

**ESTRUCTURA ESTELAR DE OBJETOS COMPACTOS CON UNA
ECUACIÓN DE ESTADO NUMÉRICA**

DAVID LEONARDO RAMOS SALAMANCA

PROPUESTA DE TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

DIRECTOR:

LUIS A. NÚÑEZ DE VILLAVICENCIO MARTÍNEZ

ESCUELA DE FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
BUCARAMANGA

2018

Resumen

Título: Estructura estelar de objetos compactos con una ecuación de estado numérica¹

Autor: David Leonardo Ramos Salamanca²

Palabras clave: Estructura estelar, ecuación de estado numérica

The abstract should be short, stating what you did and what the most important result is. Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet. Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet.

Remark: ¿Es necesario un abstract en la propuesta?

¹Propuesta de trabajo de grado

²Facultad de Ciencias. Escuela de física. Director: Luis A. Núñez de Villavicencio Martínez

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Resumen de evolución estelar	1
2. Marco teórico	4
2.1. Estructura estelar Newtoniana	4
2.2. Estructura estelar relativista	5
2.3. Estructura interna y composición de estrellas de neutrones	8
2.3.1. Ecuaciones de estado	10
2.4. Criterios de estabilidad	11
2.4.1. Condición de estabilidad de Harrison-Zeldovich-Novikov	11
2.4.2. Condición de estabilidad contra convección adiabática	11
3. Planteamiento del problema	12
4. Objetivos	13
4.1. Objetivo general	13
4.2. Objetivos específicos	13
5. Metodología	14
5.1. Cronograma	14
Bibliografía	15

1. Introducción

Los objetos compactos (también llamados estrellas compactas) son el residuo de la vida luminosa de las estrellas, llamados así porque su tamaño es significativamente más pequeño que el de una estrella normal/en la secuencia principal con una masa similar, estos objetos pueden alcanzar densidades superiores a la densidad de saturación nuclear ($\rho_0 = 2.3 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$) y a las que los potenciales gravitacionales son tan grandes que la relatividad general es importante para determinar su estructura (exceptuando a las enanas blancas).

Remark: Quizá sea bueno introducir la clasificación de una

Como remanentes de estrellas, vale la pena discutir a grandes rasgos el proceso de formación y evolución estelar antes de estudiar a mayor profundidad la estructura de los objetos compactos, ya que permitirá tener una idea general de los procesos que llevan a una estrella a su destino final.

Todo: Pulir justificación

1.1. Resumen de evolución estelar

Las estrellas son formadas a partir de nubes de gas interestelar, compuestas en su mayoría de hidrógeno molecular, que debido a algún tipo de perturbación (como una onda de choque) comienzan a colapsar sobre ellas mismas gravitacionalmente. La energía gravitacional es convertida en calor por la contracción y si la temperatura incrementa lo suficiente ($T \approx 10^7 \text{ K}$, punto de ignición para la fusión de hidrógeno a helio), con ayuda de la contracción adicional causada por la pérdida de energía por radiación, la fusión se convierte en la fuente de energía principal y la presión termal y de radiación balancearán la gravedad, permitiendo así que la estrella se forme [1, 2].

Todo: Evitar copia textual.

Las reacciones nucleares pueden sostener la estrella por un gran periodo de tiempo (de millones a billones de años, dependiendo de la masa de la estrella) en lo que se conoce como su fase de secuencia principal, llamada así porque las estrellas en esta etapa forman una secuencia mono-paramétrica (ignorando la composición química), cuyo parámetro es la masa estelar, en el diagrama de Hertzsprung-Russell (ver Figura 1.1). Las estrellas pasan la mayor parte de su vida luminosa en este estado, razón por la cual la mayoría de estrellas son encontradas en la secuencia principal, hasta que después de un tiempo característico el hidrógeno es extinguido/consumido/usado casi en su totalidad dejando un núcleo de Helio y da inicio a una siguiente etapa de fusión, de Helio a Carbono, el proceso se repite a lo largo de varias etapas de combustión (carbono, neón, oxígeno, magnesio y silicio) [3].

