(9)

$\vec{v} = (2; 1; 0)$

$\vec{u} = (a; b; c)$ tal que:

$c > 0$; $\|\vec{\mu}\| = 1$; $\measuredangle(\vec{\mu}, \vec{e_1}) = \frac{\pi}{3}$;

$\|proj_{\vec{\mu}} \vec{v}\| = 1$.

$\boxed{proj_{\vec{a}} \vec{b} = \text{comp. vet. do } \vec{b} \text{ paralela a } \vec{a}}$

(1º)

• $\|\vec{\mu}\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$

• $\measuredangle(\vec{\mu}; \vec{e_1}) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \cos \measuredangle(\vec{\mu}, \hat{e}_1) = \frac{1}{2}$

(2º)

$\Leftrightarrow \frac{a}{\|\vec{\mu}\|} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

• $\|proj_{\vec{\mu}} \vec{v}\| = 1 \Leftrightarrow \frac{|\vec{\mu} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{\mu}\|} = 1$

(3º)

1º . 1º

2º . 2º

3º . 3º

i

$\Leftrightarrow \frac{|(\frac{1}{2}; b; c) \cdot (2; 1; 0)|}{1} = 1$

$\Leftrightarrow |1 + b| = 1$

$\Leftrightarrow 1 + b = 1 \vee 1 + b = -1$

$\Leftrightarrow b = 0 \vee b = -2$

- $\vec{\mu} = \left(\frac{1}{2};\ 0;\ c\right)$ ou $\vec{\mu} = \left(\frac{1}{2}; -2; c\right)$

(4º)

$$\|\vec{\mu}\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + c^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{1}{4} + c^2}\right)^2 = (1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + c^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow c^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow c = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\Leftrightarrow c = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$\vec{\mu} = \left(\frac{1}{2};\ 0;\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ ou $\vec{\mu} = \left(\frac{1}{2}; -2; \quad\right)$

Exemplo: $A = (1;\ 2;\ 0)$; $B = (1;\ 0;\ -1)$

$$\vec{AB} = B - A$$
$$= (1-1) + (0-2) + (-1-0)$$
$$= 0 + (-2) + (-1)$$
$$= -3$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

// Exemplo:
(continuação 1°)

Quando termos isto mas só tivermos $\vec{A}$ e $\vec{B}$ fazer $\vec{AB} = B - A$ primeiro

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{5}$$

$$\hat{AB} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\sqrt{5} \to 5 \mid 5$
$1 \mid$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \times (0; -2; -1)$$

$$proj_{\vec{AC}} \vec{AB} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AC}\|^2} \times \vec{AC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab_1 \times ac_1 + ab_2 \times ac_2 + ab_3 \times ac_3}{\|\vec{AC}\|^2} \cdot \vec{AC}$$

Colinear é um reta que passa pelos 3 pontos, ou seja, se forem todos paralelos, são colineares.

$\vec{AB} = -\vec{AC} \rightarrow$ isto é ser paralelo (só 1 exemplo).

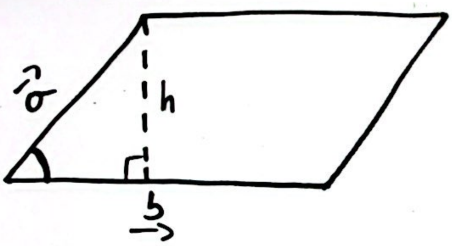
$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \text{Área}_{(\vec{a};\,\vec{b})} = \|\vec{b}\| \times h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{a}\| \sin \measuredangle (\vec{a};\vec{b})$$

$$\boxed{\sin \measuredangle (\vec{a};\vec{b}) = \frac{h}{\|\vec{a}\|} \Leftrightarrow h = \|\vec{a}\| \sin \measuredangle (\vec{a};\vec{b})}$$

"Socatoa"

Produto externo ou vetorial.



$$\boxed{\|\vec{b}\| \cdot \|\vec{a}\| \cdot \sin \measuredangle (\vec{a};\vec{b})}$$

Teorema:

• Sejam $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 / \{\vec{0}\}$ então:

$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$ se e só se $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Propriedades do produto externo:

$\vec{a} \wedge \vec{b} \perp \vec{a}$ e $\vec{a} \wedge \vec{b} \perp \vec{b}$

- anticomutativo;
- não associativo;
- associativo em relação mult. escalar;
- distributivo em relação à adição;

estudar pdf.

