

ELI5

- Explica para un niño de 5 años el algoritmo de búsqueda lineal y el algoritmo de región de confianza.

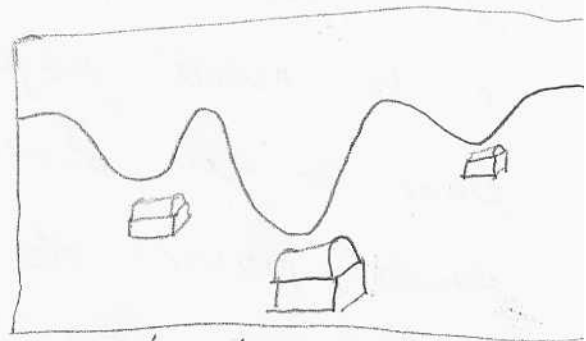
¡Hola amiguito!

Imagínate que somos piratas y encontramos un mapa del tesoro que señala un tesoro escondido en una región con muchas montañitas de la ciudad. En el mapa viene escrito "en las partes más bajas de esta zona hay enterrados tesoros, contra más abajo llegues, mejor será el tesoro enterrado".

Como piratas, queremos encontrar el tesoro más grande, pero con encontrar un tesoro basta. Además,

hay otro problema. ¡Somos una banda de piratas ciegos! Como no podemos ver lejos y hay muchas montañitas y valles, tendremos que usar nuestra cabeza para encontrar el tesoro.

Al capitán de la banda se le ocurrió una excelente idea, lo que hará será quedarse



bien parado en un solo punto y sentir en las palmas de sus pies hacia donde está más inclinado el piso. Una vez que encuentre la dirección en la que puede descender más, caminará hacia allá 10 pasos.

El capitán le cuenta su idea a sus compañeros y uno de ellos le dice que caminar 10 pasos puede ser demasiado, que tal vez se pase el tesoro. Entonces otro pirata se le ocurre una solución: El capitán caminará un paso grande en la dirección que baje más y luego volverá a pararse y sentir cual es la nueva mejor dirección, y dará otro paso en esa dirección. El capitán irá dando pasos de esa forma hasta que sienta que sus pies están planos y que no se puede bajar más, en ese lugar excavarán.

Cuando estaban dispuestos a empezar, al capitán se le ocurrió otra idea, en vez de solo sentir con sus pies, iba a sentir con sus manos como son los alrededores

de donde está, hasta donde alcancen sus brazos.

Con la sensación de sus manos, se podrá imaginar como es la montaña en la que están y dirigirse al tesoro.

De nuevo, sus compañeras le mencionan que es una buena idea, pero que su imaginación tiene un límite y no será exactamente como la montaña. La nueva solución que se propone es que se dirijan en la dirección que el capitán se imagina hasta que con sus pies sientan que la imaginación no concuerda con la realidad, y en ese momento paren y vuelvan a evaluar los alrededores.

Demostración

sea $f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x$ convexa.

P.D. el α que minimiza $f(x_k + \alpha p_k)$

$$\alpha_k = \frac{\nabla f_k^T p_k}{p_k^T Q p_k}$$

sea $\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha p_k)$ con x_k, p_k dados

veamos que $\Phi(\alpha) = \frac{1}{2}(X_k + \alpha P_k)^T Q (X_k + \alpha P_k) - b^T (X_k + \alpha P_k)$

$$= \frac{1}{2} X_k^T Q X_k + b^T X_k + \frac{1}{2} \alpha P_k^T Q P_k - b^T \alpha P_k$$

$$= f(X_k) + f(\alpha P_k)$$

Como $f(X_k)$ es constante, queremos minimizar $f(\alpha P_k)$ sobre α .

por regla de la cadena:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right)_{(X_k + \alpha P_k)} = 0 + \left(\frac{\partial f(X_k + \alpha P_k)}{\partial (X_k + \alpha P_k)} \right)_{(X_k + \alpha P_k)} \left(\frac{\partial (X_k + \alpha P_k)}{\partial \alpha} \right)_{(\alpha)} = \nabla f_{(X_k + \alpha P_k)}^T P_k$$

$$\nabla f_{(X_k)} = Q X_k - b = 0, \quad \nabla f_{(X_k + \alpha P_k)} = Q(X_k + \alpha P_k) - b$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right)_{(X_k + \alpha P_k)} = (Q(X_k + \alpha P_k) - b)^T P_k = (Q X_k - b)^T P_k + \alpha P_k^T Q P_k$$

como la función es convexa y $\nabla^2 f = Q$, entonces

Q es pos. def. y $Q^T = Q$, así

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \alpha^* = - \frac{(Q X_k - b)^T P_k}{P_k^T Q P_k} = - \frac{\nabla f_{(X_k)}^T P_k}{P_k^T Q P_k}$$

$$\therefore \alpha^* = - \frac{\nabla f_{(X_k)}^T P_k}{P_k^T Q P_k}$$

Code

posicionar camaras (8000) según datos de crímenes (n).

sean X_1, X_2, \dots, X_n las coordenadas de los crímenes (fijo)
y $C_1, C_2, \dots, C_{8000}$ las coordenadas de las cámaras (variable)

sea V_i el radio del crimen i a la cámara más cercana

$$V_i = \min \{ \|X_i - C_1\|, \|X_i - C_2\|, \dots, \|X_i - C_{8000}\| \}$$

por el tipo de problema, la norma 1 o de taxista será mejor.

entonces, queremos encontrar

$$\min \sum_{i=1}^n V_i$$

variando las C_j

Este modelo no es suave, por lo que se tendrá que plantear de otra forma para resolverlo con Análisis aplicado.

Podemos hacer una partición del área y generar una gráfica tipo histograma, después generar una función polinomial que a cada parte del histograma le asigne su peso