



Fisica dello Spazio

Nicola Tomassetti
Laurea in Fisica

S04 – Teoria delle orbite



Fisica dello Spazio – Teoria delle orbite

Cosa vediamo in queste slides

- Forza magnetica e moto ciclotronico
- Moto di deriva (drift) $E \times B$
- Moto di deriva $F \times B$ e concetto di centro di guida
- Drift di gradiente magnetico perpendicolare $\nabla_{\perp} B$
- Drift di curvatura magnetica
- Gradiente magnetico parallelo $\nabla_{\parallel} B$, bottiglia magnetica, intrappolamento.
- Particelle intrappolate in un campo di dipolo magnetico. Campo geomagnetico

Particelle e traiettorie

Ora consideriamo le traiettorie di singole particelle cariche, in moto attraverso regioni di spazio in cui sono presenti campi magnetici o elettrici. Ci avviciniamo così alla descrizioni di fenomeni che avvengono in ambienti astrofisici quali, ad esempio, la magnetosfera terrestre.

Lo studio del moto di singole particelle soggetti a campi esterni non cattura bene la dinamica di un plasma. Infatti un plasma è caratterizzato da comportamenti collettivi, cioè da proprietà che emergono considerando le interazioni tra particelle e l'effetto di queste sui campi.

Il moto ciclotronico

Consideriamo una particella di carica q e massa m in moto attraverso campi esterni \mathbf{E} e \mathbf{B} statici. Su essa agisce la forza di Lorentz:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Ora prendiamo il caso in cui il campo \mathbf{B} è costante e uniforme, e si ha $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

Consideriamo senza perdita di generalità il caso $\mathbf{B} \parallel \hat{\mathbf{z}}$, cioè $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$. In questo modo il prodotto vettoriale si semplifica:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \det \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} = v_y B \hat{\mathbf{x}} - v_x B \hat{\mathbf{y}}$$

Applichiamo la legge di Newton $\mathbf{F} = m \dot{\mathbf{v}}$ usando la forza di Lorentz per ottenere l'equazione del moto. Per componenti:

$$F_x = m \dot{v}_x = q v_y B$$

$$F_y = m \dot{v}_y = -q v_x B$$

$$F_z = m \dot{v}_z = 0$$

Il moto ciclotronico

Ora applichiamo la legge di Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{v}}$ usando la forza di Lorentz per ottenere l'equazione del moto. Per componenti:

$$F_x = m \dot{v}_x = q v_y B$$

$$F_y = m \dot{v}_y = -q v_x B$$

$$F_z = m \dot{v}_z = 0$$

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \left(\frac{qB}{m}\right) v_y \\ \dot{v}_y = -\left(\frac{qB}{m}\right) v_x \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases}$$

Come si vede, non c'è accelerazione lungo $\hat{\mathbf{z}}$ cioè lungo la direzione di \mathbf{B} . Infatti la forza magnetica è sempre ortogonale al campo magnetico. Quindi $v_z = \text{const!}$

Le componenti x e y sono accoppiate. Allora deriviamo ulteriormente, e troviamo:

$$\ddot{v}_x = +\left(\frac{qB}{m}\right) \dot{v}_y = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x$$

$$\ddot{v}_y = -\left(\frac{qB}{m}\right) \dot{v}_x = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y$$

Il moto ciclotronico

Cioè entrambe le velocità x e y obbediscono all'equazione dell'oscillatore armonico con frequenza angolare $\omega^2 = (q B / M)^2$:

$$\begin{aligned}\ddot{v}_x &= -\omega^2 v_x \\ \ddot{v}_y &= -\omega^2 v_y\end{aligned}$$

Introduciamo la **frequenza di ciclotrone**, definendola in modo da risultare positiva: $\omega_c \equiv \frac{|q|B}{m}$
Le soluzioni sono sinusoidali, o meglio, del tipo:

$$\begin{aligned}v_x &= v_x^\perp \exp(\pm i\omega_c t + i\delta_x) \\ v_y &= v_y^\perp \exp(\pm i\omega_c t + i\delta_y)\end{aligned}$$

Dove le $\delta_{x,y}$ sono fasi e $v_{x,y}^\perp$ sono costanti di normalizzazione, che dipendono dalle condizioni iniziali. Ma in realtà ci sono meno parametri indipendenti di così, perché possiamo considerare solo l'equazione per v_x (la prima delle due) e poi determinare v_y per derivazione, come segue:

$$v_y = \left(\frac{m}{qB} \right) \dot{v}_x = \pm i\omega_c \left(\frac{m}{qB} \right) v_x^\perp \exp(\pm i\omega_c t + i\delta_x) \implies v_y = i v_x^\perp \exp(\pm i\omega_c t + i\delta_x)$$

Il moto ciclotronico

Scriviamo dunque le soluzioni come:

$$\begin{cases} v_x = v_{\perp} \exp(\pm i\omega_c t + i\delta) \\ v_y = iv_{\perp} \exp(\pm i\omega_c t + i\delta) \end{cases}$$

Prendiamo ora la parte reale e descriviamo il moto in termini di funzioni sinusoidali:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{\perp} \cos(\omega_c t + \delta) \\ v_y(t) = \mp v_{\perp} \sin(\omega_c t + \delta) \end{cases}$$

La fase δ viene stabilita dalle condizioni iniziali. All'istante $t = 0$ si ha:

$$\begin{cases} v_x(0) = v_{\perp} \cos(\delta) \\ v_y(0) = v_{\perp} \sin(\delta) \end{cases}$$

Per semplicità possiamo scegliere ad es. $\delta = 0$, in maniera da avere v_x massima all'istante $t = 0$,

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{\perp} \cos(\omega_c t) \\ v_y(t) = \mp v_{\perp} \sin(\omega_c t) \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(0) = v_{\perp} \\ v_y(0) = 0 \end{cases}$$

Nota che per ogni t si ha $v_x^2 + v_y^2 = v_{\perp}^2$. Fisicamente v_{\perp} rappresenta la velocità totale della particella nel piano (x, y) , cioè il piano perpendicolare al campo B .

Il moto ciclotronico

Possiamo infine integrare le due equazioni per ottenere le equazioni orarie del moto, cioè le posizioni, definendo le posizioni iniziali x_0 e y_0 . In termini di esponenziali complessi otteniamo:

$$\begin{aligned}x - x_0 &= -\frac{iv_{\perp}}{\omega_c} \exp(i\omega_c t) \\y - y_0 &= \pm\frac{v_{\perp}}{\omega_c} \exp(i\omega_c t)\end{aligned}$$

In termini sinusoidali scriviamo:

$$\begin{cases} x - x_0 = r_L \sin(\omega_c t) \\ y - y_0 = \pm r_L \cos(\omega_c t) \end{cases}$$

dove abbiamo definito il raggio di Larmor, o giroraggio:

$$r_L = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{mv_{\perp}}{|q| B}$$

In fisica spaziale il moto ciclotronico viene anche definito *gyration*. In riferimento a questo termine, raggio di Larmor e frequenza ciclotronica vengono spesso chiamati r_g e ω_g .

Il moto ciclotronico

Queste equazioni descrivono un **moto circolare uniforme** di raggio r_L (detto anche gioraggio) che avviene nel piano (x, y) attorno al punto (x_0, y_0) . La definizione di r_L mostra come il moto dipenda dalla velocità della particella, dalla sua massa, dalla sua carica, e dal campo magnetico.

Il moto è circolare nel piano (x, y) , cioè nel piano ortogonale a \mathbf{B} . Nello spazio 3D è **elicoidale**.

Il segno \pm nell'equazione per $y(t)$ dipende dal **segno della carica**, $\pm \equiv q/|q|$. Esso stabilisce il senso orario o antiorario del moto. Il senso è tale che il campo B generato dalla rotazione sarà diretto in modo tale da risultare opposto al campo esterno iniziale. (Si ottiene anche con la regola della mano destra ragionando sulla forza). Questo comportamento è detto *effetto diamagnetico*.

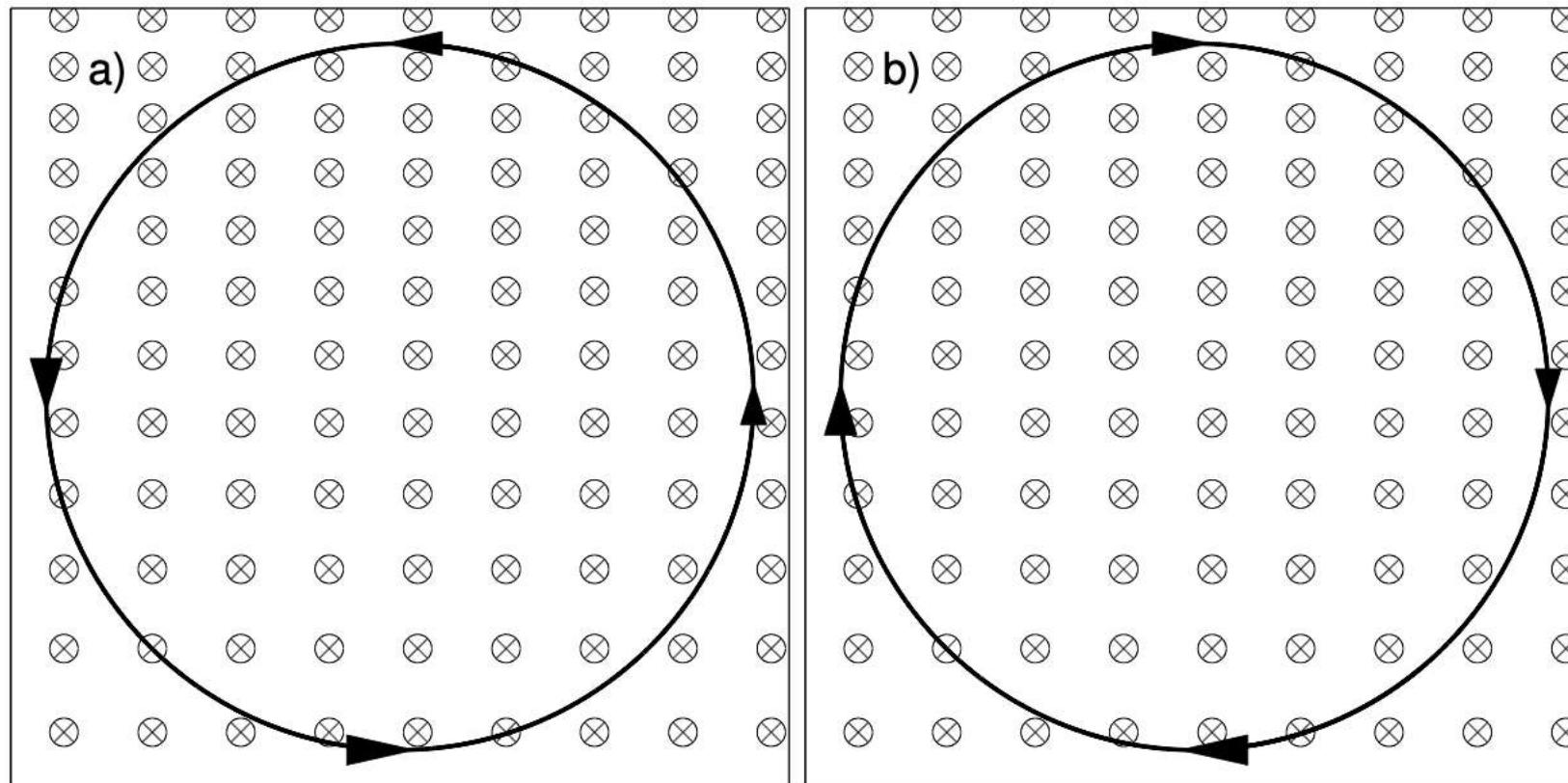
Si **conservano** separatamente le energie associate alle componenti **parallela e perpendicolare**. Lo si vede dal fatto che $v_{\perp}^2 = v_x^2 + v_y^2$ è costante, e dunque K_{\perp} è conservata. Anche K è conservata, come vediamo tra un attimo.

Il moto ciclotronico

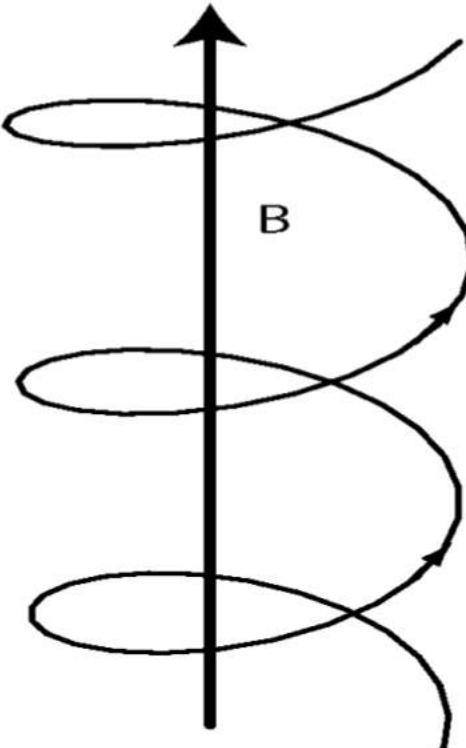
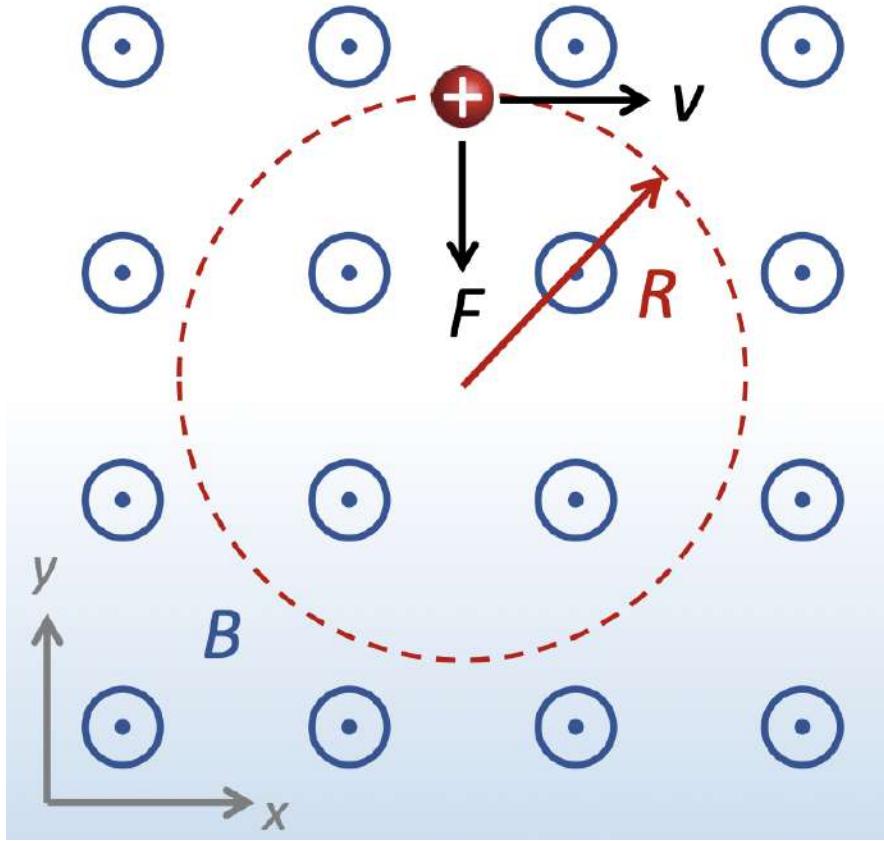
$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\begin{cases} x - x_0 = r_L \sin \omega_c t \\ y - y_0 = \pm r_L \cos \omega_c t. \end{cases}$$

$$r_L = \frac{v_\perp}{\omega_c} = \frac{mv_\perp}{|q|B}$$



Il moto ciclotronico



Moto circolare nel piano xy :

$$\begin{cases} x - x_0 = r_L \sin \omega_c t \\ y - y_0 = \pm r_L \cos \omega_c t. \end{cases}$$

Lungo \hat{z} non vi sono forze perché $B \parallel \hat{z}$.
Se però vi è velocità iniziale v_{z0} :

$$z - z_0 = v_{z0} t$$

=> Il moto 3D è quindi elicoidale.
Se poi $v_{z0} = 0$, allora il moto
avviene nel piano xy ed è circolare.

Il moto ciclotronico

Esempio da «Space Physics» di M.B. Kallenrode

Example 1. A hot plasma with $T = 1$ keV is confined in a homogeneous magnetic field $B = 1$ T. The thermal speeds are given by $v = \sqrt{2W_{\text{kin}}/m}$. Thus we obtain $v_e = 18.7 \times 10^6$ km/s for the electrons and $v_p = 4.37 \times 10^5$ m/s for the protons. The Gyro-radii then are determined from (2.32) to be $r_e = 0.1$ mm and $r_p = 4.6$ mm. From (2.28), we get obtain $\omega_{c,e} = 1.8 \times 10^{11}$ s $^{-1}$ and $\omega_{c,p} = 10^8$ s $^{-1}$ for the cyclotron frequencies. Note that both ω_c and r_L scale with B ; thus in a much weaker field, such as the interplanetary medium, which is of the order of a few nT, the gyro radii would increase by many orders of magnitude while the cyclotron frequencies would decrease by orders of magnitude. \square

Il moto ciclotronico

Nella dinamica delle particelle cariche in campi magnetici, è spesso utile la nozione di **rigidità magnetica** P (o R), cioè il momento per unità di carica: $P = pc/q$. dove l'impulso p è misurato in eV/c , la carica in unità di e , da cui P è misurato in V .

Così facendo, il raggio di Larmor si può scrivere come: $r_L = P/B$.

Si definisce inoltre **l'angolo di pitch** α in base al rapporto tra componenti parallele ed ortogonali delle velocità rispetto al campo magnetico. Esso è legato al passo dell'elica nella traiettoria 3D delle particelle.

$$\tan \alpha = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} .$$

Le due componenti di velocità (parallela e perpendicolare) sono quindi proiezioni
$$\begin{cases} v_{\perp} = v \sin \alpha \\ v_{\parallel} = v \cos \alpha \end{cases}$$

Possiamo infine valutare altre grandezze associate al moto ciclotronico come il **periodo**, la **corrente cicotronica**, o il **momento magnetico**.

Il moto ciclotronico

Nel moto ciclotronico, il **periodo** è dato da $T_c = 2\pi/\omega_c$.

Il moto è della particella associato ad una **corrente ciclotronica** $I_c = q/T_c = q\omega_c/2\pi$.

Possiamo dunque valutare il **momento magnetico** $\mu = I_c A$, con $A = \pi r_L^2$.

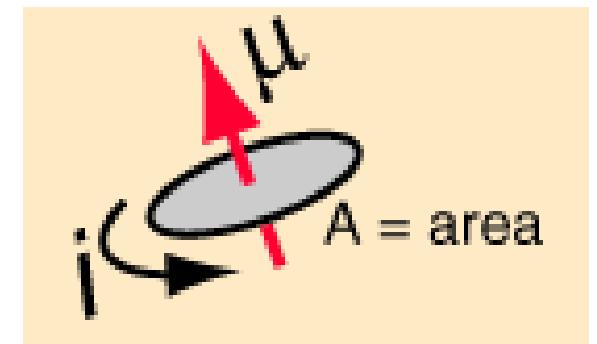
Ricordando che $r_L = v_\perp/\omega_c$, otteniamo:

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{mv_\perp^2}{B} = \frac{K_\perp}{B}$$

Dove con K_\perp denotiamo l'energia cinetica associata alla componente del moto perpendicolare.

Il momento magnetico può essere definito anche vettorialmente:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} q \boldsymbol{r}_L \times \boldsymbol{v}_\perp = \frac{mv_\perp^2}{2} \frac{\boldsymbol{B}}{B^2} = K_\perp \frac{\boldsymbol{B}}{B^2} = \frac{K_\perp}{B} \hat{\boldsymbol{B}}$$



Il moto ciclotronico

Nel moto ciclotronico con campo \mathbf{B} costante e campo $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ possiamo individuare facilmente un **integrale primo del moto**, cioè una grandezza conservata. Dall'equazione del moto:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Moltiplichiamo ambo i membri per la velocità e usiamo l'identità $2\mathbf{v}d\mathbf{v} = d\mathbf{v}^2$:

$$\frac{1}{2}m \frac{d\mathbf{v}^2}{dt} = \frac{dK}{dt} = q \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$$

L'ultima uguaglianza viene dal fatto che $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ è ortogonale a \mathbf{v} , e quindi il prodotto scalare tra i due è nullo. L'integrale primo del moto stabilisce che l'energia cinetica totale K è una grandezza **conservata**. Si può anche dimostrare che, in questo particolare moto, si conservano separatamente anche le energie associate alle componenti **parallela e perpendicolare**. (Infatti abbiamo già notato che v_{\perp}^2 è una costante del moto, e dunque K_{\perp} è conservata).