Todo: Revisar el orden del ciclo y por qué algunos elementos se saltan

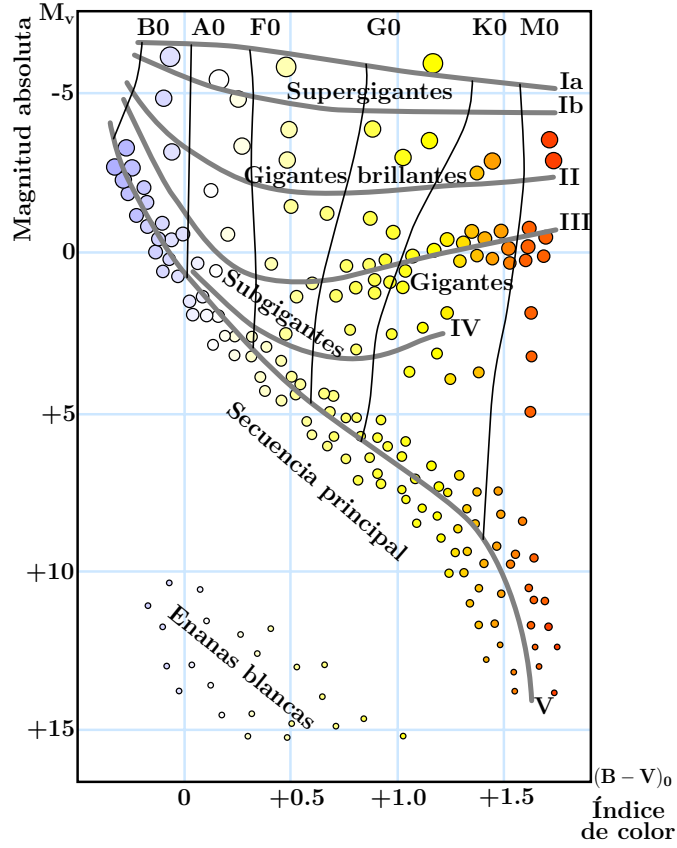


Figura 1.1: Diagrama Hertzsprung-Russell

Todo: Ajustar nomenclatura y valores del diagrama. Incluir cita.

El ciclo de combustión termina al alcanzar el hierro, debido a que la energía de enlace por nucleón tiene su valor máximo para el hierro y la fusión deja de ser exotérmica. Qué tanto avanza una estrella en este ciclo dependerá de la masa estelar, sólo estrellas masivas ($M \geq 8M_{\odot}$) llegan al hierro/final, en este punto tendrán una estructura en forma de cascarones de materia que rodean al núcleo de hierro. Sin la energía producida por la fusión nuclear la compresión de la gravedad no tiene qué la equipare y la estrella colapsa, las capas de materia caen casi libremente hacia el núcleo desencadenando, a través de mecanismos complejos y no enteramente comprendidos, una supernova de colapso de núcleo [4, 5].

Todo: Evitar copia textual.

El núcleo colapsado o proto-objeto compacto inicia un proceso de enfriamiento y reajustamiento estructural hasta que alcanza su composición de equilibrio de neutrones, protones, leptones y, presuntamente, hiperones y quarks desconfiados, altamente degenerados, es decir, en un estado tal que han ocupado los niveles de energía más bajos disponibles. El objeto compacto formado será sostenido por la presión de degeneración de los Fermiones degenerados que lo compongan y la repulsión de rango corto entre nucleones [6]. Vale la pena aclarar que se acostumbra llamar a todos estos objetos estrellas de neutrones, aunque su composición puede ser tan variada como se mencionó anteriormente. El objetivo del trabajo de grado será estudiar la estructura global de estos objetos compactos estáticos

Todo: Ya que se sabe qué es un objeto compacto, hablar a grandes rasgos de la estructura global de estos y la dependencia de la ecuación de estado, para darle paso a mi problema.

Todo: Papers seminales en estructura global y algunos de ecuaciones de estado.

usando distintas ecuaciones de estado, las cuales contienen la información sobre la composición interna de ellos. Además se usarán criterios de estabilidad para identificar modelos que sean de interés astrofísico.

Remark: Quizá añadir un resumen de las secciones.

2. Marco teórico

Todo: Un overview del marco teórico

2.1. Estructura estelar Newtoniana

Remark: Una de las razones para incluir el caso Newtoniano es que permite interpretar luego las ecuaciones obtenidas en relatividad general.

Se presentarán las ecuaciones de estructura estelar Newtonianas **puesto que** esto facilita la interpretación de las ecuaciones de estructura que se obtendrán en relatividad general.

Considerando/partiendo una distribución de materia con simetría esférica, si r denota la distancia desde el centro de la configuración, la masa $m(r)$ encerrada en una esfera/superficie esférica de radio r será:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho dr' = \int_0^r dm(r') \quad \text{con} \quad dm(r) = 4\pi r^2 \rho, \quad (2.1)$$

de donde

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (2.2)$$

Ahora, se considera un cilindro infinitesimal a una distancia r del centro, de altura dr y sección transversal unitaria, normal al vector posición \vec{r} (ver Figura 2.1).

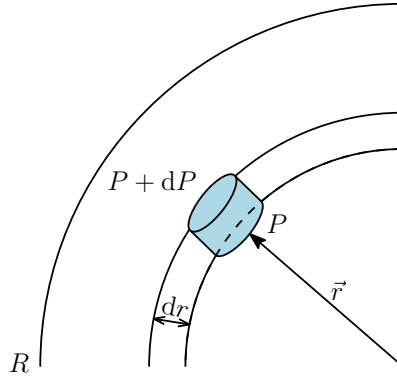


Figura 2.1: Presión sobre un elemento de masa cilíndrico.

