

# Estructura estelar de objetos compactos con una ecuación de estado numérica

Propuesta trabajo de grado

David Ramos

Escuela de Física  
Facultad de Ciencias  
Universidad Industrial de Santander

Director: Luis Núñez

# Contenido

- 1** Formación y evolución estelar
- 2** Objetos compactos
- 3** Estructura Estelar
- 4** Composición de estrellas de neutrones
- 5** Condiciones de aceptabilidad
- 6** Planteamiento del problema
- 7** Objetivos
- 8** Metodología

# Formación estelar



Barnard 68. Fuente: ESO



Nébula del águila. Fuente: HST

# Evolución estelar

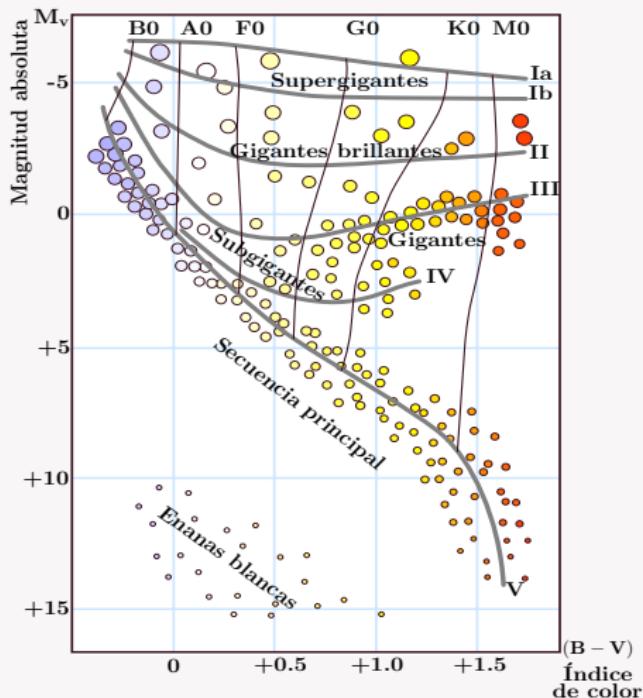
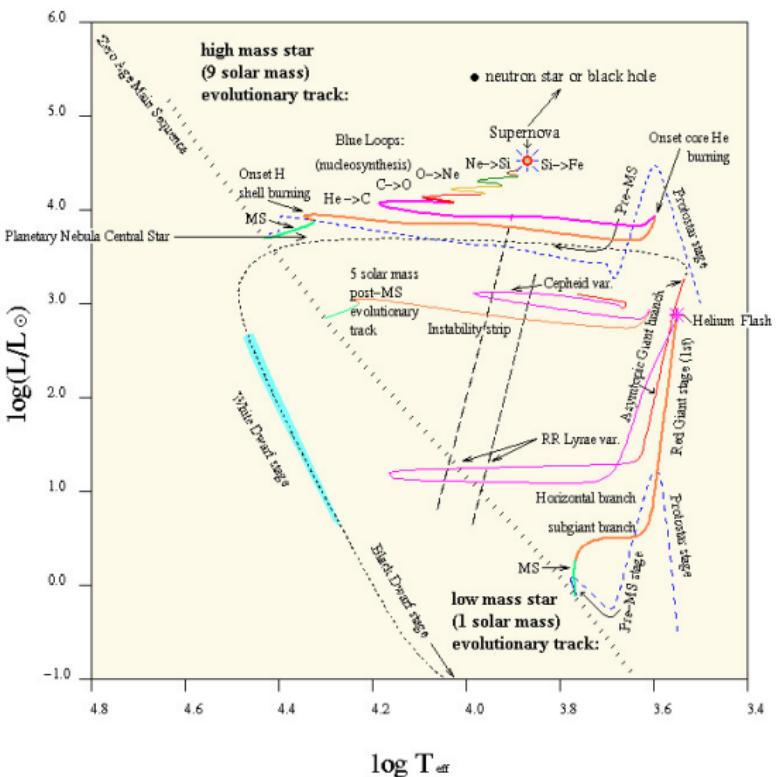
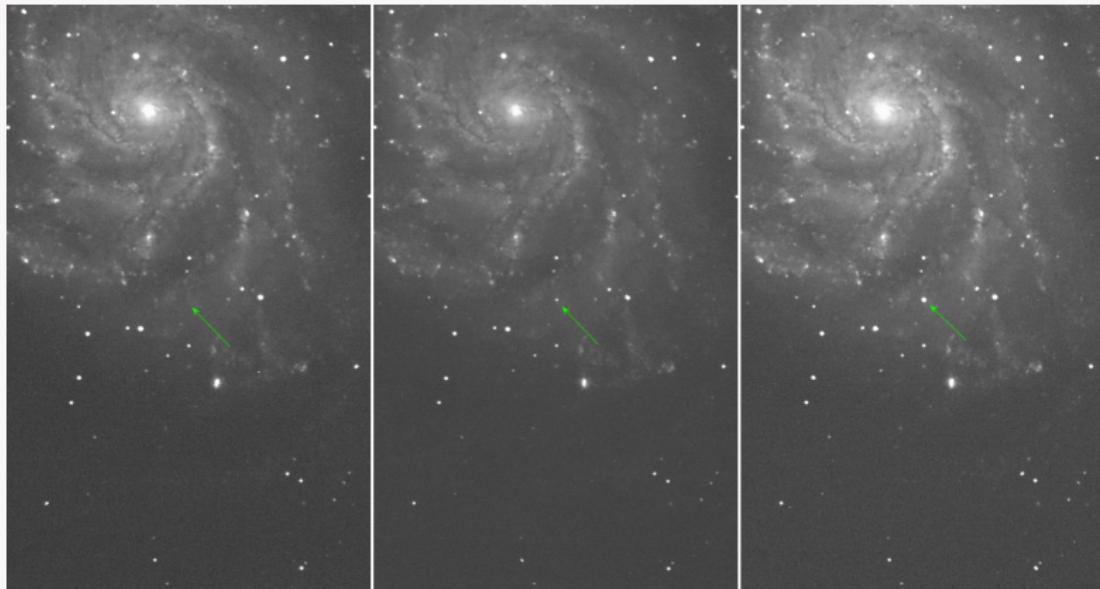


