Análisis aplicado

(1.1.2) f cuadrática convexa de la forma $f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x$

Queremos demostrar que el minimizador de una dimensión sobre $x_k + \alpha p_k$ es

$$\alpha_k = -\frac{\nabla f_k^T p_k}{p_k^T Q p_k}$$

Primero, como $f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x \Rightarrow \nabla f(x) = \nabla\left(\frac{1}{2} x^T Q x - b^T x\right) = Qx - b \quad (*)$

Ahora bien, queremos ver qué pasa sobre $x_k + \alpha p_k$. En particular, como buscamos el minimizador α_k, si tenemos una función que dependa de α, la derivamos e igualamos a cero, podemos encontrarlo. ¿Cómo relacionamos f, $x_k + \alpha p_k$, y una función que dependa de ambos a través de α? : digamos que $g(\alpha) = f(x_k + \alpha p_k)$

$\Rightarrow \nabla g(\alpha) = \nabla f(x_k + \alpha p_k)^T \cdot (x_k + \alpha p_k)' = \nabla f(x_k + \alpha p_k)^T \cdot p_k$

Para encontrar el mínimo, queremos $\nabla g(\alpha_{min}) = \nabla f(x_k + \alpha_{min} p_k)^T p_k = 0$

Por $(*)$, $\nabla f(x_k + \alpha_{min} p_k) = Q(x_k + \alpha_{min} p_k) - b$

$\Rightarrow \nabla g(\alpha_{min}) = \left(Q(x_k + \alpha_{min} p_k) - b\right)^T p_k = (Qx_k + \alpha_{min} Q p_k - b)^T p_k$

$= (Qx_k)^T p_k + \alpha_{min} p_k^T Q p_k - b^T p_k = 0$

$\Leftrightarrow \alpha_{min} p_k^T Q p_k = -\left((Qx_k)^T p_k - b^T p_k\right) \Leftrightarrow \alpha_{min} = -\frac{(Qx_k)^T p_k - b^T p_k}{p_k^T Q p_k}$

Queremos $\alpha_k = -\frac{\nabla f_k^T p_k}{p_k^T Q p_k}$

Para eso querríamos que $\nabla f_k^T p_k = (Qx_k)^T p_k - b^T p_k \Leftrightarrow \nabla f_k^T = (Qx_k)^T - b^T = (Qx_k - b)^T$, lo cual, por $*$, es cierto

$\therefore \alpha_k = -\frac{\nabla f_k^T p_k}{p_k^T Q p_k}$ sí es minimizador