

## 第五章 可靠性分析

產品的品質或安全要求必須考慮到散射影響。這些影響可以是外部的（隨機負載或運營條件）或產品本身固有的（如散射材料特性或生產公差）。如果失敗率很低，如同常見於安全考慮中，那麼通常的框架（也是由代碼如Eurocode EN 1990 (第89頁)所建立的）就是概率安全評估。變異性基魯棒性評估，或者稱為西格瑪水平方法（方程4.1，第49頁），可能不夠充分，因為它僅是一維考慮，並且依賴於正態分佈的假設。

在概率安全評估或可靠性分析的框架內，散射影響被模擬為隨機變量，這些變量由分佈類型、隨機矩以及相互關聯性定義（見不確定性定義，第50頁）。分析的結果是可靠性，即失敗概率，這可以在對數尺度上表示。

在接下來的章節中，將首先給出失敗概率的定義。optiSLang提供了多種計算方法，適用於不同的應用範圍，這些方法隨後會被介紹。

### 5.1. 可靠性問題的定義

可靠性分析的首項任務是指定隨機輸入變量及其屬性，即分佈類型、隨機矩和相關性（見不確定性定義，第50頁）和分佈類型（第80頁）。要分析的產品上的失敗標準不一定表示系統的崩潰，任何違反品質、可用性或安全要求的系統狀態都可以如下表述：輸入隨機變量的函數  $g(x)$ ，經過標度化，使其滿足

$$g(x) \begin{cases} < 0 & \text{失敗} \\ \geq 0 & \text{安全} \end{cases} \quad (5.1)$$

被稱為極限狀態函數。 $g(x) = 0$  標志從安全狀態到失敗狀態的轉變，被稱為失敗面（Madsen, Krenk, 和 Lind 1986 (第90頁)）。通常，極限狀態函數不能直接基於輸入隨機變量表述，而是隱含地由系統的模擬結果給出。

這稱為隱含極限狀態。一個典型的例子是  $g(r, s) = r - s$ ，其中  $r$  是抗力（最終壓應力）和  $s$  是結構的計算壓應力。

根據這個定義，所有涉及變量的空間  $\mathbb{R}^n$  可以被分成安全域和失敗域

$$\mathbb{D}_f = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) < 0\} \quad (5.2)$$

#### 附註

這個方程式描述了一個稱為失敗域  $D_F$  的數學概念，其中包含了所有當函數  $g(x)$  的值小於0時的  $n$  維空間  $\mathbb{R}^n$  內的點  $x$ 。

1.  $\mathbb{R}^n$ ：這表示一個  $n$  維的實數空間。在高中數學中，你可能已經熟悉了二維空間  $\mathbb{R}^2$ （即我們在紙上畫圖的平面），以及三維空間  $\mathbb{R}^3$ （如實際生活中的空間）。這裡的  $n$  表示維度是任意的，可以是2維、3維，甚至更高。
2.  $g(x)$ ：這是一個函數，它接受  $\mathbb{R}^n$  空間中的一個點  $x$  作為輸入，輸出一個實數。這個函數是用來判斷某個點  $x$  是否在失敗域內。
3.  $\mathbb{D}_F = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) < 0\}$ ：這是一個集合表示式，它定義了失敗域  $\mathbb{D}_F$ 。這個集合包含了所有使得函數  $g(x)$  的結果小於0的點  $x$ 。簡單來說，如果你把空間  $\mathbb{R}^n$  中的任何一點  $x$  代入函數  $g(x)$ ，並得到一個負數，那麼這個點  $x$  就屬於失敗域  $\mathbb{D}_F$ 。

用高中數學的概念類比，如果  $n = 2$ ，你可以想象這像是在平面上畫一個邊界線，邊界線的一側（例如函數的值小於0的一側）就是失敗域。而  $g(x)$  則像是一條曲線或直線的方程式，它決定了邊界線的形狀和位置。

