

**ESTRUCTURA ESTELAR Y ESTABILIDAD DE  
OBJETOS COMPACTOS CON UNA ECUACIÓN DE  
ESTADO NUMÉRICA**

DAVID LEONARDO RAMOS SALAMANCA

ESCUELA DE FÍSICA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
BUCARAMANGA  
2018

**ESTRUCTURA ESTELAR Y ESTABILIDAD DE  
OBJETOS COMPACTOS CON UNA ECUACIÓN DE  
ESTADO NUMÉRICA**

DAVID LEONARDO RAMOS SALAMANCA

PROPUESTA DE TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

DIRECTOR:  
LUIS A. NÚÑEZ DE VILLAVICENCIO MARTÍNEZ

ESCUELA DE FÍSICA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
BUCARAMANGA

2018

# Resumen

**Título:** Estructura estelar de objetos compactos con una ecuación de estado numérica<sup>1</sup>

**Autor:** David Leonardo Ramos Salamanca<sup>2</sup>

**Palabras clave:** Estructura estelar, estabilidad, ecuación de estado numérica

The abstract should be short, stating what you did and what the most important result is. Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet. Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet.

**Remark:** ¿Es necesario un abstract en la propuesta?

---

<sup>1</sup>Propuesta de trabajo de grado

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias. Escuela de física. Director: Luis A. Núñez de Villavicencio Martínez

# Abstract

**Title:** Stellar structure and stability of compact objects with a numerical equation of state<sup>1</sup>

**Author:** David Leonardo Ramos Salamanca<sup>2</sup>

**Keywords:** Stellar structure, stability, numerical equation of state

The abstract should be short, stating what you did and what the most important result is. Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet. Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet.

---

<sup>1</sup>Bachelor's thesis

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias. Escuela de física. Adviser: Luis A. Núñez de Villavicencio Martínez

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Estructura estelar</b>	<b>2</b>
1.1. Caso newtoniano . . . . .	2
1.2. Caso relativista . . . . .	3
1.3. Condiciones de aceptabilidad física . . . . .	7
<b>2. Composición de estrellas de neutrones</b>	<b>13</b>
2.1. Estructura interna . . . . .	13
2.2. Ecuación de estado . . . . .	15
2.2.1. Modelos de funcionales de densidad de energía . . . . .	16
2.2.2. Modelos de métodos variacionales . . . . .	16
2.2.3. Modelos de teoría de campos relativista . . . . .	16
2.2.4. Modelos de Brueckner-Hartree-Fock . . . . .	16
<b>3. Resultados</b>	<b>17</b>
3.1. Relaciones masa-radio . . . . .	17
<b>Conclusiones</b>	<b>18</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>19</b>
<b>A. Curvatura en un espacio-tiempo estático con simetría esférica</b>	<b>A-1</b>
<b>B. Solución numérica de las ecuaciones de TOV</b>	<b>B-1</b>
<b>C. Derivación numérica de las variables físicas</b>	<b>C-1</b>

# Introducción

# Estructura estelar

**Remark:** The Development of the Theory of Stellar Structure

**Todo:** Breve introducción al capítulo más teórico de la tesis. Por qué es importante el estudio de la estructura estelar en equilibrio tanto en el caso newtoniano como en el relativista. Algo de historia de quienes desarrollaron lo que presento en el caso relativista y las condiciones de aceptabilidad física que se han establecido para discernir entre modelos.

**Todo:** Basado en los comentarios de la propuesta modificar esta sección

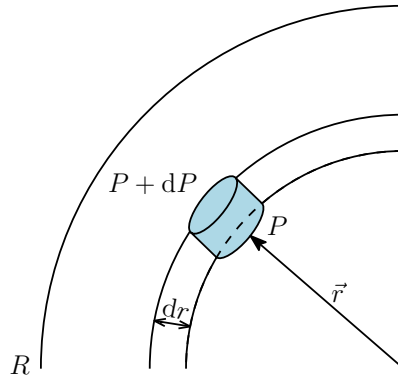
## 1.1. Caso newtoniano

Considerando una distribución de materia con simetría esférica, si  $r$  denota la distancia desde el centro de la configuración, la masa encerrada en una superficie esférica de radio  $r$  será:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr = \int_0^r dm(r) \quad \text{con} \quad dm(r) = 4\pi r^2 \rho dr, \quad (1.1)$$

$$\Rightarrow \frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (1.2)$$

Ahora, se considera un cilindro infinitesimal a una distancia  $r$  del centro, de altura  $dr$  y sección transversal unitaria, normal al vector posición  $\vec{r}$  (ver Figura 1.1).



**Figura 1.1:** Presión sobre un elemento de masa cilíndrico.

Si la presión en  $\vec{r}$  es  $P$  y su cambio al ir de  $\vec{r}$  a  $\vec{r} + d\vec{r}$  es  $dP$ . Suponiendo que el elemento de área es  $dA$  la diferencia de presión representa una fuerza

$$F_{Pelem} = -dP dA,$$

actuando sobre el elemento de masa. Esta fuerza debe contrarrestar la atracción gravitacional sobre el elemento de masa debido a  $m(r)$

$$F_{atracc} = \frac{Gm(r)\rho dA dr}{r^2}.$$

Para que el elemento de masa se encuentre en equilibrio se requiere entonces:

$$-dP dA = \frac{Gm(r)\rho dA dr}{r^2}, \quad (1.3)$$

o

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho. \quad (1.4)$$

que es la conocida ecuación de equilibrio hidrostático.

Las ecuaciones (1.2) y (1.4) son las ecuaciones de estructura estelar newtonianas [1]. Si una relación entre la presión y la densidad  $P(\rho)$  es dada, es decir, una ecuación de estado, el sistema puede resolverse dado un par condiciones iniciales  $m(r=0)$  y  $P(r=0)$ . La primera de estas condiciones es evidente puesto que no hay masa encerrada en un cascarón esférico de radio nulo,  $m(r=0)=0$ . La segunda estará definida por el valor de  $\rho(r=0) \equiv \rho_c$  escogido, mediante la ecuación de estado,  $P(r=0)=P(\rho_c)$ .

El radio de la estrella  $R$  se define como el valor de  $r$  en el que la presión se anula, esto es,  $P(R)=0$  y de manera similar la masa de la estrella  $M$  se define como el valor de la masa encerrada en  $r=R$ , esto es,  $m(R)=M$ .

**Remark:** Decidir si mantener o no

Aunque no se van a tratar en este trabajo, cabe resaltar que las *enanas blancas* son bien descritas por las ecuaciones de estructura newtonianas. Una manera, aunque no la única, de conocer la importancia de las correcciones relativistas es comparando el valor de  $\frac{2GM}{c^2 R}$  con la unidad (la razón será evidente en el resultado relativista) [2]. Las enanas blancas tienen masas en un rango de  $0,33 M_\odot$  a  $1,52 M_\odot$  y radios típicos de unos cuantos miles de kilómetros [3]. Para una enana blanca promedio, con masa  $M = 0,6 M_\odot$  y radio  $r = 3000$  km se tiene

$$\frac{2GM}{c^2 R} \simeq 6 \times 10^{-4} \ll 1, \quad (1.5)$$

por lo cual se espera que el tratamiento newtoniano sea suficiente.

