



Università degli Studi di Perugia

Dipartimento di Fisica e Geologia

Progetto di Metodi Computazionali per la Fisica

**Simulazione dei moti di deriva delle
particelle**

David Nuccioni

Indice

Introduzione	1
1 Moti di deriva: fenomenologia e caratteristiche	2
1.1 Moto ciclotronico	2
1.2 Drift con campi E e B perpendicolari	5
1.3 Drift con campo magnetico variabile	8
1.4 Scattering sulle irregolarità del campo magnetico	10
2 Simulazione dei moti di deriva	12
2.1 Simulazione del drift campo elettrico e magnetico	12
2.2 Simulazione del drift gradiente del campo magnetico	19
2.3 Simulazione turbolenze magnetiche	22
3 Analisi dati	26
3.1 Ricavare la velocità di deriva media	27
3.2 Effetto delle turbolenze magnetiche	31
3.3 Ricavare il fit delle velocità con i campi	33
Conclusioni	38

Introduzione

Lo studio dei moti delle particelle immerse in campi elettrici e magnetici è fondamentale per capire, tra le varie cose, come queste si comportano nella magnetosfera terrestre. La comprensione dei fenomeni che si instaurano nel campo magnetico terrestre permette di conoscere sia fenomeni come le aurore polari, sia anche migliorare le tecnologie aerospaziali necessarie per avere strumentazioni in orbita efficienti. Le particelle cariche provenienti dal Sole o dalla galassia, interagiscono con il campo magnetico prodotto dalla Terra. Questo è in grado di intrappolarle lungo le sue linee di campo. A seconda delle configurazioni dei campi elettrici e magnetici e delle velocità delle particelle, si possono instaurare dei moti di deriva che possono in alcuni casi portare alla formazione di correnti di particelle, come la corrente di Hall. Questa è dovuta dal $drift \vec{E} \times \vec{B}$ e nel caso di eruzioni solari è responsabile della formazione delle aurore polari. Un altro caso interessante è il $drift \nabla B$, che genera delle correnti lungo la coda della magnetosfera terrestre durante le eruzioni solari oppure può intrappolare le particelle nel campo magnetico, proteggendo così la superficie della Terra.

In questo progetto verranno prima studiati i moti di deriva delle particelle nei campi magnetici e elettrici, nello specifico il $drift \vec{E} \times \vec{B}$ e il $drift \nabla B$. Successivamente verrà presentata la simulazione che si occupa di riprodurre il comportamento delle particelle in determinate configurazioni dei campi elettrici e magnetici in modo da poter visualizzare i moti di deriva delle particelle. Infine verrà eseguita un analisi dei dati sulle particelle simulate cercando di soddisfare i risultati teorici ricavati.

Capitolo 1

Moti di deriva: fenomenologia e caratteristiche

Si considerano le traiettorie di singole particelle cariche, in moto attraverso regioni di spazio in cui sono presenti campi magnetici o elettrici. Ci si avvicina così alla descrizione di fenomeni che avvengono in ambienti astrofisici quali, ad esempio, la magnetosfera terrestre.

Lo studio del moto di singole particelle soggetti a campi esterni non cattura bene la dinamica di un plasma. Infatti un plasma è caratterizzato da comportamenti collettivi, cioè da proprietà che emergono considerando le interazioni tra particelle e l'effetto di queste sui campi. Tuttavia, questa trattazione sarà sufficiente per comprendere i moti di deriva che si instaurano nei campi elettrici e magnetici.

1.1 Moto ciclotronico

Supponendo di avere una particella con carica q e massa m , immersa in un campo magnetico costante $\vec{B} = B\hat{z}$, si può scrivere la forza che agisce come:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1.1)$$

Le componenti della forza possono essere scritte come:

$$\begin{cases} F_x = qv_y B \\ F_y = -qv_x B \\ F_z = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Considerando la legge di Newton $F = m\dot{v}$ si possono scrivere le componenti dell'accelerazione:

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \left(\frac{qB}{m}\right) v_y \\ \dot{v}_y = -\left(\frac{qB}{m}\right) v_x \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Si nota che non è presente accelerazione lungo z, il moto è dunque nel piano (x, y) . Si nota poi che le componenti x e y sono accoppiate, si può derivare ulteriormente ricavando così le equazioni delle componenti dell'oscillatore armonico:

$$\begin{cases} \ddot{v}_x = -\omega_c^2 v_y \\ \ddot{v}_y = -\omega_c^2 v_x \end{cases} \quad (1.4)$$

Dove ω_c rappresenta la frequenza di ciclotrone definita come:

$$\omega_c^2 = \left(\frac{|q|B}{m}\right)^2 \quad (1.5)$$

Considerando poi la velocità totale della particella nel piano: $v_\perp^2 = v_x^2 + v_y^2$ e integrando le equazioni 1.4 si ricavano le equazioni per la velocità:

$$\begin{cases} v_x = v_\perp \cos(\omega_c t) \\ v_y = \mp v_\perp \sin(\omega_c t) \end{cases} \quad (1.6)$$

Le equazioni sono state riscritte in modo da avere v_x massima a $t = 0$. Integrando ulteriormente si ricavano le equazioni del moto:

$$\begin{cases} x = r_L \sin(\omega_c t) \\ y = \pm r_L \cos(\omega_c t) \end{cases} \quad (1.7)$$

Dove è stato introdotto il raggio di Larmor della particella definito come:

$$r_L = \frac{v_\perp}{\omega_c} = \frac{mv_\perp}{|q|B} \quad (1.8)$$

Spesso ci si riferisce in fisica spaziale al raggio di Larmor e alla frequenza di ciclotrone come raggio di girazione r_g e frequenza di girazione ω_g .

Le equazioni del moto appena ricavate descrivono un moto circolare uniforme di raggio r_L che avviene nel piano (x, y) intorno all'origine con un periodo $T_c = 2\pi/\omega_c$.

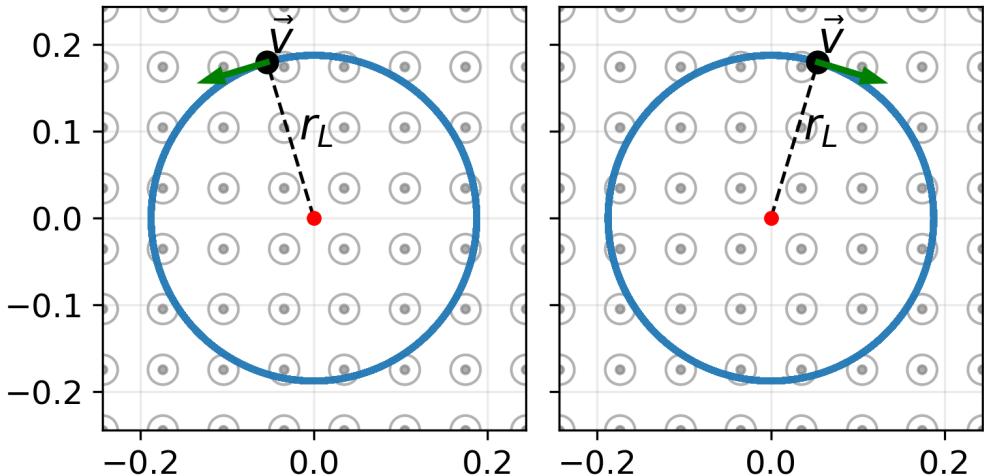


Figura 1.1: La figura rappresenta il moto del ciclotrone per due particelle cariche positivamente (sinistra) e negativamente (destra) con campo magnetico entrante

Il moto della particella dipende dalla massa e la velocità della particella e dal campo magnetico. La carica della particella sarà responsabile del senso di girazione: orario se la particella è carica positivamente e antiorario se carica negativamente. Il caso appena studiato considerava la particella con una velocità iniziale nulla rispetto alla componente z. Se tuttavia si considera una velocità iniziale non nulla per una particella che parte sempre all'origine, le equazioni del moto diventano:

$$\begin{cases} x = r_L \sin(\omega_c t) \\ y = \pm r_L \cos(\omega_c t) \\ z = v_{0z} t \end{cases} \quad (1.9)$$

Si instaura dunque un moto in tre dimensione che è la combinazione di quello ciclotronico nel piano (x, y) e quello rettilineo nel piano z. Questo è detto moto elicoidale e a differenza di quello di prima, dipende anche dalla velocità iniziale della particella sull'asse z. Si nota che il campo magnetico non compie lavoro sulla componente z, dunque la velocità v_{0z} resta invariata.

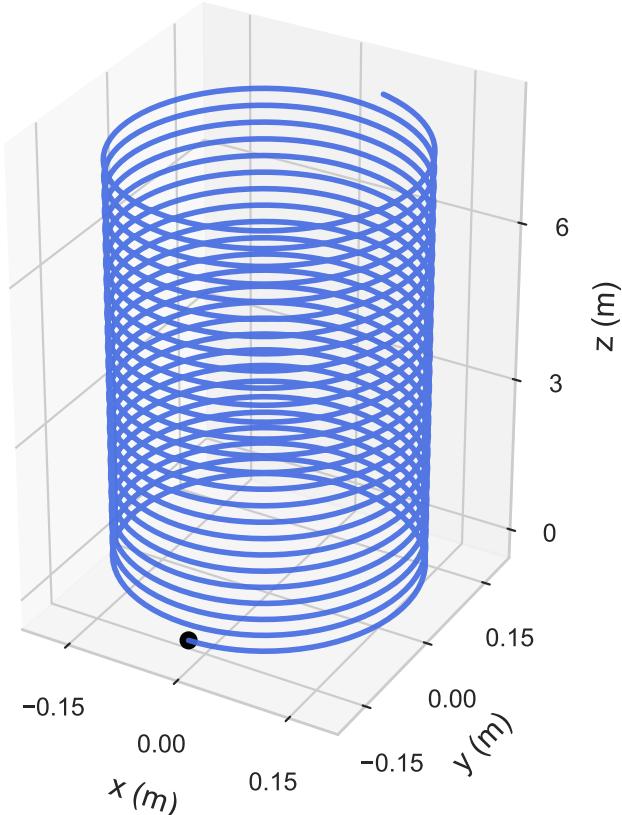


Figura 1.2: Moto elicoidale per una particella carica in campo magnetico

Anche il raggio di Larmor delle particelle rimane invariato. Ci sono dei casi tuttavia che possono far variare la quantità r_L , questo porta alla formazione dei moti di deriva delle particelle. I casi per cui questo avviene sono quando la velocità della particella cambia: *drift* $\vec{E} \times \vec{B}$, oppure quando il campo magnetico cambia: *drift* ∇B .