Il moto ciclotronico relativistico

Nel caso relativistico, l'energia è $E = \gamma mc^2$, l'impulso è $p = \gamma m\beta c$, e vale $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$.

La forza si scrive: $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m\mathbf{v})$

La frequenza di ciclotrone risultante è: $\omega_c = \frac{|q|B}{\gamma m}$

Il raggio di Larmor: $r_L = \frac{p_\perp}{qB} = \frac{P_\perp}{B}$

Moti di deriva (drift)

Il **moto di deriva** si instaura quando il raggio di Larmor cambia gradualmente, giro dopo giro.

Ciò comporta che il moto non sia più ciclotronico, anche se localmente possiamo continuare a vedere la particella spiraleggiare attorno alle linee di campo.

Una variazione nel raggio di Larmor può avvenire se:

- Cambia la velocità della particella (es. $E \times B$ drift o gravitational drift)
- Cambia il campo magnetico (es gradient o curvature drift)

Moti di deriva: il drift $E \times B$

Consideriamo il problema di prima, con \mathbf{B} è costante e uniforme, ma questa volta $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Consideriamo ancora, SPG, il caso $\mathbf{B} \parallel \hat{\mathbf{z}}$, cioè $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$. Inoltre, a meno di una rotazione, possiamo considerare \mathbf{E} orientato in modo tale da avere $E_y = 0$ (cioè E è nel piano xz).

Questa volta, il moto lungo l'asse $\hat{\mathbf{z}}$ risulta uniformemente accelerato dal campo elettrico E_z :

$$v_z = v_{z_0} + \boxed{\frac{qE_z}{m}t}$$

dove v_{z_0} è la componente iniziale per $t = 0$.

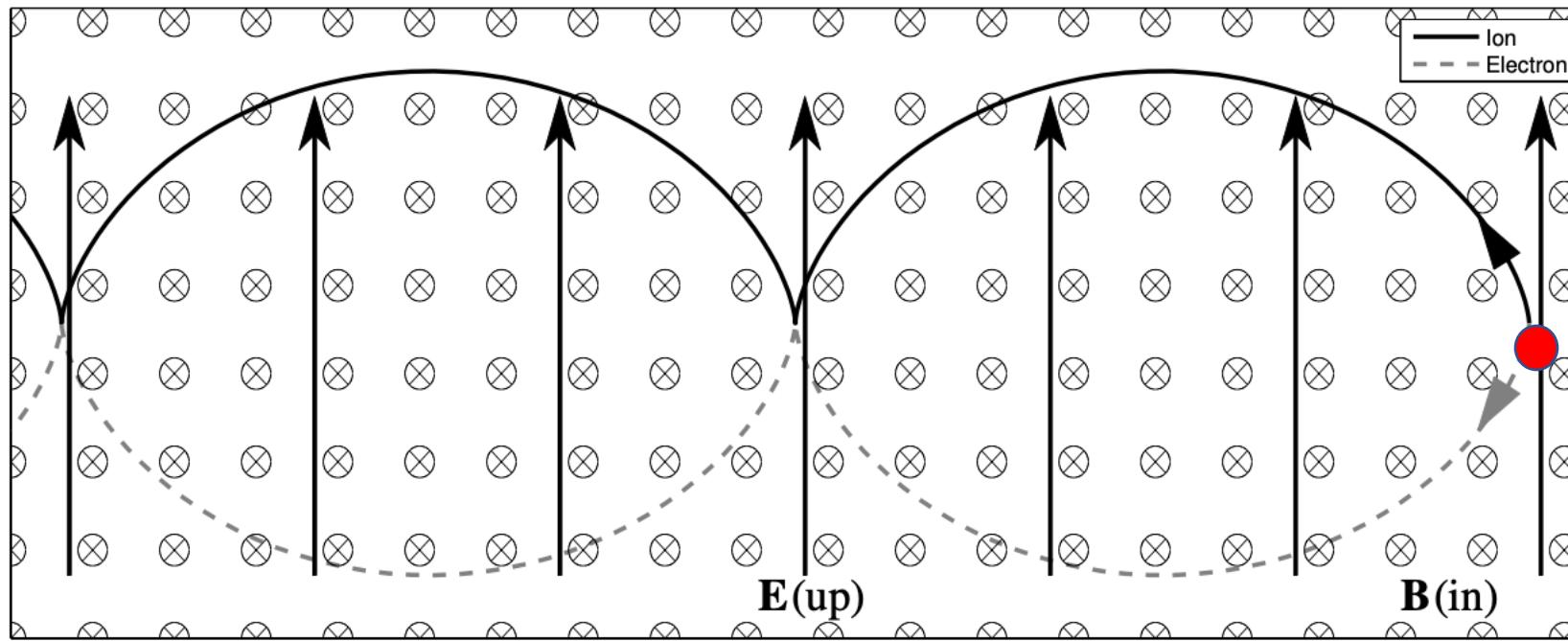
Quindi c'è un'accelerazione parallela legata a qE_z . E del tutto indipendente dal campo B .

Naturalmente c'è anche il moto nel piano xy . Prima di derivarlo, proviamo ad immaginarlo.

Moti di deriva: il drift $E \times B$

Immaginiamo che la particella abbia $q > 0$ sia ferma nel punto rosso.

- Inizialmente parte verso l'alto (x) spinta dal campo elettrico $\rightarrow F_x = qE_x$
- Il campo magnetico la incurva verso sinistra facendola girare. Tuttavia E_x continua ad agire.



Il risultato è il moto di figura, che drifta verso sinistra ($-\hat{\mathbf{y}}$). Cioè verso la direzione $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Moti di deriva: il drift $E \times B$

Ora deriviamo il moto nel piano xy :

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \left(\frac{qB}{m}\right)v_y + \boxed{\frac{qE_x}{m}} \\ \dot{v}_y = -\left(\frac{qB}{m}\right)v_x \end{cases}$$

(qui c'è un nuovo termine E_x)

(qui è come prima, per $E_y = 0$)

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m}$$

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \pm \omega_c v_y + \boxed{\frac{qE_x}{m}} \\ \dot{v}_y = \mp \omega_c v_x \end{cases}$$

Come prima, i segni \mp e \pm (top/bottom) dipendono dal segno \pm della carica q (ione/elettrone). Disaccoppiando le equazioni come prima, otteniamo:

$$\begin{cases} \ddot{v}_x = -\omega_c^2 v_x & \text{(il moto x è come prima)} \\ \ddot{v}_y = \mp \omega_c \left(\boxed{\frac{qE_x}{m}} \pm \omega_c v_y \right) = -\omega_c^2 \left(\boxed{\frac{E_x}{B}} + v_y \right) & \text{(nuovo termine } E_x/B \text{)} \end{cases}$$

L'equazione ottenuta è simile alla precedente eccetto per il termine E_x/B , che è costante.

Moti di deriva: il drift $E \times B$

Il termine E_x/B è costante, perché i campi E e B sono costanti. La sua derivata è quindi nulla:

$$\ddot{v}_y = \frac{d^2 v_y}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{E_x}{B} + v_y \right)$$

Quindi vale:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{E_x}{B} + v_y \right) = -\omega_c^2 \left(\frac{E_x}{B} + v_y \right)$$

Possiamo allora scrivere come prima $\ddot{v}'_y = -\omega_c^2 v'_y$ avendo definito $v'_y = \frac{E_x}{B} + v_y$

Il moto per le variabili v_x e v'_y è quindi formalmente identico al precedente:

Dove tornando alla variabile v_y abbiamo.

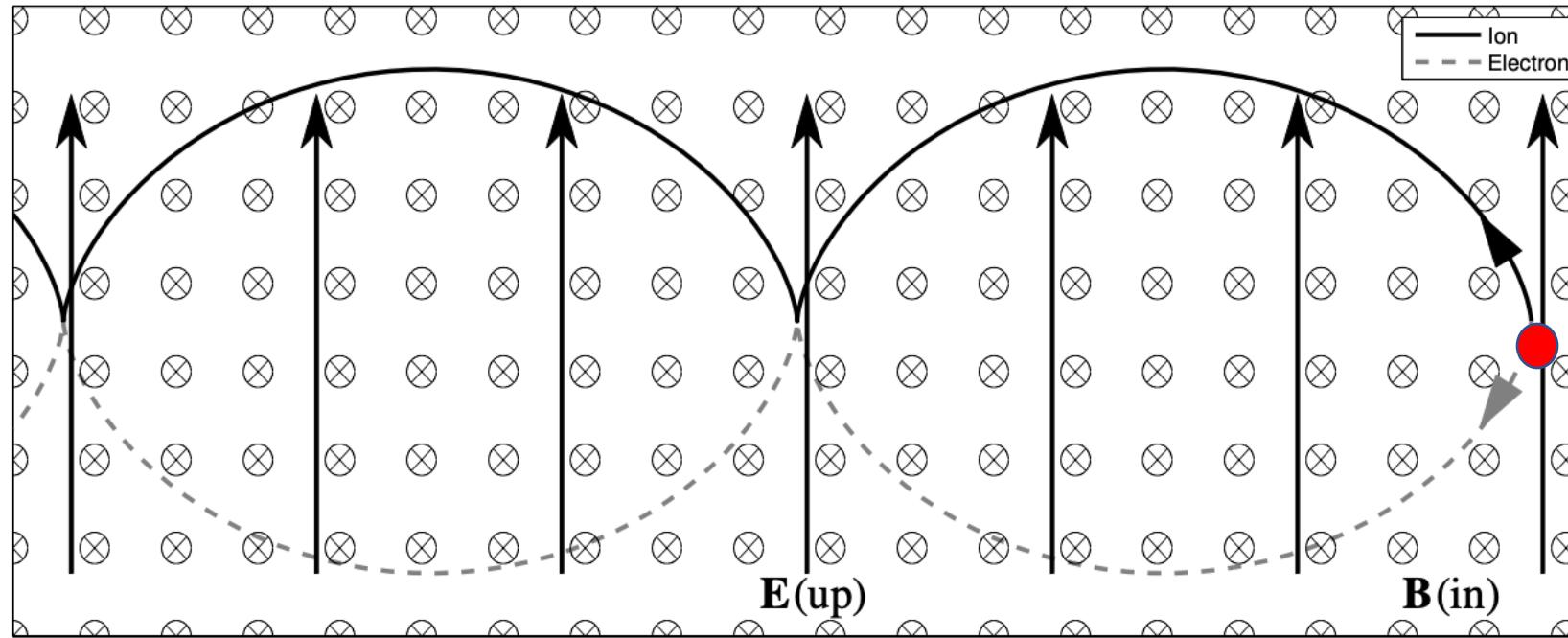
$$\begin{cases} v_x = v_\perp \exp(i\omega_c t) \\ v'_y = \pm iv_\perp \exp(i\omega_c t) \end{cases}$$

$$v_y = \pm iv_\perp \exp(i\omega_c t) - \frac{E_x}{B}$$

Moti di deriva: il drift $E \times B$

Le equazioni trovate per v_x e v_y mostrano il moto di una particella che gira sul piano xy driftando verso l'asse y (in direzione negativa $-\hat{y}$). Ricordiamo che avevamo $E_y = 0$, cioè:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_x \hat{\mathbf{x}} + E_z \hat{\mathbf{z}} & \rightarrow & \text{Risulta un moto di drift in direzione } \mathbf{E} \times \mathbf{B}! \\ \mathbf{B} &= B \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$



Drift $E \times B$ e centro di guida

Le equazioni trovate per v_x e v_y mostrano il moto di una particella che gira sul piano xy driftando verso l'asse y (in direzione negativa $-\hat{y}$). Ricordiamo che avevamo $E_y = 0$, cioè:

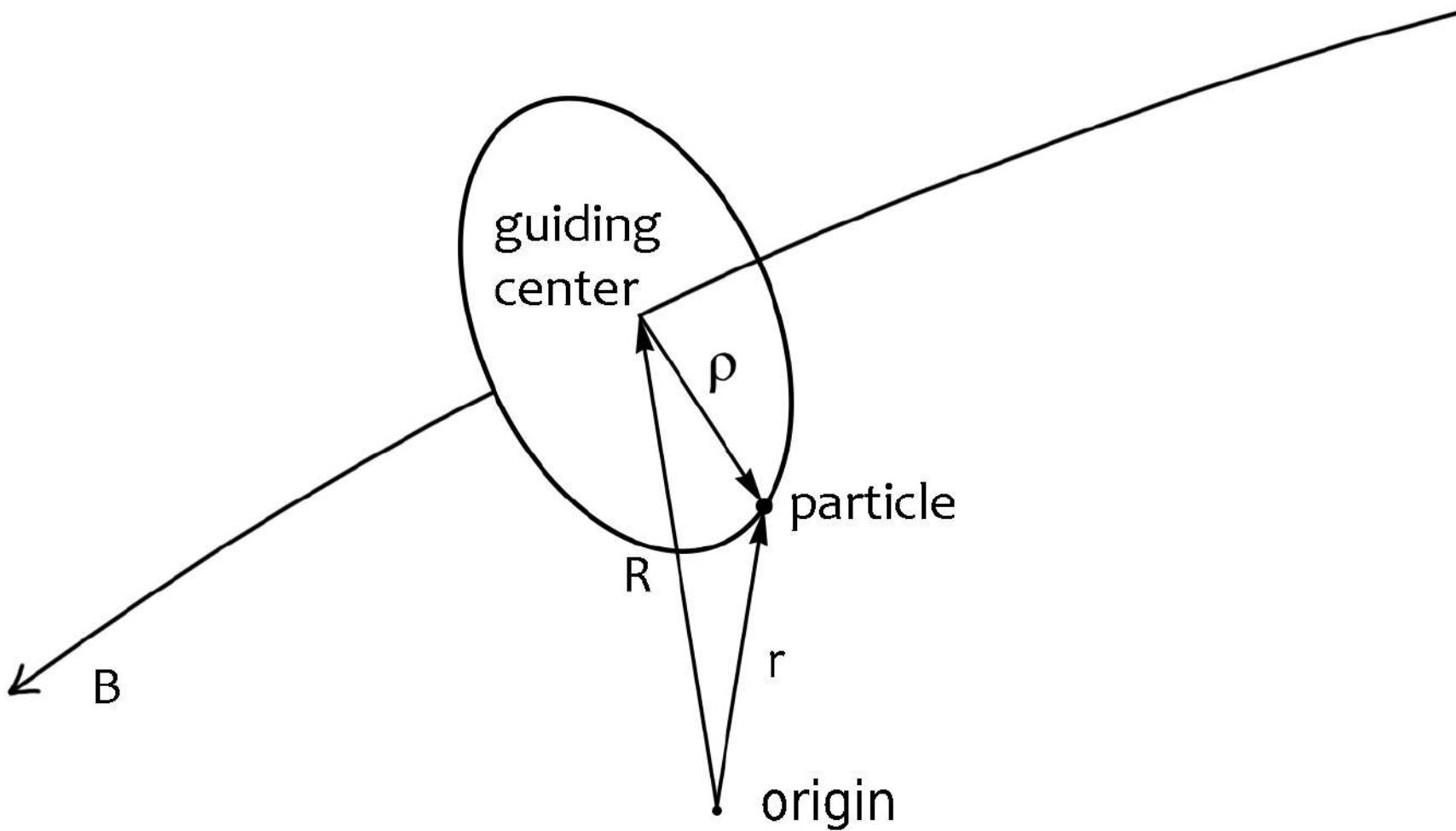
$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_x \hat{\mathbf{x}} + E_z \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{B} &= B \hat{\mathbf{z}}\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{Risulta un moto di drift in direzione } \mathbf{E} \times \mathbf{B}!$$

Possiamo vederlo in maniera più generale ricorrendo al concetto di **centro di guida**.

Supponiamo di **mediare** il moto su un periodo. Così facendo il moto di «gyration» (ciclotronico) si cancella in media. Quello che resta è un **moto medio** di un punto, detto «**centro di guida**» che riflette il drift e il moto parallelo a \mathbf{B} .

La velocità del centro di guida, v_{gc} , è tale da avere la sua componente perpendicolare pari a v_D (la velocità del drift $E \times D$, detta anche v_E).

Drift e centro di guida



Drift e centro di guida

Il concetto **centro di guida** fu introdotto da Alfvén negli anni 40 per separare il moto di una particella in varie componenti. Spesso rispetto al campo \mathbf{B} si esegue la separazione:

$$\mathbf{v} = v_{\parallel} + v_{\perp}$$

La parte perpendicolare può anche essere scritta come somma di due componenti: drift e girazione:

$$v_{\perp} = v_D + v_g$$

Si ha quindi $\mathbf{v} = v_{\parallel} + v_D + v_g$. A questo punto si definisce la **velocità di centro di guida**:

$$v_{gc} \equiv v_{\parallel} + v_D$$

(NB quindi si ha che v_{\parallel} e v_D sono le componenti \parallel e \perp della grandezza v_{gc} , rispettivamente).

Così facendo il moto di può suddividere in: $\mathbf{v} = v_{gc} + v_g$

Cioè un moto di girazione veloce attorno ad un punto, il centro di guida, che avanza più lentamente. Il moto del centro di guida è dato da moto parallelo e drift. Esso rappresenta il moto «medio» di una particella che spiraleggia lungo le linee di campo magnetico ed è soggetto a drift,

Drift $E \times B$ e centro di guida

Ora troviamo un'espressione generale per la velocità di drift $E \times B$ in funzione dei campi. Consideriamo il moto del centro di guida e prendiamo la componente perpendicolare, cioè la velocità di drift $v_{gc\perp} = v_E$, che come visto prima è costante. Si ha dunque:

$$m \frac{d\mathbf{v}_E}{dt} = 0 = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_E \times \mathbf{B}) \quad \text{da cui:} \quad (\mathbf{E} + \mathbf{v}_E \times \mathbf{B}) = 0$$

Ora moltiplichiamo l'ultima identità per \mathbf{B} (vettorialmente) e poi usiamo identità vettoriali:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} - \mathbf{v}_E \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{E} \times \mathbf{B} = B^2 \mathbf{v}_E - (\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}$$

Dato che v_E è la componente di v_{gc} **perpendicolare** a \mathbf{B} , si ha: $\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{B} = 0$.

Otteniamo quindi l'espressione per v_D :

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

Questa velocità è anche detta **la velocità $E \times B$** : o velocità del drift ExB.

