

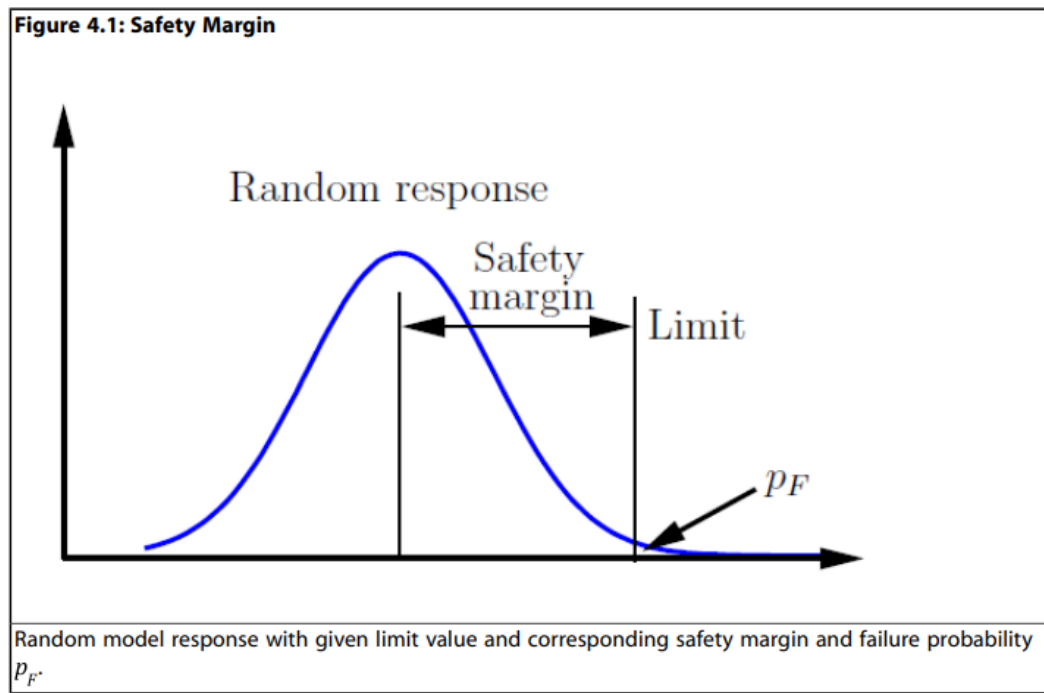
第四章 穩健設計

由於針對性的自動優化虛擬產品，探索了新的設計可能性。然而，高度優化的設計導致對不完美敏感度高，並且往往會失去穩健性。通常確定性最優值被推到可行設計空間的邊界，作為結果經常被確定下降，這是由於生產過程中的不確定性引起的。因此，有必要研究，優化設計如何受到生產模型中各種變量、條件和負載的影響。這些散佈的輸入可以通過optiSlang的平均隨機變量和負載的特定依賴性被建模。與其他不確定性模型相比，有效的概率理論方法得到了很好的發展。

穩健設計可能直觀地被描述為其性能在很大程度上不受模型輸入隨機擾動的影響。一個可能的措施是變異指示器，在該指示器下，關鍵模型反應與輸入變異的相對變化相比較。如果某些模型反應對於不希望的性能有限制，那麼安全邊際可以被量化為與模型反應和輸入變量的標準偏差有關。這在圖4.1：安全邊際（第50頁）中顯示。安全邊際可以以模型反應的標準偏差 σ_Y 的形式來表達。由設計師定義的特定安全邊際 $\alpha\sigma_Y$ ，必須對所有關鍵反應進行證明。

