folha 9

(4)

b) $A \in M_{3\times 4}$; $B \in M_{4\times 3}$; $C \in M_{1\times 3}$

(3 linhas, 4 colunas) (4 linhas, 3 colunas) (1 linha, 3 colunas)

CAB:

1º → produto CA: $C = 1 \times 3$
$A = 3 \times 4$

$CA = 1 \times 4$

2º → produto CA(B): $CA = 1 \times 4$
$B = 4 \times 3$

$CAB = 1 \times 3$, está definido.

(6)

b) $\frac{1}{2}C - 2DB$

$C = 3 \times 3$

$D = 3 \times 2$

$B = 2 \times 3$

$DB = 3 \times 3$

$\frac{1}{2}C - 2DB =$

(=) *

* (=) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(=) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

(=) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ -4 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -5 & -9 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

⑨

$$A = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \; ; \; B = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}} \; ; \; C = \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} \; ; \; D = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\underbrace{\underbrace{\overset{A}{2\times 3} \quad \overset{D}{3\times 2}}_{\Leftrightarrow\; 2\times 2} \quad \overset{B}{2\times 2}}_{\Leftrightarrow\; 2\times 2} \quad \overset{C}{2\times 1} \quad \Leftrightarrow \quad 2\times 1$$

O produto ADBC está definido e é do tipo 2×1

⑩ A e B comutáveis de ordem n.

b) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

$\Leftrightarrow (A+B)(A-B) = A(A-B) + B(A-B)$

$\Leftrightarrow A\cdot A - A\cdot B + B\cdot A - B\cdot B$

$\Leftrightarrow A^2 - AB + AB - B^2$

$\Leftrightarrow A^2 - B^2$

⑪

$\boxed{AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

R: falso.

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ → linha × coluna

$AB = 0 \; ; \; A \neq 0 \; ; \; B \neq 0$

$\boxed{A = 0 \vee B = 0 \Rightarrow AB = 0}$

Verdadeiro, se A e B forem nulas, a sua multip. é nula.

Dizem-se comutáveis quando $AB = BA$

→ folha 10

- Transposição de matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} \quad ; \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

→ Propriedades:

1ª) $(A^T)^T = A$;	2ª) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
3ª) $(A+B)^T = A^T + B^T$;	4ª) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

(Exemplo: $((ABCD)^T = D^T \cdot C^T \cdot B^T \cdot A^T)$, começa sempre no fim)

→ Definições:

$\boxed{: \rightarrow \text{'quando'}}$

- Simétrica : $A^T = A$
- Antisimétrica : $A^T = -A$
- Ortogonal : $A^T A = AA^T = I_n$

!!!

↳ Apenas se aplica para matrizes quadradas.

Exemplo de matriz quadrada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 7 \\ -4 & 7 & 0 \end{bmatrix} ; \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 7 \\ -4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

isto é uma matriz simétrica

Exemplo de Matriz antisimétrica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & -4 \\ -7 & -4 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 7 \\ -2 & -3 & 4 \\ 7 & 4 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

(no entanto isto está errado)

Para estar correto, a sua linha Diagonal tem de ser '0' nas Matrizes Antisimétricas.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -7 \\ -4 & -7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 7 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

Exemplo de matriz ortogonal:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

É simétrica e ortogonal!!

---

(2) A D é antisimétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A \text{ é simétrica}$$

$$B = \begin{bmatrix} 15 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 15 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow B \text{ não é simétrica nem antisimétrica}$$

C = não é quadrada, não é simétrica nem antisimétrica.

③

a)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & -4 \\ -5 & -1 & 3 & -7 \\ 3 & -4 & -7 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & -4 \\ -5 & -1 & 3 & -7 \\ 3 & -4 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

b)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -4 \\ -5 & -1 & 0 & -7 \\ 3 & -4 & -7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 7 \\ -3 & 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

④

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AA^T =$$

$$A^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix} \nearrow \cancel{\begin{matrix} \cos^2\theta & 0 & \sin^2\theta \\ -\sin^2\theta & \theta & \cos\theta \\ 0 & & \end{matrix}}$$

$$\cancel{AA^T = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & -\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin^2\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix}}$$

$$AA^T = \left[\begin{array}{c|c|c} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta & 0 \\ \hline -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0+1+0 \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$