微分方程建模和计算

张亚楠

数学科学学院

Email: ynzhang@suda.edu.cn

引例: 匀加速运动

- 位移s, 速度v, 加速度a
- 初始时刻$t = 0$, 位移s_0, 初速度v_0
- 问题：t时刻的位移，速度是多少?
- 中学物理知识：(如何得到？)

$$v(t) = v_0 + at; \quad s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

在小时间区间$[t, t+\Delta t]$, 内考虑问题

$$s(t+\Delta t) - s(t) = \bar{v} * \Delta t$$

$$v(t+\Delta t) - v(t) = \bar{a} * \Delta t$$

两端同除以Δt, 并取极限，可得：

$$\frac{ds}{dt} = v(t), \quad \frac{dv}{dt} = a$$

以上两式是带有微分的等式(微分方程ODEs),

未知量v, s是t的函数. 如何求解?

1　微分方程数学建模

- 建模：通过物理，化学或者生物的原理来描述变量的变化过程；从而得到一组微分方程的描述。
- 求解：在给定初值和边界值得情况下，通过解析的方法或者数值方法进行求解。
- 模型评价：分析所获得的解得意义，讨论模型参数对解的影响，最后对实际问题提供指导

2 人口模型

2.1 Malthus 模型

18世纪，英国人Malthus在分析了一百多年的人口统计资料之后，提出了 Malthus模型。

模型假设

(1) 设 $x(t)$表示 t时刻的人口数，且 $x(t)$连续可微

(2) 人口的增长率r 是常数（增长率 = 出生率 - 死亡率）

(3) 人口数量的变化是封闭的(无人口流入流出)，即人口数量的增加与减少只取决于人口中个体的生育和 死亡，且每一个个体都具有同样的生育能力和死亡率。

建模与求解

由假设，t时刻到 $t + \Delta t$时刻人口的增量为

$$x(t + \Delta t) - x(t) = rx(t)\Delta t$$

于是得到

$$\frac{dx}{dt} = rx,$$

$$x(0) = x_0$$

求得解

$$x(t) = x_0 \exp(rt)$$

模型评价

考虑二百年来人口增长的实际情况，1961年世界人口总数为3.06×10^9, 在1961-1970这段时间内，每年平均的人口自然增长率为2%, 则求解公式为

$$x(t) = 3.06 \times 10^9 \exp\Big(0.02 * (t - 1961)\Big)$$

根据1700-1961年间的世界人口统计数据，发现这些数据与上式的计算结果相当吻合。在此期间，世界人口大约每35年增加一倍，而上式计算出每34.6年增加一倍。

问：该模型用于人口预测是否可靠?

Table 1: 数据对比

时间	2000 年	2004年	2008年	2049年
实际人口数(billion)	6.1	6.4	6.7	*
预测人口数(billion)	6.7	7.2	7.8	18

当$t = 2449$时，$x(t) = 5.3 \times 10^{13}$, 即 53万亿，相当于陆地上每平方米容纳3个人。

显然，用这个模型预测的结果远高于实际人口增长。原因是对增长率r的估计过于简单。 因此，可以对r 是常数的假设提出疑问。

2.2 Logistic模型(阻滞增长模型)

如何对增长率r进行修正呢？ 地球上的资源是有限的，它只能提供一定数量 的生命生存所需要的条件。随着人口数量的增加，自然资源，环境条件等对人口 增长的限制作用将越来越显著。在人口较少时可以把增长率看做常数，那么当人口 增加到一定数量之后，就应该把增长率r 看作是随人口增加而减小的量， 即 增长率 r是人口 $x(t)$的函数$r(x)$，且是随x 增加而减少的函数。

模型假设

（1）设 $r(x)$为x 的线性函数， $r(x) = r - sx$（简单原则，首选线性）

（2） 自然资源与环境条件所能容纳的最大人口数 x_m, 当 $x = x_m$时，增长率 $r(x_m) = 0.$

由

$$r(x_m) = r - sx_m = 0$$

可得系数 $s = r/x_m$ 则

$$r(x) = r(1 - x/x_m)$$

建模与求解

代入新的增长率函数，可得

$$\frac{dx}{dt} = r(1 - \frac{x}{x_m})x$$

$$x(t_0) = x_0$$

分离变量法可求解上述方程的通解。或者利用MATLAB命令”dsolve”:

```
syms x(t) r xm
dsolve(diff(x) == r*(1-x/xm)*x)
ans =    xm;    0;
-xm/(exp(-xm*(C9 + (r*t)/xm)) - 1)
```

代入初值即可确定常数 C9, 则符合初值条件的解为

$$x(t)=\frac{x_m}{1+(\frac{x_m}{x_0}-1)e^{-r(t-t_0)}}$$

检验模型

（1） $\lim_{t\to\infty} x(t)=x_m$, 无论初值如何选择， 人口总数 以$x_m$为极限。

（2） 当 $0<x<x_m$ 时， $\frac{dx}{dt}=r(1-\frac{x}{x_m})x>0$, 这说明$x(t)$是单调增加的。

（3） 令$x''(t)=0$ 得到 $x=x_m/2$(验证是拐点)。说明 当$x<\frac{x_m}{2}$时， $x(t)$为下凸函数(Convex); 当$x>\frac{x_m}{2}$ 时， $x(t)$为凹函数(Concave).

