

Ejercicios: Bisección

David Morales

1. Use el método de bisección para encontrar soluciones precisas dentro de 10^{-2} para $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ en cada intervalo.

Con el objetivo de obtener una mejor visión del ejercicio, se procedió con el proceso de graficación.

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

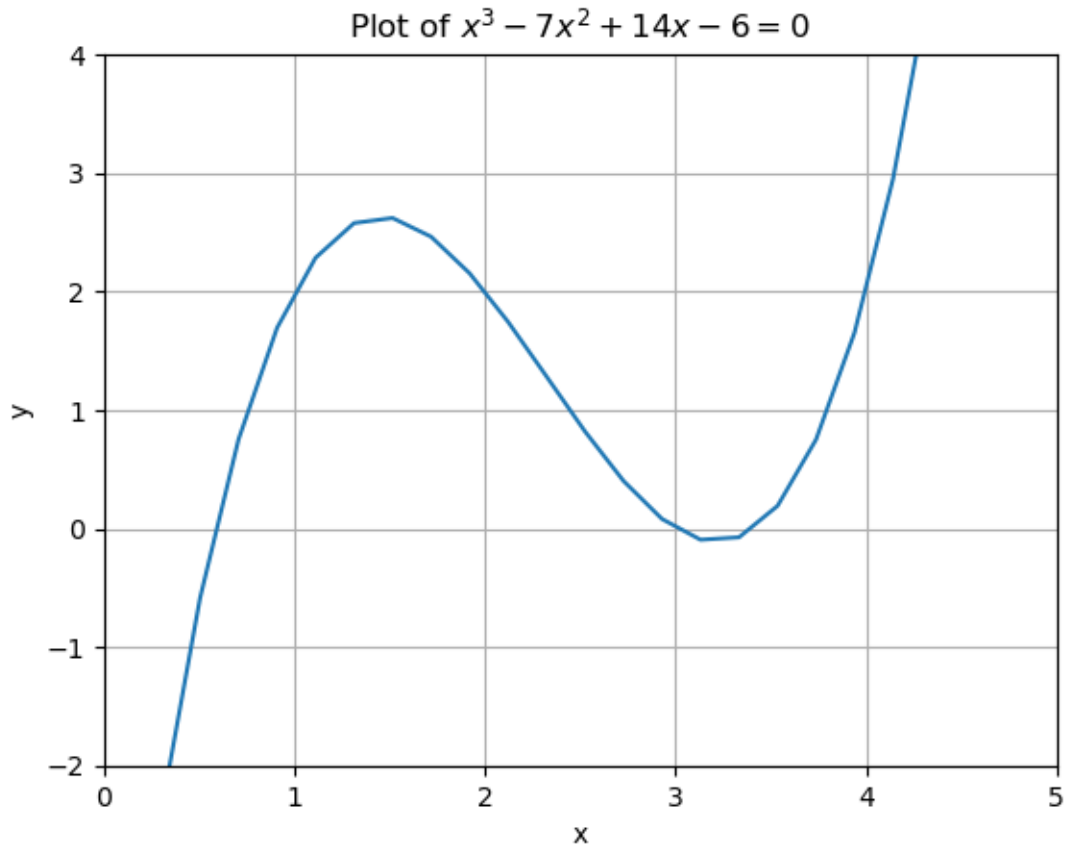
def equation(x:float)->float:
    return (x**3 - 7*x**2 + 14*x - 6)

x = np.linspace(-10, 10, 100)

y = equation(x)

plt.plot(x, y)

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Plot of $ x^{\{3\}} - 7x^{\{2\}} + 14x - 6 = 0$')
ax = plt.gca()
ax.set_ylim([-2, 4])
ax.set_xlim([0, 5])
plt.grid(True)
plt.show()
```



El siguiente método aplica la bisección a la función dada en el ejercicio.

```
from typing import Callable
def sign(x: float) -> int:
    if x > 0:
        return 1
    elif x < 0:
        return -1
    else:
        return 0

def bisection(
    a: float, b: float, *, equation: Callable[[float], float], tol: float, N: int
) -> tuple[float, float, float, int] | None:
    i = 1

    assert a < b, "a not lower than b, the interval is not valid."
```

```

assert (
    equation(a) * equation(b) < 0
), "The function does not change sign over the interval."