## 1.2. Caso relativista

**Todo:** Basado en los comentarios de la propuesta modificar esta sección. Teniendo en cuenta que los cálculos están hechos en el apéndice.



Para describir la estructura de una estrella estática en Relatividad General se supone un espacio-tiempo estático y con simetría esférica, descrito de manera general por el elemento de línea:

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.6)$$

La curvatura asociada a este elemento de línea (ver Apéndice A), debe satisfacer las ecuaciones de Einstein (en unidades gravitacionales ( $G = c = 1$ ))

$$G_\mu^\nu = 8\pi T_\mu^\nu, \quad (1.7)$$

fijando así las funciones métricas  $\nu$  y  $\lambda$ , en función del contenido material de la estrella descrito por  $T_\mu^\nu$ .

Dividiendo el espacio-tiempo en dos: una región exterior a la estrella y una interior. La *región exterior* está libre de fuentes ( $T_\mu^\nu = 0$ ) y las ecuaciones de Einstein para ésta son

$$G_\mu^\nu = 0. \quad (1.8)$$

Este es un sistema de 3 ecuaciones, pues  $G_2^2 = G_3^3$ , y dos incógnitas. Por lo que una de las ecuaciones es redundante. Restando las dos primeras ecuaciones

$$G_0^0 - G_1^1 = -e^{-2\lambda}(\nu' + \lambda') = 0 \quad (1.9)$$

de donde

$$\nu' + \lambda' = 0 \quad (1.10)$$

$$\int_r^\infty \left( \frac{d\nu}{dr} + \frac{d\lambda}{dr} \right) dr = 0 \quad (1.11)$$

$$\nu \Big|_r^\infty + \lambda \Big|_r^\infty = 0, \quad (1.12)$$

como  $\lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda(r) = 0$

$$\nu = -\lambda \implies e^{2\nu} = e^{-2\lambda}. \quad (1.13)$$

Integrando ahora la primera ecuación

$$G_0^0 = -\frac{1}{r^2} + e^{-2\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) = 0 \quad (1.14)$$

$$e^{-2\lambda} (1 - 2\lambda' r) = 1 \quad (1.15)$$

$$\frac{d(re^{-2\lambda})}{dr} = 1 \quad (1.16)$$

$$re^{-2\lambda} = r - 2M \quad (1.17)$$

$$e^{2\lambda} = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1}, \quad (1.18)$$

donde  $M$  es una constante de integración, y usando (1.13) se obtiene

$$e^{2\nu} = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (1.19)$$

donde  $M$  es una constante de integración interpretada como la masa de la estrella. Esta es la conocida solución exterior de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.20)$$

valida para  $r > R$ , donde  $R$  es el radio de la estrella, que describe la geometría del espacio-tiempo por fuera de una estrella estática.

Para la *región interior* el contenido material debe ser especificado para resolver las ecuaciones de Einstein. Si la materia se modela como un fluido perfecto, el tensor de energía-momento viene dado por

$$T^{\mu\nu} = -Pg^{\mu\nu} + (P + \rho)u^\mu u^\nu, \quad (1.21)$$

con  $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1,$

donde  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$  es la cuadri-velocidad de un elemento del fluido. Este tensor puede ser escrito en términos de los valores Minkowskianos de presión  $P$  y densidad de energía  $\rho$  gracias al Principio de Covariancia (consecuencia del Principio de Equivalencia [2]), que permite escribir el tensor energía-momento en presencia de campos gravitacionales de una manera análoga a como se escribe en relatividad especial en ausencia de gravedad.

Como se considera una estrella estática, la velocidad espacial de todos los elementos del fluido son cero:

$$u^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad u^0 = 1/\sqrt{g_{00}} \quad (1.22)$$

con lo que las únicas componentes no nulas del tensor energía-momento, en componentes mixtas, serán

$$T_0^0 = \rho(r), \quad T_i^i = -P(r) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.23)$$

Teniendo en cuenta la forma del tensor energía-momento, las ecuaciones de Einstein,

$$G_\mu^\nu = 8\pi T_\mu^\nu, \quad (1.24)$$

serán (ver Apéndice A)

$$\begin{aligned}
G_0^0 &= e^{-2\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = -8\pi\rho(r), \\
G_1^1 &= e^{-2\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{2\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi P(r), \\
G_2^2 &= e^{-2\lambda} \left( \nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) = 8\pi P(r), \\
G_3^3 &= G_2^2 = 8\pi P(r).
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Definiendo la masa de Misner como

$$m(r) \equiv 4\pi \int_0^r \rho(r) r^2 dr, \tag{1.26}$$

se puede eliminar las funciones métricas de (1.25), expresándolas en términos de  $P$ ,  $\rho$  y  $m$  para obtener

**Todo:** Realizar esta demostración

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{[P(r) + \rho(r)] [m(r) + 4\pi r^3 P(r)]}{r[r - 2m(r)]}, \tag{1.27}$$

que junto a (1.26), escrita como

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \tag{1.28}$$

son las ecuaciones de estructura estelar relativista y son la reducción de las ecuaciones de Einstein para el interior de una estrella esférica y estática. Este sistema es conocido como las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV).

A pesar de que la masa de Misner (1.26) tiene la misma forma que la masa newtoniana (1.1), (1.26) incluye la energía total (masa bariónica y energía gravitacional) encerrada dentro de la coordenada  $r$ . Por esta razón se refiere a  $M = m(R)$  como la *masa gravitacional* de la estrella ya que no existe una forma unívoca de calcular la masa dada una distribución de energía arbitraria.

Re-escribiendo (1.27) como

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r) \left[ 1 + \frac{P(r)}{c^2 \rho(r)} \right] \left[ 1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r) c^2} \right] \left[ 1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right]^{-1}, \tag{1.29}$$

donde se revirtió el cambio de unidades, se puede reconocer como una versión relativista de la ecuación de equilibrio hidrostático newtoniana (1.4). Las cuales coinciden en el límite cuando

$$c^2 \rho \gg P, \quad mc^2 \gg 4\pi r^3 P \quad \text{y} \quad \frac{2Gm}{c^2 r} \ll 1, \tag{1.30}$$

debido a que  $P$  varia como  $\frac{1}{2}mv^2$ , las dos primeras condiciones se cumplen para velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz y se identifican los dos primeros términos de la ecuación (1.29) como correcciones de relatividad especial.

Así pues, (1.29) expresa el *balance* entre la fuerza neta sobre un elemento de masa debido a la presión de la materia que la rodea y la atracción gravitacional de la materia interior a este. Además, como los tres factores en la ecuación (1.29) son mayores que 1, se tiene que la atracción gravitacional aumenta en relatividad general, a medida de que  $P$  se vuelve comparable con  $\rho$  los gradientes de presión necesarios para sostener la estrella aumentan hasta que el colapso es inevitable.

**Todo:** Refinar argumento.

Las ecuaciones de TOV (1.27) y (1.28), pueden ser resueltas de manera análoga a las ecuaciones de estructura newtonianas. Dada una ecuación de estado  $P(\rho)$  y partiendo de las condiciones iniciales  $m(r=0) = 0$  y  $P(r=0) = P(\rho_c)$ , el sistema se puede integrar hasta que la presión se anule, lo que indica el borde de la estrella y define el radio  $R$  y la masa gravitacional  $m(R) = M$  de la estrella. Los modelos de objetos compactos obtenidos dada cierta ecuación de estado forman una familia parametrizada por la densidad central  $\rho_c$ . Algunas características generales de la ecuación de estado serán descritas en la siguiente sección.

