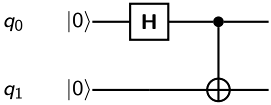
QuantX : IBM Lab-2 Etats de Bell, Téléportation

JM.Torres IBM Quantum France

13 mars 2021

Premier état de Bell



Premier état de Bell

$$|\Psi_1\rangle = H \otimes I|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$$

Premier état de Bell

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

En utilisant directement le produit des matrices ($H \otimes I$ et CNOT) :

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Les 4 états de Bell

Ils forment une base orthonormée :

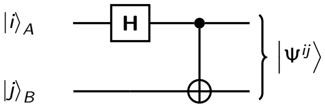
$$\left|\Psi^{00}\right\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \qquad \left|\Psi^{01}\right\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$\left|\Psi^{10}\right\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \qquad \left|\Psi^{11}\right\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

on peut les écrire sous la forme :

$$\left|\Psi^{ij}\right\rangle := (I \otimes {\sigma_x}^j {\sigma_z}^i) \left|\Psi^{00}\right\rangle$$

et ils correspondent à :

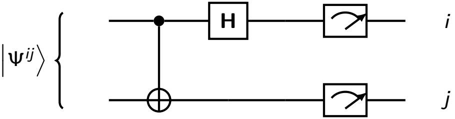


Les 4 états de Bell

en effet

initial state	$(H_A \otimes I)\,\lvert ij\rangle_{AB}$ (Hadamard sur A)	$\lvert\Psi^{ij}\rangle_{AB}$ (CNOT(A,B))
$\lvert 00\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 00\rangle + \lvert 10\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 00\rangle + \lvert 11\rangle) = \lvert\Psi^{00}\rangle$
$\lvert 01\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 01\rangle + \lvert 11\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 01\rangle + \lvert 10\rangle) = \lvert\Psi^{01}\rangle$
$\lvert 10\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 00\rangle - \lvert 10\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 00\rangle - \lvert 11\rangle) = \lvert\Psi^{10}\rangle$
$\lvert 11\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 01\rangle - \lvert 11\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 01\rangle - \lvert 10\rangle) = \lvert\Psi^{11}\rangle$

Maintenant : on peut faire le circuit "inverse" : on part de l'état de Bell, on applique la CNOT, puis Hadamard, et mesure :



Téleportation !

On a ce qu'il faut pour la Téléportation !

Le but : Alice veut envoyer l'état (inconnu) de son qubit $|\Phi\rangle_{Alice} = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ à Bob , mais elle ne peut envoyer que deux bits classiques, ce n'est pas suffisant pour envoyer α et β.

Auparavant Alice et Bob ont partagé (un qubit chacun) deux qubits intriqués dans l'état $\left|\Psi^{00}\right\rangle_{AB}$

L'état initial (pour le système à 3 qubits), est le suivant :

$$|\Phi\rangle_{Alice} \otimes \left|\Psi^{00}\right\rangle_{AB}$$

Les 4 états de Bell

En développant :

$$|\Phi\rangle_{Alice} \otimes \left|\Psi^{00}\right\rangle_{AB} = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle))$$

$$|\Phi\rangle_{Alice} \otimes \left|\Psi^{00}\right\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|000\rangle_{AliceAB} + \alpha|011\rangle_{AliceAB}) +$$

$$\beta|100\rangle_{AliceAB} + \beta|111\rangle_{AliceAB})$$

Ce qui vaut opportunément (verifier en développant) :

$$(|00\rangle + |11\rangle) \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + (|01\rangle + |10\rangle) \otimes (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)$$

$$+(|00\rangle - |11\rangle) \otimes (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + (|01\rangle - |10\rangle) \otimes (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)$$

Les 4 états de Bell

On identifie alors avec les formes $\left|\Psi^{ij}\right\rangle$ (sur AliceA à présent)

$$\left|\Psi^{00}\right\rangle \otimes (\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle) + \left|\Psi^{01}\right\rangle \otimes (\alpha\,|1\rangle + \beta\,|0\rangle)$$

$$+ \left|\Psi^{10}\right\rangle \otimes (\alpha\,|0\rangle - \beta\,|1\rangle) + \left|\Psi^{11}\right\rangle \otimes (\alpha\,|1\rangle - \beta\,|0\rangle)$$

Les 4 états de Bell

On peut aussi identifier :

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = |\Phi\rangle$$

$$\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle = \sigma_x|\Phi\rangle$$

$$\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle = \sigma_z|\Phi\rangle$$

$$\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle = \sigma_x\sigma_z|\Phi\rangle$$

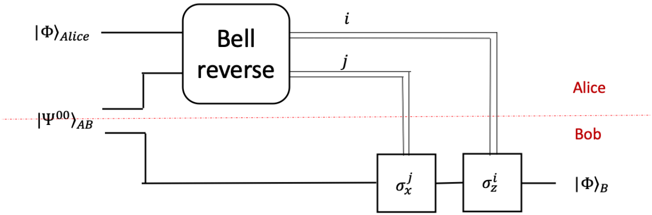
Les 4 états de Bell

Et donc :

$$|\Phi\rangle_{Alice} \otimes \left|\Psi^{00}\right\rangle_{AB} = \frac{1}{2}(\left|\Psi^{00}\right\rangle_{AliceA} \otimes |\Phi\rangle_B + \left|\Psi^{01}\right\rangle_{AliceA} \otimes \sigma_x |\Phi\rangle_B$$

$$+ \left|\Psi^{10}\right\rangle \otimes \sigma_z |\Phi\rangle_B + \left|\Psi^{11}\right\rangle \otimes \sigma_x\sigma_z |\Phi\rangle_B)$$

Le protocole de téléportation



on voit que Bob a le qubit d'Alice (Alice ne l'a plus). Et donc :
1- Alice mesure AliceA dans la base de Bell 00.. 11
2- Alice envoie les 2 bits à Bob
3- Bob Applique $\sigma_z^i \sigma_x^j$

Les 4 états de Bell

Résultat mesure Alice	Etat de Bob	Alice envoie i,j	Bob Applique	Etat final de Bob
$\left\|\Psi^{00}\right\rangle_{AliceA}$	$\|\Phi\rangle_B$	$0,0$	I	$\|\Phi\rangle_B$
$\left\|\Psi^{01}\right\rangle_{AliceA}$	$\sigma_x\|\Phi\rangle_B$	$0,1$	σ_x	$\|\Phi\rangle_B$
$\left\|\Psi^{10}\right\rangle_{AliceA}$	$\sigma_z\|\Phi\rangle_B$	$1,0$	σ_z	$\|\Phi\rangle_B$
$\left\|\Psi^{11}\right\rangle_{AliceA}$	$\sigma_x\sigma_z\|\Phi\rangle_B$	$1,1$	$\sigma_z\sigma_x$	$\|\Phi\rangle_B$