Diagrama de Hertzsprung-Russell. Fuente:



Trayectorias evolutivas. Fuente:

# Supernova



SN 2011fe (Agosto 23, 24 y 25). Fuente: Supernova 2011fe from an Exploding Carbon-Oxygen White Dwarf Star. Nugent et al.

# Energía liberada en una supernova

Colapso del núcleo de hierro → ¿Liberación? de energía potencial gravitacional → Explosión de la estrella

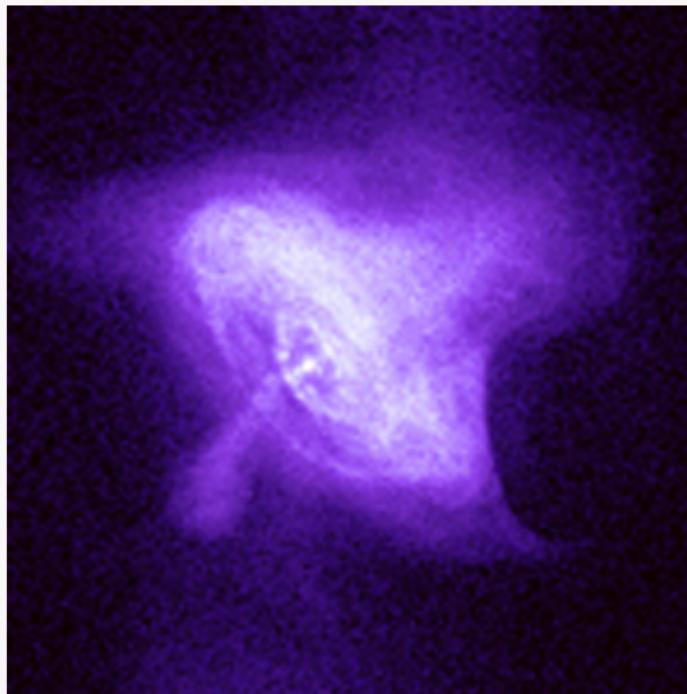
Si el núcleo tiene masa inicial  $M_c$  y el radio pasa de  $R_n$  a  $R_{nc}$ , con  $R_n \gg R_{nc}$

