

Estructura estelar de objetos compactos con una ecuación de estado numérica

Propuesta trabajo de grado

David Ramos

Escuela de Física
Facultad de Ciencias
Universidad Industrial de Santander

Director: Luis Núñez

Contenido

- 1** Formación y evolución estelar
- 2** Objetos compactos
- 3** Estructura estelar
- 4** Composición de estrellas de neutrones
- 5** Condiciones de aceptabilidad
- 6** Planteamiento del problema
- 7** Objetivos
- 8** Metodología

Formación estelar



Barnard 68. Fuente: ESO



Nebulosa del águila. Fuente: HST

Evolución estelar

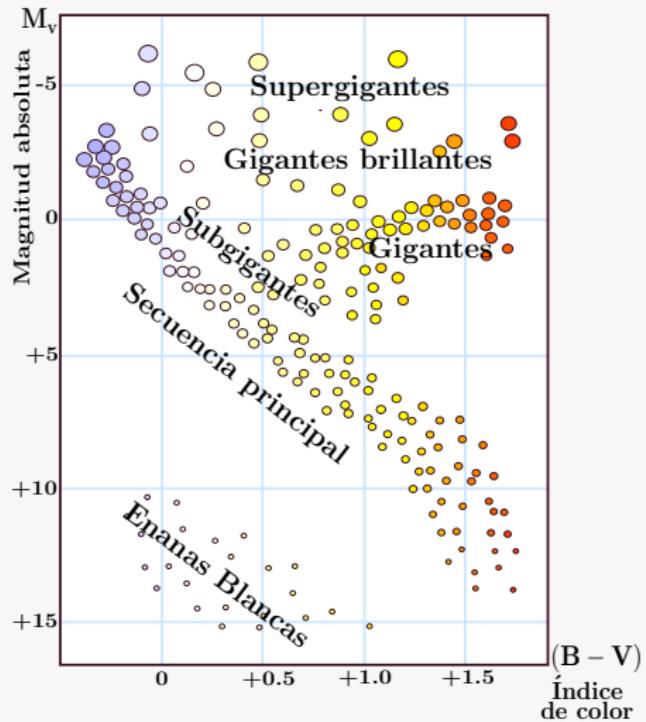
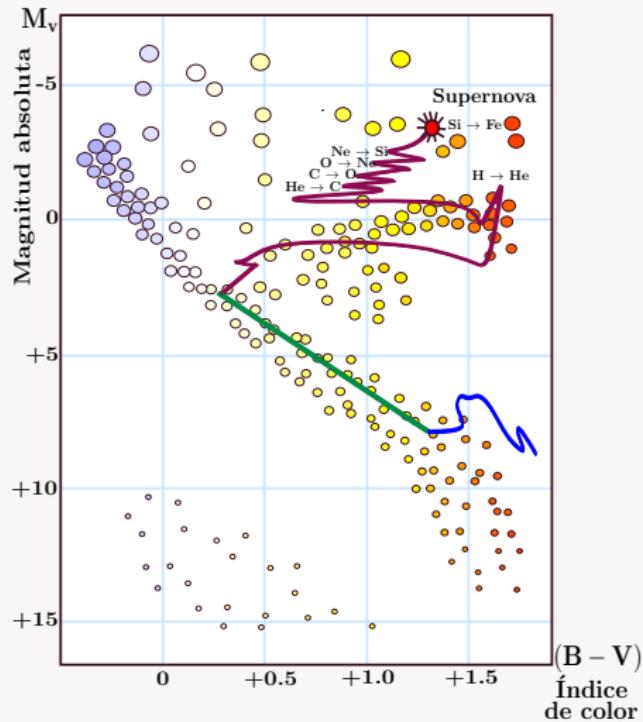


