Taller 1
Algoritmos

Entrega: David Jose Leon Aroca

Ing. de Sistemas y Computación
Universidad Nacional de Colombia
2016-II

---

1. Desarrolle los siguientes ejercicios del libro [Cormen09]

   (a) Ejercicio 3.1-2 (pag 52)

   (b) Ejercicio 3.1-7 (pag 53)

   (c) Problema 3.3 (pag 61)

   (d) Ejercicio 4.4-7 (pag 93)

   (e) Use el método maestro para dar cotas ajustadas para las siguientes recurrencias:

   - $T(n) = 8T(n/2)+n$
   - $T(n) = 8T(n/2)+n^3$
   - $T(n) = 8T(n/2)+n^5$

2. Dado el siguiente pseudocódigo:

```
def misterio(n): if n <=
    1:
        return 1
    else:
        r = misterio(n / 2) i = 1
        while n > i*i: i = i + 1
        r = r + misterio(n / 2) return r
```

   (a) Plantee una ecuación de recurrencia para $T(n)$, el tiempo que toma la función misterio(n).

   (b) Dibuje el árbol de recursión y calcule:

   i. La altura del mismo
   ii. El número de nodos por cada nivel
   iii. La suma de los nodos de cada niveliv. La suma total

   (c) Determine el comportamiento asintótico de $T(n)$ justificándolo de manera detallada.

3. Ejercicio 22.3-1 (pag 610)

4. Ejercicio 22.3-2 (pag 611)

5. Ejercicio 22.4-2 (pag 614)

Resuelva los problemas en el sitio SPOX del curso (http://alg-unal.spox.spoj.pl/). Explique claramente su solución y haga el envío correspondiente al sitio.

SOLUCION

1.a.

Para probar esto, tenemos que demostrar que existen constantes $c_1, c_2, n_0 > 0$ tal que $0 \leq c_1 n^b \leq (n+a)^b \leq c_2 n^b$ para todos $n \geq n_0$.

Tenga en cuenta que, $n + a \leq 2n$, cuando $|a| \leq n$ También tenga en cuenta, $n + a \geq \frac{1}{2}n$, cuando $|a| \leq \frac{n}{2}$

Por lo tanto, cuando $n \geq 2|a|$,

$$0 \leq \frac{n}{2} \leq n + a \leq 2n$$

Como $b > 0$, podemos elevar todos los términos de la desigualdad anterior al poder de b sin romper la desigualdad:

$$0 \leq (\frac{n}{2})^b \leq (n+a)^b \leq (2n)^b$$
$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2^b} n^b \leq (n+a)^b \leq 2^b n^b$$

Asi que, $(n+a)^b = \Theta(n^b)$ porque existe $c_1 = 1/2^b$, $c_2 = 2^b$ y $n_0 = 2|a|$.

b. Dado que ambas cosas no pueden pasar simultáneamente, no existe la intersección.

$$o(g(n)) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

$$\omega(g(n)) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

c. Simplificamos las funciones:

d.

$$(\sqrt{2})^{\lg n} = \sqrt{n}$$

$$n^{1/\lg n} = 2$$

$$n^{\lg\lg n} = (\lg n)^{\lg n}$$

$$2^{\lg n} = n$$

$$4^{\lg n} = n^2$$

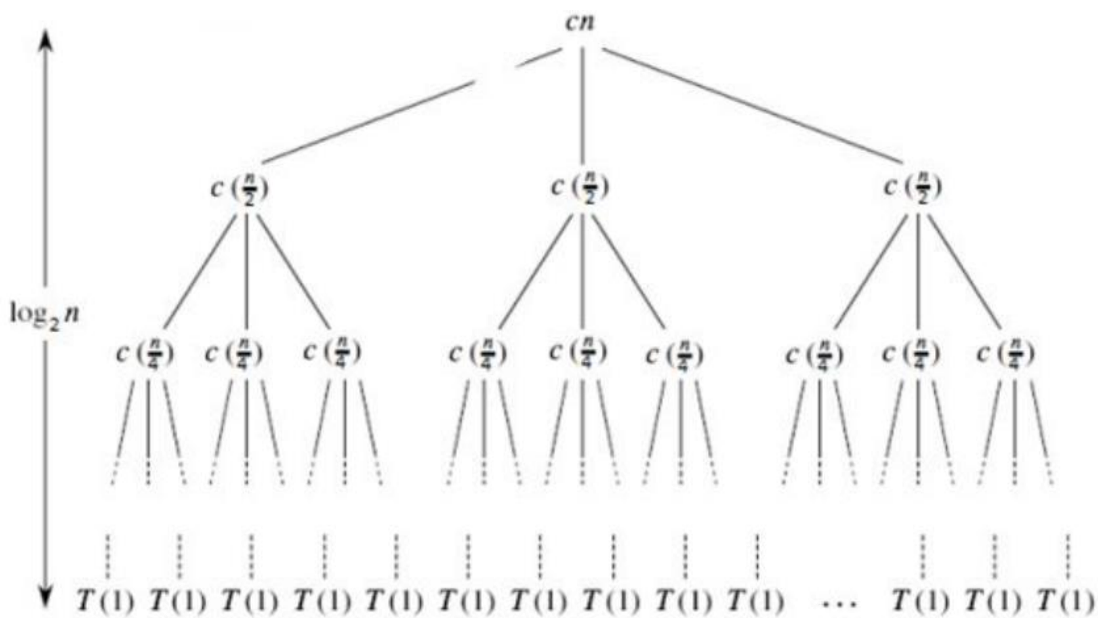
$$lg^*(\lg n) = \lg^* n - 1$$

El orden requerido de las funciones es:

$2^{2n+1}, 2^{2^n}$
$(n+1)!, n!$
$e^n, n\,2^n, 2^n, (3/2)^n$
$(lg\,n)^{lg\,n} = n^{lg\,lg\,n}, (lg\,n)!$
$n^3, n^2 = 4^{lg\,n}, n\,lg\,n = lg(n!), 2^{lg\,n} = n, (\sqrt{2})^{lg\,n} = \sqrt{n}, 2^{\sqrt{2\,lg\,n}}$
$lg^2\,n, ln\,n, \sqrt{lg\,n}$
$ln\,ln\,n, 2^{lg^*\,n}$
$lg^*\,n, lg^*\,(lg\,n), lg(lg^*\,n)$
$n^{(1/lg\,n)} = 2, 1$

c.2. $$f(n) = 2^{2^n+1} \cdot (1 + \sin n)$$

d.



La recursion toma la forma T(n) = 4T(n/2) + Cn
Aumento = 4 en cada recursion
Disminucion = 2 en tamaño de subrpoblema
En cada nivel habrian entonces 4^i nodos cada uno con un costo de $\frac{cn}{2^i}$ a profundidad i desde 0 hasta lg n.

e.

- $T(n) = 8T(n/2)+n$
- $T(n) = 8T(n/2)+n^3$
- $T(n) = 8T(n/2)+n^5$

Para $T(n) = 8T(n/2)+n$ Tenemos que: a = 8, b = 2 y d = 1, como 8 > 2, la cota seria

$O(n^{log_2 8}) = O(n^3)$

Para $T(n) = 8T(n/2)+n^3$ Tenemos que: a = 8, b = 2 y d = 3, como $8 = 2^3$, la cota seria

$O(n^3 log\ n)$

Para $T(n) = 8T(n/2)+n^5$ Tenemos que: a = 8, b = 2 y d = 5 , como $8 = 2^5$, la cota seria

$O(n^5)$

2.a. $T(n) = 2T(n/2) + n^{0.5}$

b.i. $\log_2 n$

ii. 2^i

iii.

iv. $2^{\log_2 n}$

c. Por el teorema maestro tenemos que $a > b^d = 2 > 2^{0.5}$ $O(n^{\log_2 2}) = O(n)$

3.

Grafo Dirigido

(i,j)	BLANCO	GRIS	NEGRO
BLANCO	TBFC	BC	C
GRIS	TF	TFB	TFC
NEGRO		B	TFBC

Grafo no Dirigido

(i,j)	BLANCO	GRIS	NEGRO
BLANCO	TB	TB	
GRIS	TB	TB	TB
NEGRO		TB	TB

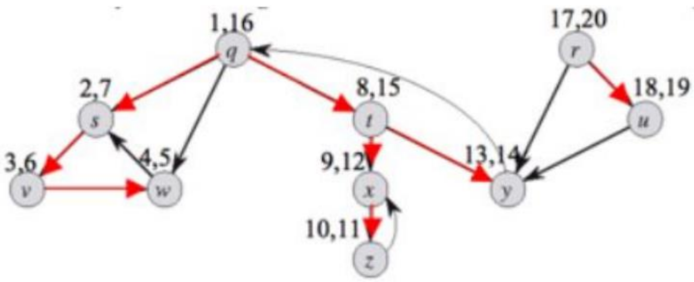
T: Los bordes de los arboles son bordes en el bosque de profundidad G(pi). Borde (u,v) es un borde de un arbol si v fue descubierto por primera vez explorando el borde (u,v).

B: Los bordes posteriores son esos bordes (u,v) conectando un vertice u a un antecesor v en un arbol en profundidad. Consideramos que los bucles automaticos, que pueden aparecer en los graficos dirigidos, tienen bordes posteriores.

F: Los bordes delanteros son aquellos que no son bordes (u,v) conectando un vertice u a un descendiente v en un arbol en profundidad.

C. Los bordes cruzados son todos los otros bordes. Pueden ir entre vertices en el mismo arbol de profundidad, siempre que un vertice no sea antepasado del otro, o no pueden ir entre vertices en diferentes arboles de profundidad.

4.



Aristas: (q,s),(s,v),(v,w),(q,t),(t,x),(x,z),(t,y),(r,u)

Bordes posteriores: (w,s), (z,x), (y,q).

Bordes delanteros: (q,w)

Bordes cruzados: (r,y), (u,y)