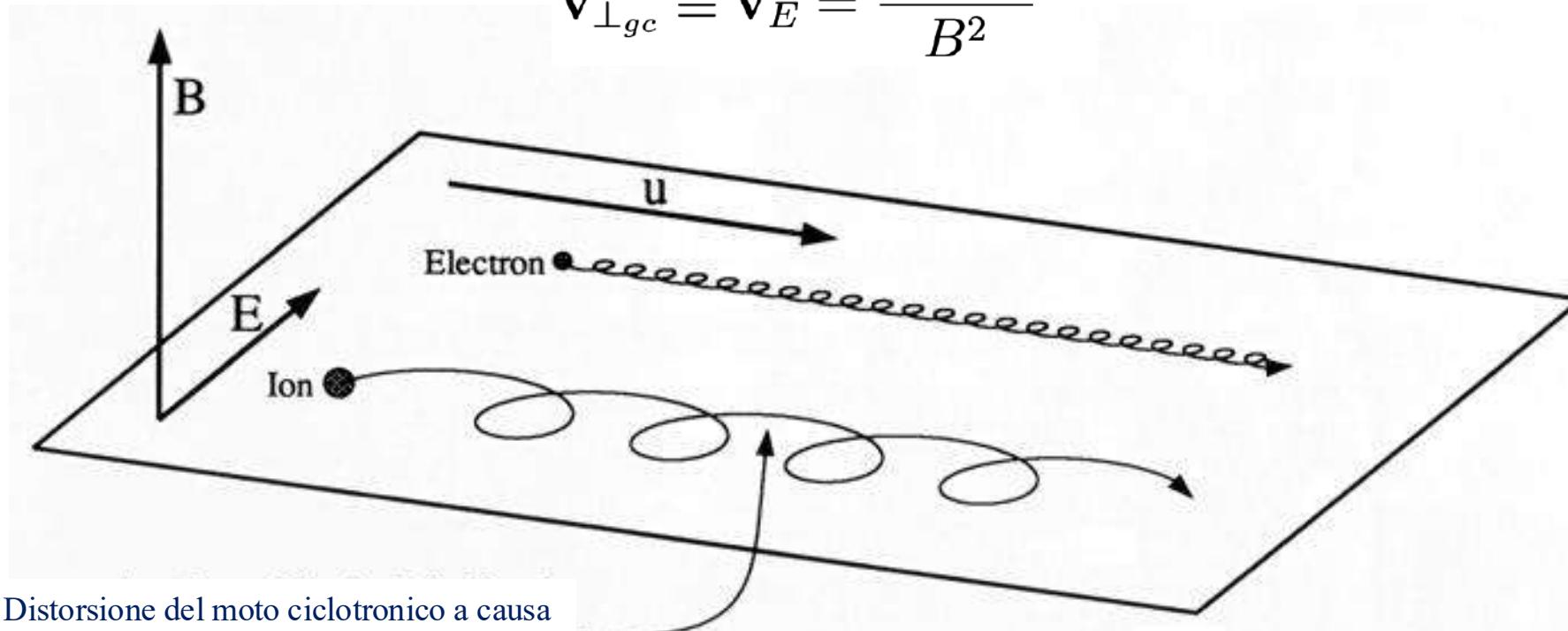
La componente **parallela** di v_{gc} ? L'abbiamo già vista, è quella del moto lungo z: $v_z = v_{z_0} + \frac{qE_z}{m}t$

NB un aspetto importante è che v_E non dipende dalla massa né dalla carica della particella!

Moti di deriva: il drift $E \times B$

La velocità di *drift* $E \times B$ non dipende né dalla massa né dalla carica della particella (purché essa sia carica), ma solo da come sono diretti i campi:

$$\mathbf{v}_{\perp_{gc}} \equiv \mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

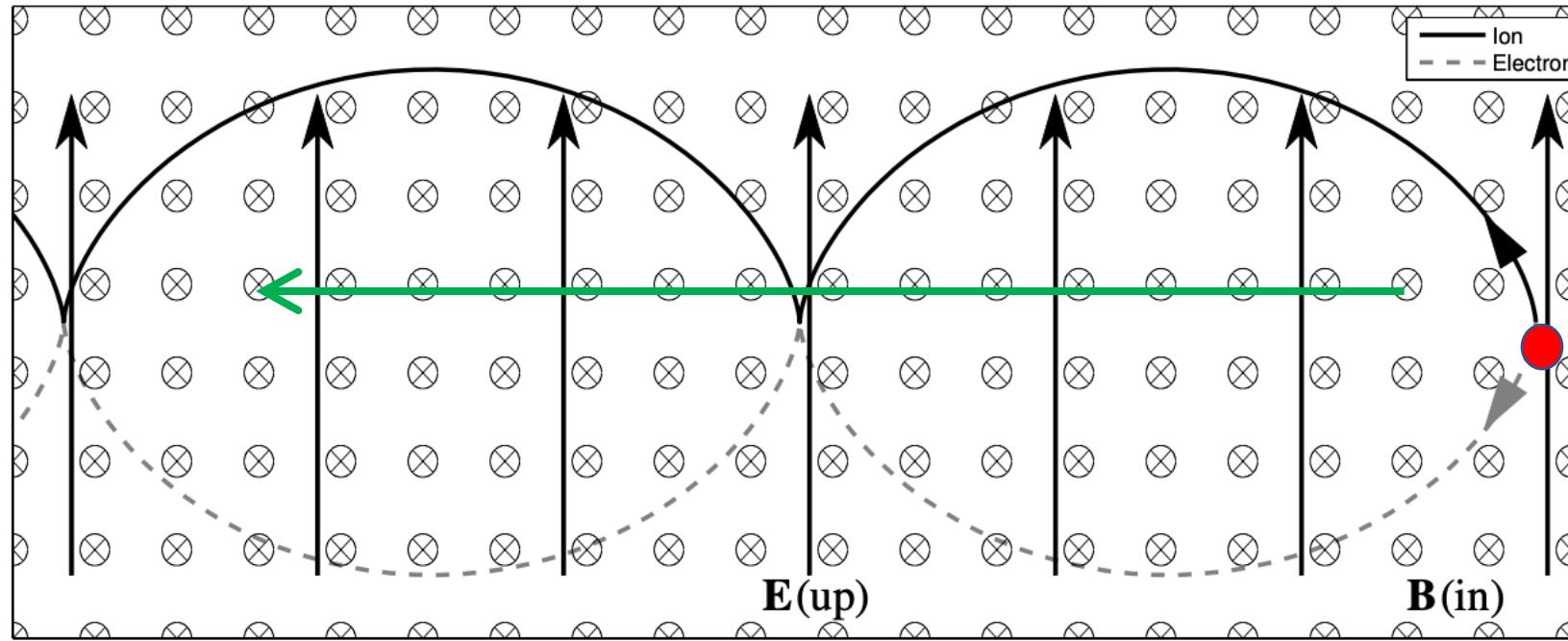


Distorsione del moto ciclotronico a causa
del campo elettrico E : il gioraggio risulta
maggiore in questa parte di orbita

Moti di deriva: il drift $E \times B$

La velocità di *drift* $E \times B$ non dipende né dalla massa né dalla carica della particella (purché essa sia carica), ma solo da come sono diretti i campi:

$$\mathbf{v}_{\perp_{gc}} \equiv \mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$



Moti di deriva: il drift $E \times B$

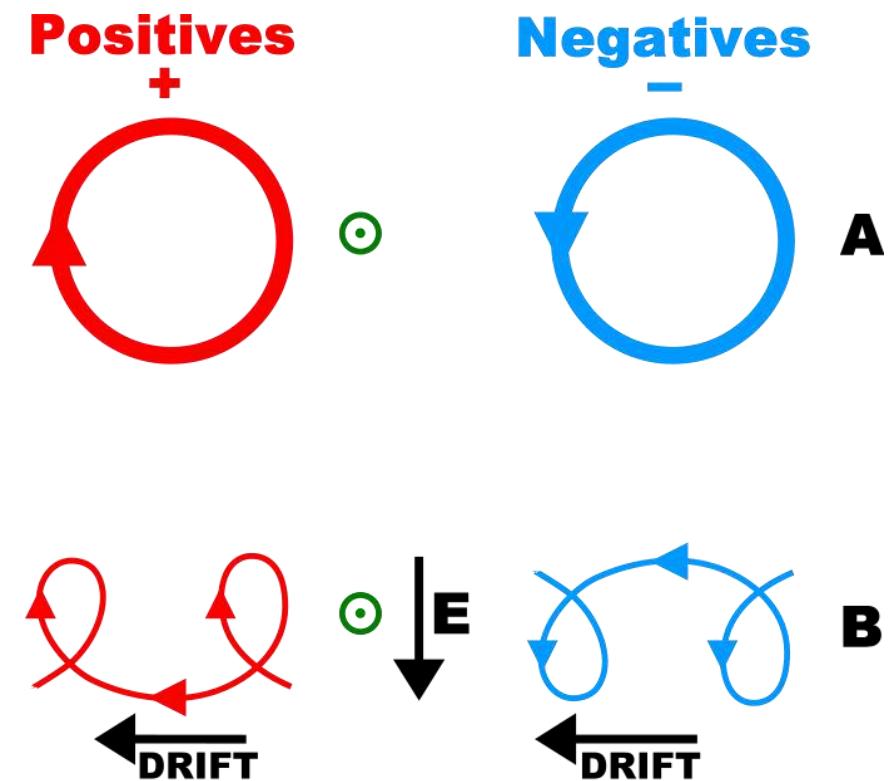
La velocità di *drift* $E \times B$ non dipende né dalla massa né dalla carica della particella (purché essa sia carica), ma solo da come sono diretti i campi:

$$\mathbf{v}_{\perp_{gc}} \equiv \mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

In figura il campo B è diretto uscente ed il campo E è diretto verso il basso.

Le particelle positive e negative, pur girando nel senso opposto attorno a B , acquisiscono entrambe un moto di drift diretto verso sinistra

NB Se le particelle sono elettroni e ioni di un plasma, il drift è nella direzione per entrambi e quindi **non** vi si produce una corrente netta associata al drift.



Moti di deriva generale $\mathbf{F} \times \mathbf{B}$

Ora invece del campo elettrico \mathbf{E} consideriamo l'effetto di una forza esterna \mathbf{F} generale. E' il caso ad esempio della forza di **gravità**. Prima avevamo considerato entrambe le componenti della forza di Lorentz, cioè $\mathbf{F}_L = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_B$, dove $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$ è la forza elettrica e $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ è magnetica.

Ora immaginiamo di ripetere la derivazione usando una forza \mathbf{F} generica invece di $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$. Ciò significa che invece del risultato visto:

$$\mathbf{v}_E = \frac{q\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{qB^2} = \frac{\mathbf{F}_E \times \mathbf{B}}{qB^2}$$

Otteniamo il seguente risultato:

$$\mathbf{v}_{drift} = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2}$$

- ✓ L'azione di una generica forza esterna \mathbf{F} produce un moto di deriva analogo al drift $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.
- ✓ Ora vi è la dipendenza dalla carica q della particella (che prima si cancellava con $q\mathbf{E}$).
- ✓ **In questo caso, se ci sono ad es. elettroni e ioni, il drift può produrre una corrente nette**

Moti di deriva generale $F \times B$

Con una generica forza F , il drift è analogo al caso $E \times B$ ma la direzione del drift dipende dal segno di q :

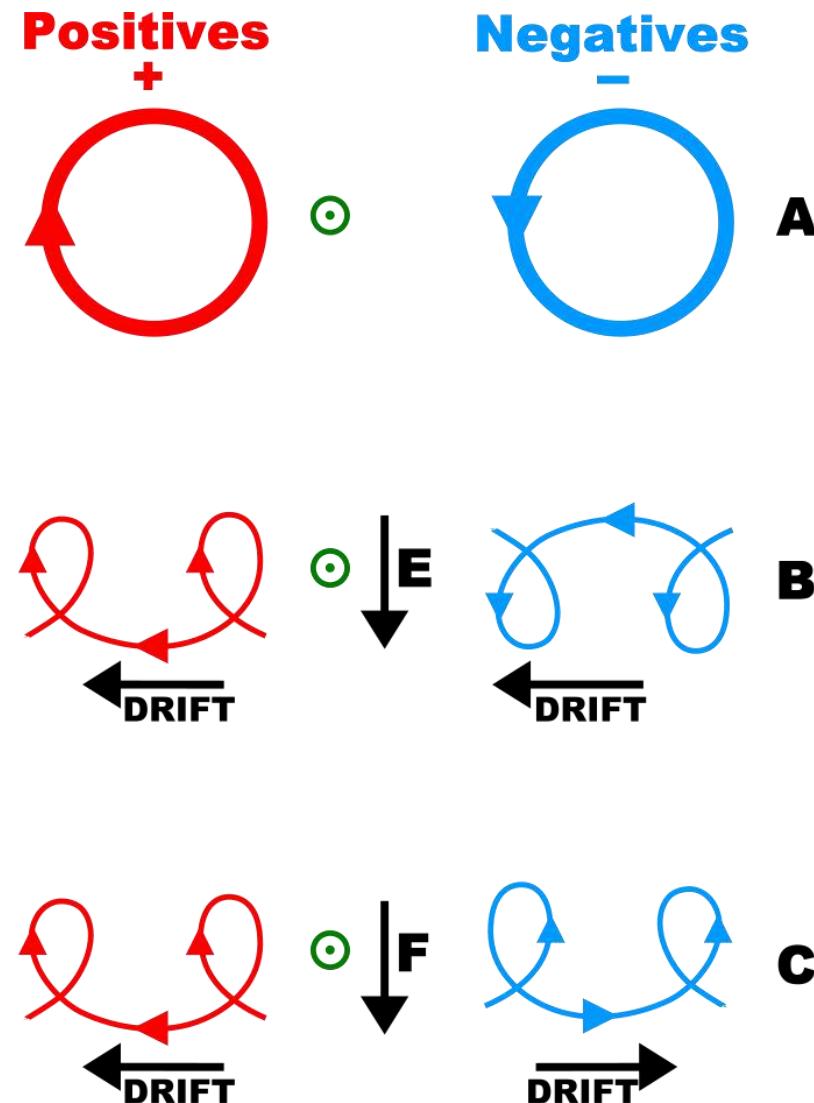
$$\mathbf{v}_{drift} = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2}$$

Ad esempio per la forza di gravità $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ che vediamo nella pagina successiva.

Nota che equazione generale del *drift* $F \times B$ può essere anche scritta in termini della frequenza di ciclotrone ω_c :

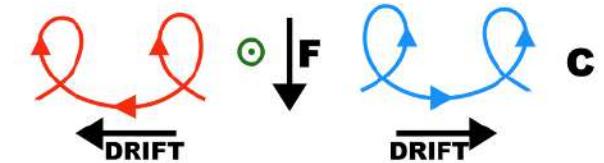
$$\mathbf{v}_F = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2} = \frac{1}{\omega_c} \left(\frac{\mathbf{F}}{m} \times \frac{\mathbf{B}}{B} \right) = \frac{\mathbf{F}}{\omega_c m} \times \hat{\mathbf{t}}_B$$

dove $\hat{\mathbf{t}}_B$ è il versore del campo magnetico.



Moti di deriva generale $\mathbf{F} \times \mathbf{B}$: campo gravitazionale

Per la **forza di gravità** $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ otteniamo: $\mathbf{v}_{grav} = \frac{m}{q} \left(\frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2} \right)$



È il caso di figura di \mathbf{F} esterna, non elettrica, diretta verso il basso. Se vi è un campo \mathbf{B} orizzontale, le particelle che «cadono» tenderanno a driftare in orizzontale con $\mathbf{g} \times \mathbf{B}$.

Inoltre il verso di \mathbf{v}_{grav} dipende da segno della carica q delle particelle. Se sono elettroni e ioni in un plasma quasineutro di densità n , il drift gravitazionale produce una corrente netta. Ciò succede ad esempio nella ionosfera. La densità la corrente instaurata dalla gravità è:

$$\mathbf{J} = -ne\mathbf{v}_{grav}^e + ne\mathbf{v}_{grav}^i = (m_e + M_i)n \left(\frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2} \right) = \rho \left(\frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2} \right)$$

Come si vede sono gli ioni a dominare la corrente in quanto $M_i \gg m_e$.

È interessante anche notare che la corrente induce una forza di Laplace la quale è controbilancia esattamente quella di gravità:

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} = -\rho \mathbf{g} + \rho \mathbf{g} = \mathbf{0}$$

Dove $\mathbf{f} = n\mathbf{F}$ è la densità di forza, ρ è la densità di massa, \mathbf{J} è la densità di corrente.

Moti di deriva generale $F \times B$: campo gravitazionale

MAUS AND LUEHR: A GRAVITY-DRIVEN IONOSPHERIC CURRENT

GEOPHYSICAL RESEARCH LETTERS, VOL. 33, L02812, doi:10.1029/2005GL024436, 2006

<http://dx.doi.org/10.1029/2005GL024436>

A gravity-driven electric current in the Earth's ionosphere identified in CHAMP satellite magnetic measurements

S. Maus

Cooperative Institute for Research in Environmental Sciences, University of Colorado, Boulder, Colorado, USA

National Geophysical Data Center, NOAA, Boulder, Colorado, USA

H. Lühr

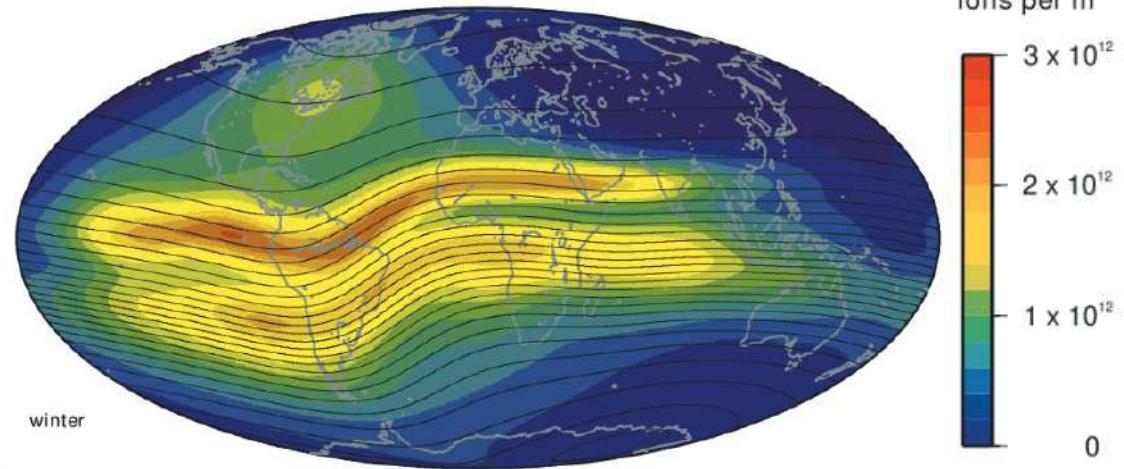
GeoForschungsZentrum, Potsdam, Germany

Received 19 August 2005; revised 20 October 2005; accepted 14 November 2005; published 28 January 2006.

[1] A gravity field acting on a collisionless, magnetized space plasma causes electrons and ions to drift into opposite directions, in addition to gyrating around the magnetic field lines. This sets up an electric current which flows perpendicular to the gravity and magnetic fields in the eastward direction. Here we present the first observational evidence for such a gravity-driven current system in the Earth's low-latitude ionosphere. Its magnetic field signal, although 10,000 times smaller than the ambient Earth's magnetic field, is clearly visible in CHAMP satellite magnetic measurements. We find a current ribbon of more than 50 kA, about 66° wide in latitude, which moves with the sun northward in summer and southward in winter. Correcting magnetic measurements for this current's signature should lead to a better agreement between low-orbiting satellite and ground-based observations.

Citation: Maus, S., and H. Lühr (2006), A gravity-driven

recombination rate is low, so that the F region persists throughout the night. Electric currents in the F region are generally much weaker and more difficult to detect. For example, a meridional current system at equatorial latitudes predicted by Untiedt [1967] and Sugiura and Poros [1969] was identified by Musmann and Seiler [1978] in sounding rocket magnetic field measurements and by Maede *et al.* [1982] in Magsat satellite data. Magsat observations also contained the signatures of inter-hemispheric field aligned currents, as reported by Olsen [1997]. Currents associated with local plasma depletions were first identified by Lühr *et al.* [2002] in CHAMP measurements. Eccles [2004] pointed out that the force of gravity should be a measurably important driver for currents in the low-latitude ionosphere. Here, we present the first observational evidence for such a gravity-driven current system.



In figura: mappa della densità di ioni n valutata all'altitudine di 400 km. Le linee rappresentano strati di correnti ionosferiche generate dal drift gravitazionale. Essi hanno di intensità di 1 1 mA/m e procedono verso est.

Moti di deriva generale $\mathbf{F} \times \mathbf{B}$

Esempio da «Space Physics» di M.B. Kallenrode

Example 3. Wien filter. A magnetic field $B = 5 \times 10^{-4}$ T is perpendicular to an electric field $E = 1000$ V/m. This configuration provides a simple example of $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift. Since the two fields are perpendicular, we obtain from (2.51) a drift velocity $v_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = (EB)/B^2 = E/B = 2 \times 10^6$ m/s. The drift velocity is perpendicular to both the electric and the magnetic field. An electron approaches perpendicular to both fields. On hitting the field combination, the electron will start to gyrate around the magnetic field and drift along its original direction of motion. The size of the gyro-orbit depends on the electron speed v_e . For $v_e = v_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$ the electron moves along a straight line. This can be understood as follows: if the electron moves along a straight line at constant speed, no force acts on the electron. Thus the forces exerted by the electric and the magnetic field must be equal: $eE = ev_eB$ or $v_e = E/B$, which is the drift velocity derived above. \square

Altri moti di deriva in teoria delle orbite

Abbiamo visto il moto ciclotronico puro e poi il moto di deriva per $drift E \times B$ o $drift F \times B$. Ora passiamo ad analizzare altri casi un po' più complicati ma di interesse per la space physics:

1. Gradiente magnetico nella direzione perpendicolare al campo: $\nabla B \perp B$.
Es. campo geomagnetico, dipoli magnetici
2. Curvatura del campo magnetico B .
Es. tutti i campi magnetici in astrofisica, es. interplanetario
3. Gradiente magnetico nella direzione parallela al campo: $\nabla B \parallel B$.
Es. bottiglie magnetiche, trappole magnetiche
4. Campi elettrico o magnetico variabili nel tempo: $E = E(t)$
Es. nei plasmi in laboratorio, in fase di accensione del sistema

Li vediamo nell'ordine 1, 2, 4, 3.

