Teoría de Conteo

Roberto M. García V.
OTC SSG

Regla de suma

“Si una primera tarea puede realizarse en *m* diferentes formas, mientras que una segunda tarea puede realizarse en *n* formas, y ambas tareas no pueden ser realizadas al mismo tiempo, entonces realizar cualquiera de las dos tareas puede hacerse en cualquiera de *m* + *n* formas”.

Ejemplo:
Una biblioteca tiene 40 libros sobre C++ y 50 libros sobre Java. Por la **regla de la suma**, un estudiante puede escoger entre **40 + 50 = 90** libros para aprender sobre un lenguaje de programación.

Regla de multiplicación

“Si un procedimiento puede ser dividido en primera y segunda parte, y si hay *m* posibles resultados para la primera parte y si, para cada uno de estos resultados, hay *n* posibles resultados de la segunda parte, entonces dicho procedimiento pude realizarse, en ese orden, en *mn* formas”.

Ejemplo:
En un teatro se estan haciendo audiciones para una obra. Con 6 hombres y 8 mujeres audicionando para los papeles principales masculino y femenino, por la **regla del producto** el director puede escoger a su pareja principal en **6 x 8 = 48** formas.

Principio del palomar

“Si n+1 *objetos* se deben acomodar en n *casillas*, entonces en alguna casilla deberán quedar al menos dos objetos”.

Primer ejemplo de aplicación:

¿Cómo demostrar que en un ***conjunto*** *de* ***n+1*** *enteros positivos impares menores a* ***2n*** *existen al menos* ***2*** *números iguales entre si?*

Principio del palomar

“Si n+1 *objetos* se deben acomodar en n *casillas*, entonces en alguna casilla deberán quedar al menos dos objetos”.

Primer ejemplo de aplicación:

*¿Cómo demostrar que en un **conjunto** de **n+1** enteros positivos impares menores a **2n** existen al menos **2** números iguales entre si?*

¿Quiénes son los objetos?

¿Quiénes son las casillas?

Principio del palomar

“Si n+1 *objetos* se deben acomodar en n *casillas*, entonces en alguna casilla deberán quedar al menos dos objetos”.

Primer ejemplo de aplicación:

¿Cómo demostrar que en un ***conjunto*** *de* ***n+1*** *enteros positivos impares menores a* ***2n*** *existen al menos* ***2*** *números iguales entre si?*

¿Quiénes son los objetos? → los ***n+1*** enteros del conjunto son los *objetos*.

¿Quiénes son las casillas?

Principio del palomar

"Si n+1 *objetos* se deben acomodar en n *casillas*, entonces en alguna casilla deberán quedar al menos dos objetos".

Primer ejemplo de aplicación:

¿Cómo demostrar que en un ***conjunto*** *de* ***n+1*** *enteros positivos impares menores a* ***2n*** *existen al menos* ***2*** *números iguales entre si?*

¿Quiénes son los objetos? → los ***n+1*** enteros del conjunto son los *objetos*.

¿Quiénes son las casillas? → los enteros impares en el rango de de ***1*** a ***2n***

Principio del palomar

“Si n+1 *objetos* se deben acomodar en n *casillas*, entonces en alguna casilla deberán quedar al menos dos objetos”.

Primer ejemplo de aplicación:

*¿Cómo demostrar que en un **conjunto** de **n+1** enteros positivos impares menores a **2n** existen al menos **2** números iguales entre si?*

¿Quiénes son los objetos? → los ***n+1*** enteros del conjunto son los *objetos*.

¿Quiénes son las casillas? → los enteros impares en el rango de de ***1*** a ***2n***

Entonces, al *acomodar* los **n+1** enteros en dichas **n** casillas en alguna quedan ***2*** números

Segundo ejemplo principio del palomar:

Se tiene un costal lleno de canicas de 20 colores distintos.

Al azar se van sacando canicas del costal.

¿Cuál es el mínimo número de canicas que deben sacarse para garantizar que en la colección tomada habrá almenos 100 canicas del mismo color?

¿Quiénes son los objetos?

¿Quiénes son las casillas?

Segundo ejemplo principio del palomar:

Se tiene un costal lleno de canicas de 20 colores distintos.

Al azar se van sacando canicas del costal.