$$|y_{\text{limit}} - \bar{Y}| \leq \alpha\sigma_Y \quad (4.1)$$

或者，超出某個限制的 probability 可以被量化並被證明是較小的。這個概率指示器可以通過基於概率的穩健性分析來評估，這通常被稱為可靠性分析。



4.1 不確定性定義

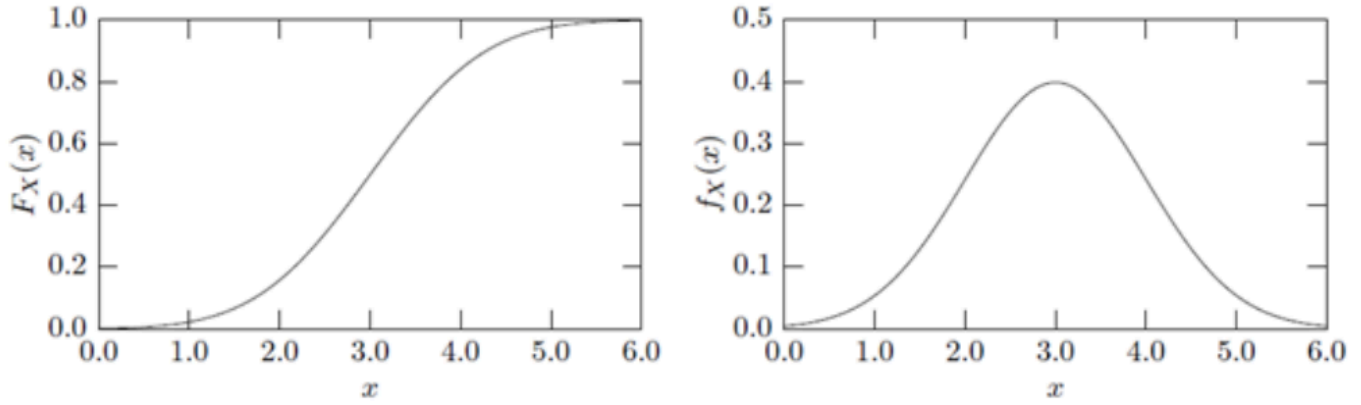
4.1.1. 標量隨機變數

隨機變數是標量，可以由一組具有特定概率的離散值來表示，或由在給定範圍內定義的連續變數來表示。一個連續型隨機變量 X 可以由累積分布函數 $F_X(x)$ 描述，即

$$F_X(x) = P[X < x], \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1 \quad (4.2)$$

其中 $P[X < x]$ 是隨機變量 X 的值低於給定值 x 的概率。

Figure 4.2: Cumulative Distribution Function and Probability Density Function



Cumulative distribution function $F_X(x)$ and probability density function $f_X(x)$ of a continuous random variable X .

等同於累積分佈函數的通常是機率密度函數，其是累積分佈函數的導數，即使用：

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\tau) d\tau, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\tau) d\tau = 1. \quad (4.3)$$

在圖4.2：累積分佈函數與機率密度函數（第51頁），展示了連續隨機變數的累積分佈函數和機率密度函數的範例。

基於密度函數，已引入隨機矩，例如（Bucher 2009）。隨機變數 X 的第一個絕對矩是其均值：

$$\bar{X} = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx, \quad (4.4)$$

其中 $E[\cdot]$ 是期望值。第二個中心矩為隨機變數的方差：

$$\sigma_X^2 = E[(X - \bar{X})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^2 f_X(x) dx. \quad (4.5)$$

均值和方差（或標準偏差 $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$ ）通常用來描述隨機變數的變異性。然而，分佈函數的形狀可能對隨機分析的結果有顯著影響。在過去的幾個世紀裡，已經提出了許多特定的分佈函數來進行隨機分析。特定的分佈類型包括均勻分佈、對數正態分佈、指數分佈、Gumbel分佈和Weibull分佈。在optiSLang中，有大量已知分佈類型（共有80種）可供選擇。隨機變數的機率密度函數和屬性可以在Distribution Types (p. 80)中找到。關於隨機變數的分佈類型和屬性也可以在Montgomery和Runger 2003 (第90頁)和Bucher 2009 (第89頁)中找到。