失敗概率  $P_f$  是事件  $x$  落入失敗域的概率。

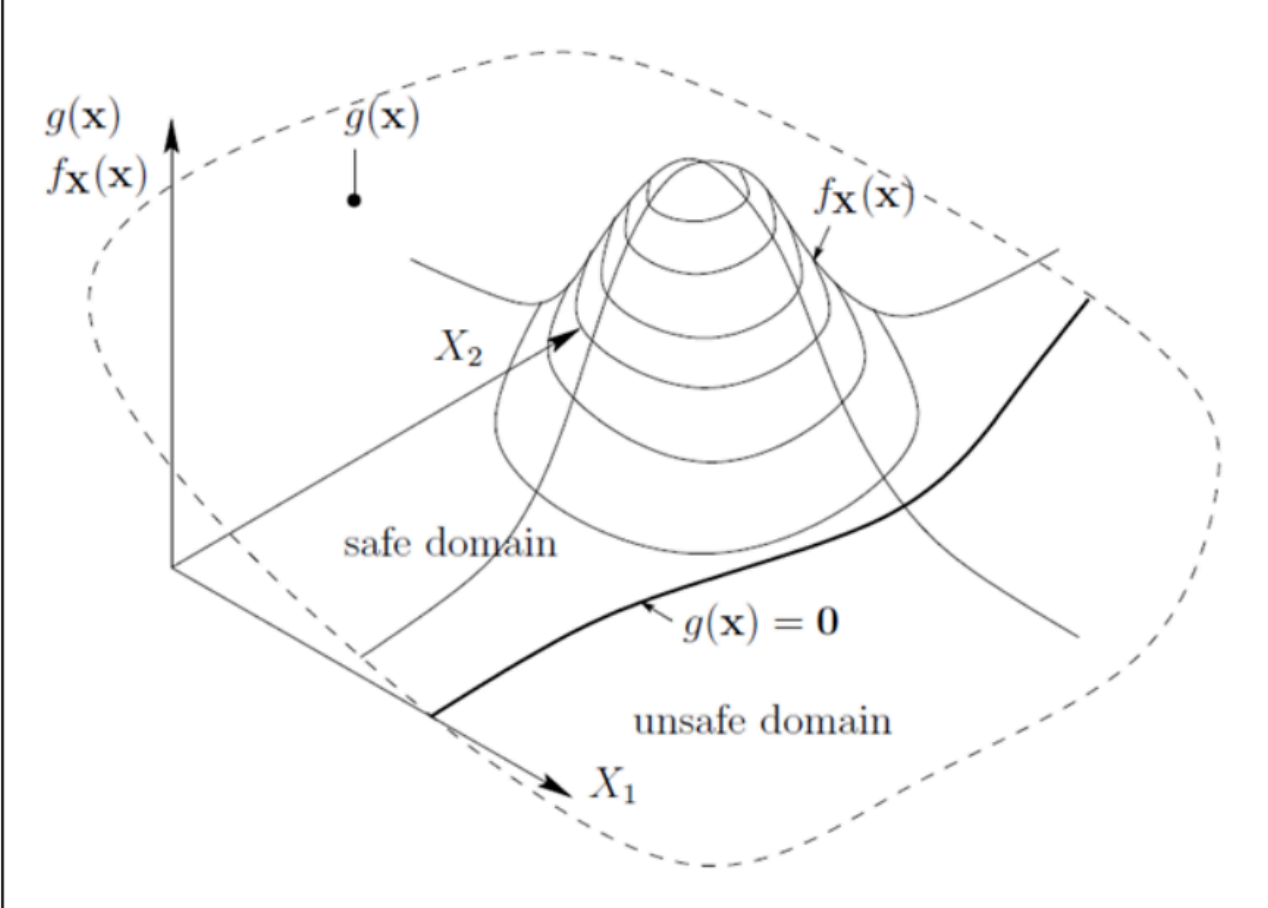
$$P_f = P\{X : X \in \mathbb{D}_f\} = P\{g(X) < 0\} \quad (5.3)$$

失敗域  $D_f$  可以通過對失敗域上所有隨機變量的聯合密度的積分來計算。

$$P_f = \int_{\mathbb{D}_f} \dots \int f_X(x) dx \quad (5.4)$$

圖5.1: 兩維的可靠性問題（第62頁）有助於視覺化這些定義，對於兩個隨機變量的情況。

**Figure 5.1: Reliability Problem in Two Dimensions**



Sketch of the reliability problem in two dimensions.  $f_X(x)$ : joint probability density,  $g(x)$ : limit state function,  $g(x) = 0$ : limit state surface.

極限狀態函數可能包含幾個失敗標準。展示了以下兩個基本情況。一個由幾個部件組成的系統，如果其中一個部件完全失敗，則整個系統失敗，被稱為串聯系統或最弱環系統。（想像一條承受拉力的鏈條。）獨立單一失敗模式的失敗概率定義為

$$P_f = \bigcup_{j=1}^m P_{f_i} \quad (5.5)$$

並且極限狀態函數計算為

$$g(x) = \min_{j=1 \dots m} (g_j(x)) \quad (5.6)$$

相比之下，一個並聯系統具有冗餘性。當所有部件都失敗時系統才失敗。（例如，一條鋼絲繩。）然後

$$P_f = \bigcap_{j=1}^m P_{f_i} \quad (5.7)$$

$$g(x) = \max_{j=1 \dots m} (g_j(x)) \quad (5.8)$$

在optiSLang中設置可靠性分析時，總是先制定安全情況，即  $g(x) > 0$ 。如果極限狀態表中由幾行給出了幾個標準，它們將自動被解釋為串聯系統。

## 5.2. 標準化和生成隨機數

特別是對於涉及多個隨機變量和/或不同失敗標準的問題，適當地縮放變量對於數值穩定性非常重要。通過線性變換

$$Y = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad (5.9)$$

其中  $\mu_X$  和  $\sigma_X$  分別是  $X$  的均值和標準差， $Y$  有平均值為零和標準差為一。對於可能相關的隨機變量的隨機向量  $X$ ，協方差矩陣  $C_{XX}$  必須分解為  $C_{XX} = LL^T$  的形式，例如通過Cholesky算法。然後

$$Y = L^{-1}(X - \mu_X) \quad (5.10)$$

是一個具有零均值、單位標準差和零相關的隨機向量。

許多可靠性算法基於標準化的正態隨機變量  $U$ 。這些由算法生成並且必須轉換回真實世界變量  $X$  以評估帶有隨機輸入的模擬系統。為此，定義邊際分布和相關性以及Nataf模型，如在多變量分布（第52頁）中介紹的，是事先建立的。然後通過對一個實現  $\mu$  應用逆標準化和逆Nataf變換，可以獲得原始空間中的樣本  $x$ 。