La función métrica  $\nu$  puede ser hallada añadiendo al sistema la ecuación diferencial

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 P(r)}{r[r - 2m(r)]}, \quad (1.31)$$

cuya solución debe coincidir con la solución externa en  $R$ , por lo que se usa la libertad de sumar una constante para realizar el siguiente cambio

$$\nu(r) \longrightarrow \nu(r) - \nu(R) + \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{2M}{R} \right), \quad r \leq R. \quad (1.32)$$

**Todo:** Revisar si en serio no es posible usar esta condición

Sujeta a una condición inicial, generalmente  $\nu(r=0) = 0$ .

### 1.3. Condiciones de aceptabilidad física

Para que los modelos de objetos compactos obtenidos sean de interés astrofísico, las variables físicas y métricas deben cumplir con varias condiciones de regularidad, acoplamiento y estabilidad. Estas condiciones fueron recopiladas recientemente por B. V. Ivanov [4] y extendidas por Nuñez et al. [5], a continuación se presentará una deducción/justificación de estas condiciones.

#### Sobre las funciones métricas

**C1:** Las funciones métricas son positivas y deben ser finitas y libres de singularidades en el interior de la estrella.

**Todo:** ¿Razones físicas de esto?

## Condiciones de acoplamiento

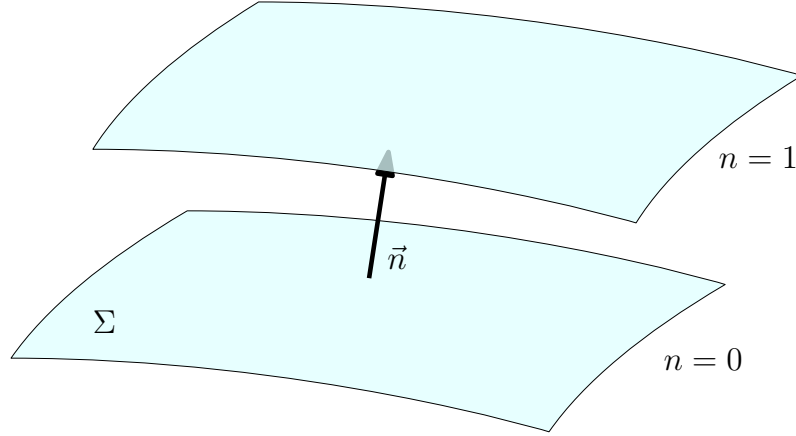
**Todo:** Verificar si de C3 se llega a continuidad de 1ra forma fund.

**Todo:** Cita.

Para acoplar la solución interior y exterior sobre la superficie de la estrella, es necesario imponer condiciones de acoplamiento de modo que el espacio-tiempo este bien definido. La formulación de estas condiciones usadas con mayor frecuencia fueron desarrolladas por Darmois y se basa en consideraciones sobre la curvatura intrínseca y extrínseca de la 3-superficie  $\Sigma$  tipo tiempo que describe la superficie de la estrella.

Si  $\vec{n}$  es el vector (tipo espacio) normal a  $\Sigma$ , se introducen coordenadas Gaussianas donde  $n = cte$  define 3-superficies tipo tiempo vecinas a  $\Sigma$  (ver Figura 1.2). La métrica en estas coordenadas tiene la forma

$$g = (\vec{n} \cdot \vec{n})^{-1} dn \otimes dn + g_{ij} dx^i \otimes dx^j. \quad (1.33)$$



**Figura 1.2:** Coordenadas Gaussianas en el vecindario a  $\Sigma$

Las condiciones de acoplamiento en este "set-up" son:

1. La métrica inducida  $g_{ij}$  es continua a través de  $\Sigma$ .
2. El tensor de energía-momento superficial se anula en la superficie

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-e}^{+\varepsilon} T_{\beta}^{\alpha} dn \right] = 0. \quad (1.34)$$

**C2:** Para el caso considerado en este trabajo  $\Sigma : r = R$ , además la simetría esférica permite identificar  $\vec{n} = \frac{\partial}{\partial r}$  y debido a que la solución externa es de vacío  $T_{\beta}^{\alpha}|_{+\epsilon} = 0$ , bajo estas condiciones las condiciones de acoplamiento se reducen a

1.  $e^{2\nu(R)} = 1 - \frac{2M}{R}$ .
2.  $P(R) = \rho(R) = 0$ .

## Sobre el corrimiento al rojo gravitacional

La luz emitida por una estrella es observada corrida al rojo por un observador lejano debido a la presencia del campo gravitacional. Qué tanto es corrida al rojo puede ser estimado de manera sencilla [3]: considerando un átomo de la estrella a una distancia  $r$  de su centro, que emite un fotones con determinada frecuencia, el intervalo de tiempo propio entre dos emisiones consecutivas está dado por

$$d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}, \quad (1.35)$$

en el marco del átomo esto es simplemente ( $dx^i = 0$ )

$$d\tau_e = \sqrt{-g_{00}(r)}dt. \quad (1.36)$$

Si suponemos que el observador y el átomo yacen sobre la misma línea el intervalo espacio-temporal para la radiación es

$$d\tau^2 = g_{11}(r)dr^2 - g_{00}(r)dt^2 = 0, \quad (1.37)$$

así que el tiempo que tardó un ciclo en viajar de  $r$  a  $\infty$  es

$$\Delta t = t_\infty - t_R = \int_R^\infty \left( \frac{g_{11}(r)}{g_{00}(r)} \right)^{1/2} dr, \quad (1.38)$$

es decir,  $dt$  (tiempo coordenado entre dos emisiones consecutivas) es el mismo para el emisor y el observador lejano. Con lo anterior, el tiempo propio para el observador será

$$d\tau_o = \sqrt{-g_{00}(\infty)}dt. \quad (1.39)$$

Como el inverso del tiempo propio es proporcional a la frecuencia, la razón entre la frecuencia emitida y observada es

$$\frac{\omega_e}{\omega_o} = \left( \frac{g_{00}(\infty)}{g_{00}(r)} \right)^{1/2} = e^{-\nu(r)}, \quad (1.40)$$

y con esto el corrimiento al rojo gravitacional es

$$z(r) \equiv \frac{\omega_e - \omega_o}{\omega_o} = e^{-\nu(r)} - 1. \quad (1.41)$$

**C3:** El corrimiento al rojo descrito por (1.41) debe disminuir con el incremento de  $r$ .

## Sobre el signo de la densidad de energía y la presión

**Todo:** Materia normal?

La densidad de energía y la presión deben ser positivas dentro de la estrella.

## Sobre la densidad de energía y la presión

**C5:** La densidad de energía y la presión deben alcanzar un máximo en el centro ( $\rho'(0) = P'(0) = 0$ ) y deben decrecer monótonamente hacia afuera.

**Todo:** Decrecimiento monótono?

## Condiciones de energía

Con el fin de obtener soluciones a las ecuaciones de Einstein en presencia de fuentes de energía y momento realistas es necesario imponer ciertas condiciones de energía que limiten la arbitrariedad del tensor energía-momentum escogido.

