POLITÉCNICO DE LEIRIA
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO

Departamento de Matemática

$2^{\underline{a}}$ Prova Escrita de Álgebra Linear

Licenciatura em Engenharia Informática (D) - $1.^{\underline{o}}$ Ano

Duração: 1 h 30 min $\quad$ $1.^{\underline{o}}$ Sem. 2023/2024 $\quad$ **17 de janeiro**

- Prova sem consulta.
- Não é permitido o uso de máquinas de calcular (ou qualquer outro dispositivo eletrónico).
- O rigor e a clareza das resoluções são elementos importantes na apreciação das respostas.
- Prazo limite para afixação dos resultados: **15 de fevereiro de 2024**.

---

1. **[4.5 val.]** Considere as seguintes matrizes reais:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2\beta+4 & 1 \\ -1 & -2 & \beta \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -\beta \\ 2\beta \\ \beta-\alpha \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

   (a) **[1.2 val.]** Usando o teorema de Laplace, verifique que $|A| = 2\beta^2 + 4\beta$.

   (b) **[2.0 val.]** Classifique o sistema de equações lineares $AX = B$ para todos os valores de α e de β.

   (c) **[1.3 val.]** Considerando $\alpha = \beta = 1$ calcule, usando a Regra de Cramer, a componente y da solução do sistema $AX = B$.

2. **[1.5 val.]** Sejam A, B e C matrizes reais de ordem 5 tais que $|A| = 3$, B é a matriz que se obtém de A trocando a primeira e a quarta linhas e C é ortogonal. Calcule $|-AC(AC)^TB^{-1}|$.

3. **[5.5 val.]** Considere o subespaço vetorial S de $\mathbb{R}^4$ e a matriz $A \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ definidos por:

$$S = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y - 2w = 0 \wedge z + 2w = 0\right\} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) **[1.5 val.]** Mostre que a dimensão de S é igual a 2.

   (b) **[1.5 val.]** Verifique se o vetor $(7,6,-6,3)$ pertence ao subespaço gerado pelos vetores $u = (1,2,-2,1)$ e $v = (0,-4,4,-2)$.

(c) **[1.0 val.]** Indique os valores próprios de A e as respetivas multiplicidades algébricas.

(d) **[1.5 val.]** Mostre que o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$ é igual a S.

4. **[2.5 val.]** Considere a transformação linear $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b, b+c, c+d)\,.$$

(a) **[1.5 val.]** Determine o núcleo de T, $N(T)$.

(b) **[1.0 val.]** Indique, justificando, se T é injetiva.

Os exercícios seguintes são de escolha múltipla.

Deve transcrever para a folha de respostas, sem apresentação de cálculos, a única opção correta.

Por cada **resposta correta obtém 1.0 valor** e por cada **resposta errada terá uma cotação nula**.

5. **[1.0 val.]** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. A primeira linha da inversa da matriz A é dada por:

✠ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$.

✠ $\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$.

✠ $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

✠ $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

6. **[1.0 val.]** Considere o subconjunto S de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \vee w = 0\right\}.$$

Podemos afirmar que:

✠ S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

✠ S não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ porque $0_{\mathbb{R}^4} \notin S$.

✠ S não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ porque $\exists u, v \in S,\ u + v \notin S$.

✠ S não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ porque $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists u \in S,\ \lambda u \notin S$.

7. **[1.0 val.]** Sejam S um subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com $\dim S = 3$ e $\{a, b, c, d\}$ um conjunto de vetores de S. Então:

   ✠ $\{a, c\}$ é uma base de S.

   ✠ $\{a, b, c, d\}$ é uma base de S.

   ✠ $\{a, b, c\}$ é um conjunto de vetores geradores de S.

   ✠ $\{a, b, c, d\}$ é um conjunto de vetores linearmente dependentes.

8. **[1.0 val.]** Seja $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $|A| = 16$. Considerando que o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 4$ tem dimensão 2, conclui-se que:

   ✠ $m_a(4) = 3$.

   ✠ 2 e 4 são os valores próprios de A.

   ✠ $\mathrm{tr}(A) = 8$.

   ✠ 1 e 4 são os valores próprios de A.

9. **[1.0 val.]** Qual das seguintes transformações lineares planas representa uma rotação em torno da origem?

   ✠ $F(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$.

   ✠ $G(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$.

   ✠ $H(x, y) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$.

   ✠ $I(x, y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$.

10. **[1.0 val.]** Considere as transformações lineares planas $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (4x, y)$ e $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $V(x, y) = (-x, y)$. A matriz canónica da transformação linear plana $H = T \circ V$ é dada por:

    ✠ $M_H = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

    ✠ $M_H = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

    ✠ $M_H = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

    ✠ $M_H = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.