Ejercicios: Errores Numéricos

David Morales

1. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por $p*$.

a) $p = \pi, p^* = \frac{22}{7}$

$error_{abs} = |p - p^*| = |\pi - \frac{22}{7}|$

$error_{relativo} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|\pi - \frac{22}{7}|}{|\pi|}$

```
import math
error_absoluto = abs(math.pi - 22/7)
error_relativo = error_absoluto/abs(math.pi)
print(f"{error_relativo:.10f}")
print(f"{error_absoluto:.10f}")
```

$error_{relativo} = 0.0004024994$

$error_{abs} = 0.0012644893$

b) $p = \pi, p^* = 3.1416$

$error_{abs} = |p - p^*| = |\pi - 3.1416|$

$error_{relativo} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|\pi - 3.1416|}{|\pi|}$

```
error_absoluto = abs(math.pi - 3.1416)
error_relativo = error_absoluto/abs(math.pi)
print(f"{error_relativo:.10f}")
print(f"{error_absoluto:.10f}")
```

$error_{relativo} = 0.0000023384$

$error_{abs} = 0.0000073464$

c) $p = e, p^* = 2.718$

$error_{abs} = |p - p^*| = |e - 2.718|$

$error_{relativo} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|e-2.718|}{|e|}$

```
error_absoluto = abs(math.e - 2.718)
error_relativo = error_absoluto/abs(math.e)
print(f"{error_relativo:.10f}")
print(f"{error_absoluto:.10f}")
```

$error_{relativo} = 0.0001036789$

$error_{abs} = 0.0002818285$

d) $p = \sqrt{2}, p^* = 1.414$

$error_{abs} = |p - p^*| = |\sqrt{2} - 1.414|$

$error_{relativo} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|\sqrt{2}-1.414|}{|\sqrt{2}|}$

```
error_absoluto = abs(math.sqrt(2) - 1.414)
error_relativo = error_absoluto/abs(math.sqrt(2))
print(f"{error_relativo:.10f}")
print(f"{error_absoluto:.10f}")
```

$error_{relativo} = 0.0001510114$

$error_{abs} = 0.0002135624$

2. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por $p*$.

a) $p = e^{10}, p^* = 22000$

$error_{abs} = |p - p^*| = |e^{10} - 22000|$

$error_{relativo} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|e^{10}-22000|}{|e^{10}|}$

```
error_absoluto = abs(math.pow(math.e,10) - 22000)
error_relativo = error_absoluto/abs(math.pow(math.e,10))
print(f"{error_relativo:.10f}")
print(f"{error_absoluto:.10f}")
```

$error_{relativo} = 0.0012015452$

$error_{abs} = 26.4657948067$

b) $p = 10^{\pi}, p^* = 1400$

$error_{abs} = |p - p^*| = |10^{\pi} - 1400|$

$error_{relativo} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|10^{\pi}-1400|}{|10^{\pi}|}$

```
error_absoluto = abs(math.pow(10, math.pi) - 1400)
error_relativo = error_absoluto/abs(math.pow(10, math.pi))
print(f"{error_relativo:.10f}")
print(f"{error_absoluto:.10f}")
```

$error_{relativo} = 0.0104978227$

$error_{abs} = 14.5442686330$

c) $p = 8!, p^* = 39900$

$error_{abs} = |p - p^*| = |8! - 39900|$

$error_{relativo} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|8!-39900|}{|8!|}$

```
error_absoluto = abs(math.factorial(8) - 39900)
error_relativo = error_absoluto/abs(math.factorial(8))
print(f"{error_relativo:.10f}")
print(f"{error_absoluto:.10f}")
```

$error_{relativo} = 0.0104166667$

$error_{abs} = 420.0000000000$

d) $p = 9!, p^* = \sqrt{18\pi}(\frac{9}{e})^9$

$error_{abs} = |p - p^*| = |9! - \sqrt{18\pi}(\frac{9}{e})^9|$

$error_{relativo} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|9!-\sqrt{18\pi}(\frac{9}{e})^9|}{|9!|}$

```
error_absoluto = abs(math.factorial(9) - math.sqrt(18*math.pi)*math.pow(9/math.e,9))
error_relativo = error_absoluto/abs(math.factorial(9))
print(f"{error_relativo:.10f}")
print(f"{error_absoluto:.10f}")
```

$error_{relativo} = 0.0092127622$

$error_{abs} = 3343.1271580516$

3) Encuentre el intervalo más largo en el que se debe encontrar $*$ para aproximarse a con error relativo máximo de $10^{-4} $ para cada valor de .