Caso 1 – Drift di gradiente magnetico ∇B

Supponiamo di avere un sistema con $E = 0$ e $\nabla B \perp B$.

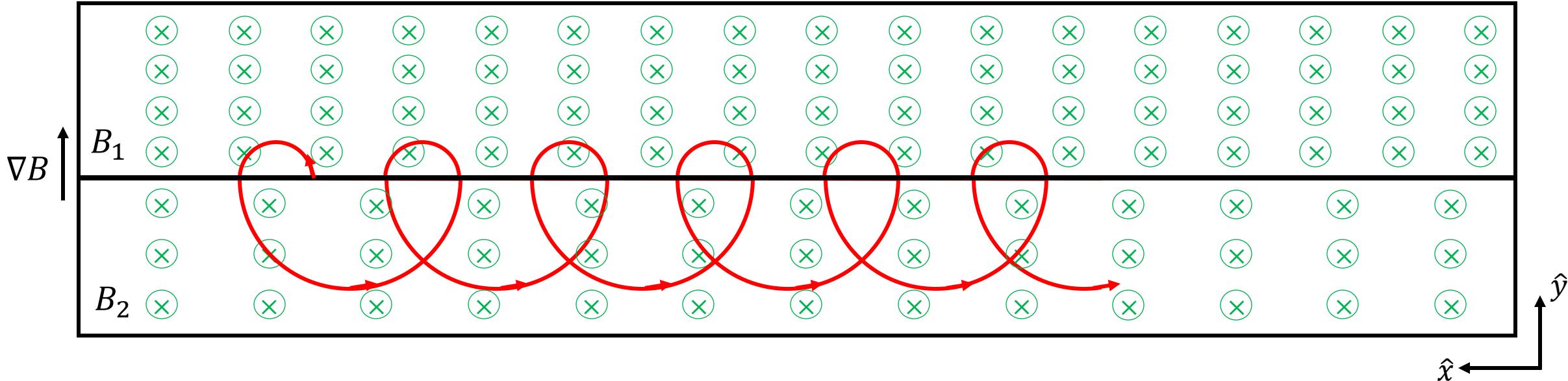
In questo sistema, le particelle spiraleggiano attorno alle linea di campo B in direzione $\perp B$ e il campo cambia. Il giro viene quindi distorto e non è più elicoidale.

Caso 1 – Drift di gradiente magnetico ∇B

Prendiamo una configurazione in cui il campo è $\vec{B} \parallel \hat{z}$ ed il suo gradiente è $\nabla B \parallel \hat{y}$.

Per immaginarsi l'effetto del drift, consideriamo dapprima il caso estremo di un campo che assume due valori sopra e sotto la linea orizzontale, come in figura, in cui $B_1 > B_2$.

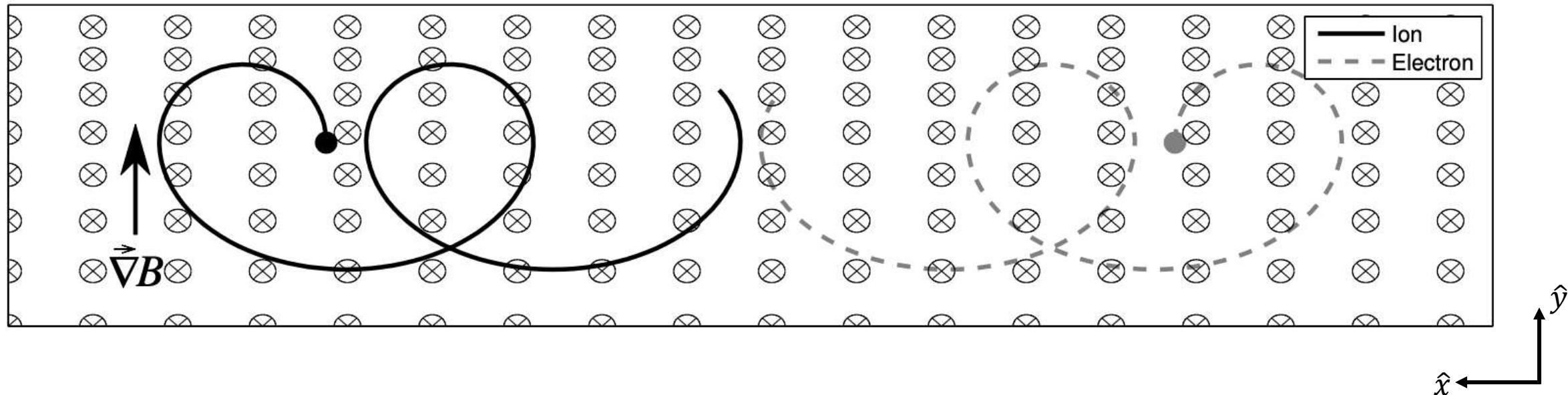
Si ha allora $r_1 < r_2$. Quando una particella carica attraversa B_1 , il raggio di Larmor è minore e compie una curva più stretta rispetto a quando attraversa B_2 . Il risultato è un moto cicloidale che procede verso destra. Nel caso di variazione regolare tale da avere ∇B , il risultato è simile.



Caso 1 – Drift di gradiente magnetico ∇B

Es. in figura il gradiente di B è verticale $\nabla B \parallel \hat{y}$ mentre il campo è entrante $B \parallel \hat{z}$. Mentre spiraleggiano, il raggio di curvatura si allunga nella regione in cui B è più debole ($r_L \propto B^{-1}$). In questo sistema, le particelle spiraleggiano attorno alle linea di campo B in direzione $\perp B$.

- Il risultato è un moto netto di drift in direzione $B \times \nabla B$.
- In figura, il drift procede verso destra (q^+) o verso sinistra (q^-).



Caso 1 – Drift di gradiente magnetico ∇B

Per ottenere l'espressione del *drift* ∇B , prendiamo un campo $B \parallel \hat{z}$ e assumiamo $\nabla B \parallel \hat{y}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} B \parallel \hat{z} \\ \nabla B \parallel \hat{y} \end{array} \right.$$

Vogliamo determinare la velocità di drift usando l'espressione generica: $\mathbf{v}_{drift} = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2}$

Dobbiamo valutare la forza \mathbf{F} agente sulla particella.

La forza sentita da una particella è $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, che possiamo calcolare usando:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = \{0, 0, B\} \\ \mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\} \end{array} \right.$$

Otteniamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x = +qv_y B \\ F_y = -qv_x B \end{array} \right. \quad (\#)$$

Nell'approccio della teoria delle orbite si media sul giroraggio, ottenendo i valori medi $\overline{F_x}$ e $\overline{F_y}$
[Infatti ci interessa la forza che determina il moto del centro di guida, mediata su un giro.]

Caso 1 – Drift di gradiente magnetico ∇B

Dobbiamo calcolare i valori medi $\overline{F_x}$ e $\overline{F_y}$ dove le forze sono:

$$\begin{cases} F_x = +qv_y B \\ F_y = -qv_x B \end{cases} \quad (\#)$$

- In direzione y ci aspettiamo velocità $\overline{v_y} = 0$. Dalle (#) ciò implica che in media $\overline{F_x} = 0$
- In direzione x invece c'è drift, cioè $\overline{v_x} \neq 0$, e quindi dalle (#) ci aspettiamo $\overline{F_y} \neq 0$

Cerchiamo un'espressione approssimata per $\overline{F_y}$.

Per farlo valutiamo $F_y = -qv_x B$. Cioè valutiamo v_x e B nell'ipotesi che

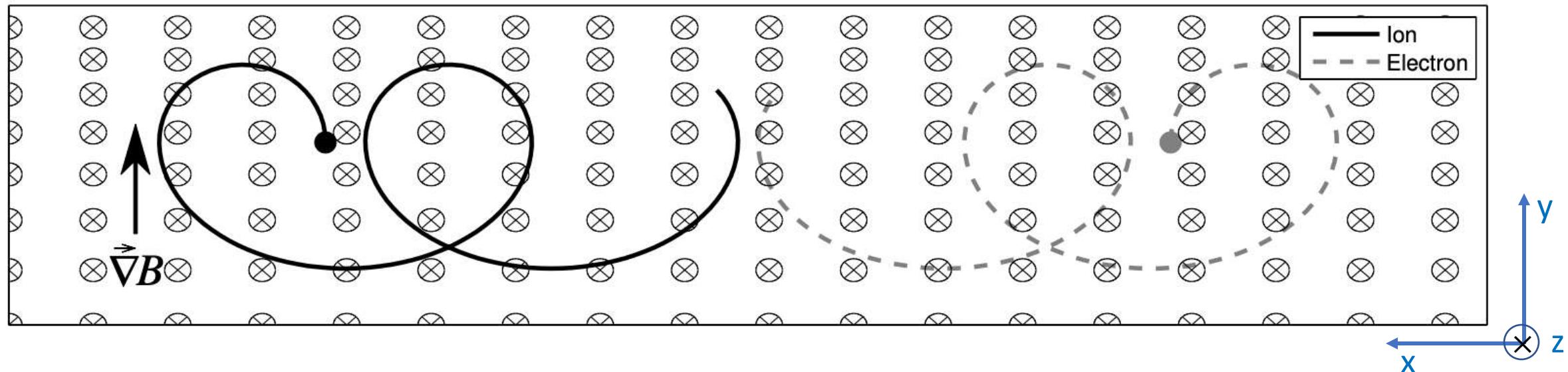
- Il campo B sia poco variabile ad ogni giro $r_L \ll L \equiv B/\nabla B$
- Il moto sia quasi-circolare $v_x \approx v_\perp \cos(\omega_c t)$

Caso 1 – Drift di gradiente magnetico ∇B

Assumiamo che B vari di poco in un giro. Cioè, chiamiamo L la distanza caratteristica su cui B varia ($L \cong B/\nabla B$) e supponiamo di avere $r_L/L \ll 1$. Cioè assumiamo moto quasi-circolare, e quindi la velocità lungo \hat{x} è data, approssimativamente, da $v_x = \dot{x} \approx v_{\perp} \cos(\omega_c t)$, come visto.

Di conseguenza, dalla $F_y = -qv_x B$, otteniamo $F_y = -qv_{\perp} \cos(\omega_c t) B$.

Ora valutiamo B presente nella F_y . Abbiamo detto che B varia poco, ma un po' deve variare...



Caso 1 – Drift di gradiente magnetico ∇B

Assumiamo che B vari di poco in un giro. Cioè, chiamiamo L la distanza caratteristica su cui B varia ($L \cong B/\nabla B$) e supponiamo di avere $r_L/L \ll 1$. Cioè assumiamo moto quasi-circolare, e quindi la velocità lungo \hat{x} è data, approssimativamente, da $v_x = \dot{x} \approx v_\perp \cos(\omega_c t)$, come visto.

Di conseguenza, dalla $F_y = -qv_x B$, otteniamo $F_y = -qv_\perp \cos(\omega_c t) B$.

Ora valutiamo B presente nella F_y . Abbiamo detto che B varia poco, ma un po' deve variare...

Scriviamo:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + x \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + y \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + z \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

dove B_0 è il campo all'origine. In pratica \mathbf{B} è diretto solo lungo \hat{z} , ed il gradiente è lungo \hat{y} .

Cioè possiamo scriverlo in forma scalare dallo sviluppo à la Taylor:

$$B \cong B_0 + \left[\frac{\partial B}{\partial y} \right] (y - y_0)$$

La coordinata y qui può essere scritta approssimativamente come visto: $y - y_0 = \pm r_L \cos \omega_c t$ (approssimazione quasi-circolare). Ora mettiamo y nell'espressione di B , e mettiamo B in F_y .

Caso 1 – Drift di gradiente magnetico ∇B

Stiamo cercando un'espressione approssimata per $\overline{F_y}$.

Per farlo abbiamo valutato $F_y = -qv_x B$. Cioè abbiamo valutato v_x e B nell'ipotesi che:

- Il campo B sia poco variabile ad ogni giro

$$\begin{aligned} r_L \ll L &\equiv B/\nabla B \\ \rightarrow B &\cong B_0 + \left[\frac{\partial B}{\partial y} \right] (y - y_0) \end{aligned}$$

- Il moto sia quasi-circolare

$$v_x \approx v_{\perp} \cos(\omega_c t)$$

$$y - y_0 \approx \pm r_L \cos \omega_c t$$

Ora sostituiamo le espressioni trovate per v_x , B e y nella relazione $F_y = -qv_x B$.

Otteniamo:

$$F_y = -qv_{\perp} B_0 \cos(\omega_c t) \mp qv_{\perp} r_L \frac{\partial B}{\partial y} \cos^2(\omega_c t)$$

Caso 1 – Drift di gradiente magnetico ∇B

Abbiamo ottenuto l'espressione per la forza:

$$F_y = -qv_{\perp}B_0 \cos(\omega_c t) \mp qv_{\perp}r_L \frac{\partial B}{\partial y} \cos^2(\omega_c t)$$

Ora facciamo la media su un giro ciclotronico per ottenere \bar{F}_y . Si ha $\langle \cos(x) \rangle = 0$ e $\langle \cos^2 x \rangle = 1/2$. Otteniamo quindi:

$$\bar{F}_y = \mp \frac{1}{2}qv_{\perp}r_L \frac{\partial B}{\partial y}$$

Come visto prima, avevamo $\bar{F}_x = 0$. Abbiamo quindi \bar{F} e possiamo quindi calcolare $v_D = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2}$.

$$v_D = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2} = \frac{\bar{F}_y}{qB} \hat{x} = \mp \frac{1}{2} \frac{v_{\perp}r_L}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right) \hat{x}$$

Questa velocità verrà anche denotata $v_{\nabla B}$, trattandosi del drift risultante dal gradiente magnetico. Nella derivazione condotta abbiamo assunto $B \parallel \hat{z}$ e $\nabla B \parallel \hat{y}$. In generale possiamo scrivere:

Caso 1 – Drift di gradiente magnetico ∇B

Nella presente derivazione abbiamo considerato il caso $B \parallel \hat{z}$ e $\nabla B \parallel \hat{y}$.

Più in generale possiamo scrivere:

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}$$

Questa è la formula del drift ∇B , detto «grad-B drift».

Facciamo alcuni commenti:

- 1) Si è prodotto un moto di deriva senza campi elettrici o forze esterne!
- 2) La direzione del drift è perpendicolare a B ed a ∇B , come già sapevamo.
- 3) Il segno \pm è il segno di q . Ci dice che elettroni o ioni driftano in direzioni opposte.
- 4) Se e- e ioni driftano in direzioni opposte, significa che questo drift genera una corrente netta.
- 5) Il risultato vale per $r_L/L \ll 1$, in cui approssimiamo il moto di girazione come quasi-circolare.

[NB è importante il caso in cui il campo è curvo. La curvatura induce un gradiente radiale:

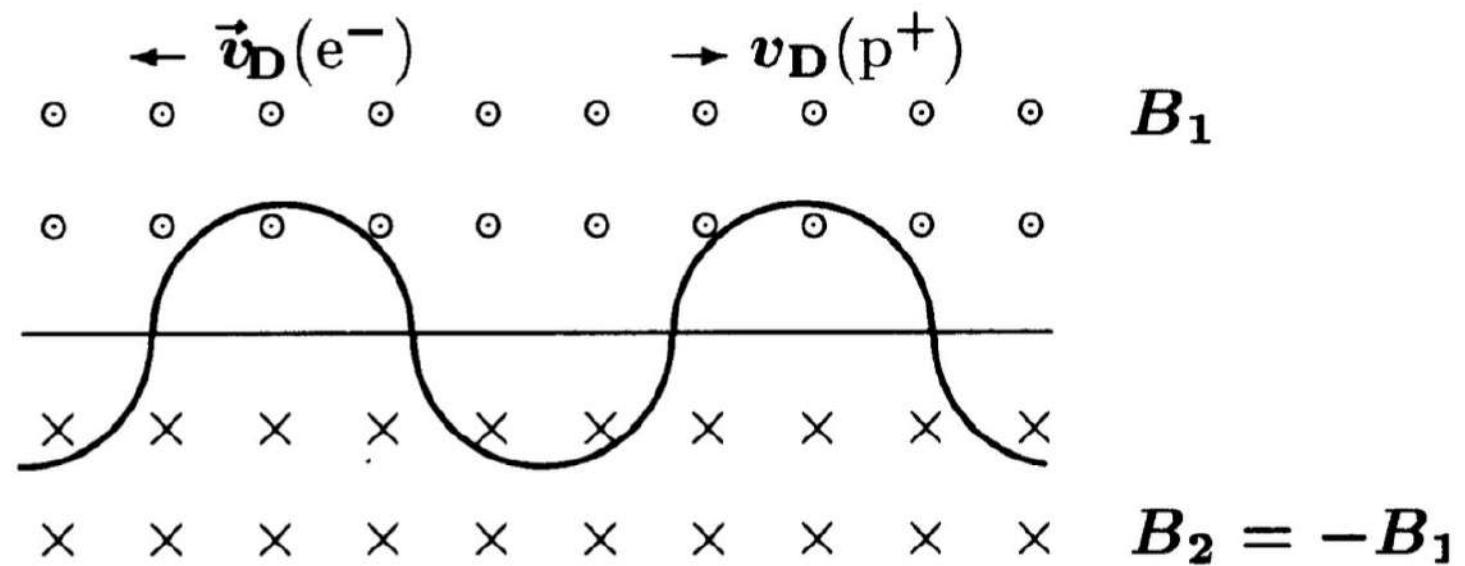
$\nabla B \propto -R_c^{-2} \hat{R}_c$ che è il gradiente magnetico per un campo B curvo con raggio di curvatura R_c .

Teorema di Alfvén e current sheets

Come vedremo, nei plasmi spaziali magnetizzati si possono avere delle superfici, dette **current sheet**, che dividono regioni di campo magnetico di polarità opposta. In prossimità di una current sheet, il campo B cambia polarità in maniera discontinua. È un caso estremo di gradiente magnetico del tipo $\nabla B \perp B$ che provoca un moto di **drift**. Queste superfici sono in genere percorse da correnti correnti longitudinali, ed è il motivo per cui si chiamano **current sheet**.

Velocità di drift ∇B :

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}$$



Caso 2 – Drift di curvatura magnetica

Consideriamo il moto di particelle in presenza di un campo B costante e **curvo**.

In generale la particella ha una componente v_{\perp} , che causa girazione attorno a B , e una componente v_{\parallel} che segue il campo B . Come nella situazione qui in figura:

Se la linea di campo ha raggio di curvatura R_c , la particella sentirà **accelerazione centripeta** $a_R = v_{\parallel}^2/R_c$. Associata ad a_R avremo una **forza centrifuga** radiale:

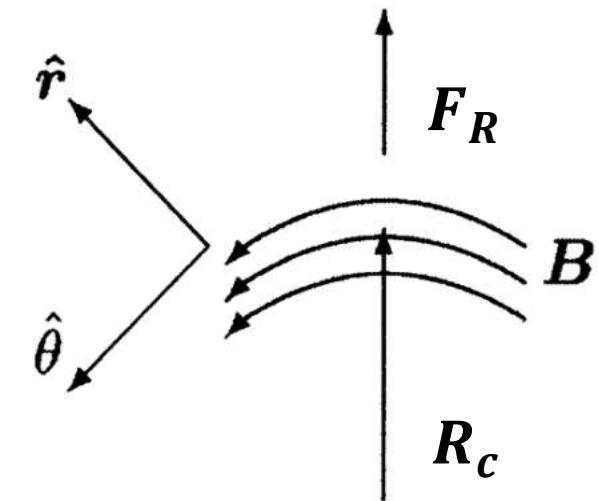
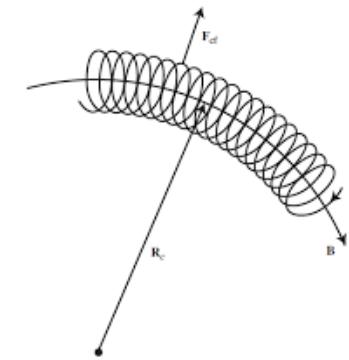
$$\mathbf{F}_R = m \mathbf{a}_R \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_R = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_c} \hat{\mathbf{r}} = mv_{\parallel}^2 \frac{\mathbf{R}_c}{R_c^2}$$

Qui \mathbf{R}_c è il raggio-vettore che va dal centro della curvatura fino al punto del centro di guida.

