

## Examen Parcial

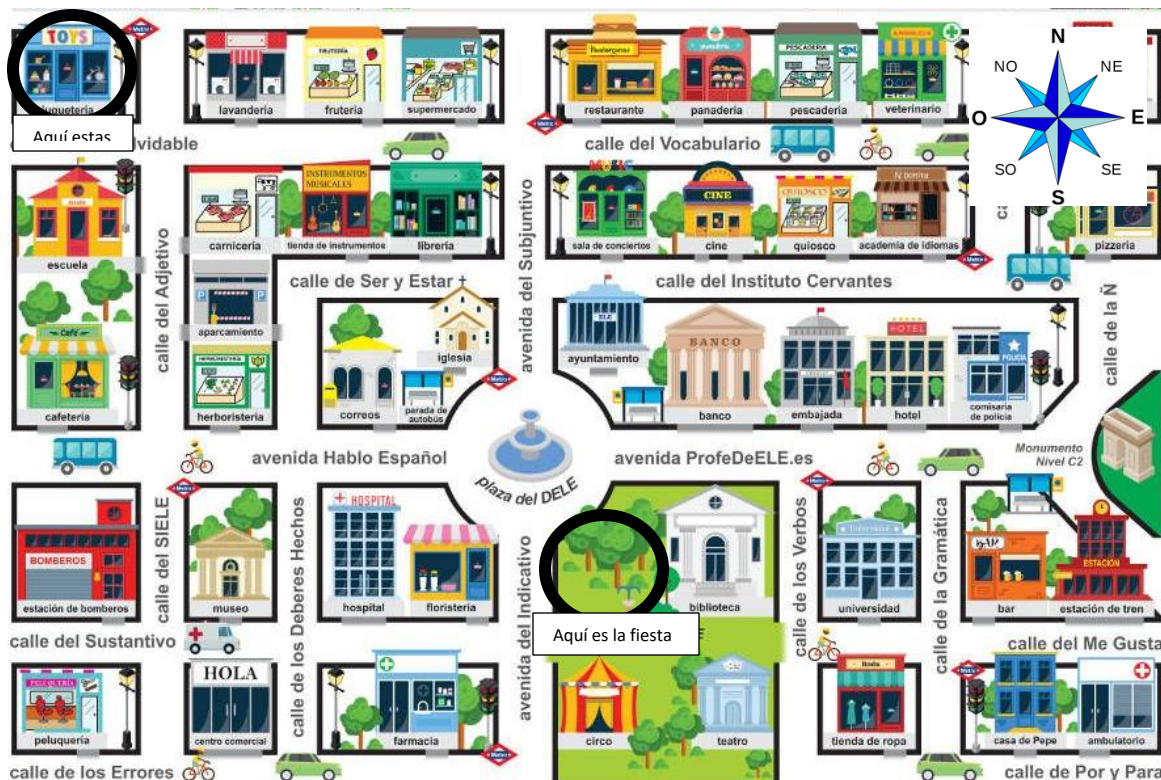
### 1.1 Teoría

#### 1.1.1 ELI5

Explica el algoritmo de búsqueda lineal a un niño de 5 años.

Imagina que tu mejor amigo te invitó a su fiesta de cumpleaños, pero se te hizo tarde por ir a comprar su regalo. Todos tus amigos ya llegaron y se están divirtiendo, por lo que quieres llegar a la fiesta lo más rápido que se pueda para jugar con ellos. ¿Cuál será el mejor camino que debes de tomar para llegar a la fiesta?

Aquí está un mapa de la ciudad en donde vives.



Lo más rápido para llegar sería pasar por arriba de todas las casas volando, pero no tenemos súper poderes para volar, tenemos que ir caminando.

Para poder llegar a la fiesta de cumpleaños hay muchos caminos que puedes elegir, por ejemplo, hay caminos hacia el norte, sur, este y oeste. Y también hay cuadras pequeñas,

cuadras medianas y cuadras grandes. Pero de todos estos caminos queremos elegir el que sea más corto y más rápido.

Siempre tenemos que revisar nuestro mapa para no perdernos y para saber si nos estamos acercando al lugar donde están celebrando la fiesta.

Primero, revisando nuestro mapa, tenemos que escoger en qué dirección vamos a caminar. Después de que escojamos si vamos a caminar hacia el norte, al sur, al este o al oeste, volvemos a revisar nuestro mapa y tenemos que decidir si vamos a caminar una cuadra pequeña o una cuadra grande, o a lo mejor sólo necesitamos caminar media cuadra porque si no nos pasamos del lugar de la fiesta.

Ahora que ya sabemos en qué dirección vamos a caminar y cuanto vamos a caminar, podemos caminar hasta ese lugar. Cuando lleguemos a este punto, tenemos que volver a revisar nuestro mapa y volver a decidir hacia qué dirección vamos a caminar y cuanto vamos a caminar, porque no queremos caminar de más o perdernos y tardarnos mucho en llegar a la fiesta.

Cuando decidamos otra vez la dirección y cuanto vamos a caminar, caminamos hacia ese lugar. Y cuando lleguemos ahí, tenemos que volver a revisar nuestro mapa para comprobar que estamos caminando en la dirección correcta y no nos hemos pasado del lugar de la fiesta.