Para los literales de este ejercicio se utilizará la misma fórmula que se deducirá acontinuación

$Error_{relativo} = \frac{|p-p^*|}{|p|}$

$\frac{|p-p^*|}{|p|} \leq 10^{-4}$

$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot |p|$

$p - 10^{-4} \cdot |p| \leq p^* \leq p + 10^{-4} \cdot |p|$

a) π

$\pi - 10^{-4} \cdot |\pi| \leq p^* \leq \pi + 10^{-4} \cdot |\pi|$

```
extremo_inferior = math.pi - math.pow(10,-4) * abs(math.pi)
extremo_superior = math.pi + math.pow(10,-4) * abs(math.pi)
print(f"{extremo_inferior:.10f}")
print(f"{extremo_superior:.10f}")
```

$3.1412784943 \leq p^* \leq 3.1419068129$

b) e

$e - 10^{-4} \cdot |e| \leq p^* \leq e + 10^{-4} \cdot |e|$

```
extremo_inferior = math.e - math.pow(10,-4) * math.e
extremo_superior = math.e + math.pow(10,-4) * math.e
print(f"{extremo_inferior:.10f}")
print(f"{extremo_superior:.10f}")
```

$2.7180100003 \leq p^* \leq 2.7185536566$

c) $\sqrt{2}$

$\sqrt{2} - 10^{-4} \cdot |\sqrt{2}| \leq p^* \leq \sqrt{2} + 10^{-4} \cdot |\sqrt{2}|$

```
extremo_inferior = math.sqrt(2) - math.pow(10,-4) * math.sqrt(2)
extremo_superior = math.sqrt(2) + math.pow(10,-4) * math.sqrt(2)
print(f"{extremo_inferior:.10f}")
print(f"{extremo_superior:.10f}")
```

$1.4140721410 \leq p^* \leq 1.4143549837$

c) $\sqrt[3]{7}$

$\sqrt[3]{7} - 10^{-4} \cdot |\sqrt[3]{7}| \leq p^* \leq \sqrt[3]{7} + 10^{-4} \cdot |\sqrt[3]{7}|$

```
extremo_inferior = math.pow(7,1/3) - math.pow(10,-4) * math.pow(7,1/3)
extremo_superior = math.pow(7,1/3) + math.pow(10,-4) * math.pow(7,1/3)
print(f"{extremo_inferior:.10f}")
print(f"{extremo_superior:.10f}")
```

$1.9127398897 \leq p^* \leq 1.9131224759$

4) Use la aritmética de redondeo de tres dígitos para realizar lo siguiente. Calcule los errores absoluto y relativo con el valor exacto determinado para por lo menos cinco dígitos.

a. $\frac{\frac{13}{14}-\frac{5}{7}}{2e-5.4}$

$error_{abs} = |p - p^*| = |\frac{\frac{13}{14}-\frac{5}{7}}{2e-5.4} - \frac{\frac{13}{14}-\frac{5}{7}}{2e-5.4}|$

$error_{relativo} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|\frac{\frac{13}{14}-\frac{5}{7}}{2e-5.4} - \frac{\frac{13}{14}-\frac{5}{7}}{2e-5.4}|}{|\frac{\frac{13}{14}-\frac{5}{7}}{2e-5.4}|}$

```
error_absoluto = abs((13/14 - 5/7)/(2*math.e-5.4)-round((13/14 - 5/7)/(2*math.e-5.4),2))
error_relativo = error_absoluto/abs((13/14 - 5/7)/(2*math.e-5.4))
print(f"{error_relativo:.10f}")
print(f"{error_absoluto:.10f}")
```

$error_{relativo} = 0.0001058621$

$error_{abs} = 0.0006204179$

b) $-10\pi + 6e - \frac{3}{61}$

$error_{abs} = |p - p^*| = |-10\pi + 6e - \frac{3}{61} - (-10\pi + 6e - \frac{3}{61})|$