Existe una variedad de condiciones de energía que son usadas en diferentes circunstancias, las usadas con mayor frecuencia son [6, 7]:

- *Condición de energía débil:* el tensor de energía-momentum en cada punto  $p$  de la variedad obedece la desigualdad  $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$  para cualquier vector tipo tiempo  $t^\mu \in T_p$ .
- *Condición de energía dominante:* el tensor de energía-momentum en cada punto  $p$  de la variedad obedece la desigualdad  $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$  y además  $T^{\mu\nu}t_\mu$  es un vector que no es tipo espacio para cualquier vector tipo tiempo  $t^\mu \in T_p$ .
- *Condición de energía fuerte:* el tensor de energía-momentum en cada punto  $p$  de la variedad obedece la desigualdad  $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq \frac{1}{2}T^\lambda_\lambda t^\sigma t_\sigma$ , para cualquier vector tipo tiempo  $t^\mu \in T_p$ .

Mientras que las condiciones débil y fuerte no se cumplen para el tensor energía-momento de algunos campos escalares con  $m = 0$  y  $m \neq 0$  respectivamente [6], la dominante es cumplida por todas las formas de materia conocidas y se requerirá por lo tanto que la materia en las estrellas de neutrones la cumpla.

Escribiendo  $t^\nu$  en una tétrada ortonormal  $e_\mu$  como

$$t^\mu e_\mu = (1 + a^2 + b^2 + c^2)^{1/2} e_0 + a e_1 + b e_2 + c e_3, \quad (1.42)$$

con el tensor de energía-momento de un fluido perfecto que se está considerando (1.21), la condición  $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$  se puede escribir como

$$T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu = (1 + a^2 + b^2 + c^2) \rho + (a^2 + b^2 + c^2) P \geq 0 \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (1.43)$$

para el caso  $a = b = c = 0$  esto implica  $\rho \geq 0$  y en el límite en que  $a^2 + b^2 + c^2 \rightarrow \infty$  que  $\rho + P \geq 0$ .

Además, con  $T^{\mu\nu}t_\mu$  escrito como

$$T^{\mu\nu}t_\mu e_\nu = (1 + a^2 + b^2 + c^2)^{1/2} \rho e_0 + a P e_1 + b P e_2 + c P e_3, \quad (1.44)$$

la condición de que no sea tipo espacio se convierte en

$$-\rho^2 + (P^2 - \rho^2)(a^2 + b^2 + c^2) \leq 0 \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (1.45)$$

lo cual implica que  $\rho \geq |P|$ .

Debido a que en C1 se requirió que  $\rho$  y  $P$  fueran positivas la condición de energía dominante añade la restricción  $\rho \geq P$ .

**C6:** La solución debe satisfacer la condición  $\rho \geq P$ .

## Condición de causalidad

El postulado de causalidad local en relatividad general prohíbe que alguna señal se propague a una velocidad mayor que la velocidad de la luz [6].

**C7:** La velocidad del sonido en la estrella (modelada como un fluido) está dada

por  $\parallel$

**Todo:** Usar una cita de algún libro de hidrodinámica

$$v^2 = \frac{dP}{d\rho}, \quad (1.46)$$

y esta no puede sobrepasar la velocidad de la luz:

$$0 < \frac{dP}{d\rho} \leq 1. \quad (1.47)$$

**Remark:** La presión y densidad son cantidades definidas localmente, así que la velocidad del sonido local debe ser menor a la velocidad de la luz.

## Criterio de estabilidad del índice adiabático

**C8:** El índice adiabático debe satisfacer

$$\Gamma = \frac{\rho + P}{P} \frac{dP}{d\rho} \geq \frac{4}{3}. \quad (1.48)$$

**Remark:**  $\Gamma = 4/3$  para un gas politrópico relativista, pero este valor puede variar a lo largo de la estrella y ser menor. Las condiciones de estabilidad están dadas para el índice adiabático efectivo. Revisar con el profesor.

## Estabilidad ante cracking

El cracking es una posible inestabilidad de esferas autogravitantes ante perturbaciones locales.

**C9:** El criterio para que una distribución sea estable ante cracking presentada por Nuñez et al. [8] es

$$0 \geq \frac{dP}{dr}. \quad (1.49)$$



## Estabilidad ante pulsaciones radiales. Criterio de Harrison-Zeldovich-Novikov

Cuando se considera la estabilidad global de una configuración de energía con simetría esférica, se analiza cómo pulsaciones radiales pueden inducir el cuerpo a colapsar.

**C10:** La estabilidad en este método estará determinada por la frecuencia del modo fundamental de oscilación (ver [9, 10]), sin embargo una condición más práctica para determinar si una configuración con simetría esférica es inestable globalmente es la conocida condición de Harrison-Zeldovich-Novikov, la cual enuncia que para una configuración sea estable respecto a oscilaciones radiales es *necesario* que su masa  $M$  aumente a medida que la densidad central  $\rho_c$  crece:

$$\frac{\partial M(\rho_c)}{\partial \rho_c} > 0. \quad (1.50)$$

Además, los puntos en los que  $\frac{\partial M(\rho_c)}{\partial \rho_c} = 0$  (puntos críticos) son puntos donde la configuración pasa de estabilidad a inestabilidad.

## Estabilidad ante convección adiabática

La estabilidad contra convección se puede entender como sigue: cuando un elemento de fluido es desplazado hacia abajo, si su densidad aumenta más rápido que la densidad que lo rodea, el elemento se hundirá y la configuración será inestable. Por otro lado, si la densidad del elemento de fluido es menor que la de su alrededor, flotará y la estrella será estable contra convección.

**C11:** En el caso en que la perturbación del elemento de fluido es adiabática (pasa en intervalos de tiempo muy pequeños comparados con los del flujo de calor) Nuñez et al. [5] mostraron que para que el modelo estelar fuera estable contra movimientos convectivos, el perfil de densidad  $\rho(r)$  debe cumplir el siguiente criterio:

$$\rho''(r) \leq 0. \quad (1.51)$$

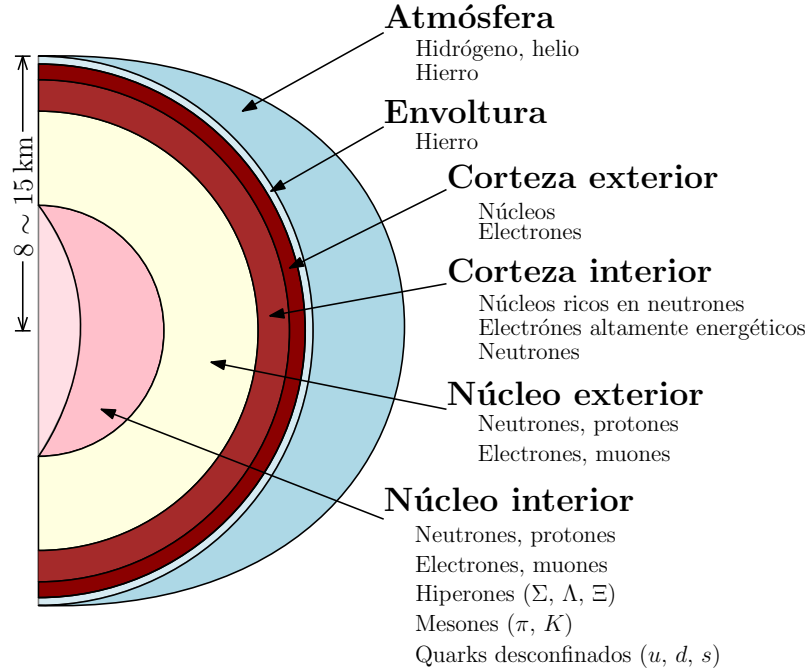
# Composición de estrellas de neutrones

---

## 2.1. Estructura interna

La composición de las estrellas de neutrones, contrario a lo que el nombre sugiere, se presume es muy rica y varía a lo largo de su extensión radial, esta variada composición y las distintas fases que exhiben, están distribuidas en una estructura de cascarones, denominada generalmente una red cristalina de Coulomb (ver Figura 2.1). La superficie de la estrella está rodeada por una *atmósfera* compuesta principalmente de hidrógeno, helio y hierro (aunque se ha encontrado carbono en una [11]) en estado gaseoso o condensado dependiendo de su temperatura superficial y campo magnético [12]. La atmósfera es importante porque es donde se forma el espectro de radiación electromagnética y éste aporta información acerca de su composición, temperatura y campo magnético. Debajo de la atmósfera se encuentra una *envoltura* (de aproximadamente 100 m), a veces llamado océano. Compuesta presuntamente de núcleos alrededor del pico del hierro en un estado condensado, la envoltura influye en el transporte y emisión de energía térmica desde la superficie [13, 14, 15].

La envoltura encierra a cuatro regiones internas: la corteza exterior e interior y el núcleo exterior e interior. La *corteza* es una capa en la que se encuentra materia con densidades sub-nucleares ( $\rho < \rho_0$ ). En la *corteza exterior* los electrones presentes, requeridos para la neutralidad de carga de la estrella, forman un gas de Fermi y ocurre un proceso de neutronización donde los electrones son capturados por protones para crear neutrones. La división con la *corteza interior* se presenta debido a que a una densidad  $\rho_{ND} \simeq 10^{14} \text{ g/cm}^2$  (neutron drip density), los neutrones comienzan a “gotear” del núcleo, por lo que hay presencia de neutrones libres, que pueden llegar a condensarse en un superfluido [16]. En el fondo de la corteza, cuando la densidad se acerca a  $\rho_0$ , se ha predicho la presencia de fases conocidas como “pasta” nuclear, en las que, debido a la compresión, los núcleos se deforman y dejan de ser esféricos (para una revisión de la corteza de las estrellas de neutrones consultar [17] y referencias allí citadas).

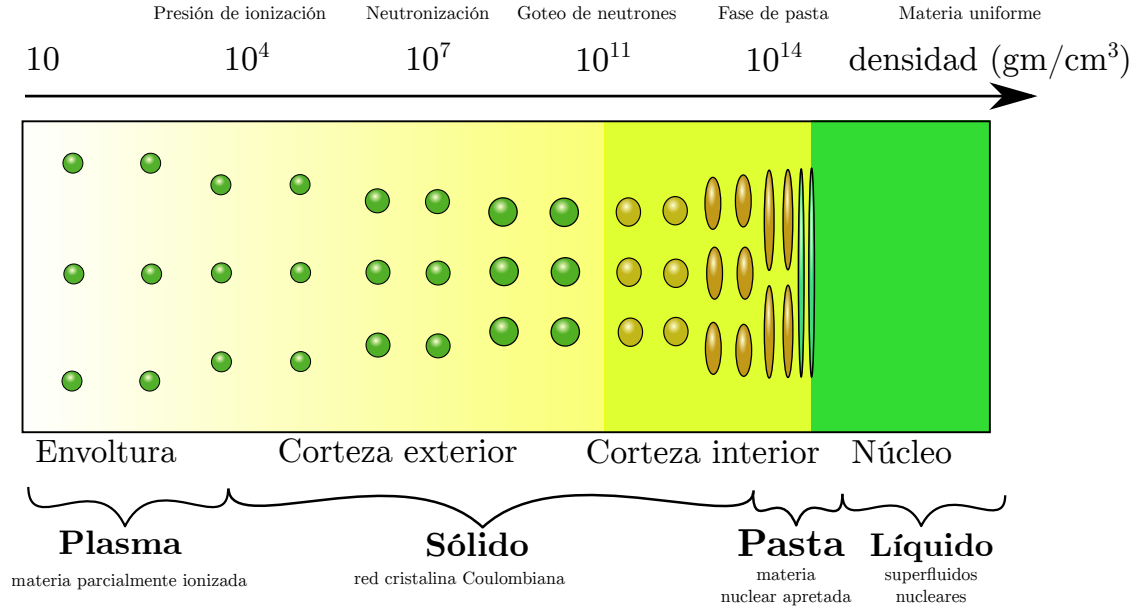


**Figura 2.1:** Composición de una estrella de neutrones.<sup>1</sup>

El *núcleo* comprende regiones en las que la densidad alcanza  $\rho_0$  y contiene la mayor fracción de la masa estelar. Está subdividido en dos: el *núcleo exterior*, con densidad  $0.5\rho_0 \lesssim \rho \lesssim 2\rho_0$  cuya composición se conoce bien cualitativamente [9]: es un superfluido de neutrones y protones, con presencia de electrones y muones altamente degenerados. Del *núcleo interior*, por el contrario, no se conoce su composición. Se ha sugerido la presencia de hiperones, piones, kaones e incluso quarks desconfiados (consultar las revisiones [14, 15] y referencias allí citadas).

La gran variedad de fases que se encuentran a medida de que la densidad aumenta en el interior de las estrellas de neutrones están ilustradas en la Figura 2.2.

<sup>1</sup>Original: Figura 1 de [18]



**Figura 2.2:** Estructura interna de una estrella de neutrones.<sup>1</sup>

## 2.2. Ecuación de estado

Como se mencionó en la Sección 1.2, la ecuación de estado de la materia es necesaria para resolver las ecuaciones de TOV. Ésta se determina predominantemente de la interacción nuclear fuerte entre los constituyentes elementales de la materia y debido a que estas interacciones no son bien entendidas en materia a densidades superiores a la densidad de saturación nuclear  $\rho_0$ , la ecuación de estado de las estrellas de neutrones sigue siendo un misterio.

La mayoría de modelos de ecuaciones de estado se pueden agrupar en tres categorías: modelos basados en un funcional de densidad de energía, modelos basados en el método variacional, modelos de teoría de campos relativista y modelos de Brueckner-Hartree-Fock. A continuación se presentarán algunos detalles de cada uno de estos enfoques.