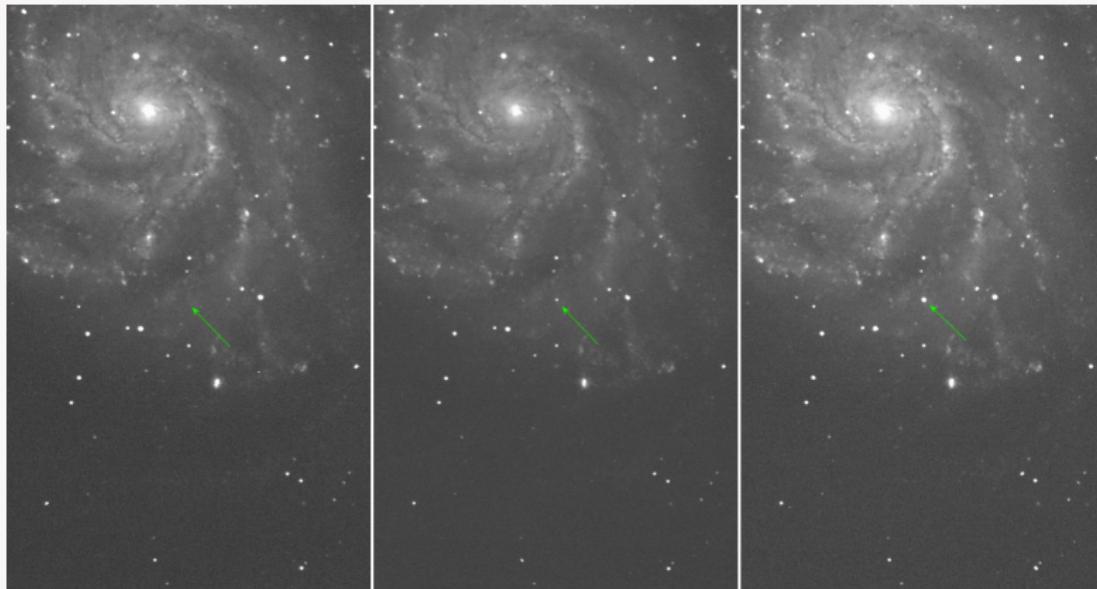
Diagrama de Hertzsprung-Russell. Fuente: commons.wikimedia.org/wiki/File:H-R_diagram.svg

Trayectorias evolutivas



Trayectorias evolutivas

Supernovas



SN 2011fe (Agosto 23, 24 y 25). Fuente: Supernova 2011fe from an Exploding Carbon-Oxygen White Dwarf Star. Nugent et al.

Energía liberada en una supernova

Colapso del núcleo de hierro \Rightarrow Energía potencial gravitacional es liberada \Rightarrow Explosión de la estrella

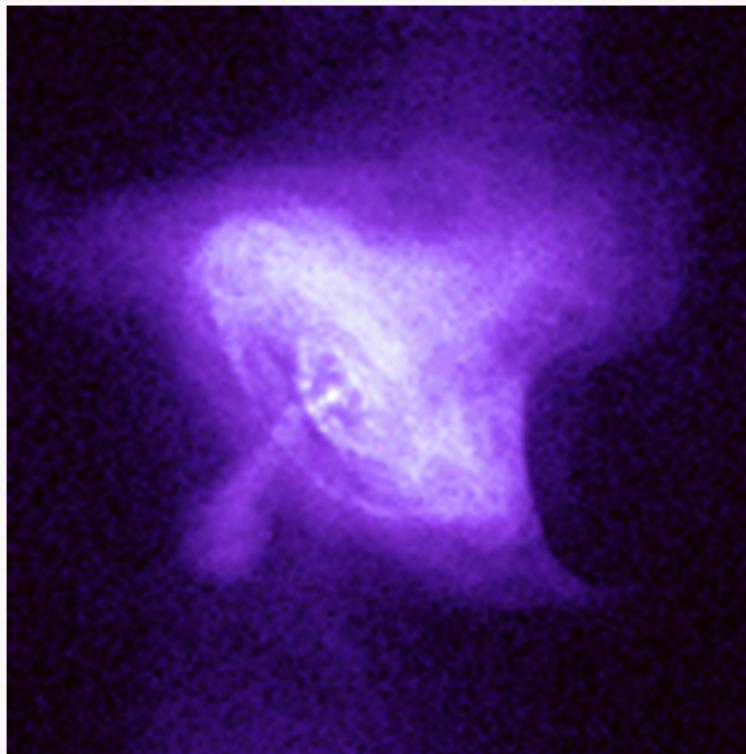
Si el núcleo tiene masa inicial M_c y el radio pasa de R_n a R_{nc} , con $R_n \gg R_{nc}$