1.2 Drift con campi E e B perpendicolari

Si considera ora la particella di massa m e carica q posta in un campo magnetico costante e uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$ e in un campo elettrico $\vec{E} = (E_x, 0, E_z)$, sulla particella agirà dunque una forza data da:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.10)$$

Ciò comporterà a una modifica delle equazioni del moto della particella. Si possono ricavare come fatto per il moto ciclotronico, le relazioni per le accelerazioni:

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \left(\frac{qB}{m}\right) v_y + \frac{qE_x}{m} \\ \dot{v}_y = -\left(\frac{qB}{m}\right) v_x \\ \dot{v}_z = \frac{qE_z}{m} \end{cases} \quad (1.11)$$

Si nota che le componenti x e z hanno un termine costante aggiuntivo dovuto dal campo elettrico. Le componenti x e y possono essere ulteriormente derivate ed essendo equazioni accoppiate possono poi essere riscritte, ottenendo:

$$\begin{cases} \dot{v}_x = v_{\perp} \exp(i\omega_c t) \\ \dot{v}_y = \pm i v_{\perp} \exp(i\omega_c t) - \frac{E_x}{B} \\ \dot{v}_z = \frac{qE_z}{m} \end{cases} \quad (1.12)$$

Osservando dunque la componente y della velocità si nota l'effetto del *drift* dovuto dalla presenza del campo elettrico, che sposta la particelle nella direzione negativa delle y. La particella conserva ancora la parte di girazione nel piano (x, y) e ha inoltre un termine elicoidale nella terza componente z. Se si osservasse il moto nel piano (x, y) si avrebbe una traiettoria come nella figura seguente.

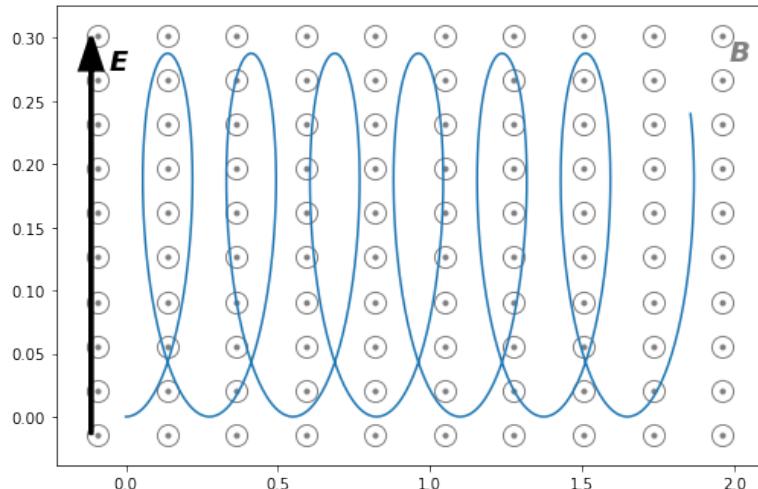


Figura 1.3: Traiettoria della particella in campo magnetico B perpendicolare a un campo elettrico E , si nota che il campo genera la deriva della particella nella direzione negativa delle y per effetto del $\vec{E} \times \vec{B}$

Supponendo di mediare il moto su un periodo quello che resta è un moto medio di un punto, detto centro di guida, che riflette il drift. Si può pensare di riscrivere

la velocità della particella in due componenti rispetto al campo B :

$$v = v_{\parallel} + v_{\perp} \quad (1.13)$$

La parte perpendicolare è formata dal contributo della componente di drift e di girazione:

$$v_{\perp} = v_D + v_g \quad (1.14)$$

La velocità del centro di guida può dunque essere scritta come:

$$v_{gc} = v_{\parallel} + v_D \quad (1.15)$$

Per cui la velocità della particella:

$$v = v_{gc} + v_g \quad (1.16)$$

Cioè si ha un moto di girazione veloce intorno a un centro di guida che avanza più lentamente. Questo rappresenta il moto medio di una particella che spiraleggia lungo le linee di campo magnetico ed è soggetta a *drift*.

Si vuole ricavare ora una relazione per la velocità del *drift*. Questa è descritta dalla componente verticale del centro di guida, per cui vale che $v_{gc\perp} = v_E$ ed è costante. Si ha dunque che:

$$m \frac{dv_E}{dt} = 0 = q(E + v_E \times B) \quad (1.17)$$

Da cui:

$$(E + v_E \times B) = 0 \quad (1.18)$$

Si moltiplica l'identità vettorialmente per il campo magnetico:

$$E \times B - v_E \times B \times B = 0 \quad (1.19)$$

Si utilizza la proprietà del doppio prodotto vettoriale:

$$E \times B = B^2 v_E - (v_E \cdot B) B \quad (1.20)$$

Essendo $v_E \perp B$ si ha dunque:

$$v_E = \frac{E \times B}{B^2} \quad (1.21)$$

Che rappresenta la velocità del *drift* $\vec{E} \times \vec{B}$. Si nota come la velocità del drift non dipende dalla massa o dalla carica della particella ma solo da come sono diretti i campi. Le particelle dunque anche se girano intorno alle linee di campo con un senso orario o antiorario definito dalla carica vengono spostate dal campo elettrico nella stessa direzione. Questo comporta che non viene prodotta una carica netta e non si forma dunque una corrente durante la deriva delle particelle.

1.3 Drift con campo magnetico variabile

Un altro caso che può produrre una variazione del raggio di Larmor e dunque un moto di deriva delle particelle è quando il campo magnetico varia nello spazio. Si approfondisce ora il caso in cui il campo magnetico vari nella direzione perpendicolare ovvero si abbia un gradiente definito come $\nabla B \perp B$, si suppone che non ci sia, per semplicità, nessun campo elettrico E . In questo sistema, le particelle spiraleggiano attorno alle linea di campo B in direzione $\perp B$ e il campo cambia. Il moto viene quindi distorto e non è più elicoidale. Nel caso in esame si suppone sia $\vec{B} = B\hat{z}$ e invece sia $\nabla B \parallel \hat{y}$. Mano a mano che la particella spiraleggia dunque sulle linee di campo magnetico il raggio di Larmor aumenta nelle zone dove il campo ha intensità minore. Il risultato è un moto di deriva nella direzione $B \times \nabla B$. Una rappresentazione del moto è rappresentata dalla seguente figura:

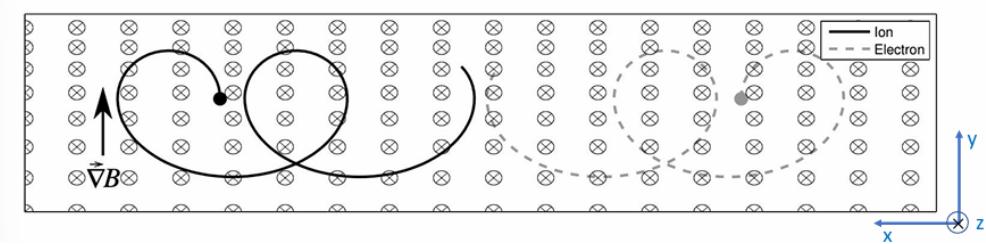


Figura 1.4: Particella posta in campo magnetico che varia in intensità nella direzione dell'asse y , la variazione del campo comporta una variazione del raggio di Larmor che genera un moto di *drift*

Concentrandosi nel piano (x, y) si riscrivono le equazioni del moto per una particella in un campo magnetico costante e uniforme diretto lungo l'asse z :

$$\begin{cases} F_x = qv_y B \\ F_y = -qv_x B \end{cases} \quad (1.22)$$

Si può considerare di mediare sul raggio di Larmor ottenendo dei valori medi per le componenti della forza. Nella direzione y ci si aspetta che la $v_y = 0$ e dunque $\bar{F}_x = 0$ mentre per la direzione x si ha in generale che $v_x \neq 0$ e dunque che la componente y della forza sia non nulla. Si vuole ricavare dunque un'espressione per \bar{F}_y considerando che B vari poco ad ogni giro: $r_L \ll L = B/\nabla B$, e che il moto sia quasi circolare: $v_x \approx v_{perp} \cos(\omega_c t)$. Considerando un'espressione per il campo magnetico che vari lentamente lungo la direzione y si può scrivere:

$$B \simeq B_0 + \left| \frac{\partial B}{\partial y} \right| (y - y_0) \quad (1.23)$$

Nell'approssimazione di moto circolare il termine $(y - y_0) = \pm r_L \cos(\omega_c t)$ inserendo il campo B e la v_x riscritte, si ottiene:

$$F_y = -qv_{perp}B_0 \cos(\omega_c t) \mp qv_\perp r_L \frac{\partial B}{\partial y} \cos^2(\omega_c t) \quad (1.24)$$

Facendo la media su un giro il termine lineare del coseno si annulla e quello quadratico restituisce un termine $1/2$, si ha quindi:

$$F_y = \mp \frac{1}{2}qv_\perp r_L \frac{\partial B}{\partial y} \quad (1.25)$$

Attraverso la formula generale per la velocità di *drift*:

$$v_D = \frac{F \times B}{qB^2} \quad (1.26)$$

Si può ricavare quella associata al gradiente del campo magnetico:

$$v_D = \mp \frac{1}{2} \frac{v_\perp r_L}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right) \hat{x} \quad (1.27)$$

Se si volesse il caso più generale per il gradiente del campo si può scrivere:

$$v_{\nabla B} = \pm \frac{1}{2} v_\perp r_L \frac{B \times \nabla B}{B^2} \quad (1.28)$$

Si osserva il doppio segno nella formula della velocità di *drift*, questo sta ad indicare che la carica della particella influenza la direzione nella quale agisce il moto di deriva. Particelle cariche positivamente dunque andranno in direzioni opposte rispetto a quelle cariche negativamente. Il risultato è la formazione di una corrente netta di particelle cariche.

Interessante è il caso in cui il campo magnetico varia drasticamente, dove passa da una zona con una certa intensità ad una con la stessa intensità ma polarità opposta. In questa configurazione si ha la creazione di *current sheet* che sono popolate da correnti di particelle cariche più intense rispetto a quelle del caso precedente. Un esempio può essere la coda della magnetosfera terrestre.