<sup>1</sup>Original: Figura 4 de [17]

**2.2.1. Modelos de funcionales de densidad de energía**

**2.2.2. Modelos de métodos variacionales**

**2.2.3. Modelos de teoría de campos relativista**

**2.2.4. Modelos de Brueckner-Hartree-Fock**

## CAPÍTULO 3

# Resultados

---

### 3.1. Relaciones masa-radio

# Conclusiones

# Bibliografía

- [1] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. Dover, 1958.
- [2] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, 1972.
- [3] N. Glendenning, *Compact Stars*. Springer-Verlag New York, 2 ed., 2000.
- [4] B. V. Ivanov, “Analytical study of anisotropic compact star models,” 2017, [arXiv: 1708.07971](#).
- [5] H. Hernández, L. A. Núñez, and A. Vásquez-Ramírez, “Convection and cracking stability of spheres in General Relativity,” *The European Physical Journal C*, vol. 78, 8 2018, [arXiv: 1808.10526](#).
- [6] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge: Cambridge University Press, 1973.
- [7] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Pearson, 2003.
- [8] G. A. Gonzalez, A. Navarro, and L. A. Nunez, “Cracking isotropic and anisotropic relativistic spheres,” 10 2014, [arXiv: 1410.7733](#).
- [9] P. Haensel, A. Y. Potekhin, and D. G. Yakovlev, *Neutron Stars 1: Equation of State and Structure*. Springer, 2007.
- [10] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*. WILEY-VCH, 1983.
- [11] W. C. G. Ho and C. O. Heinke, “A Neutron Star with a Carbon Atmosphere in the Cassiopeia A Supernova Remnant,” *Nature*, vol. 462, pp. 71–73, 11 2009, [arXiv: 0911.0672](#).
- [12] V. E. Zavlin and G. G. Pavlov, “Modeling Neutron Star Atmospheres,” *Proceedings of the 270. WE-Heraeus Seminar on Neutron Stars*, p. 263, 6 2002, [arXiv: astro-ph/0206025](#).
- [13] J. Piekarewicz, “The Nuclear Physics of Neutron Stars,” in *AIP Conference Proceedings*, 2013, [arXiv: 1311.7046](#).



- [14] A. Y. Potekhin, “The physics of neutron stars,” *Physics Uspekhi*, vol. 53, no. 12, pp. 1235–1256, 2010, [arXiv: 1102.5735](#).
- [15] J. M. Lattimer and M. Prakash, “The Physics of Neutron Stars,” *Science*, vol. 304, no. 5670, pp. 536–542, 2004, [arXiv: astro-ph/0405262](#).
- [16] M. Baldo, E. Saperstein, and S. Tolokonnikov, “Superfluidity in nuclear and neutron matter,” *Nuclear Physics A*, vol. 749, pp. 42–52, 3 2005.
- [17] N. Chamel and P. Haensel, “Physics of Neutron Star Crusts,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 11, p. 10, 12 2008, [arXiv: 0812.3955](#).
- [18] F. Weber, M. Orsaria, H. Rodrigues, and S. H. Yang, “Structure of quark stars,” *Proceedings of the International Astronomical Union*, vol. 8, no. S291, pp. 61–66, 2012, [arXiv: 1210.1910](#).

**Todo:** Chequear  
que los links estén  
correctos.

## APÉNDICE A

# Curvatura en un espacio-tiempo estático con simetría esférica

---

La métrica de un espacio-tiempo estático con simetría esférica está dada por

$$\mathbf{g} = -e^{2a(r)} dt \otimes dt + e^{2b(r)} dr \otimes dr + r^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi), \quad (\text{A.1})$$

el tensor de curvatura de Riemann correspondiente a esta métrica puede ser calculado de manera simple haciendo uso del cálculo de Cartan.

En el cálculo de Cartan se hace uso del hecho de que es posible escoger como base del espacio cotangente  $T_p^*$  en un punto  $p$  de la variedad, una base  $\omega^\alpha$  diferente a la base coordenada  $dx^\alpha$ . Esta base se escoge de modo tal que la métrica pueda ser escrita como

$$\mathbf{g} = \eta_{\alpha\beta} \omega^\alpha \otimes \omega^\beta, \quad (\text{A.2})$$

donde  $\eta_{\alpha\beta}$  es la métrica de Minkowski. Este tipo de bases se conocen como bases ortonormales y para ellas las 1-formas de conexión  $\Gamma^\alpha_\beta$  cumplen la condición

$$\Gamma_{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Con lo anterior en mente, se define la tétrada de 1-formas base como

$$\omega^0 = e^a dt, \quad \omega^1 = e^b dr, \quad \omega^2 = r d\theta, \quad \omega^3 = r \sin \theta d\varphi. \quad (\text{A.4})$$

**Todo:** Citar a Chandrasekar o Straumann

Usando las ecuaciones de estructura de Cartan para un espacio-tiempo sin torsión

$$d\omega^\alpha = -\Gamma^\alpha_\mu \wedge \omega^\mu, \quad (\text{A.5a})$$

$$\Omega^\alpha_\beta = d\Gamma^\alpha_\beta + \Gamma^\alpha_\mu \wedge \Gamma^\mu_\beta, \quad (\text{A.5b})$$

se pueden obtener las las 2-formas de curvatura  $\Omega^\alpha_\beta$  y a partir de estas, las componentes del tensor de Riemann pues por definición

$$\Omega^\alpha_\beta = \frac{1}{2} R^\alpha_{\beta\mu\nu} \omega^\mu \wedge \omega^\nu. \quad (\text{A.6})$$

Comenzando por el cálculo de las 1-formas de conexión, se hallan las derivadas exteriores de la tétrada (A.4)

$$\begin{aligned}
d\omega^0 &= de^a \wedge dt + e^a \cancel{d(dt)}^0 = a'e^a dr \wedge dt = -a'e^{-b}\omega^0 \wedge \omega^1, \\
d\omega^1 &= de^b \wedge dr + e^b \cancel{d(dr)}^0 = b'e^b dr \wedge dr = 0, \\
d\omega^2 &= dr \wedge d\theta + r \cancel{d(d\theta)}^0 = -\frac{e^{-b}}{r}\omega^2 \wedge \omega^1, \\
d\omega^3 &= d(r \sin \theta) \wedge d\varphi + r \sin \theta \cancel{d(d\varphi)}^0 = \sin \theta dr \wedge d\varphi + r \cos \theta d\theta \wedge d\varphi \\
&= -\frac{e^{-b}}{r}\omega^3 \wedge \omega^1 - \frac{\cot \theta}{r}\omega^3 \wedge \omega^2,
\end{aligned} \tag{A.7}$$

reemplazando en la primera ecuación de estructura (A.5a)

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_0 \wedge \omega^0 + \Gamma^0_1 \wedge \omega^1 + \Gamma^0_2 \wedge \omega^2 + \Gamma^0_3 \wedge \omega^3 &= a'e^{-b}\omega^0 \wedge \omega^1, \\
\Gamma^1_0 \wedge \omega^0 + \Gamma^1_1 \wedge \omega^1 + \Gamma^1_2 \wedge \omega^2 + \Gamma^1_3 \wedge \omega^3 &= 0, \\
\Gamma^2_0 \wedge \omega^0 + \Gamma^2_1 \wedge \omega^1 + \Gamma^2_2 \wedge \omega^2 + \Gamma^2_3 \wedge \omega^3 &= \frac{e^{-b}}{r}\omega^2 \wedge \omega^1, \\
\Gamma^3_0 \wedge \omega^0 + \Gamma^3_1 \wedge \omega^1 + \Gamma^3_2 \wedge \omega^2 + \Gamma^3_3 \wedge \omega^3 &= \frac{e^{-b}}{r}\omega^3 \wedge \omega^1 + \frac{\cot \theta}{r}\omega^3 \wedge \omega^2,
\end{aligned}$$

de donde se pueden identificar las 1-formas de conexión no nulas

$$\Gamma^0_1 = \Gamma^1_0 = a'e^{-b}\omega^0, \tag{A.8a}$$

$$\Gamma^2_1 = -\Gamma^1_2 = \frac{e^{-b}}{r}\omega^2, \tag{A.8b}$$

$$\Gamma^3_1 = -\Gamma^1_3 = \frac{e^{-b}}{r}\omega^3, \tag{A.8c}$$

$$\Gamma^3_2 = -\Gamma^2_3 = \frac{\cot \theta}{r}\omega^3, \tag{A.8d}$$

donde las relaciones entre las 1-formas se siguen de la relación (A.3).