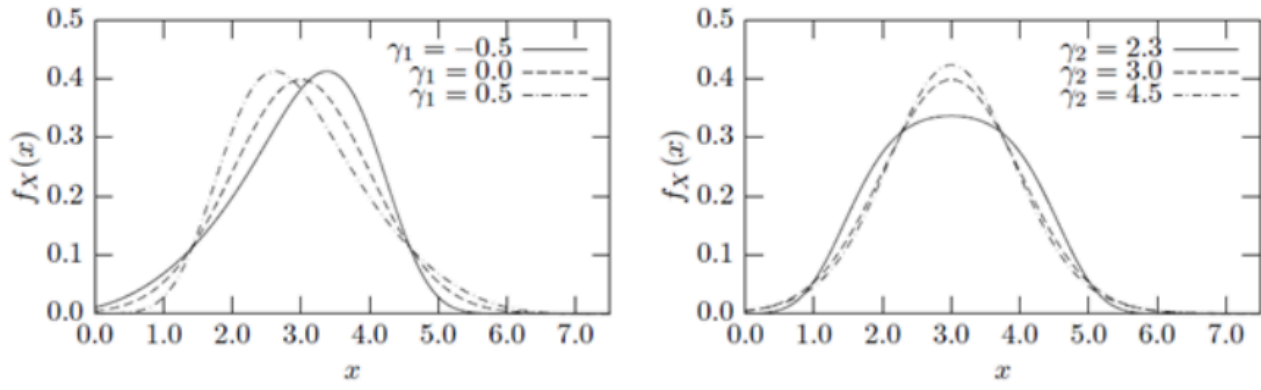
為了執行魯棒性分析，optiSLang需要定義分佈類型，包括所有隨機輸入變數的均值和標準差。由於隨機輸入的性質對魯棒性分析結果有重大影響，用戶應要求盡可能提供最詳細的信息以便於此目的。如果需要進行測量，則可使用optiSLang的統計後處理來估算隨機模型反應和尋找合適的分佈類型。

除了均值和標準差之外，隨機模型反應甚至隨機輸入的高階矩也是人們感興趣的。偏度 γ_1 和峰度 γ_2 是隨機變數的標準化第三和第四矩：

$$\gamma_1 = \frac{E[(X - \bar{X})^3]}{\sigma_X^3}, \quad \gamma_2 = \frac{E[(X - \bar{X})^4]}{\sigma_X^4}.$$

它們提供了除了均值和標準差之外的隨機變數密度函數形狀的描述。例如，對於對稱的密度函數，偏度始終是零，而對於正態分佈，峰度等於三。在圖4.3：密度函數與相對應的偏度和峰度值（第52頁），展示了多個密度函數與其對應的偏度和峰度值。

Figure 4.3: Density Functions with Corresponding Skewness and Kurtosis Values



Probability density function $f_X(x)$ of a continuous random variable X for different values of skewness γ_1 and kurtosis γ_2 .

4.1.2. 多變量分佈

在工業應用中，研究大量隨機輸入變數的影響是典型的。將這些輸入變數建模為獨立的是一種簡化，但考慮輸入間的依賴性對獲得的結果有顯著的影響。例如，材料特性如楊氏模量的變化和產生的應力可能不是獨立變化的。在optiSLang中，相關的隨機變數是通過相關係數來建模的：

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{E[(X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2)]}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}. \quad (4.7)$$

在接下來的部分，被研究模型的隨機輸入變數會被收集在隨機向量 \mathbf{X} 中。聯合機率密度函數用於量化特定組合值的機率。在這種情況下所有隨機變數 X_i 都是彼此獨立的，那麼聯合機率密度就是單個（邊際）密度函數的乘積。

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \quad (4.8)$$

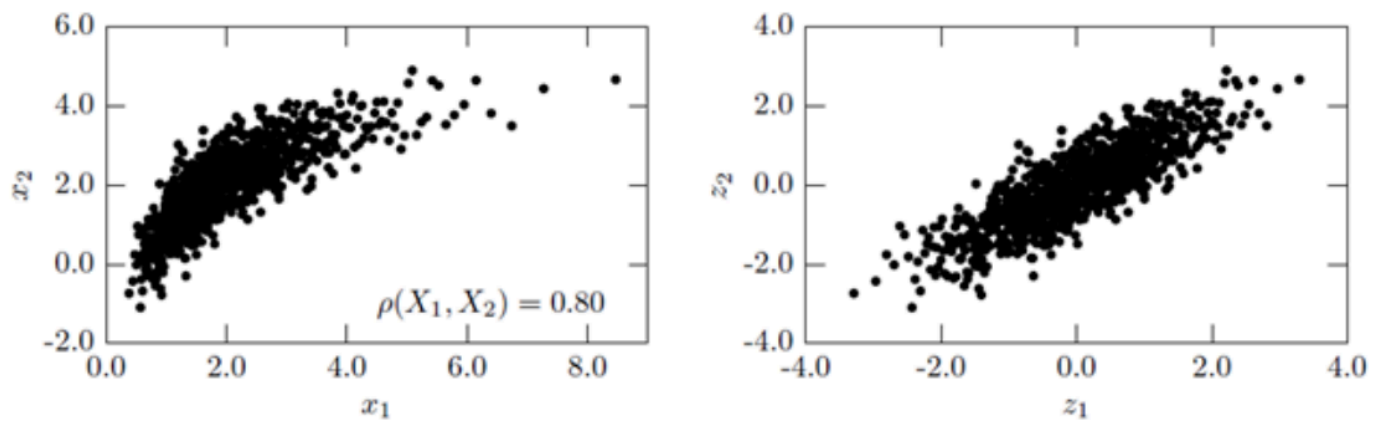
請注意，獨立變數總是不相關的，而相關的變數則不一定是這樣。對於正態分佈的輸入變數 $\bar{\mathbf{X}}$ ，聯合密度函數讀作：