Si la presión en \vec{r} es P y su cambio al ir de \vec{r} a $\vec{r} + d\vec{r}$ es dP , esta diferencia de presión representa una fuerza $-dP$ (dado que la sección transversal es unitaria) actuando sobre el elemento de masa. Esta fuerza debe ser contrarrestada por la atracción gravitacional sobre el elemento de masa debido a $m(r)$ ($Gm(r)\rho dr/r^2$) para que éste se encuentre en equilibrio:

$$-dP = \frac{Gm(r)\rho dr}{r^2}, \quad (2.3)$$

o equivalentemente

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho. \quad (2.4)$$

Las ecuaciones (2.2) y (2.4) son las ecuaciones de estructura estelar Newtonianas [7], si una relación entre la presión y la densidad $P(\rho)$ es dada, es decir, una ecuación de estado, el sistema puede resolverse dado un par condiciones iniciales $m(r=0)$ y $P(r=0)$. La primera de estas condiciones es evidente puesto que no hay masa encerrada en un cascarón esférico de radio nulo, $m(r=0) = 0$ y la segunda estará definida por el valor de $\rho(r=0) \equiv \rho_c$ escogido, mediante la ecuación de estado, $P(r=0) = P(\rho_c)$.

El radio de la estrella R se define como el valor de r en el que la presión se anula, esto es, $P(R) = 0$ y de manera similar la masa de la estrella M se define como el valor de la masa encerrada en $r = R$, esto es, $m(R) = M$.

Aunque no se van a tratar en el trabajo de grado, cabe resaltar que los objetos compactos conocidos como enanas blancas, sostenidas al igual que las estrellas de neutrones por la presión de degeneración no de neutrones sino de electrones, son bien descritas por las ecuaciones de estructura Newtonianas. Una manera, aunque no la única, de conocer la importancia de las correcciones relativistas es comparando la magnitud del potencial gravitacional con la unidad, con masas en un rango de $0,33 M_\odot$ a $1,52 M_\odot$ y radios típicos de unos cuantos miles de kilómetros [1], para las enanas blancas se cumple

$$\frac{2GM}{c^2 R} \ll 1, \quad (2.5)$$

por lo cual se espera que el tratamiento Newtoniano sea suficiente [8].

2.2. Estructura estelar relativista

Si bien en la teoría Newtoniana podrían existir objetos tan compactos como las estrellas de neutrones, Chandrasekhar encontró que las estrellas soportadas por presión de degeneración tienen una masa máxima, obtenida asintóticamente cuando los Fermiones son altamente relativistas, esto es, cuando tienen velocidades comparables con la velocidad de la luz. Bajo tales condiciones existirían estrellas compuestas por los quarks más pesados (charm, bottom y top), que no son realizables en relatividad general debido a que las estrellas con la máxima masa posible no son lo suficientemente densas [1].

Es por predicciones erróneas como la anterior que la relatividad general es necesaria para el estudio de objetos compactos, siendo precisamente el descubrimiento de los pulsares, estrellas de neutrones altamente magnetizadas en rotación, en 1967 [9] lo que revitalizó el estudio de la relatividad general y la llevó a la frontera de la investigación en física.

Para describir la estructura de una estrella estática en relatividad general se supone un espacio-tiempo estático e isótropo descrito de manera general por la métrica asociada al elemento de línea:

Remark: ¿Debería poner de una vez la forma alternativa del sistema, en la que la variable independiente es m (a la Lagrange)?

Todo: Pulir último párrafo, parece redundante.

Remark: Esto se podría trasladar a la introducción.

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.6)$$

Además el espacio-tiempo se dividirá en dos: una región exterior a la estrella y una región interior. La *región exterior* es libre de fuentes ($T_\mu^\nu = 0$) y las ecuaciones de Einstein para esta, en unidades gravitacionales ($G = c = 1$), son

$$G_\mu^\nu = R_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu R = 8\pi T_\mu^\nu = 0, \quad (2.7)$$

de donde se obtiene

$$e^{2\nu} = 1 - \frac{2M}{r}; \quad -e^{2\lambda} = -e^{-2\nu} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad (2.8)$$

donde M es una constante de integración interpretada como la masa de la estrella. Esta es la conocida solución de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.9)$$

valida para $r > R$, donde R es el radio de la estrella, que describe la geometría del espacio-tiempo por fuera de una estrella estática.