$$\Delta E_{\text{grav}} = -GM_c^2 \left(\frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_{nc}} \right) \approx \frac{GM_c^2}{R_{nc}}, \quad (1)$$

usando $M_c \approx 1.5M_\odot$, $R_c \approx 10^4 \text{ km}$ y $R_{nc} \approx 20 \text{ km}$

$$\Delta E_{\text{grav}} \approx 3 \times 10^{46} \text{ J}. \quad (2)$$

Estrellas de neutrones



Nebulosa del cangrejo, Rayos X. Fuente: Chandra X-Ray Observatory

Condiciones extremas

Modelo canónico de una estrella de neutrones:

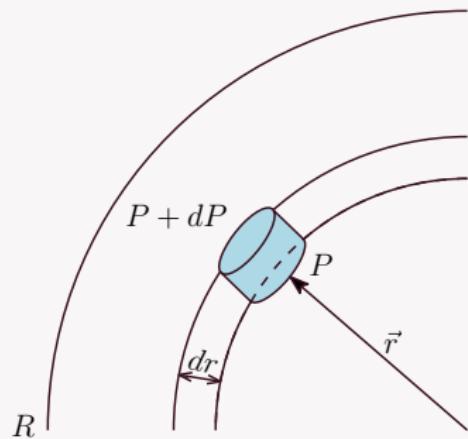
$$M = 1.4 M_{\odot}, \quad R = 10 \text{ km}, \quad r_g = 4.13 \text{ km}, \quad (3)$$

con esto

$$g = \frac{GM}{R^2 \sqrt{1 - r_g/R}} = 2.43 \times 10^{14} \text{ cm s}^{-2}, \quad (4)$$

$$\rho_{prom} = 6.68 \times 10^{17} \text{ g cm}^{-3} > \rho_0 = 2.3 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}. \quad (5)$$

Equilibrio hidrostático



Fuerza por diferencia de presión

$$F_{\text{Pelem}} = -dP dA.$$

Fuerza ejercida por la masa interior

$$F_{\text{atracc}} = \frac{Gm(r)\rho dA dr}{r^2}.$$

Para el equilibrio requerimos

$$-dP dA = \frac{Gm(r)\rho dA dr}{r^2}. \quad (6)$$

Ecuaciones de estructura newtonianas

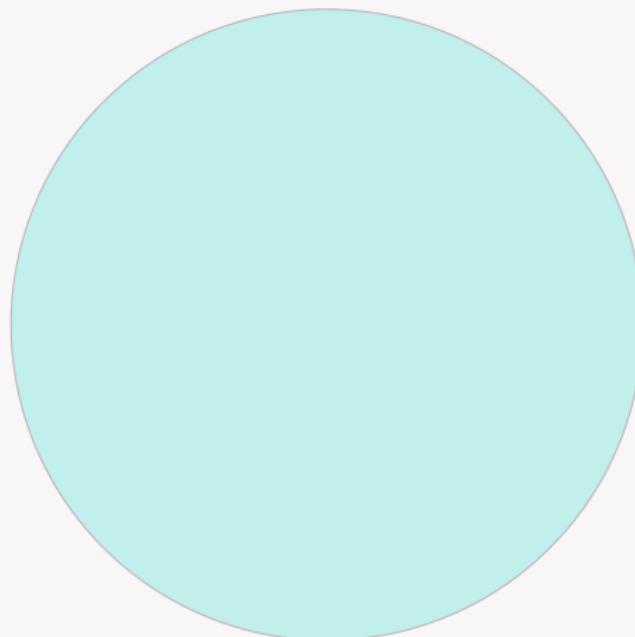
Masa encerrada entre dos cascarones separados infinitesimalmente

$$dm(r) = 4\pi r^2 \rho dr.$$

Re escribiendo los dos resultados:

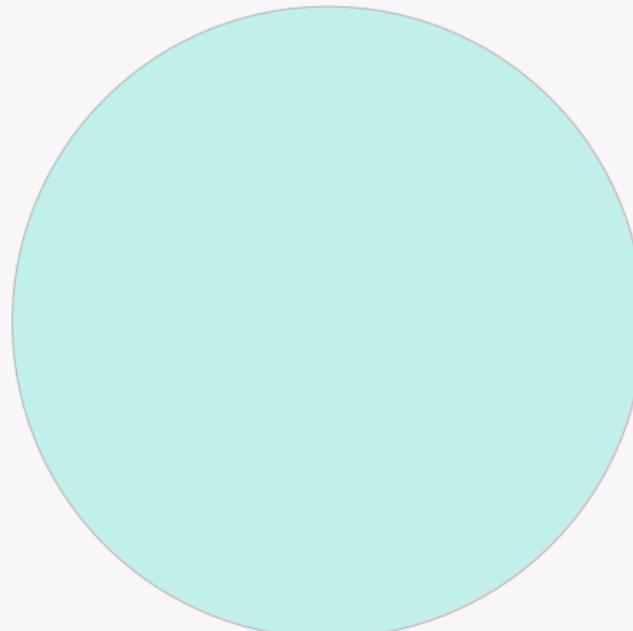
Ecuaciones de estructura
$$\begin{cases} \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, & (7a) \\ \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \rho. & (7b) \end{cases}$$

Algo de Relatividad General



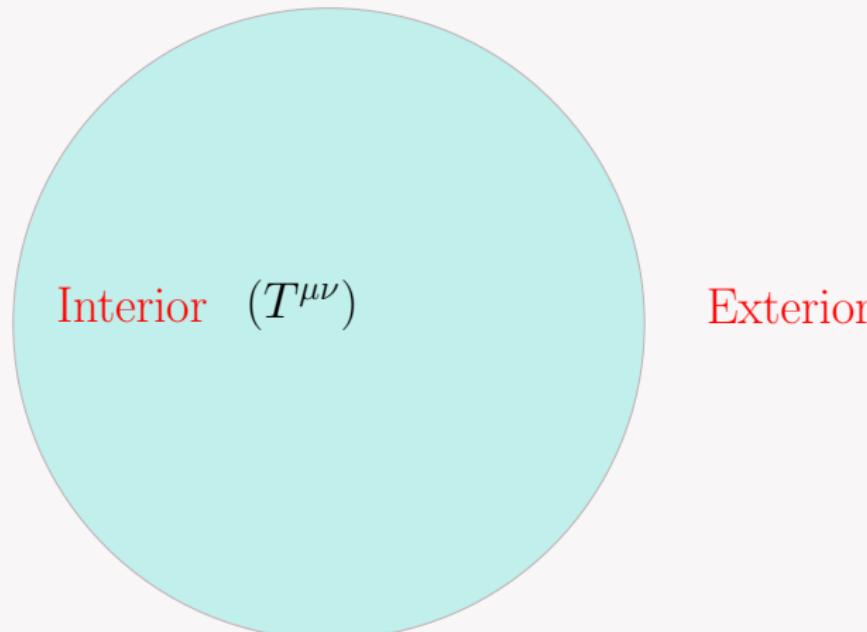
Algo de Relatividad General

Estático, estacionario esféricico $\Rightarrow ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$