$$f_{X_g}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{C}_{X_g X_g}|}} \exp \left[-\frac{1}{2} (x - \bar{X}_g)^T \mathbf{C}_{X_g X_g}^{-1} (x - \bar{X}_g) \right] \quad (4.9)$$

其中 $\bar{\mathbf{X}}$ 是均值向量， $\mathbf{C}_{X,X}$ 是協方差矩陣，而 n 是隨機變數的數量。任意分佈類型的組合在封閉形式中是不可能的。在optiSLang中，通過使用Nataf模型實現了具有任意分佈類型的相關變數的組合（參見Nataf 1962 (第90頁)）。

首先，將單個原始隨機變數轉換為高斯變數。對於假設的聯合正態機率密度，相關係數的轉換與迭代結果不同，特別是在迭代產生一個不是正定的、因此無效的相關係數矩陣的特殊情況下。在（Bucher 2009 (第89頁)）中有進一步的細節。

Figure 4.4: Random Samples of a Two-Dimensional Random Vector



Samples of a log-normal – normal distributed random vector obtained by the Nataf model: in the original space (left) and in the normal space (right).

在圖4.4：二維隨機向量的隨機樣本（第53頁），展示了具有正態和對數正態分佈類型的隨機樣本。這些轉換後的樣本在正態空間中可以與原始空間中的樣本進行比較，以證明相同樣本的非線性依賴性可以在原始空間中被表示出來。

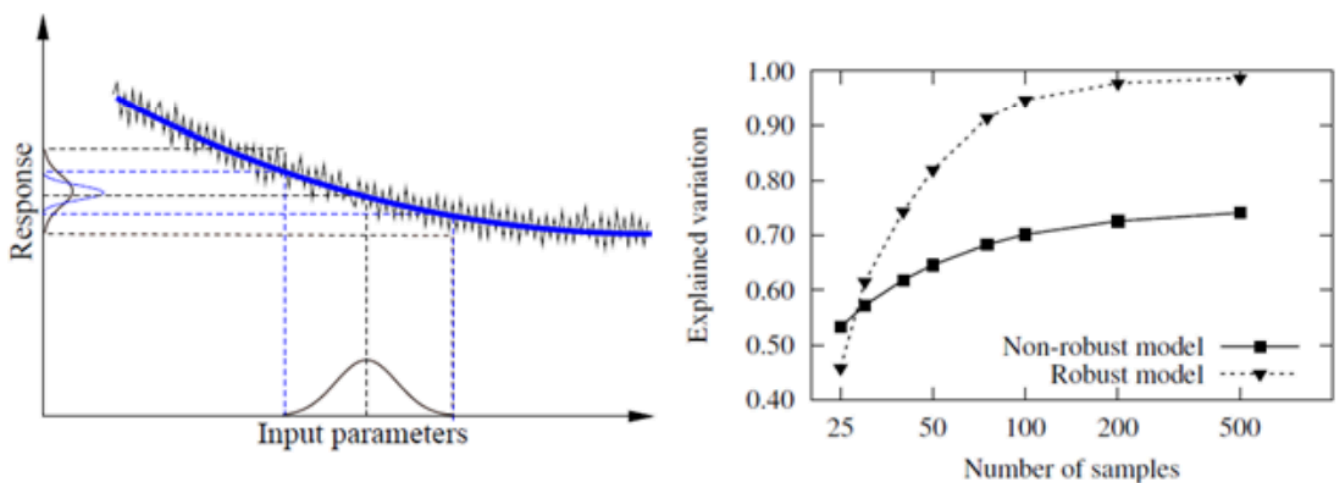
4.2. 基於變異數的魯棒性分析

在基於變異數的魯棒性分析中，研究關鍵模型反應的變化。在optiSLang中，隨機抽樣方法被用於生成聯合概率密度函數的離散樣本，這些樣本基於模型響應的密度函數進行評估。通過這些樣本，評估模型響應的均值、標準差、分位數和更高階的隨機矩。為了得到這些估計的足夠質量，需要抽樣方案能夠準確地代表模型分布的細節並且確保不同相關輸入之間高精度的相互關係。生成樣本集的一些非常基本的隨機方法是蒙特卡洛方法的變體。