#### 附註

Nataf模型是一種用來描述和模擬隨機變數相關性的統計方法。它是一種高級的統計技術，通常用於多變量分析，尤其是在可靠性工程和結構安全評估中。這個模型允許人們考慮隨機變數邊際分布（每個單獨變數的分布）以及變數之間的相關性。

在Nataf模型中，假設你有兩個或多個隨機變數，你不僅知道每個變數本身的分布（例如，一個變數遵循正態分布，另一個遵循均勻分布），而且你還知道這些變數彼此之間的相關性。Nataf模型使用這些信息來創建一個聯合分布，它能描述這些變數共同的行為。

在應用Nataf模型時，通常會先將每個變數標準化，使其有零均值和單位方差。然後，使用Nataf變換來引入變數之間的相關性。這個變換是基於變數的邊際分布和它們的協方差矩陣。最後，可以利用這個模型來生成樣本點，這些樣本點不僅遵循它們各自的分布，而且它們之間的相關性也符合原始變數的相關性。

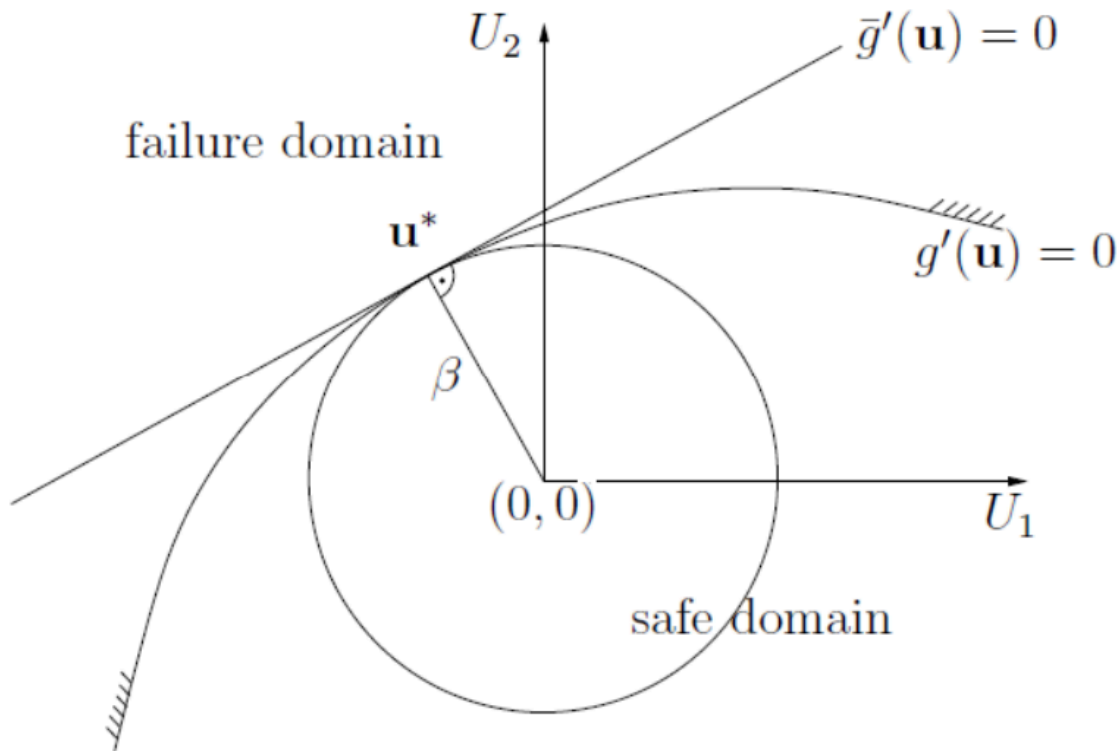
要執行Nataf模型，通常需要複雜的數學計算和數值方法。在工程實踐中，這些計算通常由專門的統計軟件或編程語言中的函數庫來執行。這些技術允許工程師和科學家更準確地評估結構的可靠性和安全性，尤其是在面對多種不確定性因素時。

### 5.3. 一階可靠性方法 ( FORM )

一階可靠性方法或FORM（見Madsen, Krenk, 和Lind的《可靠性指數》1986 (第90頁)）是一個確立的可靠性計算方法（Eurocode EN 1990 (第89頁)）。它提供了一個基於假設和簡化的解析解，因此計算快速，但可能不夠準確。這個方法不提供精度測量（例如，置信水平）。