Para la *región interior* el contenido material debe ser especificado para resolver las ecuaciones de Einstein, la materia se modela considerándola un fluido perfecto, con un tensor de energía-momento dado por

$$T^{\mu\nu} = -Pg^{\mu\nu} + (P + \rho)u^\mu u^\nu, \quad \text{con } g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1, \quad (2.10)$$

donde $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ es la quadri-velocidad de un elemento del fluido. Este tensor puede ser escrito en términos de los valores locales de presión P y densidad de energía ρ gracias al Principio de Covariancia, consecuencia del Principio de Equivalencia [8], que permite escribir el tensor-energía impulso en presencia de campos gravitacionales de una manera análoga a como se escribe en relatividad especial en ausencia de gravedad.

Como se considera una estrella estática, la velocidad espacial de todos los elementos del fluido son cero:

$$u^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad u^0 = 1/\sqrt{g_{00}} \quad (2.11)$$

con lo que las únicas componentes no nulas del tensor energía-momento, en componentes mixtas, serán

$$T_0^0 = \rho(r), \quad T_i^i = -P(r) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.12)$$

Teniendo en cuenta la forma del tensor energía-momento las ecuaciones de Einstein

$$G_\mu^\nu = R_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu R = 8\pi T_\mu^\nu \quad (2.13)$$

tendrán componentes

$$\begin{aligned} G_0^0 &= e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = -8\pi\rho(r), \\ G_1^1 &= e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi P(r), \\ G_2^2 &= e^{-2\lambda} \left(\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) = 8\pi P(r), \\ G_3^3 &= G_2^2 = 8\pi P(r). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Definiendo

$$m(r) \equiv 4\pi \int_0^r \rho(r) r^2 dr, \quad (2.15)$$

como la energía total encerrada por la coordenada r , o masa gravitacional, se puede eliminar las funciones métricas de (2.14), expresándolas en términos de P , ρ y m para obtener

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{[P(r) + \rho(r)] [m(r) + 4\pi r^3 P(r)]}{r[r - 2m(r)]} \quad (2.16)$$

que junto a (2.15), escrita como

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (2.17)$$

son las ecuaciones de estructura estelar relativista y son la reducción de las ecuaciones de Einstein para el interior de una estrella esférica y estática. Este sistema es conocido como las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV).

Re-escribiendo (2.16) como (incluyendo los factores de G y c correspondientes)

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r) \left[1 + \frac{P(r)}{c^2 \rho(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r) c^2} \right] \left[1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right]^{-1}, \quad (2.18)$$

se puede reconocer a (2.4), la ecuación de equilibrio hidrostático Newtoniana, como el límite de (2.18) cuando

$$c^2 \rho \gg P, \quad mc^2 \gg 4\pi r^3 P \quad \text{y} \quad \frac{2Gm}{c^2 r} \ll 1, \quad (2.19)$$

así mismo, encontrar esta correspondencia permite interpretar a (2.18) como la ecuación de equilibrio hidrostático relativista, la cual expresa el *balance* entre la fuerza neta sobre un elemento de masa debido a la presión de la materia que la rodea y la atracción gravitacional de la materia interior al elemento de masa. El hecho de que, además de la densidad de energía, la presión actúe como una fuente de atracción gravitacional es la razón por la cual el colapso gravitacional es intrínseco a la estructura de la relatividad general pues mientras en las estrellas Newtonianas la presión actuaba para sostener a la estrella, si la estrella es lo suficiente masiva (presiones lo suficientemente grandes) el colapso es inevitable.

Las ecuaciones de TOV (2.16) y (2.17), pueden ser resueltas de manera análoga a las ecuaciones de estructura Newtonianas. Dada una ecuación de estado $P(\rho)$ y partiendo de las condiciones iniciales $m(r=0) = 0$ y $P(r=0) = P(\rho_c)$, el sistema se puede integrar

Remark: ¿Aclarar la diferencia entre la masa encerrada y la energía total?

hasta que la presión se anule, lo que indica el borde de la estrella y define el radio R y la masa gravitacional $m(R) = M$ de la estrella.

La función métrica ν puede ser hallada añadiendo al sistema la ecuación diferencial

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 P(r)}{r[r - 2m(r)]}, \quad (2.20)$$

cuya solución debe coincidir con la solución externa en R , por lo que se usa la libertad de sumar una constante para realizar el siguiente cambio

$$\nu(r) \longrightarrow \nu(r) - \nu(R) + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M}{R} \right), \quad r \leq R, \quad (2.21)$$

más una condición inicial, generalmente $\nu(r = 0) = 0$.

2.3. Estructura interna y composición de estrellas de neutrones

El comportamiento preciso de la materia nuclear en condiciones tan extremas como las encontradas en el interior de una estrella de neutrones (densidades mayores a ρ_0) es desconocida y fuera de las capacidades experimentales actuales, las estrellas de neutrones se han convertido pues en laboratorios de materia nuclear densa y son un tema de interés en el campo de la astrofísica nuclear.