$$\Delta E_{\text{grav}} = -GM_c^2 \left( \frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_{nc}} \right) \approx \frac{GM_c^2}{R_{nc}}, \quad (1)$$

usando  $M_c \approx 1.5M_\odot$ ,  $R_c \approx 10^4 \text{ km}$  y  $R_{nc} \approx 20 \text{ km}$

$$\Delta E_{\text{grav}} \approx 3 \times 10^{46} \text{ J}. \quad (2)$$

## Estrellas de neutrones



Nebulosa del cangrejo, Rayos X. Fuente: Chandra X-Ray Observatory

# Condiciones extremas

Modelo estándar de estrellas de neutrones:

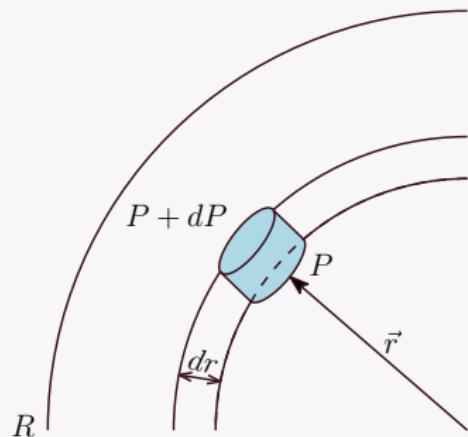
$$M = 1.4 M_{\odot}, \quad R = 10 \text{ km}, \quad r_g = 4.13 \text{ km}, \quad (3)$$

con esto

$$g = \frac{GM}{R^2 \sqrt{1 - r_g/R}} = 2.43 \times 10^{14} \text{ cm s}^{-2}, \quad (4)$$

$$\rho_{prom} = 6.68 \times 10^{17} \text{ g cm}^{-3} > \rho_0 = 2.3 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}. \quad (5)$$

# Equilibrio hidrostático



Fuerza por diferencia de presión

$$F_{\text{Pelem}} = -dP dA.$$

Fuerza ejercida por la masa interior

$$F_{\text{atracc}} = \frac{Gm(r)\rho dA dr}{r^2}.$$

Para el equilibrio requerimos

$$-dP dA = \frac{Gm(r)\rho dA dr}{r^2}. \quad (6)$$

# Ecuaciones de estructura newtonianas

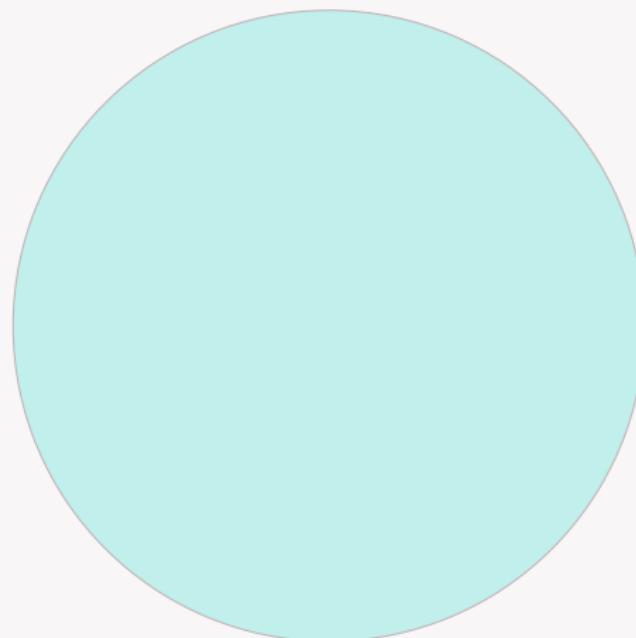
Masa encerrada entre dos cascarones separados infinitesimalmente

$$dm(r) = 4\pi r^2 \rho dr.$$

Re escribiendo los dos resultados:

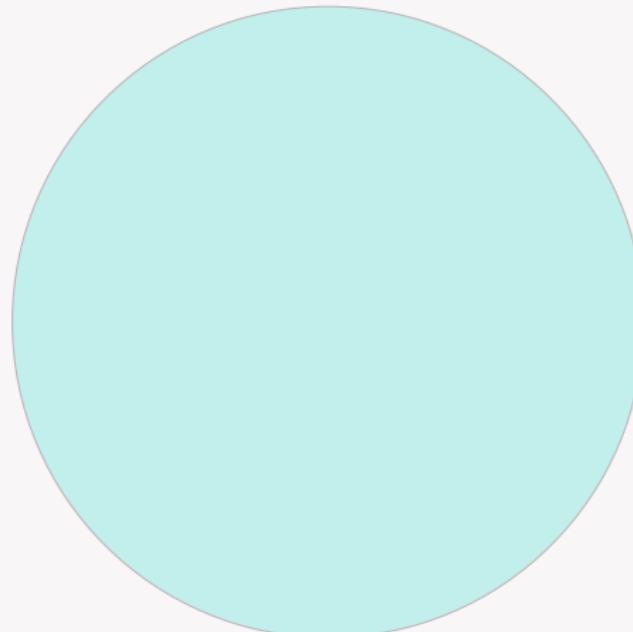
**Ecuaciones de estructura** 
$$\begin{cases} \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, & (7a) \\ \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \rho. & (7b) \end{cases}$$

# Algo de Relatividad General



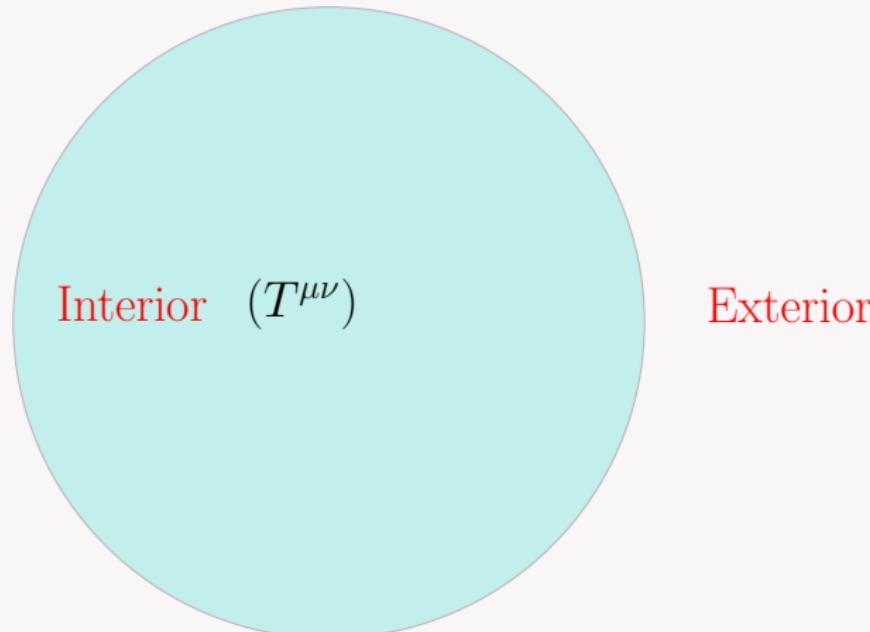
# Algo de Relatividad General

Estático, estacionario esféricico  $\Rightarrow ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$