图像如何？ 是否合理？

说明：

人口变化率$\frac{dx}{dt}$在$x = \frac{x_m}{2}$时取得最大值，即人口总数达到极限值一半以前是加速增长期；经过这一点之后，增长率会逐渐变小，最终达到零。

2.3 美国人口的预测模型

认识人口数量的变化规律，建立人口模型，做出比较准确的预报，是有效控制人口 增长的前提。下表给出了近两个世纪的美国人口统计数据(million单位)， 建立人口预测模型，最后利用结果预测2010年美国人口。

Table 2: 美国人口统计数据

年份	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860	1870	1880	1890
人口	3.9	5.3	7.2	9.6	12.9	17.1	23.2	31.4	38.6	50.2	62.9
年份	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
人口	76.0	92.0	106.5	123.2	131.7	150.7	179.3	204.0	226.5	251.4	281.4

建模与求解

记$x(t)$为第 t年的人口数量，设人口年增长率$r(x)$ 为 x线性函数。 自然资源与环境条件能容纳的最大人口数量为x_m. 建立Logistic人口模型

$$\frac{dx}{dt} = r(1 - x/x_m)x,$$
$$x(t_0) = x_0;$$

其解为：

$$x(t) = \frac{x_m}{1 + (\frac{x_m}{x_0} - 1)e^{-r(t-t_0)}}$$

参数x_m, r 如何确定?

线性拟合：最小二乘法

记 $s = r/x_m$，则Logistic方程表示为

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = r - sx$$

利用向后差商逼近导数可得到代数方程组

$$\frac{1}{x_k}\frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t} = r - sx_k, \quad k = 2, 3, \cdots, 22$$

其中$\Delta t = 10$为时间步长，也即是统计时间间隔。

如何利用已知数据$x_k = x(t_k)$确定参数r, s?

上述线性方程组共有几个未知量？几个方程？

记$f_k = (x_k - x_{k-1})/\Delta t/x_k$, 则上述线性系统可写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 1 & -x_2 \\ 1 & -x_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -x_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{22} \end{pmatrix}$$

超定方程如何求解？数学上：左乘系数矩阵的转置矩阵。

matlab求解: ”\”; 该符号运算非常强大，矩阵规模十万及以下的 方程组求解，直接运用该符号即可。

求得 $x_m = 373.5135$, $r = 0.0247$. 代入解公式

$$x(t) = \frac{x_m}{1 + (\frac{x_m}{x_0} - 1)e^{-r(t-t_0)}}$$

2010年人口预测值：x(2010) = 297.4800 （实际统计数据309.35）

思考：(留作练习)

（1）如何选择初值t_0? $t_0 = 1790$与 $t_0 = 1990$ 预测结果是否一样？ 若不一样应该如何选择？

（2）对一阶导数的离散是否可采用其它方法？ 向前差商； 中心差商是否可行？ 若可行，试重复以上求解过程得到新的拟合参数r, x_m，并与向后差商结果进行比较？

上机练习

考虑Logistic人口模型中的微分方程

1. 用MATLAB符号解计算，得到解析解，并作图显示该解析解；

2. 使用MATLAB数值解方法获得数值解，并作图显示；

3. 结合理论分析，说明 $x_m/2$为什么是个特殊时间点

上机器练习

p18. 思考（2）

采用向前差商和向后差商逼近一阶导数，重新拟合参数r, x_m; 并与之前的预测结果进行比较。

提示: (向前差商和中点公式)

$$x'(t_{k-1}) \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t}; \quad x'(t_{k-\frac{1}{2}}) \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t}$$

3　复习：Logistic模型：传染病模型

传染病的极大危害（瘟疫，SARS, 艾滋病，性病，...）

问题背景

（1）描述传染病的传播过程

（2）分析感染人数的变换规律

（3）预报传染病大规模暴发时刻

（4）预防传染病蔓延的手段

基本方法:

不是从医学角度分析；而是按照传播过程的一般规律建立数学模型。

模型1

设已感染人数为 $I(t)$;

假设：每个病人每天有效接触人数为λ

建模：

$$I(t+\Delta t) - I(t) = \lambda I(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = \lambda I, \Rightarrow I(t) = I_0 e^{\lambda t}$$