Fa = equation(a)
p = a
for i in range(N):
    p = a + (b - a) / 2
    FP = equation(p)
    if FP == 0 or (b - a) / 2 < tol:
        return p, a, b, i

    if sign(Fa) * sign(FP) > 0:
        a = p
        Fa = FP
    else:
        b = p
return p, a, b, i

```

a. Como resultado de la ejecución se obtiene el siguiente par ordenado: $[0, 1]$

```

a = 0
b = 1
tol = 10**(-2)

resultado= bisection(a = a, b=b,equation=equation,tol = tol, N = 20)
print("En el rango ["+str(a)+","+str(b)+"], en la iteración n°: "+str(resultado[3])+" se encontró la raíz "+str(resultado[0])+" dentro de la precisión de "+format(tol, ".0e")+ " es: "+str(resultado[0]))

```

En el rango $[0, 1]$, en la iteración n°: 6 se encontró que la raíz dentro de la precisión de 10^{-2}

4.a. Dibuje las gráficas para $y = x^2 - 1$ y $y = e^{1-x^2}$

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def equation1(x:float)->float:
    return ((x**2) - 1)

def equation2(x:float)->float:
    return np.exp(1-x**2)

```

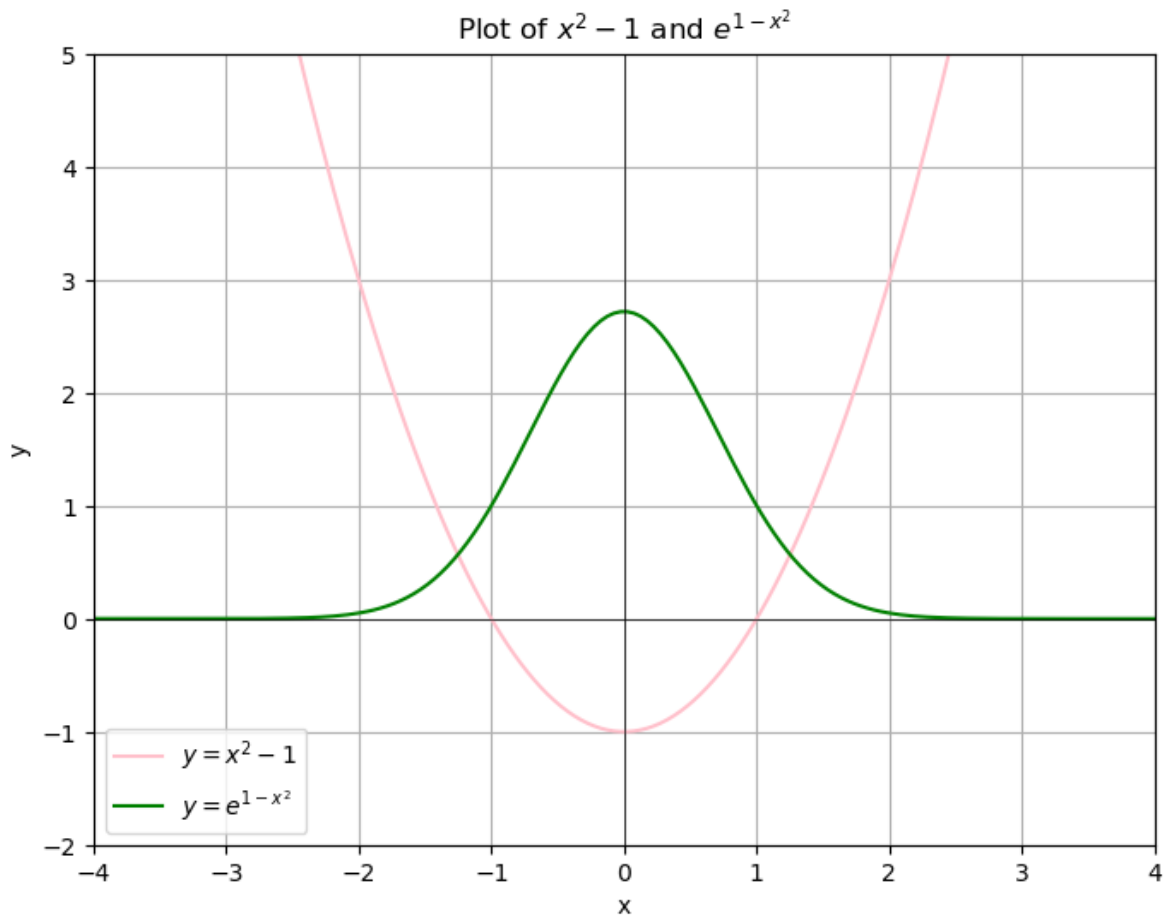
```

x = np.linspace(-5, 5, 200)
y1 = equation1(x)
y2 = equation2(x)
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(x, y1, label=r'$y = x^{\{2\}} - 1$', color='pink')
plt.plot(x, y2, label=r'$y = e^{\{1-x^{\{2\}}\}}$', color='green')

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Plot of  $x^2-1$  and  $e^{1-x^2}$ ')
plt.axhline(0, color='black',linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='black',linewidth=0.5)
ax = plt.gca()
ax.set_ylim([-2, 5])
ax.set_xlim([-4, 4])

plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

