Боље је научити непотребно него ништа.”

*Lucije Anej Seneka*



## 11. НЕЛИНЕАРНА КОЛА СА ОПЕРАЦИОНИМ ПОЈАЧАВАЧИМА

У овом поглављу обрађени су основни елементи којима се нелинеарне операције, као што су усмешавање, ограничавање и поређење, остварују применом операционих појачавача. Они имају разноврсну примену у електроници и, посебно, у мерној техници. Напајање електронских кола једносмерним напоном коришћењем енергије из електроенергетског система наизменичне струје подразумева усмешавање. Мерење величини наизменичних величина се најчешће остварује пресликањем на једносмерни напон [1]. Ограничавачи се примењују у системима аутоматског управљања, у аналогној рачунарској техници, као и за остваривање мерних претварача са изломљеном карактеристиком [2], [3]. Компаратори повезују аналогну и дигиталну технику [4].

Детаљније разматрање широке области, коју покривају нелинеарни електронски елементи, превазилази оквире ове књиге. Специјална електронска кола, као што су аналогни множачи, делитељи и коренатори, *log* и *antilog* појачавачи; обрађују се у посебним књигама, [5]-[6], као и у стручним часописима.

### 11.1 УСМЕРАЧИ

У најопштијем смислу, електронски усмешавач је елемент “осетљив на поларитет” улазне величине. Позитивне односно негативне вредности улазне величине пресликају се на различит начин на вредност излазне величине, тако да излазна величина, када је различита од нуле, може да има само један знак, или позитиван или негативан<sup>1</sup>. Помоћу усмешавача, биполарна улазна величина “генерише” униполарну излазну величину.

У зависности од начина на који се остварује жељена функција, разликују се две врсте усмешавача, једнострани (*half-wave rectifier*) и двострани (*full-wave rectifier*). Усмешавачи прве врсте (једнострани) пресликају само једну “страну” пулсирајућег улазног сигнала, позитивну односно негативну. Усмешавачи друге врсте (двострани) пресликају обе стране, али се “путања”

<sup>1</sup> Математичким језиком речено, излазна променљива је ненегативна или непозитивна величина.

сигнала од улаза до излаза разликује, тако да је излазна величина по интензитету сразмерна улазној величини, али је њен поларитет увек исти.

Неки полуправнички електронски елементи имају усмерачка својства. Карактеристика напон-струја  $PN$ -споја је таква да делује као "автоматски струјни вентил" који дозвољава да струја тече само у једном смеру, од области  $P$ -типа ка области  $N$ -типа. Захваљујући томе, једнострано усмеравање се остварује веома једноставно. Структура која садржи четири  $PN$ -споја, повезана на одговарајући начин, омогућује двострано усмеравање<sup>2</sup>. Заједнички недостатак усмерача, чије је деловање засновано на својству несиметричне проводности неких електричних елемената, представља пад напона који на усмерачком елементу ствара струја која кроз њега протиче. Када је напон величина која се преноси кроз усмерачки елемент, овај пад напона представља грешку.

Примена операционих појачавача за остваривање операције усмеравања омогућује не само постизање веће тачности већ и разноврсније поступке.

### 11.1.1 ЈЕДНОСТРАНИ УСМЕРАЧИ

Ако се елемент типа улаз-излаз, којим се остварује операција усмеравања, посматра као вентил који омогућује "пропуштање" улазне величине само у једном смеру, карактеристика преноса може да има два облика:

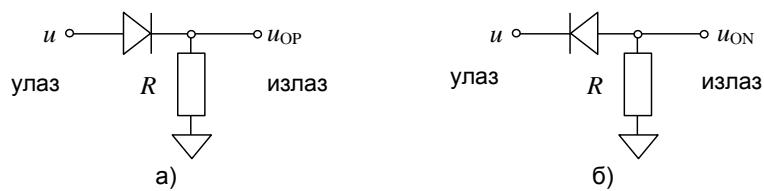
$$y_P(t) = \begin{cases} x(t) & \text{ако је } x(t) \geq 0 \\ 0 & \text{ако је } x(t) < 0 \end{cases}, \quad (11.1)$$

за "позитивни" усмерач, односно:

$$y_N(t) = \begin{cases} 0 & \text{ако је } x(t) \geq 0 \\ x(t) & \text{ако је } x(t) < 0 \end{cases}, \quad (11.2)$$

за "негативни" усмерач (слика 11.1.б).

Начином рада, полуправничка диода представља једнострани "струјни усмерач". Ако се инверзна струја засићења занемари, кроз  $PN$ -спој струја може да тече само у једном смеру, од области  $P$ -типа ка области  $N$ -типа. Ако се и пад напона на директно поларисаном  $PN$ -споју може да занемари, једначина 11.1 представља линеаризовани математички модел кола приказаног на слици 11.1.а, а једначина 11.2 кола са слике 11.1.б.



Слика 11.1. Диодни усмерачи

<sup>2</sup> Пасивни усмерачки елементи описаны су у четвртом поглављу.

Стварна статичка карактеристика “позитивног” диодног усмерача са слике 11.1.а има облик:

$$u_{OP}(t) = \begin{cases} u(t) - u_F(t) & \text{ако је } u(t) \geq 0 \\ -Ri_R(t) & \text{ако је } u(t) < 0 \end{cases} \quad (11.3)$$

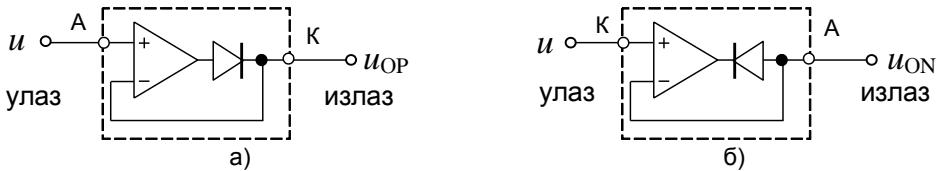
где је  $u_F(t)$  напон на диоди при директној поларизацији<sup>3</sup>, а  $i_R(t)$  струја која тече кроз диоду при инверзној поларизацији. Струја  $i_R$  је веома мала и, у великом броју случајева примене, може да се занемари. Пад напона на диоди, изобличује излазни сигнал и смањује његову амплитуду.

За “негативни” усмерач са слике 11.1.б важи:

$$u_{ON}(t) = \begin{cases} Ri_R(t) & \text{ако је } u(t) > 0 \\ u(t) + u_F(t) & \text{ако је } u(t) \leq 0 \end{cases} \quad (11.4)$$

## САВРШЕНА ДИОДА

Применом операционог појачавача постиже се да карактеристика усмерача не зависи од пада напона на усмерачкој диоди поларисаној у проводном смеру. Коло приказано на слици 11.2.а прослеђује на излаз само позитиван напон. Коло приказано на слици 11.2.б прослеђује на излаз само негативан напон.



Слика 11.2. Савршene диоде

Ако коло са слике 11.2.а обавља улогу усмерача у колу са слике 11.1.а, важи израз 11.1, без обзира на пад напона који неизбежно постоји на диоди када она проводи струју:

$$u_{OP}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{ако је } u(t) \geq 0 \\ 0 & \text{ако је } u(t) < 0 \end{cases} \quad (11.5)$$

Истоветан закључак важи за “негативни” усмерач:

$$u_{ON}(t) = \begin{cases} 0 & \text{ако је } u(t) \geq 0 \\ u(t) & \text{ако је } u(t) < 0 \end{cases} \quad (11.6)$$

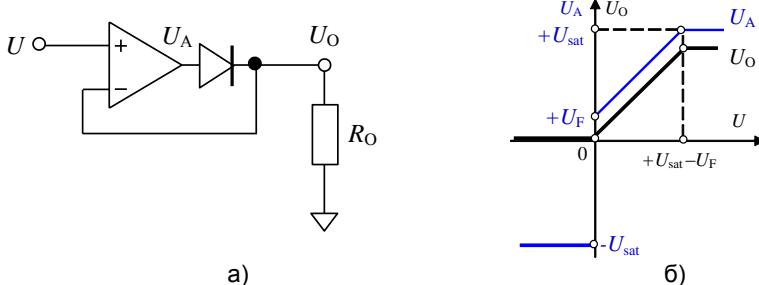
Активни елемент са таквим својствима се обично назива “савршена диода”. У оба случаја, наиме, када је диода поларисана у директном смеру, негативна повратна спрега обезбеђује једнакост излазног и улазног напона, независно од струје коју појачавач даје и напона  $u_F$ . Излазни напон  $u_O$  прати улазни напон  $u$ . Када је диода инверзно поларисана, коло повратне спреге је

<sup>3</sup> Напон и струја кроз PN-спој су повезани експоненцијалном функцијом.

прекинуто. Ако се занемаре инверзна струја диоде и улазне струје операционог појачавача, потенцијал излазног прикључка је дефинисан спољашњим колом<sup>4</sup>.

Усмерач са операционим појачавачем, приказан на слици 11.3.a, "пропушта" напон позитивног поларитета. Ако је улазни напон позитиван, диода је у проводном стању, али је обухваћена колом негативне повратне спрете. Да би обезбедио да напон на инвертујућем улазу буде једнак напону на неинвертујућем улазу, операциони појачавач "подиже" напон  $U_A$  на свом излазу за износ пада напона на диоди:

$$U > 0 \Rightarrow (U_O = U) \wedge (U_A = U + U_F). \quad (11.7)$$



Слика 11.3. Анализа једнострданог усмерача са операционим појачавачем

Када је улазни напон негативан, повратна спрела не може да се успостави (диода је у стању инверзне поларизације). Ако је излазно оптерећење пасивно (не садржи изворе енергије) и не садржи реактивне елементе (у којима је нагомилана електрична енергија), излазни напон је једнак нули, без обзира на вредност улазног напона. Напон на излазу појачавача је у области негативног засићења:

$$U < 0 \Rightarrow (U_O = 0) \wedge (U_A = -U_{sat}). \quad (11.8)$$

Одлазак појачавача у засићење је неповољан, јер се успорава одзив кола након промене знака напона  $U$  од "-" на "+". Повратак из стања засићења у линеарни режим рада појачавачких елемената остварује се са кашњењем. Притом је и промена напона  $U_A$  на излазу појачавача велика, што уноси додатно кашњење, јер је максимална брзина промене напона на његовом излазу (*slew rate*) ограничена. Осим тога, велика разлика потенцијала неинвертујућег и инвертујућег улаза операционог појачавача (када у колу не делује негативна повратна спрела која ту разлику смањује) може да доведе до нерегуларног стања, које се испољава као преоптерећење извора напона који делује на улазу усмерача<sup>5</sup>. У колу приказаном на слици 11.4. поменути недостаци су отклоњени [7]. Диода D<sub>2</sub> спречава да појачавач буде у засићењу када је улазни напон негативан. Позитивном напону на улазу одговара

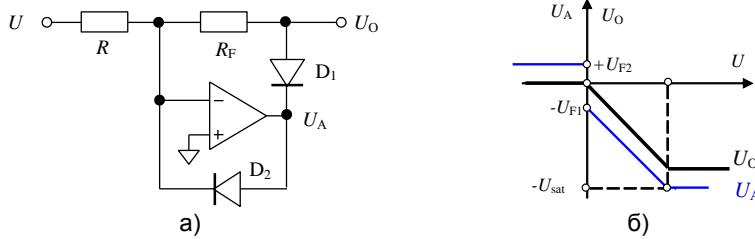
<sup>4</sup> У примерима на слици 11.1 спољашње коло је моделовано отпорником чији је други крај везан за масу.

<sup>5</sup> Улаз и излаз су тада повезани преко кола за заштиту. Диференцијална улазна отпорност није бесконачна.

негативан напон на излазу (једнострани инвертујући усмерач). Коло заправо представља инвертујући "позитивни" усмерач:

$$y_{PN}(t) = \begin{cases} -kx(t) & \text{ако је } x(t) \geq 0 \\ 0 & \text{ако је } x(t) < 0 \end{cases} = -k y_P(t), \quad (11.9)$$

где је  $k$  сачинилац сразмера излаза и улаза, када је излаз различит од нуле.



Слика 11.4. Једнострани инвертујући усмерач

Односом отпорности  $R_F$  и  $R$ , може да се подеси нагиб карактеристике улаз-излаз, у делу који одговара позитивној вредности улазног напона, када се промене улазног напона пресликавају на излаз. Ако је оптерећење кола отпорност чији је други крај везан на масу, а излаз операционог појачавача није у области негативног засићења, важи:

$$U_O = \begin{cases} -\frac{R_F}{R} U; & U \geq 0 \\ 0; & U < 0 \end{cases}. \quad (11.10)$$

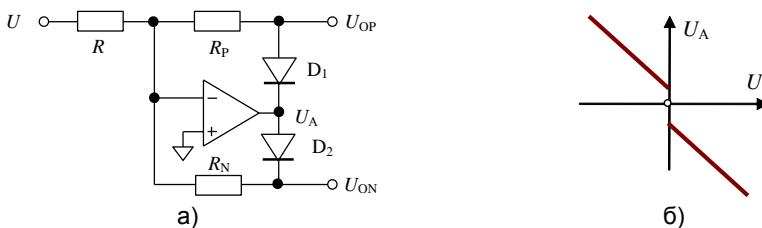
Излаз појачавача никад не доспева у засићење, а скоковита промена напона на његовом излазу, када улазни напон пролази кроз нулу, је само  $2U_F$ .

Коло са два излаза, приказано на слици 11.5.а, омогућује једновремено остваривање функције "позитивног" и "негативног" усмерача. За напоне  $U_{OP}$  и  $U_{ON}$  важи:

$$U_{OP} = \begin{cases} -\frac{R_P}{R} U; & U \geq 0 \\ 0; & U < 0 \end{cases}, \quad (11.11)$$

$$U_{ON} = \begin{cases} 0; & U > 0 \\ -\frac{R_N}{R} U; & U \leq 0 \end{cases}. \quad (11.12)$$

Слика 11.5.б приказује карактеристику  $U_A(U)$ .



Слика 11.5. Двоструки једнострани инвертујући усмерач

У општем случају, једностраним усмеравањем се временски променљива улазна величина  $x(t)$  пресликава на излазну величину  $y(t)$ , чија вредност је сразмерна вредности улазне величине, када она има одговарајући поларитет. Могу да се дефинишу четири облика карактеристике преноса активног једнострданог усмерача:

“позитивни неивертујући”,  
 $y_{PP}(x) = \begin{cases} kx & \text{ако је } x \geq 0 \\ 0 & \text{ако је } x < 0 \end{cases}$  (11.13)

“негативни неивертујући”,  
 $y_{NN}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ако је } x \geq 0 \\ kx & \text{ако је } x < 0 \end{cases}$  (11.14)

“позитивни ивертујући”,  
 $y_{PN}(x) = \begin{cases} -kx & \text{ако је } x \geq 0 \\ 0 & \text{ако је } x < 0 \end{cases}$  и (11.15)

“негативни ивертујући”,  
 $y_{NP}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ако је } x \geq 0 \\ kx & \text{ако је } x < 0 \end{cases}$  (11.16)

где је  $k$  позитивна константа. Одговарајућа активна кола користе са као елементи сложених структура

### 11.1.2 ДВОСТРАНИ УСМЕРАЧИ

Операција усмеравања је уобичајени начин за прецизно пресликање наизменичног на једносмерни напон са циљем одређивања његове величине (амплитуде) [8]. Мерење се своди на мерење средње вредности величине добијене усмеравањем. Једнострano усмеравање има два недостатка. При обради сигнала обрађује се само један његов део, позитиван или негативан. Део информације о сигналу се губи (пресликава се у нулти ниво на излазу), а одређивање средње вредности (применом филтра пропусника ниских учестаности) је отежано. Са тог становишта, повољније је двострано усмеравање које је дефинисано модуло-функцијом:

$$z(x) = \begin{cases} x & \text{ако је } x \geq 0 \\ -x & \text{ако је } x < 0 \end{cases} = |x|. \quad (11.17)$$

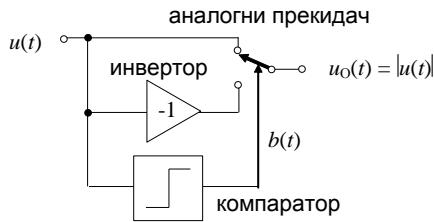
Математички, функција  $z(x)$  може да се представи у облику:

$$z(x) = x \cdot sgn(x), \quad (11.18)$$

у којем  $sgn(x)$  представља функцију знака:

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{ако је } x \geq 0 \\ -1 & \text{ако је } x < 0 \end{cases}. \quad (11.19)$$

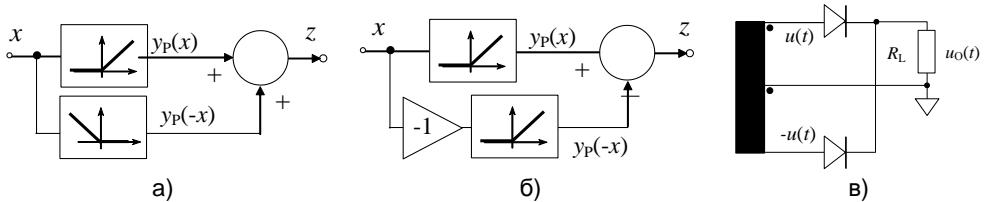
На слици 11.6 приказано је коло чија карактеристика улаз-излаз има облик представљен једначином 11.18. Компаратор остварује функцију знака. Његов излаз  $b$  управља стањем преклопника, тако да је напон  $u_0$  увек позитиван, без обзира на поларитет улазног напона  $u$ .



Слика 11.6. Модуло-коло

Коло за добијање апсолутне вредности улазног напона (*absolute-value circuit*) реализује се на више начина [9]. Ефекат потпуног усмеравања може да се оствари применом једностраних усмерача, на основу идентитета (слика 11.7.а):

$$z(x) = y_P(x) - y_P(-x). \quad (11.20)$$



Слика 11.7. Остваривање операције двостраног усмеравања применом једностраних усмерача

У колу на слици 11.7.б примењени су идентични једнострани усмерачи. Овакав приступ је погодан када постоји и величина  $-x$ , или се она добија на једноставан начин. На слици 11.7.в приказано је коло које се примењује у енергетској електроници, као и при мерењу наизменичних електричних величинा.

Постоји низ различитих могућности за остваривање модуло-кола. Са становишта реализације, погодније је да се операција двостраног усмеравања моделује једначином:

$$z(x) = 2y_P(x) - x. \quad (11.21)$$

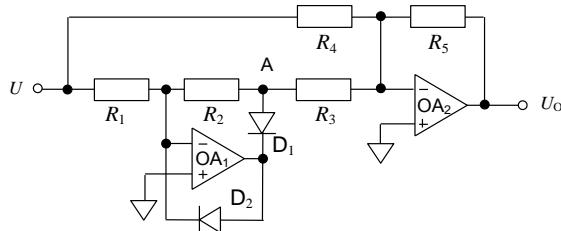
Овој једначини одговара блок-дијаграм приказан на слици 11.8.а. Структура приказана на слици 11.8.б заснована је на моделу:

$$z(x) = -2y_N(x) + x. \quad (11.22)$$



Слика 11.8. Моделовање операције двостраног усмеравања

Прецизна кола за двострано усмеравање обично садрже два операциона појачавача. Систем приказан на слици 11.9 заснован је на формулама 11.21 [10]. Када је улазни напон негативан, диода  $D_2$  води. Инвертујући улази оба појачавача су на нули, па је и напон у тачки A једнак нули. Диода  $D_1$  је инверзно поларисана. Када је улазни напон позитиван, диода  $D_2$  је инверзно поларисана, а диода  $D_1$  води. Напон у тачки A је негативан (појачавач  $A_1$  делује као инвертујући појачавач) и сабира се са улазним сигналом помоћу појачавача  $A_2$ .



Слика 11.9. Модул-коло са операционим појачавачима

Карактеристика преноса дефинисана је изразом:

$$U_O = \begin{cases} \left( -\frac{R_5}{R_4} + \frac{R_5}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \right) U ; & U \geq 0 \\ -\frac{R_5}{R_4} U ; & U < 0 \end{cases}. \quad (11.23)$$

Ако је испуњен услов:

$$R_2 R_4 = 2 R_1 R_3, \quad (11.24)$$

биће:

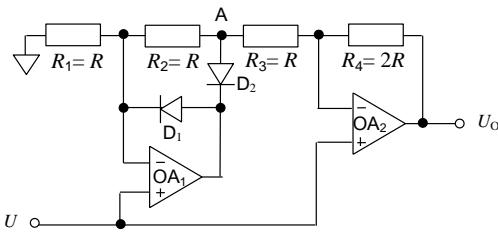
$$U_O = k |U|, \quad (11.25)$$

где је  $k$  сачинилац преноса:

$$k = \frac{R_5}{R_4}. \quad (11.26)$$

Услов 11.24 подразумева да постоје најмање две различите вредности отпорности у овом колу. За  $k = 1$ , на пример, може се изабрати комбинација:  $R_1 = R_2 = R_3 = R$  и  $R_4 = R_5 = 2R$ ; или:  $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = R$  и  $R_3 = R/2$ . Са становишта практичне реализације, погодније је да се користе прецизни отпорници.

