

Pénzváltás probléma

Polonkai Dávid (GPNWZT)

Miskolci Egyetem

2022

Pénzváltás probléma

- ▶ Egy pénzösszeget milyen módon tudunk elérni kisebb címletekből?
- ▶ Hátizsák feladat speciális esete
- ▶ Dinamikus programozással megoldható (részekre bontás)

Hátizsák feladat

Túrázni megyünk. Miket vigyünk a túrára a hátizsákunkba?

Legyen n a lehetséges tárgyak száma.

B a teherbírásunk.

Legyen a_1, a_2, \dots, a_n a tárgyak súlya.

Legyen c_1, c_2, \dots, c_n a tárgyak értéke (hasznossága)

x_j (0 vagy 1), a j . tárgyat a hátizsákba helyezzük vagy sem.

Feltételek:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq B$$

Tehát a nálunk található tárgyak a lehető leghasznosabbak legyenek, de a tömegük ne haladja meg a teherbírásunkat.

Pénzváltás probléma

Egy pénzösszeget akarunk pontosan kifizetni egy adott pénzrendszer címleteivel úgy, hogy minimális számú pénzdarabot használunk fel.

n a pénzrendszer címleteinek a száma.

Legyen a_1, a_2, \dots, a_n az egyes címletek értékei.

Legyen B a kifizetendő összeg.

x_j egész szám a j címelet darabszámát mutatja.

Feltételek:

$$\sum_{j=1}^n x_j \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j = B$$

Tehát a lehető legkevesebb címlettel fizessük ki a B összeget.

Pénzváltás probléma

Létezik-e megoldás?

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ a címletek halmaza.

b egy pozitív egész szám.

$\sum_{a \in S} a = B$, ahol $S \subseteq A$.

Megjegyzés: a címletek csak egyszer használhatóak fel, tehát x_j 0 vagy 1 lehet, és tetszőleges egész számok lehetnek.

Létezik-e megoldás

Egy megoldás:

$$B = a_{i_1} + \dots + a_{i_k}, i_1 < \dots < i_k$$

Ekkor

$$B - a_{i_k} = a_{i_1} + \dots + a_{i_{k-1}}$$

megoldása lesz annak a feladatnak, amelyben a felváltandó érték: $B - a_{i_k}$, felváltásához legfeljebb $(a_1, \dots, a_{i_{k-1}})$ címleteket használhatjuk.

Részproblémákra bontás

Minden (X, i) ($1 \leq X \leq B, 1 \leq i \leq n$) számpárra, X felváltható-e az első a_1, \dots, a_i pénzzel.

$V(X, i) = \text{Igaz}$, ha az első i pénzzel előállítható.

$V(X, i) = \text{Hamis}$, ha az első i pénzzel nem állítható elő.

Részproblémák eredménye (Rekurzív megoldás)

$$V(X, i) \Leftrightarrow \begin{cases} X = a_i \vee \\ i > 1 \wedge V(X, i - 1) \vee \\ i > 1 \wedge > a_i \wedge V(X - a_i, i - 1) \end{cases}$$

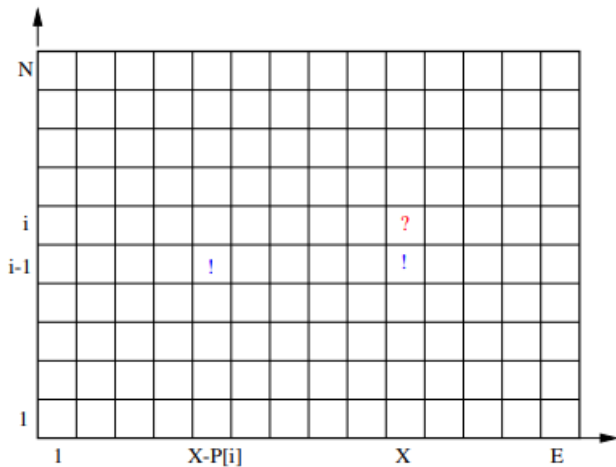
Részproblémák eredménye (Táblázatos módszer)

Kiszámítási sorrend módosítása, hogy először azokat számoljuk ki, amelyek szükségesek a későbbi számításokhoz.