$error_{relativo} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|-10\pi+6e-\frac{3}{61}-(-10\pi+6e-\frac{3}{61})|}{|-10\pi+6e-\frac{3}{61}|}$

```
error_absoluto = abs((-10 * math.pi + 6 * math.e - 3/61)- round(-10 * math.pi + 6 * math.e -
error_relativo = error_absoluto/abs(-10 * math.pi + 6 * math.e - 3/61)
print(f"{error_relativo:.10f}")
print(f"{error_absoluto:.10f}")
```

$error_{relativo} = 0.0029417937$

$error_{abs} = 0.0445841070$

c) $(\frac{2}{9}) \cdot (\frac{9}{11})$

$error_{abs} = |p - p^*| = |(\frac{2}{9}) \cdot (\frac{9}{11}) - (\frac{2}{9}) \cdot (\frac{9}{11})|$

$error_{relativo} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|(\frac{2}{9})\cdot(\frac{9}{11})-(\frac{2}{9})\cdot(\frac{9}{11})|}{|(\frac{2}{9})\cdot(\frac{9}{11})|}$

```
error_absoluto = abs((2/9)*(9/11) - round((2/9)*(9/11),3))
error_relativo = error_absoluto/abs((2/9)*(9/11))
print(f"{error_relativo:.10f}")
print(f"{error_absoluto:.10f}")
```

$error_{relativo} = 0.0010000000$

$error_{abs} = 0.0001818182$

d) $\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}$

$error_{abs} = |p - p^*| = |\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}} - \frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}|$

$error_{relativo} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}} - \frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}|}{|\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}|}$

```
expresion = (math.sqrt(13)+math.sqrt(11))/(math.sqrt(13)-math.sqrt(11))
error_absoluto = abs(expresion - round(expresion))
error_relativo = error_absoluto/abs(expresion)
print(f"{error_relativo:.10f}")
print(f"{error_absoluto:.10f}")
```

$error_{relativo} = 0.0017421656$

$error_{abs} = 0.0417392569$

5. Los primeros tres términos diferentes a cero de la serie de Maclaurin para la función arcotangente son: $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$. Calcule los errores absoluto y relativo en las siguientes aproximaciones de mediante el polinomio en lugar del arcotangente:

a. $4[arctan(\frac{1}{2}) + arctan(\frac{1}{3})]$

```
arctan1 = 1/2 - (1/3)*(1/2)**3 + (1/5)*(1/2)**5
arctan2 = 1/3 - (1/3)*(1/3)**3 + (1/5)*(1/3)**5
print(arctan1)
print(arctan2)
```

$arctan(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{5}(\frac{1}{2})^5 = 0.4645833333333333$

$arctan(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(\frac{1}{3})^3 + \frac{1}{5}(\frac{1}{3})^5 = 0.32181069958847736$

```
aprox = 4*(arctan1+arctan2)
print(aprox)
```

$4[arctan(\frac{1}{2}) + arctan(\frac{1}{3})] = 4[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{5}(\frac{1}{2})^5 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(\frac{1}{3})^3 + \frac{1}{5}(\frac{1}{3})^5] = 3.1455761316872426$

$error_{abs} = |p - p^*| = |\pi - 3.1455761316872426|$

$error_{relativo} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|\pi - 3.1455761316872426|}{|\pi|}$

```
error_abs = abs(math.pi - aprox)
error_relativo = error_abs/abs(math.pi)
print(error_relativo)
print(error_abs)
```

$error_{relativo} = 0.0012679804598147663$

$error_{abs} = 0.003983478097449478$

b. $16arctan(\frac{1}{5}) - 4arctan(\frac{1}{239})$

```
arctan1 = 1/5 - (1/3)*(1/5)**3 + (1/5)*(1/5)**5
arctan2 = 1/239 - (1/3)*(1/239)**3 + (1/5)*(1/239)**5
print(arctan1)
print(arctan2)
```

$arctan(\frac{1}{2}) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}(\frac{1}{5})^3 + \frac{1}{5}(\frac{1}{5})^5 = 0.19739733333333334$