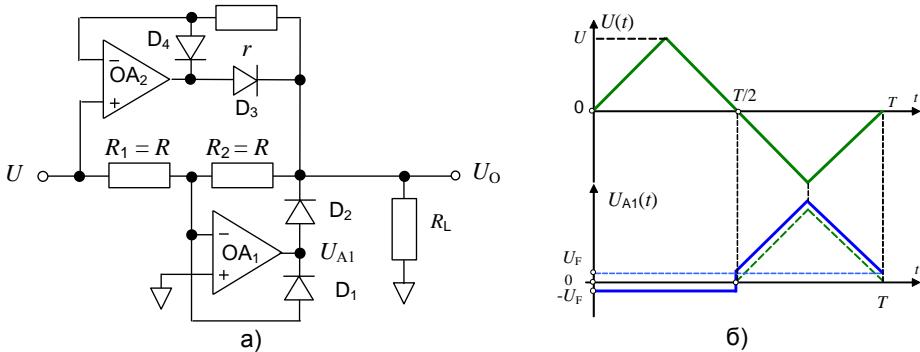
Коло приказано на слици 11.10 засновано је, у основи, на формулама 11.22, а обезбеђује велики улазну отпорност. Када је улазни напон позитиван, повратна спрега у колу појачавача  $A_1$  је затворена преко диода  $D_1$ , чиме се обезбеђује и струја кроз отпорник  $R_1$ . Инвертујући улази оба појачавача су на потенцијалу улаза, па је и напон у тачки A једнак улазном напону  $U$ . Никаква струја не тече кроз отпорнике  $R_2$ ,  $R_3$  и  $R_4$ . Напон на излазу појачавача  $A_2$  једнак је улазном напону.



Слика 11.10. Модуло-коло са великим улазном импедансом

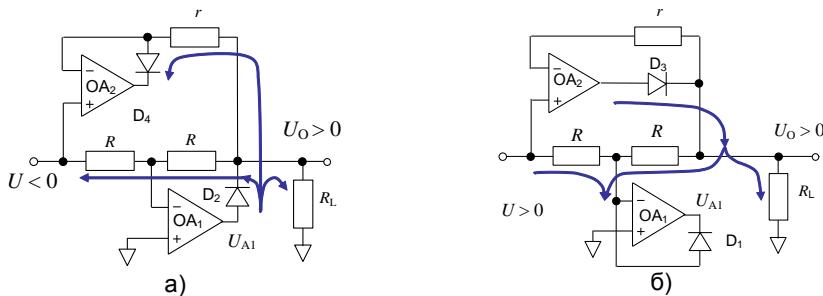
Када је улазни напон  $U$  негативан, повратна спрега у колу појачавача се затвара кроз диоду  $D_2$ . Појачавач  $A_1$  делује као неинвертујући појачавач чије је појачање једнако 2. Напон на излазу појачавача  $A_2$  једнак је  $-U$ .

Коло приказано на слици 11.11.а остварује модуло-функцију тако да карактеристика преноса не зависи од вредности отпорности у колу, већ само од упарености два отпорника,  $R_1$  и  $R_2$ , који, када је улазни напон негативан, дефинишу појачање инвертујућег појачавача ( $OA_1$ ).



Слика 11.11. Прецизно модуло-коло

Када је улазни напон позитиван, излазни напон је дефинисан петљом повратне спреге операционог појачавача  $OA_2$ , који делује као јединични неинвертујући појачавач. Ако је  $R_1 = R_2$  ово коло остварује модуло-функцију. На слици 11.11.б приказан је сигнал на излазу појачавача  $OA_1$  при побуди кола периодичним сигналом симетричног троугаоног таласног облика. На слици 11.12 приказана су стања у колу када је улазни напон позитиван, односно негативан.

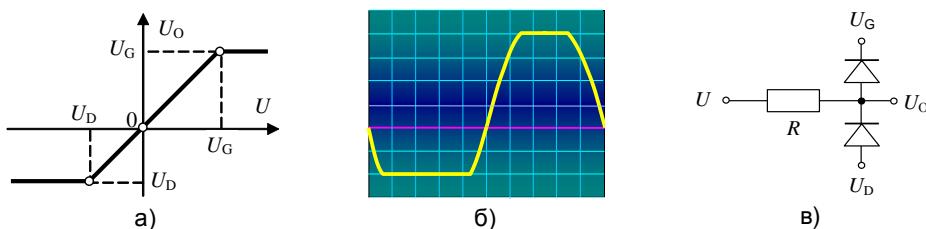


Слика 11.12. Анализа

## 11.2 ОГРАНИЧАВАЧИ

У основном облику, ограничавач (*limiter*) је елемент који “не дозвољава” да вредност сигнала, који прослеђује на свој излаз, буде већа од неке горње граничне вредности  $U_G$ , односно да буде мања од неке доње граничне вредности  $U_D$ . Математички модел таквог елемента (слика 11.13.a) је израз<sup>6</sup>:

$$u_O(t) = \begin{cases} U_G & \text{за } u(t) \geq U_G \\ u(t) & \text{за } U_D < u(t) < U_G ; U_D < U_G . \\ U_D & \text{за } u(t) \leq U_D \end{cases} \quad (11.27)$$



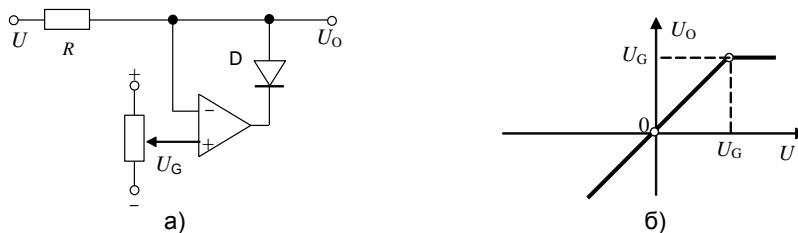
Слика 11.13. Ограничавач напона

На слици 11.13.в приказана је електрична мрежа чија улазно-излазна карактеристика има облик 11.27, уколико се може сматрати да су диоде савршене, а отпорност оптерећења бесконачно велика. У стварним условима, важи:

$$u_O(t) = \begin{cases} U_G + U_{F1} & \text{за } u(t) \geq U_G \\ \frac{R_L}{R + R_L} u(t) & \text{за } U_D < u(t) < U_G , \\ U_D - U_{F2} & \text{за } u(t) \leq U_D \end{cases} \quad (11.28)$$

где је  $U_F$  пад напона на диоди која води, а  $R_L$  отпорност оптерећења прикљученог на излаз кола.

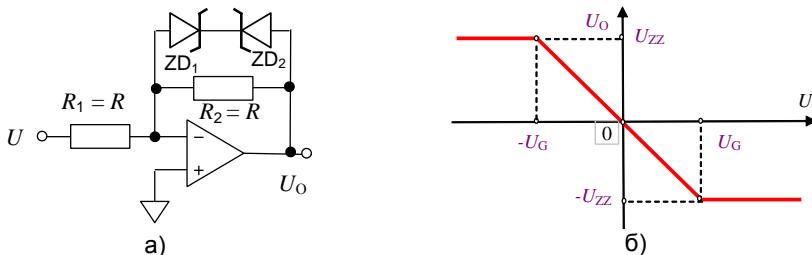
Слика 11.14.а приказује подесиви једнострани ограничавач напона (*voltage clamping circuit*), остварен помоћу савршене диоде [11]. Излазни напон  $U_O$  не може да буде већи од напона  $U_G$ , који може да буде позитиван или негативан, а задаје се помоћу потенциометра. Карактеристика улаз-излаз приказана је на слици 11.14.б.



Слика 11.14. Једнострани ограничавач

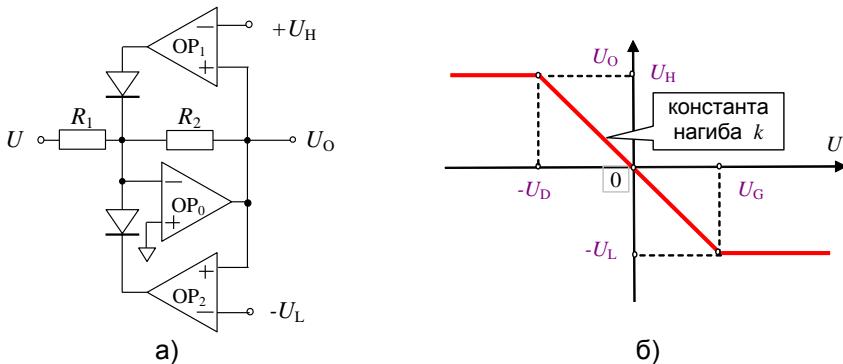
<sup>6</sup> Савршени једнострани усмерач може да се посматра као ограничавач чија је једна гранична вредност једнака нули, а друга бесконачна (позитивна или негативна).

Активни ограничавачи могу да обезбеде малу излазну отпорност. Ограничавање опсега сигнала на излазу кола остварује се, најчешће, уградњом нелинеарних елемената у коло повратне спрече операционог појачавача (слика 11.15.а). Нагиб функције  $U_O(U)$ , у делу карактеристике у којем се промене улазног сигнала пресликавају у сразмерне промене сигнала на излазу, може да се подеси односом отпорности у улазном колу,  $R_1$ , и отпорности у колу повратне спрече операционог појачавача,  $R_2$ . Ако Ценер-диоде имају истоветне карактеристике, доњи и горњи напон "прелома" су симетрични око нуле (слика 11.15.б).



Слика 11.15. Инвертујући појачавач-ограничавач

На слици 11.16.а приказан је прецизни ограничавач код којег горња и доња гранична вредност могу независно да се подешавају.



Слика 11.16. Прецизни ограничавач

Карактеристика улаз-излаз (слика 11.16.б) одређена је изразом:

$$U_O = \begin{cases} -U_L & \text{за } U > U_G \\ kU & \text{за } -U_D < U < U_G, \\ U_H & \text{за } U \leq -U_D \end{cases} \quad (11.29)$$

где је  $k$  константа нагиба карактеристике  $U_O(U)$  у околини координатног почетка:

$$k = -\frac{R_2}{R_1}, \quad (11.30)$$

а  $U_D$  и  $U_G$  представљају доњу и горњу граничну вредност:

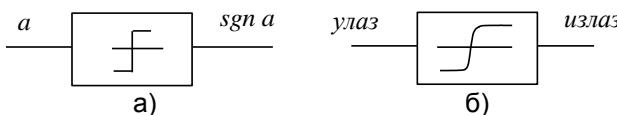
$$U_D = \frac{R_1}{R_2} U_H, \quad (11.31)$$

$$U_G = \frac{R_1}{R_2} U_L. \quad (11.32)$$

## 11.3 КОМПАРАТОРИ

Елемент чија излазна величина може да има само једну од две дискретне вредности (*two-position element*), у зависности од вредности улазне величине, посматране у односу на неку референтну вредност, назива се компаратор. У најопштијем смислу, компаратор је део (мерног) уређаја који омогућује поређење две величине исте врсте<sup>7</sup>.

У најједноставнијем облику, компаратор је детектор знака (*signum*-коло, слика 11.17.а). Са становишта електронике, такав компаратор је појачавач са великим појачањем и израженим ефектом засићења (слика 11.17.б).



Слика 11.17. Компаратор

Примена компаратора је разноврсна. У електроници и мерној техници користе се као уобличавачи при обради сигнала чији је информациони параметар учестаност или период понављања. Наизменични сигнал, произвољног таласног облика пресликава се на бинарни сигнал, непрекидан по времену.

$$b(t) = \begin{cases} H & \text{за } a(t) > 0 \\ L & \text{за } a(t) < 0 \end{cases}, \quad (11.33)$$

где је  $H$  вредност која представља виши ниво бинарног сигнала, а  $L$  вредност која представља његов нижи ниво. Компаратор чија је карактеристика улаз-излаз дефинисана изразом 11.33, назива се неинвертујући компаратор<sup>8</sup>. Аналогно томе, компаратор који на свом излазу даје нижи ниво ( $L$ ) ако је улаз већи од нуле, односно виши ниво ( $H$ ), ако је улаз мањи од нуле, назива се инвертујући компаратор.

Са становишта обраде сигнала, компаратор је мешовити (хибридни, аналогно-дигитални) елемент на чијем улазу делује аналогни сигнал, док излазни сигнал представља дигиталну (бинарну) величину. Заправо, компаратор је елементарно коло помоћу којег се остварује промена облика представљања информације: из аналогног у дигитални облик. Као једнобитни аналогно-дигитални претварач, компаратор представља веома значајан елемент при образовању сложених система за обраду сигнала. За примене у

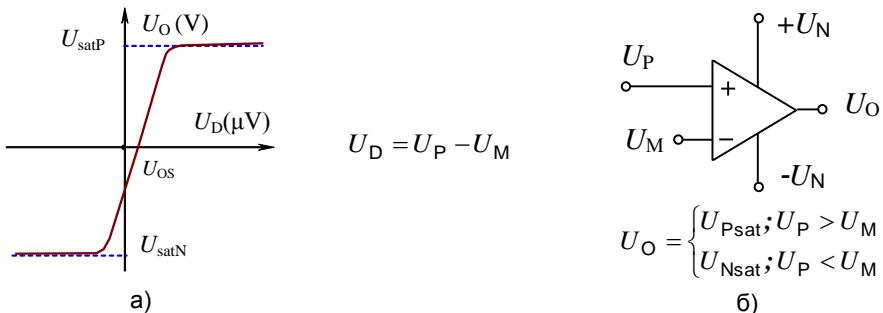
<sup>7</sup> Назив потиче од лат. *comparator*, сравњивач.

<sup>8</sup> Ако је  $L < 0$ , излазни сигнал је позитиван, када је и улазни сигнал позитиван. И обрнуто.

којима се захтева велика брзина, развијена су посебна интегрисана кола, интегрисани диференцијални компаратори, чија је структура оптимизирана да становишта остваривања брзог одзива и прилагођења дигиталним (логичким) колима којима се сигнал са излаза компаратора прослеђује.

### 11.3.1 ОПЕРАЦИОНИ ПОЈАЧАВАЧ КАО КОМПАРАТОР

С обзиром на велико појачање, операциони појачавач без повратне спрече делује као појачавач само за веома мале вредности разлике потенцијала на његовим улазима. У односу на велике сигнале, операциони појачавач без повратне спрече представља компаратор. При напајању симетричним напонима,  $U_N$  и  $-U_N$  (слика 10.18), напон на излазу операционог појачавача је једнак позитивном напону засићења,  $U_{satP} > 0$ , када је неинвертујући приклучак ("+") на вишем потенцијалу од потенцијала инвертујућег приклучка ("−"), односно, једнак је негативном напону засићења,  $U_{satN} < 0$ , када је неинвертујући приклучак на нижем потенцијалу од потенцијала инвертујућег приклучка.



Слика 11.18. Операциони појачавач као диференцијални компаратор

Ако је инвертујући улаз повезан са нулом, операциони појачавач без повратне спрече у односу на сигнал доведен на његов неинвертујући улаз делује као компаратор нуле (*null detector, zero-crossing detector*). Ако се улазни приклучци појачавача међусобно замене, добија се инвертујући компаратор. Брзина одзива ограничена је максималном брзином промене напона на излазу појачавача.

### 11.3.2 КОМПАРАТОРИ СА ХИСТЕРЕЗИСОМ

Посебну врсту компараторских кола представљају компаратори са хистерезисом. Када се вредност улазне аналогне величине  $a(t)$  налази изван опсега чије су границе  $A_D$  и  $A_G$  ( $A_D < A_G$ ), стање на излазу компаратора је једнозначно одређено тренутном вредношћу улазне величине:

$$b(t) = \begin{cases} H \text{ за } a(t) > A_G \\ L \text{ за } a(t) < A_D \end{cases}, \quad (11.34)$$

Када се вредност улазне величине налази унутар опсега  $[A_D, A_G]$ , излазна величина  $b$  задржава вредност која је успостављена приликом последње промене стања:

$$b(t) = \begin{cases} H & \text{за } a(t) \geq A_G \\ b(t_-) & \text{за } A_D < a(t) < A_G, A_D < A_G \\ L & \text{за } a(t) \leq A_D \end{cases} \quad (11.35)$$

Вредности  $A_D$  и  $A_G$  дефинишу ширину хистерезисне петље  $\Delta A$ :

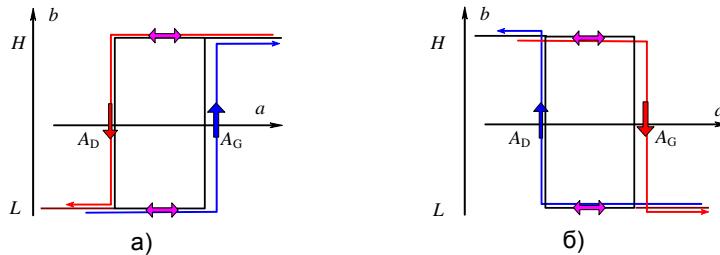
$$\Delta A = A_G - A_D. \quad (11.36)$$

Компаратор са хистерезисом, дакле, има меморијска својства. Као и код обичних компаратора, могућа су два облика компаратора са хистерезисом: неинвертујући (слика 11.19.а) и инвертујући (слика 11.19.б).

$$b = \begin{cases} H & \text{за } a \geq A_G \\ b(t_-) & \text{за } A_D < a < A_G, A_D < A_G \\ L & \text{за } a \leq A_D \end{cases} \quad (11.37)$$

и инвертујући (слика 11.19.б):

$$b = \begin{cases} L & \text{за } a \geq A_G \\ b(t_-) & \text{за } A_D < a < A_G \\ H & \text{за } a \leq A_D \end{cases} \quad (11.38)$$



Слика 11.19. Карактеристика хистерезиса

### 11.3.2.1 НЕИНВЕРТУЈУЋИ КОМПАРАТОР СА ХИСТЕРЕЗИСОМ

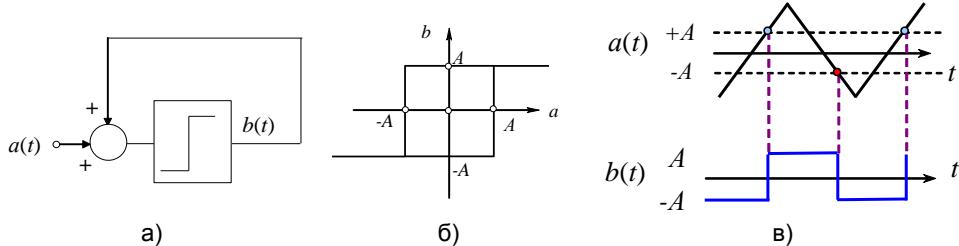
Функционално, компаратор са хистерезисом је компаратор са повратном спрегом која мења вредност референтне величине са којом се улазна величина пореди. У колу приказаном на слици 11.20.а вредности којима су представљена логичка стања на излазу неинвертујућег компаратора нуле одређују ширину хистерезисне петље:

$$A_D = -H, \quad (11.39)$$

$$A_G = -L, \quad (11.40)$$

$$b(t) = \begin{cases} H & \text{за } a \geq A_G \\ b(t_-) & \text{за } A_D < a < A_G \\ L & \text{за } a \leq A_D \end{cases} \quad (11.41)$$

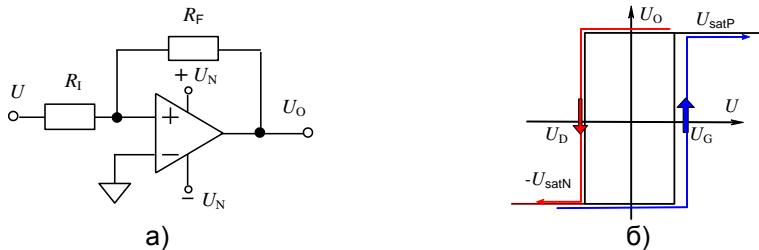
Ако су вредности  $H$  и  $L$  симетричне око нуле ( $-L = H = A$ ) карактеристика улаз-излаз је симетрична око координатног почетка (слика 11.20.б). На слици 11.20.в приказан је одзив система на побуду периодичним сигналом симетричног троугаоног таласног облика.



Слика 11.20. Остваривање хистерезиса увођењем повратне спреге

Захваљујући позитивној повратној спрези у овом систему, прелазак из једног стања у друго је веома брз, јер започети процес има регенеративан карактер.

Неинвертујући компаратор са хистерезисом, остварен помоћу операционог појачавача који се напаја симетричним напонима  $U_N$  и  $-U_N$ , приказан је на слици 11.21.



Слика 11.21. Неинвертујући компаратор са хистерезисом

Карактеристика преноса овог кола одређена је изразом:

$$U_O = \begin{cases} U_{\text{satP}} & \text{за } U \geq U_G \\ U_O(t_-) & \text{за } U_D < U < U_G, \\ -U_{\text{satN}} & \text{за } U \leq U_D \end{cases} \quad (11.42)$$

у којем  $U_D$  и  $U_G$  представљају доњи и горњи праг поређења:

$$U_D = -U_{\text{satP}} \frac{R_I}{R_F} < 0, \quad (11.43)$$

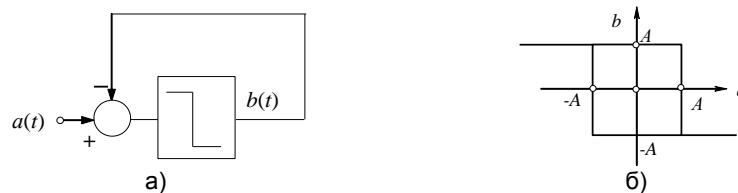
$$U_G = U_{\text{satN}} \frac{R_I}{R_F} > 0. \quad (11.44)$$

Прелазак са низег на виши напонски ниво на излазу остварује се када улазни напон порасте до горње граничне вредности  $U_G$ . Прелазак са вишег на нижи напонски ново на излазу остварује се када улазни напон опадне до доње граничне вредности  $U_D$ . Ако су напони  $U_{\text{satN}}$  и  $U_{\text{satP}}$  једнаки, нивои  $U_D$  и  $U_G$  су симетрични око нуле.