Il drift è quindi dato dall'espressione generale del drift $\mathbf{F}_R \times \mathbf{B}$

$$\mathbf{v}_R = \frac{\mathbf{F}_R \times \mathbf{B}}{qB^2} = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^2} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2}.$$

(Velocità di drift
da sola curvatura)



Però quando c'è curvatura c'è anche gradiente radiale (cioè B dipende da R_c). Dobbiamo considerarlo!

Caso 2 – Drift di curvatura magnetica

Per valutare il gradiente radiale, consideriamo coordinate cilindriche in cui la coordinata r segue \mathbf{R}_c . Il campo B curvo è disposto lungo la coordinata ϕ . Se calcoliamo il rotore otteniamo:

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) = 0$$

Dove l'abbiamo posto = 0 applicando la **legge di Ampere** (no correnti concatenate). Integrando si trova che B_ϕ è proporzionale a r^{-1} . E quindi ci si aspetta: $|B| = B_\phi \propto R_c^{-1}$:

$$B \propto R_c^{-1} \quad \Rightarrow \quad \nabla B \propto -R_c^{-2} \hat{\mathbf{R}}_c \quad \Rightarrow \quad \frac{\nabla B}{B} = -\frac{\mathbf{R}_c}{R_c^2}.$$

Sostituendo nella formula del grad-B drift (o drift ∇B) vista per $v_{\nabla B}$ nel paragrafo precedente

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \mp \frac{v_\perp r_L}{2B^2} \mathbf{B} \times \left(B \frac{\mathbf{R}_c}{R_c^2} \right) = \frac{m}{2q} v_\perp^2 \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B^2}$$

(Velocità di drift da grad-B
associato alla curvatura)

Il drift totale si ha aggiungendo questa espressione per $v_{\nabla B}$ a quella della slide precedente (per v_R). Le due espressioni sono molto simili: una è proporzionale a v_\parallel^2 , l'altra è proporzionale a $v_\perp^2/2$.

Caso 2 – Drift di curvatura magnetica

Combinando le due espressioni trovate (per $v_{\nabla B}$ e v_R) si ottiene:

$$\mathbf{v}_{R+\nabla B} = \frac{m}{q} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B^2} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right)$$

(drift toroidale)

The equation is enclosed in a green rounded rectangle. Two blue arrows point from the text 'curvatura' and 'gradiente' to the terms v_{\parallel}^2 and $\frac{1}{2} v_{\perp}^2$ respectively.

Questa somma viene anche chiamata **drift toroidale**, perché è importante nei confinamenti magnetici in configurazioni toroidali. Essa racchiude i **drift di curvatura** e **gradiente** e si applica ai campi B curvi, con raggio di curvatura R_c , in cui vi è un gradiente associato ad essa.

Alcune osservazioni:

- Questo drift $\nabla B + R_c$ (cioè grad-B + curvatura) **agisce nella stessa direzione** del drift ∇B .
- Dipende dal segno della **carica**, ma non dalla **massa**. È uguale e opposto per elettroni e ioni.
- Quindi provoca **correnti elettriche** nette, facendo fluire elettroni e ioni in direzioni opposte.
- È molto importante per determinare il moto di **particelle intrappolate nella magnetosfera**.
- I due drift agiscono nella stessa direzione e hanno la stessa dipendenza da m e q. Differiscono però nel **pitch angle**: le particelle con pitch grande (per cui $v \sim v_{\perp}$) rispondono maggiormente al drift ∇B , per quelle con pitch piccolo ($v \sim v_{\parallel}$) è più importante il drift di curvatura.

Caso 2 – Drift di curvatura magnetica

Possiamo anche scriverla in termini di temperatura T . Usando **teorema di equiripartizione dell'energia** secondo cui, per una distribuzione Maxwelliana, ogni grado di libertà acquisisce $\frac{1}{2}kT$ di energia termica. I due gradi di libertà qui sono le velocità parallela e perpendicolare:

$$\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 = \frac{1}{2}kT \quad \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 = kT$$

Possiamo allora riscrivere l'espressione del drift in termini di temperatura:

$$\mathbf{v}_{R+\nabla B} = \pm \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{\omega_c R_c^2 B} \frac{2kT}{m} = \pm \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{\omega_c R_c^2 B} v_{th}^2$$

L'ultima espressione è scritta in termini di velocità termica $v_{th} = (2kT/m)^{1/2}$. Questa espressione è utile per la descrizione di una popolazione maxwelliana di particelle.

Caso 2 – Drift di curvatura magnetica

In sostanza la velocità di drift dovuta a curvatura e gradienti magnetici risulta $v_D \propto T B^{-1} R_c^{-1}$. Essa diventa rilevante nei reattori a fusione termonucleare in cui si raggiungono alte temperature T . Ciò rende infatti difficile il confinamento del plasma nelle configurazioni in cui $\mathbf{B} \times \nabla B \neq 0$. Inoltre, essendo v_D dipendente dal segno della carica, il drift tende a separare le cariche positive dalle negative, causando dunque la generazione di campi elettrici (i quali a loro volta causano ulteriore drift $E \times B$). Il problema si può mitigare realizzando reattori di grandi dimensioni (R_c) e campi B molto intensi.

I processi di drift sono rilevanti nella fisica spaziale, ad esempio nello studio della magnetosfera o nella fisica del trasporto delle particelle energetiche nell'eliosfera.

I vari meccanismi fisici di trasporto (es. diffusione e convezione) non dipendono dal segno della carica delle particelle, e dunque sono identici per particelle e loro antiparticelle. Invece il moto di drift attraverso il campo B interplanetario causa delle differenze tra particelle e antiparticelle che si riflettono nelle misure di raggi cosmici condotte in prossimità della terra.

Caso 4 – Drift dovuto a campi variabili

Consideriamo il caso in cui il **campo elettrico** è variabile nel tempo. Prendiamo $\mathbf{E} = [E_x(t), 0, 0]$, ed un campo magnetico stazionario perpendicolare ad esso, diciamo $\mathbf{B} = [0, 0, B_z]$.

Per semplicità supponiamo $E_x(t) \propto t$ crescente in maniera costante, cioè $\dot{E}_x = 0$.

Usiamo la forza di Lorentz per descrivere l'equazione del moto:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{m} [\mathbf{E}(t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]$$

Questa può essere risolta e disaccoppiata nelle varie coordinate, come visto. Lungo l'asse x si ha:

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2 \left[v_x \mp \frac{1}{\omega_c} \frac{\dot{E}_x}{B_z} \right]$$

Dove il segno \mp è riferito alla carica delle particelle, come visto. Ora, analogamente a quanto visto, possiamo effettuare una trasformazione di coordinate definendo $\tilde{v}_x = v_x \mp \dot{E}_x / \omega_c B_z$. Così facendo, cioè mettendoci in un SdR in moto a velocità $v_p \equiv \mp \dot{E}_x / \omega_c B_z$, otteniamo la descrizione di orbita ciclotronica. O in altre parole, la traiettoria della particella è sovrapposizione tra moto ciclotronico e moto rettilineo uniforme a velocità v_p , che viene detto **drift di polarizzazione**.

Caso 4 – Drift dovuto a campi variabili

La velocità di **drift di polarizzazione** è dunque data da:

$$v_p \equiv \mp \frac{1}{\omega_c} \frac{\dot{E}_x}{B_z}$$

Nel caso considerato v_p risulta costante, perché abbiamo assunto \dot{E}_x costante; ma l'espressione ha validità generale, per un qualsiasi campo elettrico variabile. Possiamo scriverla vettorialmente:

$$\boldsymbol{v}_p = \frac{m}{qB^2} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

Questo drift si annulla nel caso in cui il campo è costante, cioè $\dot{\boldsymbol{E}} = 0$. Quando presente, il drift di polarizzazione si aggiunge al drift $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ visto, che ad un dato istante t è dato da $\boldsymbol{v}_E = -\boldsymbol{E}_x(t)/B_z$. Vettorialmente, come visto, si scrive:

$$\boldsymbol{v}_E = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{B^2}$$

Caso 4 – Drift dovuto a campi variabili

C’è una differenza importante tra drift di polarizzazione e drift $E \times B$.

Come visto, la velocità v_E di drift $E \times B$ non dipende da massa o dalla carica delle particelle (e infatti può essere vista come il risultato di una trasformazione di Lorentz), e dunque non causa l’instaurazione di correnti elettriche.

Il drift di polarizzazione invece è proporzionale alla massa delle particelle e dipende dal segno della carica: $v_p \propto m/q$, come visto. Quindi esso causa una corrente netta, diretta lungo il campo elettrico:

$$J_p = n_e e(v_p^i - v_p^e) = \frac{n_e(M_i + m_e)}{B^2} \frac{\partial E}{\partial t}$$

Cioè elettroni e ioni fluiscono in direzioni opposte. Inoltre, siccome $M_i \gg m_e$, la corrente di polarizzazione è principalmente causata dagli ioni.

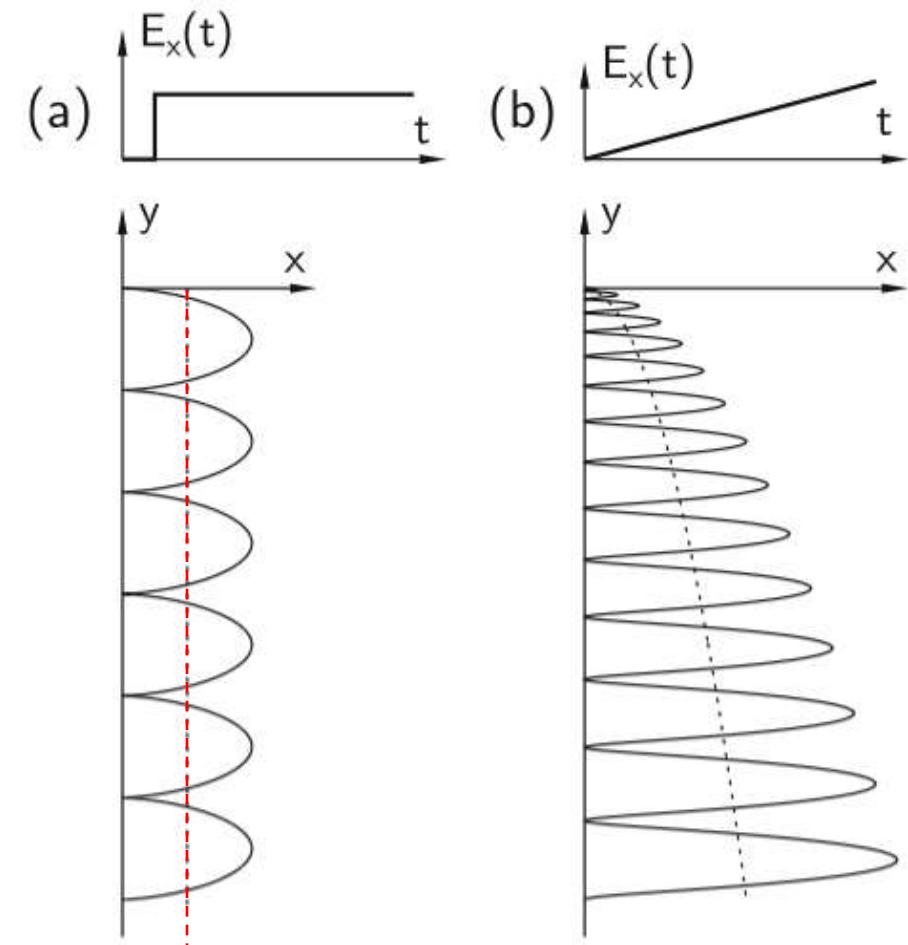
Caso 4 – Drift dovuto a campi variabili

Il drift di polarizzazione avviene spesso come effetto di «switch-on» del plasma, che riflette l'inerzia delle particelle. Immaginiamo di «accendere» un campo E all'improvviso (a $t = 0$) come mostrato in figura (a), a sinistra.

Se la particella è inizialmente ferma, essa inizierà prima a muoversi verso la direzione x del campo E , per poi sentire la forza di Lorenz che la piega facendola girare.

Se la particella è inizialmente ferma, essa inizierà prima a muoversi verso la direzione x del campo E , per poi sentire la forza di Lorenz che la piega. Il drift $v_E \propto E \times B$ procederà verso $\mp y$ (linea tratteggiata). Ma il CG risulterà spostato di mezza orbita rispetto alla posizione iniziale $x = 0$.

Se il campo cresce linearmente, come in figura (b), allora questo processo sarà graduale ed il moto del CG farà una traiettoria parabolica. Cioè avremo un drift v_p in direzione x , mentre il drift v_E ora crescerà linearmente verso y .



Caso 4 – Drift dovuto a campi variabili

Menzioniamo en passant anche il caso in cui il campo elettrico varia nello spazio, cioè non è uniforme. L'effetto può venire catturato dalle equazioni viste per il drift di polarizzazione

$$\boldsymbol{v}_p \equiv \mp \frac{1}{\omega_c B} \frac{d\boldsymbol{E}}{dt}$$

se consideriamo la derivata totale di E e la esprimiamo come derivata convettiva:

$$d/dt = \partial/\partial t + \boldsymbol{v}_E \cdot \nabla$$

in cui la velocità del termine convettivo è quella associata al drift $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$.

Il termine convettivo risulta in genere piccolo rispetto al termine di derivata temporale e viene spesso trascurato, cioè $d/dt \cong \partial_t$. Quando presente, tuttavia, il termine convettivo cattura le variazioni spaziali di E nella direzione del drift $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$, nell'assunzione che il campo cambi gradualmente, cioè variazioni piccole entro le scale spaziali interessate dall'orbita ciclotronica. Nel caso in cui le variazioni spaziali di E siano significative (ad es. quando si trattano effetti di bordo), allora occorre effettuare una trattazione differente.

Caso 4 – Drift dovuto a campi variabili

Nel caso di **campo B variabile** facciamo solo una breve considerazione. Prendiamo una particella spiraleggiante in un campo magnetico uniforme B . Il suo raggio di Larmor è dato da: $r_L = v_\perp / \omega_c$. Supponiamo che il campo sia variabile (lentamente) nel tempo $B = B(t)$ (es. $\dot{B} > 0$, crescente). Allora la particella guadagna ad ogni giro guadagna energia cinetica: $\Delta K_\perp = q\Delta U$, dove

$$\Delta U = \pi r_L^2 \dot{B}$$

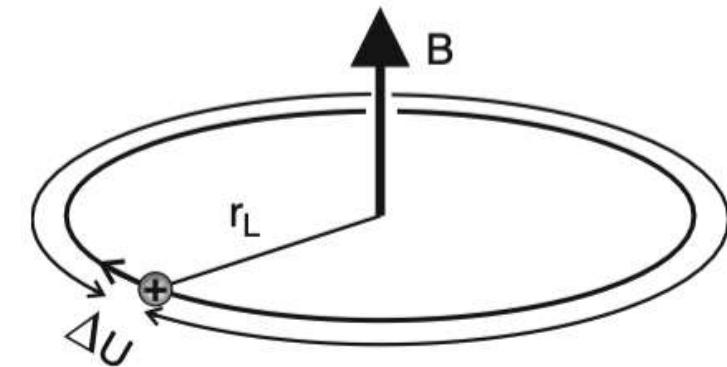
è una variazione di potenziale associata alla variazione del campo, in un periodo $T_c = 2\pi/\omega_c$. Il tasso associato al guadagno di energia (la potenza guadagnata) si stima quindi quindi:

$$\frac{dK_\perp}{dt} = \frac{q\Delta U}{2\pi/\omega_c} = \frac{1}{B} \frac{dB}{dt} K_\perp$$

Otteniamo la relazione: $\frac{dK_\perp}{K_\perp} = \frac{dB}{B}$

Che integrata fornisce $K_\perp/B = \text{const.}$, e cioè $\mu = \text{const.}$

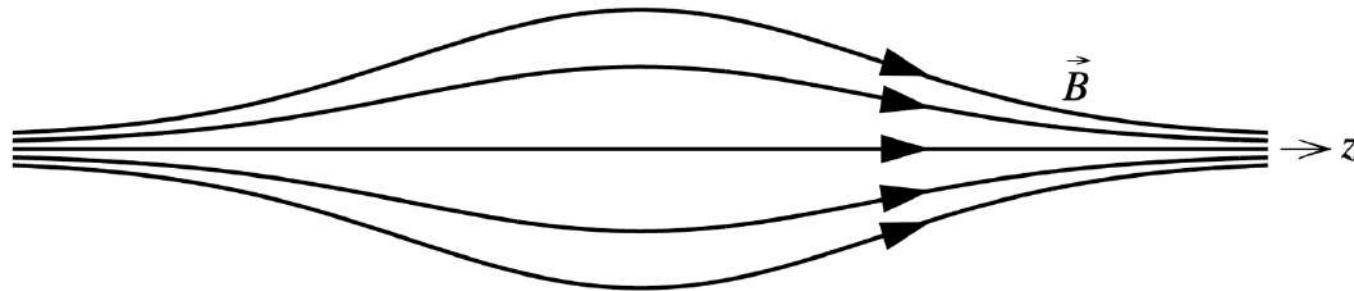
Il momento magnetico dunque si conserva. Ciò è vero fintanto che l'orbita rimane quasi-ciclotronica, cioè campo B non deve variare troppo velocemente.



Caso 3 – Drift di gradiente parallelo $\nabla B \parallel B$

Il terzo caso è quello della **bottiglia magnetica**, un sistema che intrappola le particelle.

Consideriamo un campo B che cresce lungo la direzione parallela, come in figura: $\nabla B \parallel B \parallel \hat{z}$.



Prendiamo una particella che viaggia nell'asse della bottiglia. La sua energia cinetica totale è:

$$K = \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} m v_{\perp}^2$$

dove abbiamo separato le componenti di velocità $v = v_{\perp} + v_{\parallel}$, rispetto alle linee di campo $B \parallel \hat{z}$.

Supponiamo che la particella proceda **verso destra**, con il campo B che cresce. Si ha:

- Le particelle spiraleggiano sempre più veloce perché B cresce, cioè v_{\perp} cresce
- Se l'energia cinetica totale K non cambia, allora v_{\parallel} deve decrescere.

Caso 3 – Drift di gradiente parallelo $\nabla B \parallel B$

Quindi mentre la particella avanza verso il collo della bottiglia con B crescente, la velocità v_{\perp} cresce a spese di v_{\parallel} che decresce fino ad azzerarsi. Quando succede si ha:

$$K = K_{\perp} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2$$

dove $v_{\parallel} = 0$, mentre la componente v_{\perp} assume il valore massimo, $v_{\perp} = \sqrt{2K/m}$.

In questo punto, la particella non avanza più verso destra, e spiraleggia a massima velocità.

Questo è il momento in cui avviene la riflessione magnetica: l'intensificarsi del campo magnetico ha fermato il moto parallelo della particella, l'ha respinta verso sinistra.

Successivamente, la particella torna indietro, con v_{\parallel} che diventa negativa e torna a crescere. Questo finché la particella non raggiunge l'altro «polo», il collo sinistro della bottiglia.

In una bottiglia magnetica ideale si instaura quindi un moto di **bouncing** in cui la particelle, spiraleggiando, **rimbalzano** da una parte all'altra della bottiglia rimanendovi intrappolate.