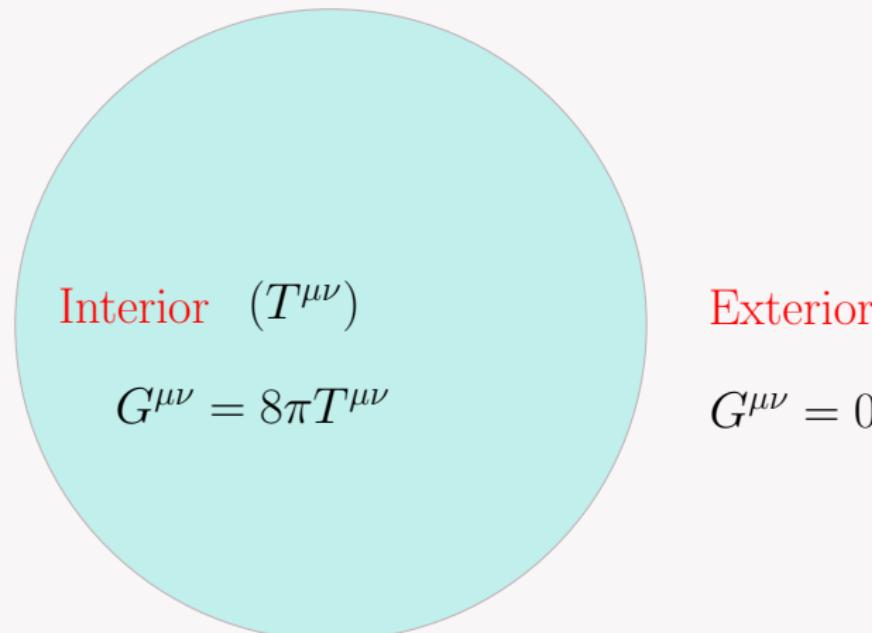
# Algo de Relatividad General

Estático, estacionario esféricico  $\Rightarrow ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$



# Algo de Relatividad General

Estático, estacionario esférico  $\Rightarrow ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$



# Solución exterior

De las ecuaciones de Einstein,

$$G_{\mu}^{\nu} = R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}R = 0, \quad (8)$$

se obtiene

$$e^{2\nu} = 1 - \frac{2M}{r} \quad \text{y} \quad -e^{2\lambda} = -e^{-2\nu} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad (9)$$

la métrica para  $r < R$  será entonces

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (10)$$

Derivación

# Solución interior

Modelando la estrella como un fluido ideal ([ver más](#))

$$T_0^0 = \rho(r), \quad T_i^i = -P(r) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (11)$$

las ecuaciones de Einstein,

$$G_{\mu}^{\nu} = R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}R = 8\pi T_{\mu}^{\nu}, \quad (12)$$

se convierten en

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \\ \frac{dP}{dr} = - \frac{(P + \rho)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)}, \end{array} \right. \quad (13a)$$

**Ecuaciones de TOV**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \\ \frac{dP}{dr} = - \frac{(P + \rho)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)}, \\ \frac{d\nu}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)}, \end{array} \right. \quad (13b)$$

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)}, \quad (13c)$$

donde se definió la función de masa o masa de Misner

$$m(r) \equiv 4\pi \int_0^r \rho(r)r^2 dr. \quad \text{Nota} \quad (14)$$

### Interpretación física

Re-escribiendo el gradiente de presión

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2}\rho \left[1 + \frac{P}{c^2\rho}\right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 P}{mc^2}\right] \left[1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right]^{-1}. \quad (15)$$

