Ukázka možných písemkových příkladů — Algebra I (2019/2020)

Všechny odpovědi musí být řádně zdůvodněny!

1. Pro algebru $\mathcal{A} = A(\alpha_i;\ i \in I)$ definujte pojem kongruence na $\mathcal{A}$. Uvažujme symetrickou grupu $S_3(\circ)$ a označme H její podgrupu generovanou transpozicí $(1\ 2)$. Je rmod H kongruence grupy $S_3(\circ)$?

2. Nechť K je konečné těleso o 16 prvcích a L je konečné těleso o 8 prvcích. Existuje prostý okruhový homomorfismus $\psi : L \to K$?

3. Mějme polynomy $p = x^4 - 10x^2 + 9$ a $q = x^2 + x - 6$. Víme, že ideál $p\mathbb{R}[x] + q\mathbb{R}[x]$ je hlavní ideál okruhu $\mathbb{R}[x]$. Najděte $f \in \mathbb{R}[x]$ takový, že $p\mathbb{R}[x] + q\mathbb{R}[x] = f\mathbb{R}[x]$. (Připomeňme, že pro ideály I, J je $I + J = \{i + j;\ i \in I, j \in J\}$.)

4. Zformulujte a dokažte Lagrangeovu větu pro grupy. (Pomocná tvrzení, která užíváte, pouze zformulujte bez důkazu.)

5. Ukažte, že pro okruh $R(+, -, 0, \cdot, 1)$, kde platí $(\forall a \in R)\ a \cdot a = a$, je již nutně $a = -a$ pro každé $a \in R$.

6. Spočtěte poslední dvě cifry čísla $37^{38^{39}}$. Nápověda: ve vhodné chvíli může pomoci spočítat zbytky po dělení 20, resp. 25.