模型评价：$I_0 > 0,\ \lambda > 0,$

当时间t无限增大时如何？ 如何改进？

模型2 区分感染者(无效接触)和未感染者

假设： （1） 总人数N不变（死亡率低）；

病人和健康人比例分别$I(t)$, $H(t)$

(2) 每个病人每天有效接触人数为λ, 且使

接触的健康人致病。

建模： $I(t+\Delta t)-I(t)=I(t)*\Delta t*\dfrac{N-I(t)}{N}\lambda$

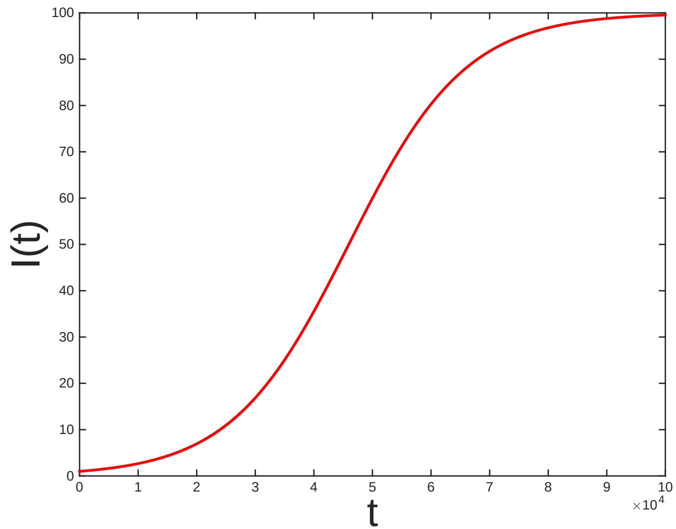
$$\Rightarrow \frac{dI}{dt}=\lambda I(t)\left(1-\frac{I(t)}{N}\right)$$

上述方程眼熟不?

$$I(t) = \frac{N}{1 + (\frac{N}{I_0} - 1)e^{-\lambda(t-t_0)}}$$

取 N = 100(million); $I_0 = 1$,

$\lambda = 10^{-4}$; 曲线如右图。



评价:　（1） $I(t) = N/2$时,

求得暴发时刻（拐点）

$t = \lambda \log(N/I_0 - 1)$

（2） $t \to \infty$ 时，$I(t) \to N$

所有人都将感染? 合理否?

人为干预：隔离，治疗, ...

4 Matlab求微分方程的符号解

在MATLAB中，符号运算工具箱提供了强大的求解常微分方程的符号运算命令dsolve。常微分方程在MATLAB中按如下规定表达。

符号diff表示求导运算d/dt。diff(y) 表示对y求一阶导数；diff(y,n)表示对变量求n阶导数；例如 diff(y,2), diff(y,3)...

等号写成==

由此，常微分方程$y'' + 2y' = y$在MATLAB中，写成

diff(y,2) + 2*diff(y) == y

4.1 求微分方程的通解

无初边值条件的常微分方程，求解命令得到通解。使用格式为：

dsolve(diff_equation)

dsolve(diff_equation, 'var')

上式中 diff_equation 为待解得方程；第一种格式以t为自变量；第二种格式需要自己定义自变量；例如选择var 为 x, s, ... 更多信息在MATLAB命令窗口键入

help dsolve

例：求微分方程的通解

$$x^2 + y + (x - 2y)y' = 0$$

syms y(x)

dsolve(xˆ 2 + y + (x-2*y)*diff(y) == 0, 'x')

ans =

x/2 + ((4*xˆ3)/3 + xˆ2 + C14)ˆ(1/2)/2

x/2 - ((4*xˆ3)/3 + xˆ2 + C14)ˆ(1/2)/2

例：　求常微分方程初值问题

$$y''' - y'' = x,$$

$$y(1) = 8, \quad y'(1) = 7, \quad y''(2) = 4.$$

matlab 命令：

```
syms y(x)
Dy = diff(y);
D2y = diff(y,2);
D3y = diff(y,3);
y = dsolve(D3y+ D2y == x, y(1) == 8, Dy(1) == 7, D2y(2) ==4,'x')
```

求解常微分方程组 常用命令格式

dsolve('diff_eqn1, diff_eqn2, ...', 'var')

dsolve('diff_eqn1, diff_eqn2, ...' ,
'cond1, cond2, ...', 'var')

第一种格式用于求ODEs的通解，第二种格式加上初边值 条件，用于具体求解。

例：求解常微分方程组

$$f'' + 3g = \sin(x),$$

$$f' + g' = \cos(x)$$

的通解，以及在初值条件下的解。

$$f'(2) = 0, f(3) = 3, g(5) = 1$$

MATLAB命令:

```
syms f(x) g(x)
Df = diff(f); D2f = diff(f,2); Dg = diff(g);
[f,g ] = dsolve(D2f + 3*g == sin(x), Dg + Df == cos(x),'x');
```

5 常微分方程数值求解: ode23, ode45

对于简单的一阶方程的初值问题

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

MATLAB求解

[t,y]= ode23(@ rhs , $[t_0, t_{final}]$, init_value);

其中ode23可以替换为ode45等其他方法；输入参数rhs指右端项f, 用m文件定义；$[t_0, t_{final}]$ 指求解区间；init_value指初值条件。

输出 t, y 均是向量或矩阵；可用size查看其维数

例： 求解以下初值问题，并作图

$$y' = -2y + 2x^2 + 2x, \quad 0 < x \leq 0.5,$$

$$y(0) = 1;$$

```
function f = rhs(x,y)
f = -2*y + 2*x.^2 + 2*x;
end
```

```
[t, y]= ode45(@rhs,[0,0.5],1);
plot(t,y)
```