FORM結果是在標準正態變量  $U$  的空間中定義的，因此需要適當的轉換，見前一節。如果均值向量  $\mu_X$  被轉換，使其與  $U$  空間的原點一致。

**Figure 5.2: Linearisation at the Design Point**



**Table 5.1: Values  $\beta$  For Different Probabilities of Failure**

$P_f$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$
$\beta$	1.28	2.33	3.09	3.72	4.26	4.75	5.20

從 $\mathbf{U}$ 空間原點到變換後失敗表面上任一點的幾何距離  $g(\mathbf{u})$  是一個代表從平均值向量和原始空間失敗表面之間的最短有效距離的指標，以標準差的倍數表示。失敗表面上概率密度最大的點對應於最小距離，這被稱為可靠性指數

$$\beta = \min_{\mathbf{u}|g'(\mathbf{u})=0} \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} \quad (5.11)$$

圖5.2：設計點的線性化（第64頁）說明了這種幾何解釋。因此算法必須找到距離 $\mathbf{U}$ 空間原點最小距離的點。這就是所謂的設計點  $\mathbf{u}^*$ 。它可以通過任何優化算法找到（Bucher 2009 (第89頁)）。

如果在設計點對極限狀態函數進行線性化，相應的失敗概率可以計算為

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (5.12)$$

其中  $\Phi()$  是標準正態累積分佈函數。這個解決方案僅在失敗表面在 $\mathbf{U}$ 空間中是線性的情況下是精確的。

這個方法的成功在很大程度上取決於優化算法的成功，因此相同的要求適用於優化技術本身。如果一個基於優化器應用，極限狀態函數（在 $\mathbf{U}$ 空間）必須是連續的且足夠光滑。設計點必須是唯一的。如果失敗表面在設計點不是線性的，那麼通過線性化計算的失敗概率可能會因為其他不確定性來源的重疊而失真，隨著距離的增加而某種程度上減少。

## 廣義可靠性指數

如果失敗概率是通過FORM以外的任何其他方法計算的，可靠性指數可以通過反演方程5.12（第64頁）來獲得。這所謂的廣義可靠性指數是一個從概率失敗表面的可視化代表性轉換而來的量度。見Madsen, Krenk, 和 Lind 1986 (第90頁) 進一步討論這個主題。表5.1：不同失敗概率的 $\beta$ 值（第64頁）列出了一些典型的 $\beta$ 與  $P_f$  的關係值。

## 5.4. 蒙特卡洛模擬

一個指示函數被引入到方程5.4（第62頁），當系統對於一組隨機參數集處於失敗狀態時，該函數採用值1，否則為0。形式上：

$$I(g(x)) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } g(x) > 0 \\ 1 & \text{如果 } g(x) \leq 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

在將這個指示函數設置到失敗域上的積分中後，積分域可以改變而不影響積分的值。結果表示法表明積分可以被解釋為指示函數  $I(g(x))$  的期望值。

$$P_f = \int \dots \int_{D_f} f_X(x) dx = \int \dots \int_{\mathbb{R}^n} I(g(x)) f_X(x) dx = E[I(g(x))] \quad (5.14)$$

蒙特卡洛模擬的概念非常簡單，只是生成一組隨機向量  $\mathbf{x}_i$ ，將每一組提交為輸入參數集計算極限狀態函數。然後對指示值樣本的平均值進行計算，作為失敗概率的估計值。

$$P_f = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I(g(x_i)) \quad (5.15)$$

在上面， $\mathbf{x}_i$  是樣本大小為  $m$  的第  $i$  次實現。可以證明  $P_f$  是一個無偏估計器。

一個依賴於隨機輸入的估計器本身是一個隨機變量。這個估計器的變異數被定義為 (Rubinstein 1981 (第90頁))

$$\sigma_{P_f}^2 = \frac{P_f - P_f^2}{m} \quad (5.16)$$

變異數越小，估計值越可靠。估計器標準差正規化到樣本大小

$$S_{P_f} = \sqrt{\frac{\sigma_{P_f}^2}{m}} \quad (5.17)$$

也被稱為標準誤差。

普通蒙特卡洛方法是計算失效概率最通用且最穩固的方式，但卻是一個效率低下的方法。所需樣本的大小（以及因此而產生的求解器呼叫數量）不依賴於維度，而是依賴於預期的失效概率。例如，若要計算失效概率為  $P_f = 10^{-3}$  並且希望變異係數為 10% 的情況下，根據方程式 5.16（見第 65 頁），推導出所需的樣本大小為  $m = 10^5$ 。

## 5.5. 重要性抽樣

由於估計器對於  $P_f$  的變異數對應到其信心度，變異數降低技術旨在影響抽樣使得估計器的變異數變小，進而使  $P_f$  的估計更加準確。一種廣泛使用的技術是重要性抽樣。其原理是利用先驗資訊來指導抽樣，如此隨著總樣本數的增加，失敗事件的比例增加。這當然是對統計學的一種故意影響，需要進行修正以確保估計器的無偏性。