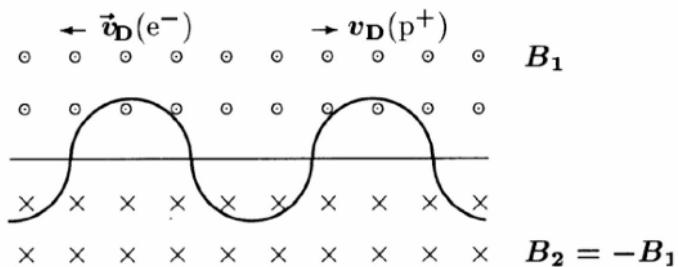


Figura 1.5: Caso in cui il campo magnetico ha due polarità opposte e genera una deriva più forte per le particelle

1.4 Scattering sulle irregolarità del campo magnetico

I casi che sono stati trattati rappresentano delle situazioni poco realistiche in quanto fisicamente campi magnetici così regolari non sono presenti in natura. Realisticamente si hanno campi magnetici che presentano a varie scale uno spettro di turbolenze. Le turbolenze rendono le linee del campo caotiche e le particelle possono risentire di questa modifica. In generale se si considerano linee di campo magnetico che sono dello stesso ordine di grandezza del raggio di Larmor delle particelle le particelle che vi si propagano vengono deviate rispetto alla traiettoria che si aspetta da un campo regolare. Diversamente accade se la turbolenza è molto minore del raggio di Larmor, in questo caso la particella non risentirà delle irregolarità del campo. Un pò come una grande nave che solca un mare calmo, nonostante il mare abbia delle piccole increspature dovute al movimento dell'acqua, per la dimensione della nave il mare risulta piatto. Tuttavia, nel caso si abbia interazione della particella con la turbolenza, l'effetto che si osserva è quello di uno scattering elastico. Si ha dunque che le turbolenze possono essere considerate come centri di scattering posti a determinate distanze, le particelle potranno interagire o meno con questi e l'effetto che si osserva è una diffusione randomica delle particelle.

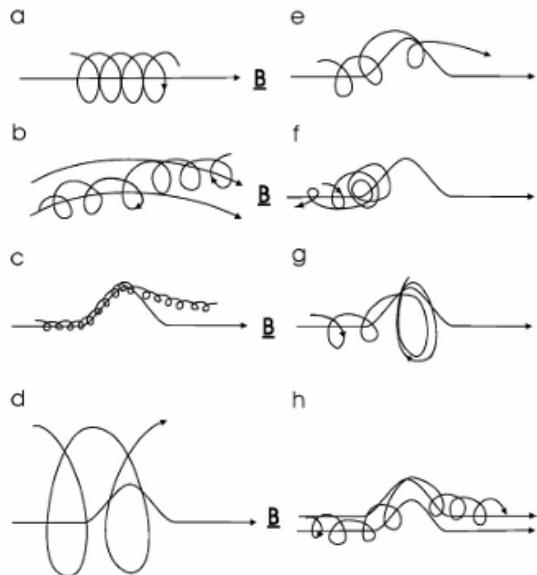


Figura 1.6: Vari esempi di interazione di una particella con vari raggi di Larmor con diversi tipi di turbolenze magnetiche

Se si volesse descrivere un caso più realistico del moto delle particelle in campi elettrici e magnetici, per studiarne i moti di deriva, si dovrebbe tenere conto delle irregolarità che comportandosi come centri di scattering, randomizzano la direzione della particella. Come accennato le turbolenze possono presentarsi con un determinato spettro. Questo è definito in base al meccanismo che, a cascata, le ha generate. Le turbolenze interstellari, per esempio, sono formate generalmente dalle esplosioni di supernova. Le scale tipiche delle turbolenze sono dell'ordine dei $10 - 100 pc$ tipicamente e seguono lo spettro di Kolmogorov: $\approx k^{-5/3}$ dove k è il numero d'onda e $k_0 = L^{-1}$. Lo spettro di Kolmogorov può essere descritto come:

$$W(k)dk = \frac{\langle \delta B \rangle^2}{B_0} = \frac{2 \eta_B}{3 k_0} \left(\frac{k}{k_0} \right)^{-5/3} \quad (1.29)$$

Con:

$$\eta_B = \int_{k_0}^{\infty} W(k)dk \simeq 0.1 - 0.001 \quad (1.30)$$

Che rappresenta il livello totale di turbolenza. Questo coefficiente esprime quanto una turbolenza è caotica e dunque la sua efficienza nel deviare le particelle. Considerando, per esempio una magnetosfera quieta si avrebbe un coefficiente vicino allo zero. Mentre nel caso di turbolenza forte il coefficiente si avvicinerebbe a 1. Il coefficiente può avere anche valori maggiori di 1 nel caso di eventi estremamente caotici, come la riconnessione magnetica.

Per studiare un caso quanto più possibile vicino al caso reale, sarebbe dunque necessario considerare l'effetto dei centri di scattering delle turbolenze magnetiche che renderebbero i moti di deriva delle particelle più caotici. Generando una diffusione maggiore delle particelle, dovuta alla randomizzazione della direzione della particella.

Capitolo 2

Simulazione dei moti di deriva

La simulazione ha lo scopo di riprodurre le traiettorie delle particelle che subiscono moti di deriva. I moti di deriva vengono prodotti dalla presenza del campo elettrico, *drift* $\vec{E} \times \vec{B}$, e dalla variazione del campo magnetico, *drift* ∇B . Inoltre è stata implementata la possibilità di simulare anche le interazioni con le turbolenze del campo magnetico. Questo viene fatto tramite un termine n_t che descrive la probabilità di scatterare casualmente la direzione della particella ad ogni passo della particella, simulando così l'effetto della turbolenza. Quest'opzione può essere attivata o meno tramite apposito comando quando si esegue il codice.

La simulazione permette di scegliere il numero di passi che le particelle compiono durante il moto. Permette, inoltre, di configurare dei valori per le intensità dei campi elettrici e magnetici in entrambi i casi di *drift*. Il programma è in grado di salvare le traiettorie delle particelle e mostrarle in un apposito grafico, questo permette di visualizzare per le varie particelle i moti di deriva e l'interazione con le turbolenze.

Infine, si potrà eseguire un'analisi dati delle velocità di deriva per le distribuzioni di particelle simulate con velocità iniziali e segni di carica casuali, queste verranno confrontate poi con i risultati teorici ricavati nel capitolo 1. Per maggiori dettagli sull'analisi dati si faccia riferimento al capitolo 3

2.1 Simulazione del drift campo elettrico e magnetico

Per simulare la traiettoria di una particella posta in un campo elettrico e magnetico si implementa l'algoritmo sviluppato da Boris nel 1970. L'algoritmo risolve la formula di Lorentz descritta dalla 1.10, permettendo di ricavare così una relazione per la velocità della particella passo dopo passo e dunque anche la posizione. Un vantaggio di questo metodo è la velocità computazionale che, con un opportuna

scelta dei parametri, fornisce un risultato ottimale e computazionalmente più economico, rispetto all'uso della libreria *scipy*, per risolvere l'equazione del moto e ricavare la traiettoria.

L'idea si poggia sulla tecnica detta: *leapfrog* o salto della rana. Ovvero, invece che calcolare posizione e velocità agli stessi istanti, si calcola la velocità tra due posizioni: $\dots x_n, x_{n+1} \dots$ e $\dots v_{n-1/2}, v_{n+1/2}$. Quindi si ottiene una derivata centrata tra due posizioni del tipo:

$$v_{n+1/2} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} \quad (2.1)$$

Nel caso in esame si vuole risolvere la relazione per la forza di Lorentz, dunque si vuole ricavare la derivata della velocità non della posizione, si utilizza comunque lo stesso metodo. Riscrivendo il metodo di Boris per la forza di Lorentz si ha:

$$\frac{v_{n+1/2} - v_{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{q}{m} \left(E + \frac{v_{n+1/2} + v_{n-1/2}}{2} \times B \right) \quad (2.2)$$

Definendo a questo punto:

$$v_{n-1/2} = v^- - \frac{qE}{m} \frac{\Delta t}{2} \quad (2.3)$$

E anche

$$v_{n+1/2} = v^+ + \frac{qE}{m} \frac{\Delta t}{2} \quad (2.4)$$

Si ottiene per la 2.2:

$$\frac{v^+ - v^-}{\Delta t} = \frac{q}{2m} (v^+ + v^-) \times B \quad (2.5)$$

Si considera ora un vettore intermedio v' che può essere descritto come:

$$v' = v^- + v^- \times t \quad (2.6)$$

Il vettore descrive la rotazione dovuta dall'effetto del campo magnetico ed agisce sulla prima metà del vettore velocità che ha già la metà del contributo del campo elettrico, l'angolo di rotazione è descritto dal vettore $t = \frac{qB\Delta t}{2m}$. A questo punto si introduce un altro vettore che descrive la seconda rotazione $s = \frac{2t}{1+t^2}$, questo è definito in modo tale da far mantenere costante la magnitudine della velocità durante la rotazione. Conclusa quindi la rotazione si conclude il procedimento aggiungendo l'altro contributo mancante del campo elettrico descritto da v^+ , questo è dato da:

$$v^+ = v^- + v' \times s \quad (2.7)$$

Si può risolvere attraverso questo metodo l'equazione di Lorentz, ricavando sia la velocità della particella ad ogni step sia la posizione tramite:

$$r[n+1] = r[n] + v[n+1] \cdot \Delta t \quad (2.8)$$

Il modo con cui viene eseguita la rotazione della particella permette di conservare l'energia della particella e di non avere quindi orbite che si allargano man mano che la particella gira sulle linee di campo magnetico. Si nota poi come nella 2.8, il passo della particella aumenta con l'incrementare della velocità, che a sua volta è gestita dai campi elettrici e magnetici.

Nella simulazione l'algoritmo utilizzato per implementare il moto di $drift E \times B$ è esattamente quello appena descritto. Il modulo che si occupa di calcolare il moto di una particella con $drift E \times B$ funziona come segue. Dapprima la funzione riceve in ingresso i valori del campo elettrico e magnetico e la velocità iniziale della particella. Oltre a questi, alla funzione sono passati i valori dell'istante di tempo dt su cui calcolare il moto per ogni passo, questi ultimi sono anch'essi passati alla funzione con N numero dei passi. I vettori t ed s dell'algoritmo di Boris vengono calcolati prima per evitare che vengano calcolati per ogni passo della particella. Vengono poi inizializzati gli array della posizione e della velocità, a questo punto ha inizio il moto della particella. Si nota che nella simulazione compare anche il termine della turbolenza, tuttavia questo verrà discusso meglio nel paragrafo 2.3. Nel ciclo for della funzione viene creato il vettore v^- definito come:

$$v_{minus} = v[n] + qm * E * dt / 2 \quad (2.9)$$

Dove $v[n]$ per il primo passo è la velocità iniziale e qm il rapporto tra la carica e la massa del protone. Dopo di ciò viene implementata la prima mezza rotazione con il calcolo di v'

$$v_{prime} = v_{minus} + np.cross(v_{minus}, t) \quad (2.10)$$

La seconda rotazione è gestita da v^+ , definito come :

$$v_{plus} = v_{minus} + np.cross(v_{prime}, s) \quad (2.11)$$

A questo punto manca solo di aggiungere l'altra parte dell'effetto del campo elettrico. Nel caso non si abbiano turbolenze questo è dato da:

$$v[n+1] = v_{plus} + qm * E * dt / 2 \quad (2.12)$$

Ottenendo in questo modo la velocità del passo successivo. Si può ricavare la nuova posizione della particella tramite la seguente relazione

$$r[n+1] = r[n] + v[n+1] * dt \quad (2.13)$$

Come già accennato, la lunghezza del passo dipende dalla velocità della particella. L'algoritmo viene ripetuto per il numero dei passi scelti, dopo di che viene restituito l'array delle posizioni e della velocità della particella.