### 11.3.2.2 ИНВЕРТУЈУЋИ КОМПАРАТОР СА ХИСТЕРЕЗИСОМ

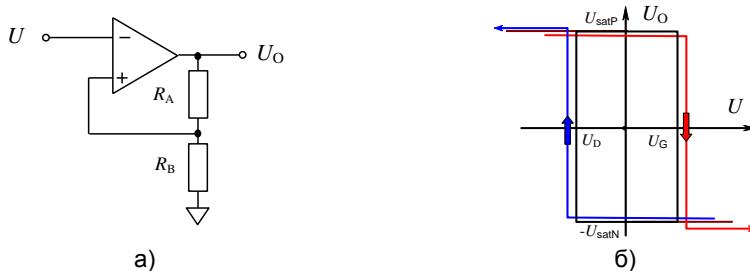
Увођењем позитивне повратне спреге у коло инвертујућег компаратора, на начин приказан на слици 11.22.а уноси се хистерезис у карактеристику улаз-излаз<sup>9</sup>. Ако су вредности бинарног сигнала на излазу компаратора  $-A$  и  $+A$  важи (слика 11.22.б):

$$b(t) = \begin{cases} -A & \text{за } a \geq A \\ b(t_-) & \text{за } -A < a < A \\ A & \text{за } a \leq -A \end{cases} \quad (11.45)$$



Слика 11.22. Остваривање хистерезиса код инвертујућег компаратора

Неинвертујући компаратор са хистерезисом, остварен помоћу операционог појачавача који се напаја симетричним напонима  $U_N$  и  $-U_N$ , приказан је на слици 11.23. Уобичајено је да се инвертујући компаратор са хистерезисом назива Шмитов тригер [12].



Слика 11.23. Инвертујући компаратор са хистерезисом

Карактеристика преноса овог кола одређена је изразом:

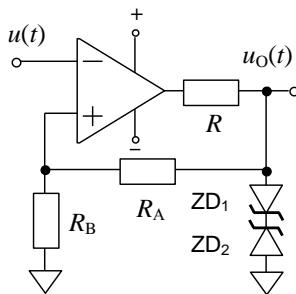
$$U_O = \begin{cases} -U_{\text{satN}} & \text{за } U \geq U_G \\ U_O(t_-) & \text{за } U_D < U < U_G \\ U_{\text{satP}} & \text{за } U \leq U_D \end{cases} \quad (11.46)$$

где је:

$$U_G = U_{\text{satP}} \frac{R_B}{R_A + R_B}, \quad (11.47)$$

$$U_D = -U_{\text{satN}} \frac{R_B}{R_A + R_B}. \quad (11.48)$$

<sup>9</sup> Инвертујући компаратор нуле је инвертујући појачавач великог појачања. Кружно појачање у петљи повратне спреге посматраног система је позитивно.



Слика 11.24. Прецизни инвертујући компаратор са хистерезисом

У колу, приказаном на слици 10.24, применом Ценер-диода постиже се да ширина хистерезисне петље не зависи од напона напајања операционог појачавача. Прагови поређења су одређени напоном пробоја двојне Ценер-диоде,  $U_{ZZ}$ , и односом отпорности у колу позитивне повратне спрете ( $R_A$  и  $R_B$ ). Ако Ценер-диоде имају истоветне карактеристике, нивои  $U_D$  и  $U_G$  су симетрични:

$$U_G = U_{ZZ} \frac{R_B}{R_A + R_B} = -U_D. \quad (11.49)$$

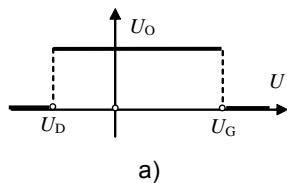
Шмит (Otto Herbert Schmitt, 1913-1998), свестрани инжењер, професор биофизике, биомедицинске технике и електронике на универзитету у Вашингтону, у настојању да развије електронски систем који имитира нервни систем лигње, пројектовао је први електронски компаратор са хистерезисом за потребе истраживања биоелектричних импулса (1934).



Шмит

### 11.3.3 WINDOW-КОМПАРАТОР

Један од основних задатака у системима за надзор у управљање разноврсним процесима је одржавање контролисане величине у задатим границама. Систем је “препуштен сам себи”, уколико је контролисана величина унутар задатих граница. Регулација се уводи само ако је вредност контролисане величине већа од горње граничне вредности, односно ако је мања од доње граничне вредности. Карактеристика елемента који надзире да ли се вредност посматране величине налази унутар задатог опсега приказана је на слици 11.25.



a)

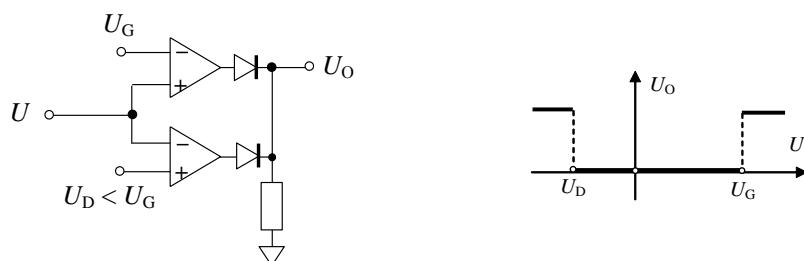
$$b(a) = \begin{cases} L & \text{за } a \geq A_G \\ H & \text{за } A_D < a < A_G \\ L & \text{за } a \leq A_D \end{cases}$$

б)

Слика 11.25. Карактеристика window-компаратора

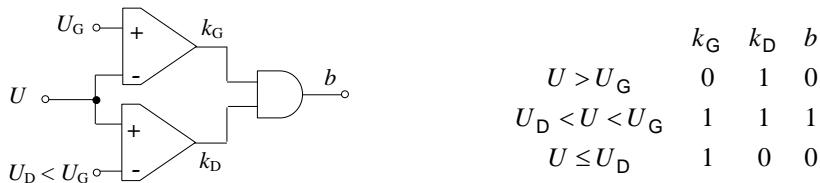
Функција  $b(a)$  назива се “функција прозора” а елемент са таквом карактеристиком “прозорски компаратор” (window-comparator). На слици

11.26 приказан је инвертујући window-компаратор остварен помоћу операционог појачавача и диодног логичког ИЛИ-кола.



Слика 11.26. Window-компаратор са операционим појачавачима

На слици 11.26 приказано је решење у потпуности засновано на интегрисаним колима.



Слика 11.27. Window-компаратор са интегрисаним колима

## ЛИТЕРАТУРА

1. П. Бошњаковић, Б. Хаџибабић, М. Нешић, Н. Толић, Мерни претварач наизменичне електричне струје у једносмерни напон, Конгрес метролога, 2002.
2. R. Tomović, *Uvod u nelinearne sisteme automatskog upravljanja*, Građevinska knjiga, 1964.
3. П. Бошњаковић, Умеће мерења, ВИШЕР, 2011.
4. J Millman, C.Halkias, *Integrated electronics, analog and digital circuits and systems*, McGraw-Hill, 1972.
5. Sheingold D.H., *Nonlinear circuits handbook*, Analog Devices, 1974, 1976, руски превод Справочник по нелинейным схемам, Мир, 1977.
6. V Stojanović, *Analogna elektronika*, Univerzitet Niš, 1994.
7. Smith I.J, *Modern Operational Circuit Design*, John Wiley&Sons, 1971, p.38.
8. Greame J, Tobey G, Huelsman L. *Operational amplifiers, design and applications*, Mc Graw-Hill, 1971.
9. J.G.Graeme, *Designing with Operational Amplifiers, Applications Alternatives*, BB electronics services, 1977, p.126.
10. J.G.Graeme, *Applications of Operational Amplifiers, Third-generation Techniques*, McGraw-Hill, 1973, p 121.
11. Реф. 9, p.42.
12. H.Taub, *Digital Integrated Electronics*, McGraw-Hill, 1977, p.78.

“Објаснити нешто ново  
значи повезати  
са нечим што је већ познато”

*R. Feynman*



## 12. **ОСНОВИ АНАЛИЗЕ ЛИНЕАРНИХ АНАЛОГНИХ КОЛА И СИСТЕМА**

Динамички системи описани су линеарним или нелинеарним једначинама у којима независно променљиву величину представља време. Аналогни системи непрекидни по времену описују се диференцијалним једначинама. Да би се одредило понашање неког система у одређеним условима потребно је решити одговарајући скуп једначина које представљају његов математички модел. Елементи и системи типа улаз-излаз испитују се анализом њиховог одзива на побуду која има облик неке, погодно одабране, карактеристичне функције.

У електротехници посебно је значајна анализа одзива система када улазна величина представља хармонијску функцију времена. Развијен је посебан поступак који омогућује да се, без решавања диференцијалних једначина, одреди одзив линеарног динамичког система на такву побуду. Карактеристика улаз-излаз описује се комплексном величином која је дефинисана као количник математичких величина које представљају “комплексне ликове” улазног и излазног сигнала. Модуло ове величине описује утицај учестаности побуде на амплитуду одзива, а њен аргумент представља померај фазе одзива у односу на побуду. Проучавање динамичких својстава система засновано на оваквом приступу назива се анализа у фреквенцијском домену<sup>1</sup>. Првобитно развијен у теорији синтезе електронских појачавача са повратном спрегом, овај метод је нашао широку примену у општој теорији управљања. Фреквенцијски одзив неког елемента (система) може експериментално да се одреди релативно једноставним поступком, који се своди на посматрање (“снимање”) одзива на побуду хармонијским сигналом, познате учестаности и амплитуде. Мерење амплитуде и фазе излазног сигнала, при различитим учестаностима побуде, омогућује добијање графичких приказа амплитудске и фазне фреквенцијске карактеристике. Анализом ових дијаграма може се приближно одредити аналитички израз који представља карактеристику испитиваног система, односно његов математички модел.

Математичку основу фреквенцијске анализе линеарних система представља Фуријеов тригонометријски ред (једначина 1.19), односно

<sup>1</sup> Употреби су и називи “фреквенцијска анализа” или “хармонијска анализа”.

Фуријеово представљање сигнала [1]. Фуријеова теорема омогућује да се анализа у фреквенцијском домену примени и за налажење одзива на побуду сигналом који представља сложено периодичну функцију времена. Под одређеним условима такав поступак може да се примени и на непериодичне синусоиде. Линеарни елементи и системи се тада описују комплексном величином, која се назива функција преноса, а решавање диференцијалних једначина, у којима време представља независно променљиву, замењује се решавањем алгебарских једначина комплексне независно променљиве  $s$ .

У овом поглављу, методологија анализе електричних кола у временском домену представљена је на примеру једноставног кола, образованог од савршених елемената: отпорника, кондензатора, и извора временски променљивог напона или струје. Методологија анализе кола у фреквенцијском домену обрађена је знатно детаљније, с обзиром на значај који има у аналогној електроници.

Француски математичар и физичар Фурије (*Jean-Baptist Joseph Fourier*, 1768 -1830) је, анализирајући топлотне појаве, закључио да се било која периодична функција може представити редом који се састоји од хармонијских функција ("Аналитичка теорија топлоте", 1822). Знатно пре њега представљање функције тригонометријским редом применио је швајцарски математичар Ојлер, бавећи се интерполяцијом функције чије су вредности познате у низу тачака (1729) и небеском механициком (1774), али је Фурије извршио уопштавање којим је отворено ново поглавље у математици, изузетно значајно за развој телекомуникација и аутоматике. Његов ученик Дирихле (*Gustav Dirichlet*) допунио је ову теорему условима које треба функција да испуњава да би Фуријеова теорема важила.



Фурије

## 12.1. АНАЛИЗА У ВРЕМЕНСКОМ ДОМЕНУ

Анализа електричних система са концентрисаним параметрима своди се на проблем решавања одговарајућег система диференцијалних једначина са константним коефицијентима, у којима време представља независно променљиву. Математички модел линеарних система са једним улазом и једним излазом може да се сведе на једначину облика:

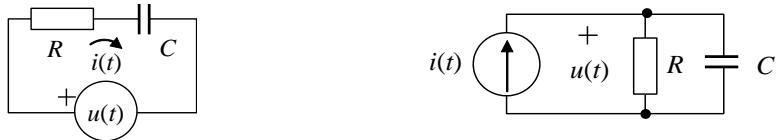
$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \quad (12.1)$$

у којој  $x$  представља улазну, а  $y$  излазну величину. Коефицијенти  $a_i$  и  $b_i$  су одређени параметрима система и не зависе од побуде, а  $n$  представља ред система.

Са теоријске тачке гледишта посебно су значајни одзив на одскочну и импулсну побуду. Под називом одскочни одзив (*step response*) подразумева се одзив кола на побуду која представља одскочну функцију (*step*). То је функција која је била једнака нули пре почетка посматрања, да би се у тренутку  $t = 0$  променила за неки коначан прираштај, а потом задржала нову вредност  $X$  током читавог интервала посматрања:

$$x(t) = Xh(t), \quad h(t) = \begin{cases} 1 & \text{за } t \geq 0 \\ 0 & \text{за } t < 0 \end{cases}; \quad X = \text{const}. \quad (12.2)$$

Суштина методологије анализе у временском домену може да се сагледа на примеру једноставног кола које се састоји од само три савршена електрична елемента: отпорника, чија је отпорност  $R$ , кондензатора, чија је капацитивност  $C$ , и извора електричног сигнала. Анализирају се две структуре: редно  $RC$ -коло побуђено напоном и паралелно  $RC$ -коло побуђено струјом (слика 12.1).



Слика 12.1. Редно и паралелно  $RC$ -коло

### 12.1.1. РЕДНО $RC$ -КОЛО

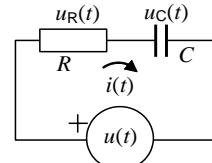
Коло образовано редном везом савршеног отпорника, чија је отпорност  $R$ , савршеног кондензатора, чија је капацитивност  $C$ , и савршеног извора временски променљивог напона,  $u(t)$ , представља линеаран систем првог реда који се описује једначинама (слика 12.2):

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt}, \quad (12.3)$$

$$u_R(t) = Ri(t) \text{ и} \quad (12.4)$$

$$u(t) = u_R(t) + u_C(t), \quad (12.5)$$

у којима  $i(t)$  представља струју у колу, а  $u_R(t)$  и  $u_C(t)$  су напони између крајева отпорника и кондензатора, респективно.



Слика 12.2. Редно  $RC$ -коло побуђено напоном

Сређивањем, добија се диференцијална једначина којом је одређена струја  $i(t)$  у зависности од напона  $u(t)$ :

$$RC \frac{di}{dt} + i(t) = C \frac{du}{dt}. \quad (12.6)$$

Ако се напон  $u(t)$  посматра као улазни, а напон на крајевима кондензатора као излазни сигнал, величина  $u_C(t)$  представља решење линеарне диференцијалне једначине првог реда:

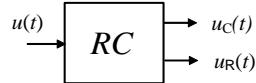
$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C(t) = u(t), \quad (12.7)$$

где је  $\tau = RC$  константа посматраног кола која има димензију времена (временска константа).

Ако се као излазни сигнал посматра напон на крајевима отпорника,  $u_R(t)$ , математички модел има облик:

$$\tau \frac{du_R}{dt} + u_R(t) = \tau \frac{du}{dt}. \quad (12.8)$$

Са становишта анализе, ово коло представља линеаран систем са једним улазом и два излаза (слика 12.3). Решења диференцијалних једначина 12.7. и 12.8. зависе од облика функције  $u(t)$ . Да би се одредио одзив кола на задату побуду, довољно је решити једну диференцијалну једначину. Решење оне друге добија се на основу алгебарске једначине 12.5.



Слика 12.3

*RC*-коло као елемент типа улаз-излаз

### 12.1.1.1. ОДСКОЧНИ ОДЗИВ РЕДНОГ *RC*-КОЛА

Када напон  $u(t)$  може да се представи одскочном функцијом чија је амплитуда једнака  $U$ :

$$u(t) = Uh(t), \quad h(t) = \begin{cases} 1 & \text{за } t \geq 0 \\ 0 & \text{за } t < 0 \end{cases}, \quad (12.9)$$

а почетна вредност напона на кондензатору је једнака нули,  $u_C(0) = 0$ , решење диференцијалне једначине 12.7 је експоненцијална функција времена која описује процес којим се кондензатор, чија је капацитивност  $C$ , пуни из извора сталног напона  $U$  кроз отпорник чија је отпорност  $R$ :

$$u_C(t) = U(1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \quad (12.10)$$

Након истека довољно дугог временског интервала, може да се сматра да је напон на кондензатору једнак улазном напону. За  $t \geq 5\tau$  одступање напона  $u_C(t)$  од коначне вредности  $U$  мање је од 1%.

У почетку, након скоковите промене улазног напона, када је напон на кондензатору много мањи од  $U$ , може да се сматра да струја кроз кондензатор не зависи од вредности излазног напона. Једначина 12.7 се тада своди на једначину:

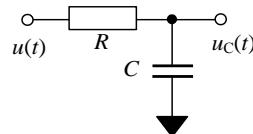
$$RC \frac{du_C}{dt} = u(t),$$

на основу које следи:

$$u_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t u(t) dt, \quad u_C(0) = 0. \quad (12.11)$$

Другим речима, *RC*-коло, код којег напон на кондензатору представља излазну величину, омогућује (приближно) остваривање операције интеграције напона (слика 12.4).

На основу једначина 12.5 и 12.10 добија се израз за функцију која приказује напон на отпорнику  $u_R(t)$  након скоковите промене улазног напона  $u(t)$ :

Слика 12.4. *RC*-интегратор

$$u_R(t) = u(t) - u_C(t) = U e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (12.12)$$

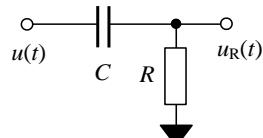
Ако је испуњен услов:

$$RC \frac{du_R}{dt} \ll u_R(t),$$

једначина 12.8 се своди на једначину:

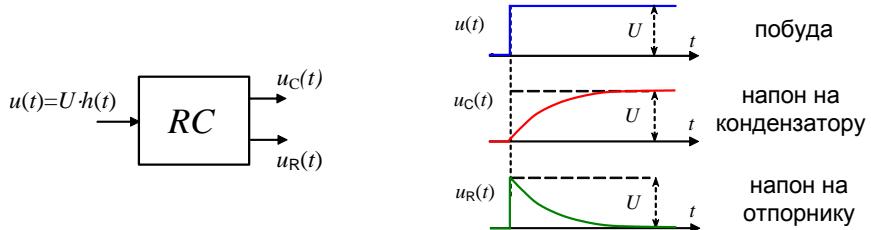
$$u_R(t) = RC \frac{du}{dt}. \quad (12.13)$$

То значи да посматрано коло може да се примени као пасивни (приближни) диференцијатор (слика 12.5).



Слика 12.5. *RC*-диференцијатор

Графички приказ одзива на одскочну побуду, када је почетни напон на кондензатору био једнак нули, приказан је на слици 12.6.



Слика 12.6. Одзив *RC*-кола на одскочну побуду

Ако је у почетном тренутку ( $t = 0$ ) напон на кондензатору био једнак  $U_{C0}$ , важи:

$$u_C(t) = U_{C0} + (U - U_{C0})(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = U_{C0} + \Delta U_C(1 - e^{-\frac{t}{RC}}), \quad (12.14)$$

где је  $\Delta U_C$  опсег промене напона на кондензатору, од почетне до коначне вредности.

### 12.1.1.2. ОДЗИВ РЕДНОГ *RC*-КОЛА НА ПОБУДУ ПРОСТОПЕРИОДИЧНИМ НАПОНОМ

Ако на улазу *RC*-кола делује напон који представља простопериодичну величину:

$$u(t) = U \sin \omega t; -\infty < t < \infty, \quad (12.15)$$

напони  $u_R(t)$  и  $u_C(t)$  су такође хармонијске функције исте учестаности<sup>2</sup>:

$$u_C(t) = U_C \sin(\omega t + \varphi_C), \quad (12.16)$$

<sup>2</sup> Одзив линеарног система на побуду хармонијским сигналом може да буде само хармонијски сигнал.

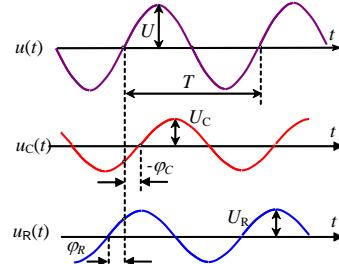
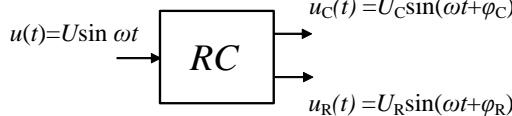
$$u_R(t) = U_R \sin(\omega t + \varphi_R), \quad (12.17)$$

Као што слика 12.7 показује, напон  $u_C(t)$  фазно “заостаје” (phase lag) за напоном  $u(t)$ , док напон  $u_R(t)$  фазно “предњачи” (phase lead) у односу на побуду. Разлика фаза излазног и улазног напона зависи од вредности  $\omega$ . За напон на кондензатору она је једнака:

$$\varphi_C = -\arctg \omega RC, \quad (12.18)$$

а за напон на отпорнику:

$$\varphi_R = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega RC. \quad (12.19)$$



Слика 12.7. Одзив RC-кола на синусну побуду

Амплитуда сигнала  $u_C(t)$  мања је од амплитуде улазног сигнала и смањује се сразмерно са повећањем учестаности  $\omega$ :

$$\max u_C(t) = U_C(\omega) = U \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}. \quad (12.20)$$

Амплитуда сигнала  $u_R(t)$  мања је од амплитуде улазног сигнала, којој тежи када учестаност  $\omega$  расте ка бесконачности:

$$\max u_R(t) = U_R(\omega) = U \frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}. \quad (12.21)$$

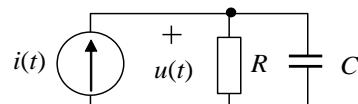
### 12.1.2. ПАРАЛЕЛНО RC-КОЛО

Математички модел кола образованог паралелном везом савршеног отпорника отпорности  $R$ , савршеног кондензатора капацитивности  $C$ , и савршеног извора временски променљиве струје,  $i(t)$ , представља линеаран систем који је описан једначинама:

$$i_C(t) = C \frac{du}{dt}, \quad (12.22)$$

$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} \text{ и} \quad (12.23)$$

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t), \quad (12.24)$$



Слика 12.8. Паралелно RC-коло побуђено струјом

у којима  $u(t)$  представља напон на крајевима кола, а  $i_R(t)$  и  $i_C(t)$  струју кроз отпорник, односно кондензатор (слика 12.8).