6 常微分方程组和高阶方程的数值解

一阶微分方程组的解法和一阶方程的解法类似；不同之处在于 rhs是 向量函数；初值是向量；

高阶方程，可用通过变量代换或者称之为降阶法，化简为一阶方程组；进而 按照上述过程求解。

例：求解初值问题

$$y''' - 3y'' - y'y = 0,$$

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = 1; \quad y''(0) = -1;$$

（1）设 $y_1 = u$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$, 则

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = 3y_3 + y_1 y_2 \end{cases}$$

（2） 把一阶方程组写成接受两个参数x，y，返回一个列向量的m文件，例如：rhs.m

```
function f = rhs(x,y)
f =[y(2);   y(3);   3*y(3) + y(1)*y(2)];
```

注意：尽管不一定用到参数x, *.m文件必须接受此两参数。且此处f必须是列向量。

（3）用MATLAB解决此问题的函数形式

[x, y]= solver(@rhs,[t_0, t_{final}], init_value);

这里的solver为ode45，ode23等；输入参数rhs是m文件中定义的常微分方程组的右端项；$[t_0, t_{final}]$是求解区间；init_value指初值向量：可以是列向量也可行向量.

[x, y]= ode45(@rhs,[0,1],[0; 1; -1]);

得到的y(:,1)是初值问题的解；y是矩阵。

例： 求 Van der Pol 方程

$$\begin{cases} y'' - 8(1-y^2)y' + y \quad -2\sin(x) = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0; \end{cases}$$

在$0 \le x \le 100$时的数值解。 help ode23

画出函数$y(x)$在区间$x \in [0, 100]$的图像。

help plot

例: Lorenz(wiki) In 1963, Edward Lorenz developed a simplified mathematical model for atmospheric convection. The model is a system of three ordinary differential equations now known as the Lorenz equations:

$$\begin{cases} \dot{x} = & \sigma(y-x) \\ \dot{y} = & x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = & xy - \beta z \end{cases}$$

Here x, y, z make up the system state, t is time, and σ, ρ, β are the system parameters.

计算$\sigma = 10, \beta = 8/3, \rho = 28$时，初值取$[3, 2, 1]$时的解； 并作图： 要求x-y ; x-z 坐标；以及三维图 ： help plot3

上机练习

1. 以θ仰角，v_0初速度发射的炮弹，落点在哪里?

（1） 不考虑空气阻力

（2）考虑空气阻力

2. 进一步考虑，没有阻尼时，仰角多少射程最远? 有阻尼时如何? 画出仰角与射程的函数曲线。

上机练习

1. 某足球运动员主罚任意球；罚球点正对球门中央位置，距离球门距离30m. 问该任意球初速度和仰角分别为多少时，能击中球门右上角？且用时最短？

（不考虑和考虑空气阻力两种情况）

（1）防守方不设人墙

（2）防守方人墙高度1.90m

提示：球门规格；运动员能给出的初速度范围；人墙距离罚球点距离可上网搜索。

7 偏微分方程简介与建模

建模过程中，有些未知量同时依赖于多个自变量，例如：即与时间变量有关 同时又与空间变量有关； 此时需要考虑偏微分方程建模。偏微分方程的求解一般比 常微分方程更加复杂，也没有简单的MATLAB命令或者函数可以直接处理（或者比较复杂），因此我们还需要简单介绍一些数值求解的方法(差分法)。

偏微分方程的建模和偏微分方程数值解是应用数学里的两个重要学科；我们只能介绍简单的 方程以及简单的差分方法。（可参考数学物理方程和偏微分方程数值解等教材。）

7.1 由守恒律导出方程

许多物理现象可以用偏微分方程来描述，一些方程可以由守恒律导出。

背景： 假设有某种流体持续流过一根中空的细管；问：随时间变化， 某一固定时刻和固定点的流体密度是多少?

建模： 设$u(x,t)$是某种流体(水，石油)的密度函数；t是时间变量， x是对应的空间坐标。在细管上取一段$[x_1,x_2]$来考虑问题。

$$t\text{时刻, 区间}[x_1,x_2]\text{内的流体质量} \quad = \int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx$$

上式积分 $\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx$ 与t相关，不同时刻结果不同。

由质量守恒(管子中的水不会产生或 消失)，上述积分只跟端点x_1，x_2处的进出有关；我们称之为通量flux, 记为$f(u)$.

对流Advection

如果流体以恒定流速a流动，则通量函数

$$f(u) = au$$

即 密度函数$u(x,t)$ 乘以流速a得到t时刻， x点处的通量。

在时间区间$[t, t+\Delta t]$内考虑区间内$[x_1, x_2]$质量变化

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x,t+\Delta t)dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx = \Big[f\big(u(x_1,t)\big) - f\big(u(x_2,t)\big)\Big]\Delta t$$

等式两边同时除以Δt并关于Δt取极限得到

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx = f\big(u(x_1,t)\big) - f\big(u(x_2,t)\big) = \int_{x_1}^{x_2} \partial_x f(u)dx$$

交换积分和求导次序，

$$\int_{x_1}^{x_2} \Big[\partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) = 0\Big]$$

由x_1，x_2的任意性，得到

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$$

上述方程称之为conservation law; 当$f(u) = au$时，称之为对流方程advection。

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0$$

假定$x \in \mathrm{R}$, 给定初值$u_0(x)$;如何求解? 若$a \neq constant$?