Per la simulazione sono state utilizzate particelle con una massa di $m = 1,67 \cdot$

$10^{-27}Kg$ e carica $q = 1,6 \cdot 10^{-19}C$, essenzialmente dei protoni. Per le cariche negative si ha sempre la stessa massa. Il periodo di ciclotrone per una particella di questo tipo è descritta dalla:

$$T_c = \frac{2\pi m}{qB} \quad (2.14)$$

Si vuole campionare il moto della particella in modo che $dt \ll T_c$ sufficientemente. Si vuole però anche che il numero di passi necessario a calcolare il periodo non sia troppo grande, così da poter simulare più particelle possibili. Si impone la condizione:

$$dt \ll \frac{2\pi m}{qB} \quad (2.15)$$

Prima di impostare il dt si considera anche il numero di passi per compiere un orbita dato da:

$$N_o = \frac{2\pi m}{qBdt} \quad (2.16)$$

Si vuole avere un numero che stia intorno a 100 – 500 passi per orbita. In questo modo, quando si andranno a calcolare le traiettorie, si potranno avere abbastanza orbite per ottenere una velocità di deriva apprezzabile, senza avere un processo lento per molte particelle. Se si sceglie un $dt = 1 \cdot 10^{-6}s$ si può configurare un campo $B \sim 10^{-4}$, con questo valore la condizione $dt \ll T_c$ è rispettata. Il campo può variare tra $B = 1 \cdot 10^{-3}$ e $B = 5 \cdot 10^{-4}$. Con questi valori si ha un numero di passi ottimali per la simulazione, circa 200 per ogni orbita. Si nota che cambiando il tempo dt sarà necessario riconfigurare l'intervallo per il campo magnetico in maniera significativa.

Utilizzando il raggio di Larmor

$$r_L = \frac{mv_\perp}{qB} \quad (2.17)$$

Si possono ricavare dei valori per la distribuzione delle velocità, richiedendo che la 2.17 sia dell'ordine del metro. Con i valori finora scelti si avrebbe che $v \approx 10^5 m/s$. Tuttavia si vuole che la componente parallela al campo magnetico sia minore rispetto a quella perpendicolare così da non coprire il drift della particella. Per questo motivo la distribuzione è stata scelta con $v_z \approx 10^4$. Nello specifico le velocità iniziali delle particelle vengono generate randomicamente da una gaussiana centrata in 0,0 e con una larghezza data dall'ordine di grandezza delle velocità scelte precedentemente. In ultimo si devono ricavare dei valori delle componenti del campo elettrico. Si ha che la velocità del drift è circa $v_d = \frac{E}{B}$ e si vuole che $v_d \ll v_\perp \approx 10^5$. Scegliendo dunque un valore del campo elettrico che sia $E \approx 10 - 100 V/m$ si ottiene un risultato soddisfacente per il drift delle particelle, con velocità dell'ordine di $\sim 10^4 m/s$.

Viene mostrata la traiettoria ottenuta dalla simulazione utilizzando dei valori per il campo magnetico di $1 \cdot 10^{-3} T$ e per il campo elettrico $E_x = 20 V/m$ e $E_z = 10 V/m$.

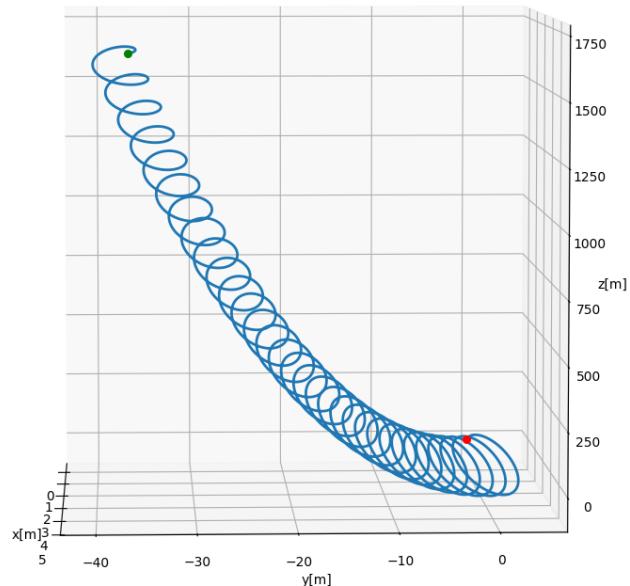


Figura 2.1: Traiettoria in 3D della particella ottenuta attraverso la simulazione,
 $N_{passi} = 1500$

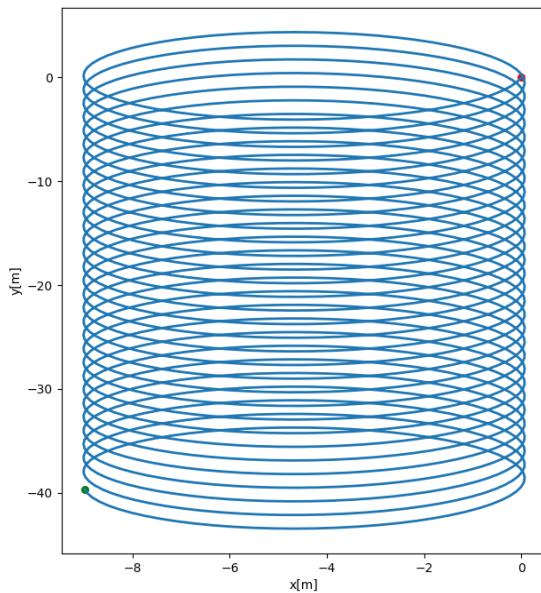


Figura 2.2: Traiettoria sul piano perpendicolare al campo B della particella ottenuta attraverso la simulazione, $N_{passi} = 1500$

Calcolata la traiettoria è necessario ricavare le informazioni della velocità di deriva. A partire dalla 1.13, si era ricavata la relazione per la velocità di deriva. Questa era legata alla velocità del centro di guida e alla componente parallela al campo magnetico. A partire dunque dalla traiettoria ricavata con la precedente funzione, si implementa un modulo in grado di calcolare la traiettoria del centro di guida. L'idea di base è quella di considerare il valore medio delle orbite della particella. In questo modo si ottengono i punti che il centro di guida attraversa e da cui è possibile ricavare poi la traiettoria. Il numero dei passi andrebbe definito considerando il numero di orbite totali che si vogliono ottenere, infatti un numero di orbite troppo basso non permette di ricavare un risultato soddisfacente per la velocità di deriva. Conoscendo dunque il numero di orbite che si vuole simulare e consequenzialmente il numero di passi totali si può calcolare il centro di guida. Si deve considerare tuttavia che un numero troppo grande di passi comporta a un costo computazionale maggiore. Inoltre, facendo variare molto il valore rispetto a quello stimato, si rischia di ottenere un drift sbagliato. Infatti non varrebbero più le formule sopra ricavate e la simulazione darebbe dei risultati poco credibili. In particolare per limiti inferiori del campo magnetico servono troppi passi per calcolare la traiettorie, per valori superiori al limite invece non viene rispettata la condizione $dt \ll T_c$ e si hanno delle orbite campionate male. Considerando un numero di passi intorno alla 10^3 , si può scegliere un valore del campo magnetico che sta intorno a $1 \cdot 10^{-3} - 1 \cdot 10^{-4} T$. Le componenti del campo elettrico erano

già state trattate, in generale mantenere dei valori sulle decine o centinaia di V/m permette di ricavare dei drift veloci e ben visibili nei grafici. La componente x permette di aumentare l'effetto del drift verso l'asse y , mentre la componente z aumenta l'altezza sull'asse z che la particella può raggiungere. Vengono mostrate le traiettorie ricavate con questi valori e di cui è viene calcolato anche la velocità del centro di guida.

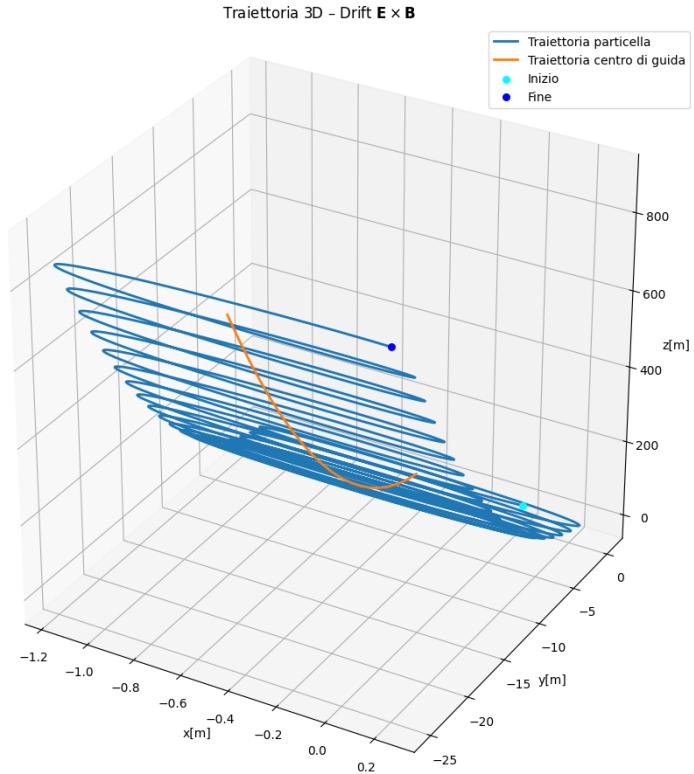


Figura 2.3: Traiettoria della particella in 3D con centro di guida

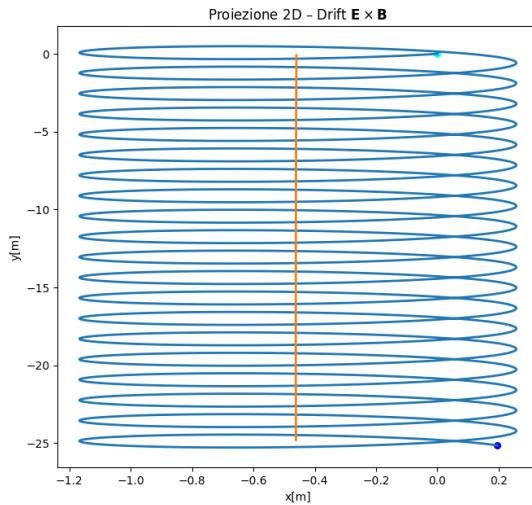


Figura 2.4: Proiezione della traiettoria, con centro di guida, sul piano perpendicolare al campo magnetico

