Ejercicio. 26.26.
Se considera el grupo G cuya tabla de caracteres es:

	$[1]$	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
χ_0	1	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	1	-1	-1
χ_2	1	-1	1	1	i	$-i$
χ_3	1	-1	1	1	$-i$	i
χ_4	4	0	1	-2	0	0
χ_5	4	0	-2	1	0	0

En lo que sigue, dada la clase de conjugación c_i, podemos llamar c_i a un elemento de dicha clase.

(1) Calcula el orden de G.
(2) Calcula $|C_G(c_i)|$, que es el número de elementos de la clase de conjugación c_i.
(3) Prueba que $G_{ab} = G/[G,G]$ es un grupo cíclico de orden 4.
(4) Prueba que G tiene un 3–subgrupo de Sylow normal; lo llamamos P.
(5) Prueba que $C_G(c_4) \cap P = \{1\}$.
(6) Prueba que P es isomorfo a $C_3 \times C_3$.

Ref.: 3312e_025. ***Orden 26*** SOLUCIÓN.

(1) $|G| = \sum_{i=1}^{t} \text{grad}(\rho_i)^2 = 4\cdot 1^2 + 2\cdot 4^2 = 36$.

(2) Notamos $a_i = |C_G(c_i)|$. Aplicamos el teorema sobre ortogonalidad de las columnas de las tablas de caracteres:

$\sum_{k=1}^{t} \chi_k(c_i)\overline{\chi_k(c_j)} = \frac{|G|}{a_i}\delta_{ij} \Rightarrow a_i = \frac{|G|}{\sum_{k=1}^{t}|\chi_k(c_i)|^2}$, luego:

$i=1 \to \sum_{k=0}^{5} |\chi_k(c_1)|^2 = 4 \Rightarrow a_1 = 9$; $i=2 \to \sum_{k=0}^{5} |\chi_k(c_2)|^2 = 9 \Rightarrow a_2 = 4$

$i=3 \to \sum_{k=0}^{5} |\chi_k(c_3)|^2 = 9 \Rightarrow a_3 = 4$; $i=4 \to \sum_{k=0}^{5} |\chi_k(c_4)|^2 = 4 \Rightarrow a_4 = 9$

$i=5 \to \sum_{k=0}^{5} |\chi_k(c_5)|^2 = 4 \Rightarrow a_5 = 9$

En efecto, $1 + \sum_{i=1}^{5} a_i = 1 + 3\cdot 9 + 2\cdot 4 = 36$.

(3) Hemos visto en teoría que $[G,G] = \cap\{\text{Ker}(\chi_i) \mid i = 1,\dots,t,\ \chi_i(1) = 1\} = \bigcap_{i=0}^{3} \text{Ker}(\chi_i) = G \cap \left([1] \cup \left(\bigcup_{k=1}^{3}[c_k]\right)\right) \cap \left([1] \cup [c_2] \cup [c_3]\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow G' := [G,G] = \{1\} \cup [c_2] \cup [c_3]$. Luego $|[G,G]| = 1 + a_2 + a_3 = 9 \Rightarrow |G_{ab}| = [G:G'] = 4$. Nos falta por comprobar que es un grupo cíclico. Estudiemos el orden de $c_4G' \in G_{ab}$. Como $o(c_4G') \mid |G_{ab}| = 4 \Rightarrow o(c_4G') \in \{1,2,4\}$. Consideramos cada caso:

a) Si $o(c_4G') = 1 \Rightarrow c_4G' = G' \Rightarrow c_4 \in G' = \{1\} \cup [c_2] \cup [c_3]$, absurdo porque las clases de conjugación son una partición de G.

b) Si $o(c_4G') = 2 \Rightarrow (c_4G')^2 = c_4^2G' = G' \Rightarrow c_4^2 \in G'$. Sin embargo, esto también es absurdo pues observamos que, como $\chi_2(1) = 1 \Rightarrow \rho_2$ es de grado $1 \Rightarrow \rho_2(c_4) = \chi_2(c_4) = i$, como ρ_2 homomorfismo de grupos por ser representación, $\rho_2(c_4^2) = i^2 = -1 = \chi_2(c_4^2) \Rightarrow c_4^2 \in [c_1]$ mirando la tabla de caracteres, pero $[c_1] \cap G' = \emptyset$.

Por tanto, $o(c_4G') = 4 \Rightarrow G_{ab} = \langle c_4G' \rangle$ es un grupo cíclico de orden 4.