# Resolviendo el sistema

Las ecuaciones de TOV son un IVP

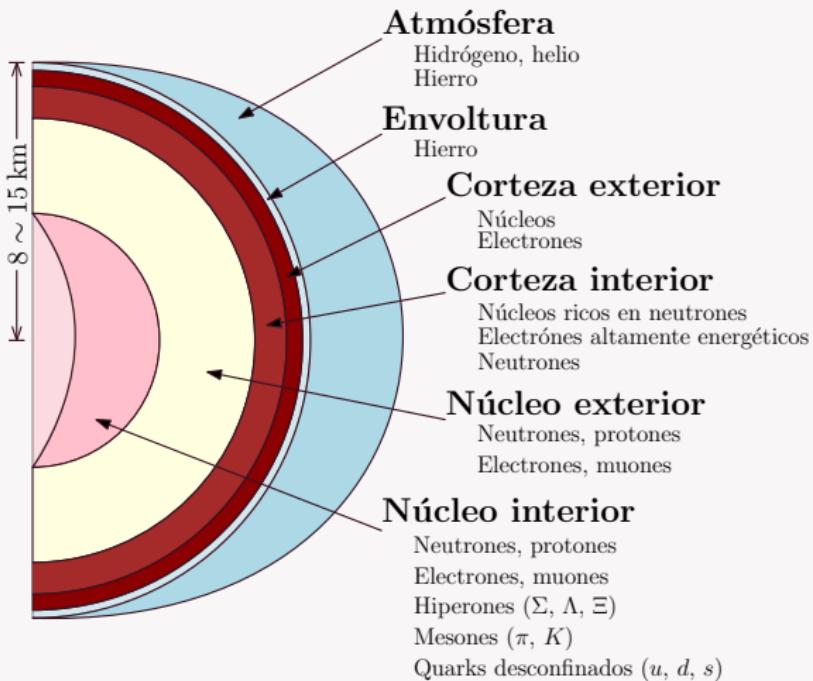
$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \quad \longrightarrow \quad m(0) = 0$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(P + \rho)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)} \quad \longrightarrow \quad P(0) = P_c$$

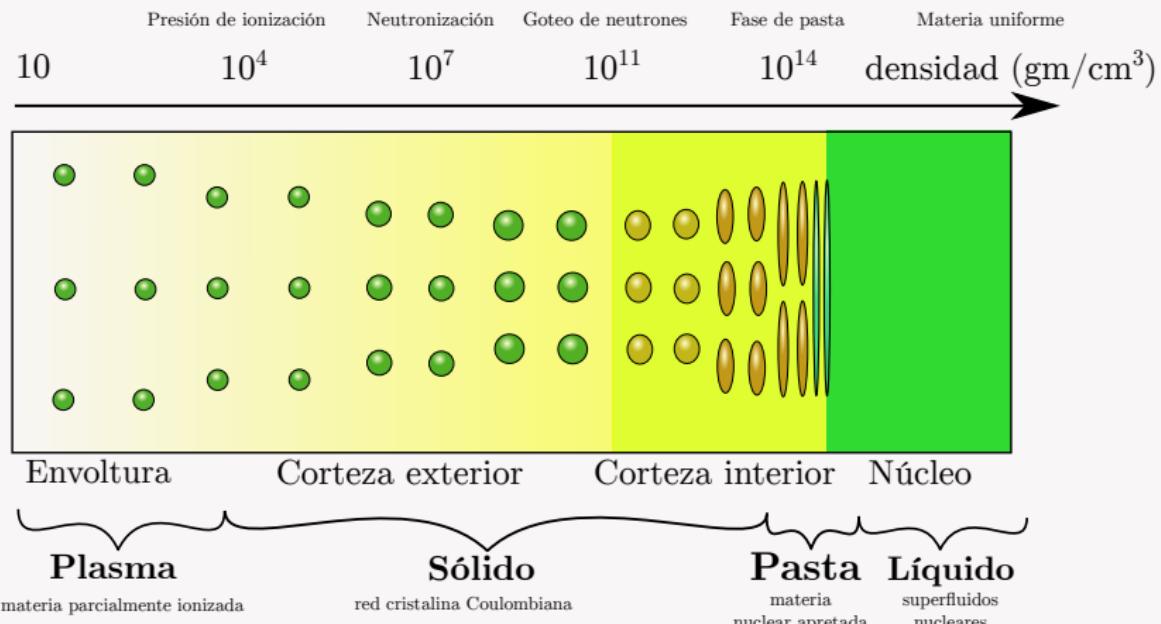
$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)} \quad \longrightarrow \quad \nu(0) = 0$$

Pero... necesitamos una ecuación de estado  $P(\rho)$  .