扩散diffusion

假设流体在管子中没有流动，速度为零。根据之前的结果得到 $\partial_t u = 0$. 即是初始状态永不改变。初值$u_0(x) = const$时，确实如此。 但是，当初值不是常值函数时，由于分子运动等原因，密度会缓慢的改变。

(例：墨汁滴到水里，车流，人群流动, ...)

特点：高密度流向低密度

此时通量满足（Fick’s first law）：

$$f(u) = -\kappa \partial_x u$$

进而得到扩散方程：$\partial_t u = \kappa \partial_{xx} u$; 其中$\kappa$是扩散系数。

上述方程也称之为热传导方程(heat equation); 以上过程可以用来模拟一根细棒上温度的 分布。此时，菲克定律也称之为傅里叶热传导定律（Fourier）。

有些时候，扩散系数是随x变化的，比如合金物体上的温度传输。 $f = -\kappa(x)\partial_x u$, 热传导方程变为

$$u_t = (k(x)u_x)_x$$

Advection-diffusion

回到流体的问题；更一般的情况需要同时考虑对流和扩散。此时， $f = au - \kappa u_x$, 得到对流扩散方程

$$u_t + au_x = \kappa u_{xx}$$

源和汇(sorce and sink)

有些时候，$\int u(x,t)dx$ 的改变不仅与通量有关。如果存在一个 扩散源或者热源，记相应的密度函数$\psi(x,t)$

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx = -\int_{x_1}^{x_2} \partial_x f(u)dx + \int_{x_1}^{x_2} \psi(x,t)dx$$

得到方程：$u_t + f(u)_x = \psi(x,t)$

当$\psi < 0$, 应理解为吸热点或者汇。例如：带有热源ψ 的细铁棒的热量分布可用方程$u_t = \kappa u_{xx} + \psi$来描述.

有时候热源也依赖于未知函数u， 例如，将铁棒置于温度为 ϕ恒温环境中得到

$$u_t = \kappa u_{xx} + \alpha(\phi - u(x,t))$$

8 Taylor 公式与数值微分公式

若函数 $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$, 以及 $x_0 \in (a,b)$, 成立

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(s)(x-s)^n ds$$

设$h>0$, 和 c为两个常数，可推导出如下数值微分公式:

- 若$f(x) \in C^2[c-h, c+h]$, 则

$$f(c) = \frac{1}{2}\Big[f(c-h) + f(c+h)\Big] - \frac{h^2}{2}f''(\xi_1),$$
$$f'(c) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi_2),$$
$$f'(c) = \frac{f(c) - f(c-h)}{h} + \frac{h}{2}f''(\xi_3)$$

- 若$f(x) \in C^3[c-h, c+h]$, 则

$$f^{'}(c) = \frac{f(c+h) - f(c-h)}{2h} + \frac{h^2}{6} f^{'''}(\xi_4)$$

- 若$f(x) \in C^4[c-h, c+h]$, 则

$$f^{''}(c) = \frac{f(c+h) - 2f(c) + f(c-h)}{h^2} + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi_5)$$

以上几个公式是求解常微分方程和偏微分方程时常有的方法。

9 一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x > 0 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

选定常数 $h > 0$做为x方向的网格步长，并记$x_i = ih$为网格节点.

可用差分方法求解在网格节点处的近似值$y_i \approx y(x_i)$.

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} = f(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, 3, \cdots$$

上述公式分别称为向前Euler和向后Euler公式。

令$f(x,y)=-y,\ y_0=1,$容易验证函数$y(x)=e^{-x}$是微分方程的解. 利用以上两个数值公式求解并与精确解做比较. 取网格步长$h=0.4,0.2$ 可得计算结果Fig1

