- A prova escrita é sem consulta.
- As respostas devem ser justificadas e os cálculos que efetuar devem ser apresentados com rigor e clareza.
- Não é permitida a utilização de máquina de calcular ou qualquer outro dispositivo eletrónico.
- As notas serão divulgadas até ao dia **27 de janeiro de 2020**.

Parte I ([12.0 val.])

1. **[5.4 val.]** Considere a matriz real definida por $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) **[1.0 val.]** Usando o Teorema de Laplace, mostre que $\det(A - \lambda I_3) = (-1-\lambda)(2-\lambda)^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (b) **[0.6 val.]** Utilizando a alínea anterior, indique os valores próprios de A e as respetivas multiplicidades algébricas.

   (c) **[1.2 val.]** Verifique que o subespaço próprio associado ao valor próprio de maior multiplicidade algébrica é $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y - 2z = 0\right\}$.

   (d) **[1.4 val.]** Determine uma base e a dimensão para o subespaço apresentado na alínea anterior.

   (e) **[1.2 val.]** Determine o elemento da primeira linha e da terceira coluna da matriz adjunta de A.

2. **[5.0 val.]** Considere a transformação linear $T : M_{1\times 4}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}\right) = (3a, b-d, 0)$.

   (a) **[1.6 val.]** Calcule o subespaço gerado pelos vetores linha $u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (b) **[1.4 val.]** Encontre o Núcleo de T e relacione-o com o subespaço obtido na alínea anterior.

   (c) **[0.8 val.]** T é injetiva? Justifique.

   (d) **[1.2 val.]** Apresente a matriz canónica de T.

3. **[1.6 val.]** Analise se o seguinte conjunto é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 0 \wedge z = 0\right\}.$$

Parte II ([8.0 val.])

Os exercícios seguintes são de escolha múltipla. Cada questão apresenta quatro alternativas de resposta, nas quais apenas existe **uma única opção correta**.

Deve assinalar na folha de respostas, sem apresentação de cálculos, a única opção correta.

Por cada resposta **correta obtém 1.0 valor e por cada resposta errada desconta 0.2 valor.**

Se na Parte II obtiver cotação negativa, esta não desconta sobre a Parte I.

4. **[1.0 val.]** Tendo em conta as propriedades dos determinantes, a opção correta é:

(A) $\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ d & 2e & f \\ g & 2h & i \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} d & a & g \\ e & b & h \\ f & c & i \end{vmatrix}.$ **(B)** $\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ d & 2e & f \\ g & 2h & i \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} d & a & g \\ e & b & h \\ f & c & i \end{vmatrix}.$

(C) $\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ d & 2e & f \\ g & 2h & i \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} d & a & g \\ e & b & h \\ f & c & i \end{vmatrix}.$ **(D)** $\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ d & 2e & f \\ g & 2h & i \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} d & g & a \\ f & i & c \\ e & h & b \end{vmatrix}.$

5. **[1.0 val.]** Sejam L, M e N matrizes reais de ordem 2 tais que $|L| = |M| = |N| = 3$. Então o determinante da matriz $4L^{-1}(MN)^T$ obtém-se da forma:

(A) $\left|4L^{-1}(MN)^T\right| = 4\left|L^{-1}(MN)^T\right| = 4\left|L^{-1}\right|\left|(MN)^T\right| = 4\,\frac{1}{|L|}\,|M|\,|N| = 12.$

(B) $\left|4L^{-1}(MN)^T\right| = 4\left|L^{-1}(MN)^T\right| = 4\left|L^{-1}\right|\left|(MN)^T\right| = 4\,|L|\,|M|\,|N| = 108.$

(C) $\left|4L^{-1}(MN)^T\right| = 16\left|L^{-1}(MN)^T\right| = 16\left|L^{-1}\right|\left|(MN)^T\right| = 16\,\frac{1}{|L|}\,|M|\,|N| = 48.$

(D) $\left|4L^{-1}(MN)^T\right| = 16\left|L^{-1}(MN)^T\right| = 16\left|L^{-1}\right|\left|(MN)^T\right| = 16\,\frac{1}{|L|\,|M|\,|N|} = \frac{16}{27}.$

6. **[1.0 val.]** Qual dos seguintes conjuntos de $\mathbb{R}^3$ é constituído por vetores linearmente independentes?

(A) $\{(2,4,0),(-3,-6,0)\}$.

(B) $\{(2,4,-1),(4,0,-2)\}$.

(C) $\{(2,4,0),(4,0,0),(0,0,0)\}$.

(D) $\{(2,4,0),(4,0,0),(1,-1,1),(7,8,-2)\}$.

7. **[1.0 val.]** Considere a base $B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ do espaço vetorial $\mathcal{M}_{1\times 3}(\mathbb{R})$. O vetor $\begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}$ tem coordenadas na base B dadas por:

(A) $(-5,-3,-3)_B$. **(B)** $(5,-3,3)_B$. **(C)** $(-5,3,3)_B$. **(D)** $(-5,-3,3)_B$.

8. **[1.0 val.]** Considere a matriz A de ordem 3 cujos valores próprios distintos são 2 e 4. Sabendo que a multiplicidade geométrica do valor próprio 4 é igual a dois, então $\det(A)$ é igual a:

(A) 32. **(B)** 8. **(C)** 16. **(D)** 10.

9. **[1.0 val.]** Sejam S um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ com $\dim S = 2$ e $\{a,b,c,d\}$ um conjunto de vetores de S. Então podemos garantir que:

(A) $\{a,b\}$ é sempre um conjunto de vetores geradores de S.

(B) $\{a,b,c\}$ é uma base de S.

(C) $\{a,b,c,d\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes.

(D) $\{a,b,c\}$ é um conjunto de vetores linearmente dependentes.

10. **[1.0 val.]** Seja $T : M_{2\times 4}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ com $n < 8$, uma transformação linear sobrejetiva. Então:

(A) T é invertível. **(B)** $0 < \dim N(T) \leq 7$. **(C)** T é injetiva. **(D)** $\dim N(T) = 1$.

11. **[1.0 val.]** Considere as transformações lineares planas descritas por uma rotação, R, de $150^\circ \left(\frac{5\pi}{6} rad\right)$ em torno da origem e por um reflexão, S, em relação ao eixo dos xx. Então a matriz canónica da transformação linear plana $T = S \circ R$ é dada por:

(A) $M_T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$. **(B)** $M_T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$.

(C) $M_T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. **(D)** $M_T = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$.