抽樣不是遵循預訂的密度  $f_x$ ，而是遵循標記為  $hY$  的抽樣密度。將  $hY/hY$  置入整合公式（方程式 5.14 (頁 65)）不會改變其值，但整體可以被解釋為在人群  $Y$  中的預期值。

$$\begin{aligned} P_f &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} I(g(c(y))) \frac{f_x(y)}{h_y(y)} h_y(y) dy \\ &= E \left[ I(g(c(y))) \frac{f_x(y)}{h_y(y)} \right] \end{aligned} \quad (5.18)$$

現在的估計器包括了修正項，也就是所謂的重要性抽樣權重：

$$P_f = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I(g(c(y_i))) \frac{f_x(y_i)}{h_y(y_i)} \quad (5.19)$$

這個估計器也可以被證明是無偏的且一致的（Rubinstein 1981，頁 90）。

### 5.5.1. 適應性抽樣 ( ADSAP )

已經開發了許多變體，旨在一方面最大限度地減少估計器的變異數，另一方面對於廣泛的應用範圍保持健壯和多樣性。一種這樣的重要性抽樣技術是由 Bucher 在 1988 年提出的適應性抽樣（參見 Bucher 2009 年，第 89 頁）。

該程序涉及數次模擬運行。在第一步中，抽樣密度可能比原始定義的輸入參數有更大的散布。落入失敗域  $D_f : X|g(X) \leq 0$  的樣本在統計上進行評估：結果用於定義多維常態型模擬密度  $h(Y)$  以進行後續的重要性抽樣運行：

$$E[Y] = E[X|g(X) \leq 0] \quad (5.20)$$

$$E[YY^T] = E[XX^T|g(X) \leq 0] \quad (5.21)$$

應進行第三次運行（即第二次適應），以證明結果的穩定性。

理論上 '理想' 的抽樣密度將會將估計器的變異數降至零（Rubinstein 1981 年，第 90 頁），這種程序在第二矩意義上進行了近似。適應性抽樣技術適用範圍廣泛，包括非可導和噪聲限制狀態函數。由於計算協方差矩陣的努力隨著維度  $n$  的增加而呈二次方增長，可能在高維度時變得無效。如果用戶對預期的可靠性指數有所了解，建議使用這個指數作為第一次運行中抽樣標準差的縮放因子。

#### 範例：拋物線

適應性抽樣方法的特性將通過一個簡單的例子來說明。隨機變數為

$$X_1 \sim N(0; 1)$$

$$X_2 \sim N(3; 1)$$

而極限狀態是一個拋物線：

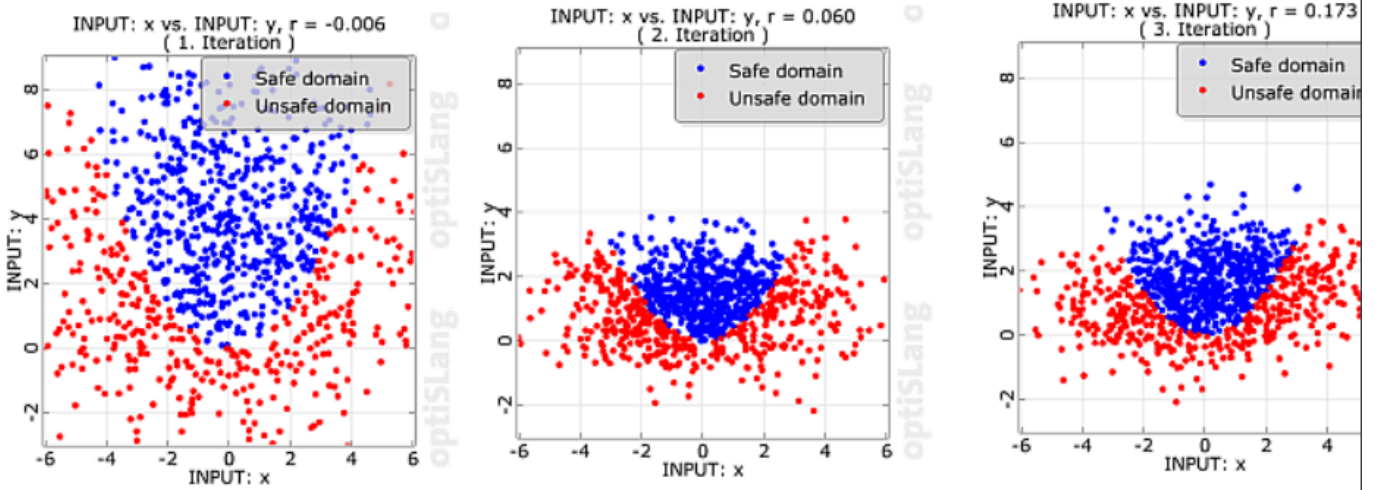
$$g(x) = x_2 - x_1^2/3$$

極限狀態函數是平滑的非線性，設計點不是唯一的。對於適應性抽樣程序在 optiSLang 中，進行了三次含有 1000 個樣本的運行。第一次運行中的標準差被放大了三倍。圖 5.3：拋物線例子：AntHill 圖表顯示出在後續適應性抽樣運行中如何調整抽樣密度（見第 68 頁）。