$\wedge$	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_2$	$\hat{e}_3$
$\hat{e}_1$	$\vec{0}$	$\hat{e}_3$	$-\hat{e}_2$
$\hat{e}_2$	$-\hat{e}_3$	$\vec{0}$	$\hat{e}_1$
$\hat{e}_3$	$\hat{e}_2$	$-\hat{e}_1$	$\vec{0}$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow (a_2b_3 - a_3b_2 ; -(a_1b_3 - a_3b_1) ; a_1b_2 - a_2b_1)$$

Exercicios - folha 7

(1)

$\vec{a} = (2, -3, 1)$

$\vec{b} = (-3; 1; 2)$

$\vec{c} = (1; 0; 0)$

a) $\vec{a} \wedge \vec{b}$ e $\vec{b} \wedge \vec{a}$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-3\cdot 2 - 1\cdot 1 ; -(2\cdot 2 - 1\cdot(-3)) ; 2\cdot 1 - (-3)\cdot(-$$

$$= (-6 - 1 ; -(4 - (-3)) ; 2 - 9)$$

$$= (-7 ; -7 ; -7)$$

$$\vec{b} \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1\cdot 1 - 2\cdot(-3) ; -((-3)\cdot 1 - 2\cdot 2) ; (-3)\cdot(-3) - 1\cdot 2)$$

$$= (1 - (-6) ; -((-3) - 4) ; 9 - 2)$$

$$= (7 ; 7 ; 7)$$

$\vec{a} \wedge \vec{b}$ e $\vec{b} \wedge \vec{a}$ são anticomutativos.

②

a) $\vec{a} = (1, 0, 2)$

$\vec{b} = (-\frac{5}{2}, 0, -5)$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e_1} & \hat{e_2} & \hat{e_3} \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{5}{2} & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \left(0\times(-5) - 2\times 0 ; -\left(1\times(-5) - 2\times\left(-\frac{5}{2}\right)\right); 1\times 0 - 0\times \dots \right)$$

$$= (0 - 0 ; -5 -(-5) ; 0)$$

$$= (0 ; 0 ; 0)$$

Como $\vec{a} \wedge \vec{b} = (0 ; 0 ; 0)$, podemos dizer que são paralelos.

• Também podemos fazer assim:

$\vec{a} \parallel \vec{b} = \vec{b} = K \cdot \vec{a}, \ K \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (-\frac{5}{2} ; 0; -5) = K (1, 0, 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2} = K \\ 0 = 0 \\ -5 = 2K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K = -5/2 \\ 0 = 0 \\ K = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$\vec{b} = -\frac{5}{2} \vec{a}$ pelo que $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

⑨ $\vec{v} = (2; 1; 0)$

$\vec{u} = (a; b; c)$ tal que:

$c > 0$; $\|\vec{\mu}\| = 1$; $\sphericalangle(\vec{\mu}, \vec{e_1}) = \frac{\pi}{3}$;

$\|proj_{\vec{\mu}} \vec{v}\| = 1$.

$\boxed{proj_{\vec{a}} \vec{b} = \text{comp. vet. do } \vec{b} \text{ paralela a } \vec{a}}$

(1º)

- $\|\vec{\mu}\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$

— // — // —

- $\sphericalangle(\vec{\mu}; \vec{e_1}) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \cos \sphericalangle(\vec{\mu}, \hat{e}_1) = \frac{1}{2}$

(2º)

$\Leftrightarrow \frac{a}{\|\vec{\mu}\|} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

— // — // —

- $\|proj_{\vec{\mu}} \vec{v}\| = 1 \Leftrightarrow \frac{|\vec{\mu} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{\mu}\|} = 1$

(3º)

1º . 1º

2º . 2º

3º . 3º

⋮

$\Leftrightarrow \frac{|(\frac{1}{2}; b; c) \cdot (2; 1; 0)|}{1} = 1$

$\Leftrightarrow |1 + b| = 1$

$\Leftrightarrow 1 + b = 1 \vee 1 + b = -1$

$\Leftrightarrow b = 0 \vee b = -2$

— // — // —

- $\vec{\mu} = \left(\frac{1}{2}; 0; c\right)$ ou $\vec{\mu} = \left(\frac{1}{2}; -2; c\right)$

(4º)

$$\|\vec{\mu}\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + c^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{1}{4} + c^2}\right)^2 = (1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + c^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow c^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow c = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\Leftrightarrow c = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$\vec{\mu} = \left(\frac{1}{2}; 0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ ou $\vec{\mu} = \left(\frac{1}{2}; -2; \quad\right)$

Exemplo: $A = (1; 2; 0)$; $B = (1; 0; -1)$

$$\vec{AB} = B - A$$
$$= (1-1) + (0-2) + (-1-0)$$
$$= 0 + (-2) + (-1)$$
$$= -3$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$