(4) Ya hemos comprobado que $|G'| = 9 = 3^2$, como $|G| = 36 = 3^2\cdot 2^2 \Rightarrow G'$ es 3-subgrupo de Sylow de G y es normal por ser el conmutador $\Rightarrow P = G'$.

(5) Basta con ver que $[c_4] \cap P = [c_4] \cap (\{1\} \cup [c_2] \cup [c_3]) = \emptyset$ porque las clases de conjugación son una partición de G.

(b) Como $|P|=9 \Rightarrow P \cong C_9$ ó $P \cong C_3 \times C_3$. Contamos el orden de los elementos, teniendo en cuenta q $o(c_2), o(c_3) \mid |P|=9$, luego $o(c_2), o(c_3) \in \{3, 9\}$. Recordemos q C_9 tiene 6 elementos de orden 9 y 2 de orden 3, mientras que $C_3 \times C_3$ tiene 8 elementos de orden 3. Consideramos cada caso:

a) Si $o(c_2)=o(c_3)=9 \Rightarrow P$ tiene 8 elementos de orden 9, lo cual es absurdo pues acabamos de razonar que no existen grupos de orden 9 con dicha cantidad de elementos de orden 9.

b) Si $o(c_2)=9$, $o(c_3)=3$ ó $o(c_2)=3$, $o(c_3)=9 \Rightarrow P$ tiene 4 elementos de orden 9, que es absurdo, de nuevo, por el mismo razonamiento que antes.

Por tanto, $o(c_2)=o(c_3)=3 \Rightarrow P \cong C_3 \times C_3$.

Ejercicio. 21.35.
Sea $N \lhd G$ un subgrupo normal de un grupo finito G, y sea χ un carácter de G/N. Definimos $\chi' : G \longrightarrow \mathbb{C}$ mediante $\chi'(a) = \chi(aN)$, para cada $a \in G$.
(1) Prueba que χ' es un carácter de G.
(2) Prueba que χ' es irreducible si, y sólo si, χ lo es.

Ref.: 3311e_050 SOLUCIÓN.

(1) Notaremos por $\rho : G/N \longrightarrow GL(V)$ a la representación de G/N cuyo caracter es χ. Ahora, definimos una aplicación $\rho_G : G \longrightarrow GL(V)$, $\rho_G(a) = \rho(aN)$ y queremos comprobar que ρ_G es una representación de G.
Sean $a, b \in G$, $\rho_G(a \cdot b) = \rho((ab)N) = \rho((aN)(bN)) = \rho(aN)\rho(bN) = \rho_G(a)\rho_G(b)$, donde se ha usado el producto de los elementos de G/N y que ρ es homomorfismo de grupos por ser una representación. Por tanto, ρ_G es homomorfismo de grupos y, en consecuencia, una representación de G. Si notamos por χ_G al caracter de ρ_G, tenemos que $\chi_G(a) = Tr(\rho_G(a)) = Tr(\rho(aN)) = \chi(aN) = \chi'(a)$, $\forall a \in G \Rightarrow \chi_G = \chi' \Rightarrow \chi'$ es el caracter de ρ_G.

(2) Sabemos que una representación es irreducible si, y solo si, su norma es 1, luego:
χ' irreducible $\Leftrightarrow \langle \chi', \chi' \rangle = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|G|}\sum_{a\in G} \chi'(a)\overline{\chi'(a)} = \frac{1}{|G|}\sum_{a\in G} |\chi'(a)|^2 = 1 \Leftrightarrow \sum_{a\in G} |\chi'(a)|^2 = |G|$;
χ irreducible $\Leftrightarrow \langle \chi, \chi \rangle = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|G/N|}\sum_{aN\in G/N} \chi(aN)\overline{\chi(aN)} = \frac{|N|}{|G|}\sum_{aN\in G/N} |\chi(aN)|^2 = 1 \Leftrightarrow |N| \sum_{aN\in G/N} |\chi(aN)|^2 = |G|$.
Por tanto, si probamos que $\sum_{a\in G} |\chi'(a)|^2 = |N| \sum_{aN\in G/N} |\chi(aN)|^2$, tendríamos que χ' irreducible $\Leftrightarrow \chi$ irreducible, como buscamos. Para ello, recordemos que el conjunto de clases laterales de N en G forma una partición de G, por lo que podemos escribir $\sum_{a\in G} |\chi'(a)|^2 = \sum_{aN\in G/N}\sum_{h\in aN} |\chi'(h)|^2 = \sum_{aN\in G/N}\sum_{h\in aN} |\chi(hN)|^2 \overset{(1)}{=} \sum_{aN\in G/N}\sum_{h\in aN} |\chi(aN)|^2 =$
$= \sum_{aN\in G/N} |\chi(aN)|^2 \cdot \underset{\text{cardinal}}{\#(aN)} \overset{(2)}{=} |N| \sum_{aN\in G/N} |\chi(aN)|^2$, lo que concluye la demostración.