Caso 3 – Drift di gradiente parallelo $\nabla B \parallel B$

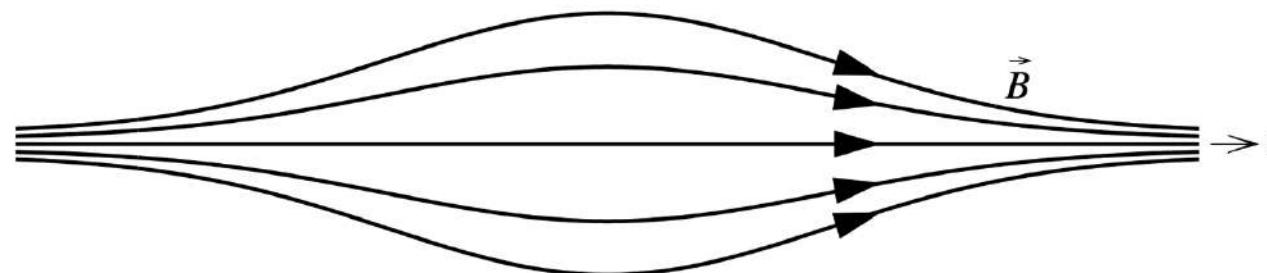
Proviamo a calcolare la **forza intrappolante F** (o trapping force) agente sulla particella. Assumiamo simmetria cilindrica, con campo $B_\phi = 0$. La trapping force è $F \parallel \hat{z}$, data da:

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \rightarrow \quad F_z = q(v_r B_\phi - v_\phi B_r) \quad \rightarrow \quad F_z = -q v_\phi B_r$$

Ora troviamo un'espressione per B_r , che è una componente non nulla (assieme a B_z). Per farlo sfruttiamo l'equazione di Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. In coordinate cilindriche:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Il secondo termine è nullo, perché $B_\phi = 0$. Il terzo termine è piccolo ma non lo trascuriamo (è $\nabla_{||} B$!). Supponiamo però che $\partial B / \partial z$ non cambi significativamente con r , cioè sia indipendente da r .



Caso 3 – Drift di gradiente parallelo $\nabla B \parallel B$

Dalla $\nabla \cdot B = 0$ quindi abbiamo: $\frac{\partial}{\partial r}(r B_r) = -r \frac{\partial B}{\partial z}$

Integriamola da 0 a r :

$$\int \frac{\partial}{\partial r}(r B_r) dr = - \int r \frac{\partial B}{\partial z} dr \quad \Rightarrow \quad r B_r = - \int_0^r r \frac{\partial B}{\partial z} dr \quad \Rightarrow \quad r B_r = - \left(\frac{\partial B}{\partial z} \right) \int_0^r r dr$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo portato fuori $\partial B / \partial z$, assumendo che sia indipendente da r .
Otteniamo quindi:

$$B_r = -\frac{r}{2} \left(\frac{\partial B}{\partial z} \right)_{z=0}$$

Ora mettiamolo nell'espressione vista prima per forza intrappolante $F_z = -q v_\phi B_r$:

$$F_z = q v_\phi \frac{r}{2} \left(\frac{\partial B}{\partial z} \right)_{z=0}$$

La velocità v_ϕ e la coordinata r possono essere mediate su un giorraggio:

$$\begin{cases} \langle v_\phi \rangle = \mp v_\perp \\ \langle r \rangle = r_L \end{cases}$$

Caso 3 – Drift di gradiente parallelo $\nabla B \parallel B$

Otteniamo così l'espressione mediata della **forza intrappolante**:

$$\langle F_z \rangle = \frac{1}{2} q \langle v_\phi \rangle \langle r \rangle \left(\frac{\partial B}{\partial z} \right)_{z=0} \quad \rightarrow \quad \langle F_z \rangle = \mp \frac{1}{2} \frac{m v_\perp^2}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial z} \right)$$

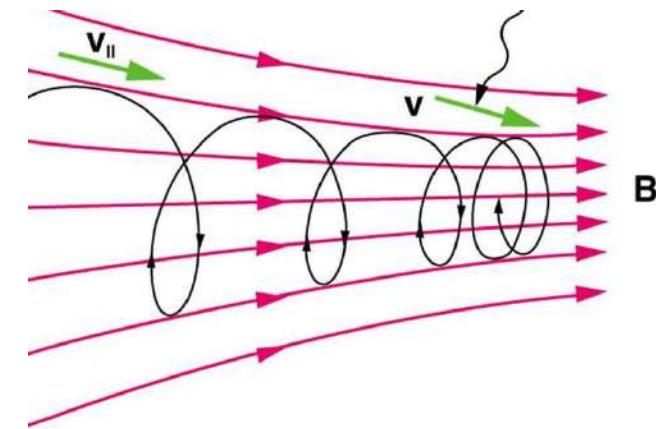
Possiamo riscrivere questo risultato in una forma più generale.

- Sostituiamo $\partial B / \partial z$ con $\nabla_{||} B$, il **gradiente** in direzione parallela a B
- Usiamo il **momento magnetico** della particella che gira, dato da:

$$\mu = I \cdot A = \left(\frac{1}{2} m v_\perp^2 \right) / B$$

(Per ottenere quest'ultima relazione ricordiamo che $\omega_c = qB/M$ e $r_L = v_\perp / \omega_c$).

La **forza intrappolante** può essere finalmente scritta come: $\boxed{\mathbf{F}_{||} = -\mu \nabla_{||} B}$



Questa viene detta trapping force o anche **mirror force**, perché agisce da specchio magnetico facendo rimbalzare la particella e causando quindi un moto oscillatorio di **bouncing**.

E' una forza di richiamo diretta sempre verso il centro della bottiglia. Non dipende dal segno delle particelle: positive o negative sentono comunque la stessa forza di richiamo.

Specchi magnetici e raggi cosmici

Enrico Fermi nel 1949 suggerì che particelle intrappolate tra specchi magnetici che si muovono gli uni verso gli altri possono essere accelerate. Ipotizzò un meccanismo astrofisico di questo tipo per spiegare l'origine dei raggi cosmici di alta energia.

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 75, NUMBER 8

APRIL 15, 1949

On the Origin of the Cosmic Radiation

ENRICO FERMI

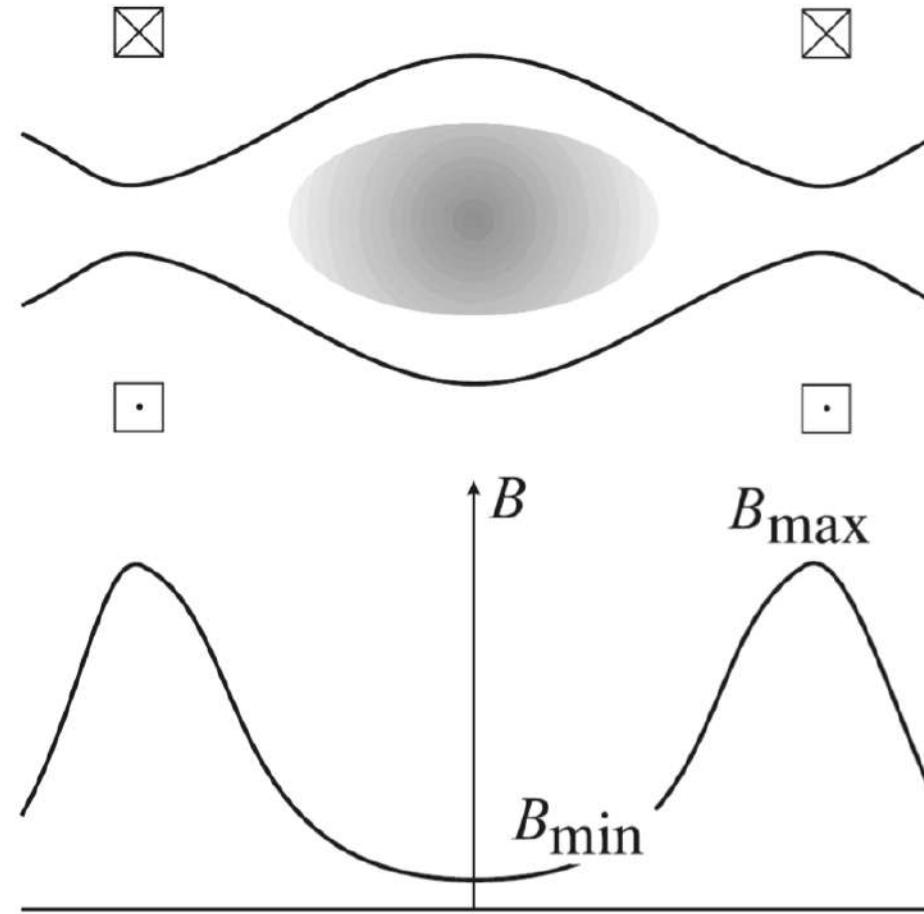
Institute for Nuclear Studies, University of Chicago, Chicago, Illinois

(Received January 3, 1949)

A theory of the origin of cosmic radiation is proposed according to which cosmic rays are originated and accelerated primarily in the interstellar space of the galaxy by collisions against moving magnetic fields. One of the features of the theory is that it yields naturally an inverse power law for the spectral distribution of the cosmic rays. The chief difficulty is that it fails to explain in a straightforward way the heavy nuclei observed in the primary radiation.

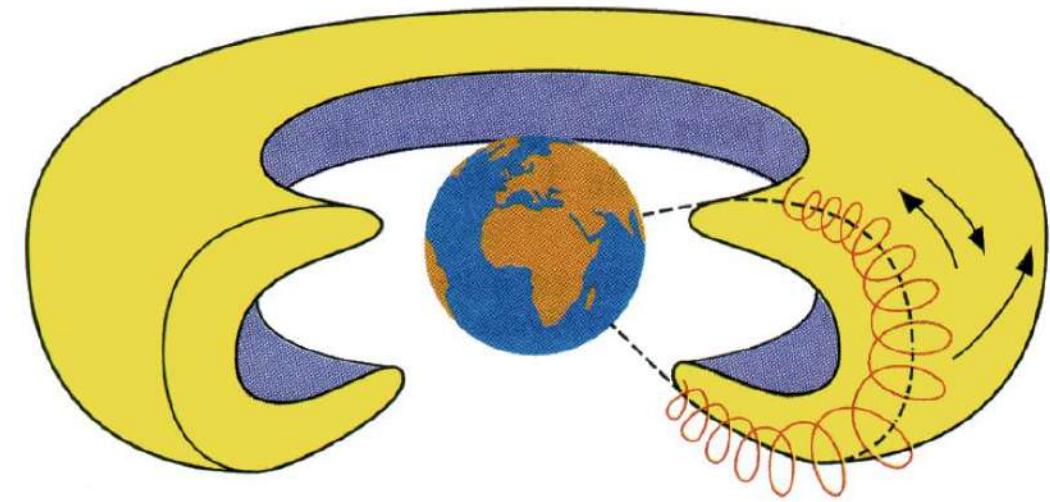
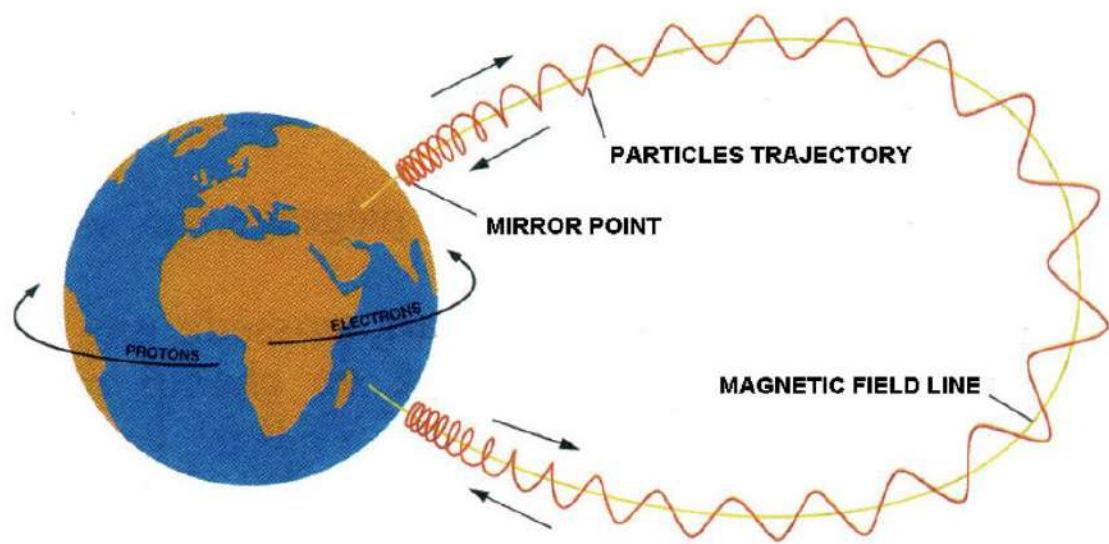
Bottiglia magnetica e trapping

In figura: un plasma intrappolato da un campo magnetico in configurazione di bottiglia



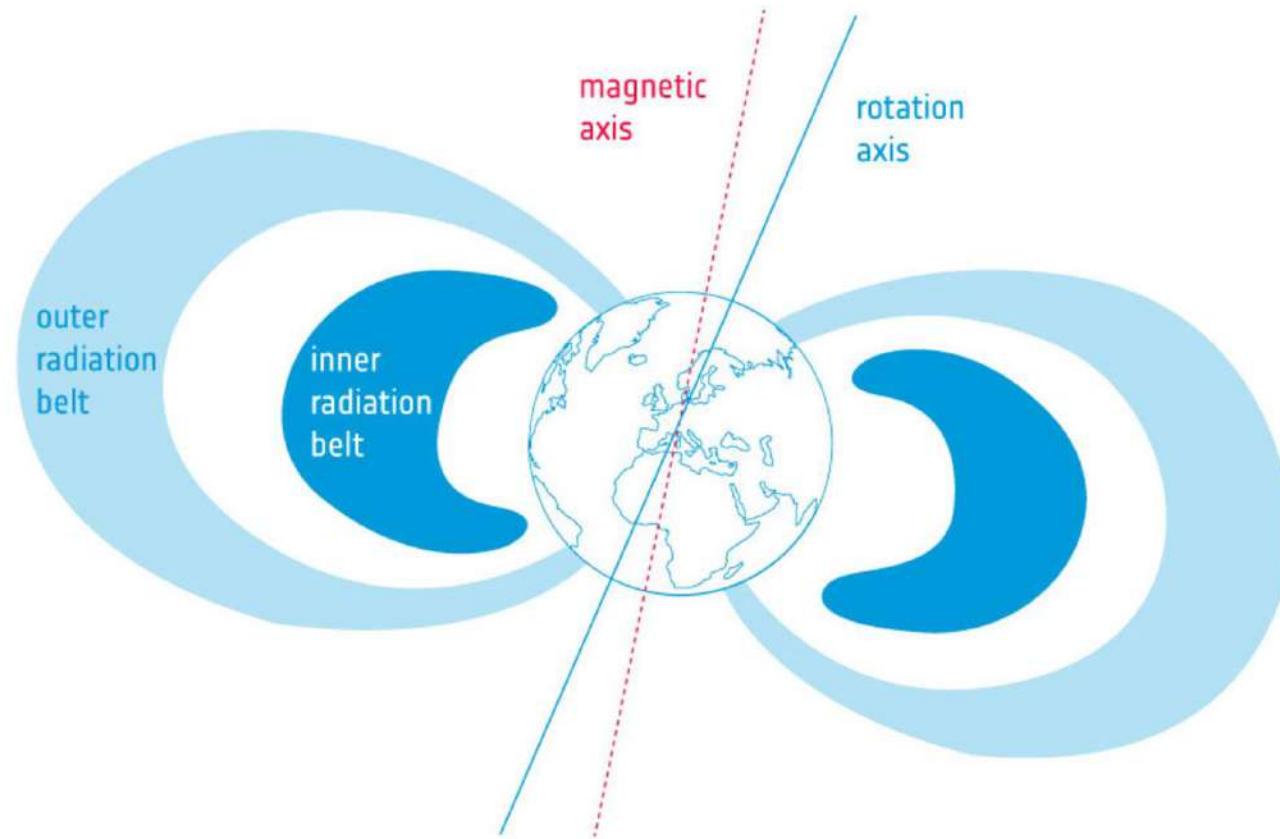
Il moto periodico in un campo di dipolo

Ecco un'applicazione di quanto discusso. Le linee del campo magnetico terrestre formano bottiglie magnetiche e intrappolano le particelle. Elettroni e ioni spiraleggiano lungo le linee di campo e instaurano un moto di bouncing, rimbalzando continuamente alle due estremità.



Il moto periodico in un campo di dipolo

Ecco un'applicazione di quanto discusso. Le linee del campo magnetico terrestre formano bottiglie magnetiche e intrappolano le particelle. Elettroni e ioni spiraleggiano lungo le linee di campo e instaurano un moto di bouncing, rimbalzando continuamente alle due estremità.



Il moto periodico in un campo di dipolo

Al primo ordine possiamo approssimare il campo geomagnetico come un **campo di dipolo**.

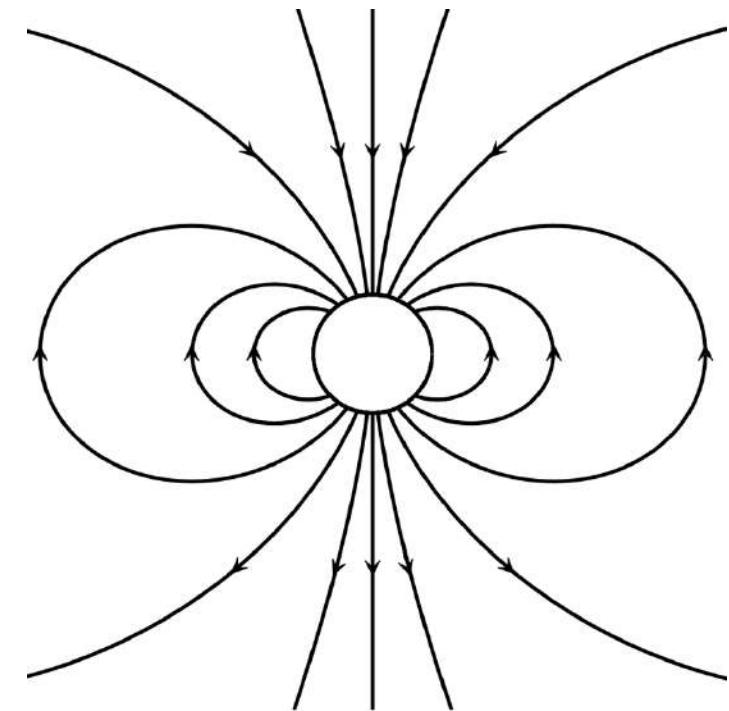
Supponiamo di avere una carica q nel piano equatoriale (magnetico) di un campo dipolare.

Scriviamo la sua velocità $v = v_{\perp} + v_{\parallel}$ rispetto al campo B , cioè:

- Componente v_{\perp} di spiraleggiamento (gyration) attorno a B .
- Componente v_{\parallel} di traslazione lungo le linee di B

In un dipolo, abbiamo quindi una bottiglia magnetica distribuita attorno alla terra. In questa situazione ci sono **tre moti periodici**:

1. Moto ciclotronico o di **gyration**, cioè di spiraleggiamento veloce attorno alle linee di campo.
2. Moto di **bouncing** tra i due capi della bottiglia causato dal mirroring, che intrappola le particelle in delle fasce.
3. Moto in direzione est/ovest di elettroni/ioni dovuto a **∇B -drift**, causato dal gradiente magnetico nella direzione radiale.



Il moto periodico in un campo di dipolo

1. **Gyration:** moto ciclotronico di spiraleggiamento veloce attorno alle linee di campo.
2. **Bounce:** moto di rimbalzamento tra i due capi della bottiglia causato dall'effetto mirroring che intrappola le particelle in delle «fasce di radiazione».
3. **Drift:** moto in direzione est/ovest di elettroni/ioni dovuto a ∇B -drift, causato dal gradiente magnetico nella direzione radiale.

I primi due moti abbiamo esaminati e sono immediati da immaginare.