最簡單的版本是所謂的純蒙特卡洛方法（PMC）。使用這種方法可以很好地模擬自然散佈，但如果樣本量小，統計不確定性相當大。因此，optiSLang提供了最小化相關錯誤的拉丁超立方抽樣（LHS），並且按照Lyrnizis 1998 (第89頁)的方法，用少量的樣本表示預定義的輸入相關性。

基於均值和標準差的估計，安全邊際可以用方程4.1 (第49頁)估算，只有在性能限制是給定的情況下的響應。然而，通過使用基於變異數的魯棒性分析，只有到兩個標準差的安全邊際可以用少量的樣本證明。對於更大的安全邊際（例如六個標準差），真正的失效率可能會有很大變化，因此基於變異數的低失效率估計可能非常不準確。因此，超過三個標準差的安全邊際應通過可靠性分析來證明。

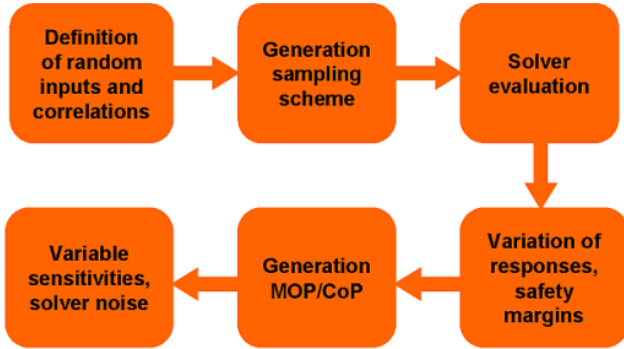
Figure 4.5: Noisy Model Output and Convergence Behavior



Representation of a noisy model output by a smoothing approximation (left) and convergence behavior of the explained variation in the case of a robust and non-robust model (right).

除了反應的變化之外，均值本身可能是關於魯棒性的一個指標，反應的均值變化可以指示確定性參考值、輸入不確定性的影響以及可能的求解器不精確性都是重要的。為了量化響應變化的來源，在optiSLang中進行了基於變異數的靈敏度測量作為響應分析的一部分。為此，應用了最佳預測的元模型中的最佳預測（參見第18頁）。如果求解器輸出包含不可解釋的效果導致數值準確性問題，MOP近似會平滑這些不確定的影響，如圖4.5所示：數值模型輸出和MOP近似之間的對比（第54頁）。如果這是情況，MOP的CoP值可以用來估計因為求解器過早停止而產生的噪聲變化，這個問題應該通過增加樣本量來分析，以提高可解釋性。如果CoP值沒有增加，這則是不可解釋的求解器行為的指標。

Figure 4.6: Flowchart of Variance-Based Robustness Analysis Available in optiSLang



在圖4.6中，展示了optiSLang提供的基於變異數的魯棒性分析的總體流程。基於初始隨機變量的定義，生成並由求解器評估優化樣本。求解器結果用於估計統計特性並進行敏感性分析，藉此幫助MOP近似。如果這些數據不符合魯棒性要求，敏感性指數有助於識別這些輸入變量，在這些變量上減少不確定性對模型響應的變化最為有效。

