

המכללה האקדמית הדסה

חוג למדעי המחשב

חדו"א 2: תרגיל מס' 12. (תאריכי הגשה: 26.1.17)

1. יהי $a > 0$. נשתמש בשיטת ניוטון עבור הפונקציה $f(x) = a - \frac{1}{x}$ כדי לחשב את $\frac{1}{a}$.

a. מצאו את נוסחת הרקורסיה המגדירה את הסדרת ניוטון $(x_n)_{n \geq 0}$. (מצאו צורה של הרקורסיה כך שניתן לחשב את x_n רק עם חיבור וכפל.)

b. בדקו כי $x_{n+1} - \frac{1}{a} = -a \left(x_n - \frac{1}{a} \right)^2$ והסיקו על ידי הוכחה באינדוקציה כי $x_n - \frac{1}{a} = -a^{2^n - 1} \left(x_0 - \frac{1}{a} \right)^{2^n}$.

c. השתמשו בסעיף הקודם כדי למצוא עבור אילו ערכים של $x_0 > 0$ הסדרה $(x_n)_{n \geq 0}$ מתכנסת.

d. חשבו קירוב של $\frac{1}{23}$ עם דיוק של 10^{-3} .

2. תהי $g(x) = \frac{2}{3-x}$.

a. מצאו את נקודות הבשת של הפונקציה g ובררו אם הן דוחות או מושכות.

b. עבור כל נקודת שבת מושכת, מצאו קטע שבו ניתן לבחור את הערך התחלתי של סדרת האיטרציה ומובטח כי הסדרה תתכנס לנקודת השבת. ציינו את סדר ההתכנסות של הסדרה לנקודה.

3. נתבונן במשוואה $g(x) = x$ עבור הפונקציה $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

a. הוכיחו כי יש למשוואה הזו פתרון אחד חיובי ופתרון אחד שלילי.

b. מצאו תנאי על $a > 0$ כדי הפונקציה g תהיה מכווצת בקטע $[a, \infty)$ ($a > 0$).

c. אילו מפתרונות המשוואה $g(x) = x$ ניתן לקרב בעזרת שיטת האיטרציה? עבור כל אחד, תנו את סדר ההתכנסות של סדרת האיטרציה, וחשבו את שתי הספרות הראשונות של הפתרון (בעזרת סדרת האיטרציה).

4. מצאו את הפתרונות של המשוואה $x^2 + 2x - 3 = 0$. מצאו לפחות שלוש דרכים שונות לכתוב את המשוואה כבעיית נקודת שבת $x = g(x)$ ובברר עבור כל מקרה אילו מהשורשים ניתן לקרב בעזרת שיטת האיטרציה הפשוטה.

5. עבור אילו קטעים $[a, b]$ הפונקציה $g(x) = \arctan x$ מכווצת ב- $[a, b]$?

בהצלחה!