$arctan(\frac{1}{239}) = \frac{1}{239} - \frac{1}{3}(\frac{1}{239})^3 + \frac{1}{5}(\frac{1}{239})^5 = 0.004184076002074726$

```
aprox = 16*arctan1-4*arctan2
print(aprox)
```

$16arctan(\frac{1}{5}) - 4arctan(\frac{1}{239})] = 16(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}(\frac{1}{5})^3 + \frac{1}{5}(\frac{1}{5})^5) + 4(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}(\frac{1}{239})^3 + \frac{1}{5}(\frac{1}{239})^5]) = 3.1416210293250346$

$error_{abs} = |p - p^*| = |\pi - 3.1416210293250346|$

$error_{relativo} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|\pi - 3.1416210293250346|}{|\pi|}$

```
error_abs = abs(math.pi - aprox)
error_relativo = error_abs/abs(math.pi)
print(error_relativo)
print(error_abs)
```

$error_{relativo} = 9.032277055104427e^{-6}$

$error_{abs} = 2.837573524150372e^{-5}$

6. El número e se puede definir por medio de $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{n!})$, donde $n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$ para $n \neq 0$ y $0! = 1$. Calcule los errores absoluto y relativo en la siguiente aproximación e de

a. $\sum_{n=0}^{5}(\frac{1}{n!})$

```python
aprox = 0
for n in range(5):
    aprox += (1/math.factorial(n))
print(aprox)
```

$$\sum_{n=0}^{5}(\frac{1}{n!}) = 2.708333333333333$$

$$error_{abs} = |p - p^{*}| = |e - 2.708333333333333|$$

$$error_{relativo} = \frac{|p-p^{*}|}{|p|} = \frac{|e-2.708333333333333|}{|e|}$$

```python
error_abs = abs(math.e - aprox)
error_relativo = error_abs/abs(math.e)
print(error_relativo)
print(error_abs)
```

$$error_{relativo} = 0.003659846827343768$$

$$error_{abs} = 0.009948495125712054$$

b. $\sum_{n=0}^{1} 0(\frac{1}{n!})$

```python
aprox = 0
for n in range(10):
    aprox += (1/math.factorial(n))
print(aprox)
```

$$\sum_{n=0}^{1} 0(\frac{1}{n!}) = 2.7182815255731922$$

$$error_{abs} = |p - p^{*}| = |e - 2.7182815255731922|$$

$$error_{relativo} = \frac{|p-p^{*}|}{|p|} = \frac{|e-2.7182815255731922|}{|e|}$$

```python
error_abs = abs(math.e - aprox)
error_relativo = error_abs/abs(math.e)
print(error_relativo)
print(error_abs)
```

$error_{relativo} = 1.1142547828265698e^{-07}$

$error_{abs} = 3.0288585284310443e^{-07}$

7. Suponga que dos puntos (x, y) y (x, y) se encuentran en línea recta con $y \neq y$. Existen dos fórmulas para encontrar la intersección x de la línea:

$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 y_0}$ y $x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0) y_0}{y_1 - y_0}$

a. Use los datos $(x, y) = (1.31, 3.24)$ y $(x, y) = (1.93, 5.76)$ y la aritmética de redondeo de tres dígitos para calcular la intersección con x de ambas maneras. ¿Cuál método es mejor y por qué?

- $x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 y_0}$

```
x_0 = 1.31
x_1 = 1.93
y_0 = 3.24
y_1 = 5.76
x = round (round(round(x_0*y_1,2) - round(x_1*y_0,2),3) / round(y_1*y_0,1),4)
```

$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 y_0} = \frac{1.31 \cdot 5.76 - 1.93 \cdot 3.24}{5.76 \cdot 3.24} = 0.0695$

- $x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0) y_0}{y_1 - y_0}$

```
x = round(round(round(x_1-x_0,3) * y_0, 2) / round(y_1-y_0,2),3)
```

$x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0) y_0}{y_1 - y_0} = 1.31 - \frac{(1.93 - 1.31)3.24}{5.76 - 3.24} = 0.798$

La mejor formula para calcular la intersección con es la primera, porque incluye una resta mientras que el segundo incluye tres. La operación de resta reduce las cifras significativas, porque si aplicamos una operación a dos números cercanos, se obtiene un número menos preciso.