2.2 Simulazione del drift gradiente del campo magnetico

Per simulare il moto di una particella in moto in un campo magnetico che varia nello spazio si può utilizzare ancora l'algoritmo implementato di Boris. Tuttavia è necessario fare delle considerazioni, rispetto al caso osservato precedentemente ora il campo elettrico non è presente e il campo magnetico varia. Nell'implementazione del codice viene tolto il contributo del campo E sul calcolo di v_{minus} e di v_{n+1} . Poiché il campo magnetico è variabile, va aggiornato ad ogni passo della particella considerando il fattore $\partial B / \partial x$ o comunque ∇B . In questo modo si riesce a ricavare la traiettoria della particella immersa in un campo magnetico che varia nello spazio. Il procedimento utilizzato viene descritto come segue:

$$\begin{aligned}
 v_{minus} &= v[n + qm] \\
 v_{prime} &= v_{minus} + np.cross(v_{minus}, t) \\
 v_{plus} &= v_{minus} + np.cross(v_{prime}, s) \\
 v[n + 1] &= v_{plus+qm} \\
 r[n + 1] &= r[n] + v[n + 1] * dt
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

La differenza rispetto al metodo precedente è nella definizione dei vettori che implementano la rotazione: s e t , e nella definizione del campo magnetico,

il fattore qm indica il rapporto tra carica e massa del protone. Per il campo magnetico si usa la definizione del campo magnetico locale, calcolato a partire dalla posizione e che dunque viene aggiornato tenendo conto della variazione:

$$B_{loc} = np.array([0.0, 0.0, B[2] + B_{grad}[0] * r[n, 0] + B_{grad}[1] * r[n, 1]]) \quad (2.19)$$

Tenendo conto di questo, i vettori della rotazione sono definiti come:

$$t = np.array([0.0, 0.0, qm * B_{loc}[2] * dt / 2.0]) \quad (2.20)$$

$$s = 2 * t / (1 + t^2) \quad (2.21)$$

Una volta ricavata la velocità e dunque la traiettoria della particella, viene ricavata la traiettoria del centro di guida della particella nello stesso modo del *drift* $E \times B$. Questo perché si vuole rimanendo, come nel calcolo teorico, nel regime di moto quasi circolare, il raggio di Larmor e le orbite rimangono costanti in prima approssimazione e possono essere usate per calcolare il centro di guida.

Riguardo ai parametri su cui viene calcolata la simulazione, come prima si ha che $dt = 1 \cdot 10^{-6}s$. Si vuole ancora avere un numero di passi di circa $100 - 500$ per compiere un orbita, rimane dunque un ottimo valore $B_z = 8 \cdot 10^{-4}T$ per il campo magnetico. Si vuole rispettare la condizione di moto quasi-circolare $r_L \ll L$ dove:

$$L = \frac{B}{\nabla B} \quad (2.22)$$

Si scelgono dunque valori per il gradiente dell'ordine di $\nabla B \sim 10^{-7}T$. In questo modo si rispetta la condizione di moto quasi-circolare e si riescono ad ottenere delle traiettorie che mostrano bene il moto di deriva della particella. Come nel caso con il campo elettrico, le velocità permettono di ricavare dei raggi di Larmor dell'ordine del metro. Il drift dipende ora dalla velocità perpendicolare della particella e dunque assumerà un ruolo più rilevante rispetto a prima. Anche per questo si è scelto di tenere di un ordine di grandezza inferiore per la componente z della particella, così da ottenere misure il quanto più pulite possibile per il *drift*.

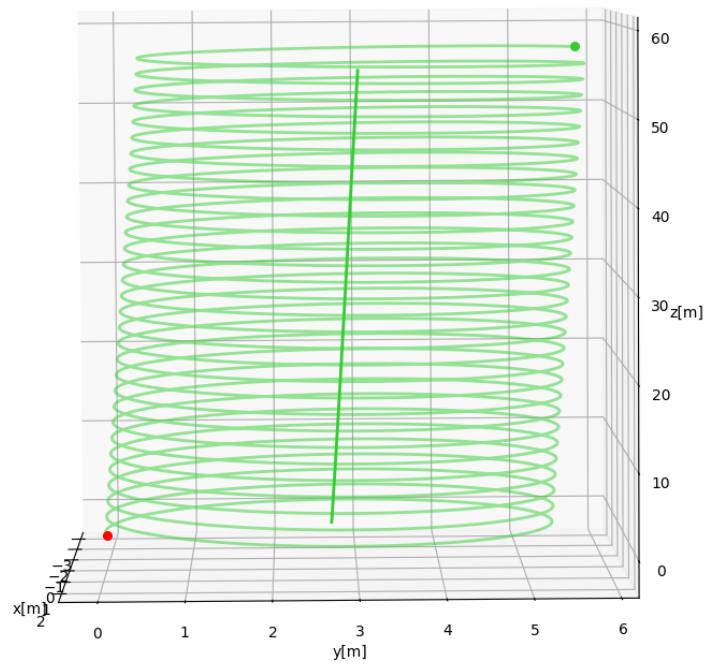


Figura 2.5: Traiettoria della particella con centro di guida in 3D con gradiente del campo magnetico

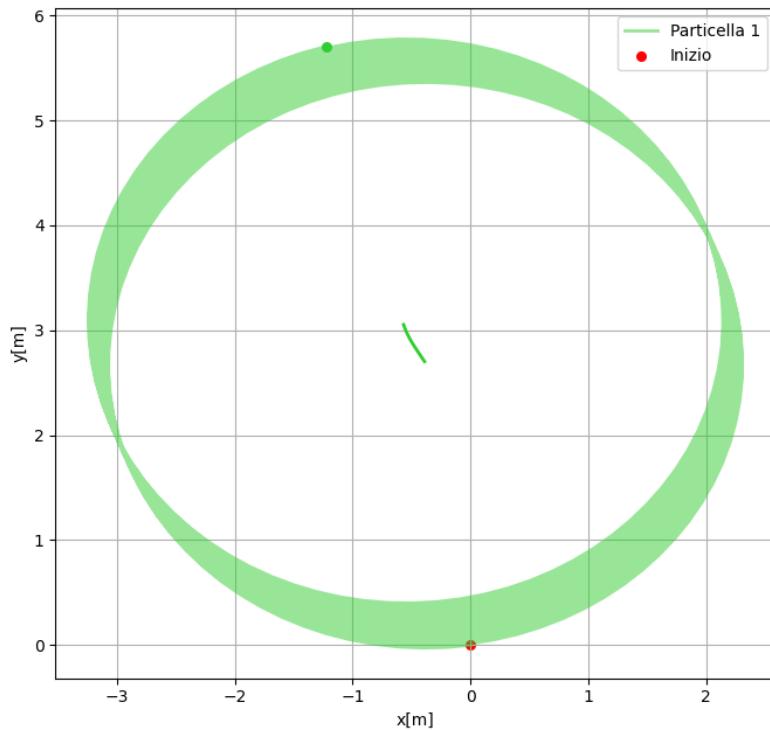


Figura 2.6: Proiezione della traiettoria della particella nel piano perpendicolare all’asse z con gradiente del campo magnetico

2.3 Simulazione turbolenze magnetiche

Nel paragrafo 1.4, si era discusso di come nella realtà i campi magnetici non siano perfettamente uniformi ma al contrario presentano delle irregolarità a diverse scale. Queste irregolarità o turbolenze possono deviare la traiettoria della particella, rendendo dunque il moto difficilmente prevedibile e descrivibile. Nella simulazione viene implementata una funzione che permette di simulare l’effetto di un campo magnetico turbolento che scatterà la particella in una direzione randomica. L’idea utilizzata è quella di definire un coefficiente di turbolenza n_t che varia in un’intervallo tra [1.000; 0.000]. Un valore vicino allo zero indica un campo magnetico quieto mentre per valori vicini a uno si ha forte turbolenza. Quando la particella viene simulata, per ogni passo viene estratto uniformemente un numero tramite generatore di numeri random di *Numpy*, se il numero è minore di n_t allora la particella interagisce con la turbolenza e viene scatterata. Tramite condizione *if* nel codice, viene dunque controllata questa eventualità e nel caso di interazione con la turbolenza la nuova posizione della particella non viene calcolata con l’algoritmo di Boris ma la particella avanza di una quantità r e una direzione random. La

velocità e il passo della particella aumenteranno come al solito proporzionalmente ai campi su cui si propagano, tuttavia tramite un'apposita funzione viene calcolata una direzione che verrà moltiplicata sul vettore della velocità. Il risultato è che la particella compirà un passo in una direzione completamente casuale per poi continuare il moto attraverso l'algoritmo di Boris. Maggiore la turbolenza maggiore la possibilità di avere scattering ad ogni passo, se il valore di n_t è massimo, la traiettoria della particella sarà semplicemente un moto randomico. Viceversa se il coefficiente è nullo, si ha il caso con campo uniforme vicino al caso ideale. La funzione che si occupa di generare una direzione casuale per la particella si basa sul generare punti su una superficie sferica con raggio unitario, in questo modo le componenti ricavate sono normalizzate ad uno e rappresentano un versore. Attraverso il generatore di numeri random di *Numpy*, si estrae un numero tra $[0, 2\pi]$. Il numero rappresenterà l'angolo ϕ e descriverà la longitudine, mentre per la latitudine si fa un ragionamento diverso. Si potrebbe pensare di estrarre anche l'angolo θ , la colatitudine, con lo stesso meccanismo, tuttavia in questo modo si rischierebbe un affollamento dei punti ai poli. Per capire il motivo si può pensare di considerare 100 punti in una circonferenza vicina all'equatore, se la circonferenza si spostasse vicino ai poli, la distanza relativa dei punti sarebbe minore e la circonferenza sarebbe più piccola. Per questo motivo si è scelto di campionare θ attraverso il valore $\cos \theta$ in un intervallo compreso tra $[-1; 1]$, in questo modo si riesce ad avere una distribuzione di punti più uniforme. Ricavato il valore di $\cos \theta$ e $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$, si possono ricavare le componenti x, y e z del versore della direzione. Infatti le coordinate polari sono legate a quelle cartesiane da:

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cos \phi \\ y = \sin \theta \sin \phi \\ z = \cos \phi \end{cases} \quad (2.23)$$

I valori del versore ricavato vengono inseriti in un vettore che è ciò che la funzione restituisce, questo verrà moltiplicato sulla velocità della particella che a questo punto diventerà casuale nella direzione. Vengono proposti dei grafici per due traiettorie ricavate con una leggera turbolenza e con turbolenza massima.