### 5.5.2. 使用設計點的重要性抽樣 ( ISPUD )

ISPUD 策略（Bourgund 和 Bucher 1986 年，第 89 頁）的目標是將抽樣密度集中在失敗表面上概率密度最高的區域。為此，應用了類似於 FORM（首次可靠度方法）（見第 63 頁）的搜索程序。

**Figure 5.3: Parabola Example: Anthill Plots of Subsequent Adaptive Sampling Runs**



抽樣密度  $h$  有一個由設計點變換回原始空間定義的平均向量。分佈類型、方差和相關性都是從原始隨機參數的定義中獲取的。

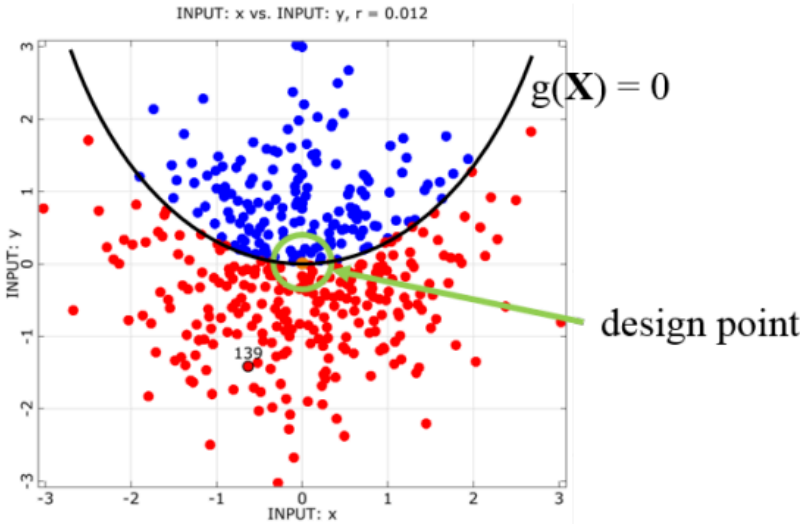
$$E[X] = u^* \quad (5.22)$$

$$C_{yy} = C_{xx} \quad (5.23)$$

圖 5.4：拋物線例子：使用設計點的重要性抽樣的 Anthill 圖顯示了對同一個拋物線例子的 ISPUD 抽樣，就像在適應性抽樣（ADSAP）中介紹的那樣（見第66頁）。

就 FORM 而言，優化步驟的成功對這種方法也至關重要。目前，由於採用基於梯度的非線性規劃（NLPQL）算法，所以極限狀態函數必須足夠光滑，連續，而且所有設計點的信息，如果得不到適當處理，ISPUD 可以克服由於線性化而導致的不準確性，這對 FORM 來說是典型的。

**Figure 5.4: Parabola Example: Anthill Plot of Importance Sampling Using the Design Point**



## 5.6. 方向抽樣（DS）

通過引入分析性偏解來減少失敗概率的估計變異數。這在方向抽樣程序中進行（Deák 1980年，第89頁）（Bjerager 1988年，第89頁）。原始隨機變量被轉換到標準高斯變量的空間中，標準高斯空間中的隨機向量在極坐標中表示為

$$U = R \cdot A \quad (5.24)$$

其中  $A$  是單位向量， $R$  是  $U$  的歐幾里得範數。有了這個，方程式 5.4（第62頁）可以重寫為

$$P_f = \iint f_R(r) f_A(a) r^d r da \quad (5.25)$$



由於標準高斯變量從笛卡爾坐標轉換到極坐標，單位向量  $\mathbf{A}$  在以原點為中心、半徑為1的超球面上均勻分佈。這些半徑  $R$  與  $\mathbf{A}$  是獨立的，並且遵循自由度為  $k$  的卡方分佈  $\chi^2$ ， $k$  是維度。

程序是生成單位向量  $\mathbf{a}$ ，對於每一個通過適當的迭代找到失敗面到原點  $r$  的距離。然後給定方向  $\mathbf{a}_i$  的失敗條件概率計算為