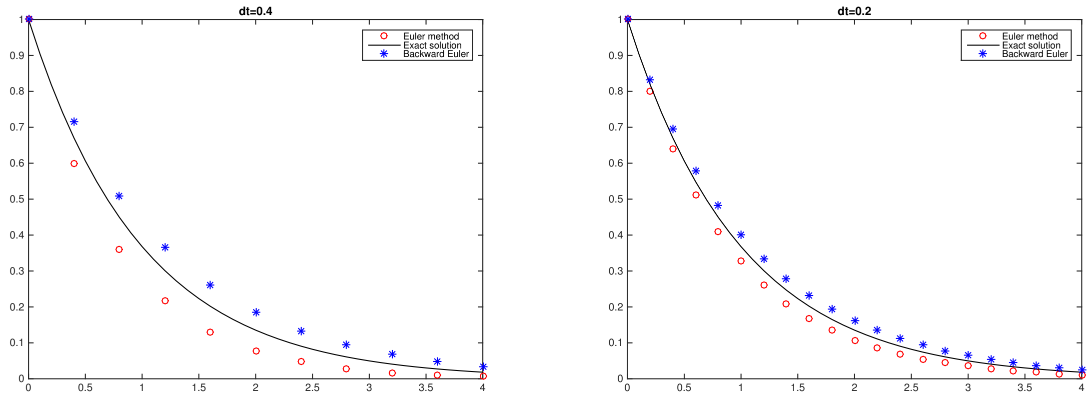


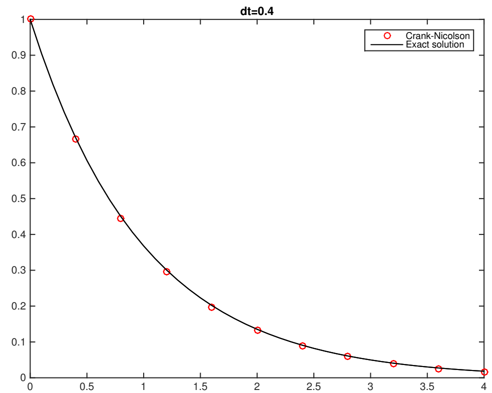
Figure 1: Numerical results for difference grid size $h=0.4,\ 0.2$

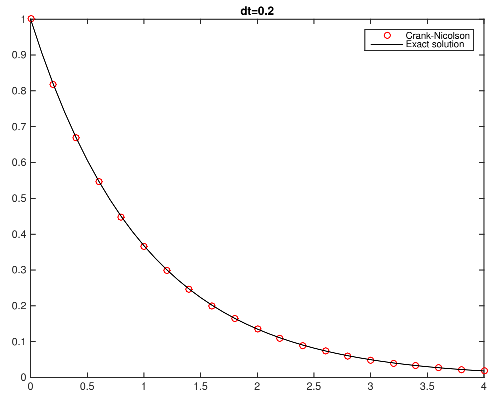
如何提高精度?

在网格中间点离散，可得具有较高精度的对称格式

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h}=-\lambda f(x_{i+\frac{1}{2}},\frac{y_{i+1}+y_i}{2}).$$

取网格步长$h=0.4,\ 0.2$计算上例. 对比可知该格式精度较高.





练习: 利用上述中点格式计算该例子，并画出上图

9.1 常微分方程两点边值问题

考虑如下定解问题

$$
\begin{cases}
-u''(x) + q(x)u = f(x), \qquad 0 < x < 1, \\
u(0) = a, \ u(1) = b.
\end{cases}
$$

类似于前文网格处理方式，选取整数N等分$[0,1]$, 并记网格步长$h = 1/N$， $x_i = ih$为网格节点, 见Fig2.

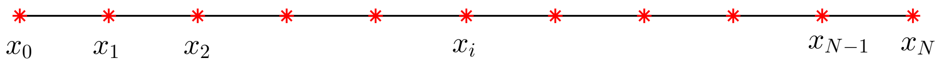


Figure 2: Uniform Mesh

利用二阶导数的离散公式

$$
f''(c) = \frac{f(c+h) - 2f(c) + f(c-h)}{h^2} + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi_5)
$$

可得如下差分格式

$$\frac{-u_{i+1}+2u_i-u_{i-1}}{h^2}+q(x_i)u_i=f(x_i),\quad 1\le i\le N-1$$

$$u_0=a,\quad u_N=b.$$

上述差分格式的矩阵形式为：$A\vec{u}=\vec{f}$, 其中：

$$A=\begin{bmatrix} 2+h^2q(x_1) & -1 & & & \\ -1 & 2+h^2q(x_2) & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2+h^2q(x_{N-2}) & -1 \\ & & & -1 & 2+h^2q(x_N-1) \end{bmatrix}_{(N-1)\times(N-1)},$$

$$\vec{u}=[u_1,u_2,\cdots,u_{N-1}]^T,$$

$$\vec{f}=[h^2f(x_1)+a,h^2f(x_2),h^2f(x_3),\cdots,h^2f(x_{N-2}),h^2f(x_{N-1})+b]^T.$$

练习

取$q(x) = 1$, $f(x) = (\pi^2 + 1)\sin(\pi x)$, 容易验证精确解为$u(x) = \sin(\pi x)$.