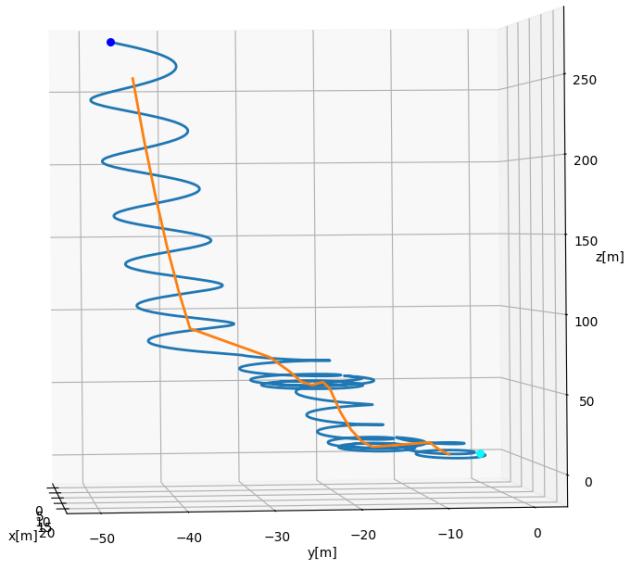


Figura 2.7: Traiettoria della particella con coefficiente 0.002

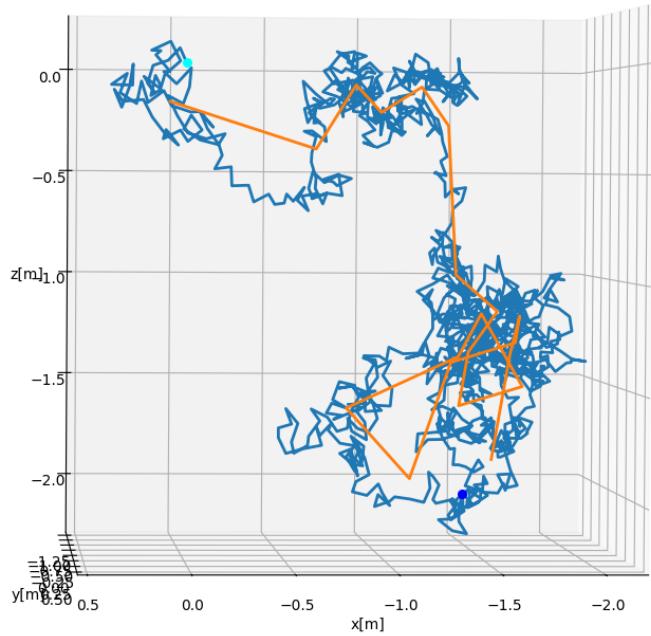


Figura 2.8: Traiettoria della particella con coefficiente 1.000

In entrambi i casi, le condizioni iniziali di passi e campi sono le stesse che si erano usate per ricavare la traiettoria mostrata in figura 2.3. Si nota come l'effetto della turbolenza, anche se con coefficiente piccolo, riesce a deviare la direzione della particella mentre nella figura 2.8 si ha effettivamente un moto randomico per la particella. Ci si aspetta che la velocità di deriva nei casi turbolenti abbia delle deviazioni rispetto a quella teorica.

Capitolo 3

Analisi dati

Lo scopo dell'analisi dati è quello di ricavare il comportamento della velocità di *drift* per varie configurazioni di campi elettrici e gradienti magnetici. Il programma è in grado di simulare il moto di 1000 particelle, calcolarne la velocità di deriva come spiegato nel capitolo 2 e quindi analizzarne i risultati. Il primo passo è ricavare la velocità di deriva media per 1000 particelle con una precisa configurazione dei campi. Questo ricordando che le velocità iniziali e le cariche delle particelle vengono generate casualmente. Si può ripetere la simulazione cambiando i valori delle componenti dei campi, si ricava allora una nuova velocità di deriva per il campione di particelle. Quando sono state accumulate sufficienti misure, si esegue il fit delle velocità di deriva in funzione dei campi E e ∇B , verificando così la validità delle formule della velocità di deriva ricavate nel capitolo 1.

Il programma è in grado di salvare i risultati della simulazione per 1000 particelle in un apposito file in formato ".csv". Prima di eseguire l'analisi dati il file viene letto e vengono selezionati solo i valori salvati per il tipo di *drift* scelto, considerando anche che il campo B deve essere uguale per le varie misurazioni, così come anche il numero di passi con i quali vengono eseguite le simulazioni. Questo per evitare di avere dei dati con i parametri configurati diversamente che fornirebbero dei risultati non precisi per il fit. Per avere una visione della corretta configurazione dei campi scelta, il programma può essere eseguito tramite argomento "traiettoria", in questo modo si potrà avere un confronto visivo sulla traiettoria della particella per i parametri scelti. Vengono inoltre stampati i valori delle particelle, come raggio di Larmor e numero di orbite percorse, così da poter capire quali potrebbero essere i valori migliori da scegliere per eseguire la simulazione. La modalità "traiettoria" permette inoltre di visualizzare il moto della particella con il centro di guida ed avere dunque una visione didattica di come E o ∇B influenzano il moto.

3.1 Ricavare la velocità di deriva media

Scegliendo di eseguire il programma in modalità di default e scegliendo, tramite argomento, l'opportuno tipo di *drift* che si vuole verificare, il programma esegue la simulazione per 1000 particelle come già spiegato. Si possono modificare sia il numero di passi che il fattore della turbolenza prima di eseguire il programma. Per semplicità si considera il numero di passi di default $N = 3000$ e nessuna turbolenza per tutte le misurazioni. In questo modo, considerando il valore di $B_z = 8 \cdot 10^{-4}T$, si hanno circa $n \approx 25$ orbite percorse per ogni particella e una buona risoluzione della traiettoria. Il numero di passi sono sufficienti per calcolare la velocità del centro di guida e quindi la velocità di deriva. I valori per il range del campo elettrico e del gradiente vengono ricavati come spiegato nel capitolo 2, le varie misurazioni vengono dunque eseguite variando i parametri entro il range stabilito. Una volta completata la simulazione, vengono stampati sullo schermo i risultati e vengono anche creati i grafici delle distribuzioni delle componenti della velocità di deriva.

Nello specifico, per ogni particella viene ricavato la velocità di *drift*, questa è data da un vettore contenente solo le componenti x e y . Infatti nel ricavarla viene tolto il contributo del moto ciclotronico diretto sull'asse z in questo caso. Per ricavare il valore del modulo della velocità di deriva media: $|\langle v_d \rangle|$, si studia la distribuzione delle componenti delle velocità di deriva ricavate. Dalla simulazione emerge che queste si distribuiscono come una gaussiana. Ciò è dato dal fatto che il calcolo del centro di guida, che porta alla velocità di deriva, è mediato su orbite che non sono perfettamente complete e si introduce dunque un rumore statistico per ogni misura. Inoltre si deve considerare che, mentre per $E \times B$ si ha che v_d non dipende dalla velocità iniziale, per il *drift* ∇B la dipendenza da quest'ultima comporta delle gaussiane molto larghe. Questo è diretta conseguenza della scelta dell'intervallo con il quale vengono generate le velocità iniziali. In questo caso però l'incertezza non rappresenta una cattiva accuratezza nella presa delle misurazioni ma mostra in realtà la dipendenza dalla velocità. Infatti nel corrispettivo caso dato dal campo elettrico, che viene implementato nello stesso modo, la distribuzione sarà molto più stretta poiché quest'ultimo non dipende dalla velocità iniziale della particella. Dalla distribuzione viene eseguito il fit per ricavare il valore medio e la deviazione standard. Per questa operazione si è utilizzata la funzione *norm* della libreria *Scipy* che ricava questi valori per una distribuzione gaussiana. L'errore associato alla media è calcolato attraverso la deviazione standard:

$$\sigma_\mu = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (3.1)$$

Mentre per il caso di $E \times B$ si avrà una deviazione standard molto piccola e quindi un corrispettivo errore per il valore medio piccolo, per il gradiente l'errore sarà

molto alto, come ci si aspettava. A questo punto si può calcolare il valore medio della velocità di deriva utilizzando il valore medio ricavato per le componenti e applicando a quest'ultimo il modulo si ricava il risultato per la velocità di deriva media ricavata dalla simulazione: $|\langle v_d \rangle| = |(\langle v_x \rangle, \langle v_y \rangle)|$. Questo valore viene confrontato con il risultato teorico atteso. Per calcolare quest'ultimo si utilizzano le formule per la velocità di deriva in base al tipo di *drift* scelto. Per il caso del *drift* dato dal campo elettrico si aveva che:

$$v_d = \frac{E \times B}{B^2} \quad (3.2)$$

Mentre per il caso dato dal gradiente del campo magnetico:

$$v_d = \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{B \times \nabla B}{B^2} \quad (3.3)$$

Per ogni particella viene calcolato questo valore per le due componenti, viene calcolato il valore medio e successivamente il modulo. Da notare che anche in questo caso la velocità iniziale, generata casualmente, porterà a delle deviazioni rispetto a un caso lineare che ci si aspetterebbe per diverse configurazioni del gradiente di B . I valori per la velocità media di deriva, il corrispettivo errore e quella teorica vengono poi salvati nel file ".csv", insieme a un flag che indica il tipo di *drift* simulato, il numero di passi, il coefficiente di turbolenza e il valore di B_z . Di seguito sono mostrati i risultati ricavati per la simulazione di 1000 particelle, con 3000 passi e $B_z = 0.0008T$. Per il campo elettrico si è scelto un valore di $[10, 10, 10]V/m$ mentre per il gradiente $[5 \cdot 10^{-7}, 6 \cdot 10^{-7}]T/m$.

