

# V47 Temperaturabhängigkeit der Molwärme von Festkörpern

Dominik Birkwald, Domink.Birkwald@tu-dortmund.de  
David Pachurka, David.Pachurka@tu-dortmund.de

Durchführung 11.12.2017, Abgabe

## 1 Ziel

Im folgenden werden drei Modelle vorgestellt, welche Näherungen zur Temperaturabhängigkeit der Molwärme von Festkörpern geben. Daraufhin wird die Molwärme gemessen und so das Debye-Modell untersucht werden.

## 2 Theorie

### 2.1 Klassisches Modell

Das klassische Modell geht davon aus, dass Molwärme sich gleichmäßig auf alle Freiheitsgrade der Atome verteilt. Jedes Atom hat so eine Energie von  $\frac{1}{2}k_B T$  pro Freiheitsgrad. Im Kristallgitter hat jedes Atom drei Freiheitsgrade und somit eine Energie von

$$\langle u \rangle = \frac{6}{2} k_B T. \quad (1)$$

Für einen Mol gilt somit

$$U = 3k_B N_L T = RT, \quad (2)$$

mit der Loschmidtschen Zahl  $N_L$  und der allgemeinen Gaskonstanten  $R$ . Durch Ableiten lässt sich die spezifische Molwärme berechnen.

$$C_v = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right) = 3R \quad (3)$$

Offensichtlich widerspricht dies den Erwartungen, da die spezifische Molwärme temperatur- und materialunabhängig ist. Allerdings gehen im Allgemeinen die Grenzwerte der spezifischen Molwärme gegen  $3R$ .

## 2.2 Modell nach Einstein

Das Einsteinsche Modell beachtet, dass die Schwingungsenergie gequantelt ist, indem sie die Annahme trifft, dass alle Atome mit der Kreisfrequenz  $\omega$  schwingen. Außerdem werden nur ganzzahlige vielfache der Energie  $\hbar\omega$  angenommen. Mit der Wahrscheinlichkeit, dass ein Oszillator die Energie  $n\hbar\omega$  hat

$$W(n) = \exp - \frac{n\hbar\omega}{k_B T} \quad (4)$$

kann die mittlere Energie berechnet werden.

$$\langle u \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega \exp - \frac{n\hbar\omega}{k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp - \frac{n\hbar\omega}{k_B T}} \quad (5)$$

$$\langle u \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp \frac{\hbar\omega}{k_B T} - 1} < k_B T \quad (6)$$

Durch für die spezifische Wärme ergibt sich durch Ableiten

$$C_{vE} = 3R \left( \frac{1}{T} \frac{\hbar\omega}{k_B} \right)^2 \frac{\exp \frac{\hbar\omega}{k_B T}}{\left( \exp \frac{\hbar\omega}{k_B T} - 1 \right)^2} \quad (7)$$

Wie im klassischen Modell geht der Limes für  $T$  gegen  $\infty$  gegen  $3R$ . Besonders im Bereich tiefer Temperaturen ist diese Näherung nicht sehr genau, da die Atome tatsächlich mit verschiedenen Frequenzen schwingen.

## 2.3 Debye-Modell

Das Debye-Modell ersetzt man die Frequenz mit einer Frequenzverteilung  $Z(\omega)$ . Diese ist

$$Z(\omega)d\omega = \frac{3L^3}{2\pi^2 v^3} \omega^2 d\omega \quad \text{oder} \quad Z(\omega)d\omega = \frac{3L^3}{2\pi^2} \omega^2 \left( \frac{1}{v_l^3} + \frac{1}{v_t^3} \right) d\omega \quad (8)$$

wenn man die longitudinal und transversal Geschwindigkeiten unterscheidet. Da ein Kristall endlich viel Atome hat folgt, dass er auch endlich viele Eigenschwingungen hat. Deshalb gibt es die Grenzfrequenz  $\omega_D$ , die Debye-Frequenz. Sie ist gegeben durch

$$\int_0^{\omega_D} Z(\omega) d\omega = 3N_L \quad (9)$$

Daraus folgt

$$\omega_D^3 = \frac{6\pi^2 v^3 N_L}{L^3} \quad \text{oder} \quad \omega_D^3 = \frac{18\pi^2 N_L}{L^3} \frac{1}{\frac{1}{v_l^3} + \frac{1}{v_t^3}} \quad (10)$$