$$P_{[a_i]} = 1 - \chi^2(r_i^2(a_i)) \quad (5.26)$$

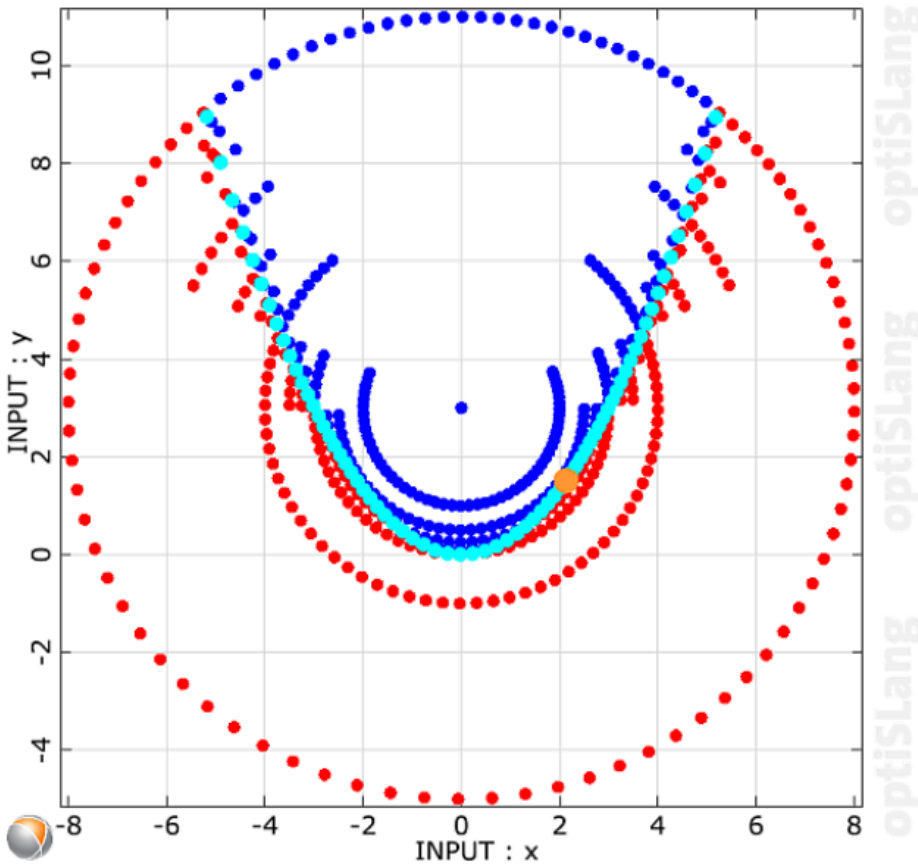
而總失敗概率是條件失敗概率對隨機向量  $\mathbf{A}$  的平均值

$$P_f = E_A[P_f|\mathbf{A}] \quad (5.27)$$

$$\approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{[a_i]} \quad (5.28)$$

方向抽樣的一個基本先決條件是，原始隨機變量  $\mathbf{X}$  的均值向量在每個方向上應該是唯一的，且失敗域應該有其獨特性。失敗應該以一種方式進行表述，使得迭代能夠在失敗域中操作（沒有提前退出求解器）。然而，由於距離增加而導致的單調性減少，一個非獨特的失敗面可能是可以接受的，只要找到最近的  $g'(\mathbf{r}, \mathbf{a}_i) = 0$  的根。

**Figure 5.5: Parabola Example: Anthill Plot of Directional Sampling Procedure**



方向抽樣方法對維度很敏感。它不對平滑性或連續性的限制面施加任何要求。然而，optiSLang 中的實現能夠處理適度數量的不成功求解器呼叫。

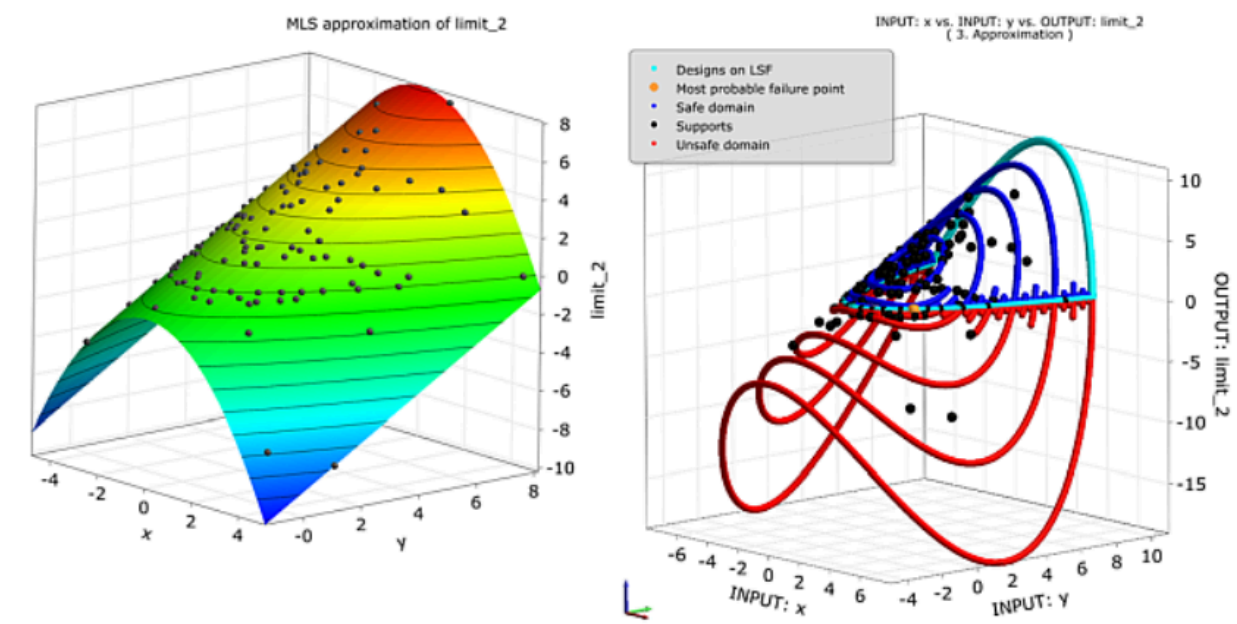
圖 5.5：拋物線例子：方向抽樣程序的 AntHill 圖（第70頁）顯示了在適應性抽樣（ADSAP）中引入的拋物線例子的方向抽樣結果（第66頁）。二分法演算法用於迭代到達失敗面。迭代不會超過到均值向量八個標準差的距離。