Remark: Se puede pasar a la introducción

La composición de las estrellas de neutrones, contrario a lo que el nombre sugiere, se presume es muy rica y varía a lo largo de su extensión radial, esta variada composición y las distintas fases que exhiben están distribuidas en una estructura de cascarones, denominada generalmente una red cristalina de Coulomb (ver Figura 2.2). La superficie de la estrella está rodeada por una *atmósfera* compuesta principalmente de hidrógeno, helio y hierro, aunque se ha encontrado carbono en una [10], en estado gaseoso o condensado dependiendo de la temperatura superficial y el campo magnético de la estrella [11]. La atmósfera es importante porque es donde se forma el espectro de radiación electromagnética de las estrellas y esta porta información acerca de su composición, temperatura y campo magnético. Debajo de la atmósfera se encuentra una *envoltura* de aproximadamente 100 m, a veces llamado océano. Compuesta presuntamente de núcleos alrededor del pico del hierro en un estado condensado, la envoltura influencia el transporte y emisión de energía térmica desde la superficie [6, 12, 13].

Todo: Refinar la presentación de las ideas.

La envoltura encierra a cuatro regiones internas: la corteza exterior e interior y el núcleo exterior e interior. La *corteza* es una capa en la que se encuentra materia con densidades sub-nucleares ($\rho < \rho_0$). En la *corteza exterior* los electrones presentes, requeridos para la neutralidad de carga de la estrella, forman un gas de Fermi y ocurre un proceso de neutronización donde los electrones son capturados por protones para crear neutrones. La división con la *corteza interior* se presenta debido a que a una densidad $\rho_{ND} \simeq 10^{14} \text{ g/cm}^2$ (neutron drip density), los neutrones comienzan a “gotear” del núcleo, por lo que hay presencia de neutrones libres, que pueden llegar a condensarse en un superfluido. En el

fondo de la corteza, cuando la densidad se acerca a ρ_0 , se ha predicho la presencia de fases conocidas como “pasta” nuclear, en las que, debido a la compresión, los núcleos se deforman y dejan de ser esféricos (para una revisión de la corteza de las estrellas de neutrones consultar [14] y referencias allí citadas).

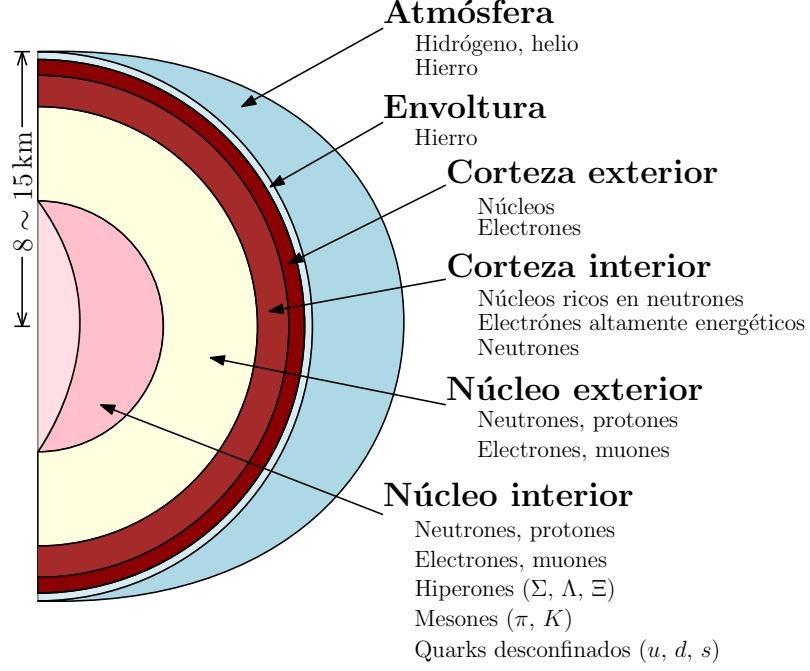


Figura 2.2: Composición de una estrella de neutrones.¹

El *núcleo* comprende regiones en las que la densidad alcanza la densidad nuclear ρ_0 y contiene la mayor fracción de la masa estelar. Está subdividido en dos: el *núcleo exterior*, con densidad $0.5\rho_0 \lesssim \rho \lesssim 2\rho_0$ cuya composición se conoce bien cualitativamente [16], es un superfluido de neutrones y protones, con presencia de electrones y muones altamente degenerados; del *núcleo interior* por el contrario no se conoce su composición, se ha sugerido la presencia de hiperones, piones, kaones e incluso quarks desconfiados (consultar las revisiones [13, 12] y referencias allí citadas).