Сређивањем, добија се диференцијална једначина којом је одређен напон  $u(t)$  у зависности од струје  $i(t)$ :

$$RC \frac{du}{dt} + u(t) = Ri(t), \quad (12.25)$$

која има истоветан облик као и једначина 12.07 којом је одређен напон на кондензатору у редном  $RC$ -колу. То је и очекивани резултат, јер се применом теореме о еквиваленцији, паралелно  $RC$ -коло побуђено струјом може да трансформише у редно  $RC$ -коло побуђено напоном (слика 12.9).



Слика 12.9. Еквиваленција паралелног и редног  $RC$ -кола

## 12.2. АНАЛИЗА У КОМПЛЕКСНОМ ДОМЕНУ

Одзив динамичког елемента одређен је његовим математичким моделом, почетним стањем и функцијом која описује сигнал који представља побуду. Елемент који је описан линеарном диференцијалном једначином са константним коефицијентима је линеаран. Одзив на побуду која може да се прикаже као суперпозиција (алгебарски збир) више (елементарних) побуда представља суперпозицију одзива на сваку побуду појединачно. Важно својство линеарних елемената је да је одзив на побуду која представља хармонијску функцију такође хармонијска функција исте учестаности. Амплитуда и фаза одзива, у општем случају, зависе од учестаности. То значи да никаква "сложена" побуда линеарног кола са сталним параметрима не може да произведе "нове" учестаности у њему (које не постоје у спектру побудног сигнала).

Успостављање везе између периодичних реалних физичких величина и комплексних величина омогућује да се поједноставе проблеми анализе и синтезе линеарних динамичких елемената и система. Упркос сложеној математичкој основи, поступак анализе у комплексном домену заснива се на већ описаним једноставним правилима. Та се проблематика детаљно обрађује у ћебеницима који се баве теоријом система, уопште, или теоријом електричних кола, посебно, [2], [3], [4]. На овом месту дат је сажет приказ основа анализе у комплексном домену, превасходно са становишта примене у анализи аналогних електронских кола.

### 12.2.1. ПРЕСЛИКАВАЊЕ ИЗ РЕАЛНОГ У КОМПЛЕКСНИ ДОМЕН

Вредности физичких величина којима се описују појаве у електротехници су ("обични") реални бројеви (*real*). Комплексни бројеви (*complex numbers*) нису бројеви у оном елементарном смислу који се

примењује при пребројавању и мерењу. Они представљају посебну класу математичких објекта која је дефинисана одређеним својствима.

Сваком комплексном броју  $c$  може да се стави у коресподенцију јединствен пар  $(a, b)$  реалних бројева  $a$  и  $b$ , и обратно:

$$c \leftrightarrow (a, b).$$

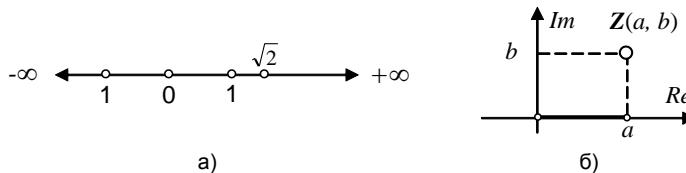
Збир и производ два комплексна броја  $c_1 \leftrightarrow (a_1, b_1)$  и  $c_2 \leftrightarrow (a_2, b_2)$  одређени су изразима:

$$c_1 + c_2 \leftrightarrow (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

$$c_1 c_2 \leftrightarrow (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Реални број  $a$  представљен је у класи комплексних бројева паром  $(a, 0)$ .

Класа реалних бројева може геометријски да се представи непрекидном линијом на којој свака тачка представља јединствен број (слика 12.10.a). Бројевна права (оса) протеже се од  $-\infty$  до  $+\infty$ . Комплексни број може графички да се представи тачком у комплексној равни (слика 12.10.b), којој одговара вектор положаја  $Z$ .



Слика 12.10. Графички приказ реалних и комплексних бројева

Скуп природних бројева садржи бесконачно много чланова. Над њима се могу примењивати четири аритметичке операције: сабирање, одузимање, множење и дељење. На основу правила која важе за ове операције следи да је квадрат реалног броја ненегативан реалан број.

Имагинарни<sup>3</sup> бројеви (*imaginary numbers*) су бројеви чији квадрат представља негативан реалан број. Имагинарном јединицом назива се број чији је квадрат једнак -1. У електротехнички је уобичајено да се имагинарна јединица означава са  $j$ .

$$j^2 = -1. \quad (12.26)$$

$$Z = Re Z + j Im Z, \quad (12.27)$$

модуло

$$Z = |Z| = \sqrt{Re^2 + Im^2}, \quad (12.28)$$

аргумент

$$\theta = arctg \frac{Im}{Re}. \quad (12.29)$$

Веза између комплексних и тригонометријских величина дата је једначином (Ојлерова формула):

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta; j = +\sqrt{-1}. \quad (12.30)$$

<sup>3</sup> Назив, који потиче од лат. *imaginarius* (убображен, замишљен, тобожњи, нестваран), увео је француски математичар Декарт (1637).

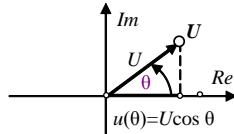
$$Z = Ze^{j\theta}. \quad (12.31)$$

Комплексни представник тригонометријске функције  $u(\theta)$ :

$$u(\theta) = U \cos \theta, \quad (12.32)$$

је комплексна величина  $U(j\theta)$ , чији је модуло једнак амплитуди  $U$ , а аргумент фази  $\theta$  функције  $u(\theta)$ :

$$U(j\theta) = U e^{j\theta}. \quad (12.33)$$



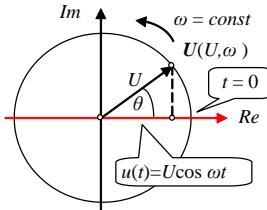
Слика 12.11. Комплексни представник тригонометријске функције

Комплексни представник (лик) простопериодичне функције времена:

$$u(t) = U \cos \omega t,$$

је комплексна функција времена,  $U(j\omega t)$ , чији је реални део посматрани хармонијски сигнал<sup>4</sup> [5]:

$$u(t) = U \cos \omega t = \operatorname{Re}\{U(j\omega)\}. \quad (12.34)$$



Слика 12.12. Комплексни представник хармонијског сигнала

Пресликовање из реалног у комплексни домен:

$$u(t) = U \cos \omega t \Leftrightarrow U(j\omega t) = U e^{j\omega t}, \quad (12.35)$$

омогућује да се решавање диференцијалних једначина у временском домену замени решавањем алгебарских једначина са комплексним променљивим.

Операцији диференцирања у временском домену, одговара операција множења са  $j\omega$  у фреквенцијском домену.

Када је диференцијална једначина, која описује посматрани елемент, позната, поступак пресликовања своди се на једноставну замену:

<sup>4</sup> У анализи електричних кола дефинише се комплексни представник простопериодичне величине, фазор (phasor, Zeiger), као комплексна величина чији је аргумент једнак фази, а модул: или ефективној вредности или амплитуди простопериодичне величине. Комплексни представник простопериодичног напона је комплексни напон, простопериодичне струје комплексна струја итд. (ЈУС. Н.А.0.101-04-49).

$$\frac{d}{dt} \Leftrightarrow j\omega t . \quad (12.36)$$

Интагралење и диференцирање су инверзне операције. Оператору интегралења у временском домену одговара дељење са  $j\omega$  у комплексном домену:

$$\int()dt \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega t} . \quad (12.37)$$

Комплексне и тригонометријске величине повезане су Ојлеровом формулом (*Leidenhart Euler*, 1707-1783):

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta ; j = +\sqrt{-1}$$

Једнакост:

$$e^{j\pi} - 1 = 0 ,$$

која из ње следи, назива се понекад "божја формула" [6]. Она обједињује пет важних симбола из основних области математике: аритметике, алгебре, геометрије и анализе.



Ојлер

## 12.3. АНАЛИЗА У ФРЕКВЕНЦИЈСКОМ ДОМЕНУ

Периодична функција може да се представи Фуријеовим редом који се састоји од константног члана једнаког средњој вредности функције и простопериодичних чланова чије су учестаности умношци учестаности функције. Ови умношци одређујују ред члана [7].

Описани поступак може да се примени и за одређивање одзива на побуду било којом периодичном функцијом која може да се представи Фуријеовим редом. Проширивање на непериодичне функције засновано је на пресликању функције  $x(t)$  у функцију  $X(j\omega)$ , реалне променљиве  $\omega$ , које је одређено интегралом:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\phi(\omega)} dt . \quad (12.38)$$

Ово предсликање се назива Фуријеова трансформација. Применом описаног поступка налази се комплексни лик одзива  $Y(j\omega)$ , на основу којег се, обратним пресликањем, одређује функција  $y(t)$  која представља одзив елемента:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega)e^{j\omega t} dt . \quad (12.39)$$

Предсликање, којим се, на основу комплексног лика, добија "оригинална" функција се назива инверзна Фуријеова трансформација. Потребан услов да Фуријеова трансформација може да се примени је да

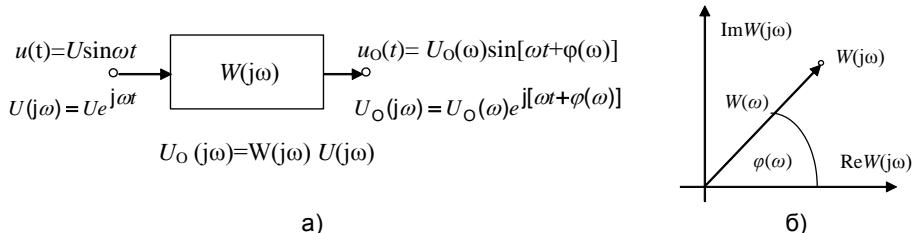
интеграл апсолутне вредности посматране функције  $x(t)$ , дуж целе осе  $t$ , има коначну вредност<sup>5</sup>:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (12.40)$$

### 12.3.1. ФРЕКВЕНЦИЈСКА КАРАКТЕРИСТИКА

Каррактеристика улаз-излаз линеарног динамичког елемента (кола, система) описује се фреквенцијском карактеристиком (*frequency response*),  $W(j\omega)$ , комплексном величином која представља количник комплексних ликова одзива и побуде која је тај одзив изазвала (слика 12.12.a) [8]:

$$W(j\omega) = \frac{U_O(j\omega)}{U(j\omega)} = W(\omega)e^{-j\varphi(\omega)}. \quad (12.41)$$



Слика 12.13. Фреквенцијска карактеристика линеарног система

Геометријски приказ фреквенцијске карактеристике у комплексној равни дат је на слици 12.13.б.

$$W(j\omega) = Re(\omega) + j Im(\omega). \quad (12.42)$$

Фреквенцијска карактеристика је апстрактни појам који обједињује приказ деловања линеарног система на сигнал који обрађује. Физичко значење имају само модуо и аргумент функције  $W(j\omega)$ .

$$W(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{Re^2 + Im^2}, \quad (12.43)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctg \frac{Im(\omega)}{Re(\omega)}. \quad (12.44)$$

Модуо фреквенцијске карактеристике,  $W(j\omega)$ , је реална величина која је одређена количником амплитуде одзива и побуде:

$$W(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{U_O(\omega)}{U}. \quad (12.45)$$

Величина  $W(\omega)$  показује како систем утиче на амплитуду сигнала на његовом путу од улаза до излаза. Назива се **амплитудска фреквенцијска карактеристика**. Аргумент  $\varphi(\omega)$  фреквенцијске карактеристике  $W(j\omega)$  је **фазна фреквенцијска карактеристика**:

$$(\omega) = \arg W(j\omega) = \arg U_O(j\omega) - \arg U_1(j\omega). \quad (12.46)$$

<sup>5</sup> Каже се да је функција  $x(t)$  "интеграбилна дуж целе осе"  $t$ .

Физички, величина  $\varphi(\omega)$  је **разлика фаза** излазног,  $u_o(t)$ , и улазног сигнала  $u(t)$ . Она показује како систем помера фазу сигнала на његовом путу од улаза до излаза. У општем случају зависи од учестаности улазног сигнала.

Када се фреквенцијска карактеристика сложеног елемента (система) може да представи у облику:

$$W(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega), \quad (12.47)$$

где је:

$$W(j\omega) = W(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (12.48)$$

$$W_1(\omega) = W_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)} \text{ и } W_2(\omega) = W_2(\omega)e^{j\varphi_2(\omega)}, \quad (12.49)$$

тада важе следећи односи:

$$W(\omega) = W_1(\omega) \cdot W_2(\omega), \text{ и} \quad (12.50)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arg W_1(j\omega) + \arg W_2(j\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega). \quad (12.51)$$

Када се фреквенцијска карактеристика може да представи у облику:

$$W(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{W_2(j\omega)}, \quad (12.52)$$

важе следећи односи:

$$W(\omega) = \frac{W_1(\omega)}{W_2(\omega)}, \text{ и} \quad (12.53)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arg W_1(j\omega) - \arg W_2(j\omega) = \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega). \quad (12.54)$$

У општем случају, када се фреквенцијска карактеристика може да представи у облику:

$$W(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)W_2(j\omega)}{W_3(j\omega)}, \quad (12.55)$$

важи:

$$W(\omega) = \frac{W_1(\omega) \cdot W_2(\omega)}{W_3(\omega)}, \text{ и} \quad (12.56)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) - \varphi_3(\omega). \quad (12.57)$$

### 12.3.2. БОДЕОВИ ДИЈАГРАМИ

**Логаритамска амплитудска карактеристика**,  $W_L(\omega)$ , дефинисана је једначином<sup>6</sup>:

$$W_L(\omega) = 20 \log_{10} W(\omega). \quad (12.58)$$

<sup>6</sup> Описивање односа величина помоћу логаритамске скале је опште прихваћено у техници, па се, најчешће, логаритамска амплитудска карактеристика означава истим симболом као и амплитудска карактеристика,  $W(j\omega)$ . Ради прецизности у овом тексту се користи индекс  $L$ .

Вредност  $W_L(\omega)$  се изражава у децибелима (dB). Неке карактеристичне вредности дате су у табели.

Када се фреквенцијска карактеристика може да представи у облику:

$$W(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega), \quad (12.59)$$

за одговарајуће логаритамске фреквенцијске карактеристике важи:

$$W_L(\omega) = W_{L1}(\omega) + W_{L2}(\omega). \quad (12.60)$$

Ако се фреквенцијска карактеристика може да представи у облику:

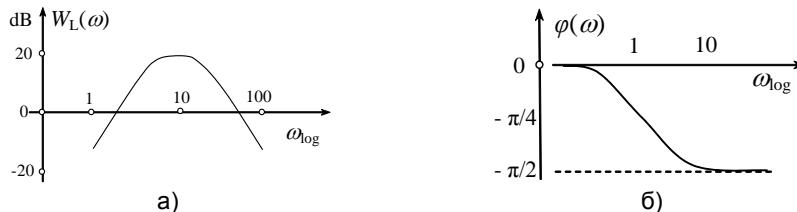
$$W(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{W_2(j\omega)}, \quad (12.61)$$

за одговарајуће логаритамске фреквенцијске карактеристике важи:

$$W_L(\omega) = W_{L1}(\omega) - W_{L2}(\omega). \quad (12.62)$$

Уобичајено је да се логаритамска амплитудска фреквенцијска карактеристика графички приказује на дијаграму са логаритамском скалом за учестаност, као што је приказано на слици 12.14.а. Ознака  $\omega_{log}$  указује да је апсцисна оса са логаритамском размером.

$W(\omega)$	$W_L[\text{dB}]$
0,001	-60
0,01	-40
0,1	-20
1	0
10	20
100	40
1000	60



Слика 12.14. Графички прикази амплитудске и фазне фреквенцијске карактеристике

Фазна фреквенцијска карактеристика се такође приказује са логаритамском скалом за учестаност (слика 12.14.б). При анализи електронских кола, користе се поједностављени дијаграми који се називају **Бодеови дијаграми** (Bode). Састоје се од праволинијских сегмената који представљају асимптоте посматране функције (слика 12.15).



Слика 12.15. Бодеови дијаграми

Тачке у којој се секу асимптоте функције  $W_L(\omega)$  приказане на слици 12.15 представљају граничне учестаности пропусног опсега.

Фреквенцијска карактеристика облика:

$$W_2(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T},$$

може да се прикаже помоћу елементарних фреквенцијских карактеристика.

$$W(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{W_2(j\omega)}$$

$$W(\omega) = \frac{W_1(\omega)}{W_2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)$$

$$W_1(j\omega) = j\omega T$$

$$W_1(\omega) = \omega T$$

$$\varphi_1(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

$$W_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

$$W_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

$$\varphi_2(\omega) = \arctg \omega T$$

На основу овог разлагanja долази се до израза за амплитудску и фазну фреквенцијску карактеристику филтра првог реда, пропусника високих учестаности:

$$W(\omega) = \frac{\omega T}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \omega \infty - \arctg \omega T = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega T$$

Амерички инжењер и истраживач, доктор физике, Боде (Hendrik Wade Bode, 1905-1982) бавио се, током Другог светског рата, пројектовањем система за навођење противавионске одбране, а управљањем анти-балистичким ракетама, у доба Хладног рата. Сматра се творцем прве бежичне повратне спрете и роботизованог оружја. Његова књига "Network Analysis and Feedback Amplifier Design" (1945) представљала је основу за развој савремене теорије управљања.



Боде

## 12.4. ФУНКЦИЈА ПРЕНОСА

Да би Фуријеова трансформација могла да се примени на неку функцију  $x(t)$ , она мора да буде интеграбилна дуж целе временске осе, од  $-\infty$  до  $+\infty$ . Међутим, овај услов не испуњавају неке основне функције које се користе у истраживању линеарних система, као што је, на пример, јединична одскочна функција (једначина 12.2). Проблем се превазилази применом Лапласове трансформације којом се функција времена  $x(t)$  трансформише у функцију  $X(s)$ , комплексне промењиве  $s = \sigma + j\omega$ , дате интегралом:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt ; s = \sigma + j\omega , \quad (12.63)$$

где је  $\sigma$  реални део комплексне промењиве  $s$ , такав да је испуњен услов:

$$\int_0^{+\infty} |x(t) e^{-\sigma t}| dt < \infty . \quad (12.64)$$

Упркос сложеној математичкој основи, поступак анализе у комплексном домену заснива се на већ описаним једноставним правилима. Математички модел у облику линеарне диференцијалне једначине у којој независно променљиву величину представља време:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \quad (12.65)$$

замењује се одговарајућом линеарном алгебарском једначином комплексне независне променљиве  $s$ :

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \dots b_0 X(s), \quad (12.66)$$

тако што се оператор диференцирања замењује комплексном променљивом  $s$ , а зависно променљиве  $x(t)$  и  $y(t)$  њиховим комплексним представницима  $X(s)$  и  $Y(s)$ . На основу једначине 12.65 одређује се однос комплексних ликова побуде и одзива,  $X(s)$  и  $Y(s)$ . Тада ово је представљен количником:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (12.67)$$

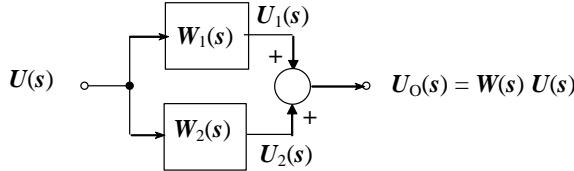
који се назива функција преноса (*transfer function*) посматраног елемената. Сменом  $s = j\omega$ , добија се фреквенцијска карактеристика  $W(j\omega)$ :

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = W(s) \Big|_{s=j\omega}. \quad (12.68)$$

#### 12.4.1. АЛГЕБРА ПРЕНОСА

Функција преноса система, оствареног паралелном везом елемената чије су функције преноса  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$ , слика 12.16, једнака је:

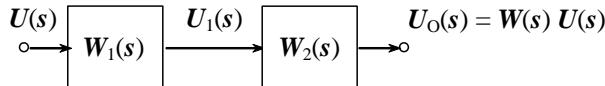
$$W(s) = W_1(s) + W_2(s). \quad (12.69)$$



Слика 12.16. Паралелна веза елемената

Функција преноса система, образованог редном везом елемената чије су функције преноса  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$ , слика 12.17, једнака је:

$$W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s). \quad (12.70)$$



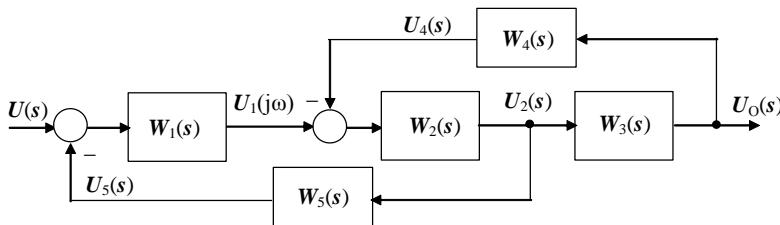
Слика 12.17. Редна веза елемената

Математички модел система приказаног на слици 12.18 чине једначине:

$$\begin{aligned} U_1 &= W_1(U - W_5 U_2), \\ U_O &= W_3 U_2, \\ U_2 &= W_2(U_1 - W_4 U_O). \end{aligned} \quad (12.71)$$

На основу којих следи:

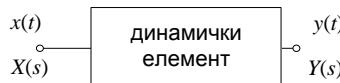
$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)} = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_3(s) + W_2(s)W_3(s)W_4(s)}. \quad (12.72)$$



Слика 12.18. Систем са повратном спрегом

## 12.5. ОСНОВНИ ДИНАМИЧКИ ЕЛЕМЕНТИ

Основни динамички елементи симболизују елементарне динамичке операције: интеграљење и диференцирање, као и њихове линеарне комбинације. Описани су линеарном диференцијалном једначином првог реда чији су коефицијентни временски инваријантни.