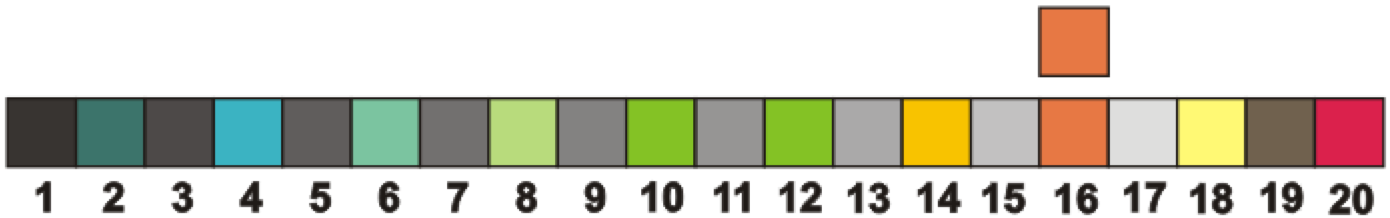
¿Cuál es el mínimo número de canicas que deben sacarse para garantizar que en la colección tomada habrá almenos 100 canicas del mismo color?

¿Quiénes son los objetos? → las canicas que se van sacando

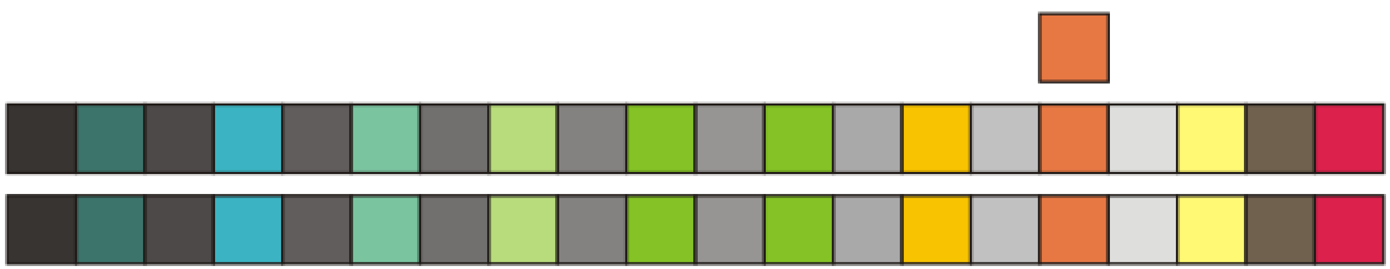
¿Quiénes son las casillas? → los 20 colores

Segundo ejemplo principio del palomar:

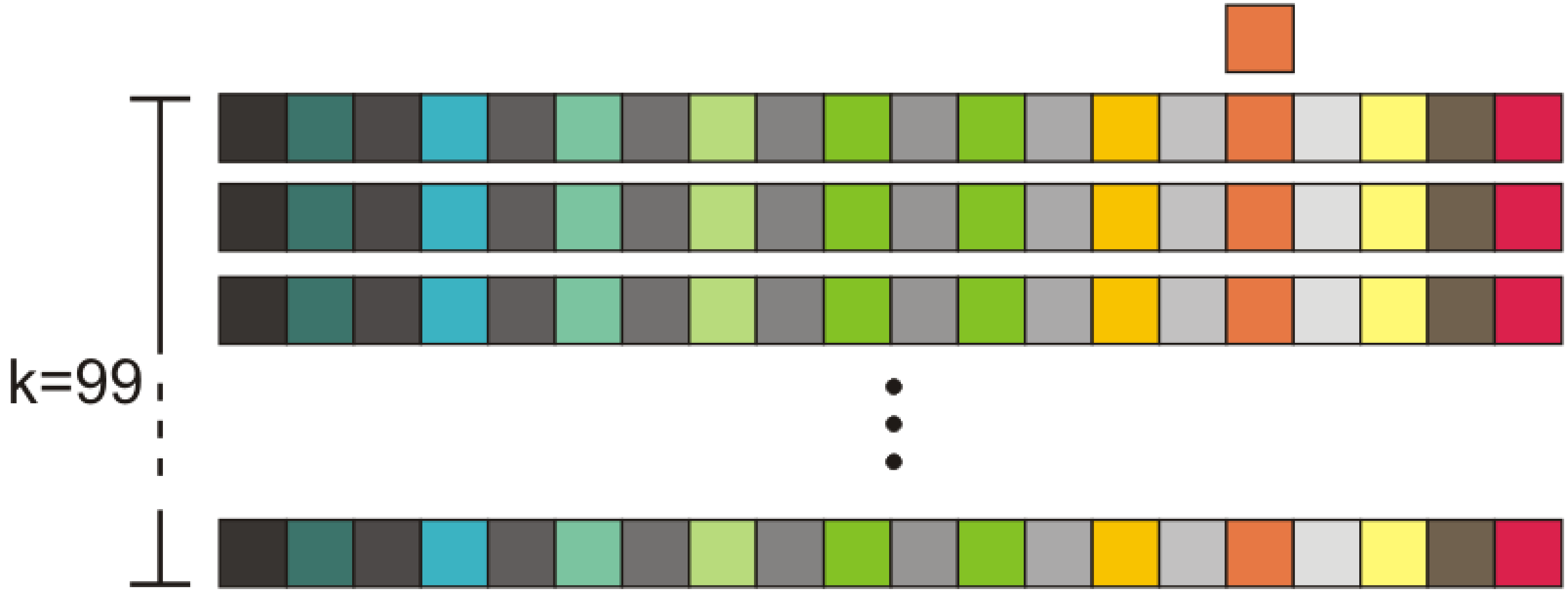
Al sacar las **primeras 21** canicas, al menos **2** canicas quedan *acomodadas* en la misma casilla:



Y al sacar 20 canicas mas:



Y con el mismo razonamiento se necesitarían **20 x 99 + 1** canicas para garantizar que **100** son del mismo color, como se ilustra en la siguiente lámina:



Este segundo ejemplo ilustra una **forma más general** del ***principio del palomar***:

“Si ***nk + 1*** objetos se deben acomodar en ***n*** casillas, entonces en alguna casilla deberán quedar más de ***k*** objetos”

Permutaciones lineales

Dada una colección de ***n*** distintos objetos, cualquier arreglo lineal de dichos objetos se llama ***permutación***.

Ejemplo:

Si ***a***, ***b*** y ***c*** designan 3 objetos distintos, existen 6 formas de arreglar o permutar las 3 letras:

abc acb bac bca cab cba

Si estamos interesados en arreglar solamente 2 de las 3 letras a la vez, existen 6 de tales permutaciones:

ab ba ac ca be cb

Permutaciones lineales

Generalizando:

Si existen ***n*** objetos distintos, y ***r*** es un entero, con ***1 <= r <= n***, entonces por la regla del producto, el número de permutaciones de tamaño ***r*** para los ***n*** objetos es:

$$P(n,r) = \underset{\substack{\text{1st}\\\text{position}}}{n} \times \underset{\substack{\text{2nd}\\\text{position}}}{(n-1)} \times \underset{\substack{\text{3rd}\\\text{position}}}{(n-2)} \times \cdots \times \underset{\substack{r\text{th}\\\text{position}}}{(n-r+1)}$$

$$= (n)(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \times \frac{(n-r)(n-r-1)\cdots(3)(2)(1)}{(n-r)(n-r-1)\cdots(3)(2)(1)}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Permutaciones con repetición

A	B	L	L
A	L	B	L
A	L	L	B
B	A	L	L
B	L	A	L
B	L	L	A
L	A	B	L
L	A	L	B
L	B	A	L
L	B	L	A
L	L	A	B
L	L	B	A

(a)

A	B	L_1	L_2	A	B	L_2	L_1
A	L_1	B	L_2	A	L_2	B	L_1
A	L_1	L_2	B	A	L_2	L_1	B
B	A	L_1	L_2	B	A	L_2	L_1
B	L_1	A	L_2	B	L_2	A	L_1
B	L_1	L_2	A	B	L_2	L_1	A
L_1	A	B	L_2	L_2	A	B	L_1
L_1	A	L_2	B	L_2	A	L_1	B
L_1	B	A	L_2	L_2	B	A	L_1
L_1	B	L_2	A	L_2	B	L_1	A
L_1	L_2	A	B	L_2	L_1	A	B
L_1	L_2	B	A	L_2	L_1	B	A

(b)

Permutaciones con repetición

Si existen n objetos de los cuales n_1 objetos de un **primer** tipo son indistinguibles entre si, n_2 objetos de un **segundo** tipo son indistinguibles entre si, ..., y n_r objetos de **otro** tipo indistinguibles entre si, tal que:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$$