La gran variedad de fases que se encuentran a medida de que la densidad aumenta en el interior de las estrellas de neutrones están ilustradas en la Figura 2.3.

¹Original: Figura 1 de [15]

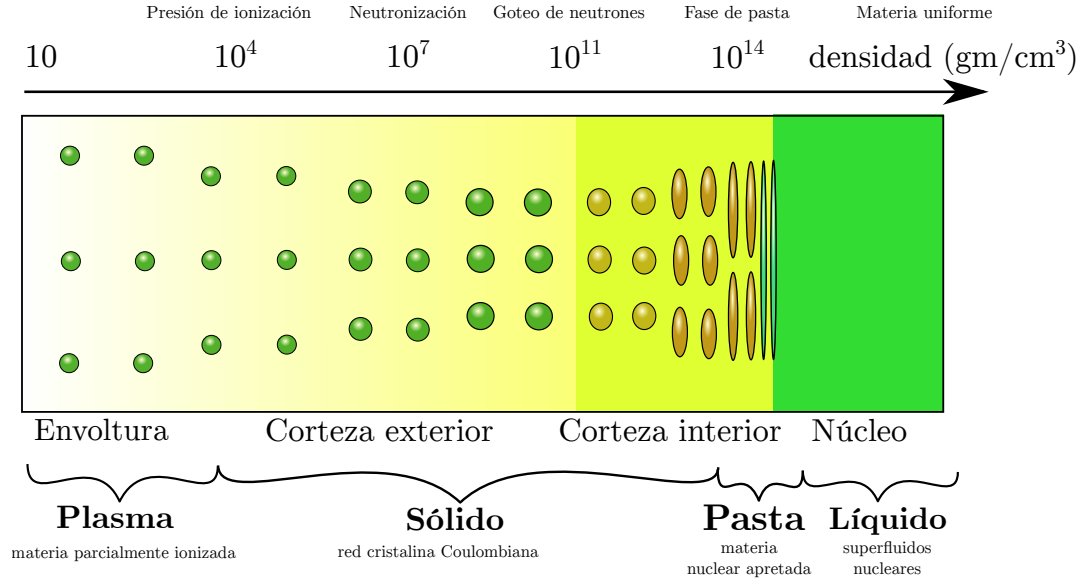


Figura 2.3: Estructura interna de una estrella de neutrones.¹

2.3.1. Ecuaciones de estado

La composición de la estrella de neutrones entra en el cálculo de la estructura estelar mediante la ecuación de estado $P(\rho)$, encontrada en forma tabulada generalmente debido a que los programas diseñados para calcularla son muy elaborados y hacen poco práctico el cálculo en tiempo real, cuya forma precisa dependerá de cómo se decida modelar los distintos sectores de la estrella de neutrones descritos anteriormente. Para la corteza exterior y parte de la interior (densidades $\rho \lesssim 10^{14} \text{ g/cm}^3$) la ecuación de estado puede ser deducida a partir de datos experimentales de núcleos atómicos, dispersión de nucleones y la teoría de sistemas Coulombianos, sin embargo para la parte baja de la corteza interior y el núcleo no hay datos experimentales disponibles y la ecuación de estado debe ser calculada teóricamente, razón por la cual la ecuación de estado de la materia ultra-densa es el mayor misterio de las estrellas de neutrones.

Dependiendo de la ecuación de estado escogida, las ecuaciones de TOV (2.17) y (2.16) darán diferentes valores de la masa máxima M_{max} de las estrellas neutrones, cuyo interés astrofísico reside en que traza la línea divisoria entre las estrellas de neutrones y los agujeros negros. El valor preciso de M_{max} influye en la caracterización de remanentes de supernova y el estimado del número estrellas de neutrones y agujeros negros en la galaxia.

Todo: Incluir más motivación: curvas de enfriamiento.

Remark: ¿Valdrá la pena incluir algo sobre lo más específico: distintas interacciones, EOSs unificadas vs no-unificadas, $T = 0$, etc?

¹Original: Figura 4 de [14]

2.4. Criterios de estabilidad

Las soluciones a las ecuaciones de estructura relativistas (2.17) y (2.16) corresponden a **configuraciones** en equilibrio hidrostático, sin embargo el equilibrio puede ser estable o inestable y sólo objetos en equilibrio estable son de interés astrofísico. Determinar las condiciones para que una configuración en equilibrio sea estable es un problema complejo y es importante debido a que fija cotas inferiores y superiores en las masas de estrellas relativistas estables.

La estabilidad se estudia en dos escalas distintas: una global y una local. En la escala global se analizan oscilaciones estelares mediante un esquema de perturbaciones dinámico, mientras que en la escala local se investiga el efecto de la convección (movimiento local de elementos de fluido) y el cracking (cambio de signo en la distribución de fuerzas que aparece al perturbar localmente el fluido).