```



4.b. Use el método de bisección para encontrar una aproximación dentro de 10^{-3} para un valor de $[-2, 0]$ con $x^2 - 1 = e^{1-x^2}$

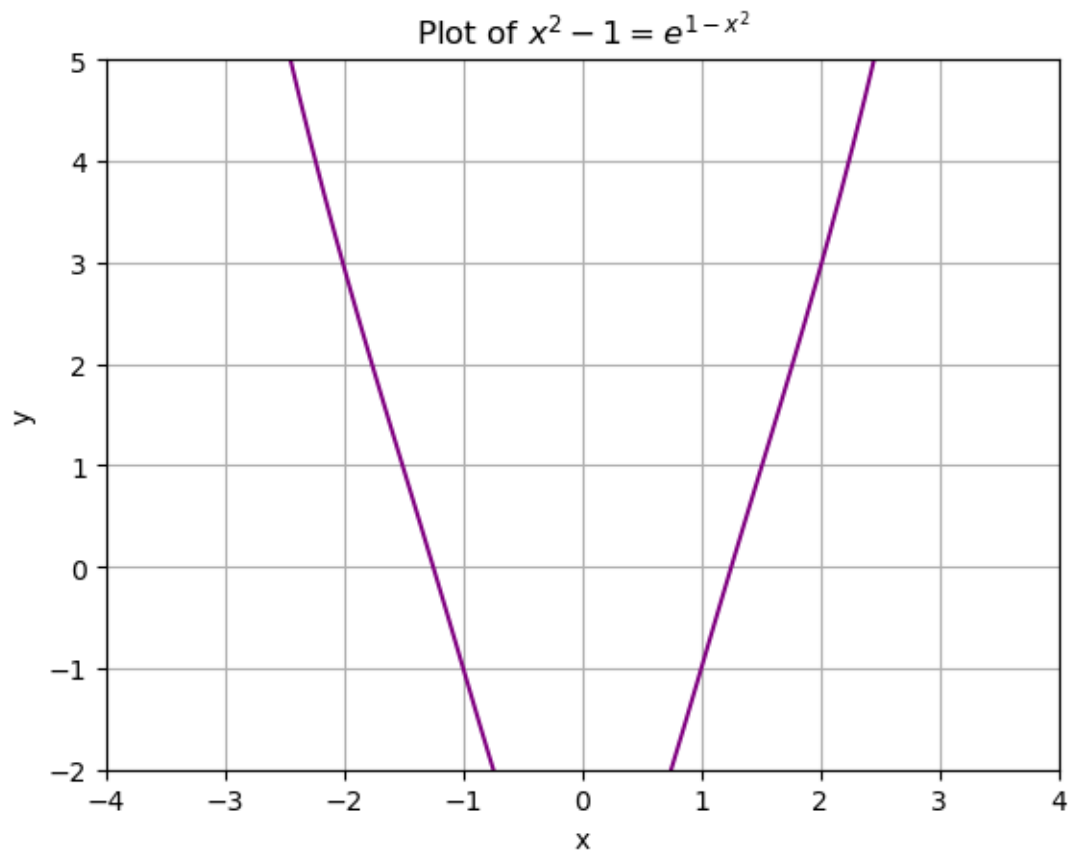
Se grafica la función.

```
def eq(x):
    return ((x**2) - 1)-(np.exp(1-x**2))

x = np.linspace(-5, 5, 100)
y = eq(x)

plt.plot(x, y, label = '$x^2 - 1 = e^{1-x^2}$', color = 'purple')
plt.xlabel('x')
```

```
plt.ylabel('y')
plt.title('Plot of  $x^2 - 1 = e^{1-x^2}$ ')
ax = plt.gca()
ax.set_ylim([-2, 5])
ax.set_xlim([-4, 4])
plt.grid(True)
plt.show()
```