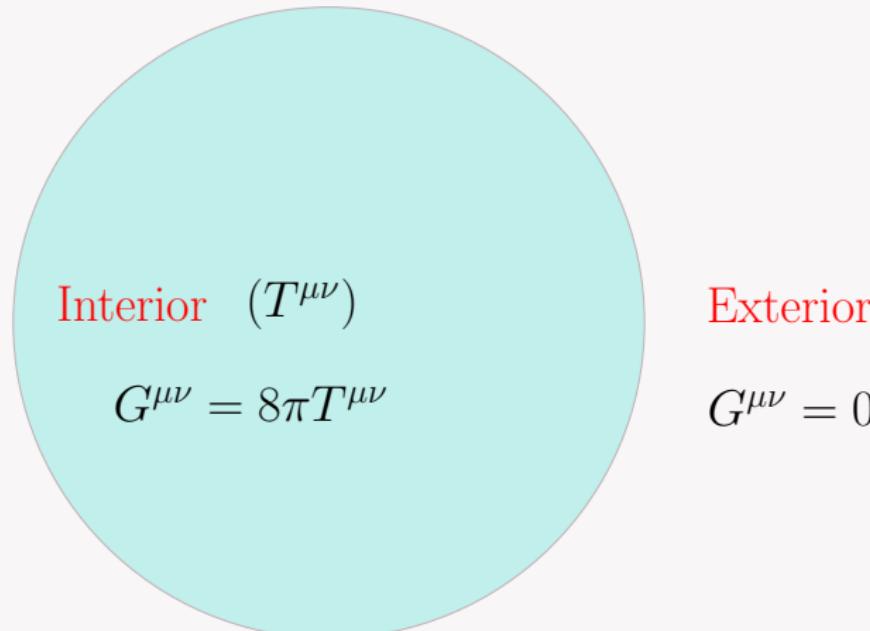
Algo de Relatividad General

Estático, estacionario esféricico $\Rightarrow ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$



Algo de Relatividad General

Estático, estacionario esférico $\Rightarrow ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$



Solución exterior

De las ecuaciones de Einstein,

$$G_{\mu}^{\nu} = R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}R = 0, \quad (8)$$

se obtiene

$$e^{2\nu} = 1 - \frac{2M}{r} \quad \text{y} \quad -e^{2\lambda} = -e^{-2\nu} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad (9)$$

la métrica para $r > R$ será entonces

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (10)$$

Solución interior

Modelando la estrella como un fluido ideal

$$T_0^0 = \rho(r), \quad T_i^i = -P(r) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (11)$$

las ecuaciones de Einstein,

$$G_{\mu}^{\nu} = R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}R = 8\pi T_{\mu}^{\nu}, \quad (12)$$

se convierten en

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \\ \frac{dP}{dr} = - \frac{(P + \rho)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)}, \end{array} \right. \quad (13a)$$

Ecuaciones de TOV

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \\ \frac{dP}{dr} = - \frac{(P + \rho)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)}, \\ \frac{d\nu}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)}, \end{array} \right. \quad (13b)$$

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)}, \quad (13c)$$

donde se definió la función de masa o masa de Misner

$$m(r) \equiv 4\pi \int_0^r \rho(r)r^2 dr. \quad (14)$$

Interpretación física

Re-escribiendo el gradiente de presión

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2}\rho \left[1 + \frac{P}{c^2\rho}\right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 P}{mc^2}\right] \left[1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right]^{-1}, \quad (15)$$

Si $c^2\rho \gg P$, $mc^2 \gg 4\pi r^3 P$ y $\frac{2Gm}{c^2 r} \ll 1$:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2}\rho. \quad (16)$$

