POLITÉCNICO DE LEIRIA | ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO

Departamento de Matemática

Licenciatura em Engenharia Informática - Pós Laboral

Prova Escrita 2 de Álgebra Linear

1.º ano - 1.º sem. - 2022-2023 - Data: 20/01/2023

Duração: 1 h 15 min - Hora: 18 h 30 min

- A prova escrita é sem consulta.
- As respostas devem ser justificadas e os cálculos que efetuar devem ser apresentados com rigor e clareza.
- Não é permitida a utilização de máquina de calcular ou qualquer outro dispositivo eletrónico.
- As notas serão divulgadas até ao dia **06 de fevereiro de 2023**.

PARTE I ([**16.0 val.**])

1. [**4.5 val.**] Considere as matrizes reais A, B, C e X definidas por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & m-1 & 0 \\ -m & 2m & m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}.$$

   (a) [**1.0 val.**] Mostre que $\det(A) = m^2 + 3m$.

   (b) [**2.0 val.**] Para $m = 1$, calcule a matriz Adjunta de A e determine a inversa da matriz A.

   (c) [**1.5 val.**] Aplique a Regra de Cramer para determinar o valor da incógnita w da solução do sistema de equações lineares $BX = C$.

2. [**3.0 val.**] Seja A a matriz real definida por $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) [**1.5 val.**] Mostre que $\lambda = 4$ é valor próprio da matriz A.

   (b) [**1.5 val.**] Tendo em conta a alínea anterior, e sabendo que $\lambda = -2$ é valor próprio da matriz A, **usando o valor do determinante de A**, indique o outro valor próprio de A.

3. **[6.0 val.]** Considere em $\mathbb{R}^4$ o subespaço vetorial real $S = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y - z = 0 \wedge w = 0\right\}$ e os vetores $\mathbf{u} = (0, -1, -1, 0)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{w} = (3, k, 2, 0)$.

   (a) **[1.5 val.]** Determine o valor do parâmetro real k de modo que $\mathbf{w}$ seja combinação linear dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

   (b) **[2.5 val.]** Determine uma base de S e mostre que a dimensão de S é igual a 2.

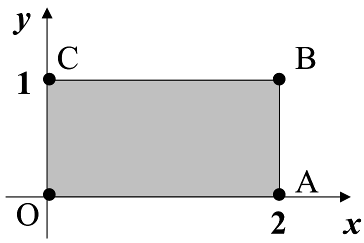
   (c) **[2.0 val.]** Considere $k = 2$. Mostre que $ger\left\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\right\} = S$.

4. **[2.0 val.]** Considere a transformação linear plana $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (-y, -3x)$.

   (a) **[0.8 val.]** Determine o núcleo de T.

   (b) **[0.4 val.]** A transformação T é injetiva? Justifique.

   (c) **[0.8 val.]** Represente geometricamente a imagem por T do retângulo $[OABC]$ ilustrado na figura.



5. **[0.5 val.]** Justifique qual é o valor lógico da seguinte afirmação:

   "Sejam A e B duas matrizes reais de ordem 2. Então $\det(A - B) = \det(A) - \det(B)$."

PARTE II (**[4.0 val.]**)

Os exercícios seguintes são de escolha múltipla. Cada questão apresenta quatro alternativas de resposta, nas quais apenas existe **uma única opção correta**.

Transcreva para a folha de respostas, sem apresentação de cálculos, a única opção correta.

Por cada resposta **correta obtém 0.5 valor e por cada resposta errada terá uma cotação nula.**

---

1. **[0.5 val.]** Sejam $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e tais que $\det(A) = 2$ e $\det(B) = 3$. Então $\det\left(A^2 B^T A^{-1}\right)$ é igual a:

   ► -3. ► $\dfrac{-1}{3}$. ► -24. ► 6.

2. **[0.5 val.]** Sabendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5$, o valor de $\begin{vmatrix} 0 & x & -10 \\ -1 & y & 0 \\ -2 & z & 6 \end{vmatrix}$, com base nas propriedades dos determinantes é:

► 10. ► -10. ► 5. ► 0.

3. **[0.5 val.]** Qual das seguintes matrizes é invertível?

► $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. ► $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ► $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. ► $\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$.

4. **[0.5 val.]** Qual dos seguintes conjuntos é formado por vetores de $M_{1\times3}(\mathbb{R})$ linearmente independentes?

► $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right\}$. ► $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$.

► $\left\{\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right\}$. ► $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \end{bmatrix}\right\}$.

5. **[0.5 val.]** Sejam a, b, c e d vetores de um subespaço vetorial S, tal que $\dim S = 3$. Então podemos ter a certeza que:

► a, b e d são vetores linearmente independentes. ► $ger\,\{a, b, c\} = S$.

► a, b, c e d são vetores linearmente dependentes. ► $\{a, b, c\}$ é uma base de S.

6. **[0.5 val.]** Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Qual dos seguintes conjuntos forma uma base de $\mathbb{R}^3$?

► $\{(0, -1, 0), (2, 1, 0)\}$. ► $\{(0, -1, 0), (0, 1, 0)\}$.

► $\{(0, -1, 0), (2, 1, 0), (2, 0, 0)\}$. ► $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 3, 3)\}$.

7. **[0.5 val.]** Considere a matriz $A = diag(5, 5, 5, 7, 7, -9)$. Podemos ter a certeza que:

► $m_g(5) = 2$. ► $m_g(7) = 2$. ► $2 \leq m_g(5) + m_g(7) \leq 5$. ► $\det(A) > 0$.

8. **[0.5 val.]** A matriz canónica $M_f = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ associada à transformação linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, permite concluir que f é uma:

► Reflexão em relação ao eixo dos xx. ► Dilatação na direção do eixo dos yy.

► Reflexão em relação ao eixo dos yy. ► Rotação de 180^o em torno da origem.