Aplicando el método de la bisección

```
a = -2
b = 0
tol = 10**(-3)

result= bisection(a = a, b=b,equation=eq,tol = tol, N = 20)
print("En el rango [" +str(a)+"," +str(b)+"], en la iteración n°: " +str(result[3])+" se encontró  

      " dentro de la precisión de " +format(tol, ".0e")+ " es: " +str(result[0]))
```

En el rango $[-2,0]$, en la iteración n°: 10 se encontró que la raíz dentro de la precisión de

Ejercicios Aplicados

1. Un abrevadero de longitud L tiene una sección transversal en forma de semicírculo con radio r . (Consulte la figura adjunta.) Cuando se llena con agua hasta una distancia h a partir de la parte superior, el volumen V de agua es:

$$V = L \left(0.5\pi r^2 - r^2 \arcsin\left(\frac{h}{r}\right) - h\sqrt{r^2 - h^2} \right)$$

Suponga que $L = 10$, $r = 1$ y $V = 12.4$. Encuentre la profundidad del agua en el abrevadero dentro de 0.01 *cm*

Datos del Ejercicio:

- Tolerancia: 0.01cm
- Intervalo: $[h_{\min}, h_{\max}]$, es decir: $[0, 1]$

```
import math

L = 10
r = 1
V_dado = 12.4
tol = 0.01

def f_h(h):
    V_calculado = L * (0.5 * math.pi * r**2 - r**2 * math.asin(h / r) - h * math.sqrt(r**2 - h**2))
    return V_calculado - V_dado

result = bisection(a=0,b=r,equation=f_h,tol=tol,N=20)

print("En el rango [" + str(0) + "," + str(r) + "], en la iteración n°: " + str(result[3]) + " se encontró la raíz " + str(result[0]) + " dentro de la precisión de " + format(tol, ".0e") + " es: " + str(result[0]))
```

En el rango $[0,1]$, en la iteración n°: 6 se encontró que la raíz dentro de la precisión de

2. Un objeto que cae verticalmente a través del aire está sujeto a una resistencia viscosa, así como a la fuerza de gravedad. Suponga que un objeto con masa m cae desde una altura s_0 y que la altura del objeto después de t segundos es

$$s(t) = s_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right),$$

donde ($g = 9.81, \text{m/s}^2$) y (k) representa el coeficiente de la resistencia del aire en (Ns/m). Suponga ($s_0 = 300, \text{m}$), ($m = 0.25 \text{ kg}$) y ($k = 0.1, \text{Ns/m}$). Encuentre, dentro de (0.01 segundos), el tiempo que tarda un cuarto de kg en golpear el piso.

```
s0 = 300
m = 0.25
k = 0.1
g = 9.81
tol = 0.01

def f_t(t):
    s_t = s0 - (m * g / k) * t + (m**2 * g / k**2) * (1 - math.exp(-k * t / m))
    return s_t

result = bisection(a=0,b=s0,equation=f_t,tol=tol,N=20)

print("En el rango [" + str(0) + "," + str(s0) + "], en la iteración n°: " + str(result[3]) + " se encontró la raíz de la ecuación " + str(f_t(0)) + " dentro de la precisión de " + format(tol, ".0e") + " es: " + str(result[0]) + " seg.")
```

En el rango $[0, 300]$, en la iteración n°: 14 se encontró que la raíz dentro de la precisión de 10^{-4} es: 0.0001.

Ejercicios Teóricos

1. Use el teorema 2.1. para encontrar una cota para el número de iteraciones necesarias para lograr una aproximación con precisión de 10^{-4} para la solución de $x^3 - x - 1 = 0$ que se encuentra dentro del intervalo $[1, 2]$. Encuentre una aproximación para la raíz con este grado de precisión.

```
a = 1
b = 2
tol = 10**(-4)
def equation3(x):
    return (x**(3)-x-1)

result = bisection(a=a,b=b,equation=equation3,tol=tol,N=20)

print("Después de " + str(result[3]+1) + " iteraciones la solución aproximada en la precisión de " + format(tol, ".0e") + " es: " + str(result[0]))
```

Después de 14 iteraciones la solución aproximada en la precisión de 10^{-4} es: 1.324768066406198.