Resolviendo el sistema

Las ecuaciones de TOV son un IVP

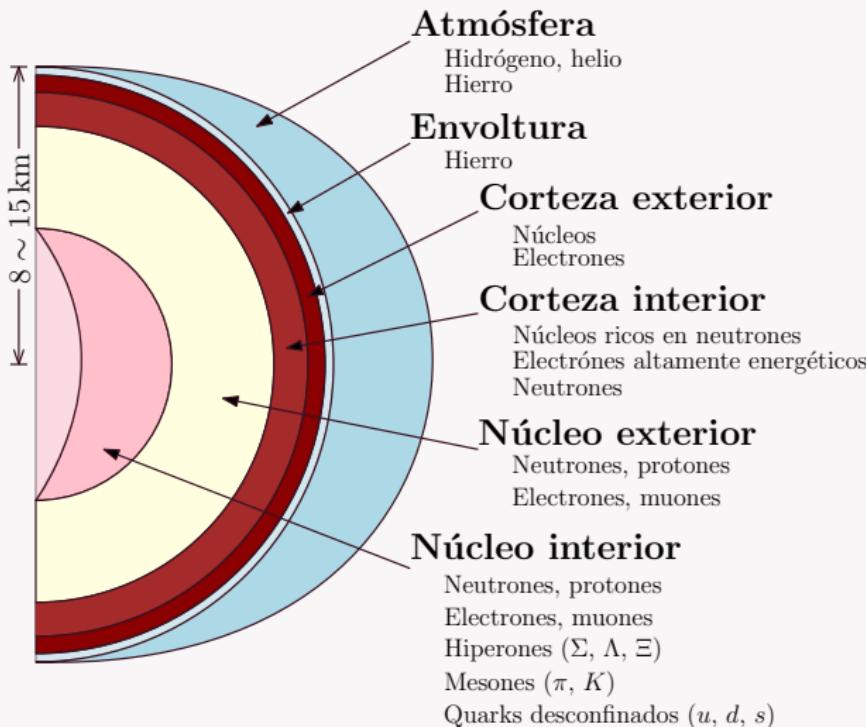
$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \quad \longrightarrow \quad m(0) = 0$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(P + \rho)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)} \quad \longrightarrow \quad P(0) = P_c$$

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)} \quad \longrightarrow \quad \nu(0) = cte$$

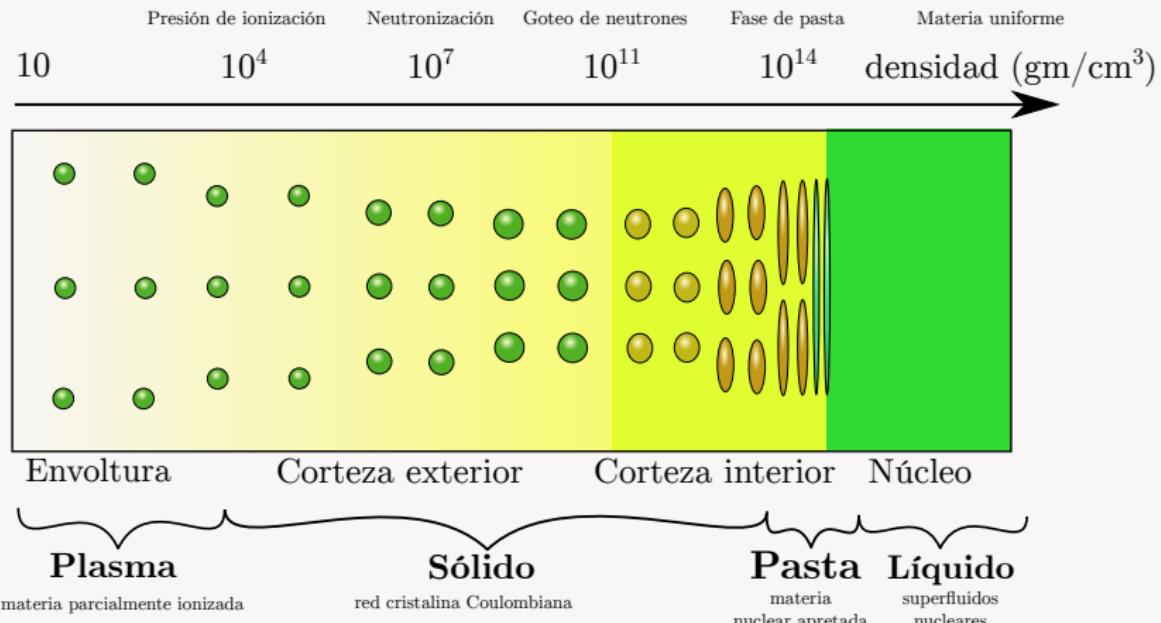
Pero... necesitamos una ecuación de estado $P(\rho)$.