En la igualdad (1) se ha usado que si $h \in aN \Rightarrow \exists g \in N / h = ag \Rightarrow hN = agN = aN$. En la igualdad (2) se ha usado que $aN = \{ag / g \in N\}$ y que $ag_1 = ag_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2$, luego $\#(aN) = |N|$, $\forall a \in G$.

Hallar todas las representaciones irreducibles de D_n, con n par.

Sabemos que todas las representaciones de D_n, $n\in\mathbb{N}$ son de grado 1 ó 2. De hecho, el ejercicio 3311e_040 afirma que D_n con n par tiene 4 representaciones irreducibles de grado 1. Dado que $D_n=\langle\sigma,\tau \,/\, \sigma^n=\tau^2=1, \sigma\tau=\tau\sigma^{-1}\rangle$, como $o(\sigma)=n$, $o(\tau)=2$ y por ser n par las 4 representaciones irreducibles de grado 1 serán:

	σ	τ
$\rho_{1,0}$	1	1
$\rho_{1,1}$	1	-1
$\rho_{1,2}$	-1	1
$\rho_{1,3}$	-1	-1

Por otro lado, si notamos por m al número de representaciones irreducibles de grado 2, debe cumplirse que $|D_n| = 1^2\cdot 4 + 2^2 m = 2n \Rightarrow m=\frac{n}{2}-1$. Como ya hemos razonado varias veces en clase, un conjunto de $n-1$ representaciones irreducibles de grado 2 de D_n son las asociadas a los giros y simetrías del plano, dadas por:

$$\rho_{2,j}(\sigma)=\begin{pmatrix}\cos(\frac{2\pi}{n}j) & -\sin(\frac{2\pi}{n}j)\\ \sin(\frac{2\pi}{n}j) & \cos(\frac{2\pi}{n}j)\end{pmatrix} \quad ; \quad \rho_{2,j}(\tau)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \quad , \forall j\in\{1,\dots,n-1\}$$

luego, si podemos extraer $\frac{n}{2}-1$ representaciones irreducibles de aquí, las habremos obtenido todas.

Antes de construir la tabla de caracteres, necesitaremos conocer cuáles son las clases de conjugación. Comencemos notando que los elementos de D_n son de la forma $\tau^i\sigma^j$, $i\in\{0,1\}$, $j\in\{0,\dots,n-1\}$, por lo que si $x\in[\sigma^k]=\{g\sigma^k g^{-1} \,/\, g\in D_n\}\Rightarrow$ $x=(\tau^i\sigma^j)\sigma^k(\tau^i\sigma^j)^{-1}=\tau^i\sigma^k\tau^i=\begin{cases}\sigma^k & , \text{si } i=0\\ \sigma^{-k} & , \text{si } i=1\end{cases}$, luego $[\sigma^k]=\{\sigma^k,\sigma^{-k}\}$, $k=1,\dots,\frac{n}{2}$ (se ha utilizado que $\sigma^k\tau=\sigma^{-k}\tau$, $\forall k\in\{1,\dots,n\}$; lo cual puede deducirse a partir de una inducción sencilla de la relación $\sigma\tau=\tau\sigma^{-1}$). Por tanto, ya hemos encontrado $\frac{n}{2}+1$ clases de conjugación (contando la del 1), por lo que todas las simetrías se reparten todas entre dos clases de conjugación, puesto que $[4+(\frac{n}{2}-1)]-(\frac{n}{2}+1)=2$. Calculamos:

$$(\tau^i\sigma^j)\tau(\tau^i\sigma^j)^{-1}=\tau^i\sigma^j\tau\sigma^{-j}\tau^i=\tau^i\sigma^{2j}\tau^{i+1}=\begin{cases}\tau\sigma^{-2j} & , \text{si } i=0\\ \tau\sigma^{2j} & , \text{si } i=1\end{cases};$$

$$(\tau^i\sigma^j)(\tau\sigma)(\tau^i\sigma^j)^{-1}=\tau^i\sigma^j\tau\sigma\sigma^{-j}\tau^i=\tau^{i+1}\sigma^{1-2j}\tau^i=\begin{cases}\tau\sigma^{1-2j} & , \text{si } i=0\\ \tau\sigma^{2j-1} & , \text{si } i=1\end{cases};$$