Hallando las derivadas exteriores de (A.8a)–(A.8d)

$$\begin{aligned}
d\Gamma^0_1 &= d(a'e^{-b}) \wedge \omega^0 + a'e^{-b} d\omega^0 \\
&= e^{-b} d(a') \wedge \omega^0 + a' d(e^{-b}) \wedge \omega^0 - a'^2 e^{-2b} \omega^0 \wedge \omega^1 \\
&= a'' e^{-b} dr \wedge \omega^0 - a'b'e^{-b} dr \wedge \omega^0 - a'^2 e^{-2b} \omega^0 \wedge \omega^1 \\
&= e^{-2b}(a'' + a'^2 - a'b')\omega^1 \wedge \omega^0, \\
d\Gamma^2_1 &= d\left(\frac{e^{-b}}{r}\right) \wedge \omega^2 + \frac{e^{-b}}{r} d\omega^2
\end{aligned} \tag{A.9a}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r} de^{-b} \wedge \omega^2 + e^{-b} d\left(\frac{1}{r}\right) \wedge \omega^2 + \frac{e^{-2b}}{r^2} \omega^1 \wedge \omega^2 \\
&= -\frac{b'}{r} e^{-b} dr \wedge \omega^2 - \cancel{\frac{e^{-b}}{r^2} dr \wedge \omega^2} + \cancel{\frac{e^{-2b}}{r^2} \omega^1 \wedge \omega^2} \\
&= -\frac{b'e^{-2b}}{r} \omega^1 \wedge \omega^2,
\end{aligned} \tag{A.9b}$$

$$\begin{aligned}
d\Gamma^2_1 &= d\left(\frac{e^{-b}}{r}\right) \wedge \omega^3 + \frac{e^{-b}}{r} d\omega^3 \\
&= \frac{1}{r} d(e^{-b}) \wedge \omega^3 + e^{-b} d\left(\frac{1}{r}\right) \wedge \omega^3 + \frac{e^{-2b}}{r^2} \omega^1 \wedge \omega^3 + \frac{e^{-b}}{r^2} \cot \theta \omega^2 \wedge \omega^3 \\
&= -\frac{b'e^{-2b}}{r} dr \wedge \omega^3 - \cancel{\frac{e^{-b}}{r^2} dr \wedge \omega^3} + \cancel{\frac{e^{-2b}}{r^2} \omega^1 \wedge \omega^3} + \frac{e^{-b}}{r^2} \cot \theta \omega^2 \wedge \omega^3 \\
&= -\frac{b'e^{-2b}}{r} \omega^1 \wedge \omega^3 + \frac{e^{-b} \cot \theta}{r^2} \omega^2 \wedge \omega^3,
\end{aligned} \tag{A.9c}$$

$$\begin{aligned}
d\Gamma^3_2 &= d\left(\frac{\cot \theta}{r}\right) \wedge \omega^3 + \frac{\cot \theta}{r} d\omega^3 \\
&= \frac{1}{r} d(\cot \theta) + \cot \theta d\left(\frac{1}{r}\right) \wedge \omega^3 \\
&= -\frac{\csc^2 \theta}{r} d\theta \wedge \omega^3 - \cancel{\frac{\cot \theta}{r^2} dr \wedge \omega^3} + \cancel{\frac{\cot \theta e^{-b}}{r^2} \omega^1 \wedge \omega^3} + \frac{\cot^2 \theta}{r^2} \omega^2 \wedge \omega^3 \\
&= \frac{1}{r^2} (\cot^2 \theta - \csc^2 \theta) \omega^2 \wedge \omega^3 \\
&= -\frac{1}{r^2} \omega^2 \wedge \omega^3.
\end{aligned} \tag{A.9d}$$

Reemplazando las 1-formas de conexión y sus derivadas exteriores en la segunda ecuación de estructura (A.5b) se obtienen las 2-formas de curvatura  $\Omega^\alpha_\beta$

$$\begin{aligned}
\Omega^0_1 &= d\Gamma^0_1 + \cancel{\Gamma^0_0} \wedge \Gamma^0_1 + \Gamma^0_1 \wedge \cancel{\Gamma^0_1} + \cancel{\Gamma^0_2} \wedge \Gamma^0_1 + \cancel{\Gamma^0_3} \wedge \Gamma^0_1 \\
&= -e^{-2b}(a'' + a'^2 - a'b')\omega^0 \wedge \omega^1 = \frac{1}{2}R^0_{1\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta,
\end{aligned} \tag{A.10a}$$

$$\begin{aligned}
\Omega^0_2 &= d\Gamma^0_2 + \cancel{\Gamma^0_0} \wedge \Gamma^0_2 + \Gamma^0_1 \wedge \cancel{\Gamma^0_2} + \cancel{\Gamma^0_2} \wedge \Gamma^0_2 + \cancel{\Gamma^0_3} \wedge \Gamma^0_2 \\
&= -\frac{a'e^{-2b}}{r} \omega^0 \wedge \omega^2 = \frac{1}{2}R^0_{2\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta,
\end{aligned} \tag{A.10b}$$

$$\begin{aligned}
\Omega^0_3 &= d\Gamma^0_3 + \cancel{\Gamma^0_0} \wedge \Gamma^0_3 + \Gamma^0_1 \wedge \cancel{\Gamma^0_3} + \cancel{\Gamma^0_2} \wedge \Gamma^0_3 + \cancel{\Gamma^0_3} \wedge \Gamma^0_3 \\
&= -\frac{a'e^{-2b}}{r} \omega^0 \wedge \omega^3 = \frac{1}{2}R^0_{3\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta,
\end{aligned} \tag{A.10c}$$

$$\begin{aligned}
\Omega^1_2 &= d\Gamma^1_2 + \Gamma^1_0 \wedge \cancel{\Gamma^0_2} + \cancel{\Gamma^1_1} \wedge \Gamma^1_2 + \Gamma^1_2 \wedge \cancel{\Gamma^2_2} + \Gamma^1_3 \wedge \Gamma^3_2 \\
&= \frac{e^{-2b}}{r} \omega^1 \wedge \omega^2 - \frac{e^{-b} \cot \theta}{r^2} \cancel{\omega^3 \wedge \omega^3} \\
&= \frac{b'e^{-2b}}{r} \omega^1 \wedge \omega^2 = \frac{1}{2} R^1_{2\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta,
\end{aligned} \tag{A.10d}$$