(X, i) probléma összetevői: $(X, i - 1)$ és $(X - a_i, i - 1)$

Ezért a következő táblázatot soronként alulról felfele, balról jobbra töltjük ki.

Táblázat



1. ábra. A pénzváltás táblázata

A Pénzváltás probléma, egy felváltás előállítása

Megoldás csak akkor létezhet, ha az aktuális problémára nézve $V[B, n] = \text{Igaz}$.

Keressük azt a legkisebb i értéket, amelyre $V[B, i] = \text{Igaz}$, tehát $V[B, i - 1] = \text{Hamis}$.

Ebből tudjuk, hogy a_i pénz szerepel a B -ben.

Folytatva ezt a folyamatot $B - a_i$ -re és $i - 1$ -re, azaz $V[B - a_i, i - 1]$ -re addig, amíg $B = 0$ -t nem kapunk.

Optimális pénzváltás

Az előző diában bemutatott mohó stratégia nem optimális, mivel $8 = 5+1+1+1$ eredményt adna.

Az optimális megoldáshoz a már előzőleg bevezetett részproblémákra bontást alkalmazzuk.

Minden (X, i) ($1 \leq X \leq B, 1 \leq i \leq n$) számpárra, legkevesebb hány pénz összegeként lehet az X -et előállítani legfeljebb az első i $\{a_1, \dots, a_i\}$ pénz felhasználásával. Ha nincs megoldás, akkor legyen $n + 1$.

A probléma optimális megoldása: $Opt(X, i)$ Az optimális megoldás értéke: $X = 0$ -ra és $i = 0$ -ra, $Opt(X, 0) = n + 1$ és $Opt(0, i) = 0$. Mindezek alapján az alábbi rekurzív összefüggés írható fel

Optimális pénzváltás

$$Opt(X, i) = \begin{cases} \infty & \text{ha } i = 0 \wedge X > 0 \\ 0 & \text{ha } X = 0 \\ Opt(X, i - 1) & \text{ha } X < a_i \\ \min(Opt(X, i - 1), \\ 1 + Opt(X - a_i, i - 1)) & \text{ha } X \geq a_i \end{cases}$$

Optimális pénzváltás

Az előző rekurzív kifejezést, szintén táblázatba tudjuk foglalni, mivel $Opt(X, i)$ -nek legfeljebb $Opt(X - a_i, i - 1)$ -re vagy $Opt(X, i - 1)$ -re van szüksége.

A táblázatból a felváltás előállítását, a már bemutatott módszer módosításával hajthatjuk végre.

Optimális pénzváltás, egy optimális felváltás előállítás

Megoldás csak akkor létezhet, ha az aktuális problémára nézve $V[B, n] < \infty$.

Keressük azt a legkisebb i értéket, amelyre $V[B, i] \rightarrow \min$, tehát $V[B, i - 1] > V[B, i]$ (hiszen $a_i > a_{i-1}$).

Ebből tudjuk, hogy a_i pénz szerepel a B optimális felváltásában.

Folytatva ezt a folyamatot $B - a_i$ -re és $i - 1$ -re, azaz $V[B - a_i, i - 1]$ -re addig, amíg $B = 0$ -t nem kapunk.

Megoldás csak akkor létezhet, ha az aktuális problémára nézve $V[B, n] < \infty$.

Keressük azt a legkisebb i értéket, amelyre $V[B, i] \rightarrow \min$, tehát $V[B, i - 1] > V[B, i]$ (hiszen $a_i > a_{i-1}$).

Ebből tudjuk, hogy a_i pénz szerepel a B optimális felváltásában.

Folytatva ezt a folyamatot $B - a_i$ -re és $i - 1$ -re, azaz $V[B - a_i, i - 1]$ -re addig, amíg $B = 0$ -t nem kapunk.

Felhasznált irodalmak

1. Horváth Gyula Szegedi Tudományegyetem Természettudományi és Informatikai Kar Algoritmizálás jegyzet
2. Dr. Házy Attila: Nemlineáris optimalizálás. (elektronikus jegyzet)
3. J. W. Wright. 1975. The Change-Making Problem. J. ACM 22, 1 (Jan. 1975), 125–128. <https://doi.org/10.1145/321864.321874>

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!