Todo: Citas de lugares donde traten los temas.

2.4.1. Condición de estabilidad de Harrison-Zeldovich-Novikov

Cuando se considera la estabilidad global de una **configuración** con simetría esférica se analiza cómo pulsaciones radiales pueden inducir el cuerpo a colapsar. La estabilidad en este método estará determinada por la frecuencia del modo fundamental de oscilación (ver [16, 17]), sin embargo una condición más práctica para determinar si una **configuración** con simetría esférica es inestable globalmente es la conocida condición de Harrison-Zeldovich-Novikov, la cual enuncia que para una configuración sea estable respecto a oscilaciones radiales es *necesario* que su masa M aumente a medida que la densidad central ρ_c crece:

Todo: Cita.

$$\frac{\partial M(\rho_c)}{\partial \rho_c} > 0. \quad (2.22)$$

Además, los puntos en los que $\frac{\partial M(\rho_c)}{\partial \rho_c} = 0$ (puntos críticos) son puntos donde la **configuración** pasa de estabilidad a inestabilidad.

Remark: ¿Quizá explicar que la variación de ρ_c crea una familia de soluciones y mostrar el significado gráfico?

2.4.2. Condición de estabilidad contra convección adiabática

La estabilidad contra convección se puede entender como sigue: cuando un elemento de fluido es desplazado hacia abajo, si su densidad aumenta más rápido que la densidad que lo rodea, el elemento se hundirá y la **configuración** será inestable. Por otro lado, si la densidad del elemento de fluido es menor que la de su alrededor, flotará y la estrella será estable contra convección.

En el caso en que la perturbación del elemento de fluido es adiabática (pasa en intervalos de tiempo muy pequeños comparados con los del flujo de calor) Nuñez et al. [18] mostraron que para que el modelo estelar fuera estable contra movimientos convectivos, el perfil de densidad $\rho(r)$ debe cumplir el siguiente criterio:

$$\rho''(r) \leq 0. \quad (2.23)$$

3. Planteamiento del problema

Los modelos estáticos son el punto de partida de un estudio dinámico de objetos compactos: los efectos de la rotación lenta se pueden introducir mediante teoría de perturbaciones [19] y la evolución térmica se puede estudiar en un régimen cuasi-estático [20]. Es por esto que obtener soluciones a las ecuaciones de estructura relativistas, dada una determinada ecuación de estado para la materia densa, y analizar su estabilidad **ante distintas perturbaciones/con distintos criterios** es muy importante a la hora de identificar modelos **realistas/satisfactorios/correctos** de objetos compactos.

En el trabajo de grado se propone solucionar las ecuaciones de TOV (2.17) y (2.16) numéricamente para ecuaciones de estado que se encuentren en la literatura actual, y analizar su estabilidad global contra pulsaciones radiales usando el criterio estándar de Harrison-Zeldovich-Novikov y su estabilidad local contra convección adiabática usando el criterio presentando por Nuñez et al. [18].

Todo: Añadir más cosas? Masa-Radio!

Remark: Modelos astrofísicos realistas necesitan una ecuación de estado realista.

Remark: La única forma de hacerlo es numéricamente. Por la complejidad de las ecuaciones y porque las ecuaciones de estado no tienen forma analítica.

Remark: Es importante analizar la estabilidad de los modelos en equilibrio obtenidos con las ecuaciones de estado numéricas.

Remark: Se escogerán ecuaciones de estado en la literatura, se hallarán sus configuraciones de equilibrio (resolviendo TOV) usando Python y se evaluará su estabilidad tanto global como local (usando los criterios más simples).

Remark: Se buscará que los resultados sean reproducibles y abiertos a la comunidad científica.

4. Objetivos

4.1. Objetivo general

Encontrar soluciones a las ecuaciones de TOV, correspondientes a configuraciones en equilibrio hidrostático, para un conjunto de ecuaciones de estado y verificar su estabilidad bajo perturbaciones globales y locales del fluido que constituye el objeto compacto.

4.2. Objetivos específicos

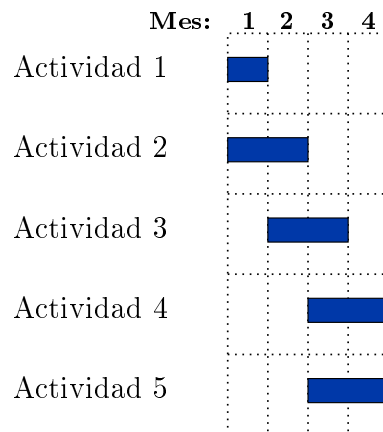
1. Interpolare las ecuaciones de estado encontradas en forma tabular.
2. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y no lineales (2.16) y (2.17) usando algún método numérico.
3. Realizar una curva masa-radio con la familia de soluciones parametrizada por ρ_c .
4. Realizar una curva masa-densidad central para encontrar los modelos estables ante pulsaciones radiales.
5. Hallar la segunda derivada del perfil de densidad $\rho(r)$ obtenido, parametrizado por ρ_c , para encontrar los modelos estables ante convección adiabática.

