escola superior de tecnologia e gestão
instituto politécnico de leiria

Departamento de Matemática

Álgebra Linear - 1.º ano - 1.º semestre
Engenharia Informática - (D+PL)

Ano letivo: 2018/2019 **Prova Escrita 2**: 29/01/2019 Duração: 1h 15min

- Prova sem consulta.
- Não é permitido o uso de máquinas de calcular.
- O rigor e a clareza das resoluções são elementos importantes na apreciação das respostas.
- Prazo limite para afixação dos resultados: **08 de fevereiro de 2019**.

1. **(5.0 val.)** Considere as matrizes reais A, B e X de parâmetro k:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 2 & 0 & k \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}.$$

   (a) Mostre que $|A| = 4k - 4k^2$.

   (b) Indique, justificando, para que valor(es) de k o sistema de equações lineares $AX = B$ é possível e determinado.

   (c) Considere $k = 2$. Através da Regra de Cramer, determine o valor da componente w da solução do sistema $AX = B$.

2. **(5.0 val.)** Sejam t, u, v e w vetores de $\mathbb{R}^3$ e S o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ dados por:

$$t = (2,0,0), \qquad u = (4,1,-2), \qquad v = (8,2,k+2), \qquad w = (8,7,6) \quad \text{e}$$
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 4y = 0 \wedge 4y + 2z = 0\}.$$

   (a) Calcule uma base para S e mostre que a dimensão de S é igual a 1.

   (b) Determine o valor de k de modo que $[u,v] = S$.

   (c) Para $k = -2$, determine as coordenadas do vetor w na base $\{t,u,v\}$ de $\mathbb{R}^3$.

3. **(1.0 val.)** Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que $\lambda = 0$ é um valor próprio de A se e só se A não é invertível.

4. **(3.0 val.)** Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por:

$$T(a,b,c,d) = \begin{bmatrix} a & a+2b \\ c & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calcule o subespaço imagem de T, $Im(T)$.

   (b) Mostre que $Im(T)$ é gerado pelos vetores do seguinte conjunto:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

   (c) Estude a transformação T quanto à injetividade e à sobrejetividade.

Os exercícios seguintes são de escolha múltipla.

Deve assinalar na folha de respostas, sem apresentação de cálculos, a única opção correta.

Por cada **resposta correta obtém 1.2 valores** e por cada **resposta errada desconta 0.2 valores**.

---

5. **(1.2 val.)** Sejam S um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^6$ com $\dim S = 4$ e $\{a,b,c,d,e,f\}$ um conjunto de vetores de S. Então:

   (A) $\{a,b,c\}$ é uma base de S.

   (B) $\{a,b,c,d,e,f\}$ é uma base de S.

   (C) $\{a,b,c,d\}$ é um conjunto de vetores geradores de S.

   (D) $\{a,b,c,d,e\}$ é um conjunto de vetores linearmente dependentes.

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

   (a) **(1.2 val.)** Podemos concluir que:

   (A) 5 é valor próprio de A com multiplicidade algébrica 1.

   (B) -3, 1 e 5 são os valores próprios de A.

   (C) 5 é valor próprio de A com multiplicidade geométrica 2.

   (D) 1 e 5 são os valores próprios de A.

   (b) **(1.2 val.)** O conjunto dos vetores próprios de A associados ao valor próprio 5 é:

   (A) $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$.

   (B) $\{(0,x) : x \in \mathbb{R}\}$.

   (C) $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \setminus \{(0,0)\}$.

   (D) $\{(0,x) : x \in \mathbb{R}\} \setminus \{(0,0)\}$.

7. **(1.2 val.)** Qual das seguintes transformações lineares planas representa uma rotação em torno da origem?

(A) $F(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$.

(B) $G(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$.

(C) $H(x,y) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$.

(D) $I(x,y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$.

8. **(1.2 val.)** Considere as transformações lineares planas $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (x, 3y)$ e $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $V(x,y) = (-x,-y)$. A matriz canónica da transformação linear plana $H = T \circ V$ é dada por:

(A) $M_H = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

(B) $M_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

(C) $M_H = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(D) $M_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.