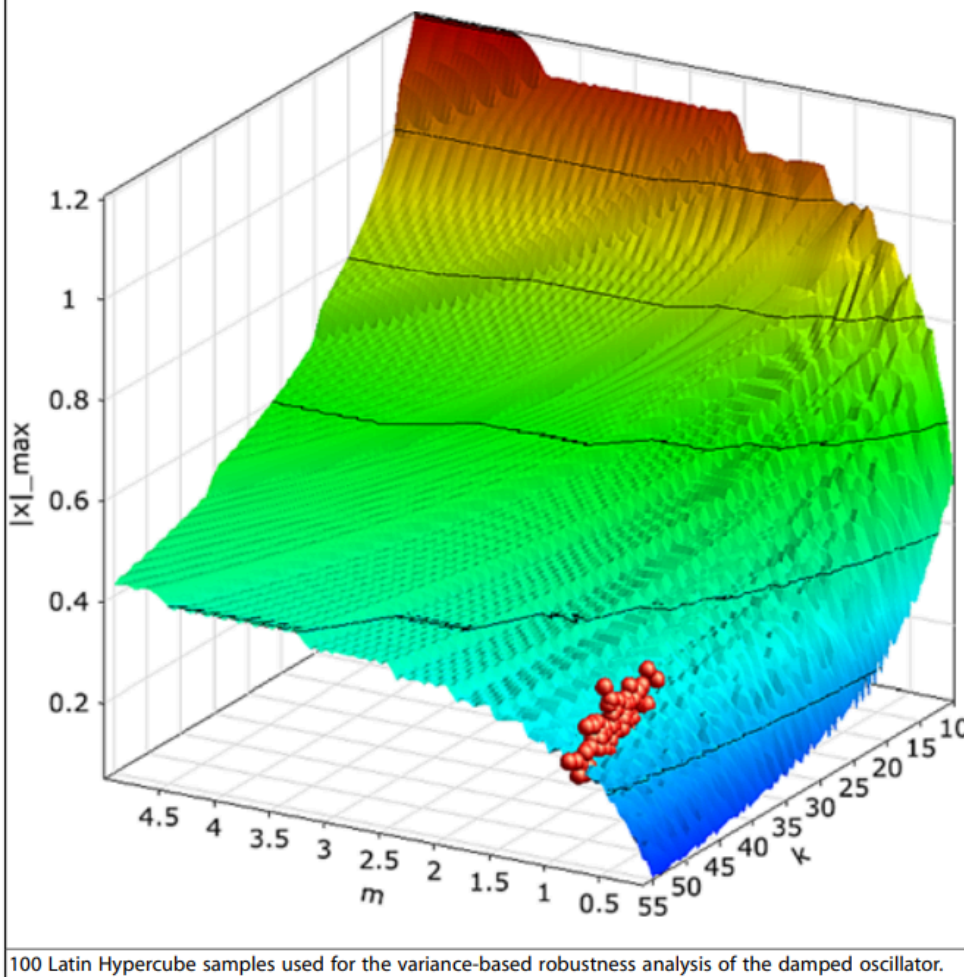
例如，在單目標優化（第27頁）中介紹的被動震盪器的確定性最優點進行了基於變異數的魯棒性評估。質量 m 、彈簧剛度 k 、阻尼比 D 和初始動能 E_{kin} 被認為是獨立的隨機變量。它們的均值和變異系數（CV）如下：

$$\begin{aligned} \mu_m &= 0.78 \text{ kg}, CV_m = 2\%, \mu_k = 50.0 \text{ N/m}, CV_k = 5\% \\ \mu_D &= 0.02, CV_D = 10\%, \mu_E = 10.0 \text{ Nm}, CV_E = 10\% \end{aligned} \quad (4.10)$$

100個拉丁超立方抽樣樣本，如圖4.7所示：被動震盪器的基於變異數的魯棒性分析（第56頁），進行了評估。作為魯棒性要求，均值的安全邊際的特徵頻率至少要等於或大於4.5個標準差，即 $\omega_{limit} = 8.5 \text{ s}^{-1}$ 應該大於或等於4.5個標準差，這相當於正態分佈的失敗概率為 $3.4 \cdot 10^{-6}$ 。此外，模型響應的均值和相對變化以及其解釋的變化被統計評估。

在圖4.8中：使用基於變異數的魯棒性分析獲得的震盪器響應和輸入敏感性的統計特性（第58頁），顯示了震盪器最大幅度和阻尼特徵頻率的統計特性。圖表顯示變異系數的最大幅值是11%，而確定性值（ $|x|_{max}^{opt} = 0.25 \text{ m}$ ）幾乎大一個標準差。這兩個事實可以被解釋為設計在變異方面不夠魯棒的指標。