5. Metodología

Se propone la siguiente metodología para cumplir con los objetivos específicos planteados anteriormente:

1. Reunir ecuaciones de estado para la materia densa en forma tabular de la literatura e interpolarlas.
2. Resolver las ecuaciones de TOV numéricamente para las diferentes ecuaciones de estado, usando en lo posible el ecosistema de software de código abierto para cómputo científico (SciPy¹) de Python.
3. Variar la densidad central para obtener la familia de configuraciones en equilibrio asociada a la ecuación de estado y graficar las relaciones $M - R$ y $M - \rho_c$.
4. De la gráfica $M - \rho_c$ identificar los modelos que son inestables ante pulsaciones radiales.
5. Hallar la segunda derivada de los perfiles de densidad $\rho(r)$ numéricamente, para los modelos estables ante pulsaciones radiales con el fin de verificar su estabilidad ante convección adiabática.

5.1. Cronograma



¹<https://www.scipy.org>

Bibliografía

- [1] N. Glendenning, *Compact Stars*. Springer-Verlag New York, 2 ed., 2000.
- [2] T. Padmanabhan, *Theoretical Astrophysics Vol. II*. Cambridge University Press, 2000.
- [3] D. Scilla, “Introduction to stellar evolution,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 703, p. 012002, 2016.
- [4] S. Woosley and T. Janka, “The Physics of Core-Collapse Supernovae,” *Nature Physics*, vol. 1, pp. 147–154, 2005, [arXiv:astro-ph/0601261](#).
- [5] H. T. Janka, “Explosion Mechanisms of Core-Collapse Supernovae,” *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, pp. 1–35, 2012, [arXiv:1206.2503](#).
- [6] J. Piekarewicz, “The Nuclear Physics of Neutron Stars,” in *AIP Conference Proceedings*, 2013, [arXiv:1311.7046](#).
- [7] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. Dover, 1958.
- [8] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, 1972.
- [9] A. Hewish, S. J. Bell, J. D. H. Pilkington, P. F. Scott, and R. A. Collins, “Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source,” *Nature*, vol. 217, pp. 709 – 713, 1968.
- [10] W. C. G. Ho and C. O. Heinke, “A Neutron Star with a Carbon Atmosphere in the Cassiopeia A Supernova Remnant,” *Nature*, vol. 462, pp. 71–73, 11 2009, [arXiv:0911.0672](#).
- [11] V. E. Zavlin and G. G. Pavlov, “Modeling Neutron Star Atmospheres,” *Proceedings of the 270. WE-Heraeus Seminar on Neutron Stars*, p. 263, 6 2002, [arXiv:astro-ph/0206025](#).
- [12] A. Y. Potekhin, “The physics of neutron stars,” *Physics Uspekhi*, vol. 53, no. 12, pp. 1235–1256, 2010, [arXiv:1102.5735](#).
- [13] J. M. Lattimer and M. Prakash, “The Physics of Neutron Stars,” *Science*, vol. 304, no. 5670, pp. 536–542, 2004, [arXiv:astro-ph/0405262](#).
- [14] N. Chamel and P. Haensel, “Physics of Neutron Star Crusts,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 11, p. 10, 12 2008, [arXiv:0812.3955](#).
- [15] F. Weber, M. Orsaria, H. Rodrigues, and S. H. Yang, “Structure of quark stars,” *Proceedings of the International Astronomical Union*, vol. 8, no. S291, pp. 61–66, 2012, [arXiv:1210.1910](#).

- [16] P. Haensel, A. Y. Potekhin, and D. G. Yakovlev, *Neutron Stars 1: Equation of State and Structure*. Springer, 2007.
- [17] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*. WILEY-VCH, 1983.
- [18] H. Hernández, L. A. Núñez, and A. Vásquez-Ramírez, “Convection and cracking stability of spheres in General Relativity,” *The European Physical Journal C*, vol. 78, 8 2018, arXiv: [1808.10526](#).
- [19] J. B. Hartle, “Slowly Rotating Relativistic Stars I. Equations of Structure,” *The Astrophysical Journal*, vol. 150, no. December, p. p.1005, 1967.
- [20] L. Becerra, H. Hernández, and L. Núñez, “Quasi-static thermal evolution of compact objects,” *Canadian Journal of Physics*, vol. 93, no. 8, pp. 1–28, 2015, arXiv: [1308.3077](#).

Todo: Chequear que los links estén correctos.