分别取$N = 10$，20等分，计算该例，并画图与精确解比较。

10 一维抛物型偏微分方程初边值问题

考虑如下定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = \alpha(t), \qquad u(1,t) = \beta(t), & t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

目标：求解带状区域$[0,1] \times [0,\infty)$上网格节点处的数值解

取正整数N, 记空间步长$h = 1/N$, $x_i = ih$. $\Delta t > 0$为时间步长，记$t_j = j\Delta t$. 定义网格函数$u_i^j \approx u(x_i,t_j)$, 可得:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_j) \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) \approx \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2}$$

代入并化简可得：$u_i^{j+1} = u_i^j + \dfrac{\Delta t}{h^2}(u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j) + \Delta t f(x_i, t_j)$

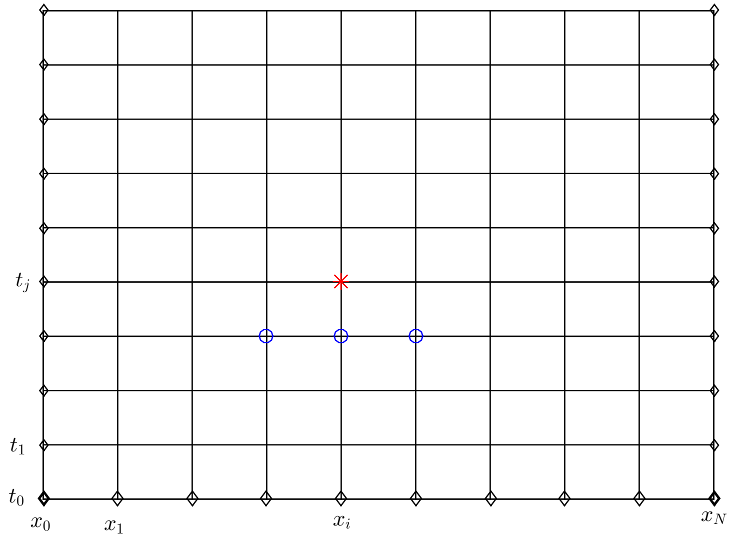


Figure 3: Mesh 2D

计算如下条件下得数值解$f(x,t)=0$, $\phi(x)=e^x$, $\alpha(t)=e^t$, $\beta(t)=e^{t+1}$. 步长取$h=0.1$, $\Delta t=0.005$.

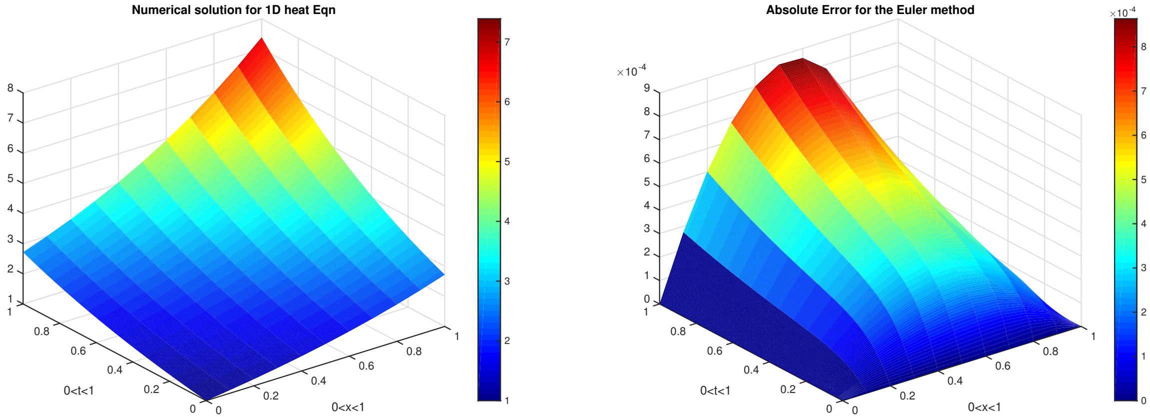


Figure 4: 抛物型问题差分格式数值解

注意时间空间步长的选取满足条件$\dfrac{\Delta t}{h^2}\le\dfrac{1}{2}$. 若条件不满足时，例如$\Delta t=0.006$, 结果如何?

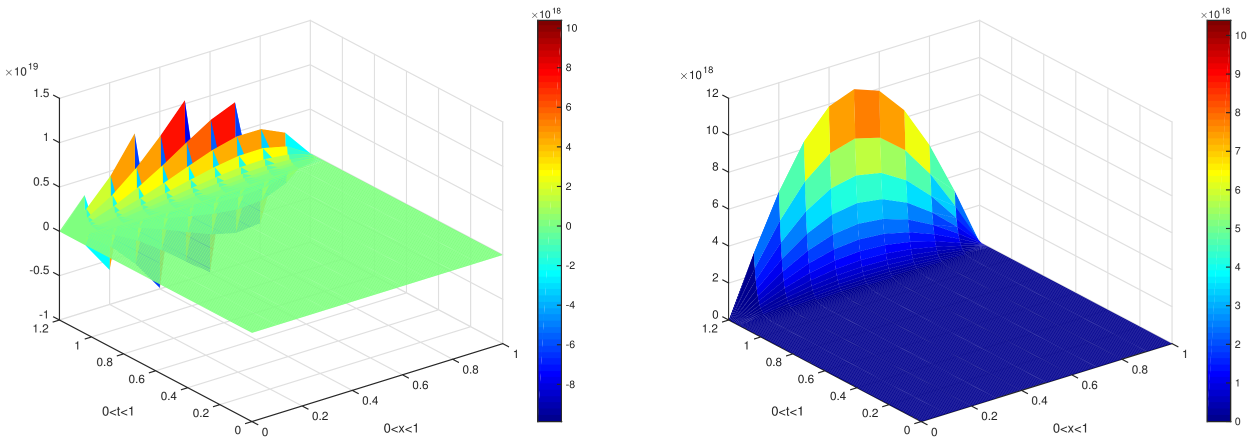


Figure 5: 稳定性条件不满足时的数值解: $h = 0.1, \Delta t = 0.006$

为什么要满足稳定性条件？ 该条件是如何得到的？ 能否改进算法？

对时间方向一阶导数采用向后Euler公式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t}$$

一阶精度隐格式

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} = \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} + f(x_i, t_j)$$