Слика 12.19. Динамички елемент

### 12.5.1. ДИФЕРЕНЦИЈАТОР

Диференцијатор (*differentiator*) је елемент који остварује операцију одређивања првог извода по времену величине доведене на његов улаз, посматране као функција времена. Излазна величина,  $y(t)$ , сразмерна је брзини промене улазне величине  $x(t)$ :

$$y(t) = k_D \frac{dx}{dt}, \quad (12.73)$$

где је  $k_D$  сачинилац преноса (*derivative action coefficient*). У операторском облику, математички модел овог елемента (*derivative element, D element*) је једначина:

$$y(t) = k_D \mathcal{D}[x(t)], \quad (12.74)$$

где је  $\mathcal{D}$  оператор диференцирања. Одликује се својствима хомогености и адитивности, па диференцијатор спада у линеарне елементе.

Функција преноса диференцијатора,  $W_D(s)$ , дата је изразом:

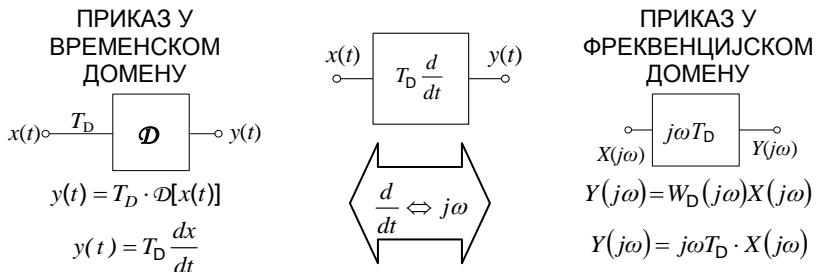
$$W_D(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k_D s, \quad (12.75)$$

где је  $s$  комплексана променљива Лапласове трансформације, а  $Y(s)$  и  $X(s)$  комплексни ликови излаза и улаза. Сменом  $s = j\omega$  добија се фреквенцијски одзив диференцијатора:

$$W_D(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = j\omega k_D. \quad (12.76)$$

### 12.5.1.1. СВОЈСТВА

Ако улазни,  $x(t)$ , и излазни сигнал,  $y(t)$ , имају исту физичку природу (на пример, представљени су вредношћу напона између улазних, односно излазних приклучака елемента), сачинилац преноса диференцијатора,  $k_D$ , има димензију времена и обично се означава са  $T_D$ . На слици 12.20 упоредно су дати прикази диференцијатора, посматраног у временском и фреквенцијском домену. Симбол  $D$  означава оператор диференцирања.

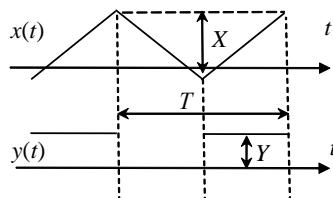


Слика 12.20. Диференцијатор

Када улазни сигнал има сталну вредност, сигнал на излазу диференцијатора је једнак нули. Одзив диференцијатора на одскочну функцију је импулсна функција:

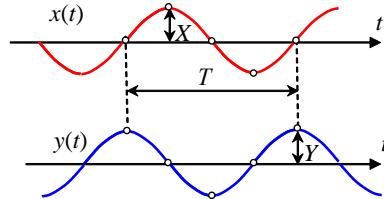
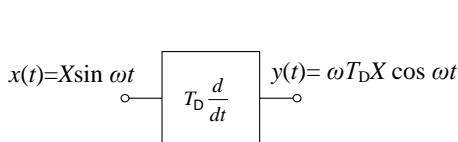
$$\frac{dh}{dt} = \delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{за } t \neq 0 \\ \infty & \text{за } t = 0 \end{cases}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (12.77)$$

Ако побуда представља периодичну функцију времена, средња вредност сигнала на излазу једнака је нули. Када се улазни сигнал мења сталном брзином, излазни сигнал диференцијатора је константан, сразмеран брзини промене (слика 12.21).



Слика 12.21. Одзив диференцијатора на побуду периодичним сигналом

При побуди хармонијском сигналом (слика 12.22), излазни сигнал диференцијатора је хармонијски сигнал исте учестаности, који “претходи” улазном сигналу за четвртину периода, (фазно “предњачи” у односу на улазни сигнал за угао  $\pi/2$ ), независно од учестаности побудног сигнала.



Слика 12.22. Одзив диференцијатора на побуду хармонијским сигналом

Фреквенцијски одзив диференцијатора је:

$$W_D(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = j\omega T_D, \quad (12.78)$$

односно, у нормализованом облику:

$$W_D(j\omega) = j \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (12.79)$$

где је:

$$\omega_0 = \frac{1}{T_D}, \quad (12.80)$$

учестаност при којој је амплитуда излазног сигнала једнака амплитуди улазног сигнала:  $W_D(\omega_0) = 1$ .

Амплитудска фреквенцијска карактеристика овог елемента,  $W_D(\omega)$ , сразмерна је учестаности побудног сигнала:

$$W_D(\omega) = \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (12.81)$$

Логаритамска амплитудска фреквенцијска карактеристика једнака је:

$$W_{DL}(\omega) = 20 \log W_D(\omega) = 20 \log \frac{\omega}{\omega_0} = 20 \log \omega - 20 \log \omega_0,$$

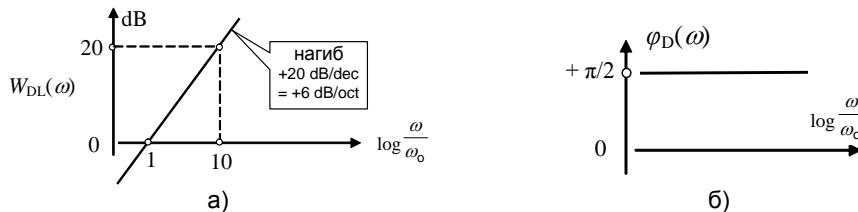
на основу чега следи да, када се учестаност повећа десет пута (декада), вредност  $W_D(\omega)$  се повећа за 20 децибела. Односно, када се учестаност повећа два пута (октава),  $W_D(\omega)$  се повећа за приближно 6 децибела.

Вредности амплитудске фреквенцијске карактеристике  $W_D(\omega)$ , и логаритамске амплитудске фреквенцијске карактеристике,  $W_{DL}(\omega)$ , за изабране вредности учестаности  $\omega$  (односно аргумента  $\Theta = \omega T$ ), дате су у табели.

$\omega$	$\omega T$	$W_D(\omega) = \omega T$	$W_{DL}[\text{dB}] = 20 \log W_D(\omega)$
0	0	0	$-\infty$
$\frac{1}{T}$	1	1	0
$\frac{10}{T}$	10	10	20
$\frac{100}{T}$	100	100	40
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

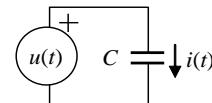
Логаритамска амплитудска фреквенцијска карактеристика савршеног диференцијатора је линеарна функција која сече апсцисну осу у тачки  $\omega_0$  (слика 12.23.a), а чији је нагиб једнак 20 dB по декади (6 dB по октави). Фазна фреквенцијска карактеристика савршеног диференцијатора не зависи од учестаности (слика 12.23.б):

$$\varphi_D(\omega) = \arctg \infty \Big|_{\omega \neq 0} = \frac{\pi}{2} \quad (12.82)$$



Слика 12.23. Бодеови дијаграми диференцијатора

Савршени кондензатор је електрични модел диференцијатора, ако се напон између крајева кондензатора посматра као улазна, а струја која кроз њега противе као излазна величина.



## 12.5.2. ПРОПОРЦИОНАЛНО-ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ ЕЛЕМЕНТ

Израз за излазну величину овог елемента садржи два члана. Један је сразмеран интензитету (тренутној вредности) улазне величине, а други брзини њене промене<sup>7</sup>:

$$y(t) = k_P x(t) + k_D \frac{dx}{dt}. \quad (12.83)$$

Ако улазна и излазна величина имају исту физичку природу користи се нормализованом облику:

$$y(t) = x(t) + T_D \frac{dx}{dt}. \quad (12.84)$$

Сачинилац  $T_D$  има димензију времена (временска константа).

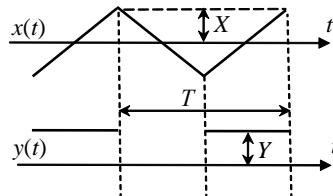
Ако се улазни сигнал не мења, или се мења тако споро да се диференцијални члан у једначини 12.82 може да занемари, излаз је сразмеран улазу. Ако побуда представља брзо променљиву величину:

$$T_D \frac{dx}{dt} \gg x(t), \quad (12.85)$$

$PD$ -елемент делује као диференцијатор.

<sup>7</sup> У аутоматици се користи назив "пропорционално-изводни регулатор" (*PD regulator*).

На слици 12.24 приказан је одзив *PD*-елемента на побуду периодичним сигналом симетричног троугаоног таласног облика. Средња вредност овог сигнала је једнака нули, па је и средња вредност сигнала на излазу једнака нули.



Слика 12.24. Одзив *PD*-елемента на побуду периодичним сигналом

Моделу 12.83 одговара функција преноса:

$$W_{PD}(s) = 1 + sT_D, \quad (12.86)$$

односно фреквенцијска карактеристика:

$$W_{PD}(j\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (12.87)$$

где је:

$$\omega_0 = \frac{1}{T_D}, \quad (12.88)$$

својствена вредност *PD*-елемента, која се назива преломна учестаност (*break frequency*). То је учестаност на којој је амплитудска фреквенцијска карактеристика *PD*-елемента:

$$W_{PD}(\omega) = \sqrt{1 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}, \quad (12.89)$$

$\sqrt{2}$  пута већа од вредности коју има када је учестаност побуде једнака нули:

$$W_{PD}(\omega_0) = \sqrt{2} W_{PD}(0). \quad (12.90)$$

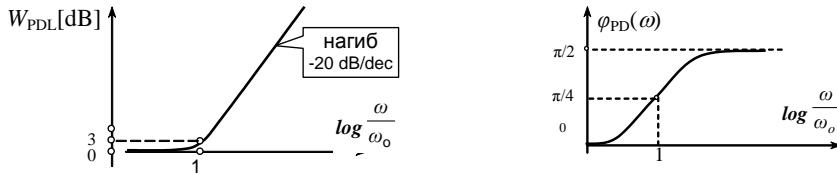
Фазна фреквенцијска карактеристика одређена је изразом:

$$\varphi_{PD}(\omega) = \arctg \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (12.91)$$

Вредности амплитудске фреквенцијске карактеристике  $W_{PD}$ , логаритамске амплитудске фреквенцијске карактеристике,  $W_{PDL}$  и фазне фреквенцијске карактеристике,  $\varphi_{PD}$ , за изабране, карактеристичне вредности аргумента  $\omega/\omega_0$ , дате су у табели.

$\frac{\omega}{\omega_0}$	$W_{PD}$	$W_{PDL}[\text{dB}]$	$\varphi_{PD} [\text{°}]$
0	1	0	0
0,1	1,005	0,04	5,7
0,5	1,118	0,97	26,6
1	1,41	3,01	45
2	2,236	6,99	63,4
10	10,05	20,04	84,3
100	100	40	89,4
$\infty$	$\infty$	$\infty$	90

Графички прикази логаритамске амплитудске фреквенцијске карактеристике и логаритамске фазне фреквенцијске карактеристике *PD*-елемента дати су на слици 12.25.



Слика 12.25. Фреквенцијска карактеристика *PD*-елемента

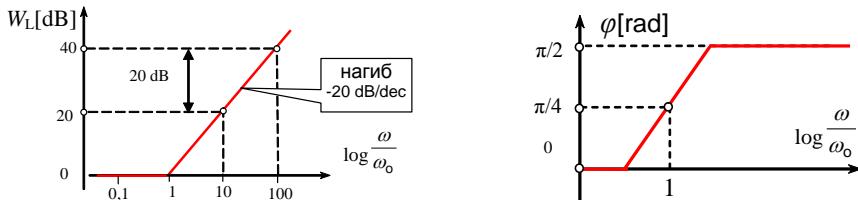
За сигнале ниских учестаности, улазни сигнал се преноси на излаз:

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow W_{PD}(\omega) \cong W_{PD}(0) = 1. \quad (12.92)$$

За високе учестаности, *PD*-елемента се "поноша" као диференцијатор.

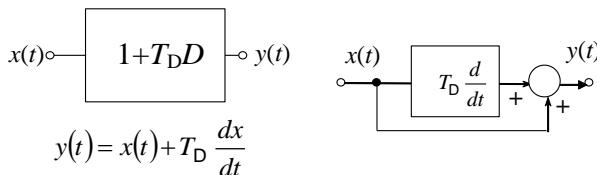
$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow W(\omega) \cong \frac{1}{\omega T} \rightarrow \infty. \quad (12.93)$$

Бодеови дијаграми *PD*-елемента приказани су на слици 12.26.

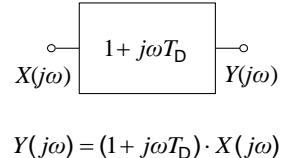


Слика 12.26. Бодеови дијаграми *PD*-елемента

#### ВРЕМЕНСКИ ДОМЕН



#### ФРЕКВЕНЦИЈСКИ ДОМЕН



Слика 12.27. *PD*-елемент,  
приказ у временском и фреквенцијском домену

### 12.5.3. ИНТЕГРАТОР

Интегратор (*integrating element*) је елемент који остварује операцију интеграције по времену величине  $x$  доведене на његов улаз. Излазна величина,  $y$ , одређена је изразом:

$$y(t) = k_I \int_0^t x(t) dt + Y_0, \quad (12.94)$$

где је  $k_I$  сачинилац преноса савршеног диференцијатора, а  $Y_0$  представља вредност величине у почетном тренутку:

$$Y_0 = y(0). \quad (12.95)$$

У операторском облику, математички модел савршеног интегратора је једначина:

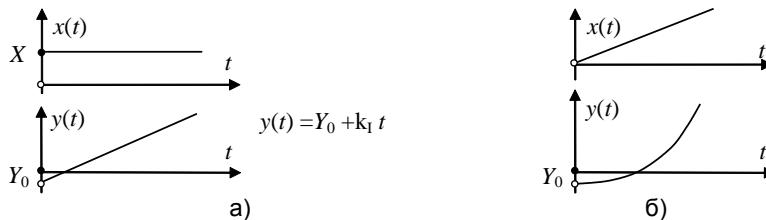
$$y(t) = k_I \Phi^{-1} x, \quad (12.96)$$

где је  $\Phi$  оператор диференцирања<sup>8</sup>. Савршени интегратор спада у линеарне елементе за које важи принцип суперпозиције.

Ако улазни,  $x(t)$ , и излазни сигнал,  $y(t)$ , имају исту физичку природу, константа преноса савршеног интегратора,  $k_I$ , има димензију учестаности. Често се као параметар интегратора даје сачинилац  $T_I$  (*integral action coefficient*) који има димензију времена:

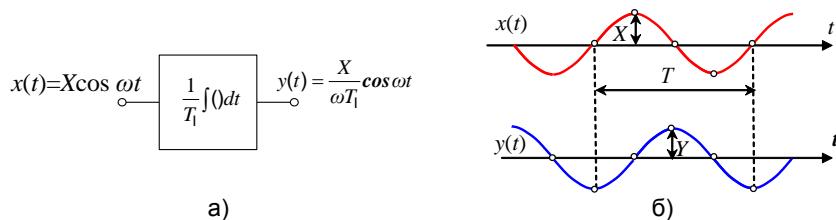
$$T_I = \frac{1}{k_I}. \quad (12.97)$$

Ако улазни сигнал има сталну вредност, различиту од нуле, сигнал на излазу савршеног интегратора представља линеарну функцију времена. Одскочни одзив интегратора је нагибна (успонска) функција чији је нагиб  $k_I$  (слика 12.28.а). Излаз интегратора неограничено расте ако на његовом улазу делује сигнал чија је средња вредност већа од нуле. Одзив на побуду успонском функцијом је квадратна функција (слика 12.28.б).



Слика 12.28. Одскочни одзив и одзив интегратора на успонску функцију

Одзив на побуду хармонијским сигналом је периодични сигнал чија средња вредност зависи од почетних услова (слика 12.29.б). Наизменична компонента излазног сигнала „заостаје“ за улазним сигналом за  $T/4$ , односно за угао  $\pi/2$ , независно од учестаности побудног сигнала.



Слика 12.29. Одзив савршеног интегратора на побуду хармонијским сигналом

<sup>8</sup> Оператори диференцирања и интеграције су инверзни оператори.

У нормализованом облику, фреквенцијска карактеристика интегратора се приказује изразом:

$$W_I(j\omega) = j \frac{\omega_0}{\omega}, \quad \omega_0 = \frac{1}{T}, \quad (12.98)$$

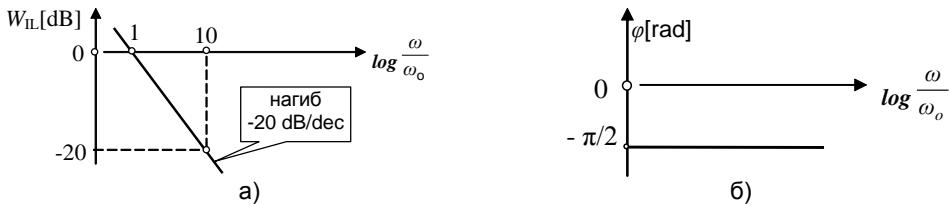
у којем  $\omega_0$  представља карактеристичну учестаност савршеног интегратора (учестаност при којој је амплитуда излазног сигнала једнака амплитуди улазног сигнала, пресечна учестаност).

Вредности амплитудске фреквенцијске карактеристике  $W_I(\omega)$ , и логаритамске амплитудске фреквенцијске карактеристике,  $W_{IL}(\omega)$ , за изабране, карактеристичне вредности учестаности  $\omega$  (односно аргумента  $\frac{\omega}{\omega_0}$ ), дате су у табели.

$\frac{\omega}{\omega_0}$	$W_I(\omega)$	$W_{IL}[\text{dB}]$
0	$\infty$	$\infty$
1	1	0
10	0,1	-20
100	0,01	-40
$\infty$	0	$-\infty$

Логаритамска амплитудска фреквенцијска карактеристика опада са повећањем учестаности (слика 12.30.a). Њен нагиб<sup>9</sup> је једнак -20 dB/dec. Фазна фреквенцијска карактеристика интегратора не зависи од учестаности (слика 12.30.b):

$$\varphi(\omega) = \arctg(-\infty)|_{\omega \neq \infty} = -\frac{\pi}{2}. \quad (12.99)$$



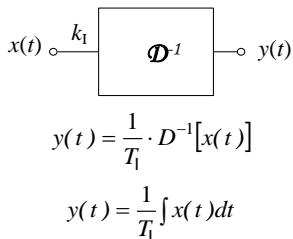
Слика 12.30. Бодеови дијаграми интегратора

У односу на осу учестаности, карактеристике савршеног интегратора су "лик у огледалу" карактеристика савршеног диференцијатора:

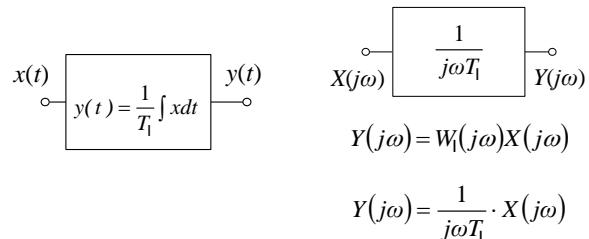
$$W_{IL}(\omega) = -W_{DL}(\omega), \quad (12.100)$$

$$\varphi(\omega) = -\varphi_D(\omega). \quad (12.101)$$

#### ВРЕМЕНСКИ ДОМЕН



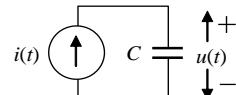
#### ФРЕКВЕНЦИЈСКИ ДОМЕН



Слика 12.31. Интегратор, приказ у временском и фреквенцијском домену

<sup>9</sup> Брзина опадања (roll-off rate).

Савршени кондензатор је електрични модел интегратора, ако се струја која кроз њега протиче посматра као улазна, а напон између његових крајева као излазна величина.



#### 12.5.4. ИНЕРЦИЈАЛНИ ЕЛЕМЕНТ ПРВОГ РЕДА

Линеарна диференцијална једначина првог реда облика:

$$a \frac{dy}{dt} + by(t) = x(t), \quad (12.102)$$

у којој  $a$  и  $b$  представљају коефицијенте који не зависе од времена, примењује са као математички модел разноврсних процеса, као што су, на пример, пуњење кондензатора из извора сталног напона (једначина 12.7), пуњење резервоара који се празни брзином сразмерном нивоу садржане течости или процес учења. У стручној литератури, елемент чији је математички модел диференцијална једначина:

$$T_D \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t), \quad (12.103)$$

у којој  $x(t)$  представља улазну, а  $y(t)$  излазну величину (сигнал), назива се апериодични елемент првог реда [9], инерцијално коло првог реда [10], или елемент са временском константом. Ако улазна и излазна величина имају исту физичку природу, величина  $T_D$  има димензију времена (временска константа). У електроници и телекомуникацијама такав елемент се посматра као филтер првог реда, пропусник ниских учестаности<sup>10</sup>. Диференцијалној једначини 12.103, која представља математички модел овог елемента посматраног у временском домену, одговара алгебарска једначина у комплексном домену

$$T_D sY(s) + Y(s) = X(s), \quad (12.104)$$

на основу које следи функција преноса:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{1 + s T_D}, \quad (12.105)$$

односно, фреквенцијска карактеристика:

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_D}. \quad (12.106)$$

<sup>10</sup> Зависност појачања трополних појачавачких елемената, на пример, може да се, у првој апроксимацији, приближно представи моделом инерцијалног елемента.