Per capire il terzo (**drift**), immaginiamoci il caso $v_{\parallel} = 0$ in cui la particella resta presso le equatore compiendo solo moto ciclotronico (senza rimbalzare su e giù). A causa del gradiente ∇B in direzione radiale, vi sarà allora un drift- ∇B diretto in direzione $\pm \mathbf{B} \times \nabla \mathbf{B}$. Risultato:

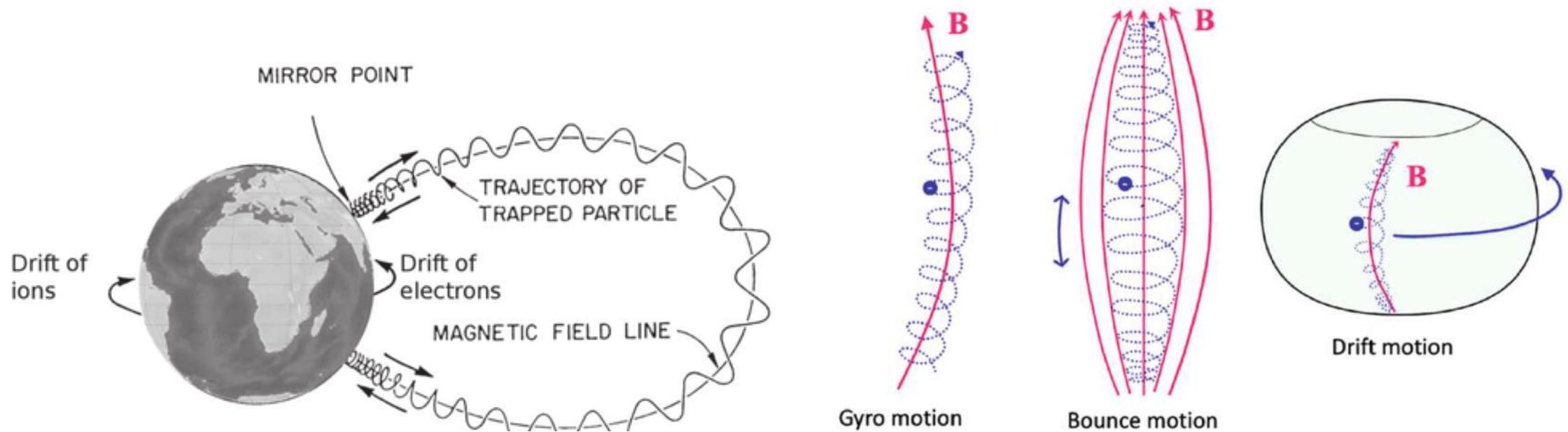
- Gli IONI acquisiscono drift spostandosi verso OVEST
- Gli ELETTRONI acquisiscono drift spostandosi verso EST

Nella pratica si ha $v_{\parallel} \neq 0$ e questo moto avviene simultaneamente agli altri due moti.

Questo fenomeno genera una corrente netta, detta **ring current**: si tratta di un **anello** di corrente che gira lentamente in senso orario attorno alla Terra («lentamente», rispetto agli altri moti).

Il moto periodico in un campo di dipolo

1. **Gyration:** moto ciclotronico di spiraleggiamento veloce attorno alle linee di campo.
2. **Bounce:** moto di rimbalzamento tra i due capi della bottiglia causato dall'effetto mirroring che intrappola le particelle in delle «fasce di radiazione».
3. **Drift:** moto in direzione est/ovest di elettroni/ioni dovuto a ∇B -drift, causato dal gradiente magnetico nella direzione radiale.



Tipicamente ci sono molte gyration per bounce, e molti bounces per periodi di drift.

Il moto periodico in un campo di dipolo

1. **Gyration:** moto ciclotronico di spiraleggiamento veloce attorno alle linee di campo.
2. **Bounce:** moto di rimbalzamento tra i due capi della bottiglia causato dall'effetto mirroring che intrappola le particelle in delle «fasce di radiazione».
3. **Drift:** moto in direzione est/ovest di elettroni/ioni dovuto a ∇B -drift, causato dal gradiente magnetico nella direzione radiale.

In realtà nella regione della ring current possono esserci vari drift:

$E \times B$ drift

$$\mathbf{v}_E = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})/B^2$$

Gravitational drift

$$\mathbf{v}_g = (m/q)(\mathbf{g} \times \mathbf{B})/B^2$$

Gradient drift

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = (m/q)(\frac{1}{2}v_{\perp}^2/R_c^2)(\mathbf{R}_c \times \mathbf{B})/B^2$$

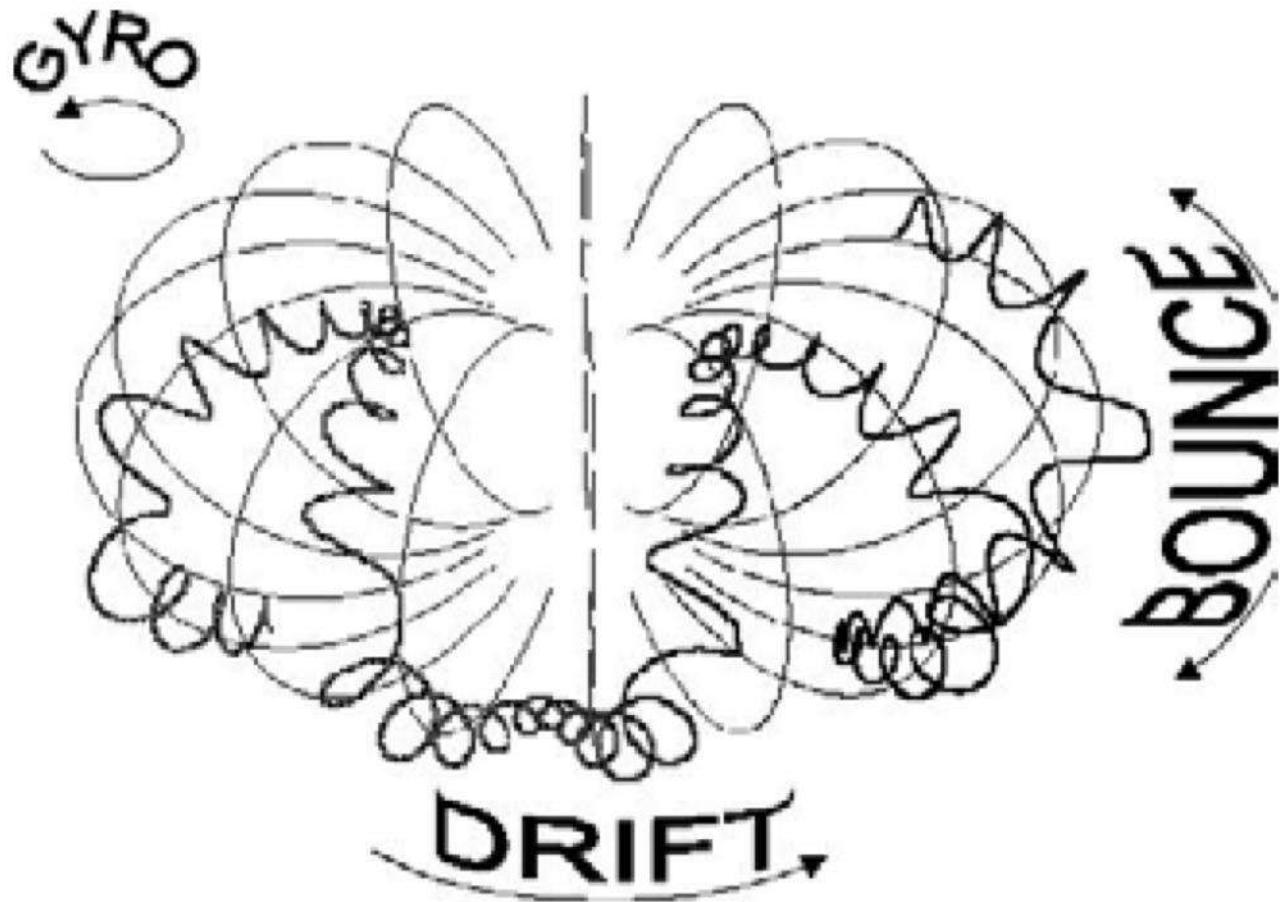
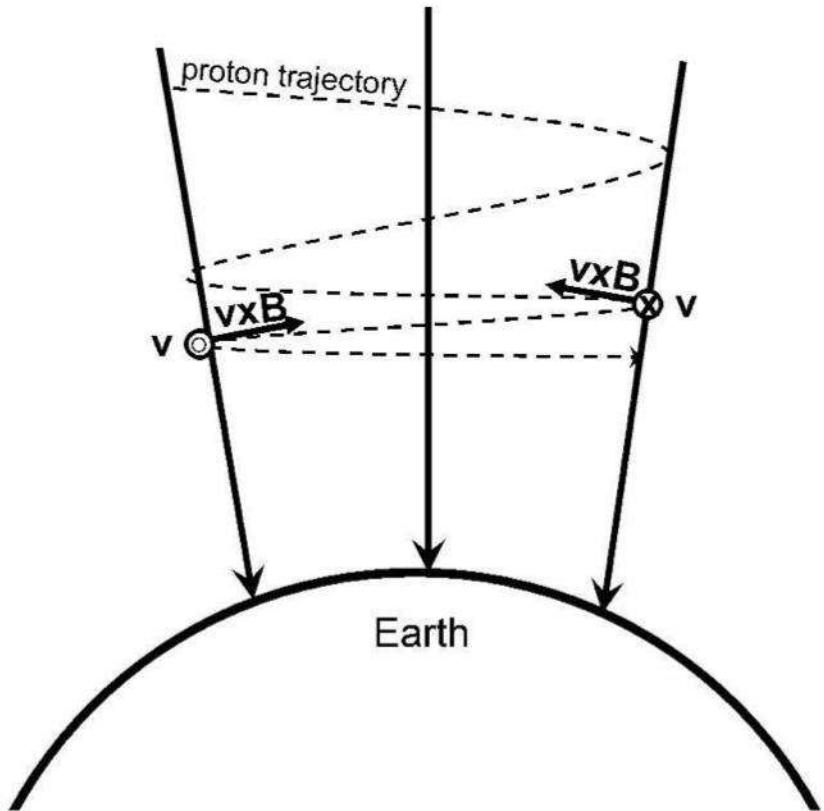
Curvature drift

$$\mathbf{v}_R = (m/q)(v_z^2/R_c^2)(\mathbf{R}_c \times \mathbf{B})/B^2$$

Polarization drift

$$\mathbf{v}_p = (m/q)(\partial \mathbf{E} / \partial t)/B^2$$

Il moto periodico in un campo di dipolo



Appendice

Il campo magnetico di dipolo

Consideriamo le equazioni di Maxwell per il campo magnetico nel caso stazionario:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{legge di Gauss})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (\text{legge di Ampere})$$

Nel vuoto e in assenza di cariche la legge di Ampere diventa $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$. In queste condizioni si può definire un potenziale magnetico scalare ψ tale che:

$$\mathbf{B} = -\nabla\psi$$

Usando la legge di Gauss si trova che il potenziale ψ deve obbedire all'equazione di Laplace.

$$\nabla^2\psi = -\nabla \cdot (\nabla\psi) = -\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Possiamo applicare l'equazione di Laplace per trovare il potenziale del campo magnetico terrestre.

Il campo magnetico di dipolo

Nell'applicazione dell'equazione di Laplace al magnetismo terrestre conviene usare un sistema di coordinate polari sferiche (r, θ, ϕ) avente l'origine nel centro della Terra; r è la distanza di un generico punto P dal centro, θ la sua colatitudine, cioè l'angolo che r forma con l'asse polare.

Coordinate sferiche vs cartesiane:

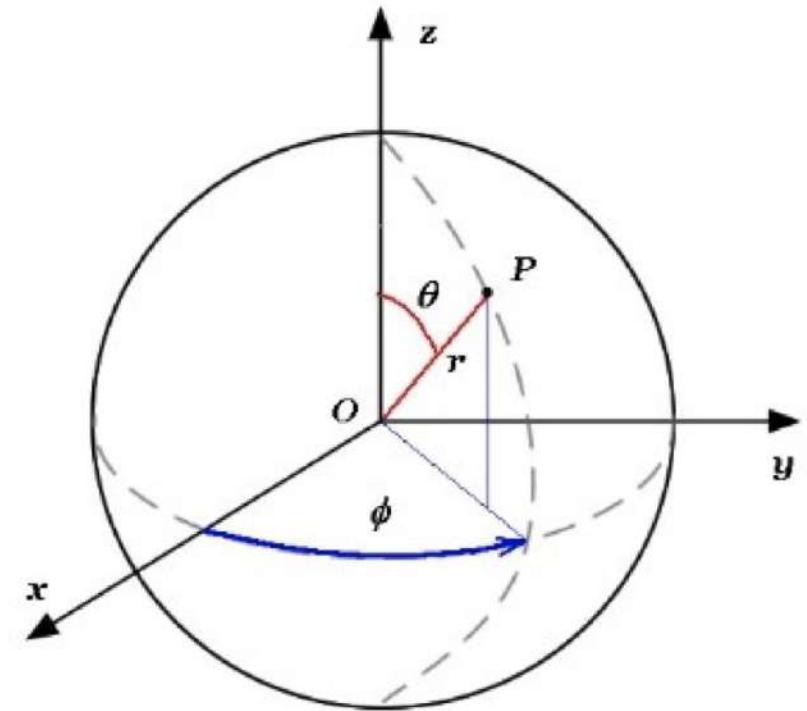
$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

Equazione di Laplace in coordinate sferiche:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = 0$$



L'equazione è separabile nelle coordinate. Soluzione del tipo: $\psi(r, \theta, \phi) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\phi)$

Il campo magnetico di dipolo

La soluzione generale all'equazione di Laplace può essere scritta come un'espansione del tipo:

$$\Psi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{A_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Si tratta di un'espansione di **multipolo**, dove le funzioni $Y_{lm}(\theta, \phi)$ sono armoniche sferiche.

In ogni termine il potenziale decresce con il raggio come $\psi \sim r^{-l-1}$ e domina il termine $l = 0$ in cui $\psi \propto r^{-1}$. Tuttavia questo termine (che sarebbe di **monopolio**) è nullo perché il campo B deve avere divergenza nulla, $\nabla \cdot B = 0$. Cioè non esistono monopoli magnetici.

Quindi il termine dominante è quello di dipolo, con $l = 1$, in cui $\psi \propto r^{-2}$. In questo termine il campo B decresce infatti come $B \propto r^{-3}$. Scriviamo ora il solo termine dominante (di dipolo) facendo un'opportuna scelta di assi (con dipolo $M \parallel \hat{z}$). Si ha:

$$\Psi = A_{10} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

Dove il coefficiente A_{10} è legato al **momento di dipolo magnetico** da: $A_{10} = -\mu_0 M / 4\pi$.

Il campo magnetico di dipolo

Dato ψ otteniamo il campo dalla:

$$\mathbf{B} = -\nabla\Psi = -\frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \left(2\cos\theta \hat{\mathbf{r}} + \sin\theta \hat{\theta} \right)$$

Le due componenti radiale e latitudinale risultano:

$$B_r = -\frac{\mu_0 M}{2\pi r^3} \cos\theta \quad B_\theta = -\frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \sin\theta$$

L'intensità del campo magnetico è data da: $B = \sqrt{B_r^2 + B_\theta^2} = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \sqrt{4 - 3\sin^2\theta}$,

Il campo di dipolo quindi decresce con la distanza come $B \propto r^{-3}$. Gli ordini superiori dello sviluppo di multipolo decrescono ancora più rapidamente ($B \propto r^{-l+1}$).

Per questo motivo il campo magnetico terrestre, che è in generale descritto da uno sviluppo in serie di multipoli, a distanze sufficientemente grandi può essere approssimato come un campo di dipolo.

NB per il campo di dipolo magnetico terrestre si ha: $M \approx 7.9 \times 10^{15} \text{ T} \cdot \text{m}^3$

Il campo di dipolo: le linee di campo

Una **linea di campo** è una curva che in ogni punto è **parallela** al campo vettoriale \mathbf{B} . L'elemento è:

$$d\mathbf{r} = \text{const} \cdot \mathbf{B}$$

In coordinate cartesiane l'elemento di curva è $d\mathbf{r} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}$, e si ha: $\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}$.

In sferiche si ha $d\mathbf{r} = dr \hat{\mathbf{r}} + rd\theta \hat{\mathbf{\theta}} + r \sin \theta d\phi \hat{\mathbf{\phi}}$ da cui: $\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta} = \frac{r \sin \theta d\phi}{B_\phi}$

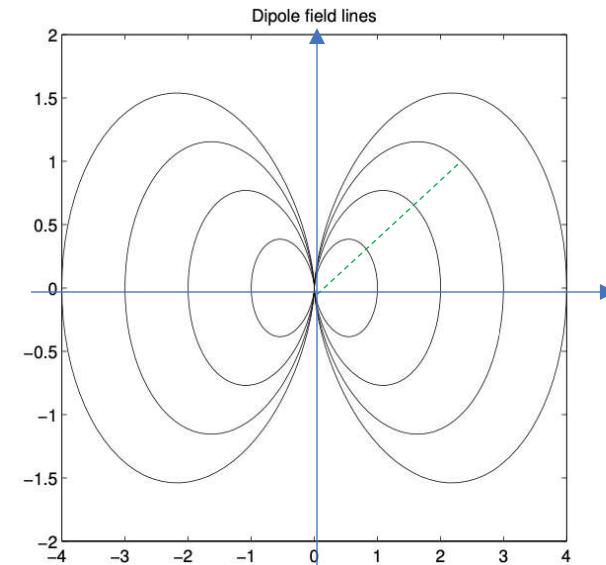
In un campo di dipolo si ha $B_\phi = 0$ e quindi si ha $B_r^{-1} dr = B_\theta^{-1} rd\theta$ da cui:

$$\frac{dr}{2 \cos \theta} = \frac{r d\theta}{\sin \theta}.$$

Ri-aggiustiamo l'equazione e la integriamo separando le variabili:

$$\frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \quad \Rightarrow \quad \ln r = \ln \sin^2 \theta + C \quad \Rightarrow \quad r = r_0 \sin^2 \theta.$$

che è l'equazione delle linee di campo di dipolo, rappresentate in figura



Il campo di dipolo: le linee di campo

Abbiamo ottenuto l'equazione per le **linee di campo** magnetico di dipolo: $r = r_0 \sin^2 \theta$.

Qui r_0 è la distanza tra il centro e la linea nella posizione delle equatore ($\theta = 90^\circ$).

L'angolo θ è l'**angolo polare** (o colatitudine), rispetto all'asse di dipolo, per come abbiamo definito le coordinate sferiche. Può essere comodo fare riferimento all'angolo di **latitudine**:

$$\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$$

Questo angolo è definito analogamente alla latitudine terrestre, vale zero alle equatore e $\pm 90^\circ$ ai poli.

L'equazione delle linee di campo diventa:

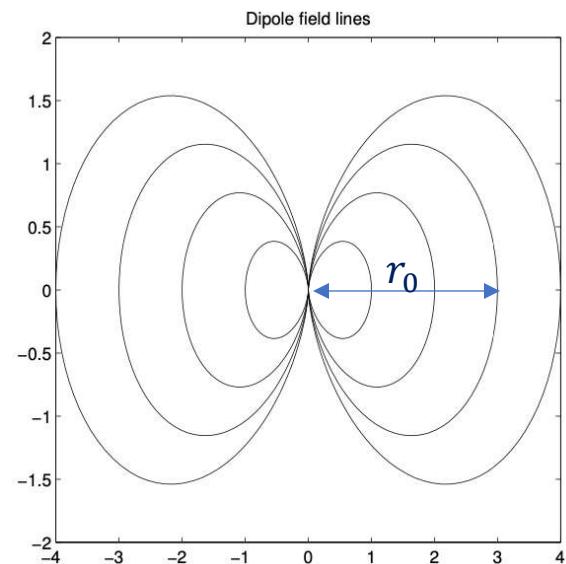
$$r = r_0 \cos^2 \lambda$$

Spesso la distanza viene espressa in unità di raggi terrestri ($r_E = 6378 \text{ km}$).