Cada que lleguemos a un punto tenemos que revisar nuestro mapa para ver si vamos en el camino correcto, y también tenemos que decidir si vamos a caminar hacia el norte, sur, este u oeste, y tenemos que decidir cuánto vamos a caminar. Tenemos que repetir esto muchas veces hasta que lleguemos a la fiesta de cumpleaños.

### **Explica el algoritmo de región de confianza a un niño de 5 años.**

Imagina que estás jugando con tu amigo a caliente o frío, que es un juego en el que uno tiene que esconder un juguete pequeñito en un cuarto sin que el otro vea, y luego lo tiene que encontrar. Cuando estás muy lejos del lugar en donde está escondido el juguete tu amigo te va a decir que estas muy frío, pero si estas cerca del juguete te va a decir que estas caliente, y si estás muy muy cerca del juguete vas a estar hirviendo. Entonces, si estas caliente, el juguete está cerca en algún lugar alrededor de donde estas parado.

En el primer turno tu amigo esconde el juguete, entonces a ti te toca encontrarlo. Cuando entras al cuarto donde lo escondió tienes que decidir hacia dónde vas a dar el primer paso y que tan grande vas a dar el paso, porque si te vas en la dirección incorrecta vas a estar frío, también si das un paso muy pequeñito te vas a tardar mucho en llegar a caliente, pero si das un paso muy grande te puedes ir muy lejos de donde está escondido el juguete, y vas a volver a estar frío.

Cada que das un paso con el tamaño que elijas en una dirección, tu amigo te va a decir si estás frío o caliente, si te dice que estás frío quiere decir que estás en la dirección equivocada o el paso que diste estuvo muy pequeño o muy grande, entonces el siguiente paso que des tiene que ser hacia otra dirección. Pero si tu amigo te dice que estás caliente, entonces tienes que seguir en ese camino. Poco a poco, cada paso que des, cuando lo des hacia donde está caliente, te va a acercar más a donde está el escondite del juguete.

Cuando tu amigo te diga que estas hirviendo tienes que tener mucho cuidado porque el juguete escondido está muy cerca de ti y es fácil pasarse del escondite.

Y si estas atento a todo lo que te rodea, después de dar varios pasos vas a encontrar el juguete.

### 1.1.2 Demostración

Sea  $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x$ .

De aquí que:  $\nabla f(x) = Qx - b$ , y, por lo tanto:  $-b = \nabla f(x) - Qx$ .

Una vez que conocemos la dirección de descenso  $P_k$ , definimos:

$$\Phi(\alpha) = f(x_k + \alpha P_k)$$

Ahora buscamos resolver el problema:

$$\min_{\alpha} \Phi(\alpha) = \Phi(\alpha^*)$$

Como vimos en clase  $\alpha^*$  será el tamaño de paso que nos permite avanzar lo más rápido posible y sin la necesidad de tantas evaluaciones. En particular, en este caso veremos el  $\alpha^*$  en la iteración  $k$ , por lo que  $\alpha^* = \alpha_k$ .

Como  $f$  es convexa, entonces  $Q$  es definida positiva, por lo que existe su inversa, además,  $Q$  es simétrica, por lo que  $Q = Q^T$ .

Tenemos que:

$$\Phi(\alpha_k) = f(x_k + \alpha_k P_k) = \frac{1}{2}(x_k + \alpha_k P_k)^T Q(x_k + \alpha_k P_k) - b^T(x_k + \alpha_k P_k)$$

De aquí que, usando regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \Phi'(\alpha_k) &= \nabla f(x_k + \alpha_k P_k)^T P_k = (Q(x_k + \alpha_k P_k) - b)^T P_k = (Qx_k + \alpha_k P_k^T Q - b)^T P_k \\ &= (Qx_k - b)^T P_k + \alpha_k P_k^T Q P_k \end{aligned}$$

Además, tenemos que:  $-b = \nabla f(x) - Qx$ , por lo que:

$$\begin{aligned}\Phi'(\alpha_k) &= (Qx_k - b)^T P_k + \alpha_k P_k^T Q P_k = (Qx_k + \nabla f(x_k) - Qx)^T P_k + \alpha_k P_k^T Q P_k \\ &= \nabla f(x_k)^T P_k + \alpha_k P_k^T Q P_k\end{aligned}$$

Para encontrar un punto estacionario, tenemos que encontrar  $\alpha_k$  de la igualdad  $\Phi'(\alpha_k) = 0$ . Entonces tenemos que:

$$\nabla f(x_k)^T P_k + \alpha_k P_k^T Q P_k = 0$$

$$\alpha_k P_k^T Q P_k = -\nabla f(x_k)^T P_k$$

$$\alpha_k = -\frac{\nabla f(x_k)^T P_k}{P_k^T Q P_k}$$

En particular, tenemos que  $f$  es convexa, por lo que  $\Phi$  también es convexa. Además, tenemos que  $\alpha_k = -\frac{\nabla f(x_k)^T P_k}{P_k^T Q P_k}$  es un punto estacionario de una función convexa, por lo que  $\alpha_k$  es un minimizador global.