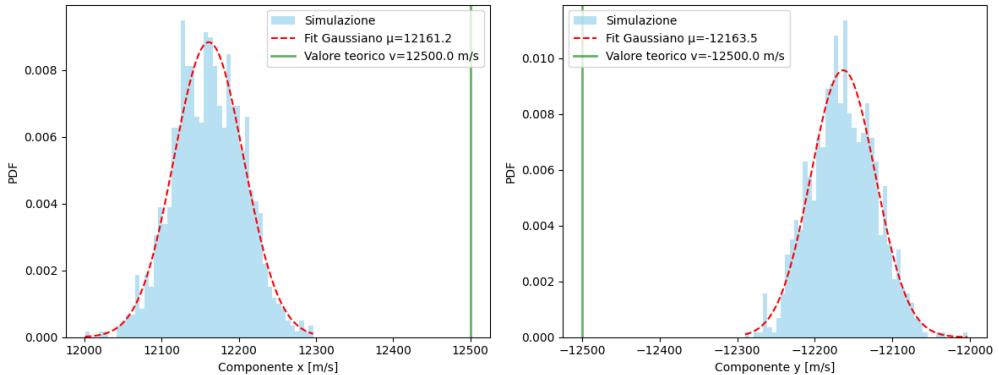


Figura 3.1: Risultati della simulazione per 1000 particelle con *drift* $E \times B$. Fit sulle distribuzioni delle componenti della velocità eseguito tramite *Scipy*

I risultati ricavati sono i seguenti:

Tabella 3.1: Velocità di deriva media, componente x , $drift E \times B$ [m/s]

Velocità di deriva media	12161.21 ± 1.43
Deviazione standard	45.19
Valore teorico	12500.00

Tabella 3.2: Velocità di deriva media, componente y , $drift E \times B$ [m/s]

Velocità di deriva media	-12163.47 ± 1.32
Deviazione standard	41.72
Valore teorico	-12500.00

Tabella 3.3: Velocità di deriva media $drift E \times B$ [m/s]

Modulo della velocità di deriva media	17200.14 ± 1.38
Valore teorico della velocità di deriva	17677.67
Errore relativo	2.70%

Di seguito si hanno invece i risultati ricavati per il gradiente del campo magnetico

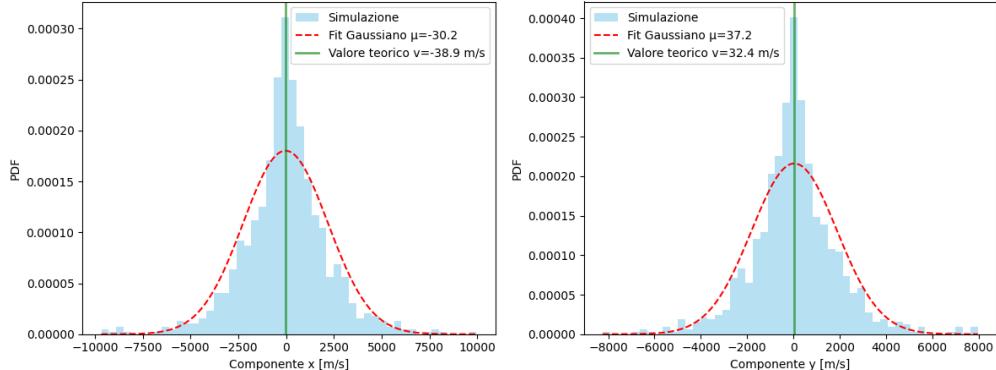


Figura 3.2: Risultati della simulazione per 1000 particelle con $drift \nabla B$. Fit sulle distribuzioni delle componenti della velocità eseguito tramite *Scipy*

I valori, sebbene più diffusi, sono in accordo con la previsione teorica come si nota dall'errore relativo.

Tabella 3.4: Velocità di deriva media, componente x , $drift \nabla B$ [m/s]

Velocità di deriva media	-30.22 ± 70.03
Deviazione standard	2214.70
Valore teorico	-38.87

Tabella 3.5: Velocità di deriva media, componente y , $drift \nabla B$ [m/s]

Velocità di deriva media	37.20 ± 58.38
Deviazione standard	2214.70
Valore teorico	32.39

Tabella 3.6: Velocità di deriva media $drift \nabla B$ [m/s]

Modulo della velocità di deriva media	47.92 ± 63.27
Valore teorico della velocità di deriva	50.60
Errore relativo	5.29%

I valori ricavati dall’analisi dati è in linea con il valore teorico atteso come si osserva dall’errore relativo. Tuttavia è necessario considerare che gli errori legati alle misure non sono da considerarsi come una stima sulla bontà della misura ma forniscono un’indicazione di come la simulazione dipenda o meno dalla velocità iniziale. Nel caso del *drift* dato dal campo elettrico, che non dipende dalla velocità iniziale, i valori si dispongono molto vicino al valore medio. Questo a causa di come è calcolato il centro di guida non sarà uguale al valore teorico ma disterà da questo a causa della precisione della simulazione. Il risultato è una distribuzione lontana dal valore atteso anche dalla coda della distribuzione. Tuttavia questa distanza è molto piccola. Diverso è il caso del gradiente, dove questa volta l’errore è molto alto, ciò è dovuto dalla dipendenza della velocità iniziale del moto di deriva. Anche qui l’errore non descrive una misura poco accurata ma che le velocità iniziali sono in un range troppo ampio per permettere di ricavare dei risultati con errori più bassi. Osservando anche qui l’errore relativo, si trova un accordo con il valore teorico di circa il 5%. In ultima analisi si nota come le distribuzioni per il gradiente siano centrate vicino allo zero. Questo rispecchia come le velocità iniziali vengono generate. Inoltre la simmetrizzazione della normale intorno all’origine avviene grazie alla scelta di avere sia cariche positive che negative nella simulazione. In questo modo si hanno sia velocità di deriva positive che negative, evidenziando così la dipendenza del *drift* dalla carica. Senza questa distinzione le distribuzioni ricavate sarebbero state delle “mezze” gaussiane e non sarebbe stato possibile eseguire il fit come descritto sopra.

Si può concludere affermando che la simulazione riesce a ricavare dei valori per la velocità di deriva precisi rispetto a quelli teorici attesi. Questi risultati possono essere migliorati aumentando il numero di passi per la particella, aumentando così però anche il costo computazionale. Infatti aumentando il numero di orbite si potrà ottenere con più precisione la traiettoria del centro di guida. Un altro metodo potrebbe essere quello di calcolare il centro di guida in modo diverso. Invece che calcolare il valore medio di un orbita, si potrebbe proiettare ogni punto della traiettoria nella direzione del raggio di Larmor ricavando così il punto del centro di guida per ogni punto della traiettoria e ricavare un risultato molto più preciso. Il metodo utilizzato è tuttavia molto soddisfacente e presenta un costo computazionale minore, rimane dunque più efficiente.

3.2 Effetto delle turbolenze magnetiche

Si era già discusso nei capitoli precedenti l'effetto delle turbolenze magnetiche sul moto della particella e di come questo effetto veniva implementato nella simulazione tramite un parametro n_t . Si osserva ora come queste turbolenze, che si comportano come centri di scattering per la particella, deviano il risultato della velocità di deriva rispetto a quello atteso. Si esegue quindi la simulazione per 1000 particelle con i parametri usati precedentemente nel paragrafo 3.1. Per il caso del gradiente magnetico, conseguentemente alla dipendenza della velocità per il *drift*, si osserva una forte deviazione rispetto al valore teorico già con basse turbolenze. Nella simulazione è stato utilizzato un valore per il coefficiente di $n_t = 0.005$ che ha permesso di ricavare i seguenti valori:

Tabella 3.7: Velocità di deriva media, componente x , $drift \nabla B$ [m/s], $n_t = 0.005$

Velocità di deriva media	24.73 ± 236.53
Deviazione standard	7479.59
Valore teorico	60.37

Tabella 3.8: Velocità di deriva media, componente y , $drift \nabla B$ [m/s], $n_t = 0.005$

Velocità di deriva media	-152.72 ± 228.84
Deviazione standard	7236.58
Valore teorico	-50.31

Tabella 3.9: Velocità di deriva media $drift \nabla B$ [m/s], $n_t = 0.005$

Modulo della velocità di deriva media	154.71 ± 229.04
Valore teorico della velocità di deriva	78.58
Errore relativo	96.88%

Si osserva come una leggera turbolenza comporti un risultato del tutto in disaccordo con il valore atteso, errore relativo di circa il 100%. Questo ha senso poiché la velocità di deriva dipende da quella perpendicolare della particella che in questo caso verrebbe scatterata e assumerebbe valori e direzioni random portando così a un errore sensibile della velocità di deriva media. Inoltre si starebbe descrivendo in questo modo un campo magnetico turbolento e che quindi non è uniforme nello spazio avendo quindi un gradiente diverso da quello atteso e maggiore. Tutto ciò comporta a una grande variazione del moto di deriva della particella.

Si osserva ora il caso in cui la particella è nel *drift* dato dal campo elettrico. Ora la velocità non dipende da quella particella in maniera diretta, come già si sapeva, ci si aspetta allora una deviazione minore rispetto al valore teorico. Per mettere in luce l'effetto della turbolenza si è scelto un coefficiente di $n_t = 0.05$, un ordine di grandezza più grande rispetto al caso con il gradiente. I risultati ricavati sono i seguenti:

Tabella 3.10: Velocità di deriva media, componente x , $drift E \times B$ [m/s], $n_t = 0.05$

Velocità di deriva media	8561.32 ± 742.35
Deviazione standard	23475.04
Valore teorico	12500.00

Tabella 3.11: Velocità di deriva media, componente y , $drift E \times B$ [m/s], $n_t = 0.05$

Velocità di deriva media	-12163.47 ± 1.32
Deviazione standard	-7846.46 ± 696.27
Valore teorico	-12500.00

Tabella 3.12: Velocità di deriva media $drift E \times B$ [m/s], $n_t = 0.05$

Modulo della velocità di deriva media	11613.06 ± 721.68
Valore teorico della velocità di deriva	17677.67
Errore relativo	34.31%

Sebbene la turbolenza abbia modificato la velocità di deriva misurata, questa si discosta meno dal valore teorico rispetto al caso con il gradiente, che aveva inoltre

un coefficiente più basso. Si nota come la non dipendenza dalla velocità della particella nel *drift*, e in generale dal gradiente di B , permette di ricavare un risultato più vicino al valore teorico. Qui infatti il protagonista è soltanto il campo elettrico che non è modificato dall'effetto della turbolenza che agisce solo sulla direzione della velocità. Questa modifica ha comunque un effetto significativo poiché una misura che si discosta di circa il 30% dal valore teorico è poco precisa.

In generale si può concludere affermando che le turbolenze restituiscono un risultato in linea con la previsione teorica di avere una deviazione rispetto al valore teorico atteso e che questo effetto è maggiore per il *drift* ∇B , per via della sua dipendenza dalla velocità e dal gradiente di B .