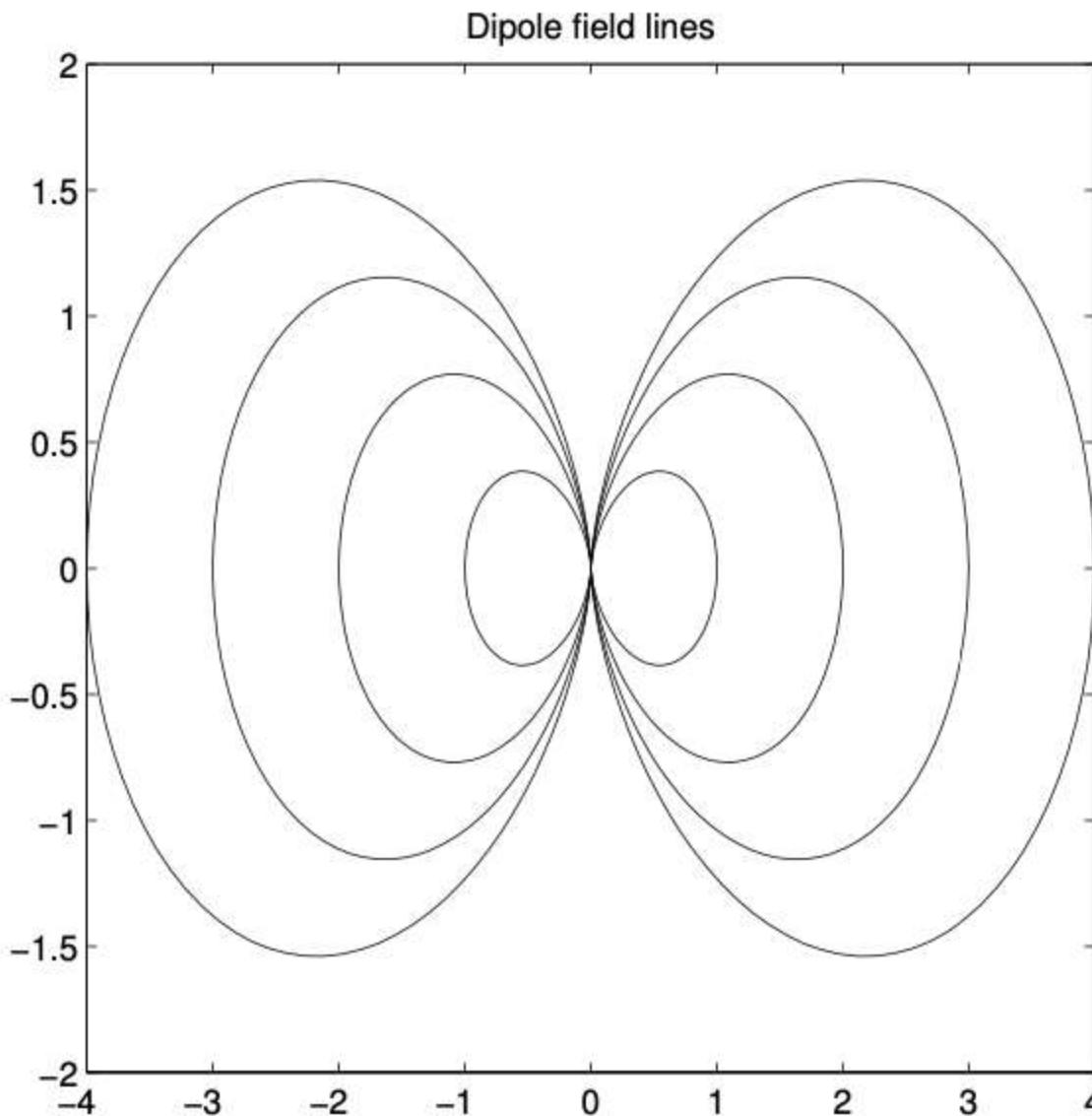
Ad esempio, l'orbita geostazionaria si trova al raggio $r = 6.6 r_E$.

Viene spesso usato il parametro $L = r_0/r_E$ e si scrive $r = L \cos^2 \lambda$.

L è la distanza in unità di r_E di una linea di campo dal centro del dipolo quando essa passa alle equatore. Cioè è la sua distanza **massima** dal centro.



Il campo di dipolo: le linee di campo



Linee di campo e L-shell

Esprimendo r ed r_0 in unità di r_E , l'equazione della **linea di campo** magnetico di dipolo è:

$$r = L \cos^2 \lambda$$

Il luogo geometrico di tutti i punti r aventi L fissato genera una superficie detta **L-shell**. Questa ha la massima distanza dal centro alle equatore e penetra nella superficie della Terra ad alte latitudini.

NB stiamo parlando di latitudine λ riferita al dipolo magnetico, non della coordinata geografica terrestre. Infatti, anche approssimando il campo B terrestre con un dipolo, si trova che il suo asse di simmetria (asse di dipolo) è inclinato rispetto all'asse di rotazione della Terra. Anche il centro del dipolo non coincide con il centro della terra, come vedremo.

Ci aspettiamo che ogni linea di campo di una L-shell arrivi a penetrare la terra alla stessa latitudine λ . e che tutte le linee della L-shell raggiungano la stessa distanza massima da Terra alle equatore.

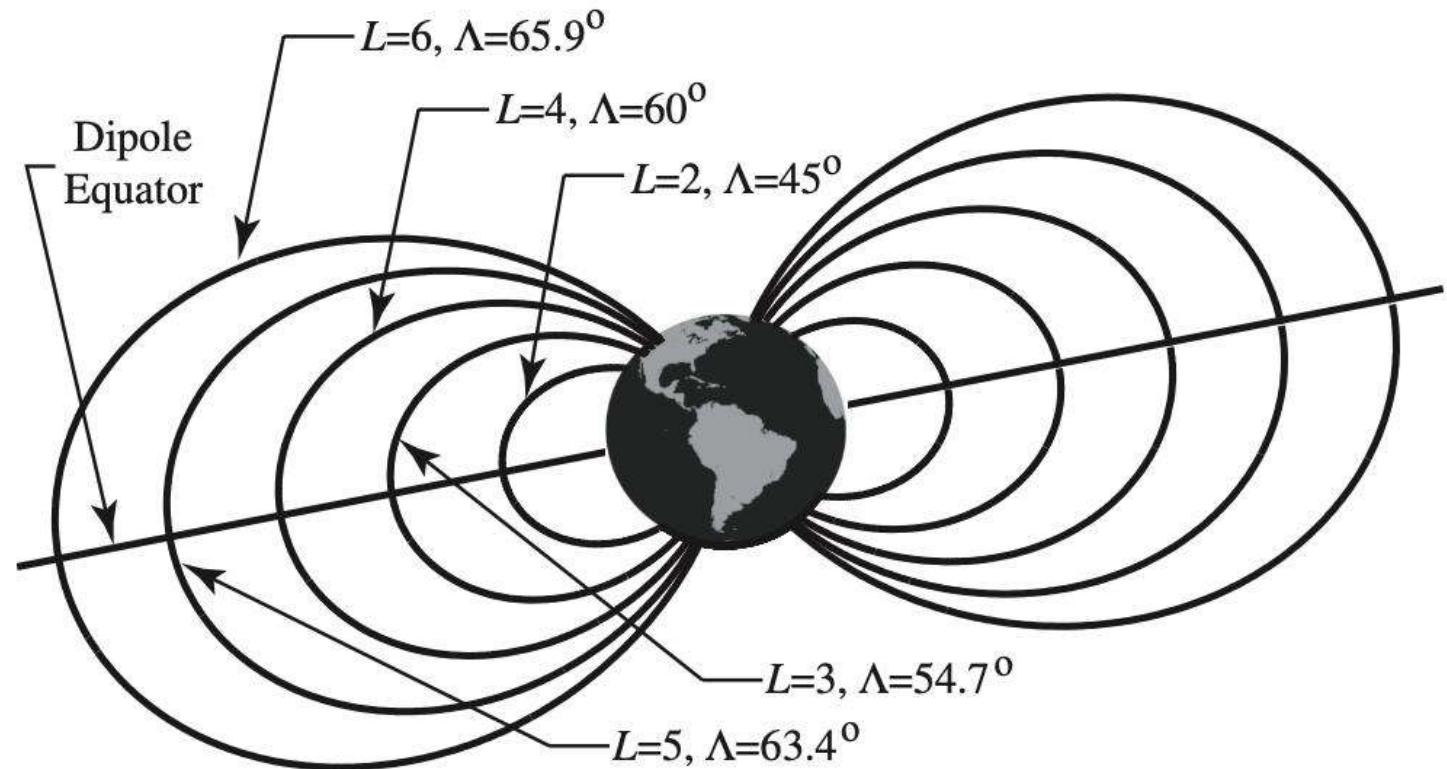
In una data L-shell, la latitudine a cui ogni linea di campo arriva a penetrare la Terra è detta **latitudine invariante Λ** e si ottiene invertendo l'equazione nel caso di raggio r unitario ($r = r_E$)

$$1 = r = L \cos^2 \lambda \quad \rightarrow \quad 1/L = \cos^2 \lambda \quad \rightarrow \quad \Lambda \equiv \cos^{-1}(\sqrt{1/L})$$

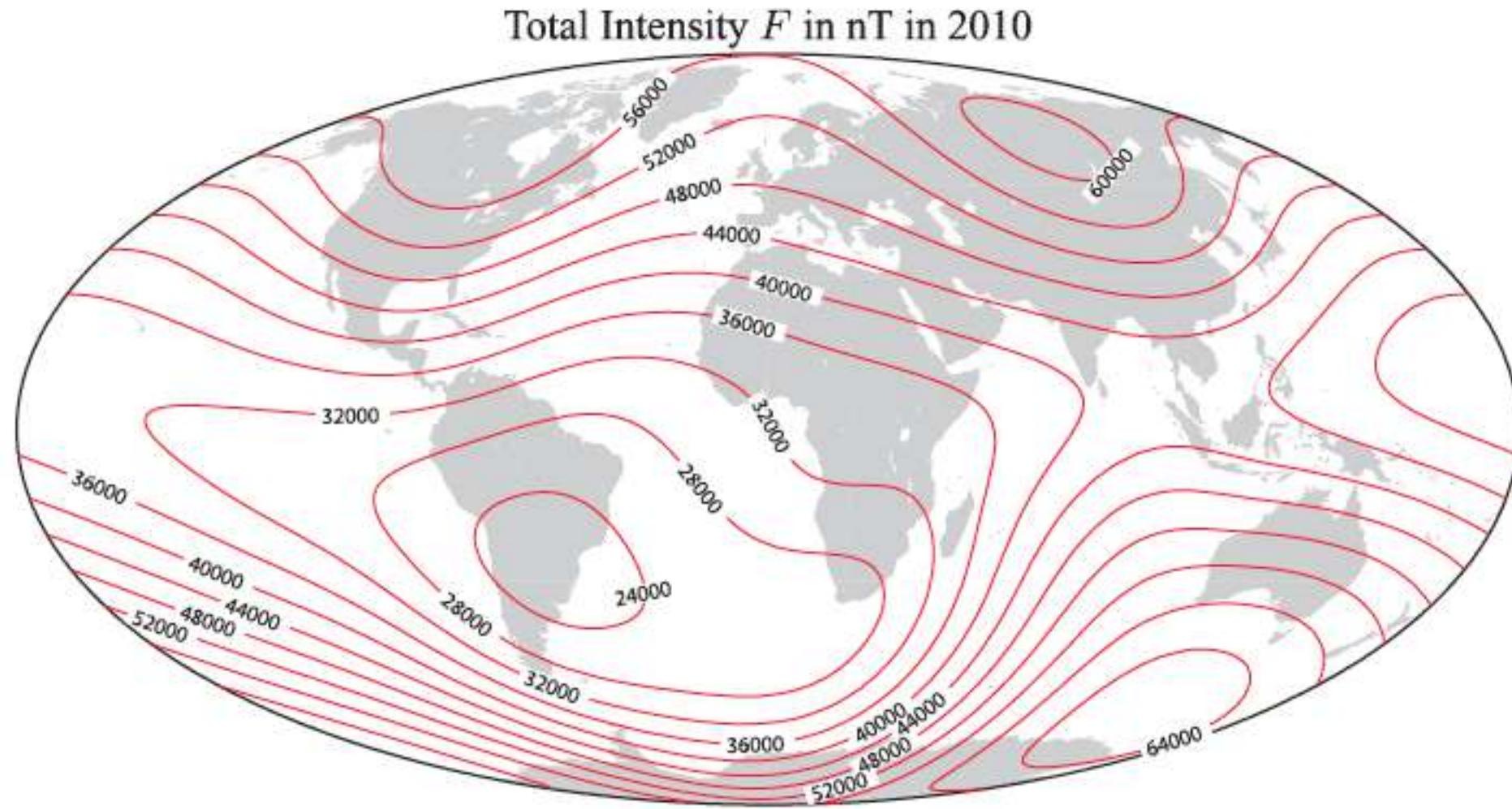
Linee di campo e L-shell

Latitudine invariante Λ : è il valore della latitudine λ per cui, per una data L-shell, le linee di campo sono a distanza $r = 1$ (in unità di r_E) dal centro del dipolo. Essa è legata al valore della distanza massima L raggiunta dalla linea di campo:

$$\Lambda = \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{1}{L}} \right)$$



Il campo geomagnetico quello vero



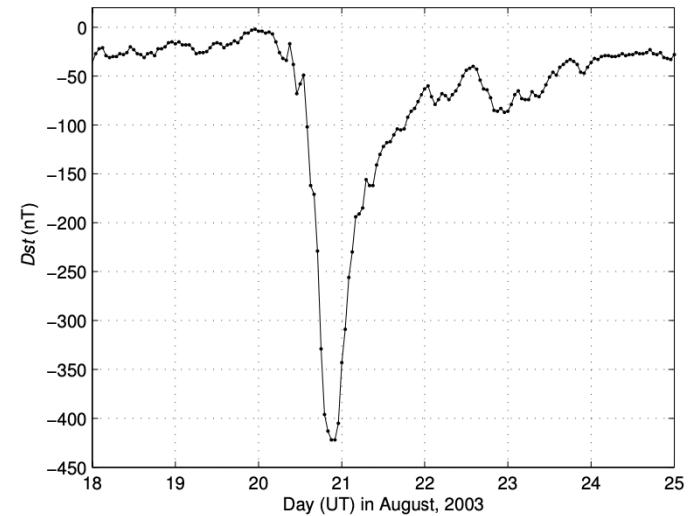
Tempeste geomagnetiche e l'indice Dst

Vediamo un'applicazione di quanto visto in **meteorologia spaziale**. La figura mostra la variazione nel tempo dell'indice Dst durante il mese di Agosto 2003.

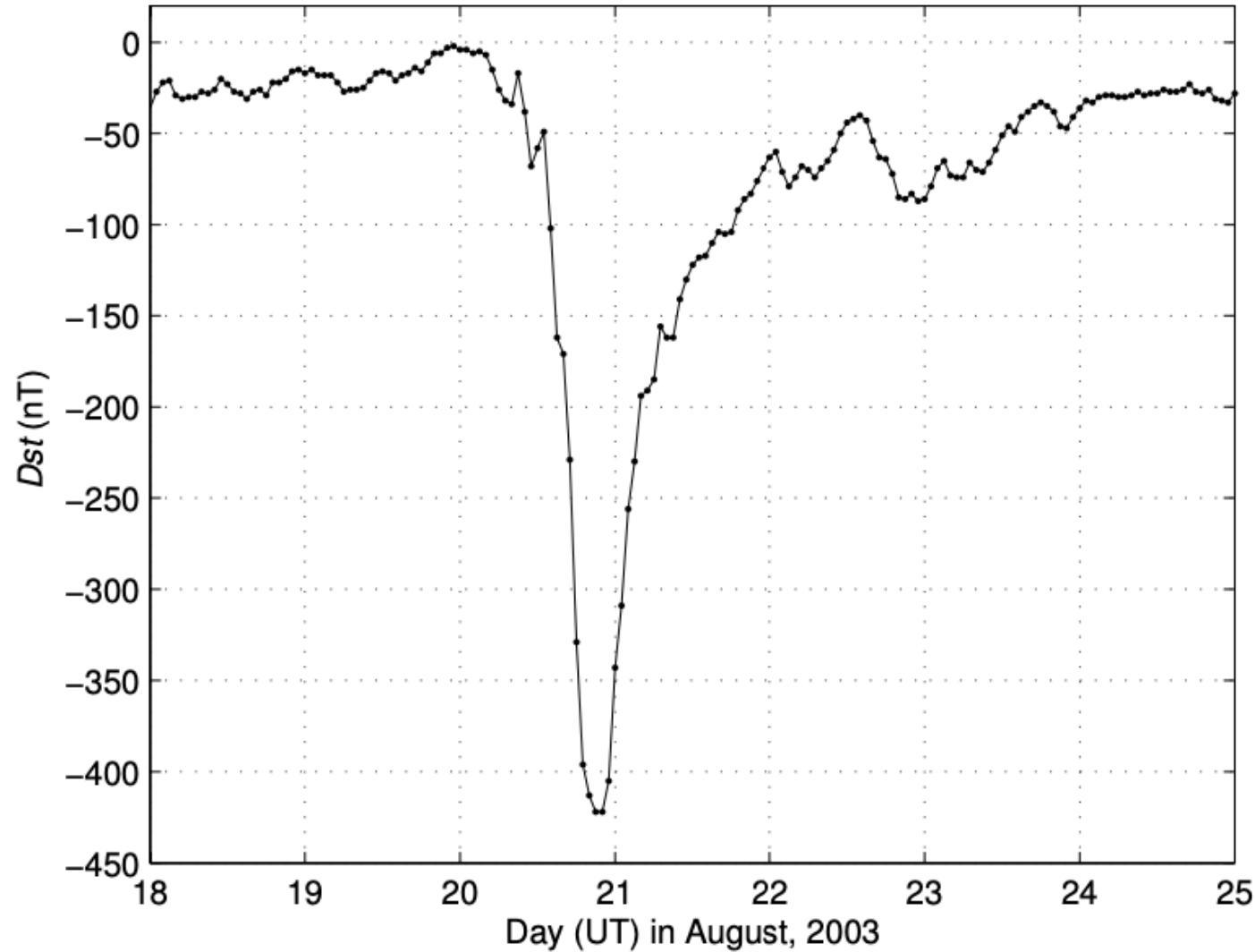
Dst sta per «**disturbance storm time**» e misura una componente del campo geomagnetico B ad una certa latitudine su base oraria. In condizioni normali o di quiete, questo indice è circa costante. Il 21 agosto questo indice è andato a picco. Poi è tornato a salire.

Una variazione rapida del Dst suggerisce l'occorrenza di fenomeni di disturbanza geomagnetica. Un valore DST negativo (come ad es. il 21 agosto) significa che il campo magnetico della Terra si è indebolito. Questo si verifica ad esempio durante le tempeste magnetiche causate dall'attività solare.

Pensiamo alla ring current dovuta a drift $\nabla B + R_c$ con ioni (elettroni) che driftano verso ovest (est). Nelle equatore, il campo B terrestre punta a nord, e il campo generato dalla ring current punta a sud. Se la ring current cresce, essa genera un campo indotto tale da indebolire il campo B terrestre.



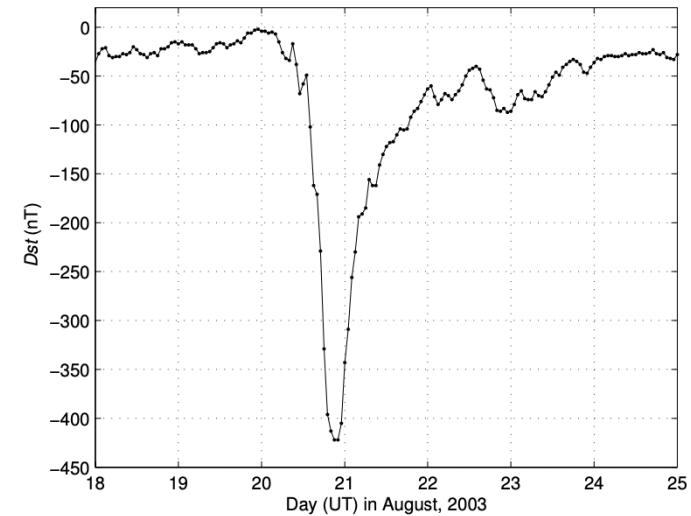
Tempeste geomagnetiche e l'indice Dst



Tempeste geomagnetiche e l'indice Dst

Quindi il 20-21 Agosto 2003 probabilmente c'è stata una **tempesta solare** che ha intensificato i flussi di particelle intrappolate, e con essi e la ring current associata, fino ad avere un campo B negativo.

Poi la tempesta è cessata, e siccome il trapping non è perfetto c'è stata una perdita graduale di particelle che ha progressivamente indebolito la ring current fino a farla tornare ai livelli di quiete.



Il meccanismo di trapping magnetico infatti non è perfetto, e le particelle delle correnti di ring piano piano vengono perse. Questo è uno dei motivi per cui, nei moderni progetti sulla fusione nucleare, i sistemi di intrappolamento basati sul mirroring o bottiglia magnetica sono stati abbandonati in favore di altre configurazioni (ad es. in sistemi Tokamak o stellarator).

Nella prossima sezione parliamo di **particelle intrappolate** introducendo gli **invarianti adiabatici** e investighiamo meglio anche i problemi e le perdite associate al trapping magnetico.