Luego, las clases de conjugación de D_n son: $\{1\}$, $\{\sigma,\sigma^{-1}\}$, $\dots$, $\{\sigma^{n/2}\}$, $\{\tau,\tau\sigma^2,\dots,\tau\sigma^{n-2}\}$, $\{\tau\sigma,\tau\sigma^3,\dots,\tau\sigma^{n-1}\}$.

Por tanto, la tabla con los caracteres de todas las representaciones consideradas para D_n con n par queda:

	$[1]$	$[\sigma]$	$\cdots$	$[\sigma^k]$	$\cdots$	$[\sigma^{n/2}]$	$[\tau]$	$[\tau\sigma]$
$\lvert[c_i]\rvert$	1	2	$\cdots$	2	$\cdots$	1	$n/2$	$n/2$
$\chi_{1,0}$	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1	1	1
$\chi_{1,1}$	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1	-1	-1
$\chi_{1,2}$	1	-1	$\cdots$	$(-1)^k$	$\cdots$	$(-1)^{n/2}$	1	-1
$\chi_{1,3}$	1	-1	$\cdots$	$(-1)^k$	$\cdots$	$(-1)^{n/2}$	-1	1
$\chi_{2,1}$	2	$\xi+\xi^{-1}$	$\cdots$	$\xi^k+\xi^{-k}$	$\cdots$	-2	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\chi_{2,j}$	2	$\xi^j+\xi^{-j}$	$\cdots$	$\xi^{kj}+\xi^{-kj}$	$\cdots$	$2(-1)^j$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\chi_{2,n-1}$	2	$\xi^{-1}+\xi$	$\cdots$	$\xi^{-k}+\xi^k$	$\cdots$	-2	0	0

Donde se ha usado que $\rho_{2,j}(\sigma^k)=\begin{pmatrix}\cos(\frac{2\pi}{n}kj) & -\sin(\frac{2\pi}{n}kj)\\ \sin(\frac{2\pi}{n}kj) & \cos(\frac{2\pi}{n}kj)\end{pmatrix}$ (puede probarse por inducción sobre k) y que

$$2\cos(\tfrac{2\pi}{n}kj)=e^{i\frac{2\pi}{n}kj}+e^{-i\frac{2\pi}{n}kj}=\xi^{kj}+\xi^{-kj}.$$

En primer lugar, comprobamos que $\rho_{2,n/2}$ no es irreducible:

$$\langle \chi_{2,n/2}, \chi_{2,n/2}\rangle = \frac{1}{|D_n|}\sum_{g\in G}|\chi(g)|^2 = \frac{1}{2n}\Big(\overset{\{1\}}{4} + 2\sum_{k=1}^{n/2-1}\overbrace{|\chi(\sigma^k)|^2}^{=2(-1)^k} + |\overbrace{\chi(\sigma^{n/2})}^{=2(-1)^{n/2}}|^2 + \frac{n}{2}|\cancelto{0}{\chi(\tau)}|^2 + \frac{n}{2}|\cancelto{0}{\chi(\tau\sigma)}|^2\Big)$$
$$= \frac{1}{2n}\Big(4+2\cdot\big(\frac{n}{2}-1\big)\cdot 4+4\Big) = 4\,\frac{n}{2n} = 2 \neq 1$$

Ahora, veamos que, sea $j\in\{1,\dots,\frac{n}{2}-1\}$, $\chi_{2,j}$ y $\chi_{2,n-j}$ no son ortogonales:

$$\langle\chi_{2,j},\chi_{2,n-j}\rangle = \frac{1}{|D_n|}\sum_{a\in D_n}\chi_{2,j}(a)\overline{\chi_{2,n-j}(a)}$$
$$= \frac{1}{2n}\Big[4+2\sum_{k=1}^{n/2-1}(\xi^{kj}+\xi^{-kj})\overline{(\xi^{k(n-j)}+\xi^{-k(n-j)})} + \overbrace{2(-1)^j\cdot 2(-1)^{n-j}}^{=4}\Big]$$
$$= \frac{1}{n}\Big(4+\sum_{k=1}^{n/2-1}\overbrace{|\xi^{kj}+\xi^{-kj}|^2}^{\geq 0}\Big)>0$$