Амплитудска и фазна карактеристика могу да се одреде сређивањем овог израза тако да су реални и имагинарни део експлицитно изражени:

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_D} = \frac{1 - j\omega T_D}{1 + (\omega T_D)^2} = \frac{1}{1 + (\omega T_D)^2} - j \frac{\omega T_D}{1 + (\omega T_D)^2}.$$

Одатле следи:

$$W(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T_D)^2}}, \quad (12.107)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T_D. \quad (12.108)$$

Излазни сигнал касни у односу на улазни, па се елемент са оваквом карактеристиком у електроници понекад назива "коло за кашњење".

Вредности амплитудске фреквенцијске карактеристике  $W_{PD}$ , логаритамске амплитудске фреквенцијске карактеристике,  $W_{PDL}$  и фазне фреквенцијске карактеристике,  $\varphi_{PD}$ , за изабране, карактеристичне вредности аргумента  $\omega/\omega_0$ , дате су у табели.

$\omega T_D$	$W_{PD}$	$W_{PDL}$ [dB]	$\varphi$ [°]
0	1	0	0
0,1	0,995	-0,04	-6
0,5	0,894	-1	-27
1	0,707	-3	-45
2	0,447	-7	-63
10	0,0995	-20	-84
100	0,0099	40	-89,4
$\infty$	0	$-\infty$	-90

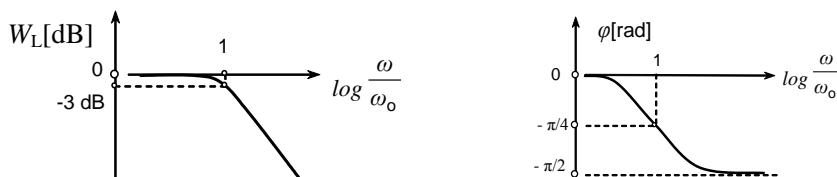
Графички прикази логаритамске амплитудске фреквенцијске карактеристике и логаритамске фазне фреквенцијске карактеристике апериодичног елемента првог реда дати су на слици 12.32. За сигнале ниског учестаности, улазни сигнал се преноси на излаз:

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow W(\omega) \approx W(0) = 1. \quad (12.109)$$

За високе учестаности, овај елемент се "поноша" као интегратор.

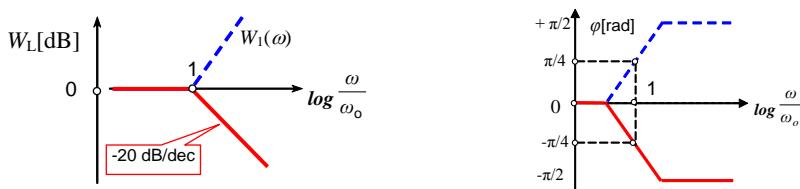
$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow W(\omega) \approx \frac{1}{\omega T} \rightarrow 0. \quad (12.110)$$

Њен нагиб је једнак - 20 dB/dec.



Слика 12.32. Фреквенцијска карактеристика инерцијалног елемента првог реда

У односу на осу учестаности, карактеристике инерцијалног елемента првог реда су "лик у огледалу" карактеристика  $PD$ -елемента (слика 12.33). Електрични модел овог елемента је пасивни  $RC$ -интегратор (слика 12.4).



Слика 12.33. Бодеови дијаграми инерцијалног елемента првог реда

Уместо трансформације израза за фреквенцијску карактеристику у облик:

$$W(j\omega) = \operatorname{Re}(\omega) + j\operatorname{Im}(\omega)$$

једноставније је да се одређивање амплитудне и фазне фреквенцијске карактеристике изврши својењем задате функције на претходно обраћене елементарне функције, чија су својства позната [11]. На пример:

$$W(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{W_2(j\omega)},$$

где је:

$$W_1(j\omega) = 1, \quad W_2(j\omega) = 1 + j\omega T.$$

На основу правила алгебре преноса важи:

$$W(\omega) = \frac{W_1(\omega)}{W_2(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega) = \arctg 0 - \arctg \omega T = -\arctg \omega T.$$

Истоветни резултат се добија ако се пође од модела:

$$W(s) = \frac{1}{W_{PD}}, \quad W_{PD} = 1 + j\omega T,$$

на основу којег се долази до једначина:

$$W(\omega) = \frac{1}{W_{PD}(\omega)}, \quad \text{и}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg 0 - \varphi_{PD} = -\varphi_{PD}.$$

## 12.6. ЛИТЕРАТУРА

1. R. Stanković, M. Stojić, S. Bogdanović, Fourierovo predstavljanje signala, Naučna knjiga, 1988.
2. J.D. Sherrick, *Concepts in Systems and Signals*, Prentice Hall, 2005.
3. M. Stojić, Kontinualni sistemi automatskog upravljanja, Građevinska knjiga, 1973.
4. A.M. Howatson, *Electrical circuits and systems*, Oxford University Press, 1996.
5. Појмови из области математике који се користе у електротехници, Термини и дефиниције, ЈУС Н. А0. 101, 1990, 101-04-39.
6. K. Pikover, Strast za matematikom, NNK 2007, s. 80.
7. Реф. 5, 101-03-06.
8. International Electrotechnical Vocabulary, IEC 60050: part 351, Control technology / Behaviour and characteristics of transfer elements.
9. M. Stojić, Kontinualni sistemi automatskog upravljanja, Građevinska knjiga, 1973.
10. Д. Јовановић, Електроника и телекомуникације, с. 210.
11. W.M. Siebert, *Circuits, Signals and Systems*, MIT Press (Цепи, сигналы системы, Мир, 1988).

# ПРОБЛЕМИ

## 1. СИГНАЛИ И СИСТЕМИ

- Доказати да математички модел хармонијског осцилатора може да се представи диференцијалном једначином другог реда:

$$u(t) = -\frac{1}{\omega^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{dt} \right).$$

- Доказати да за операторе диференцирања и интеграљења важи принцип суперпозиције.
- Доказати да операцији диференцирања у временском домену одговара операција множења са  $j\omega$  у фреквенцијском домену.
- Доказати да операцији интеграљења у временском домену одговара операција делења са  $j\omega$  у фреквенцијском домену.

## 2. ОСНОВНИ ЕЛЕМЕНТИ ЕЛЕКТРОНСКИХ КОЛА

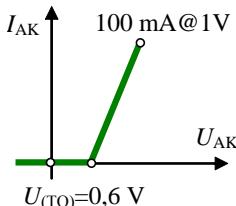
- Доказати да за савршени кондензатор важи формула:

$$C = \frac{i(t)}{\frac{du}{dt}}.$$

- Доказати да за савршени калем важи формула:

$$L = \frac{u(t)}{\frac{di}{dt}}.$$

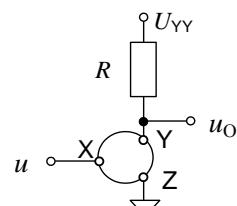
- Нацртати принципску електричну шему струјног огледала оствареног са биполарним транзисторима.
- Нацртати принципску електричну шему струјног огледала оствареног са спојним транзисторима са ефектом поља.
- Одредити вредност динамичке отпорности у проводном стању диоде чија је линеаризована карактеристика приказана на слици.



- За коло са трополним појачавачким елементом, приказано на слици, нацртати линеаризовану карактеристику улаз-излаз:

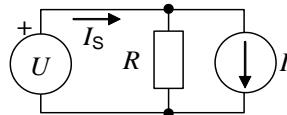
$$U_O(U, U_{(TO)}), \text{ за } 0 \leq U \leq U_{YY},$$

где је  $U_{(TO)}$  напон прага (*threshold voltage*):  
 $I_Y(U) = 0$ , за  $U \leq U_{(TO)}$ .

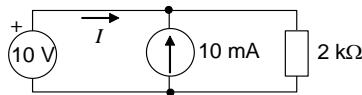


### 3. ЛИНЕАРНА АНАЛОГНА ЕЛЕКТРОНСКА КОЛА

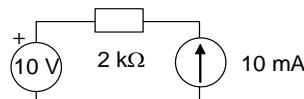
1. Под претпоставком да су у колу, приказаном на слици, примењени савршени елементи, одредити општи израз за вредност струје  $I_S$  која тече кроз извор напона  $U$ .



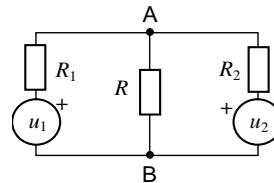
2. Одредити вредност струје  $I$  која тече кроз извор напона у колу приказаном на слици.



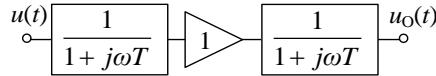
3. Одредити бројевну вредност напона на извору струје у колу приказаном на слици.



4. Применом теореме о суперпозицији, одредити општи израз за вредност напона  $U_{AB}$  у колу приказаном на слици.

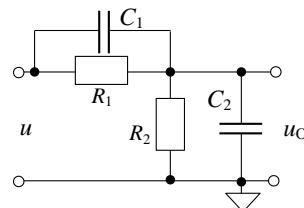


5. Одредити граничну учестаност филтра приказаног на слици.



6. Одредити фреквенцијски одзив (*frequency response*) кола приказаног на слици:

$$W_F(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}.$$



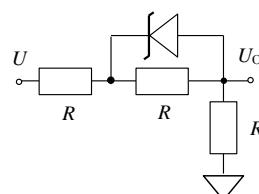
### 4. НЕЛИНЕАРНА АНАЛОГНА ЕЛЕКТРОНСКА КОЛА

1. Доказати да сачинилац преноса карактеристике преноса квадратора:

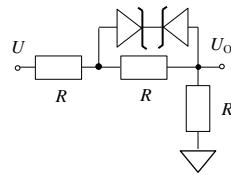
$$u_K(t) = k_K u^2(t),$$

има димензију  $\text{U}^{-1}$ .

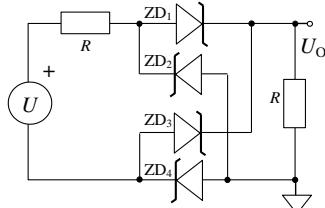
2. Под претпоставком да је у колу, приказаном на слици, примењена савршена Ценер-диода, одредити општи израз за функцију  $U_0(U, U_Z)$  и нацртати карактеристику преноса.



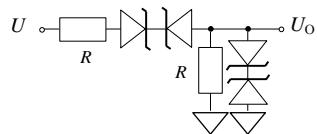
3. Под претпоставком да су у колу, приказаном на слици, примењене савршене Ценер-диоде, одредити општи израз за функцију  $U_O(U, U_z)$  и нацртати карактеристику преноса.



4. Под претпоставком да су у колу приказаном на слици примењене савршене Ценер-диоде, одредити општи израз за функцију  $U_O(U, U_z)$  и нацртати карактеристику преноса.

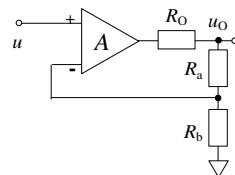


5. Под претпоставком да су у колу приказаном на слици примењене савршене Ценер-диоде, одредити општи израз за функцију  $U_O(U, U_z)$  и нацртати карактеристику преноса.



## 5. ПОВРАТНА СПРЕГА У ЕЛЕКТРОНСКИМ КОЛИМА

- Под претпоставком да улазне струје диференцијалног појачавача напона, у колу приказаном на слици, могу да се занемаре, као и да су вредности отпорности и појачања појачавача познате, одредити општи израз за укупно појачање и излазну отпорност овог кола.
- Под претпоставком да су познати вредност појачања  $A$  и карактеристика преноса, функција  $F(x)$ , одредити општи израз за карактеристику преноса овог система.

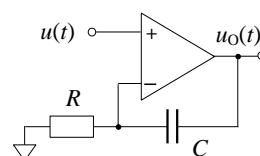
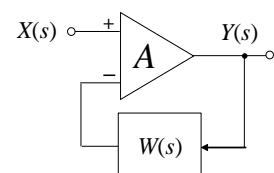
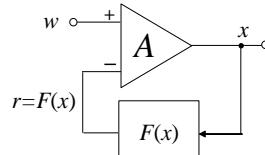


- Под претпоставком да су вредност појачања  $A$  и функција преноса  $W(s)$  познати, одредити општи израз за функцију преноса овог система  $W_F(s)$ :

$$W_F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}.$$

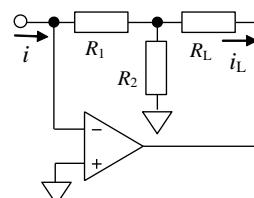
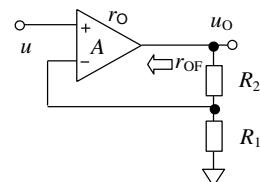
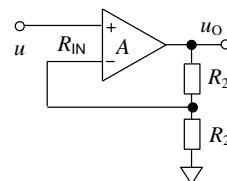
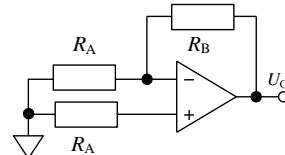
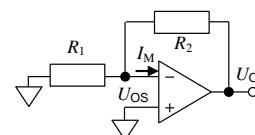
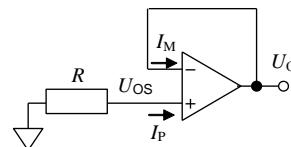
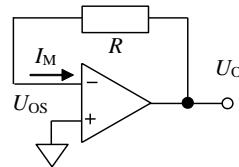
- Под претпоставком да је вредност појачања диференцијалног појачавача у колу приказаном на слици бесконално велика, одредити општи израз за функцију преноса овог система  $W(s)$ :

$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U(s)}.$$

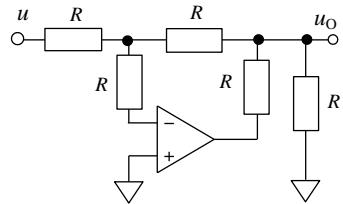


## 6. ОПЕРАЦИОНИ ПОЈАЧАВАЧИ

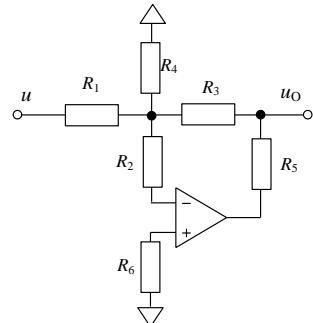
- Под претпоставком да операциони појачавач, у колу приказаном на слици, има бесконачно велико појачање, одредити општи израз за напон на излазу,  $U_O$ , у зависности од напона помераја нуле појачавача,  $U_{os}$ , и улазне струје поларизације инвертујућег улаза,  $I_M$ .
- Под претпоставком да је појачање операционог појачавача у колу приказаном на слици бесконачно велико, одредити општи израз за напон на излазу,  $U_O$ , у зависности од напона помераја нуле појачавача  $U_{os}$  и улазних струја поларизације неинвертујућег и инвертујућег улаза,  $I_P$  и  $I_M$ .
- Под претпоставком да је појачање операционог појачавача у колу приказаном на слици бесконачно велико, одредити општи израз за напон на излазу,  $U_O$ , у зависности од напона помераја нуле појачавача  $U_{os}$  и улазних струја поларизације неинвертујућег и инвертујућег улаза,  $I_P$  и  $I_M$ .
- Под претпоставком да је појачање операционог појачавача у колу приказаном на слици бесконачно велико, одредити општи израз за напон на излазу,  $U_O$ , у зависности од напона помераја нуле појачавача  $U_{os}$  и улазних струја поларизације неинвертујућег и инвертујућег улаза,  $I_P$  и  $I_M$ .
- Одредити општи израз за улазну отпорност неинвертујућег појачавача који је остварен помоћу операционог појачавача чије је појачање  $A$ , а улазна диференцијална отпорност  $R_{IN}$ . Напон помераја нуле појачавача и улазне струје поларизације неинвертујућег и инвертујућег улаза могу да се занемаре.
- Одредити општи израз за излазну отпорност  $r_{OF}$  неинвертујућег појачавача који је остварен помоћу операционог појачавача чије је појачање  $A$ , а излазна отпорност  $r_O$ , занемарујући напон помераја нуле појачавача и улазне струје поларизације неинвертујућег и инвертујућег улаза.
- Под претпоставком да је у колу приказаном на слици примењен савршени операциони појачавач, одредити општи израз за вредност струје кроз отпорник  $R_L$ .



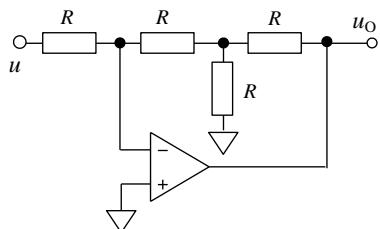
8. Одредити општи израз за вредност излазног напона  $u_O$  у колу са савршеним операционим појачавачем, приказаном на слици.



9. Одредити општи израз за вредност излазног напона  $u_O$  у колу са савршеним операционим појачавачем, приказаном на слици.



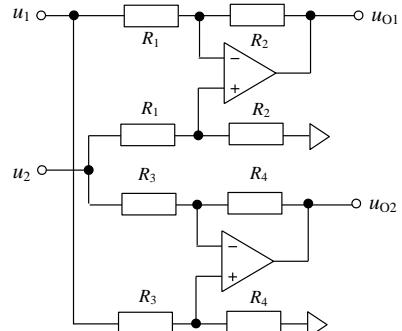
10. Одредити општи израз за вредност излазног напона  $u_O$  у колу са савршеним операционим појачавачем, приказаном на слици.



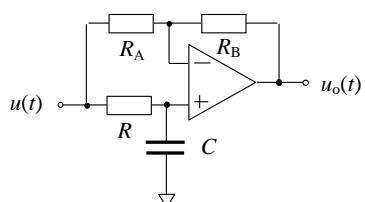
## 7. ОСНОВНА ЛИНЕАРНА КОЛА СА ОПЕРАЦИОНИМ ПОЈАЧАВАЧИМА

1. За коло са савршеним операционим појачавачима, приказаном на слици, одредити општи израз за вредност излазног диференцијалног напона:

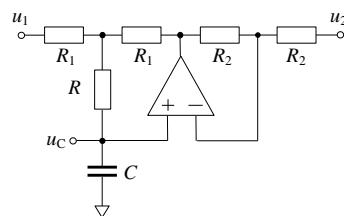
$$u_{OD} = u_{O1} - u_{O2} .$$



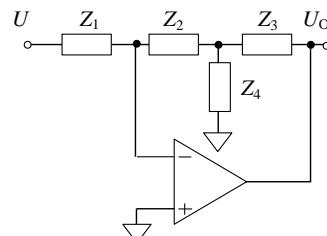
2. Написати диференцијалну једначину која представља математички модел кола приказаног на слици.



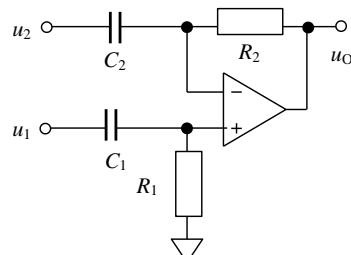
3. За коло са савршеним операционим појачавачем, приказаном на слици, одредити општи израз за функцију која описује зависност излазног напона  $u_C$  од напона  $u_1$  и  $u_2$ .



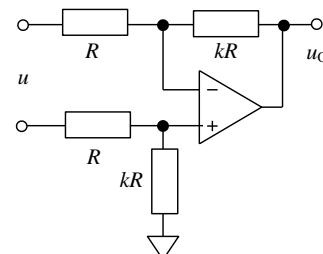
4. За коло са савршеним операционим појачавачем, приказаном на слици, одредити општи израз за функцију преноса.



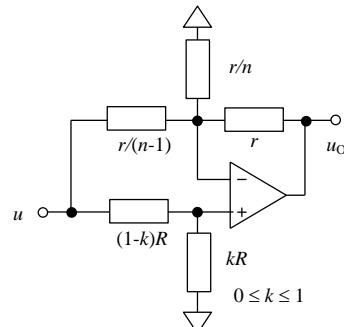
5. За коло са савршеним операционим појачавачем, приказаном на слици, одредити општи израз за вредност излазног напона  $u_O$ .



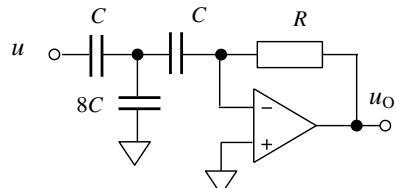
6. Одредити улазну (диференцијалну) отпорност кола приказаног на слици, под претпоставком да је операциони појачавач савршен.



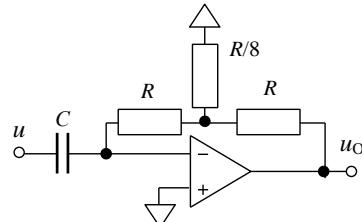
7. За коло приказано на слици одредити општи израз за вредност излазног напона  $u_O$ , под претпоставком да је операциони појачавач савршен.



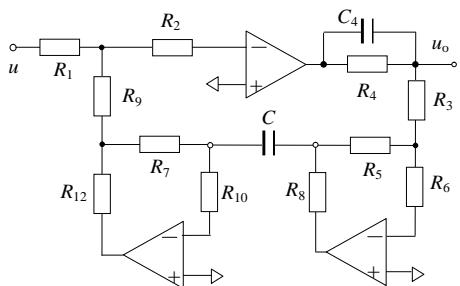
8. За коло са савршеним операционим појачавачем, приказаном на слици, одредити општи израз за функцију преноса.