记$\lambda = \Delta t/h^2$, 即:

$$-\lambda u_{i-1}^j + (1+2\lambda)u_i^j - \lambda u_{i-1}^j = u_i^{j-1} + \Delta t f(x_i, t_j)$$

如何求解？ 是否稳定？

假设$\vec{U}^{j-1} = [u_0^{j-1}, u_1^{j-1}, u_2^{j-1}, \cdots, u_N^{j-1}]$已知， 求解$\vec{U}^j$相对于解一个两点边值问题。写出系数矩阵和右端项，

采用 MATLAB backslash $\backslash$

利用隐格式计算结果如下

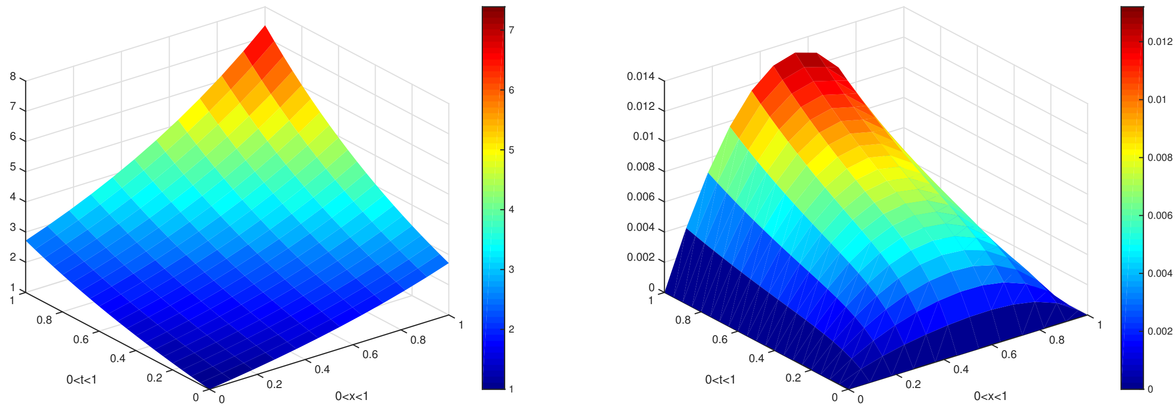


Figure 6: 抛物型问题隐格式数值解 $h = 0.1, \Delta t = 0.05$.

练习 利用隐格式计算上述例子，并画出上图，help surf

参数选择见 p58，时间空间步长选择 $h = 0.1, \Delta t = 0.05$.

练习：

$$\partial_t u = \kappa \partial_{xx} u, \quad 0 < x < 1,\ t > 0$$

$$\partial_x u(0,t) = \partial_x u(1,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \cos \pi x$$

参数选取 $\kappa = 0.1; \Delta t = h = 0.01$, 分别计算 $t = 8$，10，12时的解。

采用向后Euler和(method of line) 计算结果，

并画出的两种方法所得到曲线。

method of line

（1）对方程进行空间离散, 得到

$$\frac{du_j}{dt} = \kappa \frac{-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}}{h^2}, \ 1 \leq j \leq 100$$

j = 1 or 100 时；结合边界条件处理。

（2）求解关于$\{u_j(t)\}_{j=1}^{100}$的ODEs；

help ode23 ode45

11 一阶双曲方程数值求解

对流方程（Cauchy problem）

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \phi(x), \ -\infty < x < +\infty$$

验证$u(x,t) = \phi(x - at)$满足方程。初始波按随时间推移以速度a移动，波形不变。

数值求解相对复杂

记$u_j^k \approx u(x_j, t_k)$, 差商近似导数，得到:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} + a\frac{u_j^k - u_{j-1}^k}{\Delta x} = 0$$

记$\lambda = a\Delta t/\Delta x$, 上式可写成

$$u_j^{k+1} = (1 - \lambda)u_j^k + \lambda u_{j-1}^k$$

类似对空间导数采用向前差分

$\partial_x u(x_j, t_k) \approx (u_{j+1}^k - u_j^k)/\Delta x$，得到

$$u_j^{k+1} = (1 + \lambda)u_j^k - \lambda u_{j+1}^k$$

练习

初值

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x \in \mathrm{R} \backslash [0,1] \end{cases}$$

取$a = 1, \Delta t = 0.1, \Delta x = 0.2,$ 利用两种格式

计算 $t = 7$的值，并与精确值比较。

提示：计算区域可以选择$[-10, 10]$