3.3 Ricavare il fit delle velocità con i campi

Si vuole studiare ora il comportamento della velocità di deriva in funzione del campo elettrico o del gradiente del campo magnetico. Per fare questo vengono eseguite più simulazioni per ogni *drift*, con diverse configurazioni dei campi. I risultati delle velocità medie di deriva ricavate, vengono poi fittate per verificare se seguono il comportamento teorico atteso. Ciò che ci si aspetta è un comportamento lineare con il campo o il gradiente, questo può essere ricavato infatti dalla formula, per il campo elettrico, come segue:

$$|v_d| = \frac{EB}{B^2} = \frac{E}{B} \quad (3.4)$$

Oppure per il gradiente:

$$|v_d| = \frac{1}{2} v_{perp} r_L \frac{B \nabla B}{B^2} = \frac{1}{2} v_{perp} r_L \frac{\nabla B}{B} \quad (3.5)$$

Si eseguono dunque cinque simulazioni con 1000 particelle ciascuna per ogni caso di *drift*. Per ognuna di queste il valore B_z e N sono gli stessi, quelli utilizzati precedentemente. Si è nel caso non turbolento con $n_t = 0,00$. L'unica cosa che cambia per ogni simulazione, sono i valori dei campi. Ogni volta che si esegue la simulazione con argomento "salva", il programma salva nel file .csv i dati per la velocità di deriva media con il relativo errore, la velocità di deriva teorica, calcolata a partire dalla formula, il modulo dei campi scelti e i parametri con il quale viene eseguita la simulazione: B_z e N . Questi ultimi devono essere uguali per tutte le prese dati altrimenti il risultato ricavato non sarebbe corretto e quindi il programma avvisa l'utente che il fit lineare non può essere fatto. Un apposito argomento "cancella" permette di eliminare il file per consentire di riprendere i dati. Si può altrimenti aprire direttamente il file e cancellare le righe corrispondenti ai dati interessati. Il programma può eseguire l'analisi del fit lineare tramite argomento

"data". In questa modalità il programma legge i dati in base al *drift* scelto e controlla che abbiano tutti lo stesso numero di passi e di B_z . Può anche consentire l'analisi con dati che contengono valori di turbolenza, ma in questa trattazione non verrà fatto poiché si conosce già l'effetto che ha sul calcolo della velocità media di deriva. Una volta letti ed estratti i dati questi vengono passati al modulo che permette di calcolare il fit. Tramite *curve fit* della libreria *Scipy*, si può calcolare il fit dei dati a partire dal modulo dei campi scelto, le velocità di deriva medie calcolate e gli errori ad esse associate. Per fare questo viene definita una funzione che descrive una retta e passata come argomento a *curve fit*. Si ricava così il valore del coefficiente angolare della retta del fit lineare con il relativo errore. Questo deve essere paragonabile alla parte costante della formula della velocità di deriva teorica, nello specifico per $E \times B$ si dovrebbe avere:

$$m = \frac{1}{B_z} \quad (3.6)$$

Oppure:

$$m = \frac{1}{2} \frac{v_{perp} r_L}{B} \quad (3.7)$$

Alla fine dell'analisi vengono stampate le relative informazioni e il grafico del fit, dove si ha sia la retta che intercetta i dati sia la retta teorica sia i dati delle velocità teoriche dei dati ricavate precedentemente. Vengono presentati di seguito i risultati ottenuti dall'analisi dati per i due tipi di *drift*.

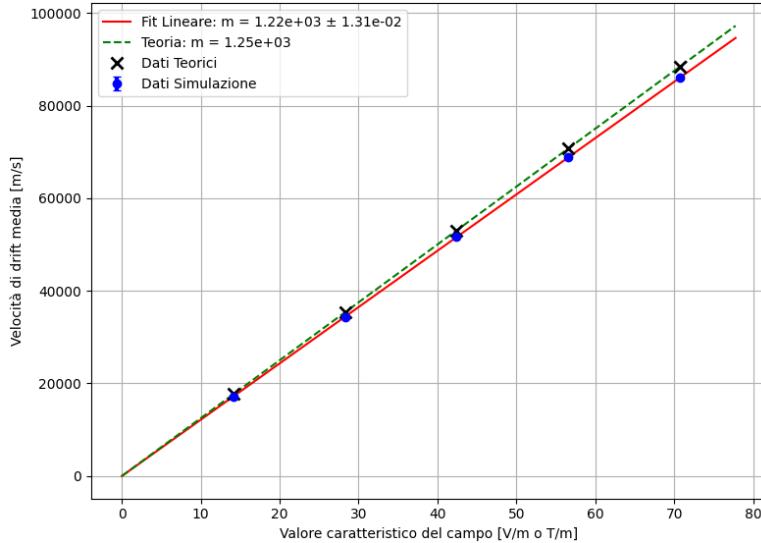


Figura 3.3: Fit lineari dei dati di $E \times B$

Dove nello specifico si ha:

Tabella 3.13: Fit della velocità di deriva media $drift E \times B$

Misurazione 1	
Modulo del campo	14, 1[V/m]
Valore della velocità di deriva	$17200.14 \pm 1.38[m/s]$
Misurazione 2	
Modulo del campo	28, 3[V/m]
Valore della velocità di deriva	$34398.32 \pm 1.38[m/s]$
Misurazione 3	
Modulo del campo	42, 4[V/m]
Valore della velocità di deriva	$51599.46 \pm 1.40[m/s]$
Misurazione 4	
Modulo del campo	56, 6[V/m]
Valore della velocità di deriva	$68799.62 \pm 1.38[m/s]$
Misurazione 5	
Modulo del campo	70, 7[V/m]
Valore della velocità di deriva	$85996.99 \pm 1.36[m/s]$

Tabella 3.14: Fit della velocità di deriva media $drift E \times B$

Coefficiente ricavato dal fit	$1216.20 \pm 0.01[m^2/(V \cdot s)]$
Coefficiente teorico	$1250.00[m^2/(V \cdot s)]$
Errore relativo	2, 70%

Come si osserva dall’analisi dati, i risultati ricavati sono in ottimo accordo con i valori teorici. L’errore relativo è infatti del 3%. Questo mostra come all’aumentare dell’intensità del campo elettrico aumenti pure la velocità di deriva conformemente alla relazione teorica che descrive il fenomeno. Per quanto riguarda il gradiente del campo magnetico si ha invece:

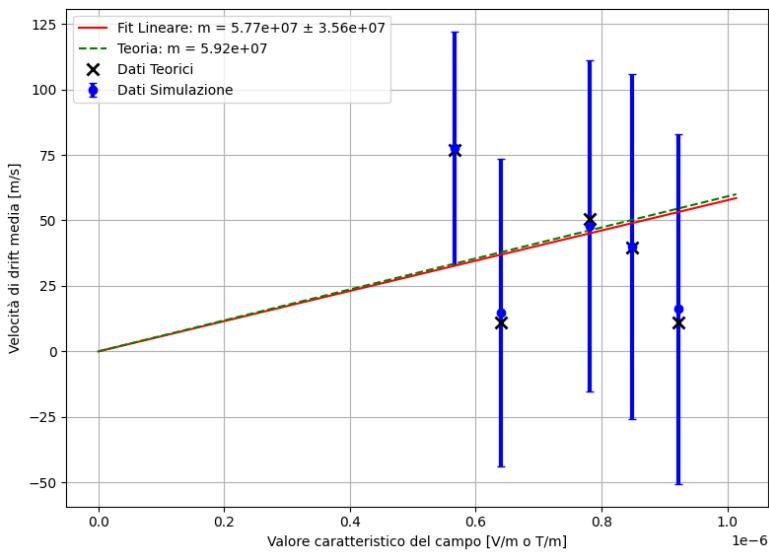


Figura 3.4: Fit lineare dei dati del gradiente magnetico

Tabella 3.15: Fit della velocità di deriva media $drift E \times B$

Misurazione 1	
Modulo del campo	$7.81 \cdot 10^{-7} [T/m]$
Valore della velocità di deriva	$47.92 \pm 63.27 [m/s]$
Misurazione 2	
Modulo del campo	$6.40 \cdot 10^{-7} [T/m]$
Valore della velocità di deriva	$14.97 \pm 58.70 [m/s]$
Misurazione 3	
Modulo del campo	$9.22 \cdot 10^{-7} [T/m]$
Valore della velocità di deriva	$16.21 \pm 66.79 [m/s]$
Misurazione 4	
Modulo del campo	$8.49 \cdot 10^{-7} [T/m]$
Valore della velocità di deriva	$40.02 \pm 65.87 [m/s]$
Misurazione 5	
Modulo del campo	$5.66 \cdot 10^{-7} [T/m]$
Valore della velocità di deriva	$77.59 \pm 44.36 [m/s]$

Tabella 3.16: Fit della velocità di deriva media $drift E \times B$

Coefficiente ricavato dal fit	$5.77 \cdot 10^7 \pm 3.56 \cdot 10^7 [m^3/(T^2 \cdot s)]$
Coefficiente teorico	$5.92 \cdot 10^7 [m^3/(T^2 \cdot s)]$
Errore relativo	2,45%

In questo caso si osserva che i dati sono affetti da molta incertezza. Questo alla luce dei risultati ottenuti nel paragrafo 3.1 è del tutto atteso e riflette la dipendenza del *drift* dalla velocità non uno scorretto funzionamento del simulazione. Si nota infatti che anche i dati teorici delle velocità, calcolati attraverso la formula del *drift*, non sono disposti sulla retta teorica, che descrive solamente una retta con il coefficiente teorico, ma bensì sono vicini ai risultati della simulazione. Questo conferma la validità della simulazione e dimostra ulteriormente che l'errore è dovuto alla velocità iniziale casuale della particella. Nonostante questo le misurazioni sono entro gli errori all'interno del risultato teorico atteso per la retta teorica. In generale si estrapola dal fit il coefficiente angolare, che confrontato con quello teorico atteso, ricavato dai dati teorici, discosta poco meno rispetto al caso del *drift* $E \times B$. Anche in questo caso la simulazione ha restituito un comportamento della velocità di deriva che cresce linearmente con l'intensità del gradiente, in questo caso, verificando così la legge lineare attesa dalla teoria.

Conclusioni

Si voleva implementare una simulazione che studiasse il comportamento delle particelle cariche con i moti di *drift* $e \times B$ e ∇B . La simulazione doveva tenere conto anche dell'effetto delle turbolenze magnetico tramite fenomeni di scattering casuali. Inoltre doveva essere possibile scegliere una configurazione dei campi per i vari moti di deriva e anche il numero dei passi che la particella poteva compiere. Tutto questo considerando delle cariche e delle velocità iniziali generate casualmente per ogni particella. Dall'analisi dei dati ottenuti dalla simulazione si sono riusciti a ricavare dei risultati che sono in linea con i valori teorici attesi per entrambi i gradienti. Si può considerare dunque il programma un buon compromesso tra valori teorici raggiunti e costo computazionale. In generale si potrebbero configurare diversamente i parametri della simulazione e anche il modo con cui ricavare la velocità di deriva. Questi porterebbero ad avere una simulazione più precisa ma con un costo computazionale maggiore e data la bontà dei risultati ottenuti potrebbe essere poco producente.