So ergibt sich für die Verteilung der Frequenzen

$$Z(\omega)d\omega = \frac{9N_L}{\omega_D^3}\omega^2d\omega \quad (11)$$

und für die spezifische Molwärme, mit  $x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$  und  $\frac{\theta_D}{T} = \frac{\hbar\omega_D}{k_B T}$ ,

$$C_{vD} = 9R \left( \frac{\theta_D}{T} \right)^3 \int_0^{\omega_D/T} \frac{x^4 \exp x}{(\exp x - 1)} dx. \quad (12)$$

$\theta_D$  ist die sogenannte Debye-Temperatur. Sie ist eine materialspezifische Größe.

Wie im klassischen und im einsteinschem Modell geht die spezifische Molwärme auch im Debye-Modell gegen  $3R$  für  $T$  gegen inf.

### 3 Durchführung

Das Experiment wird in Abbildung 1 dargestellt. Die Kupferprobe befindet sich in einem Kupferzylinder, welche beide jeweils von einer Heizwicklung umschlossen werden. Der Kupferzylinder wird von einem Rezipienten umschlossen und der Rezipient wird wiederum in ein Dewargefäß gelegt. Zur Minimierung der Strahlungsverluste wird in dem Rezipienten zunächst ein Vakuum mithilfe einer Pumpe erzeugt. Anschließend wird Helium aus einer Heliumflasche eingelassen. Mithilfe eines Druckmessgerätes wird gewährleistet, dass das Helium wieder Atmosphärendruck erreicht. Zur Kühlung der Probe, des Zylinders und des Rezipienten wird als nächstes flüssiger Stickstoff aus einer speziellen Stickstoffflasche in das Dewargefäß gegossen. Die Temperaturen des Kupferzylinders und der Probe werden jeweils mithilfe eines Ohmmeters gemessen, welcher den temperaturabhängigen Widerstand anzeigt. Nach einer Wartezeit von etwa einer Stunde sind der Zylinder und die Probe auf eine Temperatur von 80 K abgekühlt und weisen daher beide in etwa den selben Widerstand am Ohmmeter auf. Gelegentlich muss flüssiger Stickstoff ins Dewargefäß nachgefüllt werden, wenn bereits so viel Stickstoff verdampft ist, dass der Rezipient teilweise frei liegt, um eine vollständige und gleichmäßige Kühlung des Rezipienten zu gewährleisten. Über die Heizwicklung wird sowohl der Probe als auch dem Kupferzylinder eine definierte elektrische Energie hinzugefügt. Die Stromstärke wird an einem Konstantstromgerät eingestellt und die Spannung an einem Voltmeter abgelesen. Der Kupferzylinder wird ebenfalls mit elektrischem Strom geheizt, wobei darauf geachtet werden muss, dass die Temperaturen der Probe und des Zylinders gleich bleiben, um Wärmestrahlungsverluste zu vermeiden. Über die Ohmmeter wird die Temperatur kontrolliert. Falls bei der Messung die Temperaturen abweichen, wird die Stromstärke, welche an der Probe anliegt, entsprechend variiert, sodass die Temperaturen sich wieder annähern. Bei der Messung wird nach jedem Zeitintervall von 5 min der elektrische Widerstand sowie die während des Zeitintervalls anliegende Stromstärke und Spannung an der Probe und des Zylinders aufgeschrieben, woraus in der Auswertung die hinzugefügte Energie und die Temperaturerhöhung ermittelt werden kann. Dabei sollte während eines Messintervalls die Stromstärke nicht verändert werden, um die zugefügte Energie genau berechnen zu können.