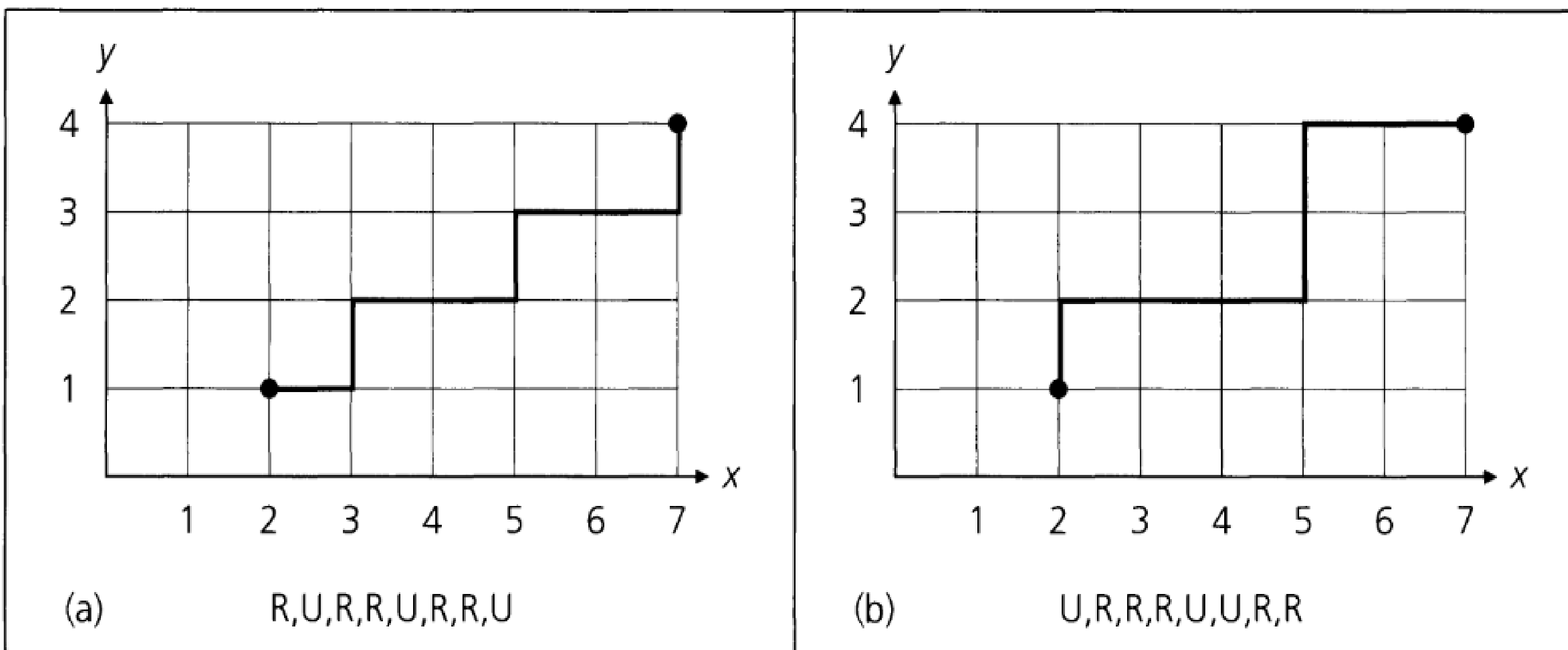
entonces la cantidad de arreglos lineales distintos de los n objetos está dado por:

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$$

Permutaciones con repetición

Ejemplo:

Determinar el número de caminos en el plano xy desde el punto (2,1) hasta el punto (7,4), donde cada camino está hecho a partir de pasos individuales moviendose 1 unidad hacia la derecha (representado por letra R) o una unidad hacia arriba (letra U).



Permutaciones circulares

Cada arreglo de ***n*** objetos distintos alrededor de un circulo (imaginario) se llama permutación circular.

La característica fundamental de las permutaciones circulares es que en estas **no existe** noción alguna de elemento **primero**, **segundo**, ..., **ultimo**. Como es el caso en las permutaciones lineales.

O de manera equivalente, por cada ***n*** permutaciones lineales para ***n*** objetos distintos existe solamente 1 permutación circular de dichos objetos.

El número total de permutaciones circulares para ***n*** objetos distintos es igual a las cantidad de permutaciones lineales de dichos objetos dividida entre ***n***:

$$n! / n = (n-1)!$$

Combinaciones

¿De cuántas formas distintas se pueden escoger ***r*** objetos de un conjunto de ***n*** objetos?

Cada una de dichas formas recibe el nombre de ***combinación.***

Si se tienen ***n*** objetos distintos, cada combinación de ***r*** de esos n objetos (sin referencia al orden), corresponde con ***r!*** permutaciones de tamaño ***r*** de los ***n*** objetos. Por lo tanto el numero de combinaciones de tamaño ***r*** de una colección o conjunto de ***n*** objetos es:

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Teorema del binomio

Sean ***a*** y ***b*** números arbitrarios y sea ***n*** un entero positivo, entonces:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$= \binom{n}{0} x^0 y^n + \binom{n}{1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{n} x^n y^0$$

Principio de Inducción

Sea ***S(n)*** una proposición matemática abierta (o un conjunto de tales proposiciones) que involucre una o mas ocurrencias de una variable ***n***, que representa a un entero positivo.

a) Si ***S(1)*** es cierto; y

b) Si siempre que ***S(k)*** sea cierto resulta también cierto ***S(k+1)***;

Entonces *S(n)* es cierto para todo *n* entero positivo.

Ejemplo:

Probar por inducción la formula de Gauss para la *sumatoria de **1** hasta **n** enteros*.

Algo de bibliografía

1. **Ralph. P Grimaldi**, "Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction", Pearson Education

2. **María Luisa Perez Seguí**, "Combinatoria" y "Combinatoria Avzanzada", de la serie "Cuadernos de Olimpiada de Matemáticas", Instituto de Matemáticas, UNAM.

3. **G.Polya**, "Mathematics and Plausible Reasoning", Vols. I y II, Princeton University Press.