## 5.7. 適應性反應面方法（ARSM-DS）用於可靠性分析

在最佳化中，以替代模型取代求解器反應以節省可靠性分析中的求解器呼叫時間似乎是吸引人的，或者為了提供更多的替代模型評估。應該提到，在可靠性分析中相較於最佳化，準確度的要求更高。早期的方法（Faravelli 1989年，第89頁），（Bucher 和 Bourgund 1990年，第89頁）是基於傳統的反應面方法論（RSM），使用系統化的實驗設計（DoE）和多項式迴歸模型。

在當前 optiSLang 實施中，支撐點是由拉丁超立方抽樣在第一步生成的。近似模型是移動最小平方型的，見最佳化預測模型。失敗概率是由方向抽樣計算的，在替代模型上應用。

Figure 5.6: Parabola Example: Response Surface and Directional Sampling Generated by Adaptive Response Surface Procedure



方向抽樣在替代模型的失敗面產生點 ( $x_0=0$ )。假設這些點已經非常靠近"真實"的失敗面。因此，在後續步驟中，這些點通過將輸入值傳遞給求解器並計算相應的反應來更新。移動最小平方模型的靈活性不需要定期的DoE計劃，因為它允許在感興趣的區域，即靠近失敗面的地區進行局部改進。

這種方法的準確度很大程度上依賴於替代模型的質量。它以  $R^2$  預測值計算，通過"留一法"算法。適應性反應面方法證明對於廣泛的應用範圍是非常有效和準確的，但通常，效率隨著維度增加而降低。

??? (第71頁) 展示了拋物線例子 (適應性抽樣 ADSAP, 第66頁) 的移動最小平方模型和蟻丘圖。蟻丘圖展示了反應面的支撐點和方向抽樣程序的樣本。額外的支撐點可以在"設計限制狀態面"附近。

## 5.8 建議使用 Robustness Wizard

表 5.2: 不同合格可靠性方法的應用範圍 (第72頁) 提供了在 optiSLang 中實現的可靠性算法及其應用建議的概覽。

方法	非線性	失效域	參數數量	求解器運行次數
蒙特卡羅模擬	任意	任意	許多	>10^4 (3 sigma)
定向抽樣	任意	任意	<= 10	1000-5000
適應性重要性抽樣	任意	一個主導	<= 10	500-1000
FORM, SORM, ISPUD	單調	一個主導	<= 20	200-500
適應性響應面方法	連續	少數主導	<= 20	200-500

optiSLang 中的 robustness wizard 有助於決定選擇哪種方法。如果使用這個 wizard 的魯棒性分析，需要用戶提供一些信息，如下：

- 不確定性知識: 未知 | 估計 | 合格
- 失敗設計: 無 | 很少 | 經常
- 求解器噪聲: 無 | 一些 | 強
- Sigma 水平: 範圍  $2\sigma$ – $6\sigma$ ，通過滑塊設置

程序已經知道隨機參數和定義的極限狀態數量。回應是給出一個交通燈在算法清單中選擇，見圖 5.7: Robustness Wizard 的對話框 (第73頁)。綠色標記為推薦的方法，紅色則不建議。如果經驗豐富的用戶標記黃色，應謹慎選擇。如果不確定性知識是未知或估計的，則建議的方法是 "Robustness sampling"，即基於變異數的魯棒性分析。



Figure 5.7: Dialog of the Robustness Wizard

Uncertainty knowledge: Qualified

Failed designs: Seldom

Solver noise: Some

Desired sigma level: 2σ 3σ 4,5σ 6σ

► Show additional settings

Robustness / Reliability method

Varianced based

☒

 Robustness sampling

Probability based

☒

 Adaptive Response Surface Method (ARSM-DS)

☐

 Adaptive Sampling (AS)

☐

 Directional Sampling (DS)

☐

 First Order Reliability Method (FORM)

☐

 Importance Sampling using Design Point (ISPUD)

☐

 Monte Carlo Simulation (MCS)

Dialog of the robustness wizard: recommendation of an algorithm dependent on characterization of the robustness task.