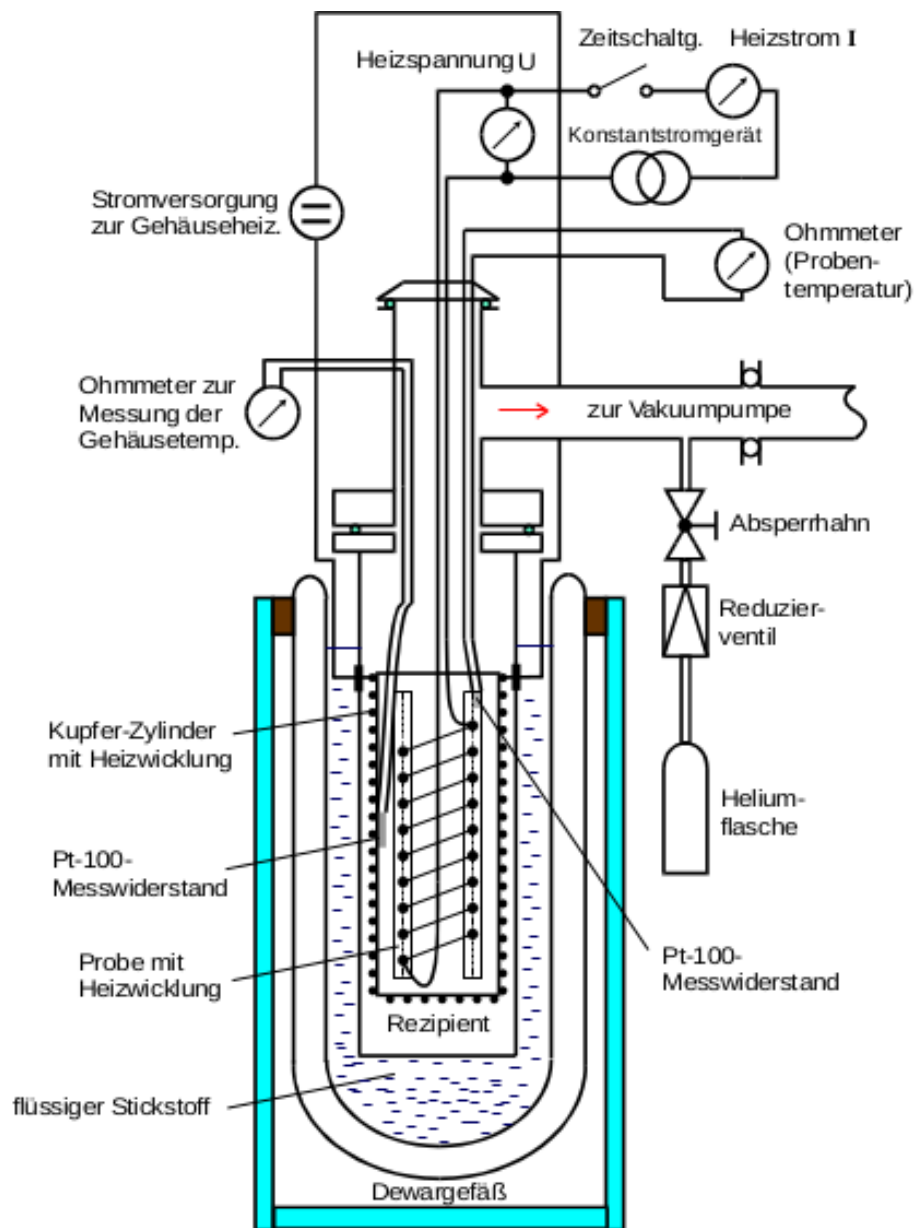


Abbildung 1: Versuchsaufbau[?]