# Composición de una estrella de neutrones



# Una variedad de fases



# Ecuación de estado

ALF

AP

WFF

SQM

PAL

BBB

NL

BSK

ENG

FPS

GNH

SLy

MPA

MS

NJL

QMC

# Condicionando los posibles modelos

## ■ C1

Las funciones métricas son positivas y deben ser finitas y libres de singularidades en el interior de la estrella.

## ■ C2 Acomplamiento

$$e^{-2\lambda(R)} = e^{2\nu(R)} = 1 - \frac{2M}{R}. \quad (16)$$

## ■ C3 Corrimiento al rojo

$$z(r) \equiv e^{-\nu(r)} - 1, \quad (17)$$

debe disminuir con el incremento de r.

**C4**

La densidad de energía y la presión deben ser positivas dentro de la estrella.

**C5**

La densidad de energía y la presión deben alcanzar un máximo en el centro ( $\rho'(0) = P'(0) = 0$ ) y deben decrecer monótonamente hacia afuera.

**C6**

La solución debe satisfacer la condición de energía dominante (DEC)  $\rho \geq |P|$ .

**C7 Causalidad**

$$v^2 = \frac{dP}{d\rho} \leq 1. \quad (18)$$

**■ C8 Estabilidad ante pulsaciones radiales I**

$$\Gamma = \frac{\rho + P}{P} \frac{dP}{d\rho} \geq \frac{4}{3}. \quad (19)$$

**■ C9 Estabilidad ante cracking**

$$\frac{dP}{dr} \leq 0. \quad (20)$$

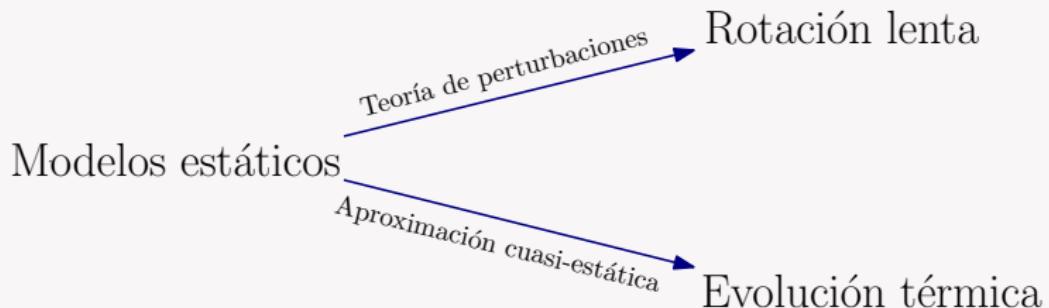
**■ C10 Estabilidad ante pulsaciones radiales II**

$$\frac{\partial M}{\partial \rho_c} > 0. \quad (21)$$

**■ C11 Estabilidad ante movimientos convectivos**

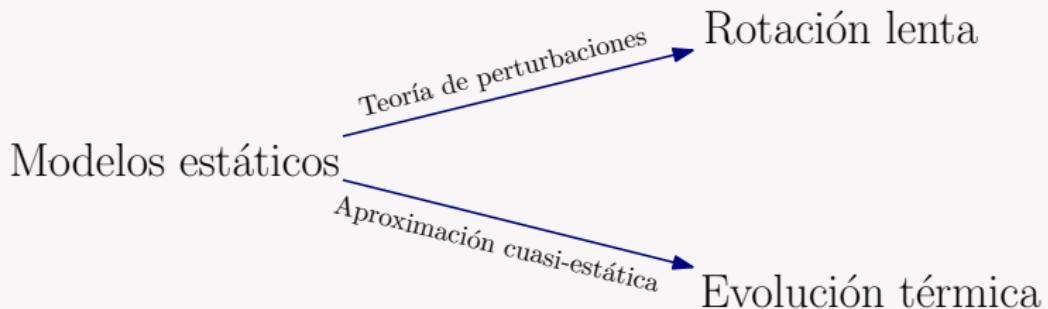
$$\frac{d^2 \rho}{dr^2} \leq 0. \quad (22)$$