Composición de una estrella de neutrones



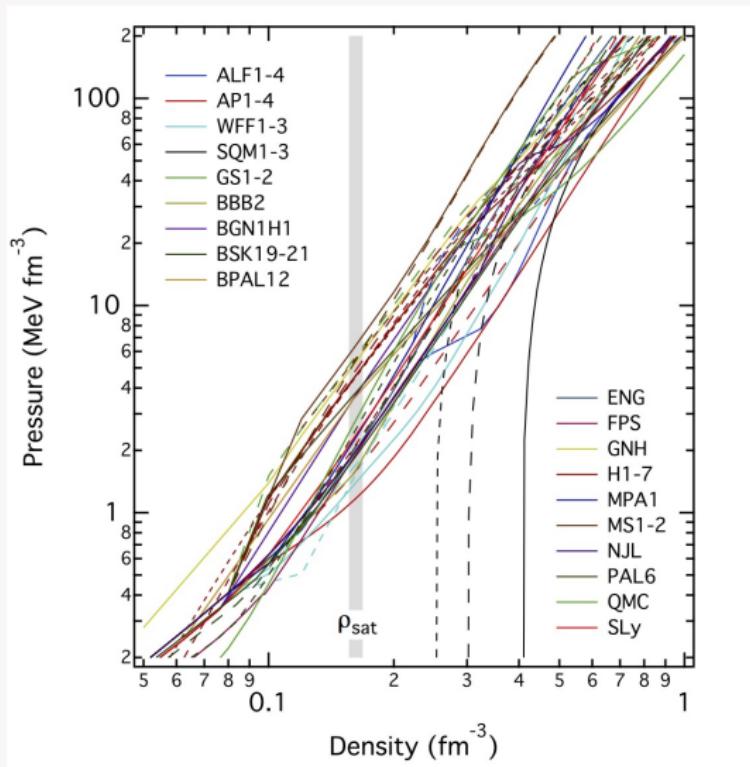
Estructura de estrellas de neutrones. Fuente: F. Weber, M. Orsaria, H. Rodrigues y S. H. Yang, 2012

Una variedad de fases



Fuente: N. Chamel y P. Haensel, 2008

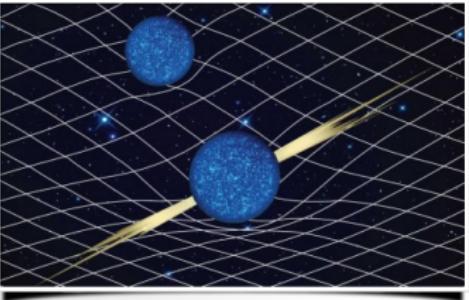
Ecuación de estado



Fuente: F. Özel & F. Paulo, 2001.

Ecuación de estado

 Home Dense Matter EoS Neutron Star Masses Neutron Star Radii Publications



Neutron Stars

This page contains up-to-date measurements and models for neutron star masses, radii, and equations of state.

It is maintained by the Xtreme Astrophysics Group at the University of Arizona. Please contact Feryal Ozel [fozel at email.arizona.edu] for any additions or requests.

<http://xtreme.as.arizona.edu/NeutronStars/>

Condicionando los posibles modelos¹

■ C1

Las funciones métricas son positivas y deben ser finitas y libres de singularidades en el interior de la estrella.

■ C2 Acomplamiento

$$e^{-2\lambda(R)} = e^{2\nu(R)} = 1 - \frac{2M}{R}. \quad (17)$$

■ C3 Corrimiento al rojo

$$z(r) \equiv e^{-\nu(r)} - 1, \quad (18)$$

debe disminuir con el incremento de r.