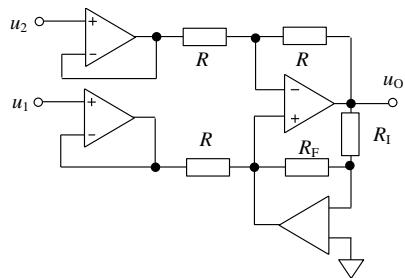
9. За коло са савршеним операционим појачавачем, приказаном на слици, одредити општи израз за функцију преноса.



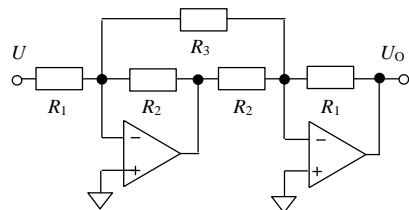
10. Под претпоставком да су у колу приказаном на слици примењени савршени операционои појачавачи, одредити општи израз за функцију преноса.



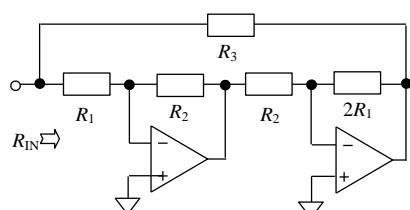
11. За коло са савршеним операционим појачавачима, приказано на слици, одредити општи израз за вредност излазног напона.



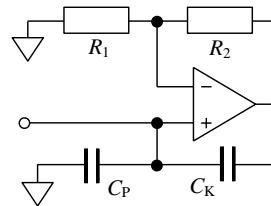
12. За коло са савршеним операционим појачавачима, приказано на слици, одредити општи израз за вредност излазног напона.



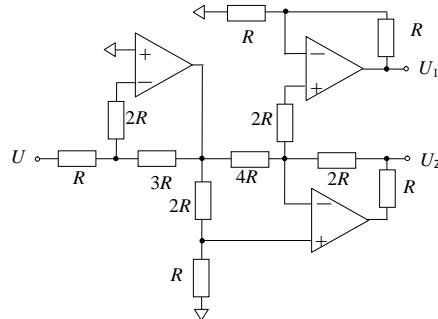
13. Одредити општи израз за вредност улазне отпорности кола са савршеним операционим појачавачима, које је приказано на слици.



14. Одредити општи израз за улазну импадансу кола које је приказано на слици, под предпоставком да је операциони појачавач савршен.

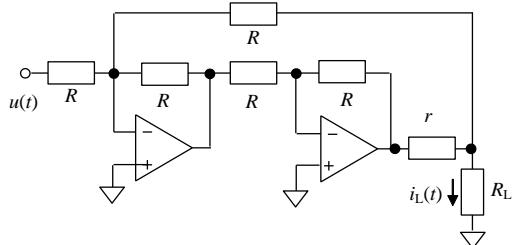


15. Под претпоставком да су у колу приказаном на слици примењени савршени операциони појачавачи, одредити опште изразе за излазне напоне  $u_1$  и  $u_2$  у зависности од улазног напона  $u$ .

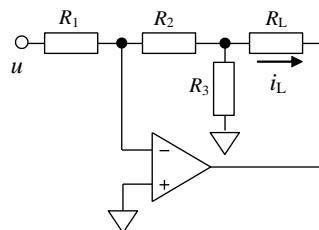


## 9. ИЗВОРИ СТРУЈЕ

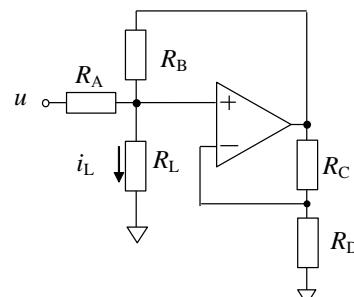
1. Под претпоставком да су у колу приказаном на слици примењени савршени операциони појачавачи, одредити израз за вредност струје  $i_L$  кроз отпорник  $R_L$ .



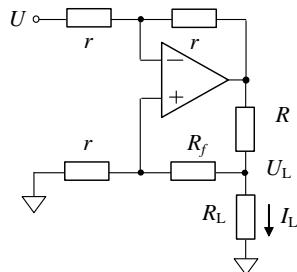
2. Под претпоставком да је у колу приказаном на слици примењен савршени операциони појачавач, одредити општи израз за вредност струје  $i_L$  кроз отпорник  $R_L$ .



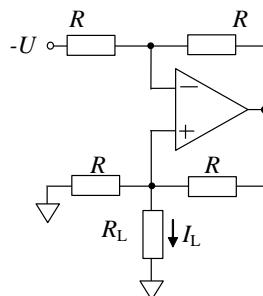
3. За коло приказано на слици, под претпоставком да је операциони појачавач савршен, одредити услов који треба да буде испуњен у погледу односа вредности отпорности у колу, тако да струја  $i_L$  кроз отпорник  $R_L$  не зависи од његове отпорности.



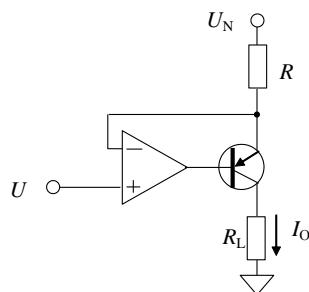
4. За коло приказано на слици, под претпоставком да је операциони појачавач савршен, одредити услов који треба да буде испуњен у погледу односа вредности отпорности у колу, тако да струја  $I_L$  кроз отпорник  $R_L$  не зависи од напона  $U_L$ .



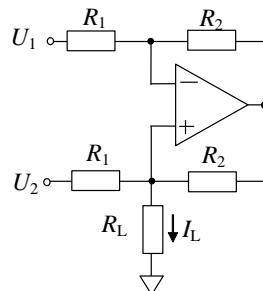
5. Под претпоставком да је у колу, приказаном на слици, примењен савршени операциони појачавач, одредити општи израз за вредност струје  $I_L$  кроз отпорник  $R_L$ .



6. За коло приказано на слици, у којем је примењен савршени операциони појачавач, одредити опсег допуштених вредности отпорности оптерећења  $R_L$ .



7. Под претпоставком да је у колу, приказаном на слици, примењен савршени операциони појачавач, одредити општи израз за вредност струје  $I_L$  кроз отпорник  $R_L$  у зависности од напона  $U_1$  и  $U_2$ .



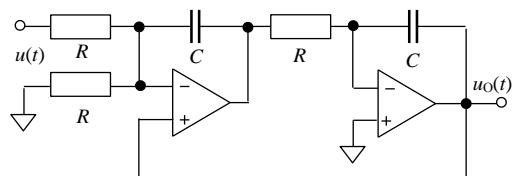
## 10. ФРЕКВЕНЦИЈСКИ СЕЛЕКТИВНА КОЛА

- Нацртати Бодеове дијаграме за елемент чија је функција преноса:  

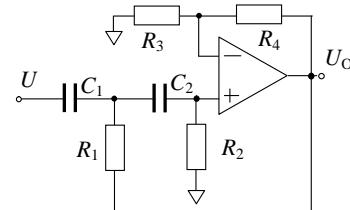
$$W(s) = \frac{sT - 1}{sT + 1}.$$
- Одредити граничну учестаност филтра чија је фреквенцијска карактеристика:  

$$W(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega T)^2}.$$

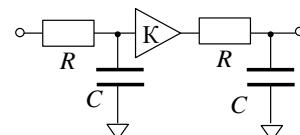
3. Одредити функцију преноса кола приказаног на слици.



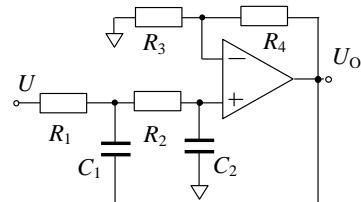
4. Одредити функцију преноса кола приказаног на слици.



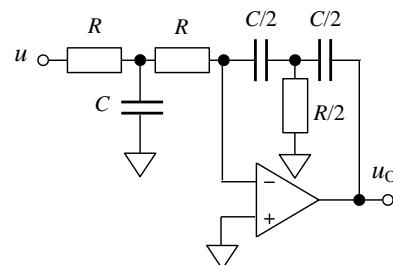
5. Одредити граничну учестаност филтра пропусника ниских учестаности приказаног на слици.



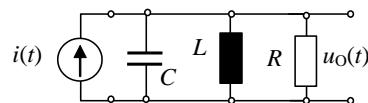
6. Одредити функцију преноса кола приказаног на слици.



7. Одредити функцију преноса кола приказаног на слици.

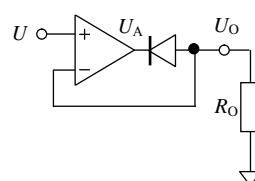


8. Доказати да паралелна  $RLC$ -мрежа, побуђена из извора струје, делује као филтер пропусник опсега учестаности.

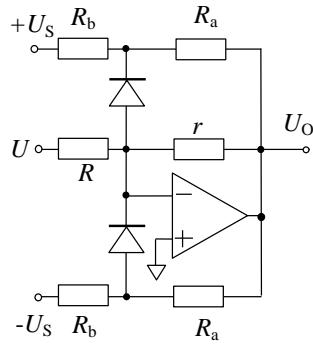


## 11. НЕЛИНЕАРНА КОЛА СА ОПЕРАЦИОННИМ ПОЈАЧАВАЧИМА

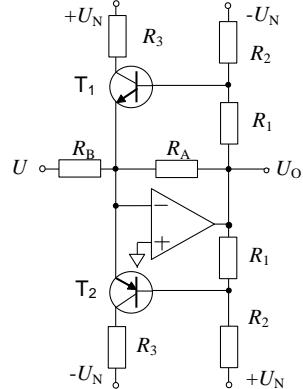
1. Под претпоставком да је у колу, приказаном на слици, операциони појачавач савршен, одредити опште изразе за функције  $U_A(U)$  и  $U_O(U)$ , и нацртати карактеристику преноса  $U_O(U)$ .



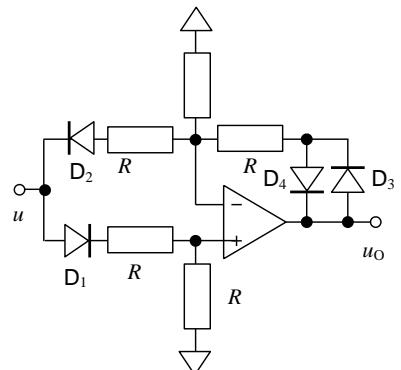
2. Под претпоставком да је операциони појачавач, у колу приказаном на слици, савршен, одредити општи израз за карактеристику улаз-излаз.



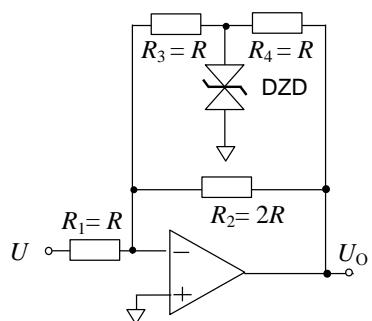
3. Под претпоставком да су операциони појачавачи, у колу приказаном на слици, савршени, одредити општи израз за карактеристику улаз-излаз.



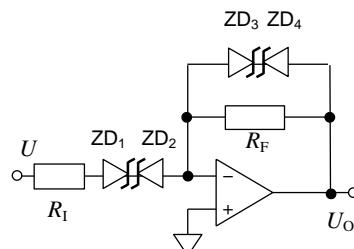
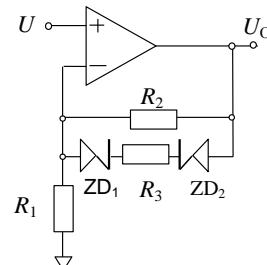
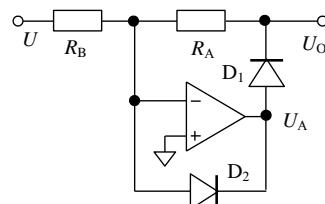
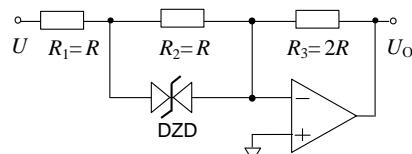
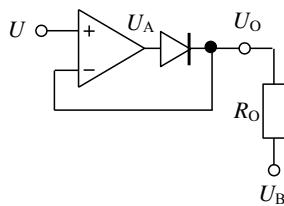
4. Под претпоставком да је у колу, приказаном на слици, операциони појачавач савршен, одредити општи израз за функцију  $U_O(U)$ .



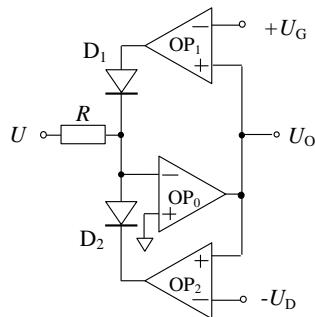
5. Под претпоставком да су у колу, приказаном на слици, операциони појачавач и двојна Ценер-диода савршени, одредити општи израз за функцију  $U_O(U)$ , и нацртати карактеристику преноса.



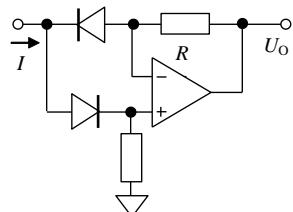
6. Под претпоставком да је у колу, приказаном на слици, операциони појачавач савршен, одредити опште изразе за функције  $U_A(U, U_B)$  и  $U_O(U, U_B)$ , и нацртати карактеристику преноса  $U_O(U)$ .
7. Под претпоставком да је у колу, приказаном на слици, операциони појачавач савршен, одредити општи израз за функцију  $U_O(U)$ , и нацртати карактеристику преноса.
8. Под претпоставком да је у колу, приказаном на слици, примењен савршен операциони појачавач, одредити општи израз за функцију  $U_O(U)$ , и нацртати карактеристику преноса.
9. Под претпоставком да је у колу, приказаном на слици, операциони појачавач савршен, одредити општи израз за функцију  $U_O(U)$  и нацртати карактеристику преноса.
10. Под претпоставком да је у колу, приказаном на слици, операциони појачавач савршен, одредити општи израз за функцију  $U_O(U)$  и нацртати карактеристику преноса.



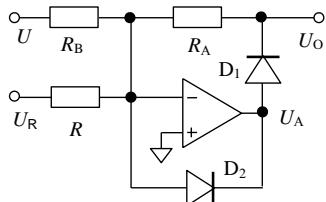
11. Под претпоставком да су операциони појачавачи, у колу приказаном на слици, савршени, одредити општи израз за функцију  $U_O(U, U_D, U_G)$  и нацртати карактеристику преноса.



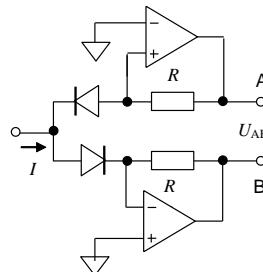
12. Под претпоставком да је у колу, приказаном на слици, примењен савршени операциони појачавач, одредити општи израз за функцију  $U_O(I)$ .



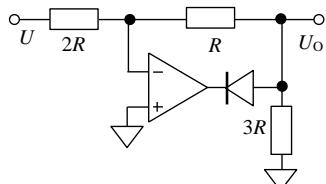
13. Под претпоставком да је у колу, приказаном на слици, примењен савршен операциони појачавач, одредити општи израз за функцију  $U_O(U, U_R)$ , и нацртати карактеристику преноса.



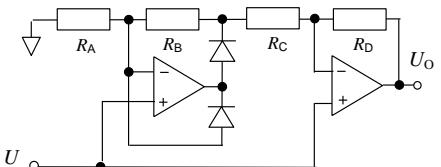
14. Под претпоставком да су у колу, приказаном на слици, примењени савршени операциони појачавачи, одредити општи израз за функцију  $U_{AB}(I)$ .



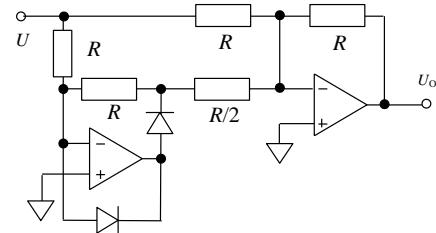
15. Под претпоставком да је у колу, приказаном на слици, примењен савршени операциони појачавач, одредити општи израз за функцију  $U_O(U)$ .



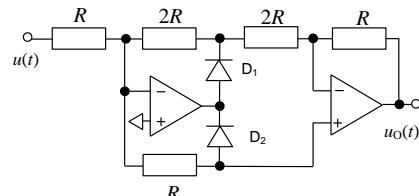
16. Под претпоставком да су у колу, приказаном на слици, примењени савршени операциони појачавачи, одредити општи израз за функцију  $U_O(U)$ , и нацртати карактеристику преноса.



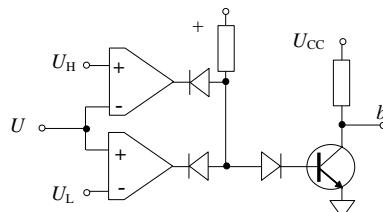
17. Под претпоставком да су у колу, приказаном на слици, примењени савршени операциони појачавачи, одредити општи израз за функцију  $U_0(U)$ , и нацртати карактеристику преноса.



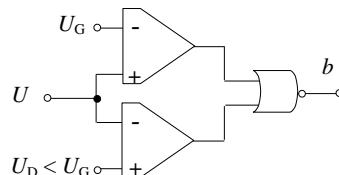
18. Под претпоставком да су у колу, приказаном на слици, примењени савршени операциони појачавачи, одредити општи израз за функцију  $U_0(U)$ , и нацртати карактеристику преноса.



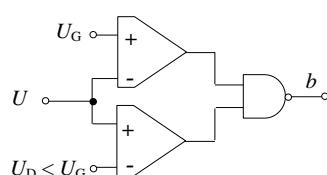
19. Одредити општи израз за функцију  $b(U, U_D, U_G)$  кола приказаног на слици и нацртати карактеристику преноса.



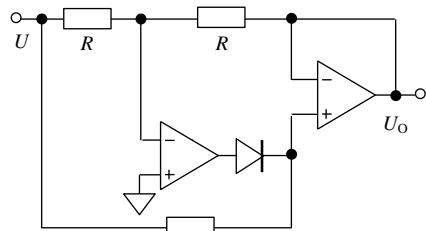
20. Одредити општи израз за функцију  $b(U, U_D, U_G)$  кола приказаног на слици и нацртати карактеристику преноса.



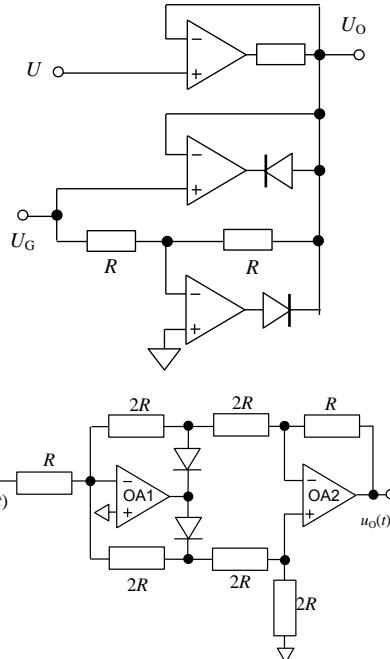
21. Одредити општи израз за функцију  $b(U, U_D, U_G)$  кола приказаног на слици и нацртати карактеристику преноса.



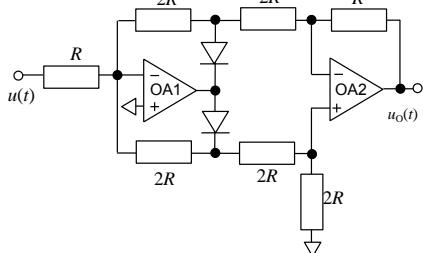
22. Под претпоставком да је у колу, приказаном на слици, примењен савршени операциони појачавач, одредити општи израз за функцију  $U_0(U)$ .



23. Под претпоставком да су у колу, приказаном на слици, примењени савршени операционо појачавачи, одредити општи израз за функцију  $U_O(U, U_G)$ , и нацртати карактеристику преноса.



24. Под претпоставком да су у колу, приказаном на слици, примењени савршени операционо појачавачи, одредити општи израз за функцију  $U_O(U)$ , и нацртати карактеристику преноса.



## 12. ОСНОВИ АНАЛИЗЕ ЛИНЕАРНИХ АНАЛОГНИХ КОЛА И СИСТЕМА

- Доказати да је средња вредност сигнала  $y(t)$  на излазу диференцијатора једнака нули, ако побуда  $x(t)$  представља периодичну функцију времена.
- Доказати да је вредност сигнала на излазу диференцијатора константна ако се вредност улазног сигнала мења сталном брзином.,
- Доказати да ако одзив елемента на побуду хармонијском функцијом представља хармонијску функцију исте учестаности, однос комплексних ликова излаза и улаза не зависи од времена.
- Доказати да се логаритамска амплитудска фреквенцијска карактеристика диференцијатора промени за 20 децибела када се учестаност улазног сигнала промени десет пута.
- Доказати да се логаритамска амплитудска фреквенцијска карактеристика интегратора промени за приближно шест децибела када се учестаност улазног сигнала промени два пута.
- Доказати да је амплитудска фреквенцијска карактеристика филтра пропусника ниских учестаности (инерцијалног елемента првог реда) дата изразом:

$$W(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}.$$

- Доказати да је фазна фреквенцијска карактеристика филтра пропусника ниских учестаности (инерцијалног елемента првог реда) дата изразом:  
 $\varphi(\omega) = -\arctg \omega T$ .