Figure 4.7: Variance-Based Robustness Analysis of the Damped Oscillator



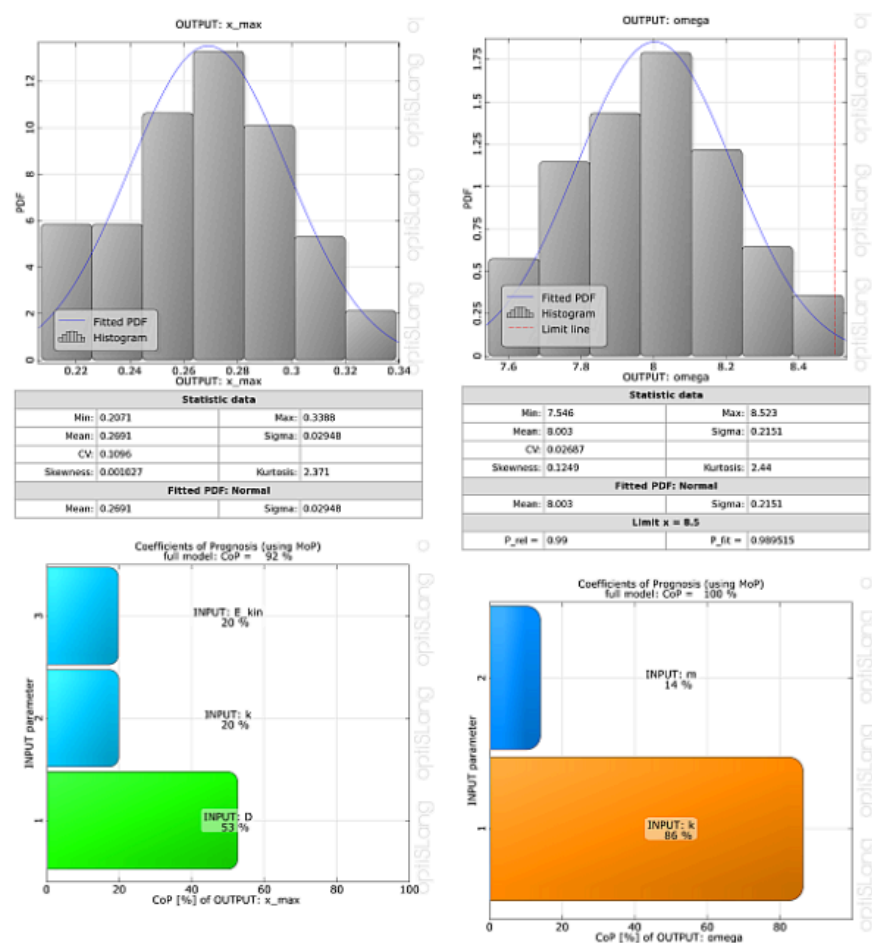
根據MOP基教學分析的結果，阻尼比對最大振幅變化的貢獻最大。預測係數表明了92%的變化可以被解釋，這比最優化變量時得到的99%的CoP要小。由於這個魯棒性分析在本例中考慮的隨機輸入變化比最優化變量的敏感性分析要小得多，模型響應的非線性應該在較小的空間內被減少。CoP的減少在這種情況下表明求解器噪聲的重要性增加，這是由於震盪器響應的粗略時間離散化引起的。對阻尼特徵頻率的統計評估結果在2.7%的CV，這在輸入變化的範圍內。此外，CoP表明這個模型響應有100%的優異可解釋性。然而，所需的4.5西格瑪安全邊際並未達到。給出的均值和標準差可以用來估計這個安全邊際，這只有2.3西格瑪。

從安全要求的角度來看，通過確定性最優化程序找到的設計並未滿足魯棒性標準。在這種情況下，如果輸入不確定性不能被減少，最優解應該被移回到安全區域，直到滿足安全要求為止。這個策略在下一節的強健設計最優化中實現。

4.3. 強健設計最優化

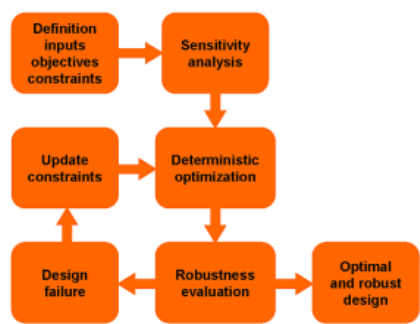
在強健設計最優化 (RDO) 中，CAE模型在考慮魯棒性標準下進行最優化。optiSLang提供了一種迭代的基於變異數的RDO程序。在這個程序中，利用約束條件中的安全因素，實施了確定性最優化。這些安全因素應該選擇得能滿足魯棒性要求。