Por tanto, podemos reducir nuestro conjunto inicial a $\{\rho_{2,j}\}_{j=1}^{n/2-1}$, por lo que ahora solo faltaría comprobar que todas ellas son irreducibles y mutuamente ortogonales. Sean $j,m\in\{1,\dots,n/2-1\}$, $j\neq m$:

$$\langle\chi_{2,j},\chi_{2,m}\rangle = \frac{1}{2n}\Big[4+2\sum_{k=1}^{n/2-1}(\xi^{kj}+\xi^{-kj})\overline{\underbrace{(\xi^{km}+\xi^{-km})}_{\in\mathbb{R}}} + \overbrace{2(-1)^j\cdot 2(-1)^m}^{=4(-1)^{m+j}}\Big]$$
$$= \frac{1}{n}\Big[2(1+(-1)^{m+j}) + \sum_{k=1}^{n/2-1}\big\{(\xi^{k(m+j)}+\xi^{-k(m+j)}) + (\xi^{k(m-j)}+\xi^{-k(m-j)})\big\}\Big]$$

Antes de continuar, recordemos que si α es una raíz n-ésima de la unidad $\Rightarrow \alpha$ es raíz de X^n-1. En particular, si $\alpha\neq 1 \Rightarrow \alpha$ es raíz de $\frac{X^n-1}{X-1}=\sum_{k=0}^{n-1}X^n$, es decir, $\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k=0$. Si n es par (como en nuestro caso), podremos escribir $\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k = 1+\overbrace{\alpha^{n/2}}^{=(-1)^{n/2}}+\sum_{k=1}^{n/2-1}(\alpha^k+\alpha^{-k})=0$. Teniendo esto en cuenta, distinguimos dos casos:

a) Si $m+j$ es impar:

$$\langle\chi_{2j},\chi_{2m}\rangle = \frac{1}{n}\Big[\sum_{k=1}^{n/2-1}\{(\xi^{m+j})^k+(\xi^{m+j})^{-k}\} + \sum_{k=1}^{n/2-1}\{(\xi^{m-j})^k+(\xi^{m-j})^{-k}\}\Big] = \frac{1}{n}(0+0)=0,$$ donde se ha usado q ξ^{m+j}, ξ^{m-j} son raíces n-ésimas de la unidad distintas de 1 (pues $m\neq j$, $m+j\leq n-2$) y que $m+j$, $m-j$ son impares.

b) Si $m+j$ es par $\Rightarrow (\xi^2)^{\frac{m+j}{2}}, (\xi^2)^{\frac{m-j}{2}}, (\xi^2)^{-\frac{m+j}{2}}, (\xi^2)^{-\frac{m-j}{2}}$ son raíces $\frac{n}{2}$-ésimas de la unidad distintas de 1, luego:

$$\langle\chi_{2j},\chi_{2m}\rangle = \frac{1}{n}\Big[4+\sum_{k=1}^{n/2-1}((\xi^2)^{\frac{m+j}{2}})^k+\sum_{k=1}^{n/2-1}((\xi^2)^{-\frac{m+j}{2}})^k+\sum_{k=1}^{n/2-1}((\xi^2)^{\frac{m-j}{2}})^k+\sum_{k=1}^{n/2-1}((\xi^2)^{-\frac{m-j}{2}})^k\Big]$$
$$= \frac{1}{n}(4-1-1-1-1)=0$$

Luego, en efecto, cualesquiera dos representaciones de entre las consideradas son ortogonales.

Que son irreducibles se deduce de forma similar al apartado b) anterior. Sea $j\in\{1,\dots,\frac{n}{2}-1\}$:

$$\langle\chi_{2,j},\chi_{2,j}\rangle = \frac{1}{n}\Big[4+2\sum_{k=1}^{n/2-1}((\xi^2)^j)^k+\sum_{k=1}^{n/2-1}2\Big] = \frac{1}{n}\Big[4+2\cdot(-1)+2\big(\frac{n}{2}-1\big)\Big]=1,$$

donde se ha usado que $(\xi^2)^j$ es una raíz $\frac{n}{2}$-ésima de la unidad distinta de 1.