²B. V. Ivanov. Analytical study of anisotropic compact star models.

C4

La densidad de energía y la presión deben ser positivas dentro de la estrella.

C5

La densidad de energía y la presión deben alcanzar un máximo en el centro ($\rho'(0) = P'(0) = 0$) y deben decrecer monótonamente hacia afuera.

C6

La solución debe satisfacer la condición de energía dominante (DEC)

$$\rho \geq P. \quad (19)$$

C7 Causalidad

$$v^2 = \frac{dP}{d\rho} \leq 1. \quad (20)$$

■ C8 Estabilidad ante pulsaciones radiales I

$$\Gamma = \frac{\rho + P}{P} \frac{dP}{d\rho} \geq \frac{4}{3}. \quad (21)$$

■ C9 Estabilidad ante cracking

$$\frac{dP}{dr} \leq 0. \quad (22)$$

■ C10 Estabilidad ante pulsaciones radiales II

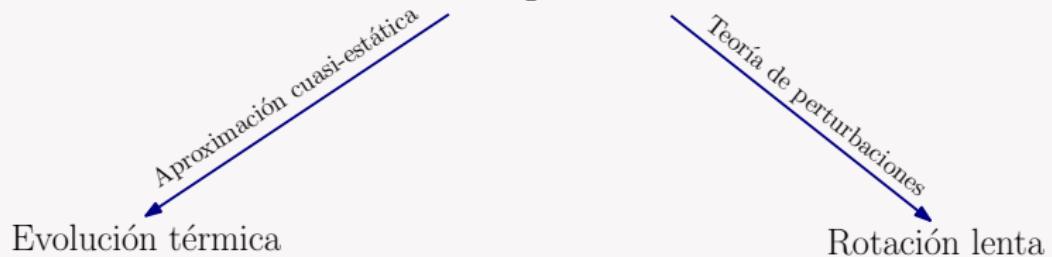
$$\frac{\partial M}{\partial \rho_c} > 0. \quad (23)$$

■ C11 Estabilidad ante movimientos convectivos²

$$\frac{d^2 \rho}{dr^2} \leq 0. \quad (24)$$

Planteamiento del problema

Los modelos estáticos
son importantes



ALF
AP WFF
SQM PAL
BBB NL
 BSK
 ENG
 FPS
 GNH
 SLy
 MPA
 MS
 NJL

QMC

Objetivos

Objetivo general

Determinar si los modelos de estrellas de neutrones obtenidos con las ecuaciones de estado encontradas en la literatura son estables ante convección.

Objetivos específicos

- 1 Obtener modelos de estrellas de neutrones en equilibrio para las distintas ecuaciones de estado.
- 2 Descartar los modelos que no cumplen las condiciones C1-C10.
- 3 Evaluar a los modelos restantes ante convección adiabática usando el criterio C11.

Metodología

- 1 Reunir ecuaciones de estado para la materia densa tabuladas de la literatura, necesarias para resolver las ecuaciones de TOV.
- 2 Interpolar las ecuaciones de estado manera óptima, explorando las distintas posibilidades.
- 3 Resolver las ecuaciones de TOV numéricamente usando una ecuación de estado interpolada, para obtener modelos de estrellas de neutrones estáticas. Se usará en lo posible el ecosistema de software de código abierto para cómputo científico (SciPy) de Python.
- 4 Obtener las derivadas $\frac{dP}{d\rho}$, $\frac{dP}{dr}$, $\frac{d^2P}{dr^2}$, $\frac{d\rho}{dr}$ y $\frac{d^2\rho}{dr^2}$, numéricamente. Esto permitirá evaluar la mayoría las condiciones de aceptabilidad física.

- 5 Variar la densidad central ρ_c en las condiciones iniciales para obtener la familia de configuraciones en equilibrio asociada a la ecuación de estado y graficar las relaciones $M-R$ y $M-\rho_c$. Usado estos diagramas se puede identificar la masa máxima de la familia de soluciones y evaluar la condición C10, respectivamente.

Cronograma