# Planteamiento del problema



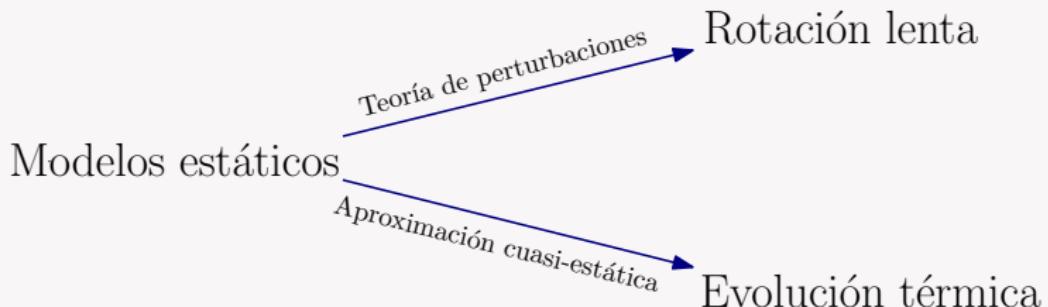
¿Cómo escoger entre la variedad de ecuaciones de estado al construir modelos estáticos? **Condiciones de aceptabilidad**

# Planteamiento del problema



¿Cómo escoger entre la variedad de ecuaciones de estado al construir modelos estáticos? **Condiciones de aceptabilidad**

# Planteamiento del problema



¿Cómo escoger entre la variedad de ecuaciones de estado al construir modelos estáticos? **Condiciones de aceptabilidad**

# Objetivos

## Objetivo general

Determinar si los modelos de estrellas de neutrones obtenidos con las ecuaciones de estado encontradas en la literatura son estables ante convección.

## Objetivos específicos

- 1 Obtener modelos de estrellas de neutrones en equilibrio para las distintas ecuaciones de estado.
- 2 Descartar los modelos que no cumplan las condiciones C1-C10.
- 3 Evaluar a los modelos restantes ante convección adiabática usando el criterio C11.

# Metodología

- 1 Reunir ecuaciones de estado para la materia densa tabuladas de la literatura, necesarias para resolver las ecuaciones de TOV.
- 2 Interpolar las ecuaciones de estado manera óptima, explorando las distintas posibilidades.
- 3 Resolver las ecuaciones de TOV numéricamente usando una ecuación de estado interpolada, para obtener modelos de estrellas de neutrones estáticas. Se usará en lo posible el ecosistema de software de código abierto para cómputo científico (SciPy) de Python.
- 4 Obtener las derivadas  $\frac{dP}{d\rho}$ ,  $\frac{dP}{dr}$ ,  $\frac{d^2P}{dr^2}$ ,  $\frac{d\rho}{dr}$  y  $\frac{d^2\rho}{dr^2}$ , numéricamente. Esto permitirá evaluar la mayoría las condiciones de aceptabilidad física.

- 5 Variar la densidad central  $\rho_c$  en las condiciones iniciales para obtener la familia de configuraciones en equilibrio asociada a la ecuación de estado y graficar las relaciones  $M-R$  y  $M-\rho_c$ . Usado estos diagramas se puede identificar la masa máxima de la familia de soluciones y evaluar la condición C10, respectivamente.

# Bibliografía

# Derivación de la solución exterior de Schwarzschild

# Fluidos Ideales

## Derivación de la solución interior: ecuaciones de TOV

$$G_0^0 = -e^{-2\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi\rho(r), \quad (23)$$

$$G_1^1 = -e^{-2\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{2\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = -8\pi P(r), \quad (24)$$

$$G_2^2 = -e^{-2\lambda} \left( \nu'' + \nu'^2 + \lambda'\nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) = -8\pi P(r), \quad (25)$$

$$G_3^3 = G_2^2 = -8\pi P(r). \quad (26)$$

## Sobre la función de masa

$m(r)$  **NO** es la suma de las energías propias de los elementos de fluido

$$4\pi \int_0^r \rho(r) e^{2\lambda} r^2 dr . \quad (27)$$