Figure 4.8: Statistical Properties of the Oscillator Responses and Input Sensitivities Obtained with Variance-Based Robustness Analysis



通常安全因素並非預先知道。在這種情況下，用戶指定一個合適的初始猜測，然後執行初始的確定性最優化。此外，還評估了魯棒性標準。如果魯棒性要求沒有被滿足，最優化設計將被重新找到，然後進行優化器。如果魯棒性要求仍未滿足，將再次調整最優化約束條件並執行確定性最優化程序和相應的魯棒性分析。這個過程將重複進行，直到滿足魯棒性要求為止。在圖4.9中顯示了迭代基於變異數的魯棒性設計最優化流程圖（第59頁），展示了迭代RDO程序的流程圖。

Figure 4.9: Flowchart of Iterative Variance-Based Robustness Design Optimization with optiSLang

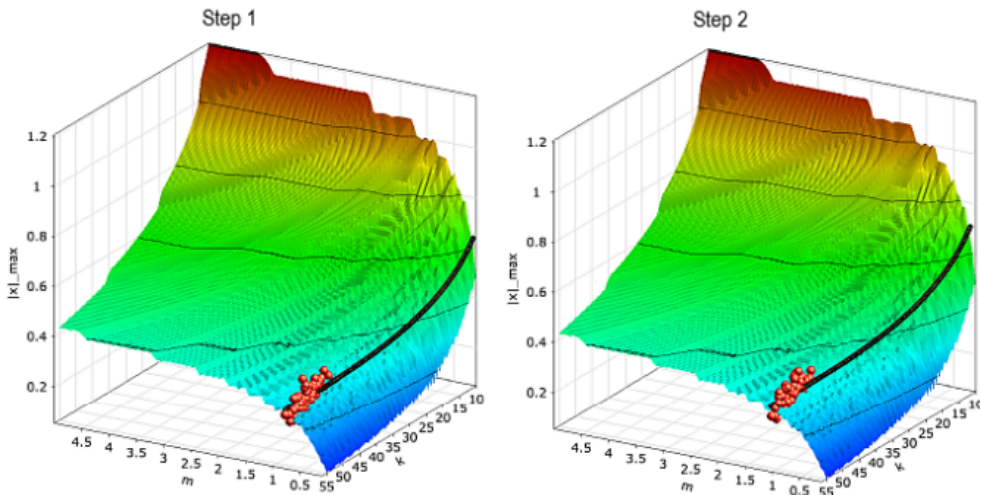


迭代RDO程序通過震盪器示例來說明。在初始魯棒性分析中，已達到2.3西格瑪的安全邊際。下一步，最優化約束條件被調整為

$$\omega_{\text{limit}}^{\text{step2}} = 8.5 - 4.5 \cdot \sigma_{\omega}^{\text{step1}} = 7.6 \tag{4.11}$$

這導致了在圖4.10所示的最優設計：迭代強健設計最優化（第60頁）。通過對100個拉丁超立方抽樣的第二次魯棒性分析，證明了所需的4.5西格瑪安全邊際。在這種情況下，第三步和第四步的值可以通過考慮之前步驟獲得的值和所需的安全邊際線性插值來得到。一般來說，這個程序在可接受的範圍內以三或四次迭代結束，這些迭代最終達到了足夠的設計安全邊際。在某些情況下，這種方法可能非常不準確。在這種情況下，應該進行最終的可靠性分析，以證明所需的概率。

Figure 4.10: Iterative Robust Design Optimization



| Optimization (ARSM) | | | | | | Robustness Analysis (100 LHS) | | |
|---------------------|-------------------|------|------|----------|-------------|-------------------------------|----------------|---------------|
| | Constraint | m | k | ω | $ X _{max}$ | Mean ω | Sigma ω | Safety Margin |
| Step1 | $\omega \leq 8.0$ | 0.78 | 50.0 | 7.99 | 0.250 | 8.00 | 0.21 | 2.33σ |
| Step2 | $\omega \leq 7.6$ | 0.87 | 49.7 | 7.55 | 0.269 | 7.54 | 0.20 | 4.75σ |

使用兩步過程對阻尼震盪器進行迭代強健設計最優化，以獲得 4.5σ 的安全邊際。