8. Одредити амплитудску и фазну фреквенцијску карактеристику елемента чија је фреквенцијска карактеристика дата изразом:

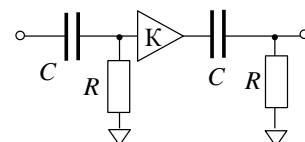
$$W(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T}.$$

9. Написати изразе за амплитудску и фазну фреквенцијску карактеристику система чија је функција преноса одређена изразом:

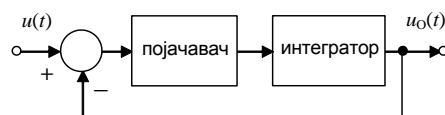
$$W(s) = \frac{s^2 T_1 T_2}{s^2 T_1 T_2 + s(T_1 + T_2) + 1},$$

и нацртати асимптотску логаритамску амплитудску фреквенцијску карактеристику ако је  $T_1 = T_2$ .

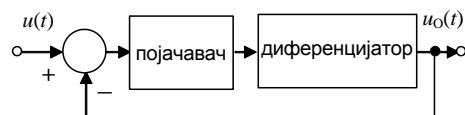
10. Одредити граничну учестаност система чији је еквивалентни модел приказан на слици.



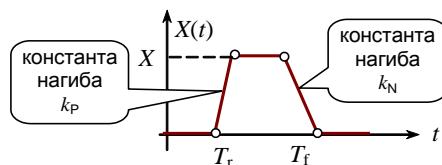
11. Написати диференцијалну једначину која представља математички модел система приказаног на слици. Одредити општи израз за фреквенцијску карактеристику и нацртати електрично коло које одговара оваквом моделу.



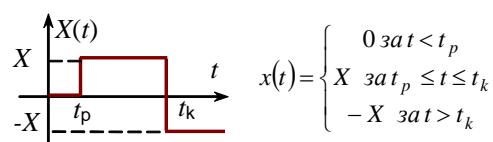
12. Написати диференцијалну једначину која представља математички модел система приказаног на слици. Одредити општи израз за фреквенцијску карактеристику и нацртати електрично коло које одговара оваквом моделу.



13. На слици је приказан таласни облик сигнала на улазу савршеног диференцијатора. Нациртати таласни облик сигнала на излазу.



13. На слици је приказан таласни облик сигнала на улазу савршеног интегратора чији је сачинилац преноса једнак  $k_l$ . Нациртати таласни иблик сигнала на излазу  $y(t)$  ако је  $y(t_p) = -Y_0$ .

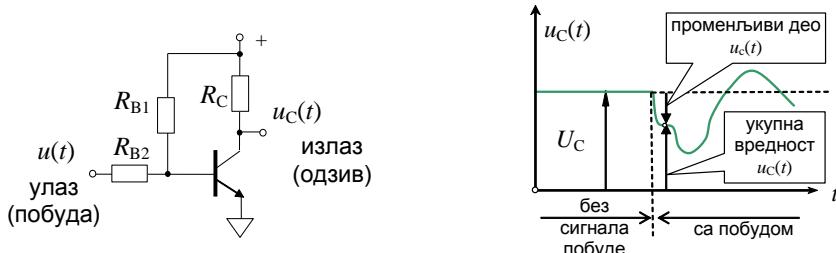


## ОЗНАЧАВАЊЕ

Начин означавања променљивих сигнала у електронским колима стандардизује се међународним документима. У електроници се препоручују следећа основна правила:

- ✿ велика слова се користе за означавање сталних величина, односно параметара периодичних сигнална као што су вршна (*peak*), средња (*average*) и ефективна (*root-mean square - RMS*) вредност;
- ✿ мала слова се користе за означавање временски променљивих величина.

При описивању кола са транзисторима, симболи *E*, *B* и *C* у индексу означавају емитор, базу и колектор биполарног транзистора. Симболи *S*, *G* и *D* у индексу означавају сурс, гејт и дрејн транзистора са ефектом поља. На пример, у колу приказаном на слици,  $U_C$  представља стални напон колектора у одсуству побудног сигнала,  $u_c(t)$  је укупна вредност променљивог напона на колектору, а  $u_c(t)$  тренутна вредност наизменичне компоненте величине  $u_c(t)$ .



Укупна вредност напона,  $u_C(t)$ , једнака је алгебарском збире вредности величина  $U_C$  и  $u_c(t)$ :

$$u_C(t) = U_C + u_c(t).$$

У општем случају, улазне величине електричне мреже (система) типа улаз-излаз означавају се латиничним словом "I" (*input*, улаз), односно "i" у индексу.

Излазне величине означавају се латиничним словом "O" (*output*, излаз), односно "o", у индексу.

Величине које представљају однос величина излазног и улазног кола означавају се латиничним словом "F" (*forward*, унапред), односно "f", у индексу.

Величине које представљају однос величина улазног и излазног кола означавају се латиничним словом "R" (*reverse*, обратан, повратни), односно "r", у индексу.

## СИМБОЛИ ДИОДА

Опис	Симбол	Опис	Симбол
Сигнална диода		Ценер-диода	
Варикап диода		Симетрична Ценер-диода	
Тунел диода		Шотки-диода	
Фотоосетљива диода		Фотоемитујућа диода (LED)	

## СИМБОЛИ ТИРИСТОРА

Опис	Симбол	Опис	Симбол
Диодни тиристор		Триодни тиристор P-типа (SCR)	
Симетрични диодни тиристор (диак)		Триодни тиристор N-типа (PUT)	
Тиристор са два гјета		Симетрични триодни тиристор (триак)	

Словне ознаке и називи у овој табели имају следеће значење:

- A      анода (anode), прикључак за област P-типа.  
 K      катода (cathode).

## СИМБОЛИ ТРАНЗИСТОРА

Графички симболи које препоручују међународне организације IEC и IEEE приказани су у табели. Кружић није обавезан.

Опис	Ознака	IEC	IEEE
<i>NPN транзистор (NPN bipolar junction transistor)</i>	<i>NPN BJT</i>		
<i>PNP транзистор (PNP bipolar junction transistor)</i>	<i>PNP BJT</i>		
<i>N-канални спојни транзистор са ефектом поља (N-channel junction field effect transistor)</i>	<i>N-JFET</i>		
<i>P-канални спојни транзистор са ефектом поља (P-channel junction field effect transistor)</i>	<i>P-JFET</i>		
<i>N-канални MOSFET са индукованим каналом (N-channel enhancement-type MOSFET)</i>	<i>N-MOSFET</i>		
<i>P-канални MOSFET са индукованим каналом (P-channel enhancement-type MOSFET)</i>	<i>P-MOSFET</i>		
<i>N-канални MOSFET са уграђеним каналом (N-channel depletion-type MOSFET)</i>	<i>N-MOSFET</i>		
<i>P-канални MOSFET са уграђеним каналом (P-channel depletion-type MOSFET)</i>	<i>P-MOSFET</i>		

Словне ознаке и називи у овој табели имају следеће значење:

### Биполарни транзистори

- BJT** биполарни спојни транзистор (*bipolar junction transistor*), полупроводнички електронски елемент који садржи најмање два PN-споја, а у којем електричну струју образују слободни носиоци наелектрисања оба поларитета (електрони и шупљине).
- NPN-транзистор** биполарни транзистор у којем средишњу област представља полуправодник *P*-типа.
- PNP-транзистор** биполарни транзистор у којем средишњу област представља полуправодник *N*-типа.
- B** база (*base*), средишња област биполарног транзистора.
- E** емитор (*emitter*), област биполарног транзистора из које се, при одговарајућој поларизацији, већински слободни носиоци наелектрисања преносе (емитују) у област која представља базу.
- C** колектор (*collector*), област биполарног транзистора у којој се сакупљају слободни носиоци наелектрисања који су из емитора доспели у област која представља базу.

## Транзистори са ефектом поља

<i>FET</i>	транзистор са ефектом поља ( <i>junction field effect transistor</i> )
<i>JFET</i>	транзистор са ефектом поља израђен тако да у њему постоји <i>PN</i> -спој, спојни транзистор са ефектом поља, ( <i>junction FET</i> )
<i>S</i>	корс (source), приључак транзистора са ефектом поља кроз који слободни носиоци наелектрисања улазе у област канала.
<i>G</i>	гејт (gate), управљачка електрода транзистора са ефектом поља преко које се утиче на проводност канала између дрејна и корса.
<i>D</i>	дрејн (drain), приључак који представља други крај канала транзистора са ефектом поља.
<i>MOS</i>	технологија израде транзистора са ефектом поља са изолованим гејтом, заснована на комбинацији три врсте материјала: метал-оксид- полупроводник ( <i>metal-oxide-semiconductor</i> ).
<i>MOSFET</i>	транзистор са ефектом поља израђен у <i>MOS</i> -технологији.
<i>B</i>	основа (body), подлога (супстрат) на којој се израђује транзистор са ефектом поља.
<i>D-MOSFET</i>	<i>MOS</i> -транзистор са ефектом поља са уграђеним каналом ( <i>depletion MOSFET</i> ).
<i>E-MOSFET</i>	<i>MOS</i> -транзистор са ефектом поља са индукованим (подстакнутим) каналом ( <i>enhancement MOSFET</i> ).

## СИМБОЛИ АНАЛОГНИХ КОЛА

Опис	Симбол
Операционој појачавач	
Компаратор	
Компаратор са хистерезисом	
Множач	
Генератор функције	
Усмерач	

## СИМБОЛИ ЛОГИЧКИХ КОЛА

Постоје различити скупови симбола за графичко представљање логичких кола. У овом приручнику су коришћени уобичајени графички симболи, код којих се за представљање различитих логичких оператора употребљавају симболи различитог облика. Симболи које препоручују IEC и IEEE/ANSI стандарди су правоугаоног облика. Још увек нису опште прихваћени.

Опис	Назив	Каррактеристични облик			IEC
И (логичко множење)	AND				
ИЛИ (Логичко сабирање)	OR				
НЕ (негација)	NOT				
НИ	NAND				
НИЛИ	NOR				
ИСКЉУЧИВО ИЛИ	XOR EXOR				
ИСКЉУЧИВО НИЛИ	XNOR EXNOR				

## РЕЧНИК ПОЈМОВА

**амплитудска фреквенцијска карактеристика** (*frequency characteristics, frequency response*) – модуло фреквенцијске карактеристике у функцији учестаности. Количник амплитуда одзива и побуде линеарног елемента (система).

**аналогна величина** (*analog quantity*) – величина која може да има било коју вредност која припада одређеном опсегу вредности.

**аналогно/дигитални претварач** – елемент који остварује пресликање вредности улазне аналогне величине на вредност излазне дигиталне величине.

**бел** (*bel*) – јединица којом се однос две снаге изражава декадним логаритмом њиховог количника. У општем случају, користи се за изражавање односа два напона или две струје. Тада се њихов логаритам множи са два (подразумевају се једнаке импедансе).

**bootstrap-интегратор** – интегратор остварен применом позитивне повратне спреге.

**Винов мост** (*Wien bridge*) – електрична мрежа са два приступа која се састоји од четири отпорника и два кондензатора. Користи се за мерење учестаности.

**Грецов мост** (*Graetz bridge*) – електрична мрежа са два приступа која се састоји од четири диоде. Користи се као двострани усмерач.

**децибел** (*decibel*) – десети део бела.

**дигит** (*digit*) – члан коначног скupa ненегативних целих бројева који се користи за представљање информација.

**дигитална величина** (*digital quantity*) – величина која може да има само неке из низа одвојених (дискретних) вредности.

**диференцијални напон** (*differential voltage*) – разлика два напона, напон који није дефинисан према нултом потенцијалу (маси) система.

**диференцијални појачавач** (*differential amplifier*) – елемент који појачава разлику два сигнала представљена величином исте врсте, појачавач разлике (два напона), појачавач диференцијалног напона.

**дигитално/аналогни претварач** – елемент који остварује пресликање вредности улазне дигиталне величине на вредност излазне аналогне величине.

**елемент** (*element*) – саставни део (електронског уређаја) који се не може поделити на мање делове, а да се не изгубе карактеристична (електрична) својства односно функције. У ширем смислу, и (електронски) уређај (*electronic device*), посматран као целина, може се сматрати елементом сложенијег скupa (система).

**заједнички улазни напон** (*input common-mode voltage*) – “заједнички део” улазних напона који је једнак њиховој аритметичкој средини.

**извор напона** (*voltage source*) – активни елемент са једним приступом. Извор енергије чију карактеристичну величину представља напон.

**извор струје** (*current source*) – активни елемент са једним приступом. Извор енергије чију карактеристичну величину представља струја.

**извор струје управљан напоном** (*voltage controlled current source – VCCS*) – активни елемент типа улаз-излаз који вредност улазног напона преслика на сразмерну вредност излазне струје (транскондуктански појачавач).

**инвертор** (*unity gain inverting amplifier, inverter*) – појачавач чије је појачање једнако минус један.

**инструментациони појачавач** (*instrumentation amplifier*) - диференцијални појачавач са великим улазном отпорношћу.

**јединични појачавач** (*unity gain noninverting amplifier, buffer amplifier, voltage follower*) - операциони појачавач са јединичном повратном спрегом.

**карактеристика преноса** (*transfer characteristics*) – однос између улазне величине, која представља побуду, и излазне величине, која представља одзив елемента (система).

**линеаран елемент** (*linear*) – елемент (систем) који се може да опише линераним операторима.

**Милеров интегратор** (*Miller integrator*) – интегратор остварен применом негативне повратне спрете.

**називна вредност** (*nominal value*) – одговарајућа заокружена или приближна вредност величине која се користи да се означи или идентификује елемент, компонента односно уређај, или формулише упутство за његову употребу.

**напонски управљани извор струје** (*voltage controlled current source, VCCS*) – активни елемент

**напон помераја нуле сведен на улаз** (*input offset voltage*) – напон који мора да делује између улазних прикључака операционог појачавача без повратне спрете, да би напон на његовом излазу био једнак нули.

**пливајући** (*floating*) – односи се на елемент (уређај) који није повезан са неким изворм напона.

**пратећи систем** (*tracking system*) – систем који вредност улазне величине (управљачка променљива) пресликава на вредност излазне величине (управљана променљива), независно од поремећаја.

**претварач напона у струју** (*voltage to current converter*) – елемент типа улаз-излаз који вредност улазног напона пресликава на сразмерну вредност излазне струје.

**претварач струје у напон** (*current to voltage converter*) – елемент типа улаз-излаз који вредност улазне струје пресликава на сразмерну вредност излазног напона.

**привидна нула** (*virtuel zero, virtuel ground*) – стање у систему са негативном повратном спрегом када је диференцијални напон на улазу појачавача једнак нули.

**проводност преноса** (*transconductance*) –.

**пол** (*pole*) – сваки од прикључака елемента, кола или мреже, између којих може да се напон прикључи или произведе.

**поларитет** (*polarity*) – испољавање позитивне или негативне вредности у електричном колу или уређају.

**поларизација** (*bias*) – поступак којим се (појачавачки) елемент доводи у радне услове који омогућују жељени одзив на побуду која представља улазни (управљачки) сигнал.

**приступ** (*port*) – пар крајева преко којих се приступа елементу, такав да су струје у њима једнаке по интензитету, а супротног смера.

**пондерисање** – одмеравање (лат. *ponderatio*).

**резолуција** (*resolution*) – способност разлагања, најмања промена посматране величине која може да се опази.

**савршени електронски елемент** (*ideal element*) – апстрактна представа елемента чија је својствена (карактеристична) величина само један електрични параметар.

**спектар** (*spectrum*) – расподела неке величине у функцији учестаности или таласне дужине.

**талас** (*wave*) – промена физичког стања средине, која се у тој средини простире у функцији времена.

**таласни облик** (*waveform*) – приказ величине којом је дефинисан талас помоћу дијаграма, цртежа, једначина, табела или статистичких података.

**у опозицији** (*in oposition*) – временски однос две простопериодичне величине, исте учестаности, чија је разлика фаза једнака  $\pi$ .

**у фази** (*in phase*) – временски однос две простопериодичне величине, исте учестаности, чија је разлика фаза једнака нули.

**фазна фреквенцијска карактеристика** (*frequency characteristics, frequency response*) – аргумент фреквенцијске карактеристике у функцији учестаности. Разлика фаза одзива и побуде линеарног елемента (система).

**филтер типа Батерворт** (*Butterworth*) – филтри који се одликују максимално глатком амплитудском карактеристиком у околини граничне учестаности.

**фреквенцијска карактеристика** (*frequency characteristics, frequency response*) – комплексна величина.

**хармонијска функција** (*harmonic function*) – функција синусног облика. Простопериодична функција.

**BiMOS** - комбинација технологија биполарних и MOS-транзистора.

**BJT** (*bipolar junction transistor*) - биполарни транзистор са ефектом поља.

**CMMR** (*common-mode rejection ratio*) - сачинилац потискивања заједничког улазног напона.

**CMOS** (*complementary metal-oxide-semiconductor*) - технологија производње интегрисаних кола заснована на комплементарним MOS-транзисторима.

**FET** (*junction field effect transistor*) - транзистор са ефектом поља.

**JFET** (*junction field effect transistor*) -транзистор са ефектом поља израђен тако да у њему постоји PN-спој, спојни транзистор са ефектом поља.

**MOS** (*metal-oxide-semiconductor*) - технологија израде транзистора са ефектом поља са изолованим гејтом, заснована на комбинацији три врсте материјала: метал-оксид-полупроводник.

**MOSFET** (*metal-oxide-semiconductor field effect transistor*) транзистор са ефектом поља израђен у MOS-технологији.

**SVRR** (*supply voltage rejection ratio*) - сачинилац потискивања промена напона напајања.

**window-компаратор** – компараторски блок који показује да ли се вредност улазног сигнала налази унутар опсега који је одређен доњом (*lower*) и горњом (*higher threshold*) границом.

# ИНДЕКС

<b>А</b> А/Д претварач 242 алгоритам 20 аналогна величина 10 аналогни сигнал 14 систем 16, 26	електричног напона 31, 38 напона управљан струјом 62 струје управљан напоном 61 струје управљан струјом 60  излазна карактеристика 32 отпорност 40 проводност 42, 188  <b>Б</b> бинарна величина 9 бинарни сигнал 14 биполарни транзистор 43 Бодеов дијаграм 263	инвертујући појачавач 47, 125 инвертујући спој 43 индуктивност 27, 32 индукција 38 интегратор 265  бутстрап 163 Милеров 158 пасивни 248  интегрисано коло 2 информација 5 информациони параметар 5, 12, 23
<b>В</b> величина 6 аналогна 10 бинарна 10 дигитална 10 наизменична 12 пулсирајућа 13 хармонијска 12	<b>Г</b> генератор 38 гранична учестаност 44 Гречов мост 77	<b>К</b> калем 27, 33 капацитивност 27, 31 карактеристика преноса 18 фрејквенцијска 24, 259  кибернетика 87 компаратор 82 кондензатор 27, 32
<b>Д</b> демодулација 12 децибел 70, дигит 9 дигитална величина 10 дигитални сигнал 14 дигитални систем 27 димензија 7 дискретан 9 диода 35 диференцијални пар 48 појачавач 62	<b>Л</b> Лапласова трансформација 258 логаритмска амплитудска 255 фрејквенцијска карактеристика логичка величина 9	<b>М</b> математички модел 17 Међународна 6 електротехничка комисија мирна радна тачка 20 микропроцесор 4, модел за мале сигнале 29 модулација 12
диференцијатор 18, 260 пасивни 249		
<b>Е</b> елемент 26 активни 28 електрични 26 индуктивни 34, 37 инерцијални 268 капацитивни 34 пасивни 234 реактивни 29 резистивни 34 савршени 8	<b>Н</b> наизменична величина 12 напон 27 заједнички 62 помераја нуле 58 прага 44 прекида 193 неинвертујући појачавач 121 неинвертујући спој 43 непрекидна функција 14	<b>О</b> одскочни одзив 252 Ојлерова формула 252 октава 262
<b>И</b> извор електричне струје 31, 41		

оптерећење	27	типа улаз-излаз	14, 19
отпорник	34	струјно огледало	51, 193
отпорност	27	спектар	13
<b>П</b>			
пад напона	51	талац	12
пасивни диференцијатор	249	талацни облик	12
пливајуће оптерећење	195	Тевененова Теорема	55, 189
побуда		теорема о	
повратна спрега	87	еквиваленцији	54, 191
негативна	92	суперпозицији	54
позитивна	92	транскондуктански појачавач	191
појачавач	2, 53, 86	<b>У</b>	
диференцијални	62	уземљен	195
инвертујући	47, 123	“у опозицији”	60
јединични	122	“у противфази”	60
напона	58	“у фази”	60
неинвертујући	121	<b>Ф</b>	
операциони	113	Фарадеј	38
струје	192	филтер	64
транскондуктански	61	непропусник	67, 223
трансрезистансни	62	савршени	68
појачање		филтер пропусник	
динамичко	54	високих учестаности	71, 213
напона	28	ниских учестаности	68, 207
струје	29	опсега учестаности	67, 220
поларизација	31, 38	фrekvenција	12
потенциометар	88	фраквенцијска анализа	251
претварач		фраквенцијска карактеристика	24, 255
мерни	89	амплитудска	13, 255
напона у струју	191	логаритамска	255
струје у напон	62	фазна	255
привидна нула	125	фrekvenцијски одзив	24
принцип суперпозиције	21	функција	
проводност преноса	44	знака	83
пулсирајућа величина	13	одскочна	252, 258
<b>Р</b>		преноса	26, 107, 258
реактивни елемент	29	прозора	247
резолуција	9	синусна	12
<b>С</b>		хармонијска	12
савршени елемент	8	функционални блок	18
слабљење	66	функционални дијаграм	18,
сигнал	5	Фурије	250
анalogни	13	ред	13
бинарни	13	теорема	246
детерминистички	11	трансформација	254
дигитални	13	<b>X</b>	
периодични	11	хармонијска функција	12, 251
случajни	11	хармоник	13
систем	15	хистерезис	83
анalogни	16		
дигитални	16		