$$\begin{aligned}
\Omega^1_3 &= d\Gamma^1_3 + \Gamma^1_0 \wedge \cancel{\Gamma^0_3} + \cancel{\Gamma^1_1} \wedge \Gamma^1_3 + \Gamma^1_2 \wedge \Gamma^2_3 + \Gamma^1_3 \wedge \cancel{\Gamma^3_3} \\
&= \frac{b'e^{-2b}}{r} \omega^1 \wedge \omega^3 - \frac{e^{-b} \cot \theta}{r^2} \cancel{\omega^2 \wedge \omega^3} + \frac{e^{-b} \cot \theta}{r^2} \cancel{\omega^2 \wedge \omega^3} \\
&= \frac{b'e^{-2b}}{r} \omega^1 \wedge \omega^3 = \frac{1}{2} R^1_{3\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta,
\end{aligned} \tag{A.10e}$$

$$\begin{aligned}
\Omega^2_3 &= d\Gamma^2_3 + \Gamma^2_0 \wedge \cancel{\Gamma^0_3} + \Gamma^2_1 \wedge \Gamma^1_3 + \cancel{\Gamma^2_2} \wedge \Gamma^2_3 + \Gamma^2_3 \wedge \cancel{\Gamma^3_3} \\
&= \frac{1}{r^2} \omega^2 \wedge \omega^3 - \frac{e^{-2b}}{r^2} \omega^2 \wedge \omega^3 \\
&= \frac{1 - e^{-2b}}{r^2} \omega^2 \wedge \omega^3 = \frac{1}{2} R^2_{3\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta,
\end{aligned} \tag{A.10f}$$

y por inspección se obtienen las componentes independientes del tensor de Riemann

$$\begin{aligned}
R^0_{101} &= -e^{-2b}(a'' + a'^2 - a'b'), \\
R^0_{202} &= -\frac{a'e^{-2b}}{r}, \\
R^0_{303} &= -\frac{a'e^{-2b}}{r}, \\
R^1_{212} &= \frac{b'e^{-2b}}{r}, \\
R^1_{313} &= \frac{b'e^{-2b}}{r}, \\
R^2_{323} &= \frac{1 - e^{-2b}}{r^2}.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Usando la antisimetría en el primer y segundo par de índices

$$\eta_{\mu\alpha} R^\mu_{\beta\gamma\delta} = -\eta_{\mu\beta} R^\mu_{\alpha\gamma\delta} \quad \text{y} \quad R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = R^\alpha_{\beta\delta\gamma}, \tag{A.12}$$

se obtienen las componentes restantes

$$\begin{aligned}
R^0_{101} &= R^1_{001} = -R^0_{110} = -R^1_{010}, & R^1_{212} &= R^2_{121} = -R^1_{221} = -R^2_{112}, \\
R^0_{202} &= R^2_{002} = -R^0_{220} = -R^2_{020}, & R^1_{313} &= R^3_{131} = -R^1_{331} = -R^3_{113}, \\
R^0_{303} &= R^3_{003} = -R^0_{330} = -R^3_{030}, & R^2_{323} &= R^3_{232} = -R^2_{332} = -R^3_{223}.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Contrayendo el tensor de Riemann se halla el tensor de Ricci

$$R_{\alpha\beta} = R^\mu_{\alpha\mu\beta}, \quad (\text{A.14})$$

cuyas componentes serán

$$\begin{aligned} R_{00} &= R^0_{000} + R^1_{010} + R^2_{020} + R^3_{030} \\ &= \frac{2a' - ra'b' + ra'^2 + ra''}{r} e^{-2b} \end{aligned} \quad (\text{A.15a})$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= R^0_{101} + R^1_{111} + R^2_{121} + R^3_{131} \\ &= \frac{2b' + ra'b' - ra'^2 - ra''}{r} e^{-2b} \end{aligned} \quad (\text{A.15b})$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= R^0_{202} + R^1_{212} + R^2_{222} + R^3_{232} \\ &= -\frac{a'e^{-2b}}{r} + \frac{b'e^{-2b}}{r} + \frac{1 - e^{-2b}}{r} \end{aligned} \quad (\text{A.15c})$$

$$\begin{aligned} R_{33} &= R^0_{303} + R^1_{313} + R^2_{323} + R^3_{333} \\ &= -\frac{a'e^{-2b}}{r} + \frac{b'e^{-2b}}{r} + \frac{1 - e^{-2b}}{r}. \end{aligned} \quad (\text{A.15d})$$

y el escalar de curvatura contrayendo el tensor de Ricci

$$\begin{aligned} R &= \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \\ &= \eta^{00} R_{00} + \eta^{11} R_{11} + \eta^{22} R_{22} + \eta^{33} R_{33} \\ &= 2 \left( \frac{b' - a' + ra'b' - ra'^2 - ra''}{r} e^{-2b} + \frac{b' - a'}{r} e^{-2b} + \frac{1 - e^{-2b}}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

El tensor de Einstein, definido como

$$\mathbf{G} = \mathbf{R} - \frac{1}{2} R \mathbf{g}, \quad (\text{A.17})$$

o en componentes mixtas

$$G^\alpha_{\beta} = R^\alpha_{\beta} - \frac{1}{2} R \delta^\alpha_{\beta} = \eta^{\alpha\mu} R_{\mu\beta} - \frac{1}{2} R \delta^\alpha_{\beta}, \quad (\text{A.18})$$

puede ser calculado usando los resultados anteriores

$$\begin{aligned} G^0_0 &= \eta^{00} R_{00} - \frac{1}{2} R \delta^0_0 \\ &= -\frac{2a' - ra'b' + ra'^2 + ra''}{r} e^{-2b} - \frac{b' - a' + ra'b' - ra'^2 + ra''}{r} e^{-2b} \\ &\quad - \frac{b' - a'}{r} e^{-2b} + \frac{1 - e^{-2b}}{r^2} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{r^2} + e^{-2b} \left( \frac{1}{r^2} - 2\frac{b'}{r} \right), \quad (\text{A.19a})$$

$$\begin{aligned} G^1_1 &= \eta^{11} R_{11} - \frac{1}{2} R \delta^1_1 \\ &= \frac{2b' + ra'b' - ra'^2 - ra''}{r} e^{-2b} - \frac{b' - a' + ra'b' - ra'^2 + ra''}{r} e^{-2b} \\ &\quad - \frac{b' - a'}{r} e^{-2b} + \frac{1 - e^{-2b}}{r^2} \\ &= -\frac{1}{r^2} + e^{-2b} \left( \frac{1}{r^2} + 2\frac{a'}{r} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.19b})$$

$$\begin{aligned} G^2_2 &= G^3_3 = \eta^{22} R_{22} - \frac{1}{2} R \delta^2_2 \\ &= -\frac{a'e^{-2b}}{r} + \frac{b'e^{-2b}}{r} + \frac{1 - e^{-2b}}{r} - \frac{b' - a' + ra'b' - ra'^2 + ra''}{r} e^{-2b} \\ &\quad - \frac{b' - a'}{r} e^{-2b} + \frac{1 - e^{-2b}}{r^2} \\ &= e^{-2b} \left( a'' - a'b' + a'^2 + \frac{a' - b'}{r} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.19c})$$

## APÉNDICE B

# Solución numérica de las ecuaciones de TOV

---



APÉNDICE C

# Derivación numérica de las variables físicas

---